Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Alexandre Miranda Alves

O Conjunto de Mandelbrot da Família de Polinômios Complexos $P_c(z) = z^3 + cz^2$

Belo Horizonte
2009

Alexandre Miranda Alves

O Conjunto de Mandelbrot da Família de Polinômios Complexos $P_c(z) = z^3 + cz^2$

Tese apresentada ao corpo docente de Pós Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para obtenção do tíulo de Doutor em Matemática.

Orientador:
Prof. Carlos Augusto Arteaga Mena

Departamento de Matemática
Instituto de Ciências Exatas
Universidade Federal de Minas Gerais
2009

À Deus

Criador dos Céus e da Terra, Eterno em misericórdia e justiça. Sem Ele não existo, somente nEle posso caminhar.

"*Se o Senhor não edificar a casa, em vão trabalham os que a edificam;*
se o Senhor não guardar a cidade, em vão vigia a sentinela."
Sl 127,1

Agradecimentos

Agradeço a Deus, criador e soberano de todo universo, o qual tem me sustentado e guiado, não só neste, mas em todos os momentos de minha vida.

Ao Professor Carlos Augusto Arteaga Mena, meu orientador, pela paciência e profissionalismo, com os quais me orientou do início ao término deste trabalho.

A minha esposa Viviane, pelo companheirismo, apoio e cumplicidade durante toda a nossa vida de casados.

Aos meus filhos Victor e Henrique, pela alegria e esperança que trouxeram sobre minha vida.

Aos meus pais e irmãos, pelo apoio e confiança que em mim depositaram durante todo o tempo. Também aos pais de minha esposa, que também incentivaram e confiaram no êxito deste trabalho. Não posso esquecer também de alguns amigos, como Jedaias, Sízinea e Pr. Giovan.

Aos meus colegas e amigos do curso, agradeço o apoio e a paciência, que em muitos momentos foram de grande importância. Em especial, ao Leandro, que sempre foi um grande incentivador e um bom amigo.

Também aos vários professores do Departamento de Matemática da UFMG, como Fernando, Carrião e Sarmiento dentre outros, que prestaram seu apoio e confiança.

Aos funcionários da secretaria, que sempre foram atentos e prestativos durante todo o curso.

Ao Departamento de Matemática da UFV, que dentro do possível colaborou com minhas atividades no departamento, no intuito de propiciar maior tempo de dedicação ao meu doutorado.

A CAPES e ao CNPq pelo apoio financeiro, no período de março de 2004 a julho de 2006.

Obrigado a todos!

Resumo

O objetivo deste trabalho é estudar o comportamento dinâmico da família de polinômios complexos $P_c(z) = z^3 + cz^2$ em relação a variação do parâmetro complexo c.

A compreensão do comportamento dinâmico da família P_c depende da compreensão dos Conjuntos de Julia e Fatou associados a cada polinômio de P_c, os quais denotamos por J_c e F_c, e também do Conjunto de Mandelbrot, o qual habita no espaço de parâmetros $\mathbb{C}$ e denotamos por $M_{3,2}$.

Neste trabalho nós caracterizamos dinamicamente e também damos uma descrição topológica do Conjunto de Mandelbrot $M_{3,2}$.

Nós fornecemos uma descrição para as componentes conexas hiperbólicas do interior de $M_{3,2}$, além disso conseguimos uma caracterização para algumas delas. Mostramos também que a componente que contém o parâmetro $c = 0$, a qual denotamos por C_0 e chamamos de Componente Principal, tem a propriedade de J_c ser um quasecírculo para todo $c \in C_0$.

No caso em que c pertence ao complementar de $M_{3,2}$, nós damos uma descrição da dinâmica de P_c, como segue: o Conjunto de Fatou é constituído da bacia atratora do infinito, que é conexa, e da bacia atratora do zero, que neste caso possui infinitas componentes conexas, que são a bacia imediata do zero e suas pré-imagens por P_c. O Conjunto de Julia é particionado em dois conjuntos, sendo um constituído por uma quantidade enumerável de componentes de J_c, que são o bordo da bacia atratora, que neste caso é uma curva de Jordan, e todas as pré-imagens dessa curva por P_c, e também o seu complementar, o qual denotamos por L, que é constituido por uma quantidade não enumerável de componentes de um único elemento de J_c. Além disso, mostramos que P_c restrito a L é conjugado a uma restrição do Shift de três símbolos.

Palavras-chave: Conjunto de Mandelbrot, Conjunto de Julia, Conjunto de Fatou, Dinâmica Polinomial, Localmente Conexo.

Abstract

The aim of this work is to study the dynamic behavior of the family of complex polynomials $P_c(z) = z^3 + cz^2$ under the variation of the complex parameter c.

The comprehension of the dynamic behavior of the family P_c depends on the understanding of Fatou and Julia sets associated to each polynomial P_c, and of the Mandelbrot Set which inhabits the space of parameters, which we denoted by F_c, J_c and $M_{3,2}$.

In this work, we characterize dynamically and also give a topological description of the Mandelbrot set.

We provide a description to the hyperbolic components of the interior of $M_{3,2}$, moreover we obtain a characterization for some them. Furthermore , we show that the component containing the parameter $c = 0$, which we denoted by C_0 and call Principal Component, has the property of its J_c is a quasecirculo for all c in C_0.

In the case of c is in the complement of $M_{3,2}$ we gave a description of dynamics of P_c, as follows: the Fatou set consists of the basin attractors of the infinite, which is connected, and the basin attractors of zero, which in this case has infinite connected components, these are the immediate basin of zero and its preimages of P_c. The Julia set is partitioned into two sets, one consisting of an enumerate quantity of components J_c, which is the boundary of the basin attractors and in this case is a Jordan curve, and all preimage of this curve by P_c, and his complement, which denoted by L, composed by a non enumerable quantity of components single points of J_c. Furthermore, we show that P_c restricted to L is conjugated to a restriction of the shift of three symbols.

Keywords: Mandelbrot Set, Julia Set, Fatou Set, Polynomial Dynamics, Local Connectivity.

Sumário

Agradecimentos **xi**

Resumo **xiii**

Abstract **xv**

Introdução **1**

1 Preliminares **7**
- 1.1 Definições e Notações 7
- 1.2 Pontos Críticos e Hiperbolicidade 9
- 1.3 Classificação de Componentes Periódicas 11

2 Família $P_c(z) = z^3 + cz^2$ **13**
- 2.1 Introdução 13
- 2.2 O Complementar do Conjunto de Mandelbrot $M_{3,2}$ 13
  - 2.2.1 Definições e o Teorema de Böttcher 14
  - 2.2.2 Descrição de J_c e F_c 15
  - 2.2.3 Prova do Teorema A 19
- 2.3 O Conjunto de Mandelbrot $M_{3,2}$ 23
  - 2.3.1 Prova do Teorema B 24

3 Componentes Hiperbólicas da Família P_c **39**
- 3.1 Introdução 39
- 3.2 Estabilidade do conjunto de Julia 39
- 3.3 Teorema C 40
- 3.4 Teorema D 44
- 3.5 Teorema E 47
- 3.6 Teorema F 50
- 3.7 Outros resultados 55

4 Familia $P_c(z) = z^n + cz^k$ **59**
- 4.1 O Conjunto de Mandelbrot $M_{n,k}$ 59
- 4.2 Definições e Propriedades de $M_{n,k}$ 60

4.3 Prova do Teorema G 64

Considerações Finais **67**

A Apêndice **69**
A.1 Alguns Resultados de Análise Complexa 69

Referências Bibliográficas **69**

Introdução

No estudo da dinâmica da família de polinômios complexos quadráticos, a saber $P_c(z) = z^2 + c$, com o parâmetro $c \in \mathbb{C}$, uma peça fundamental é a seguinte dicotomia válida para o ponto crítico $z = 0$ de P_c:

(a) Se a órbita do ponto crítico é limitada então o conjunto de Julia J_{P_c} é conexo.

(b) Por outro lado, se a órbita do ponto crítico converge para ∞, então o conjunto de Julia J_{P_c} é totalmente desconexo, e nesse caso J_{P_c} é conjugado a um shift do tipo finito.

O conjunto de parâmetros c que satisfazem (a), é chamado de conjunto de Mandelbrot e denotado por M. A dinâmica da família quadrática P_c, para $c \in M$, assim como a estrutura topológica de M, especialmente o fractal dado pelo bordo de M, tem sido objeto de estudo de muitos matemáticos, como Mandelbrot, Douady, Hubbard dentre outros, que estabeleceram várias de suas propriedades fundamentais como: o conjunto de Mandelbrot é compacto, conexo, está contido no disco fechado de raio 2 e centrado na origem, e a interseção de M com o eixo real é exatamente o intervalo $[-2, \frac{1}{4}]$. O bordo de M é constituído pelos parâmetros de bifurcação da família P_c, isto é, o conjunto de parâmetros c, para os quais a dinâmica da família quadrática, muda de forma abrupta por pequenas pertubações do parâmetro c, como pode ser visto em [4] e [14].

Para polinômios complexos de grau $d \geq 3$, a dicotomia acima não é válida em geral e nesse caso é díficil o estudo do espaço de parâmetros c, para os quais o conjunto de Julia desses polinômios é conexo.

O estudo da dinâmica e do espaço de parâmetros dos polinômios cubicos é um assunto de grande interesse que vem sendo estudado desde o final da década de 80 quando apareceu o trabalho de Branner e Hubbard, veja em [1] e [2], onde eles descrevem a topologia do conjunto dos parâmetros associados a polinômios onde pelo menos um dos pontos críticos escapam para o infinito. Neste trabalho nós nos restringimos principalmente, ao estudo da seguinte família de polinômios complexos a um parâmetro complexo,

$$P_c(z) = z^3 + cz^2$$

que denotaremos simplesmente por P_c. Para todo parâmetro $c \in \mathbb{C}$, P_c possui dois pontos críticos finitos, $z = 0$ e $z_c = \frac{-2c}{3}$, onde $z = 0$ é também um ponto fixo superatrator de P_c, portanto o conjunto de Julia J_{P_c} associado a P_c não é totalmente desconexo para nenhum parâmetro c. Assim, para cada $c \in \mathbb{C}$, P_c possui somente um ponto crítico livre, e como no caso da família quadrática, o comportamento dinâmico do ponto crítico z_c particiona o espaço de parâmetros em dois conjuntos disjuntos: um deles, que denotaremos por $M_{3,2}$, contém os parâmetros c para os quais a órbita positiva de z_c por P_c é limitada e neste caso o conjunto de Julia J_{P_c} é conexo. Chamaremos o conjunto $M_{3,2}$, associado a família P_c, de *Conjunto de Mandelbrot*. Evidentemente, o complementar de $M_{3,2}$ contém os parâmetros c para os quais o conjunto de Julia associado a P_c não é conexo. Neste trabalho nós damos uma descrição completa da dinâmica de P_c quando o ponto crítico livre escapa para o infinito e tratamos também o caso onde o ponto crítico livre tem órbita limitada.

Para os parâmetros pertencentes ao complementar do Conjunto de Mandelbrot, nós obtemos o seguinte resultado, que permite dar uma descrição da dinâmica de P_c. Necessitamos das seguintes notações que serão usadas no teorema abaixo. Se $c \in \mathbb{C} \setminus M_{3,2}$ e $\partial A_0(0, P_c)$ é o bordo da bacia imediata de $z = 0$, definimos $L = J_c \setminus K$, onde

$$K = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_c^{-n}(\partial A_0(0, P_c))$$

Teorema A. *Seja $P_c : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ definida por, $P_c(z) = z^3 + cz^2$, e suponha que a órbita do ponto crítico finito e não-nulo se acumula em ∞. Então P_c restrito a L é conjugado a uma restrição do shift unilateral de três símbolos.*

Observe que neste caso, o conjunto de Julia é a união de dois conjuntos, um que possui uma quantidade enumerável de componentes conexas, que são o bordo da bacia imediata do superatrator $z = 0$ e suas pré-imagens, e outro conjunto totalmente desconexo e não enumerável. O conjunto de Fatou neste caso, é constituído pela bacia atratora do ∞, que é conexa, e da bacia atratora de $z = 0$, que possui infinitas componentes conexas.

Quanto aos parâmetros pertencentes ao conjunto de Mandelbrot $M_{3,2}$, mostra-
remos que a dinâmica de P_c pode variar muito quando variamos o parâmetro c, mas antes de entrar neste assunto, trataremos de aspectos topológicos de $M_{3,2}$. O próximo resultado obtido, que enunciamos logo abaixo, fornece uma descrição topológica de $M_{3,2}$.

Teorema B. *O conjunto de Mandelbrot $M_{3,2}$, é um subconjunto fechado e simplesmente conexo de $\mathbb{C}$, simétrico em relação ao eixo real e à origem, contido no disco aberto $D(0, 3)$ e contendo o disco fechado $\overline{\mathbb{D}}(0, \frac{3}{2})$. Mais precisamente, o conjunto de Mandelbrot $M_{3,2}$ consiste de todos os pontos $c \in \mathbb{C}$, tais* *que,* $|P_c^n(z_c)| \leq 4$ *para todo* $n \geq 1$. *Além disso, a intersecção de* $M_{3,2}$ *com o eixo real é o intervalo* $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ *e com o eixo imaginário é* $[-c_0 I, c_0 I]$, *onde* $c_0 = \frac{1}{2}(27 + 3\sqrt{57})^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{(27+3\sqrt{57})^{\frac{1}{3}}}$.

Um polinômio P é chamado hiperbólico, se a órbita de cada ponto crítico de P converge a um ponto periódico atrator. Para a família $\{P_c\}$, temos que P_c é hiperbólico se $c \in \mathbb{C} \setminus M_{3,2}$, ou se P_c possui um ponto periódico atrator finito e não nulo, ou se a órbita do ponto crítico z_c converge para $z = 0$. Denotaremos por $\mathcal{H}$ o subconjunto de $M_{3,2}$ constituído pelos parâmetros c, para os quais P_c é hiperbólico. $\mathcal{H}$ é um subconjunto aberto do interior de $M_{3,2}$ e não vazio, pois $P_c(z) = z^3$ é hiperbólico e assim $0 \in \mathcal{H}$. No próximo resultado, que enunciamos a seguir, nós descrevemos a componente conexa hiperbólica que contém o parâmetro $c = 0$, a qual chamamos de *componente principal* do interior de $M_{3,2}$.

Teorema C. *Seja* C_0 *a componente conexa do interior de* $M_{3,2}$ *que contém o parâmetro* $c = 0$, *então:*

(a) $c \in C_0$ *se e somente se o ponto crítico* z_c *de* P_c *pertence a bacia imediata de* $z = 0$. *Em particular* $C_0 \subset \mathcal{H}$.

(b) C_0 *contém o disco aberto* $D(0, \frac{3}{2})$, *além disso, a interseção de* C_0 *com o eixo real é o intervalo* $(\frac{-3}{2}, \frac{3}{2})$ *e com o eixo imaginário é o intervalo* $(-2I, 2I)$.

(c) Se $c \in \mathbb{C}$ *e* $P_c(z_c)$ *pertence a bacia imediata de* $z = 0$, *então também* z_c *pertence a bacia imediata de* $z = 0$ *e assim* $c \in C_0$.

(d) Se $c \in C_0$ *então o conjunto de Julia associado a* P_c *é um quasecírculo, que particiona o conjunto de Fatou em duas componentes conexas.*

Pelo Teorema C, a dinâmica de P_c para $c \in C_0$ fica bem entendida. O conjunto de Julia J_{P_c} é um quasecírculo que divide $\overline{\mathbb{C}}$ em duas componentes. A componente limitada é a bacia de atração do zero e a outra componente é a bacia de atração do ∞. Além disso, P_c restrito a bacia de atração do ∞ é conformalmente conjugada com um Produto de Blaschke, vide [14] pag. 96 e 163. Pelo Teorema de Carathéodory, ver Teoremas A.1.4 e A.1.5 no apêndice A, essa conjugação extende-se homeomorficamente para J_{P_c}, que neste caso é o bordo desta bacia.

Os parâmetros $\frac{-3}{2}$ e $\frac{3}{2}$, pertencentes ao bordo de C_0 e portanto a $M_{3,2}$, são bifurcações em $M_{3,2}$. Para $c = \frac{3}{2}$ temos que $z_c = -1$ e $P_c^2(-1) = P_c(\frac{1}{2}) = \frac{1}{2}$, onde $P_c'(\frac{1}{2}) > 1$, seguindo daí que $z = \frac{1}{2}$ é um ponto periódico repulsor, portanto o crítico $z_c = -1$ pertence ao conjunto de Julia associado a $P_{\frac{3}{2}}$, de modo que $P_{\frac{3}{2}}$ não é hiperbólico. O mesmo vale para o parâmetro $c = \frac{-3}{2}$.

Para alguns parâmetros $c \in M_{3,2}$, temos que P_c possui um ponto fixo atrator finito e não nulo. Como veremos no teorema abaixo, o interior de $M_{3,2}$ possui duas componentes associadas a parâmetros que satisfazem esta característica.

Teorema D. *Seja $c \in M_{3,2}$ tal que P_c possui um ponto fixo atrator finito $z(c) \neq 0$, e seja C a componente conexa do interior de $M_{3,2}$ contendo c. Então, ou C é a imagem do disco $D(0,1)$ pela função $c_1(\lambda) = \frac{3-\lambda}{\sqrt{\lambda-2}}$, ou é a imagem de $D(0,1)$ pela função $c_2(\lambda) = \frac{\lambda-3}{\sqrt{\lambda-2}}$. Além disso, para todo $\lambda \in D(0,1)$, $P_{c_i(\lambda)}$ possui um ponto fixo atrator finito e não nulo $z(c_i(\lambda))$ satisfazendo $P'_{c_i(\lambda)}(z(c_i(\lambda))) = \lambda$, para $i = 1, 2$.*

Cada uma das aplicações c_i do Teorema D acima, aplica analiticamente o disco fechado $\overline{D}(0,1)$ sobre o fecho de uma componente conexa C, pertencente ao interior de $M_{3,2}$. Existem assim todos os tipos de pontos fixos neutros, racionais e irracionais, associados aos parâmetros $c \in \partial C$, isto é, parâmetros associados a discos de Siegel, pontos de Cremer e Parabólicos, pois para cada $\lambda \in \partial D(0,1)$ existe $c \in \partial C$, tal que, P_c possui um ponto fixo neutro z com multiplicador λ. Se $C_i = c_i(D(0,1))$, veremos que C_1 e C_2 são componentes simétricas em relação à origem e que não tocam o eixo real. Os parâmetros $-2I$ e $2I$ são bifurcações em $M_{3,2}$, pertencentes a ∂C_1 e a ∂C_2. Quando $c = 2I$ temos que $-I$ é um ponto fixo parabólico de P_c com multiplicador $\lambda = 1$, e para $c = -2I$ temos que I é um ponto fixo parabólico com multiplicador $\lambda = 1$. Esses parâmetros também estão no bordo da componente principal C_0, e além disso, $\overline{C_0} \cap \overline{C_1} = \{2I\}$ e $\overline{C_0} \cap \overline{C_2} = \{-2I\}$

Consideraremos agora o caso geral das componentes hiperbólicas associadas a pontos periódicos atratores. Se z_1 é um ponto periódico de período r de P_c, então o r-*ciclo* associado a z_1 é o conjunto $\{z_1, \cdots, z_r\}$, onde $z_j = P_c(z_{j-1})$, isto é, a órbita de z_1 por P_c. Usando técnicas do caso quadrático obtemos o seguinte resultado.

Teorema E. *Seja $c_1 \in \mathbb{C}$, tal que, P_{c_1} possui um ponto periódico atrator não nulo $z(c_1)$, cujo período é r. Então existe uma componente conexa W, no interior de $M_{3,2}$, contendo c_1 e satisfazendo:*

(a) Para todo $c \in W$, P_c possui um ponto periódico atrator finito e não nulo, de período r, onde cada elemento do r-ciclo de $z(c)$ depende analiticamente de c. Segue que $W \subset \mathcal{H}$.

(b) W é aplicada analiticamente sobre o disco aberto $D(0,1)$. Em particular, W possui um parâmetro c, tal que, o ponto periódico atrator não nulo de P_c é superatrator.

Descrevemos também neste trabalho, as componentes do interior de $M_{3,2}$ associadas aos parâmetros c, cuja a órbita do ponto crítico z_c por P_c converge para $z = 0$, mas z_c não pertence a bacia imediata de $z = 0$. Esse tipo de componente não aparece no caso quadrático, porém com uma adaptação das técnicas usadas naquele caso, obtemos o seguinte resultado.

Teorema F. *Seja* $c_1 \in \mathbb{C}$ *tal que* $P_{c_1}^m(z_{c_1}) \in A_0(0, P_{c_1})$*, mas* $P_{c_1}^{m-1}(z_{c_1}) \notin A_0(0, P_{c_1})$*. Então existe uma componente* W *no interior de* $M_{3,2}$*, contendo* c_1 *e satisfazendo:*

(a) Para todo $c \in W$*,* $P_c^m(z_c) \in A_0(0, P_c)$*, mas* $P_c^{m-1}(z_c) \notin A_0(0, P_c)$*. Segue que* $W \subset \mathcal{H}$*.*

(b) Existe um parâmetro $c \in W$ *tal que* $P_c^m(z_c) = 0$ *e* $P_{c_1}^{m-1}(z_c) \neq 0$*.*

Finalizamos este trabalho com uma caracterização do conjunto de Mandelbrot da família

$$P_c(z) = z^n + cz^k$$

onde $n > k \geq 2$, isto é, fixados n e k, de acordo com a desigualdade acima, obtemos uma caracterização para o conjunto de Mandelbrot associado a família correspondente, como segue abaixo:

Teorema G. *Para cada par* n *e* k*, o conjunto* $M_{n,k}$ *é não vazio e mais, existe um número real* $1 < \delta \leq 2$ *tal que*

$$M_{n,k} = \left\{c \in \mathbb{C};\ |P_c^m(z_c)| \leq 2 + \delta^2 \quad \forall\ m \in \mathbb{N}\right\}$$

onde z_c *é um ponto crítico finito e não nulo associado a* P_c*. Além disso,* $M_{n,k}$ *está contido no disco aberto de raio* $1 + \delta^2$ *centrado na origem.*

Capítulo 1

Preliminares

Por todo este trabalho, trataremos do comportamento dinâmico de algumas famílias de polinômios complexos a um parâmetro, definidas na esfera de Riemann, a qual denotamos por $\overline{\mathbb{C}}$. O caminho para o entendimento do comportamento dinâmico de uma família de funções racionais, que incluem os polinômios, é o estudo dos conjuntos de Julia, Fatou e Mandelbrot.

1.1 Definições e Notações

Nesta seção nós introduzimos notações que serão usadas ao longo do texto e lembramos algumas propriedades básicas a respeito dos conjuntos de Julia, Fatou e Mandelbrot. Para mais detalhes e provas sugerimos as seguintes referências, [1], [4] e [14].

Por todo esse trabalho nós trataremos com polinômios definidos na esfera de Riemann, $P : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$, de grau d maior ou igual a dois. Para alguns teoremas clássicos que enuciamos neste capítulo, consideraremos funções racionais no lugar de polinômios. Denotamos por $P^n(z) = P^{n-1}(P(z))$ a n-ésima iterada de um ponto z por P. Um ponto z será chamado *ponto periódico* de período r se $P^r(z) = z$ mas $P^k(z) \neq z$ para $1 \leq k \leq r-1$.

Dado um polinômio P, dizemos que a órbita de um número z escapa para o infinito por P, ou simplesmente que z escapa para o infinito, se $P^n(z) \to \infty$ quando $n \to \infty$. Como pode ser visto em [8], dado um polinômio P, existe um número $R > 0$, tal que, se $|z| \geq R$ então z escapa para o infinito. Um tal número R é chamado de um *raio de escape*. Para $P(z) = a_l z^l + a_{l-1} z^{l-1} + \cdots + a_1 z + a_0$, o número

$$R = \frac{1 + |a_l| + |a_{l-1}| + \cdots + |a_0|}{|a_l|}$$

é um raio de escape para P.

Uma sequência $\{f_n\}$ de funções racionais, definidas em um domínio (um subconjunto aberto e conexo de $\overline{\mathbb{C}}$) $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, e com imagem em $\overline{\mathbb{C}}$, *converge* *localmente uniformemente* sobre D para uma função f, se cada ponto z pertencente a D possui uma vizinhança sobre a qual f_n converge uniformemente para f. Nestas circunstâncias, a convergência é uniforme sobre cada subconjunto compacto de D. Uma família $\mathcal{F}$ de funções racionais definidas em um domínio $D \subset \overline{\mathbb{C}}$, é dita ser uma *família normal*, se toda sequência $\{f_n\} \subset F$ contém uma subsequência que converge localmente uniformemente na métrica esférica sobre D.

A família de iteradas de P constituem um sistema dinâmico que particiona a esfera de Riemann em dois conjuntos: O conjunto de *Fatou*, que denotaremos por F_P e que também é chamado de *Conjunto Estável*, é o conjunto de pontos $z \in \overline{\mathbb{C}}$, tais que, para alguma vizinhança W de z em $\overline{\mathbb{C}}$, a família de iteradas $P^n|_W$ formam uma família normal. O outro conjunto, que é o complementar de F_P, é o Conjunto de *Julia*, que também é chamado de *Conjunto Instável* e que donotaremos por J_P. O conjunto de Fatou F_P é aberto e não vazio, já que para todo polinômio P temos que $F_P \ni \infty$, de outro lado J_P é fechado e portanto compacto.

Seja z_0 um ponto periódico de P. O número

$$\lambda = (P^n)'(z_0) = P'(z_0)P'(z_1)\cdots P'(z_{n-1})$$

onde $z_j = P^j(z_0)$, é chamado de *multiplicador* de P em z_0. Em relação ao valor absoluto de λ, temos que z_0 é classificado da seguinte forma:

1. *Atrator*: para $0 < |\lambda| < 1$.
2. *Superatrator*: para $|\lambda| = 0$.
3. *Racionalmente neutro*: para $|\lambda| = 1$ e com $\lambda^n = 1$ para algum inteiro positivo n.
4. *Irracionalmente neutro*: para $|\lambda| = 1$ mas $\lambda^n \neq 1$ para qualquer inteiro positivo n.
5. *Repulsor*: para $|\lambda| > 1$.

Quando o ponto periódico z_0 é racionalmente neutro com período n e P^n não é a identidade, dizemos que z_0 é um ponto periódico *parabólico* de P.

Suponha que z_0 seja um ponto periódico de período k, então o *k-ciclo* associado a z_0 é o conjunto $\{z_0, z_1, \cdots, z_{k-1}\}$, onde $z_j = P_c(z_{j-1})$, isto é, é a órbita de z_0 por P_c. Por simplicidade denotaremos por z_0 esse k-ciclo. Se z_0 é atrator ou superatrator, definimos a *bacia de atração* de z_0 como o conjunto

$$A(z_0, P) = \{z \in \mathbb{C};\ P^n(z) \to z_0,\ \text{quando } n \to \infty\}$$

onde deve ficar claro que, $P^n(z)$ converge para o k-ciclo z_0. Observe que, para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno, temos que o disco aberto $D(z_0, \varepsilon) \subset A(z_0, P)$ e mais,

$$A(z_0, P) = \bigcup_{n=1}^{\infty} P^{-n}(D(z_0, \varepsilon))$$

de onde obtemos que $A(z_0, P)$ é aberto. Por todo o trabalho, denotaremos por $D(z, r)$ e $\overline{D}(z, r)$ os discos de centro em z e raio r, aberto e fechado respectivamente. Definimos a *bacia imediata de atração* de z_0, que denotamos por $A_0(z_0, P)$, como a união das componentes conexas contidas em $A(z_0, P)$, onde cada uma destas componentes contém um único elemento z_i pertencente ao k-ciclo $\{z_0, \cdots, z_{k-1}\}$. Definimos o conjunto de *Julia cheio* K_P, como o conjunto dos $z \in \mathbb{C}$, cuja órbita por P é limitada. Desta forma temos que

$$K_P = J_P \cup (F_P \setminus A(\infty))$$

Um reultado clássico a respeito dos conjuntos de Julia e Fatou é que, se z_0 é um ponto fixo atrator, então a bacia de atração $A(z_0, P)$ é a união de componentes do conjunto de Fatou e o bordo desta bacia, $\partial A(z_0, P)$, coincide com o conjunto de Julia. No caso de polinômios, o ponto fixo ∞ é um superatrator, e pelo principio do máximo, a bacia de atração $A(\infty, P)$ é conexa, e como foi dito $\partial A(\infty, P) = J_c$, além disso, K_P é a união do conjunto de Julia J_P com as componentes limitadas do conjunto de Fatou F_P.

Neste trabalho estamos interessados na família de polinômios complexos a um parâmetro

$$P_c(z) = z^3 + cz^2, \ c \in \mathbb{C}$$

De forma semelhante à família quadrática, definimos no espaço de parâmetros da família acima, o seguinte conjunto

$$M_{3,2} = \{c \in \mathbb{C};\ J_c \text{ é conexo}\}$$

que também chamaremos de *conjunto de Mandelbrot*, que será o nosso principal objeto de estudo.

1.2 Pontos Críticos e Hiperbolicidade

Um ponto $z \in \overline{\mathbb{C}}$ é dito um *ponto crítico* de P se $P'(z) = 0$. Um fato geral sobre a dinâmica de um polinômio complexo é que a dinâmica das órbitas dos pontos críticos controla a dinâmica da aplicação. Por exemplo, o Teorema 1.2.1 que enunciamos logo abaixo, nos diz que o conjunto de Julia J_p é conexo se, e somente se, as órbitas dos pontos críticos finitos de P são limitadas, isto é, se o fecho do conjunto das órbitas positivas de cada ponto crítico finito não contém o infinito. Como pode ser visto em [1] e [14], a relação Riemann-Hurwits implica que P possui no máximo $d-1$ pontos críticos finitos, assim o número de componentes periódicas em F_P são limitadas. Desta forma, é importante entender o comportamento das órbitas dos pontos críticos, que dentre outras coisas determina o comportamento do conjunto de Fatou F_P. Denotamos por $C^+(P_c)$ o *conjunto das órbitas positivas dos pontos críticos* de P_c.

Os seguintes teoremas, que podem ser encontrados em [4] pag. 66, estabelecem uma dicotomia em relação a conexidade do conjunto de Julia J_P associado a um polinômio P, em relação ao comportamento das órbitas de seus pontos críticos.

Teorema 1.2.1. *O conjunto de Julia J_P é conexo se, e somente se, não existe nenhum ponto crítico finito de P em $A(\infty, P)$, isto é, se e somente se, a órbita de cada ponto crítico finito é limitada.*

Teorema 1.2.2. *Se a órbita de cada ponto crítico finito de P escapa para ∞, então o conjunto de Julia J_P é totalmente desconexo*

Um polinômio P, é chamado dinamicamente *hiperbólico*, se é expansor sobre seu conjunto de Julia J_P no seguinte sentido: existe uma métrica conforme γ, definida em alguma vizinhança de J_P, tal que a derivada DP_z satisfaz

$$||DP_z(v)||_\gamma > ||v||_\gamma$$

para todo vetor não nulo v pertencente ao espaço tangente $T_z\overline{\mathbb{C}}$. Pela compacidade de J_P esta expansão é constante, existindo uma constante de expansão $K > 1$ tal que

$$||DP_z||_\gamma > K$$

para todo z pertencente a alguma vizinhança de J_P. Em particular, qualquer caminho suave com comprimento L pertencente a esta vizinhança de J_P, é aplicado em um caminho suave com comprimento maior ou igual a KL. Segue que, para cada $z \in J_P$ existe uma vizinhança aberta N_z em $\overline{\mathbb{C}}$, tal que, a distância Riemanniana associada a γ satisfaz:

$$d_\gamma(P(x), P(y)) \geq kd_\gamma(x, y), \text{ para todos } x, y \in N_z$$

O teorema abaixo, que pode ser visto em [4] e [14], caracteriza as funções racionais hiperbólicas em relação aos pontos críticos.

Teorema 1.2.3. *Uma função racional f é hiperbólica sobre o conjunto de Julia J_f se, e só se, todo ponto crítico pertence ao conjunto de Fatou F_f, e além disso sua órbita é atraída para um ciclo atrator.*

Para a família $\{P_c\}_{c\in\mathbb{C}}$ definida na seção 1.1, temos que P_c é hiperbólico se $c \in \mathbb{C} \setminus M_{3,2}$, ou se $c \in M_{3,2}$ e P_c possui um ponto periódico atrator finito e não nulo, ou se a órbita do ponto crítico z_c converge para $z = 0$. Denotaremos por $\mathcal{H}$ o subconjunto de $M_{3,2}$ constituído pelos parâmetros c, para os quais P_c é hiperbólico. $\mathcal{H}$ é um subconjunto aberto do interior de $M_{3,2}$, e note que é não vazio pois, $P_0(z) = z^3$ é hiperbólico e assim $0 \in \mathcal{H}$.

Existem parâmetros c para os quais o repectivo conjunto de Julia é uma curva Γ, e mais é uma *curva de Jordan*, isto é, a imagem homeomorfa do circulo unitário. Em alguns casos, como veremos no capítulo 2, esta curva de Jordan Γ é um *quasecírculo*, isto é, a imagem do círculo unitário por um homeomorfismo quaseconforme. O próximo teorema, vide [4] pag. 102, fornece condições suficientes para que o conjunto de Julia seja um quasecírculo.

Teorema 1.2.4. *Suponha que o conjunto de Fatou de uma função racional f tem exatamente duas componentes e que f é hiperbólico sobre o seu conjunto de Julia. Então J_f é um quasecírculo.*

Uma forma um pouco mais fraca da noção de hiperbolicidade, isto é, de aplicação expansora, é o conceito de subhiperbolicidade. Dizemos que um polinômio P é *subhiperbólico* se, e somente se, cada ponto crítico de P pertencente a J_P tem órbita positiva finita, enquanto cada ponto crítico em F_P é atraído para algum ciclo atrator. Como podemos ver no próximo teorema, vide [14] pag. 211, a propriedade de subhiperbolicidade também influencia a topologia do conjunto de Julia.

Teorema 1.2.5. *Se um polinômio P é subhiperbólico sobre o seu conjunto de Julia J_P, e se J_P é conexo, então J_P é localmente conexo.*

1.3 Classificação de Componentes Periódicas

A dinâmica de um polinômio P sobre o conjunto de Fatou F_P, foi totalmente descrita pelo trabalho de Sullivan. Existe um número finito de componentes de F_P que são periódicas e as possíveis restantes são pré-periódicas. Se W é uma componente periódica de F_P, isto é, existe um número inteiro positivo n tal que $P^n(W) = W$, então temos somente quatro possibilidades para W:

1. *Superatratores.* A componente W contém um ponto periódico que é também um ponto crítico.

2. *Atratores.* W contém um ponto periódico e um ponto crítico distinto do ponto periódico.

3. *Parabólico.* O bordo de W contém um ponto fixo racionalmente neutro, e W contém um ponto crítico, cuja órbita converge para o ponto fixo. Observe que neste caso, o ponto fixo não pertence ao conjunto de Fatou.

4. *Discos de Siegel*. P é conjugado (analiticamente) sobre W com uma rotação irracional por um ângulo $\exp(2\pi I\theta)$ (onde $I = \sqrt{-1}$), onde θ é um número irracional real chamado número de rotação de W. O bordo de W está contido no fecho das órbitas dos pontos críticos de P.

Capítulo 2

Família $P_c(z) = z^3 + cz^2$

2.1 Introdução

A família de polinômios complexos a um parâmetro complexo

$$P_c(z) = z^3 + cz^2$$

possui dois pontos críticos finitos, a saber, $z = 0$ e $z_c = -\frac{2}{3}c$. Já que $z = 0$ é também um ponto fixo superatrator, então z_c é o único ponto crítico *livre* de P_c, isto é, que pode ter sua órbita por P_c limitada ou não, e que determina neste caso, se o conjunto de Julia J_c é conexo ou não. Caso J_c seja conexo então $c \in M_{3,2}$, onde $M_{3,2}$ é o conjunto de Mandelbrot associado a P_c, isto é, o conjunto dos $c \in \mathbb{C}$ tais que o conjunto de Julia associado a P_c é conexo. Neste caso a órbita de z_c por P_c está contida no conjunto de Julia cheio, isto é,

$$z_c \in J_c \cup (\cup_i F_i)$$

onde os F_i são as componentes limitadas do conjunto de Fatou.

Um fato clássico,vide [14] pag. 95, sobre dinâmica polinomial complexa unidimensional, que usaremos no decorrer do texto, é que toda componente limitada do conjunto de Fatou F_P, onde P é um polinômio de grau $d \geq 2$, é simplesmente conexa. Começaremos o estudo das propriedades dinâmicas da família P_c, analisando o caso $c \notin M_{3,2}$.

2.2 O Complementar do Conjunto de Mandelbrot $M_{3,2}$

Quando o parâmetro c não pertence ao conjunto de Mandelbrot, pela definição acima, o conjunto de Julia J_c não é conexo. Uma observação importante sobre a estrutura topológica do conjunto de Julia, para os parâmetros que não estão em $M_{3,2}$, é que J_c nunca será totalmente desconexo, pois o ponto $z = 0$ é um ponto fixo superatrator para todo $c \in \mathbb{C}$, e a bacia imediata de $z = 0$ é uma componente aberta e simplesmente conexa do conjunto de Fatou F_c, portanto o seu bordo é uma curva fechada e além disso é uma componente conexa com infinitos pontos de J_c. Outra observação, que será bastante útil adiante, é o fato que P_c é hiperbólico para todo $c \notin M_{3,2}$. De fato, basta notar que, como a órbita de z_c está na bacia do ∞, então todo ponto crítico de P_c converge para algum ponto periódico atrator, e isto implica a hiperbolicidade, como pode ser visto no Teorema 1.2.3 da seção 1.2.

2.2.1 Definições e o Teorema de Böttcher

Enunciamos abaixo alguns resultados e definições, que serão necessários no desenvolvimento desta seção.

Definição 2.2.1. *Dadas duas funções racionais f e g, definidas em $\mathbb{C}$ ou em $\overline{\mathbb{C}}$, dizemos que são conjugadas se existe um homeomorfismo ψ, tal que, $f = \psi^{-1} g \psi$. Se ψ não é injetiva, mas vale a relação $\psi f = g \psi$, então dizemos que f e g são semi-conjugadas.*

Dada uma função racional f com um ponto fixo superatrator z_0, podemos sob uma mudança de coordenadas considerar $z_0 = 0$. Assim f pode ser descrita pela série de potências $f(z) = a_n z^n + a_{n+1} z^{n+1} + \ldots$, onde o inteiro n é o menor número natural tal que $a_n \neq 0$ e é chamado *grau local* da função f. Os dois próximos teoremas, que podem ser vistos em [14] pag. 90 e 92, incluem o Teorema de Böttcher e este será uma ferramenta fundamental na prova do Teorema A.

Teorema 2.2.2 (Böttcher)**.** *Suponha f com um ponto fixo superatrator em $z = 0$. Exite um biholomorfismo ϕ, onde $\phi(z) = w$, tal que $\phi(0) = 0$, que conjuga f com a n-ésima potência $w \to w^n$, em alguma vizinhança de 0. ϕ é único a menos de multiplicação por uma $(n-1)$-raíz da unidade.*

Teorema 2.2.3. *Se não existe outro ponto crítico na bacia imediata de zero $A_0(0, f)$, então a conjugação ϕ do Teorema 2.2.2(Böttcher) estende-se a um biholomorfismo do disco unitário $\mathbb{D}$ sobre $A_0(0, f)$.*

Denotamos o conjunto de todas as sequências de três símbolos $(a_i)_{i \in \mathbb{N}}$, com $a_i \in \{0, 1, 2\}$, por C_3, o qual é munido da topologia dos cilindros. Ressaltamos aqui, que nesta topologia C_3 é um conjunto totalmente desconexo. A aplicação *shift* unilateral em C_3 é definida por $\sigma((a_i)) = (a_{i+1})$. Observe que σ é um $3:1$ homeomorfismo local em C_3.

O último resultado que necessitamos é o seguinte lema, que pode ser encontrado em [1] pag. 193.

Lema 2.2.4. *Seja $f : \overline{\mathbb{C}} \longrightarrow \overline{\mathbb{C}}$ uma aplicação racional de grau $d \geq 2$ e suponha que a família $\mathcal{F} = \{S_n^j; n \geq 1, 1 \leq j \leq d^n\}$, onde cada S_n^j é um ramo analítico de f^{-n} definido em um domínio D , é normal. Se o domínio D tem interseção não vazia com o conjunto de Julia J_f, então toda subsequência localmente uniformemente convergente de $\mathcal{F}$, converge para uma constante.*

2.2.2 Descrição de J_c e F_c

Nós mostraremos aqui, que a família P_c tem um comportamento único para todo parâmetro c que não está no conjunto de Mandelbrot, isto é, que os conjuntos de Julia e de Fatou associados a P_c, mantém a mesma estrutura quando variamos o parâmetro c no complementar do conjunto de Mandelbrot.

Para $c \in \mathbb{C} \setminus M_{3,2}$, temos que os dois pontos críticos de P_c pertencem a bacias atratoras, assim P_c é hiperbólico e portanto expansor sobre J_c, que neste caso não é conexo. O conjunto de Fatou F_c neste caso é contituído da bacia atratora $A(\infty, P_c)$, que é conexa, e da bacia atratora $A(0, P_c)$, que possui infinitas componentes conexas, que são a bacia imediata $A_0(0, P_c)$ e suas pré-imagens por P_c. Em relação ao conjunto de Julia J_c, mostraremos que este é a união de dois conjuntos, sendo um constituído por uma quantidade enumerável de componentes de J_c, que são uma curva de Jordan (uma curva fechada simples) e todas as pré-imagens dessa curva por P_c, e o seu complementar, que é constituído por uma quantidade não enumerável de componentes de um único elemento de J_c. A curva citada acima é o bordo da bacia atratora imediata de $z = 0$, que provaremos logo abaixo ser uma curva de Jordan. Antes disso, enuciamos e provamos o seguinte lema, que será bastante útil nos resultados desta seção.

Lema 2.2.5. *Seja $P_c : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ definida por, $P_c(z) = z^3 + cz^2$, e suponha que a órbita do ponto crítico finito e não-nulo de P_c se acumula em ∞, então P_c possui um ponto fixo no bordo da bacia imediata de $z = 0$.*

Demonstração. O Teorema de Böttcher fornece uma conjugação de P_c com w^2 em uma vizinhança de $z = 0$, que pode ser extendida por toda bacia imediata deste ponto fixo, pois $A_0(0, P_c)$ não possui outro ponto crítico a não ser o próprio $z = 0$. Obtemos assim um biholomorfismo

$$\phi : D(0,1) \to A_0(0, P_c)$$

que satisfaz

$$P\phi(w) = \phi(w^2) \tag{2.1}$$

Temos que P_c é hiperbólico e que $A_0(0, P_c)$ é uma componente simplesmente conexa do conjunto de Fatou, portanto $\partial A_0(0, P_c)$ é localmente conexo, ver

[14] §19.3. Pelo Teorema de Carathéodory, ver Teorema A.1.4 (apêndice A), ϕ pode ser estendida continuamente sobre $\partial D(0,1)$, de onde obtemos

$$\bar{\phi} : \bar{D}(0,1) \to \bar{A}_0(0, P_c)$$

satisfazendo

$$\bar{\phi}(\partial D(0,1)) = \partial A_0(0, P_c)$$

pois $\bar{\phi}$ restrita a $D(0,1)$ é homeomorfismo. Segue então que $P_c(\overline{\phi}(1)) = \overline{\phi}(1)$, o que termina a prova do lema. □

Teorema 2.2.6. *Nas mesmas condições do lema 2.2.5, o bordo da bacia imediata $\partial A_0(0, P_c)$ é uma curva de Jordan, como também são curvas de Jordan todas as pré-imagens de $\partial A_0(0, P_c)$ por P_c.*

Demonstração. Consideremos novamente o biholomorfismo fornecido pelo Teorema de Böttcher, como no lema 2.2.5

$$\phi : D(0,1) \to A_0(0, P_c)$$

satisfazendo

$$P\phi(w) = \phi(w^2) \tag{2.2}$$

Como mostramos no lema 2.2.5, o Teorema de Carathéodory garante que ϕ extende-se continuamente sobre o bordo de $D(0,1)$. Mostraremos agora que essa extensão é injetiva e para isto suponha $\bar{\phi}(x_1) = \bar{\phi}(x_2)$, onde $x_1, x_2 \in \partial D(0,1)$. Sejam

$$\gamma_i : [0,1] \to \overline{D}(0,1), \ i = 1,2$$

dois segmentos em $D(0,1)$ satisfazendo

$$\gamma_i(0) = 0, \ \gamma_i(1) = x_i \ \text{ e } \ \gamma_i(x) \in D(0,1) \ \forall \ x \in (0,1)$$

Denote por I o menor arco ligando x_1 a x_2 em $\partial D(0,1)$, além disso colocamos

$$\Gamma_i = \bar{\phi}(\gamma_i) \ \text{ e } \ y = \bar{\phi}(x_i)$$

Veja figura 2.1 abaixo.

Observe que

$$\bar{\phi}(\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup I) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \bar{\phi}(I)$$

onde

$$\Gamma_1 \cap \Gamma_2 = \{0, y\}$$

pois $\bar{\phi}$ é homeomorfismo em $D(0,1)$. Afirmamos que $\bar{\phi}(I) = \{y\}$. De fato, note que $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup I$ e $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ são curvas de Jordan contidas em $D(0,1)$ e $\overline{A}_0(0, P_c)$ respectivamente, e o Teorema da Curva de Jordan nos diz que cada

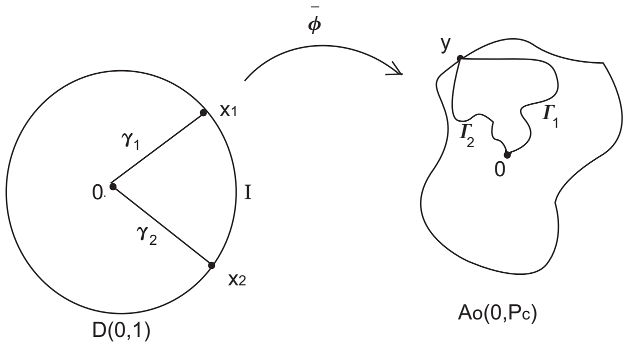

Figura 2.1: Os segmentos γ_i em $D(0,1)$ são levados nas curvas Γ_i em $A_0(0,P_c)$, pelo biholomorfismo ϕ.

uma delas divide o plano em duas componentes abertas e conexas. Sejam A e B as componentes conexas limitadas, onde A é delimitada pela curva $\gamma_1 \cup \gamma_2 \cup I$ e B pela curva $\Gamma_1 \cup \Gamma_2$ e sejam $\widehat{A}$ e $\widehat{B}$ respectivamente as componentes complementares. Colocamos

$$\begin{aligned} \widetilde{A} &= \widehat{A} \cap D(0,1) \\ \widetilde{B} &= \widehat{B} \cap A_0(0,P_c) \end{aligned}$$

Temos que ϕ leva $D(0,1)$ homeomorficamente sobre $A_0(0,P_c)$, assim devemos ter

$$\phi(A \cup \widetilde{A}) = B \cup \widetilde{B}$$

Suponha que $\phi(A) = B$, neste caso temos que

$$\partial A = \gamma_1 \cup \gamma_2 \cup I \quad \text{e} \quad \partial\bar{\phi}(A) = \Gamma_1 \cup \Gamma_2 \cup \{y\}$$

portanto $\bar{\phi}(I) = \{y\}$, pois

$$\bar{\phi}(I) \cap ((\Gamma_1 \cup \Gamma_2) \setminus \{y\}) = \emptyset$$

Observe que se $\phi(\widetilde{A}) = B$, então de forma análoga, colocando

$$I = \partial\widetilde{A} \cap \partial D(0,1)$$

obtemos da mesma forma que $\bar{\phi}(I) = \{y\}$, provando assim a afirmação acima. Dado um arco $L \subset \partial D(0,1)$, colocamos

$$\rho(L) = L_1 \text{ e } \rho(L_i) = L_{i+1}$$

onde $\rho(w) = w^2$. A aplicação ρ é expansora sobre o círculo unitário $\partial D(0,1)$ e pela compacidade de $\partial D(0,1)$, existe um $k \geq 1$, tal que, $L_k \supset \partial D(0,1)$. De (2.2) obtemos a seguinte relação

$$P_c\bar{\phi}(w) = \bar{\phi}(w^2) \tag{2.3}$$

para a aplicação $\bar{\phi} : \bar{D}(0,1) \to \bar{A}_0$. Lembrando que $\bar{\phi}(I) = \{y\}$, temos que

$$\begin{array}{rcl} P_c\bar{\phi}(I) & = & \bar{\phi}(\rho(I)) = \bar{\phi}(I_1) = y_1 \\ P_c\bar{\phi}(I_1) & = & \bar{\phi}(\rho(I_1)) = \bar{\phi}(I_2) = y_2 \\ \vdots & & \vdots \\ P_c\bar{\phi}(I_{n-1}) & = & \bar{\phi}(\rho(I_{n-1})) = \bar{\phi}(I_n) = y_n \end{array}$$

Mas isto implica que $\bar{\phi}(\partial D(0,1)) = y_k$, para algum k tal que $I_k \supset \partial D(0,1)$, o que é absurdo pois $\bar{\phi}(\partial D(0,1)) = \partial A_0(0, P_c)$ e $A_0(0, P_c)$ é aberto e limitado em $\mathbb{C}$, logo seu bordo possui mais de um ponto. Portanto devemos ter $x_1 = x_2$, de onde concluimos que $\bar{\phi}$ estende-se homeomorficamente sobre $\partial A_0(0, P_c)$.

Mostraremos agora que as pré-imagens de $\partial A_0(0, P_c)$ por P_c também são curvas de Jordan. Para cada $z \in \partial A_0(0, P_c)$ existe uma vizinhança simplesmente conexa V_z de z, que não contém nenhum ponto crítico de P_c, e portanto, P_c^{-1} possui três ramos analíticos

$$h_{z_i} : V_z \to W_{z_i},\ i \in \{1,2,3\}$$

Pela compacidade de $\partial A_0(0, P_c)$, podemos tomar uma subcobertura finita $\{V_{z_k}\}_k$ de $\partial A_0(0, P_c)$, de onde obtemos os ramos

$$h_{z_{k_i}} : V_{z_k} \longrightarrow W_{z_{k_i}} \ \text{ de } \ P_c^{-1},\ i \in \{1,2,3\}$$

Coloque

$$W_i = \bigcup_{k_i} W_{z_{k_i}}, \qquad V = \bigcup_k V_{z_k}$$

Definimos

$$h_i : V \to W_i$$

colocando $h_i = h_{z_{k_i}}$ sobre V_{z_k}. Observe que $h_{z_{l_i}} = h_{z_{j_i}}$ sobre $V_{z_l} \cap V_{z_j}$, portanto h_i está bem definido e é um homeomorfismo sobre W_i, e assim $h_i(\partial A_0(0, P_c))$ é uma curva de Jordan. Portanto as pré-imagens de $\partial A_0(0, P_c)$ por P_c são também curvas de Jordan. O mesmo vale para $(P_c^m)^{-1}$ para cada m inteiro positivo, provando assim o teorema. □

O teorema acima descreve parte do conjunto de Julia, isto é, o bordo da bacia imediata do superatrator $z = 0$ e suas pré-imagens, o qual mostrou que são curvas de Jordan. O nosso próximo passo será descrever o restante do conjunto de Julia J_c. Se $c \in \mathbb{C} \setminus M_{3,2}$ e $\partial A_0(0, P_c)$ é o bordo da bacia imediata de $z = 0$, definimos

$$L = J_c \setminus K$$

onde

$$K = \bigcup_{n=0}^{\infty} P_c^{-n}(\partial A_0(0, P_c))$$

Observe que L é um subconjunto não vazio de J_c. De fato, O lema 2.2.5 nos diz que o bordo da bacia atratora imediata de $z = 0$, possui um ponto fixo repulsor de P_c, para $c \in \mathbb{C} \setminus M_{3,2}$. O outro ponto fixo de P_c também pertence ao conjunto de Julia, mas pertence a L, pois $w = 1$ é o único ponto fixo da aplicação $w \to w^2$, que é conjugada a P_c por $\overline{\phi}$, e $\overline{\phi}$ é um homeomorfismo do bordo de $D(0, 1)$ sobre $\partial A_0(0, P_c)$, como pode ser visto na prova do Teorema 2.2.6. Por outro lado, temos que J_c é desconexo e contém uma quantidade não enumerável de componentes conexas, como pode ser visto em [14]. Como K possui uma quantidade enumerável de componentes, que são o bordo da bacia atratora imediata de $z = 0$ e suas pré-imagens por P_c, então L possui infinitas componentes de J_c. Enunciamos a seguir o principal resultado desta seção.

Teorema A. *Seja $P_c : \bar{\mathbb{C}} \to \bar{\mathbb{C}}$ definida por, $P_c(z) = z^3 + cz^2$, e suponha que a órbita do ponto crítico finito e não-nulo se acumula em ∞. Então P_c restrito a L é conjugado a uma restrição do shift unilateral de três símbolos.*

2.2.3 Prova do Teorema A

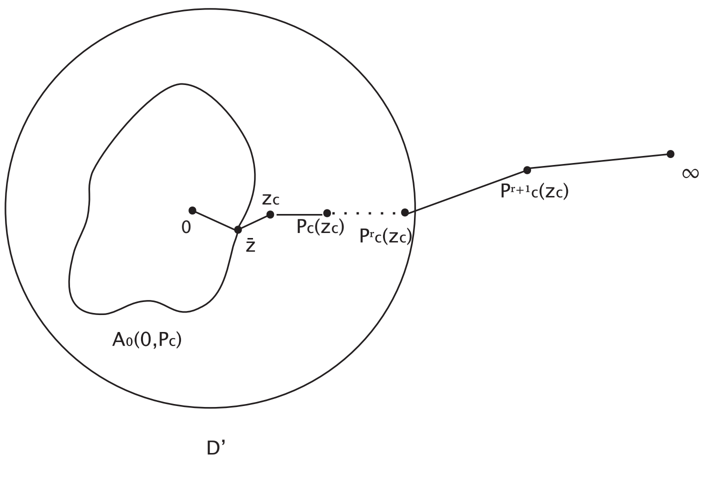

Figura 2.2: O grafo T ligando 0 ao ∞

Demonstração. O primeiro passo será mostrar que existe um grafo conexo, ligando o ponto crítico $z = 0$ ao ponto ∞, cuja interseção com o conjunto de Julia é um único ponto. Pelo lema 2.2.5, P_c possui um ponto fixo em $\partial A_0(0, P_c)$, que chamaremos $\bar{z}$, além disso, a conjugação ϕ usada na prova daquele lema, é um biholomorfismo que leva o segmento de reta $[0, 1]$ em um arco contido em $A_0(0, P_c)$, que liga 0 a $\bar{z}$. Por outro lado, como pode ser visto em [9], temos que todo ponto periódico repulsor de um polinômio P, pertencente ao bordo de $A(\infty, P)$, é acessível, isto é, ele pode ser ligado a algum ponto de $A(\infty, P)$, por um arco contido $A(\infty, P)$. Note que o ponto fixo $\bar{z} \in \partial A_0(0, P_c) \subset J_c$, além disso é repulsor, logo é acessível ao interior de $A(\infty, P_c)$. Já que $A(\infty, P_c)$ é aberta e conexa, portanto conexa por arcos, podemos ligar $\bar{z}$ a z_c e z_c a ∞ por arcos. Obtemos dessa forma um grafo T conexo, ligando 0 a ∞ e contendo o outro ponto crítico z_c, cuja interseção com o conjunto de Julia é o ponto fixo $\bar{z}$. Além disso, podemos escolher T contendo os pontos $P_c(z_c), \ldots, P_c^r(z_c)$, onde r é um inteiro positivo satisfazendo a seguinte propriedade: existe um disco aberto D' com centro em 0 e contendo o conjunto de Julia J_c, tal que, $P_c^s(z_c)$ não pertence a D' para todo $s > r$. Observe que tal r existe pois a órbita do ponto crítico z_c converge para o infinito. Veja figura 2.2 acima.

Coloque $T' = P_c(T)$ e $T'' = P_c^{-1}(T')$. Observe que os pontos críticos de P_c pertencem a T. Como T é conexo, segue que T' também é conexo, portanto $\overline{\mathbb{C}} \setminus T'$ é simplesmente conexo, conexo e aberto. Dessa forma, restrito a $\overline{\mathbb{C}} \setminus T''$, temos que

$$P_c|_{\overline{\mathbb{C}} \setminus T''} : \overline{\mathbb{C}} \setminus T'' \longrightarrow \overline{\mathbb{C}} \setminus T'$$

é um homeomorfismo local e é também uma aplicação própria, portanto, como pode ser visto em [10] ou [12], é uma aplicação de recobrimento de cada componente de $\mathbb{C} \setminus T''$ sobre $\overline{\mathbb{C}} \setminus T'$, e como $\overline{\mathbb{C}} \setminus T'$ é simplesmente conexo, a restrição de P_c a cada tal componente, é um homeomorfismo sobre $\overline{\mathbb{C}} \setminus T'$. Assim existem três ramos analíticos de P_c^{-1} bem definidos sobre $\overline{\mathbb{C}} \setminus T'$, que denotaremos por

$$f_i : \bar{\mathbb{C}} \setminus T' \to K_i, \; i \in \{0, 1, 2\}$$

onde os K_i são abertos dois a dois disjuntos. Pela invariância do conjunto L temos que

$$f_i(L) \subset L, \text{ para todo } i \in \{0, 1, 2\}$$

portanto faz sentido a composição

$$f_{a_1} f_{a_2} \ldots f_{a_k}(L), \text{ para todo } a_k \in \{0, 1, 2\}$$

para qualquer k inteiro positivo. Definimos agora a seguinte aplicação

$$h : L \to C_3 \tag{2.4}$$

que associa a cada $z \in L$, a sequência $(a_k) = (a_1, a_2, \ldots) \in C_3$, onde (a_k) representa a órbita de z por P_c, isto é, $z \in K_{a_1}$ para algum $a_1 \in \{0, 1, 2\}$,

$P_c(z) \in K_{a_2}$ para algum $a_2 \in \{0,1,2\}$ e assim por diante. Observe que h está bem definida devido à invariância de L em relação a P_c e P_c^{-1} e do fato que os $K_i's$ são abertos dois a dois disjuntos, implicando assim que cada $z \in L$ é levado em uma única sequência de C_3. O próximo passo será mostrar que h é injetiva e contínua. Primeiros mostraremos a injetividade e para isto precisamos do seguinte lema.

Lema 2.2.7. *O diâmetro do conjunto $f_{a_1}f_{a_2}\cdots f_{a_k}(L)$ tende para zero quando k tende para o infinito.*

Demonstração. Fixe uma sequência (a_k) de C_3 e coloque

$$g_{a_k}(L) = f_{a_1}f_{a_2}\cdots f_{a_k}(L)$$

Sejam D' o disco aberto com centro em 0 e contendo o conjunto de Julia J_c e T o grafo ligando 0 ao ∞ como definidos acima. Colocando $D = D' \setminus P_c(T)$, obtemos um domínio simplesmente conexo e disjunto de $C^+(P_c)$ (que é o conjunto das órbitas positivas dos pontos críticos de P_c), satisfazendo que $P_c^{-1}(D) \subset D$. Assim, P_c^{-m} possui 3^m ramos analíticos bem definidos sobre D para cada m, os quais denotamos por S_m^j. A família

$$\mathcal{F} = \{S_m^j;\ m \geq 1, 1 \leq j \leq 3^m\}$$

é normal, pois cada ramo em $\mathcal{F}$ omite o conjunto $C^+(P_c)$. Portanto, cada sequência em $\mathcal{F}$ possui uma subsequência que converge localmente uniformemente sobre D. A sequência (g_{a_k}) definida acima, coincide com alguma sequência (S_k^j) de $\mathcal{F}$ restrita a L, portanto, pelo lema 2.2.4, (g_{a_k}) possui uma subsequência que converge localmente uniformemente para uma função constante. Suponha $(g_{a_{k_s}})$ tal subsequência e observe que,

$$\begin{aligned}
g_{a_1}(L) &= f_{a_1}(L)\\
g_{a_2}(L) &= f_{a_1}f_{a_2}(L)\\
\vdots &= \vdots\\
g_{a_k}(L) &= f_{a_1}f_{a_2}\cdots f_{a_k}(L)
\end{aligned}$$

de onde obtemos que para cada s existe $k \geq s$, tal que,

$$g_{a_k}(L) \subset g_{a_{k_s}}(L)$$

portanto, $g_{a_k}(L)$ também converge para a mesma constante que a subsequência, o que termina a prova. □

Voltando a prova do teorema, suponha z_1 e z_2 pontos distintos pertencentes a L, então existem vizinhanças V_1 e V_2 de z_1 e z_2 respectivamente, tais que, $V_1 \cap V_2 = \emptyset$. Note que se $h(z) = (a_1, a_2, \ldots, a_k, \ldots)$ então $z \in f_{a_1}f_{a_2}\cdots f_{a_k}(L)$

para todo $k \geq 1$. De fato, temos que $z \in K_{a_1}$, logo pela invariância de L, $z \in f_{a_1}(L)$. Como $P_c(z) \in K_{a_2}$ temos que $z \in P_c^{-1}(L \cap K_{a_2})$, onde

$$P_c^{-1}(L \cap K_{a_2}) = \dot{\bigcup}_{a_i} f_{a_i}(L \cap K_{a_2})$$

Como $z \in f_{a_1}(L)$ temos que

$$z \in f_{a_1}(L \cap K_{a_2}) = f_{a_1} f_{a_2}(L)$$

Desta forma temos que, se $P_c^{k-1}(z) \in K_{a_k}$ então $z \in f_{a_1} f_{a_2} \ldots f_{a_k}(L)$. Pelo lema 2.2.7 acima, o diâmetro do conjunto $f_{a_1} f_{a_2} \cdots f_{a_k}(L)$ tende para zero quando k tende para o infinito, assim, existe um número inteiro positivo l tal que,

$$f_{a_1} f_{a_2} \cdots f_{a_l}(L) \cap V_1 = \emptyset$$

ou

$$f_{a_1} f_{a_2} \cdots f_{a_l}(L) \cap V_2 = \emptyset$$

mas isto implica que $h(z_1) \neq h(z_2)$, provando assim a injetividade de h. Vamos mostrar agora a continuidade de h, para isto fixe $z_0 \in L$. Uma bola aberta com centro em $h(z_0) = \alpha_0 = (\bar{a}_1, \bar{a}_2, \ldots)$, na topologia de C_3, é um conjunto do tipo

$$V_{\alpha_0} = \{\alpha = (a_1, a_2, \ldots) \in C_3;\ a_i = \bar{a}_i,\ \text{para } i \leq r\}$$

Agora note que o conjunto

$$W = f_{\bar{a}_1} f_{\bar{a}_2} \cdots f_{\bar{a}_r}(L)$$

é aberto em L (na topologia induzida de $\overline{\mathbb{C}}$), pois os f_{a_i} são homeomorfismos. Então, como $h(z) \in V_{\alpha_0}$ para todo $z \in W$, segue que h é continua em z_0. Ressaltamos aqui que h não é sobrejetora. De fato, basta notar que $h(z) = (a_i, a_i, \ldots)$ se e somente se z for um ponto fixo de P_c, mas L possui somente um ponto fixo de P_c enquanto C_3 possui três sequências do tipo $(a_i, a_i, \ldots)$.

Para terminar a prova do teorema, precisamos mostrar que h é uma conjugação entre $P_c|_L$ e o shift σ restrito a $h(L)$. Para isto, considere o seguinte diagrama, o qual mostraremos que comuta

$$\begin{array}{ccc} L & \xrightarrow{P_c} & L \\ h\big\downarrow & & \big\downarrow h \\ h(L) & \xrightarrow[\sigma]{} & h(L) \end{array}$$

De fato, basta notar que, se

$$z \in f_{a_1} f_{a_2} \cdots f_{a_{k+1}}(L)$$

então

$$P_c(z) \in f_{a_2} f_{a_3} \cdots f_{a_{k+1}}(L)$$

Portanto,

$$h(z) = (a_1, a_2, \ldots) \text{ e } h(P_c(z)) = (a_2, a_3, \ldots)$$

de onde obtemos

$$h(P_c(z)) = \sigma(h(z)) \tag{2.5}$$

mostrando que $P_c|_L$ é conjugada a uma restrição do shift unilateral de três símbolos. □

Corolário 2.2.8. *L é totalmente desconexo.*

Demonstração. Seja M uma componente conexa de L. Pela continuidade de h, $h(M)$ é um conjunto conexo em C_3, logo $h(M)$ possui um único elemento. Portanto, pela injetividade de h, M também deve possuir um único elemento. □

Observe que não podemos estender h por todo J_c de forma que se preserve a conjugação. De fato, colocando

$$Z = \bigcup_{n=1}^{\infty} P_c^{-n}(\bar{z})$$

podemos estender h para $J_c \setminus Z$ de forma natural, mas para estender h ao conjunto Z, devemos definir $h(\bar{z}) = (a_i, a_i, \ldots)$ para alguma escolha de $a_i \in \{0, 1, 2\}$, e se $\hat{z}$ é uma pré-imagem de $\bar{z}$ por P_c^{-n}, então $h(\hat{z}) = (a_1, a_2, \ldots, a_n, a_i, a_i, \ldots)$. Note que desta forma h perde a continuidade, pois $\bar{z}$ pertence ao bordo de dois abertos dos K_{a_i}, digamos K_{a_1} e K_{a_2} com $a_1 \neq a_2$, e se $h(\bar{z}) = (a_1, a_1, \ldots)$ então podemos escolher $z \in K_{a_2}$ tão próximo de $\bar{z}$ quanto queiramos, mas $h(z) = (a_2, \ldots)$ está distante de $h(\bar{z})$ na métrica de C_3. O mesmo vale para cada $z \in Z$, isto é, h definida como acima sobre J_c, é descontínua em todo Z.

2.3 O Conjunto de Mandelbrot $M_{3,2}$

Nesta seção nos restringimos ao caso onde o parâmetro $c \in M_{3,2}$, que é equivalente ao conjunto de Julia J_c ser conexo. Enunciamos e provamos abaixo o principal resultado desta seção, que trata de aspectos topológicos do conjunto de Mandelbrot. No teorema abaixo provaremos que $M_{3,2}$ é simplesmente conexo, no sentido que cada componente de $M_{3,2}$ é simplesmente conexa. Além disso daremos uma caracterização de $M_{3,2}$ em relação a limitação da órbita do ponto crítico livre de P_c, a saber $z_c = \frac{-2c}{3}$.

Teorema B. *O conjunto de Mandelbrot $M_{3,2}$, é um subconjunto fechado e simplesmente conexo de $\mathbb{C}$, simétrico em relação ao eixo real e à origem, contido no disco aberto $D(0,3)$ e contendo o disco fechado $\overline{\mathbb{D}}(0,\frac{3}{2})$. Mais precisamente, o conjunto de Mandelbrot $M_{3,2}$ consiste de todos os pontos $c \in \mathbb{C}$, tais que, $|P_c^n(z_c)| \leq 4$ para todo $n \geq 1$. Além disso, a intersecção de $M_{3,2}$ com o eixo real é o intervalo $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$ e com o eixo imaginário é $[-c_0 I, c_0 I]$, onde $c_0 = \frac{1}{2}(27 + 3\sqrt{57})^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{(27+3\sqrt{57})^{\frac{1}{3}}}$.*

O fato do conjunto $M_{3,2}$ possuir essa propriedade de simetria, como descrito no Teorema B, além de interessante por si só, nos poupará algum trabalho mais à frente. Outro aspecto interessante desse conjunto é a interseção com os eixos coordenados, que tem comprimentos diferentes e como veremos mais adiante, a dinâmica torna-se bem mais complicada em relação a parâmetros de $M_{3,2}$ pertencentes ao eixo imaginário.

Observação 2.3.1. *Quando c é real, é fácil ver que o eixo real é invariante por P_c. Agora, se $c = \lambda I$ com $\lambda \in \mathbb{R}$, então o eixo imaginário é invariante em relação a P_c, isto é, se $\beta \in \mathbb{R}$ então*

$$P_c(\beta I) = -(\beta^3 + \lambda\beta^2)I$$

Assim podemos considerar o polinômio

$$P_\lambda(\beta) = -\beta^3 - \lambda\beta^2, \ \lambda, \beta \in \mathbb{R}$$

para analisar o comportamento dinâmico de P_c, quando c pertence a intersecção do conjunto de Mandelbrot com o eixo imaginário. Observe que os pontos críticos de P_λ são 0 e z_λ, onde $z_\lambda = -\frac{2}{3}\lambda$, e os pontos fixos são 0, $\frac{-\lambda+\sqrt{\lambda^2-4}}{2}$ e $\frac{-\lambda-\sqrt{\lambda^2-4}}{2}$.

2.3.1 Prova do Teorema B

Demonstração. Para mostrarmos a existência de simetria em relação ao eixo real, basta mostrar que, se $c \in M_{3,2}$ então também o seu conjugado $\overline{c} \in M_{3,2}$.

Desta forma temos

$$\begin{aligned}\overline{P_{\overline{c}}(z_{\overline{c}})} &= \overline{z_{\overline{c}}^3 + \overline{c}z_{\overline{c}}^2}\\ &= \overline{(-\frac{2}{3}\overline{c})^3} + c\overline{(-\frac{2}{3}\overline{c})^2}\\ &= (-\frac{2}{3}c)^3 + c(-\frac{2}{3}c)^2\\ &= P_c(z_c)\end{aligned}$$

supondo por indução sobre n que

$$\overline{P_{\overline{c}}^n(z_{\overline{c}})} = P_c^n(z_c)$$

temos

$$\begin{aligned}\overline{P_{\overline{c}}^{n+1}(z_{\overline{c}})} &= \overline{(P_{\overline{c}}^n(z_{\overline{c}}))^2(P_{\overline{c}}^n(z_{\overline{c}}) + \overline{c})}\\ &= (\overline{P_{\overline{c}}^n(z_{\overline{c}})})^2(\overline{P_{\overline{c}}^n(z_{\overline{c}})} + c)\\ &= P_c^{n+1}(z_c)\end{aligned}$$

portanto, se a órbita de z_c por P_c é limitada então a órbita de $z_{\overline{c}}$ por $P_{\overline{c}}$ também é, e isto prova a simetria em relação ao eixo real. Em relação à origem, note que

$$z_{-c} = -z_c$$

logo

$$\begin{aligned}P_{-c}(z_{-c}) &= (z_{-c})^3 + (-c)(z_{-c})^2 = -z_c^3 - cz_c^2\\ &= -P_c(z_c)\end{aligned}$$

e novamente supondo por indução sobre n que

$$P_{-c}^n(z_{-c}) = -P_c^n(z_c)$$

temos que

$$\begin{aligned}P_{-c}^{n+1}(z_{-c}) &= (P_{-c}^n(z_{-c}))^2(P_{-c}^n(z_{-c}) + (-c))\\ &= (-P_c^n(z_c))^2(-P_c^n(z_c) - c)\\ &= -P^{n+1}(z_c)\end{aligned}$$

de onde concluimos que $M_{3,2}$ é também simétrico em relação à origem.

Mostraremos agora que $M_{3,2}$ está contido no disco aberto de centro na origem e raio 3, que denotamos por $D(0,3)$. Para isto suponha que $| c |\geq 3$, assim temos que

$$\begin{aligned}|P_c(z_c)| &= |P_c(-\frac{2}{3}c)|\\ &= |\frac{4}{27}c^3|\\ &\geq 2|z_c|\end{aligned}$$

Supondo por indução sobre m que

$$|P_c^m(z_c)| \geq 2^m|z_c|, \quad \text{para } m \geq 1$$

temos

$$\begin{aligned}
|P_c^{m+1}(z_c)| &= |P_c^m(z_c)|^2(|P_c^m(z_c) + c|) \\
&\geq (2^m|z_c|)^2(|P_c^m(z_c)| - |c|) \\
&\geq (2^m|z_c|)^2(2^m\frac{2}{3}|c| - |c|) \\
&= |c|(2^m|z_c|)^2(2^m\frac{2}{3} - 1) \\
&\geq 2^{m+1}|z_c|
\end{aligned}$$

portanto $P_c^m(z_c) \to \infty$ quando $m \to \infty$, logo $c \notin M_{3,2}$ e isto prova que $M_{3,2} \subset D(0,3)$, em particular mostramos que $M_{3,2}$ é limitado.

Agora provaremos que $M_{3,2}$ é contituído pelos parâmetros c, cuja órbita do ponto crítico z_c, está contida no disco $\overline{D}(0,4)$. Seja $c \in \mathbb{C}$ e suponha que $|P_c^n(z_c)| \leq 4$ para todo $n \geq 1$, então pelo Teorema 1.2.1, é claro que $c \in M_{3,2}$. Por outro lado, supondo que $c \in M_{3,2}$ e que $|P_c^n(z_c)| > 4$ para algum $n \geq 1$, temos que

$$\begin{aligned}
|P_c^{n+1}(z_c)| &= |P_c^n(z_c)|^2|P_c^n(z_c) + c| \\
&> 4^2||P_c^n(z_c)| - |c|| \\
&> 4^2
\end{aligned}$$

já que devemos ter $|c| < 3$ como foi provado acima. Desta forma, por indução sobre k, obtemos facilmente que

$$|P_c^{n+k}(z_c)| > 4^k$$

para todo inteiro positivo k, assim a órbita positiva de z_c converge para o infinito, mas isto contradiz a hipótese de $c \in M_{3,2}$, o que termina a prova da afirmação.

O próximo passo será mostrar que $M_{3,2}$ é fechado e portanto compacto. Seja $\{c_k\}$ uma sequência contida em $M_{3,2}$ tal que $c_k \to c$. Como $z_c = \frac{-2c}{3}$, temos que para cada $n \geq 1$, $P_c^n(z_c)$ é um polinômio em c, assim temos que

$$\lim_{k\to\infty} |P_{c_k}^n(z_{c_k})| = |P_c^n(z_c)| \leq 4$$

portanto a órbita de z_c por P_c é limitada, logo $c \in M_{3,2}$, de onde concluimos que $M_{3,2}$ é fechado e portanto compacto.

Seguindo em frente, provaremos agora que $M_{3,2}$ é simplesmente conexo, e para isto começaremos mostrando que $\mathbb{C} \setminus M_{3,2}$ não possui componente limitada. De fato, suponha por contradição que Ω é uma componente limitada de

$\mathbb{C} \setminus M_{3,2}$. Para cada $n \geq 1$, definimos a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} f_n \ : \ & \mathbb{C} \longrightarrow \mathbb{C} \\ & c \longmapsto P_c^n(z_c) \end{aligned}$$

que claramente é analítica em $\mathbb{C}$. O Teorema do Módulo Máximo, vide apêndice A, nos diz que

$$max\{|f_n(c)|; c \in \Omega\} = max\{|f_n(c)|; c \in \partial\Omega\}$$

onde $\partial\Omega$ denota o bordo da componente Ω. Mas $\partial\Omega$ é um subconjunto de $M_{3,2}$ e como $|P_c^n(z_c)| \leq 4$ para todo c pertencente a $M_{3,2}$, temos que

$$max\{|f_n(c)|; c \in \partial\Omega\} \leq 4 \tag{2.6}$$

Por outro lado, se c pertence a Ω então existe um inteiro positivo n tal que $|f_n(c)| > 4$, pois Ω está contido em $\mathbb{C} \setminus M_{3,2}$. Mas isto contradiz 2.6 e mostra que Ω não pode ser limitada. Agora observe que $\mathbb{C} \setminus M_{3,2}$ não pode ter mais de uma componente ilimitada, pois $M_{3,2}$ é limitado, de onde obtemos que $\mathbb{C} \setminus M_{3,2}$ é conexo e portanto $M_{3,2}$ é simplesmente conexo.

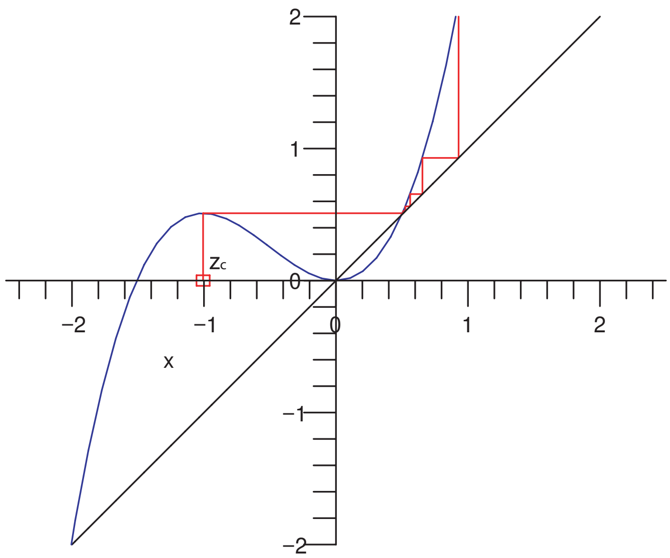

Figura 2.3: Órbita de z_c, para $c = 1.51$, após 10 iteradas.

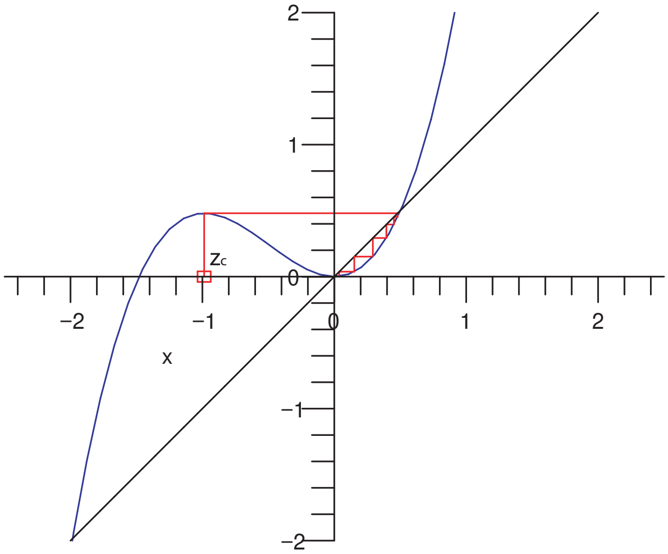

Figura 2.4: Órbita de z_c, para $c = 1.48$, após 10 iteradas.

Consideraremos agora a interseção do conjunto de Mandelbrot $M_{3,2}$ com o eixo real, a qual mostraremos que $M_{3,2} \cap \mathbb{R} = [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$. Como ilustração, as figuras 2.3 e 2.4 apresentadas à seguir, mostram a órbita do ponto crítico z_c para os parâmetros $c = 1,51$ e $c = 1,48$. No primeiro caso a órbita de z_c escapa para o infinito e no segundo a órbita é limitada. A simetria de $M_{3,2}$, como mostrado acima, nos diz que basta provarmos que $M_{3,2} \cap \mathbb{R}^+ = [0, \frac{3}{2}]$. Assim, para $c \geq 0$ temos que

$$\begin{aligned} P_c(z_c) &= (-\frac{2}{3}c)^3 + c(-\frac{2}{3}c)^2 \\ &= \frac{4}{27}c^3 \geq 0 \end{aligned}$$

Por outro lado, os pontos fixos de P_c são

$$\begin{aligned} z_+ &= -\frac{c}{2} + \frac{\sqrt{c^2+4}}{2} \\ z_- &= -\frac{c}{2} - \frac{\sqrt{c^2+4}}{2} \end{aligned}$$

onde

$$z_- < z_c < 0 < z_+$$

assim temos que

$$P_c(z_c) \leq z_+$$
$$\Updownarrow$$
$$P_c(-\frac{2}{3}c) = \frac{4}{27}c^3 \leq -\frac{c}{2} + \frac{\sqrt{c^2+4}}{2}$$
$$\Updownarrow$$
$$(\frac{4}{27}c^3 + \frac{c}{2})^2 \leq \frac{c^2+4}{4}$$
$$\Updownarrow$$
$$(\frac{4}{27})^2c^6 + \frac{4}{27}c^4 - 1 \leq 0 \tag{2.7}$$

Note que a desigualdade (2.7) é equivalente a $c \in [0, \frac{3}{2}]$, pois $c \geq 0$ e a função

$$g(c) = (\frac{4}{27})^2c^6 + \frac{4}{27}c^4 - 1$$

obtida de (2.7) é crescente no intervalo $[0, +\infty)$, com $g(0) = -1$ e $g(\frac{3}{2}) = 0$, portanto, para $c \in [0, \frac{3}{2}]$ temos que $P_c(z_c)$ pertence ao intervalo $[0, z_+]$. Observe que 0 é um ponto de mínimo local de P_c e que P_c é decrescente no intervalo $[z_c, 0]$ e crescente em $\mathbb{R} \setminus [z_c, 0]$, logo $P_c(z) \leq z_+$ para todo $z \in (0, z_+)$. Daí, obtemos que

$$P_c^2(z_c) < P_c(z_+), \cdots, P_c^{n+1}(z_c) < P_c^n(z_+) = z_+$$

para todo inteiro positivo n, de onde concluimos que a órbita de z_c por P_c é limitada, portanto $c \in M_{3,2}$ e segue que $[0, \frac{3}{2}] \subset M_{3,2}$. Finalmente, pela simetria de $M_{3,2}$ temos que $[-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}] \subset M_{3,2}$. Falta mostrar que se $c > \frac{3}{2}$ ou $c < -\frac{3}{2}$ então $c \notin M_{3,2}$. Se $c > \frac{3}{2}$, por (2.7) temos que

$$P_c(z_c) = \frac{4}{27}c^3 > z_+ > 0$$

onde z_+ é um ponto fixo repulsor de P_c, pois

$$P_c'(z_+) = \frac{1}{2}(c^2 - c\sqrt{c^2+4}) + 3 > 1$$

Como P_c é crescente em $\mathbb{R} \setminus [-\frac{2}{3}c, 0]$, temos que para cada n inteiro positivo

$$P_c^n(z_c) > P_c^{n-1}(z_c) > \ldots > P_c(z_c) > z_+$$

Os únicos pontos fixos de P_c são 0, z_- e z_+, sendo que $z_- < 0$, portanto a órbita de z_c por P_c não pode ser limitada, caso contrário P_c teria outro ponto fixo positivo e maior que z_+, o que como vimos não é possível, portanto $P^m(z_c) \to$

∞, de onde segue que $c \notin M_{3,2}$. Mas isto mostra que $M_{3,2} \cap \mathbb{R}^+ = [0, \frac{3}{2}]$, e assim pela simetria de $M_{3,2}$, como mostrado acima, $M_{3,2} \cap \mathbb{R} = [-\frac{3}{2}, \frac{3}{2}]$.

O próximo passo será mostrar que, se $c \in \overline{D}(0, \frac{3}{2})$ então $c \in M_{3,2}$. Para $|c| \leq \frac{3}{2}$ tem-se que

$$|P_c(z_c)| = |\frac{4}{27}c^3| \leq \frac{4}{27}(\frac{3}{2})^3 = \frac{1}{2}$$

Supondo por indução que $|P_c^m(z_c)| \leq \frac{1}{2}$, temos

$$\begin{aligned} |P_c^{m+1}(-\frac{2}{3}c)| &= |P_c^m(-\frac{2}{3}c)|^2 |P_c^m(-\frac{2}{3}c) + c| \\ &\leq (\frac{1}{2})^2(\frac{1}{2} + \frac{3}{2}) = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

portanto $|P_c^m(z_c)| \leq \frac{1}{2}$ para todo inteiro positivo m, isto é, a órbita do ponto crítico z_c por P_c é limitada e assim $c \in M_{3,2}$, de onde concluimos que $M_{3,2}$ contém o disco fechado $\overline{D}(0, \frac{3}{2})$.

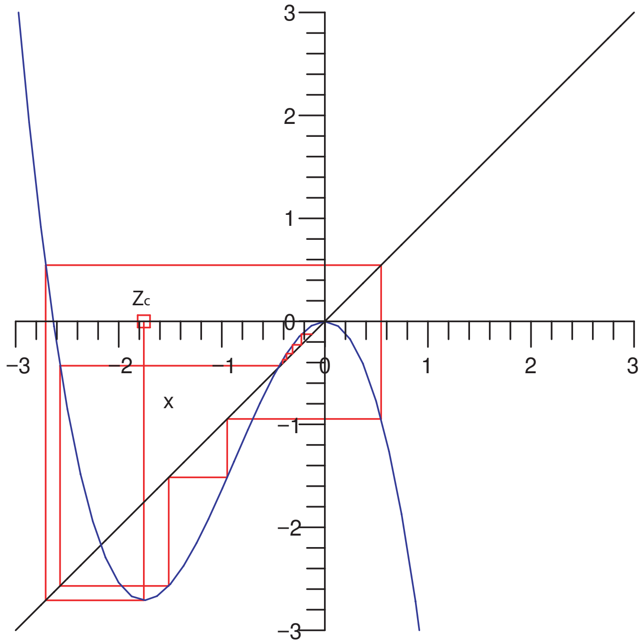

Figura 2.5: Órbita de z_c, para $c = 2.6345$, após 10 iteradas.

Vamos analisar agora a interseção do conjunto de Mandelbrot com o eixo imaginário. A figura 2.5 ilustra a órbita do ponto crítico z_c para $c \in [-c_0 I, c_0 I]$. Mostraremos que a interseção de $M_{3,2}$ com o eixo imaginário é o intervalo $[-c_0 I, c_0 I]$, onde

$$c_0 = \frac{1}{2}(27 + 3\sqrt{57})^{\frac{1}{3}} + \frac{3}{(27 + 3\sqrt{57})^{\frac{1}{3}}} \ (\cong 2,65)$$

Como visto na observação 2.3.1, para P_c restrito ao eixo imaginário, podemos consider c e z reais e $P_c(z) = -(z^3 + cz^2)$. Observe que z_c e $P_c(z_c)$ são negativos e os pontos críticos de P_c, 0 e z_c, são pontos de máximo e mínimo relativos de P_c respectivamente, e são os únicos. Decorre disto que P_c é decrescente em $\mathbb{R} \setminus [z_c, 0]$ e é crescente em $[z_c, 0]$. Novamente pela propriedade de simetria de $M_{3,2}$ e pelo fato de $M_{3,2}$ conter disco fechado $\overline{D}(0, \frac{3}{2})$, basta considerarmos o parâmetro $c > \frac{3}{2}$. Definimos inicialmente o seguinte polinômio em c,

$$\begin{aligned} Q(c) &= P_c^3(z_c) - P_c(z_c) \\ &= -P_c(z_c)^4(P_c(z_c) + c)^2(c - P_c(z_c)^2(P_c(z_c) + c)) - P_c(z_c) \end{aligned}$$

Substituindo $z_c = -\frac{2c}{3}$, obtemos

$$\begin{aligned} Q(c) &= -(-\frac{4}{27}c^3)^4(c - \frac{4}{27}c^3)^2(-(\frac{4}{27}c^3)^2(c - \frac{4}{27}c^3) + c) + \frac{4}{27}c^3 \\ &= \frac{4}{27}c^3\underbrace{(-(\frac{4}{27}c^3)^3(c - \frac{4}{27}c^3)^2(c - (\frac{4}{27}c^3)^2(c - \frac{4}{27}c^3)) + 1)}_{-\widetilde{Q}} \end{aligned}$$

Colocamos

$$\begin{aligned} \widetilde{Q}(c) &= (\frac{4}{27}c^3)^3(c - \frac{4}{27}c^3)^2(c - (\frac{4}{27}c^3)^2(c - \frac{4}{27}c^3)) - 1 \\ &= \frac{64}{19683}c^9(c - \frac{4}{27}c^3)^2(c - \frac{16}{729}c^6(c - \frac{4}{27}c^3)) - 1 \end{aligned}$$

cuja derivada é

$$\begin{aligned} \widetilde{Q}'(c) = {} & \frac{64}{2187}c^8(c - \frac{4}{27}c^3)^2(c - \frac{16}{729}c^6(c - \frac{4}{27}c^3)) + \\ & \frac{128}{19683}c^9(c - \frac{4}{27}c^3)(c - \frac{16}{729}c^6(c - \frac{4}{27}c^3))(1 - \frac{4}{9}c^2) + \\ & \frac{64}{19683}c^9(c - \frac{4}{27}c^3)^2(1 - \frac{32}{243}c^5(c - \frac{4}{27}c^3) - \frac{16}{729}c^6(1 - \frac{4}{9}c^2)) \end{aligned}$$

Observe que o parâmetro $c = \frac{3\sqrt{3}}{2}$ é uma raíz de $\widetilde{Q}'$, e para $c > \frac{3\sqrt{3}}{2}$ temos que $\widetilde{Q}'$ é estritamente positiva. De outro lado, c_0 é uma raíz positiva de $\widetilde{Q}$, onde $c_0 > \frac{3\sqrt{3}}{2}$, portanto, c_0 é a única raíz de $\widetilde{Q}$ para $c > \frac{3\sqrt{3}}{2}$. Assim, para $c > \frac{3\sqrt{3}}{2}$, a situação se divide em dois casos:

(I) se $c > c_0$ então $\widetilde{Q}(c) > 0$, o que implica que $Q(c) < 0$ e portanto $P_c^3(z_c) < P_c(z_c)$

(II) se $c \in (\frac{3\sqrt{3}}{2}, c_0)$ então $\widetilde{Q}(c) < 0$, o que implica que $Q(c) > 0$ e portanto $P_c^3(z_c) > P_c(z_c)$

Consideremos primeiramente o caso $c > c_0$, para o qual devemos ter

$$P_c^3(z_c) < P_c(z_c) \tag{2.8}$$

Neste caso $P_c(z_c) < z_c$, além disso P_c é decrescente em $\mathbb{R} \setminus [z_c, 0]$, de onde obtemos que

$$P_c^4(z_c) > P^2(z_c),\ P_c^5(z_c) < P^3(z_c),\ \ldots$$

Assim, a órbita de z_c por P_c deve convergir para ∞, ou caso contrário teremos um 2-ciclo periódico $\{z_0, z_1\}$, onde $P_c^{2n+1}(z_c) \to z_0$ e $P_c^{2n}(z_c) \to z_1$. Mas a última alternativa não pode ocorrer, pois neste caso o ciclo seria repulsor. De fato, temos que

$$\begin{aligned}
(P_c^2)'(z_0) &= (P_c)'(P_c(z_0))P_c'(z_0) \\
&= (-1)(3P_c(z_0)^2 + 2cP_c(z_0))(-1)(3z_0^2 + 2cz_0) \\
&= z_0P_c(z_0)(3P_c(z_0) + 2c)(3z_0 + 2c) \\
&= z_0z_1(3z_1 + 2c)(3z_0 + 2c)
\end{aligned}$$

Além disso,

$$3z_1 + 2c > 2c > 3 \ \text{ e } \ 3z_0 + 2c < z_o < \frac{-3}{2}$$

pois $c > c_0$, por outro lado,

$$\begin{aligned}
|z_1| > |P_c^2(z_c)| &= |P_c(z_c)^2||P_c(z_c) + c| \\
&> |c|^2| - \frac{4c^3}{27} + c| \\
&= |c|^3|1 - \frac{4c^2}{27}| > \frac{1}{2}
\end{aligned}$$

de onde concluimos que

$$|(P_c^2)'(z_0)| > \frac{1}{2}|z_0||2c||z_0| > 1$$

Portanto, a órbita de z_c converge para o infinito e assim c não pertence ao conjunto de Mandelbrot $M_{3,2}$. Vamos analisar agora o segundo caso, $c \in (\frac{3\sqrt{3}}{2}, c_0)$, para o qual temos que

$$P_c(z_c) \leq P_c^3(z_c) \tag{2.9}$$

Se $P_c(z_c) \geq z_c$ então

$$P_c([z_c, 0]) = [P_c(z_c), 0] \subset [z_c, 0]$$

portanto a órbita de z_c por P_c é limitada. Por outro lado, se $P_c(z_c) < z_c$ então

$$\begin{aligned}
P_c([z_c, 0]) &= [P_c(z_c), 0] \\
&= [P_c(z_c), z_c] \cup [z_c, 0]
\end{aligned}$$

Como $P_c(z_c) \leq P_c^2(z_c)$ temos que

$$P_c^2([z_c, 0]) = [P_c(z_c), P_c^2(z_c)] \cup [P_c(z_c), 0]$$

Se $P_c^2(z_c) \leq 0$ então

$$P_c^2([z_c, 0]) = P_c([P_c(z_c), 0]) \subset [P_c(z_c), 0]$$

Agora, se $P_c^2(z_c) > 0$ então por (2.9) segue que

$$\begin{aligned} P_c^3([z_c, 0]) &= P_c(P_c^2([z_c, 0])) \\ &= P_c([P_c(z_c), P_c^2(z_c)]) \\ &= [P_c^3(z_c), P_c^2(z_c)] \cup [P_c(z_c), 0] \\ &= [P_c(z_c), P_c^2(z_c)] \end{aligned}$$

Em ambos os casos, a órbita de z_c por P_c é limitada, portanto c pertence ao conjunto de Mandelbrot $M_{3,2}$. Para finalizar, falta analisarmos o intervalo $(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}]$. Se o parâmetro c pertence ao intervalo $(\frac{3}{2}, \frac{3\sqrt{3}}{2}]$ então temos duas possiblidades a considerar:

$$P_c(z_c) \geq z_c \text{ ou } P_c(z_c) < z_c$$

Se $P_c(z_c) \geq z_c$ então

$$P_c([z_c, 0]) \subset [z_c, 0]$$

de onde obtemos que a órbita de z_c é limitatda. Por outro lado, se $P_c(z_c) < z_c$ então

$$P_c([z_c, 0]) = [P_c(z_c), 0]$$

e daí segue que

$$P_c^2([z_c, 0]) = P_c([P_c(z_c), 0]) \subset [P_c(z_c), 0]$$

pois é fácil ver que

$$P_c(z_c) < P_c^2(z_c) \leq 0$$

Novamente a órbita de z_c por P_c é limitada e assim $c \in M_{3,2}$. Isto prova que o intervalo $[0, c_0 I]$ está contido em $M_{3,2}$, e pela simetria de $M_{3,2}$ em relação à origem, segue que a intersecção de $M_{3,2}$ com o eixo imaginário é o intervalo $[-c_0 I, c_0 I]$, finalizando assim a prova do teorema. $\square$

Quando o parâmetro c pertence ao disco $D(0, \frac{3}{2})$, que inclui o intervalo real $(-\frac{3}{2}, \frac{3}{2})$, a dinâmica de P_c é relativamente simples, pois o conjunto de Julia neste caso é um quasecírculo. Isto não se verifica em toda a interseção de $M_{3,2}$ com o eixo imaginário, mas em parte desta interseção isto é verdade, mais precisamente como veremos no teorema abaixo, vale para o intervalo $(-2I, 2I)$.

Teorema 2.3.2. *Se $c \in D(0, \frac{3}{2}) \cup (-2I, 2I)$ então J_c é um quasecírculo.*

Demonstração. Vamos analisar primeiramente os parâmetros pertencentes ao disco $D(0, \frac{3}{2})$. Para $c \in D(0, \frac{3}{2})$ temos que

$$\begin{aligned} |P_c(z_c)| &= \frac{4}{27}|c|^3 = \frac{4}{27}|c|^2|c| \\ &< \frac{4}{27}\frac{9}{4}|c| < \frac{1}{3}|c| \end{aligned}$$

Supondo por indução sobre m que $|P_c^m(z_c)| \leq \frac{1}{3^m}|c|$, segue que

$$\begin{aligned} |P_c^{m+1}(z_c)| &= |P_c^m(z_c)|^2|P_c^m(z_c) + c| \\ &\leq \frac{1}{3^{2m}}(\frac{1}{3^m}|c| + |c|)|c|^2 = \frac{1}{3^{2m}}(\frac{1}{3^m} + 1)|c|^3 \\ &\leq \frac{1}{3^{m+1}}|c|(\frac{1}{3}\frac{10}{9}|c|^2) \\ &\leq \frac{1}{3^{m+1}}|c| \end{aligned}$$

Isto implica que $|P_c^m(z_c)| \to 0$ quando $m \to \infty$, de onde segue que o ponto crítico z_c pertence a bacia atratora do zero, logo pelo Teorema 1.2.3 obtemos que P_c é hiperbólico, e do Teorema 1.2.5 segue que J_c é localmente conexo. Note que o conjunto de Fatou F_c é constituído por duas bacias atratoras, a bacia do infinito que é conexa e a bacia do superatrator $z = 0$. O próximo passo será mostrar que a bacia atratora $A(0, P_c)$ também é conexa, isto é, provar que possui uma única componente conexa. A estratégia aqui, será mostrar que todas as pré-imagens de 0, que são o próprio 0 e $-c$, pertencem a $A_0(0, P_c)$, e neste caso $A_0(0, P_c)$ deve ser a única componente de $P^{-1}(A_0(0, P_c))$. Para isto, basta mostrarmos que $-c \in A_0(0, P_c)$. Nesse sentido, consideremos a órbita de cada ponto pertencente ao segmento de reta $\{-\lambda c;\ 0 \leq \lambda \leq 1\}$:

$$\begin{aligned} |P_c(-\lambda c)| &= |(-\lambda c)^3 + c(-\lambda c)^2| \\ &= |c^3\lambda^2(1-\lambda)| \\ &\leq \frac{4}{27}|c|^3 \leq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

pois $\frac{4}{27}$ é um valor de máximo para $\lambda^2(1-\lambda)$ e $|c| \leq \frac{3}{2}$. Supondo por indução sobre m que

$$|P_c^m(-\lambda c)| \leq (\frac{1}{2})^m$$

temos que

$$\begin{aligned} |P_c^{m+1}(-\lambda c)| &= |P_c^m(-\lambda c)|^2|P_c^m(-\lambda c) + c| \\ &\leq (\frac{1}{2})^{2m}((\frac{1}{2})^m + |c|) \\ &\leq (\frac{1}{2})^{2m}((\frac{1}{2})^m + \frac{3}{2}) \leq (\frac{1}{2})^{m+1} \end{aligned}$$

de forma que $P_c^m(-\lambda c) \to 0$ quando $m \to \infty$. Portanto, $-\lambda c \in A(0, P_c)$ para todo $\lambda \in [0,1]$, mas isto implica que $-\lambda c \in A_0(0, P_c)$, pois $\{-\lambda c; 0 \leq \lambda \leq 1\}$ é conexo. De fato, se $-\lambda c \notin A_0(0, P_c)$ para algum λ, então pelo Teorema da Alfândega existe algum $\lambda_0 \in (0,1)$ tal que $-\lambda_0 c$ pertence ao bordo de $A_0(0, P_c)$, e assim $-\lambda_0 c \in J_c$, mas isto contradiz o fato que $P_c^n(-\lambda_0 c) \to 0$. Desta forma $-c \in A_0(0, P_c)$, o que implica que $A_0(0, P_c)$ é a única componente de $P^{-1}(A_0(0, P_c))$, portanto a bacia atratora de $z = 0$ satisfaz $A(0, P_c) = A_0(0, P_c)$, isto é, $A(0, P_c)$ possui uma única componente conexa. Como não sobraram pontos críticos e $A(\infty, P_c)$ é conexa, F_c possui somente duas componentes que são completamente invariantes, assim pelo Teorema 1.2.4 obtemos o resultado desejado.

Para finalizar, falta analisarmos o caso $c \in (-2I, -\frac{3I}{2}] \cup (\frac{3I}{2}, 2I)$, o qual, pela simetria de $M_{3,2}$, se restringe a $c \in [\frac{3I}{2}, 2I)$. Novamente pela observação 2.3.1, P_c restrito ao eixo imaginário pode ser considerado como um polinômio real, $P_c(z) = -z^3 - cz^2$, para c e z reais. Observe que P_c é crescente no intervalo $[z_c, 0]$ e além disso é fácil ver que

$$z_c \quad < \quad P_c(z_c) < 0$$

Assim,

$$z_c < P_c(z_c) < \cdots < P_c^{n-1}(z_c) \quad < \quad P_c^n(z_c) < 0$$

O Teorema da Convergência Monótona, nos diz que essa sequência converge e deve convergir para 0, já que não temos outro ponto fixo sobre o eixo-real para este caso. Note que, de igual modo, $P_c^n(z) \to 0$ para todo $z \in [z_c, 0]$. Agora, se $\beta \in (\frac{2}{3}, 1)$ então $-\beta c \in (-c, z_c)$ e

$$-\frac{2}{3}c < P_c(-\beta c) = c^3\beta^2(\beta - 1) < 0$$

pois $\beta^2(\beta - 1) \in (-\frac{4}{27}, 0)$ e assim temos que a órbita de $-\beta c$ também converge para 0. Com os mesmos argumentos usados acima, obtemos que P_c é hiperbólico e que as pré-imagens de 0, que são 0 e $-c$, pertencem a bacia imediata $A_0(0, P_c)$, portanto F_c possui somente duas componentes que são totalmente invariantes, e segue que J_c é um quasecírculo. $\square$

Observação 2.3.3. *O fato de J_c ser um quasecírculo para todo parâmetro $c \in \mathbb{D}(0, \frac{3}{2}) \cap \mathbb{R}$ é preciso. De fato, se $c = \frac{3}{2}$ então J_c não é um quasecírculo. Note que neste caso temos que o ponto crítico $z_c = -1$ é pré-periódico,*

$$-1 \xrightarrow{P_c} \tfrac{1}{2} \xrightarrow{P_c} \tfrac{1}{2}$$

Como

$$P_c'(\frac{1}{2}) = 3(\frac{1}{2})^2 + 3(\frac{1}{2}) = \frac{9}{4} > 1$$

temos que $-1 \in J_c$*, assim devemos ter* $A_0(0, P_c) \neq A(0, P_c)$*, isto é,* $A(0, P_c)$ *possui infinitas componentes. De fato, se* $A(0, P_c)$ *fosse conexa então seria simplesmente conexa, já que* $A(\infty, P_c)$ *é conexa. Neste caso, como* $P_c|_{A_0(0,P_c)}$ *é um 2-recobrimento sobre* $A_0(0, P_c)$*, então* $A_0(0, P_c)$ *deveria conter 2 pontos críticos, ver [1], pag 87 . Mas isto não é possível já que* $z_c \in J_c$*. Dessa forma* F_c *possui infinitas componentes, logo* J_c *não é um quasecírculo. De outro lado, note que* P_c *é subhiperbólico, isto se deve ao fato do único ponto crítico livre pertencer ao conjunto de Julia e ter órbita finita, e segue daí que* J_c *é localmente conexo. Observe que* F_c *não possui componente parabólica (já que o crítico livre está em* J_c*) e também não possui disco de Siegel, já que a órbita de* z_c *é finita. O caso* $c = -\frac{3}{2}$ *é completamente análogo, isto é,* $F_{\frac{-3}{2}}$ *possui infinitas componentes e portanto* $J_{\frac{-3}{2}}$ *não é um quasecírculo.*

Observação 2.3.4. *Quando o parâmetro* $c = 2I$*, temos que os pontos fixos de* P_c *são* 0 *e* $-I$*, e como* $P_c'(-I) = 1$*,* $-I$ *é um ponto fixo parabólico com multiplicador* 1*, e assim a bacia atratora de* $-I$ *possui somente uma pétala atratora e uma repulsora. Desta forma o crítico* z_c *deve estar na bacia* $A(-I, P_{2I})$*. Observe que* J_c *não é mais um quasecírculo, mas é localmente conexo, já que todos os críticos estão em* F_c*. O mesmo ocorre para* $c = -2I$*.*

Cabe observar aqui, que o interior de $M_{3,2}$ é não vazio, de fato, basta notar que no Teorema B, o qual provamos acima, mostramos que $M_{3,2}$ contém o disco aberto de raio $\frac{3}{2}$.

Terminamos este capítulo com mais um resultado sobre a estrutura topológica de $M_{3,2}$, que será bastante útil no capítulo 3.

Proposição 2.3.5. *Se* W *é uma componente conexa contida no interior de* $M_{3,2}$*, então* W *é simplesmente conexa.*

Demonstração. Suponha que W não é simplesmente conexa, então temos que $\mathbb{C} \setminus W$ não é conexo, assim existem abertos disjuntos, cuja união contém $\mathbb{C} \setminus W$, além disso, $\mathbb{C} \setminus W$ pode conter somente uma componente ilimitada, pois $\mathbb{C} \setminus D(0, 3) \subset \mathbb{C} \setminus W$ e $\mathbb{C} \setminus D(0, 3)$ é conexo, assim $\mathbb{C} \setminus W$ contém uma componente limitada. Seja B esta componente limitada e suponha A_1 e A_2 abertos disjuntos onde $B \subset A_1$ e $((\mathbb{C} \setminus W) \setminus B) \subset A_2$, daí seguindo que $B \subset M_{3,2}$. Por outro lado, note que B não pode estar contido em $M_{3,2}$. De fato, se $B \subset Int(M_{3,2})$ então B deve ser alguma componente conexa de $Int(M_{3,2})$ diferente de W, mas então qualquer aberto que contenha $(\mathbb{C} \setminus W) \setminus B$ deve ter interseção não vazia com o bordo de B, logo deve ter interseção não vazia também com B. Por outro lado, se $B \cap \partial M_{3,2} \neq \emptyset$ então também não podemos ter um aberto contendo B que tenha interseção vazia com $\mathbb{C} \setminus M_{3,2}$, portanto $B \cap M_{3,2} = \emptyset$, o que gera uma contradição, de onde concluimos que W é simplesmente conexa. □

Corolário 2.3.6. *$\overline{W}$ é simplesmente conexa*

Demonstração. A prova é essencialmente a mesma. $\square$

Capítulo 3

Componentes Hiperbólicas da Família P_c

3.1 Introdução

As componentes do interior de $M_{3,2}$ associadas a polinômios hiperbólicos, isto é, para cada parâmetro c pertencente a uma destas componentes, P_c é hiperbólico, são chamadas *componentes hiperbólicas* de $M_{3,2}$. Observe que, em particular estas componentes são subconjuntos de $\mathcal{H}$. Neste capítulo nós abordamos o estudo das componentes hiperbólicas de $M_{3,2}$, onde veremos que uma destas componentes, a qual chamamos de *componente principal* de $M_{3,2}$ e denotamos por C_0, tem a seguinte propriedade, o conjunto de Julia associado a P_c, para $c \in C_0$, é um quasecírculo e o respectivo conjunto de Fatou possui duas componentes, que são as bacias de atração dos pontos fixos superatratores $z = 0$ e $z = \infty$. Outro tipo de componente que "habita"em $\mathcal{H}$, como veremos adiante, são aquelas associadas aos parâmetros c, cuja a órbita do ponto crítico z_c por P_c converge para 0, mas z_c não pertence a bacia imediata de 0, onde ressaltamos que esse tipo de componente não aparece no caso quadrático.

3.2 Estabilidade do conjunto de Julia

Apresentamos brevemente nesta seção o conceito de estabilidade em relação ao conjunto de Julia de funções racionais, que será fundamental para demonstrarmos alguns dos resultados abaixo. O Teorema 3.2.2 que enunciamos abaixo pode ser visto em [16], pag 101. Para a definição a seguir, consideramos o conjunto $Rac(\overline{\mathbb{C}})$ munido da topologia C^0.

Definição 3.2.1. *Denotamos por $Rac(\overline{\mathbb{C}})$, o conjunto das funções racionias definidas sobre a Esfera de Riemann. Dizemos que $f_0 \in Rac(\overline{\mathbb{C}})$, é Julia-estável se existirem uma vizinhança $N(f_0)$ de f_0 em $Rac(\overline{\mathbb{C}})$ e uma função contínua $H : N(f_0) \longrightarrow C^0(J_{f_0}, \overline{\mathbb{C}})$, tais que:*

i. $H(f_0) = Id$

ii. $H(f)$ *é um homeomorfismo de* J_{f_0} *sobre* J_f *para todo* $f \in N(f_0)$

iii. $H(f) \circ f_0 = f \circ H(f)$ *para todo* $z \in J_{f_0}$ *e para todo* $f \in N(f_0)$

Teorema 3.2.2. *As funções racionais hiperbólicos são Julia-estáveis.*

3.3 Teorema C

No Teorema C, que enunciamos a seguir, nós descrevemos a componente que contém o parâmetro $c = 0$, a qual chamaremos de *componente principal* do interior de $M_{3,2}$ e denotamos por C_0. Lembramos aqui que o fato de 0 pertencer ao interior de $M_{3,2}$ foi mostrado no Teorema B, onde provamos que $D(0, \frac{3}{2}) \subset M_{3,2}$.

Teorema C. *Seja* C_0 *a componente conexa do interior de* $M_{3,2}$ *que contém o parâmetro* $c = 0$*, então:*

(a) $c \in C_0$ *se e somente se o ponto crítico* z_c *de* P_c *pertence a bacia imediata de* $z = 0$*. Em particular* $C_0 \subset \mathcal{H}$*.*

(b) C_0 *contém o disco aberto* $D(0, \frac{3}{2})$*, além disso, a intersecção com o eixo real é o intervalo aberto* $(\frac{-3}{2}, \frac{3}{2})$ *e com o eixo imaginário é* $(-2I, 2I)$*.*

(c) Se $P_c(z_c)$ *pertence a bacia imediata de* 0*, então* z_c *também pertence e assim* $c \in C_0$*.*

(d) Se $c \in C_0$ *então o conjunto de Julia associado a* P_c *é um quasecírculo, que particiona o conjunto de Fatou em duas componentes conexas.*

Quando o ponto crítico z_c está na bacia de atração do zero, o seguinte teorema, que pode ser visto em [13] pag. 64, estabelece uma ditocomia em relação a órbita do ponto crítico z_c. Mais precisamente temos o seguinte resultado.

Teorema 3.3.1. *Seja* $A_0(0, P_c)$ *a bacia atratora imediata de* $z = 0$*, em relação ao parâmetro* c*. Então vale uma das alternativas:*

i. $P_c|_{A_0(0,P_c)} : A_0(0, P_c) \longrightarrow A_0(0, P_c)$ *é conformalmente conjugada com a aplicação* $z \longmapsto z^2$*, definida no disco aberto de raio um.*

ii. $A_0(0, P_c)$ *contém o ponto crítico não nulo* z_c *e além disso* $P_c^k(z_c) \longrightarrow 0$*, mas* $P_c^k(z_c) \neq 0$ *para todo* k*.*

Com este resultado em mãos mais a propriedade de estabilidadde do conjunto de Julia, visto na seção 3.2, partimos agora para provar o Teorema C.

Demonstração. (Teorema C)
(a) Primeiramente mostraremos que o ponto crítico z_c pertence a bacia de atração $A(0, P_c)$ para todo $c \in C_0$. Para isto definimos

$$f_n(c) = P_c^n(z_c)$$

Note que f_n é um polinômio em c para cada inteiro positivo n, além disso, pelo Teorema B temos que $\{f_n\}$ é uma sequência limitada sobre C_0, logo, pelo Teorema de Montel, $\{f_n\}$ é uma família normal e assim converge sobre C_0 para alguma função analítica f, tal que, $f(c) = \lim_{n\to\infty} f_n(c)$. Como visto no Teorema 2.3.2, existe uma vizinhança V_0 de 0, onde $z_c \in A(0, P_c)$ para todo $c \in V_0$. Assim temos que $f(c) = 0$ para todo $c \in V_0$, e o Princípio da Extensão Analítica nos diz que $f \equiv 0$ em C_0. Portanto, segue que $\lim_{n\to\infty} P_c^n(z_c) = 0$ para todo $c \in C_0$, de onde obtemos que $z_c \in A(0, P_c)$. Em particular, obtemos que P_c é hiperbólico para todo $c \in C_0$.

O próximo passo será mostrar que o crítico z_c pertence a bacia imediata de atração de 0, para todo $c \in C_0$. Como vimos no Teorema 2.3.2, 0 possui uma vizinhança V_0 em C_0, tal que, se $c \in V_0$ então $-c \in A_0(0, P_c)$, em particular isto implica que J_c é um quasecírculo (como visto no Teorema 2.3.2, o disco $D(0, \frac{3}{2})$ satisfaz esta propriedade). Suponha que V_0 seja a vizinhança maximal de 0 em C_0 satisfazendo esta propriedade. Se $C_0 \setminus V_0 \neq \emptyset$ então existe $c_1 \in \partial V_0 \cap C_0$ tal que c_1 pertence a $C_0 \setminus V_0$, e como P_{c_1} é hiperbólico, temos pelo Teorema 3.2.2 que existe uma vizinhança W_{c_1} de c_1, tal que, $P_c|_{J_c}$ é conjugado topologicamente com $P_{c_1}|_{J_{c_1}}$, para todo $c \in W_{c_1}$. Existem parâmetros $c_2, c_3 \in W_{c_1}$ tal que $c_2 \in V_0$ e $c_3 \in C_0 \setminus V_0$, assim J_{c_2} é um quasecírculo, mas J_{c_3} não, pois, como o ponto crítico z_c não pertence a bacia imediata de atração de $z = 0$, a bacia de atração possui mais de uma componente conexa e assim J_{c_3} possui infinitas curvas fechadas, que são o bordo da bacia imediata $A_0(0, P_{c_3})$ e suas pré-imagens. Portanto, J_{c_3} e J_{c_1} não podem ser homeomorfos, mas isto contradiz o Teorema 3.2.2, o que nos leva a concluir que $C_0 \setminus V_0 = \emptyset$. Em particular, isto prova o item (d) deste Teorema.

Para terminar a prova de (a), falta mostrar que, se $z_c \in A_0(0, P_c)$ então $c \in C_0$, e para isto precisamos do seguinte lema:

Lema 3.3.2. *Se $c \in M_{3,2}$ e $|z| \leq \frac{1}{4}$ então $P_c^n(z) \to 0$ quando $n \to \infty$.*

Demonstração. De fato, note que $|c| \leq 3$ pois $c \in M_{3,2}$, assim

$$|P_c(z)| = |z|^2|z + c| \leq (\frac{1}{4})^2|\frac{1}{4} + 3| \leq \frac{1}{4}$$

Supondo por indução sobre n que,

$$P_c^n(z)| \leq (\frac{1}{4})^n$$

temos que

$$\begin{aligned} |P_c^{n+1}(z)| &= |P_c^n(z)|^2|P_c^n(z)+c| \\ &\leq (\frac{1}{4})^{2n}|(\frac{1}{4})^n+3| \\ &\leq (\frac{1}{4})^{n+1} \end{aligned}$$

de onde segue o resultado desejado. □

Voltando à prova do teorema, observe que o valor de $\frac{1}{4}$ pode ser melhorado, mas é o suficiente para o que pretendemos fazer por agora. Suponha $\widehat{c} \in M_{3,2}$ tal que $z_{\widehat{c}} \in A_0(0,P_c)$ e $\widehat{c} \notin C_0$, isto é, que exista outra componente D no interior de $M_{3,2}$, contendo $\widehat{c}$, mas disjunta de C_0. Defina

$$Q_n(c) = P_c^n(z_c), \quad c \in D$$

Observe que Q_n é limitada, pois pelo Teorema B, $|P_c^n(z_c)| \leq 4$ para todo $c \in M_{3,2}$, portanto Q_n é uma família normal e pelo Teorema de Montel converge para alguma função analítica G em D. Usando o mesmo raciocínio feito no início da prova deste item (a), concluimos que $G \equiv 0$. Temos que $0 \notin D$ e pelo Teorema 3.3.1, $0 \notin Q_n(D)$, pois neste caso teríamos $P_c^n(z_c) = 0$ com $z_c \in A_0(0,P_c)$. Como $G \equiv 0$, dado $\varepsilon > 0$, existem $n_0 \geq 1$ e $c_0 \in D$, tal que, $|Q_{n_0}(c_0)| < \varepsilon$. Assim, o segmento de reta $[0, Q_{n_0}(c_0)]$ corta o bordo de $Q_n(D)$ de forma radial, logo existe um $c \in \partial D$, tal que, $|Q_n(c)| < \varepsilon$. Mas $Q_n(c) = P_c^n(z_c)$, e se ε for suficientemente pequeno, pelo lema 3.3.2 temos que $|P_c^n(z_c)| \to 0$, o que é uma condição aberta. Mas isto contradiz o fato de c pertencer ao bordo de D, portanto $\widehat{c} \in C_0$.

(b) A prova deste item decorre diretamente do Teorema 2.3.2 e do item (a) acima. De fato, nós mostramos no Teorema 2.3.2 que $z_c \in A_0(0,P_c)$ para todo $c \in D(0,\frac{3}{2}) \cup (-2I, 2I)$, e o item (a) implica que $c \in C_0$.

(d) Já foi provado no item (a).

(c) Seja $\widehat{c} \in \mathbb{C}$ tal que $P_{\widehat{c}}(z_{\widehat{c}}) \in A_0(0,P_{\widehat{c}})$ e suponha W a componente conexa do interior de $M_{3,2}$ contendo $\widehat{c}$. Se $P_c(z_c) = 0$ para algum $c \in W$ então $c = 0$ e isto implica que $W = C_0$. Lembrando que, pelo item (a), se $z_c \in A_0(0,P_c)$ então também devemos ter $W = C_0$. Vamos supor que $W \neq C_0$. Consideremos a seguinte aplicação

$$f_n(c) = P_c^n(z_c), \; c \in W$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe um parâmetro $\widetilde{c} \in W$ e $n_0 > 1$ tal que $|P^n_{\widetilde{c}}(z_{\widetilde{c}})| < \varepsilon$ para todo $n \geq n_0$. Admitindo que $0 \notin f_n(W)$ para todo $n > 1$, obtemos o segmento de reta $[0, f_{n_0}(\widetilde{c})]$, que corta o bordo de $f_{n_0}(W)$, existindo assim um $c \in \partial W$ tal que $|f_n(c)| < \varepsilon$. Mas, para ε suficientemente pequeno, o lema 3.3.2 nos diz que $|P^n_c(z_c)| \to 0$, o que é uma condição aberta. Mas isto contradiz o fato de c pertencer ao bordo de W, portanto existe um parâmetro $c \in W$, tal que, $P_c(z_c) = 0$, de onde obtemos que $W = C_0$. Para encerrar a prova devemos mostrar que, sob a hipótese de $P_c(z_c) \neq 0$ para todo $c \in W$, então $0 \notin f_n(W)$ para todo $n > 1$. De fato, se $c \in W$ então $z_c \notin A_0(0, P_c)$, e pelo Teorema 3.3.1 temos que

$$P_c|_{A_0(0,P_c)} : A_0(0, P_c) \longrightarrow A_0(0, P_c)$$

é conformemente conjugada a aplicação

$$z \longmapsto z^2$$

definida sobre o disco aberto de raio um. Assim existe uma conjugação conforme

$$\phi : A_0(0, P_c) \longrightarrow D(0, 1)$$

tal que

$$\phi P_c \phi^{-1}(z) = z^2$$

Note que

$$\phi P_c \phi^{-1}(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

assim

$$P_c \phi^{-1}(0) = \phi^{-1}(0), \text{ com } \phi^{-1}(0) \in A_0(0, P_c)$$

portanto $\phi^{-1}(0) = 0$, pois zero é o único ponto fixo de P_c em $A_0(0, P_c)$. De outro lado temos que

$$\phi P^n \phi^{-1}(z) = z^{2n}$$

Assim, de maneira análoga se

$$P^n_c \phi^{-1}(z) = 0$$

então

$$\phi P^n_c \phi^{-1}(z) = \phi(0) = 0$$

Mas isto implica que

$$\phi^{-1}(z) = 0 \Rightarrow z = 0$$

Portanto, se

$$f_n(c) = P^n_c(z_c) = 0$$

então

$$P^n_c(z_c) = P^{n-1}_c(P_c(z_c)) = 0$$

de onde obtemos

$$P_c(z_c) = 0$$

Mas isto contradiz a hipótese de $P_c(z_c) \neq 0$, mostrando assim que $0 \notin f_n(W)$

$\square$

3.4 Teorema D

Outras duas componentes do interior de $M_{3,2}$, distintas de C_0, que descreveremos abaixo, são componentes associadas a pontos fixos não nulos e atratores de P_c. Existem exatamente duas destas componentes, sendo simétricas em relação à origem e cujos pontos críticos finitos e não nulos associados a parâmetros destas componentes, convergem para pontos fixos atratores finitos e não nulos. Em particular, essas componentes são hiperbólicas e portanto são subconjuntos de $\mathcal{H}$. Mais precisamente temos o seguinte resultado.

Teorema D. *Seja $c \in M_{3,2}$ tal que P_c possui um ponto fixo atrator finito $z(c) \neq 0$, e seja C a componente conexa do interior de $M_{3,2}$ contendo c. Então, ou C é a imagem do disco $D(0,1)$ pela função $c_1(\lambda) = \frac{3-\lambda}{\sqrt{\lambda-2}}$, ou é a imagem de $D(0,1)$ pela função $c_2(\lambda) = \frac{\lambda-3}{\sqrt{\lambda-2}}$. Além disso, para todo $\lambda \in D(0,1)$, $P_{c_i(\lambda)}$ possui um ponto fixo atrator finito e não nulo $z(c_i(\lambda))$ satisfazendo $P'_{c_i(\lambda)}(z(c_i(\lambda))) = \lambda$, para $i = 1, 2$.*

A seguir nós enuciamos e provamos o seguinte lema, que usaremos na prova do Teorema D.

Lema 3.4.1. *Para cada $\lambda \in D(0,1)$, existem parâmetros c_1 e c_2 simétricos em relação à origem, tais que, $P'_{c_i}(z_i) = \lambda$, onde z_i é um ponto fixo não nulo de P_{c_i}, para $i = 1, 2$.*

Demonstração. Para $c \in \mathbb{C}$ temos que

$$P_c(z) = z \Leftrightarrow \ z = \frac{-c \pm \sqrt{c^2+4}}{2}$$

onde denotamos os pontos fixos de P_c por

$$z_1 = \frac{-c + \sqrt{c^2+4}}{2} \ \text{ e } \ z_2 = \frac{-c - \sqrt{c^2+4}}{2}$$

Fixando $\lambda \in D(0,1)$ temos que as soluções da equação

$$P'_c(z_i) = \lambda$$

são

$$c = \frac{3-\lambda}{\sqrt{\lambda-2}} \ \text{ ou } \ c = \frac{\lambda-3}{\sqrt{\lambda-2}}$$

em ambos os casos, isto é, para $i = 1$ ou $i = 2$. Obtemos desta forma duas funções,

$$c_1(\lambda) = \frac{3-\lambda}{\sqrt{\lambda-2}} \ \text{ e } \ c_2(\lambda) = \frac{\lambda-3}{\sqrt{\lambda-2}}$$

tal que $c_1(\lambda) = -c_2(\lambda)$, isto significa que possuem imagem simétrica em relação a origem, e satisfazem $P'_{c_1(\lambda)}(z_1) = P'_{c_2(\lambda)}(z_2) = \lambda$. $\square$

Demonstração. (Teorema D)
Na prova do lema 3.4.1, mostramos que se P_c possui um ponto fixo atrator então $c \in c_1(D(0,1))$ ou $c \in c_2(D(0,1))$. O Teorema E (que enunciamos e provamos à frente e é independente deste teorema) garante que todo parâmetro pertencente a C está associado a um ponto fixo atrator não nulo e finito. Portanto, C deve ser o interior de uma das curvas citadas acima, provando assim a primeira parte do teorema. A última afirmação segue diretamente do lema 3.4.1. $\square$

Cada uma das aplicações c_i descritas no Teorema D, aplica analiticamente o disco fechado $\overline{D}(0,1)$ sobre o fecho de uma componente conexa C, pertencente ao interior de $M_{3,2}$, que denotamos por $C_i = c_i(D(0,1))$. Para cada $c \in C_i$, P_c possui um ponto fixo atrator finito e não nulo, de onde segue que C_i é um subconjunto de $\mathcal{H}$. Como vimos no lema anterior, C_1 e C_2 são simétricos em relação à origem e note que não tocam o eixo real. De fato, se $c_1(\lambda)$ fosse real então

$$\lambda = P'_{c_1}(z_1) = \frac{c_1^2}{2} - \frac{c_1}{2}\sqrt{c_1^2+4} + 3$$

também seria real, mas isto é um absurdo pois, $c_1(\lambda) = \frac{3-\lambda}{\sqrt{\lambda-2}}$, onde $|\lambda| \leq 1$. O mesmo vale para $c_2(\lambda)$, e assim segue que não há interseção de C_1 e C_2 com o eixo real. Observe que

$$c_1([-1,1]) = [-\frac{4\sqrt{3}I}{3}, -2I]$$

assim a componente C_1 pertence ao semiplano inferior de $\mathbb{C}$ e analogamente a componente C_2 pertence ao semiplano superior de $\mathbb{C}$. Os parâmetros $-2I$ e $2I$ são bifurcações em $M_{3,2}$, pertencentes a ∂C_1 e a ∂C_2 respectivamente. Quando $c = 2I$ temos que

$$P_{2I}(-I) = -I^3 + 2II^2 = -I$$

e

$$P'_{2I}(-I) = 3(-I)^2 + 4I(-I) = -I^2 = 1$$

portanto $-I$ é um ponto fixo parabólico de P_c, com multiplicador $\lambda = 1$. Para $c = -2I$, temos que I é um ponto fixo parabólico com multiplicador $\lambda = 1$. Esses parâmetros também estão no bordo da componente principal C_0, e além disso, $\overline{C_0} \cap \overline{C_1} = \{2I\}$ e $\overline{C_0} \cap \overline{C_2} = \{-2I\}$. Em relação ao bordo das componentes C_i temos o seguinte corolário do Teorema D.

Corolário 3.4.2. *O bordo de cada uma dessas componentes consiste precisamente dos parâmetros c, tais que, o polinômio associado P_c possui um ponto fixo neutro. Mais precisamente, se $\lambda \in \partial D(0,1)$ então existem $c_1 \in \partial C_1$ e $c_2 \in \partial C_2$ tais que $P'_{c_i}(z_i) = \lambda$, onde z_i é um ponto fixo neutro e não nulo de P_{c_i}, para $i = 1, 2$.*

Demonstração. Fixamos primeiramente a função

$$c_1 : \overline{D}(0,1) \longrightarrow \mathbb{C}$$

dada acima e fazendo uma simples mudança de variáveis, $\lambda = w + 2$, obtemos

$$c_1 : \overline{D}(-2,1) \longrightarrow \mathbb{C}$$

definida por

$$c_1(w) = \frac{1-w}{\sqrt{w}}$$

Fixamos o ramo da função raíz definido no conjunto $U = \mathbb{C} \setminus \{x \in \mathbb{R}; x \geq 0\}$, assim temos que c_1 é analítica, pois

$$c_1'(w) = \frac{-1-w}{2w\sqrt{w}}$$

e observe que $c_1'(w) = 0$ somente para $w = -1$. Afirmamos que c_1 é injetiva em $D(-2,1)$. De fato, suponha que

$$c_1(w) = c_1(w_0) \tag{3.1}$$

então temos que

$$c_1^2(w) = c_1^2(w_0)$$

e portanto

$$\frac{1-2w+w^2}{w} = \frac{1-2w_0+w_0^2}{w_0}$$

de onde

$$w_0 + w_0w^2 = w + ww_0^2$$

e assim

$$(w_0 - w)(1 - ww_0) = 0$$

Segue então que as possíveis soluções de 3.1 são, $w = w_0$ e $w = \frac{1}{w_0}$. Note que não podemos ter $ww_0 = 1$, pois para $w, w_0 \in D(-2,1)$ temos que $min\{|w|,|w_0|\} > 1$, portanto a única solução é $w = w_0$, logo c_1 é injetiva em $D(-2,1)$ como afirmado acima. Segue do Teorema A.1.3, no apêndice deste trabalho, que $c_1(w)$ restrito ao disco aberto $D(-2,1)$ é um biholomorfismo sobre sua imagem e portanto o mesmo vale para $c_1(\lambda)$ restrito ao disco aberto $D(0,1)$ e desta forma,

$$c_1(\partial D(0,1)) = \partial c_1(D(0,1))$$

O mesmo vale para a função $c_2(\lambda)$ definida acima. Usando o mesmo procedimento do lema 3.4.1, finalizamos a prova deste corolário. $\square$

Assim, de acordo com o corolário 3.4.2, temos todos os tipos de pontos fixos neutros racionais e irracionais associados aos parâmetros $c \in \partial C_i$, isto é, parâmetros associados a discos de Siegel, pontos de Cremer e Parabólicos.

3.5 Teorema E

O próximo teorema, que obtemos usando técnicas do caso quadrático, nós consideremos o caso geral das componentes hiperbólicas associadas a pontos periódicos atratores. Lembramos aqui que, o r-ciclo de um ponto periódico, de período r, é denotado aqui por $\{z_1(c), \ldots, z_r(c)\}$.

Teorema E. *Seja $c_1 \in \mathbb{C}$ e W a componente conexa do interior de $M_{3,2}$, contendo c_1. Suponha que P_{c_1} possui um ponto periódico atrator não nulo, cujo período é r, então:*

(a) Para todo $c \in W$, P_c possui um ponto periódico atrator finito e não nulo, de período r, onde cada elemento do r-ciclo de $z_1(c)$, depende analiticamente de c. Segue que $W \subset \mathcal{H}$.

(b) W é aplicada analiticamente sobre o disco aberto $D(0,1)$. Em particular, W possui um parâmetro c, tal que, o ponto periódico atrator não nulo de P_c é superatrator.

Demonstração. (a) Seja $\{z_1(c), \ldots, z_r(c)\}$ o r-ciclo do ponto periódico atrator $z_1(c_1)$, de período r, de P_{c_1}. Definimos a seguinte aplicação

$$Q(c,z) = P_c^r(z) - z$$

Observe que Q é analítica e $Q(c_1, z_1(c_1)) = 0$, onde temos que

$$\frac{\partial Q}{\partial z}(c,z) = P_c'(P_c^{r-1}(z))P_c'(P_c^{r-2}(z))\ldots P_c'(z) - 1$$

portanto

$$\frac{\partial Q}{\partial z}(c_1, z_1(c_1)) \neq 0$$

pois $z_1(c_1)$ é um ponto periódico atrator e assim

$$|P_{c_1}'(P_{c_1}^{r-1}(z_1(c_1)))P_{c_1}'(P_{c_1}^{r-2}(z_1(c_1)))\ldots P_{c_1}'(z_1(c_1))| < 1 \tag{3.2}$$

Pelo Teorema da Função Implícita, existem vizinhanças V e U de c_1 e $z_1(c_1)$ respectivamente, e uma função analítica $h : V \longrightarrow U$ com $h(c_1) = z_1(c_1)$, tal que, para cada $c \in V$, $h(c)$ é o único ponto em U satisfazendo

$$Q(c, h(c)) = 0$$

Portanto, $h(c)$ é um ponto periódico, de período r, e atrator de P_c. O fato de ser periódico está claro, e quanto ao período ser r, observe que

$$P_{c_1}^k(z_1(c_1)) - z_1(c_1) \neq 0$$

para $1 \leq k < r$ e pela continuidade da aplicação $Q(c, z_1(c))$, para cada $1 \leq k < r$, existe uma vizinhança de c_1 tal que

$$P_c^k(z_1(c)) - z_1(c) \neq 0$$

para todo c nesta vizinhança. Como c_1 pertence a cada uma destas $k-1$ vizinhanças, basta então tomar a interseção destas. Quanto ao fato de ser atrator, note que, $P_c', P_c^{r-1}, \ldots, P_c$ e h são analíticas em c, logo

$$P_c'(P_c^{r-1}(h(c)))P_c'(P_c^{r-2}(h(c)))\ldots P_c'(h(c)) \tag{3.3}$$

também é analítica, portanto existe uma vizinhança de c_1, tal que, (3.3) cumpre a desigualdade (3.2). Decorre disto que existe uma vizinhança de c_1, que podemos supor que seja V, que satisfaz o item (a). Em particular, c_1 pertence ao interior de $M_{3,2}$ e $z_1(c)$ depende analiticamente de c para todo $c \in V$. Suponha W a componente do interior de $M_{3,2}$ contendo c_1. Precisamos de mostrar que P_c possui um ponto periódico atrator, de período r, para todo $c \in W$. Tome $c \in W$ e considere a seguinte sequência $\{g_j(c)\}$, definida por

$$g_j(c) = P_c^{rj}(z_c) \tag{3.4}$$

onde z_c é o ponto crítico não nulo de P_c. Note que $\{g_j(c_1)\}$ converge para algum ponto do ciclo $\{z_1(c_1), \ldots, z_r(c_1)\}$, digamos para $z_1(c_1)$. Além disso, como $c \in M_{3,2}$, segue que (3.4) é uniformemente limitada em W, portanto, pelo Teorema de Montel essa sequência é normal sobre W. Pela normalidade e analiticidade da família $\{g_j\}$, ela converge localmente uniformemente sobre W para alguma função função analítica f, onde

$$Q(c_1, f(c_1)) = 0$$

pois

$$f(c_1) = z_1(c_1) = \lim_{j\to\infty} g_j(c_1)$$

assim devemos ter $Q(c, f(c)) = 0$, para todo c pertencente a alguma vizinhança de c_1, que novamente podemos supor que seja V, o que implica que, $f_{|V} = h$. O Principio da Extensão Analítica nos diz que devemos ter

$$Q(c, f(c)) = 0$$

para todo $c \in W$, assim, temos que $f(c)$ é um ponto periódico de P_c, que é atrator para $c \in V$. Por outro lado, devemos observar que, $f(c)$ é um ponto periódico repulsor de P_c somente se $P_c^{rj}(z_c) = f(c)$, para algum $j > 1$. Mas isto pode ocorrer no máximo para um conjunto enumerável de parâmetros. De fato, note que para cada j, o polinômio $P_c^{rj}(z_c)$ possui grau $s(j)$, logo possui no máximo $s(j)$ raízes, assim, para cada j, existe no máximo $s(j)$ parâmetros satisfazendo $P_c^{rj}(z_c) = f(c)$. Logo, pela analiticidade de (3.3), não podemos ter a desigualdade

$$|(P^r)'(z)| = |P_c'(P_c^{r-1}(z))P_c'(P_c^{r-2}(z))\ldots P_c'(z)| > 1$$

válida somente para um conjunto enumerável de parâmetros em W. Portanto, $f(c)$ é um ponto periódico atrator, de período r e não nulo, para todo $c \in W$, o que implica que $z_1(c)$ depende analiticamente de c, como também cada elemento do r-ciclo de $z_1(c)$, com isto finalizamos a prova de (a).

(b) Definimos a seguinte aplicação sobre W

$$\rho(c) = (P_c^r)'(z_1(c))$$

onde $z_1(c)$ é o ponto periódico atrator que varia analiticamente em função de c, como descrito no item (a) acima. Pela analiticidade de ρ, podemos estendê-la para o bordo de W, colocando

$$\rho(\widetilde{c}) = \lim_{c\to\widetilde{c}} \rho(c)$$

para todo $\widetilde{c} \in \partial W$. Note que, $|\rho(c)| = 1$ para todo $c \in \partial W$. De fato, se $c_0 \in \partial W$ então tome uma sequência $\{c_n\}$ contida em W, tal que, $c_n \to c_0$. Temos que

$$\lim_{n\to\infty} P_{c_n}^r(z_1(c_n)) = P_{c_0}^r(z_1(c_0)) = z_1(c_0)$$

pois

$$P_{c_n}^r(z_1(c_n)) = z_1(c_n)$$

para todo $n \geq 1$. Portanto, $z_1(c_0)$ é um ponto periódico de período r de P_{c_0}, com $|\rho(c_0)| \leq 1$, pois $|\rho(c_n)| < 1$ para todo n. Mas note que $|\rho(c_0)|$ não pode ser menor que um, caso contrário, pelo item (a) existiria uma vizinhança V_0 de c_0, com interseção não vazia com W, tal que, P_c teria um ponto periódico atrator de período r, para todo $c \in V_0$, e isto implicaria que $V_0 \subset W$, contradizendo o fato de $c_0 \in \partial W$. Por outro lado, ρ não pode ser constante sobre W. De fato, observe que sobre V temos que $z_1(c) = h(c)$ e satisfaz a equação

$$Q(c, h(c)) = P_c^r(h(c)) - h(c) = 0$$

como visto no item (a). Observe que se h fosse constante então Q seria um polinômio em c e de grau maior que um, não podendo se anular em todo V, portanto, contradizendo a equação acima. Desta forma $z_1(c)$ não pode ser constante sobre W, de onde concluimos que ρ não pode ser constante, pois ρ pode ser visto como um polinômio em $z_1(c)$. Nestas condições, o Teorema da Aplicação Aberta garante que $\rho(W)$ é um aberto conexo em $D(0,1)$, logo é fácil ver que

$$\rho(\overline{W}) \subset \overline{D}(0,1)$$

Agora, note que

$$\rho(\partial W) = \partial D(0,1)$$

caso contrário, se $z_0 \in \partial D(0,1) \setminus \rho(\partial W)$, então existiria uma vizinhança V_{z_0} de z_0 satisfazendo, $V_{z_0} \cap \rho(\partial W) = \emptyset$, mas isto implicaria a existência de algum ponto $z \in D(0,1) \cap \rho(\partial W)$, o que é impossível pelo que acabamos de mostrar. O que acabamos de provar implica que

$$\rho(\overline{W}) = \overline{D}(0,1)$$

e em particular, existe um $c_0 \in W$ tal que $\rho(c_0) = 0$, isto é, P_{c_0} possui um ponto periódico de período r superatrator.

□

Exemplo 3.5.1. *Para $r = 2$ temos que a equação*

$$P_c^2(z_c) = z_c$$

tem solução não nula em c, sendo

$$c = \frac{\frac{1}{2} I\sqrt{3}\sqrt{(64+3\sqrt{417})^{(1/3)}((64+3\sqrt{417})^{(2/3)}+7+(64+3\sqrt{417})^{(1/3)})}}{(64+3\sqrt{417})^{(1/3)}}$$

$$c \cong 2.356243554I$$

uma solução, que neste caso não é solução do caso $r = 1$. Assim, o parâmetro c pertence a uma componente hiperbólica associada a pontos periódicos (super)atratores de período 2.

3.6 Teorema F

Outro tipo de componente que aparece no interior de $M_{3,2}$, são as componentes associadas aos parâmetros c, tais que, a órbita do ponto crítico z_c por P_c converge para o ponto fixo superatrator $z = 0$, mas z_c não pertence a bacia imediata de $z = 0$. Esse tipo de componente não aparece no caso quadrático, pois neste caso, o ponto crítico $z = 0$ deve pertencer ao ciclo periódico superatrator, portanto deve pertencer a bacia imediata do mesmo. Com uma adaptação das técnicas usadas para o caso quadrático, provaremos o seguinte resultado.

Teorema F. *Seja $c_1 \in \mathbb{C}$ tal que $P_{c_1}^m(z_{c_1}) \in A_0(0, P_{c_1})$, mas $P_{c_1}^{m-1}(z_{c_1}) \notin A_0(0, P_{c_1})$. Se W é a componente do interior de $M_{3,2}$ contendo c_1, então:*

(a) Para todo $c \in W$, $P_c^m(z_c) \in A_0(0, P_c)$, mas $P_c^{m-1}(z_c) \notin A_0(0, P_c)$. Segue que $W \subset \mathcal{H}$.

(b) Existe um parâmetro $c \in W$ tal que $P_c^m(z_c) = 0$ e $P_{c_1}^{m-1}(z_c) \neq 0$.

O Teorema C nos diz que existe uma única componente C_0 no interior de $M_{3,2}$, com a característica que o ponto crítico z_c está na bacia imediata do zero. Por outro lado, o Teorema F nos fornece de certa forma, uma maneira de "contar"componentes do interior de $M_{3,2}$, cujo ponto crítico z_c pertence a bacia de atração do zero, mas não pertence à bacia imediata. Observe que o item (b) do Teorema acima, fornece uma cota para o número de componentes do tipo W, em relação ao período m. De fato, para cada m, a equação $P_c^m(z_c) = 0$, é um polinômio em c de grau 3^m, assim para cada m, temos no máximo 3^m componentes W como descrita no Teorema F acima.

O item (d) do Teorema C, nos diz que não podemos ter um parâmetro c para o qual $P_c(z_c) \in A_0(0, P_c)$ mas $z_c \notin A_0(0, P_c)$, assim o Teorema F vale somente para $m \geq 2$. O caso $m = 1$ não aparece, pois a equação $P_c(z_c) = 0$ implica em uma única solução, que é $c = 0$, mas como vimos anteriormente, $0 \in C_0$. Para o caso $m = 2$, encontramos parâmetros para os quais vale o Teorema, como pode ser visto no exemplo abaixo.

Exemplo 3.6.1. *Como visto no Teorema 3.3.1, se para algum parâmetro c a respectiva bacia imediata de atração do zero possui um ponto crítico, além do próprio zero, então esse ponto crítico não pode estar na órbita negativa do zero. A equação $P_c^m(z_c) = 0$, tem solução para todo m e como exemplo, para $m = 2$ existem as soluções, $c = I\frac{3\sqrt{3}}{2}$ e $c = -I\frac{3\sqrt{3}}{2}$, que não são soluções da equação para o caso $m = 1$. Neste caso, os respectivos críticos, $z_c = I\sqrt{3}$ ou $z_c = -I\sqrt{3}$, são pré-periódicos com $P^2_{I\frac{3\sqrt{3}}{2}}(-I\sqrt{3}) = 0$ e $P^2_{-I\frac{3\sqrt{3}}{2}}(I\sqrt{3}) = 0$, logo não podem estar na bacia imediata do zero. Portanto, para $m = 2$ vale o Teorema F.*

Demonstração. (Teorema F)
(a) Primeiramente mostraremos que existe uma vizinhança V_{c_1} de c_1 em $M_{3,2}$, satisfazendo a seguinte propriedade:

$$\text{Se } c \in V_{c_1} \text{ então } P_c^m(z_c) \in A_0(0, P_c), \text{ mas } P_c^{m-1}(z_c) \notin A_0(0, P_c) \tag{3.5}$$

Observe que, mostrar que existe uma vizinhança de c_1 satisfazendo a propriedade (3.5), implica, em particular, na afirmação de que c_1 pertence ao interior de $M_{3,2}$. Para mostrar a existência desta vizinhança, primeiramente mostraremos que $\partial A_0(0, P_{c_1})$ é uma curva de Jordan. De fato, note que o ponto crítico z_c não pertence a bacia imediata $A_0(0, P_{c_1})$, assim o Teorema de Böttcher, vide [14] pag. 90, garante a existência de um biholomorfismo entre a bacia imediata $A_0(0, P_{c_1})$ e o disco aberto $D(0, 1)$, que, segundo o Teorema de Carathéodory, vide Teorema A.1.4, pode ser extendido continuamente ao bordo de $A_0(0, P_{c_1})$. Usando o mesmo raciocínio feito no Teorema 2.2.6, obtemos o resultado desejado. O Teorema 3.2.2, que trata da estabilidade do conjunto de Julia, garante a existência de uma vizinhança V_{c_1} de c_1, onde J_{c_1} é conjugado a J_c para todo parâmetro c petencente a esta vizinhança. Suponha que

$$\varphi_c : J_{c_1} \longrightarrow J_c$$

seja esta conjugação, assim temos

$$\varphi_c P_{c_1} = P_c \varphi_c$$

Note que

$$\varphi_c P_{c_1}^n(\partial A_0(0, P_{c_1})) = P_c^n \varphi_c(\partial A_0(0, P_{c_1}))$$

para todo $n \geq 1$, assim pela invariância de $\partial A_0(0, P_{c_1})$ em relação a P_{c_1}, temos que

$$P_c^n \varphi_c(\partial A_0(0, P_{c_1}) = \varphi_c(\partial A_0(0, P_{c_1})) \tag{3.6}$$

Por outro lado, já que φ_c é um homeomorfismo, $\varphi_c(\partial A_0(0, P_{c_1}))$ também é uma curva de Jordan que separa $\overline{\mathbb{C}}$ em duas componentes conexas, uma ilimitada e outra limitada contida em $A(0, P_c)$, para todo $c \in V_{c_1}$. Pela invariância de P_c em relação a $\varphi_c(\partial A_0(0, P_{c_1}))$ vista em 3.6, a componente limitada deve ser $A_0(0, P_c)$, portanto

$$\varphi_c(\partial A_0(0, P_{c_1})) = \partial A_0(0, P_c)$$

Por hipótese temos que

$$\begin{aligned} P_{c_1}^m(z_{c_1}) &\in A_0(0, P_{c_1}) \\ P_{c_1}^{m-1}(z_{c_1}) &\notin A_0(0, P_{c_1}) \end{aligned}$$

assim, existe $\varepsilon > 0$ tal que

$$\begin{aligned} D(P_{c_1}^m(z_{c_1}), \varepsilon) &\subset A_0(0, P_{c_1}) \\ D(P_{c_1}^{m-1}(z_{c_1}), \varepsilon) &\subset \overline{\mathbb{C}} \setminus A_0(0, P_{c_1}) \end{aligned}$$

Pelo Teorema 3.2.2, podemos escolher a vizinhança V_{c_1} tal que $|\varphi_c(x) - x| < \frac{\varepsilon}{4}$ para todo $x \in \partial A_0(0, P_{c_1})$ e $c \in V_{c_1}$, de modo que

$$\begin{aligned} D(P_{c_1}^m(z_{c_1}), \frac{\varepsilon}{4}) &\subset A_0(0, P_c) \\ D(P_{c_1}^{m-1}(z_{c_1}), \frac{\varepsilon}{4}) &\subset \overline{\mathbb{C}} \setminus A_0(0, P_c) \end{aligned}$$

para todo $c \in V_{c_1}$. Reduzindo V_{c_1} se necessário, podemos supor que

$$\begin{aligned} P_c^m(z_c) &\in D(P_{c_1}^m(z_{c_1}), \frac{\varepsilon}{4}) \\ P_c^{m-1}(z_c) &\in D(P_{c_1}^{m-1}(z_{c_1}), \frac{\varepsilon}{4}) \end{aligned}$$

para todo $c \in V_{c_1}$. Desta forma, cada parâmetro $c \in V_{c_1}$ cumpre a propriedade 3.5 como desejado.

Falta mostar-mos que a propriedade (3.5) vale para todo parâmetro $c \in W$, onde W é a componente do interior de $M_{3,2}$ contendo c_1. Para mostrar isto, consideremos a seguinte aplicação

$$f_n(c) = P_c^n(z_c), \ c \in W$$

Note que f_n é um polinômio em c para cada n, além disso, pelo Teorema B temos que $\{f_n\}$ é uma sequência limitada sobre W, implicando que $\{f_n\}$ é uma família normal pelo Teorema de Montel, e assim $\{f_n\}$ converge sobre W para alguma função analítica f, tal que, $f(c) = \lim_{n\to\infty} f_n(c)$. Observe que $f(c) = 0$ para todo $c \in V_{c_1}$, e novamente pelo Princípio da Extensão Analítica, temos que $f \equiv 0$ em W. Portanto, segue que $\lim_{n\to\infty} P_c^n(z_c) = 0$ para todo $c \in W$, de onde obtemos que $z_c \in A(0, P_c)$. Como W é limitada, podemos supor que V_{c_1}(que é aberto em W) é a vizinhança maximal de c_1 onde vale a propriedade 3.3. Suponha que $c_2 \in W \cap \partial V_{c_1}$ (note que neste caso c_2 não pode pertencer a V_{c_1}), neste caso devemos ter uma das alternativas

$$P_{c_2}^k(z_{c_2}) \in A_0(0, P_{c_2}), \text{ para algum } 0 \le k \le m-1$$

ou então

$$P_{c_2}^m(z_{c_2}) \notin A_0(0, P_{c_2})$$

Em ambos os casos, deve existir uma vizinhança U_{c_2} (como V_{c_1}) onde cada parâmetro pertencente a U_{c_2} possui a mesma propriedade de c_2. Mas isto conduz a uma contradição, pois neste caso temos $U_{c_2} \cap V_{c_1} \neq \emptyset$, já que $c_2 \in \partial V_{c_1}$, assim (3.6) vale para todo $c \in W$.

(b) A prova aqui é a mesma apresentada no item (c) do Teorema C, mudando apenas as iteradas de P_c. Suponha que não existe $c \in W$ tal que $P_c^m(z_c) = 0$. Novamente consideremos a seguinte aplicação

$$f_n(c) = P_c^n(z_c), \ c \in W$$

Dado $\varepsilon > 0$, existe um parâmetro $\widetilde{c} \in W$ e $n_0 > m$ tal que $|P_{\widetilde{c}}^n(z_{\widetilde{c}})| < \varepsilon$ para todo $n \ge n_0$. Admitindo que $0 \notin f_n(W)$ para todo $n > m$, obtemos o segmento de reta $[0, f_{n_0}(\widetilde{c})]$, que corta o bordo de $f_{n_0}(W)$, existindo assim um $c \in \partial W$ tal que $|f_n(c)| < \varepsilon$. Mas, para ε suficientemente pequeno, o lema 3.3.2 nos diz que $|P_c^n(z_c)| \to 0$, o que é uma condição aberta. Mas isto contradiz o fato de c pertencer ao bordo de W, portanto existe um parâmetro $c \in W$, tal que, $P_c^m(z_c) = 0$. Para encerrar a prova devemos mostrar que, sob a hipótese de $P_c^m(z_c) \neq 0$ para todo $c \in W$, então $0 \notin f_n(W)$ para todo $n > m$. De fato, se $c \in W$ então $z_c \notin A_0(0, P_c)$, e pelo Teorema 3.3.1 temos que

$$P_c|_{A_0(0,P_c)} : A_0(0, P_c) \longrightarrow A_0(0, P_c)$$

é conformemente conjugada a aplicação

$$z \longmapsto z^2$$

definida sobre o disco aberto de raio um. Assim existe uma conjugação conforme

$$\phi : A_0(0, P_c) \longrightarrow D(0, 1)$$

tal que

$$\phi P_c \phi^{-1}(z) = z^2$$

Note que

$$\phi P_c \phi^{-1}(z) = 0 \Leftrightarrow z = 0$$

assim

$$P_c \phi^{-1}(0) = \phi^{-1}(0), \text{ com } \phi^{-1}(0) \in A_0(0, P_c)$$

portanto $\phi^{-1}(0) = 0$, pois zero é o único ponto fixo de P_c em $A_0(0, P_c)$. De outro lado temos que

$$\phi P^n \phi^{-1}(z) = z^{2n}$$

Assim, de maneira análoga se

$$P_c^n \phi^{-1}(z) = 0$$

então

$$\phi P_c^n \phi^{-1}(z) = \phi(0) = 0$$

Mas isto implica que

$$\phi^{-1}(z) = 0 \Rightarrow z = 0$$

Portanto, se

$$f_n(c) = P_c^n(z_c) = 0$$

então

$$P_c^n(z_c) = P_c^{n-m}(P_c^m(z_c)) = 0$$

de onde obtemos

$$P_c^m(z_c) = 0$$

Mas isto contradiz a hipótese de $P_c^m(z_c) \neq 0$, mostrando assim que $0 \notin f_n(W)$.

□

3.7 Outros resultados

Como visto anteriormente, para cada $c \in M_{3,2}$, o respectivo polinômio P_c possui somente um ponto crítico livre, o qual denotamos por z_c, que pode pertencer a bacia de algum atrator ou de algum ciclo parabólico, ou se acumular no bordo de algum disco de Siegel e neste caso o ponto crítico pertence ao conjunto de Julia, e finalmente, o ponto crítico pode pertencer ao conjunto de Julia sem se acumular em discos de Siegel, sendo inclusive pré-periódico, isto é, existem inteiros positivos m e k tais que $P_c^k(P_c^m(z_c)) = P_c^m(z_c)$, como mostraremos no exemplo abaixo.

Exemplo 3.7.1. *Para $c = \frac{3}{2}$, temos que*

$$P_{\frac{3}{2}}(-1) = \frac{1}{2} \quad e \quad P^2_{\frac{3}{2}}(-1) = \frac{1}{2}$$

onde

$$P'_{\frac{3}{2}}(\frac{1}{2}) = \frac{9}{4} > 1$$

de onde concluimos que $\frac{1}{2} \in J_{\frac{3}{2}}$. Portanto, o ponto crítico livre $z_c = -1$ é pré-periódico e pertence ao conjunto de Julia.

Observe que $\frac{3}{2}$ pertence ao bordo da componente principal C_0, o que mostra que o bordo de C_0 também possui parâmetros, cujos polinômios associados não possuem ponto periódico neutro. De fato, basta notar que o dois pontos críticos de $P_{\frac{3}{2}}$ tem órbita finita e como pode ser visto em [14] pag. 160, toda órbita periódica de $P_{\frac{3}{2}}$ deve ser repulsora ou (super)atratora. Portanto, C_0 é uma componente do interior de $M_{3,2}$, cujos parâmetros do bordo podem ser associados a ciclos neutros ou não. Vale lembrar aqui que o bordo de C_0 contém parâmetros associados a ciclos neutros como vimos anteriormente. Por exemplo, P_{2I} possui um ponto periódico neutro, onde $2I \in \partial C_0$. Por outro lado, observe que todos parâmetros pertencentes ao bordo das componentes C_1 e C_2, obtidas no Teorema D, são associados a ciclos neutros.

Definimos $\widetilde{\mathcal{H}}$ como o subconjunto de $\mathcal{H}$, cujos parâmetros estão associados a pontos periódicos atratores não nulos e finitos, isto é, se $C \subset \widetilde{\mathcal{H}}$ então P_c possui um ponto periódico atrator não nulo e finito para todo $c \in C$. Note que as componentes C_1 e C_2, obtidas no Teorema D, são subconjuntos de $\widetilde{\mathcal{H}}$, mas C_0 não. Em geral, para as componentes hiperbólicas do interior de $M_{3,2}$, que são subconjuntos de $\widetilde{\mathcal{H}}$, o Teorema E, nos diz que os parâmetros pertencentes ao bordo destas componentes estão associados a ciclos neutros, isto é, se $c \in \partial W$, onde $W \subset \widetilde{\mathcal{H}}$, então P_c possui um ponto periódico neutro. De fato, temos que

$$P_c^r(z_1(c)) = z_1(c)$$

para todo $c \in W$, onde $z_1(c)$ depende analiticamente de c, portanto, se $c \in \partial W$ então

$$\lim_{c_n \to c} P^r_{c_n}(z_1(c_n)) = z_1(c)$$

de onde obtemos que P_c possui um ponto periódico, cujo período divide r, e mais, $z_1(c)$ é um ponto periódico neutro, pois

$$\lim_{c_n \to c} |(P_{c_n}^r)'(z_1(c_n))| \leq 1 \tag{3.7}$$

de onde obtemos que $|(P_c^r)'(z_1(c))| = 1$, pois se 3.7 fosse menor que um, então $c \in W$ ou a alguma outra componente do interior de $M_{3,2}$, associada a pontos periódicos atratores.

Por outro lado, os parâmetros $c \in M_{3,2}$ que possuem ciclos atratores neutros pertencem ao bordo de $M_{3,2}$, e mais, pertencem ao bordo de alguma componente hiperbólica do interior de $M_{3,2}$. Mais precisamente temos o seguinte resultado.

Proposição 3.7.2. *Suponha $c_0 \in M_{3,2}$ tal que P_{c_0} possui um ciclo neutro de período m. Então $c_0 \in \partial W$, para alguma componente W do interior de $M_{3,2}$, associada a ciclos atratores de comprimento m.*

Demonstração. Usaremos aqui a mesma notação usada na prova do item (c) do Teorema E. Definimos o seguinte polinômio

$$Q(z,c) = P_c^m(z) - z, \ (z,c) \in \mathbb{C}^2$$

e colocamos $V = Q^{-1}(0)$. Lembramos que a aplicação de projeção de V, sobre o c-plano complexo, é uma aplicação de recobrimento de 3^m folhas. Suponha V_0 o ramo irredutível de V contendo (z_{c_0}, c_0), onde z_{c_0} é um ponto do ciclo neutro de P_{c_0}. Observe que $|(P_c^m)'(z)|$ não pode ser constante sobre V_0, pois neste caso como V_0 é projetado sobre $\mathbb{C}$, P_c teria um ciclo neutro para cada $c \in \mathbb{C}$, o que é um absurdo. Portanto, (z_{c_0}, c_0) deve pertencer ao bordo $\partial\widetilde{W}$ para alguma componente $\widetilde{W}$ de $\widetilde{V}$, onde $\widetilde{V} = \{(z,c) \in V_0; \ ||(P_c^m)'(z)| < 1\}$. A projeção de $\widetilde{W}$ é uma componente W do interior de $M_{3,2}$, associada com ciclos atratores de comprimento m, tal que $c_0 \in \partial W$. □

Em analogia ao caso da família quadrática, o próximo resultado, com o qual terminaremos este capítulo, mostra que o interior do conjunto de Mandelbrot $M_{3,2}$ é denso em $M_{3,2}$.

Teorema 3.7.3. *O interior de $M_{3,2}$ é denso em $M_{3,2}$.*

Demonstração. Considere o seguinte conjunto

$$\mathcal{C} = \{c \in M_{3,2}; \ P_c^n(z_c) \longrightarrow 0\}$$

Note que $\mathcal{C}$ é não vazio pois $0 \in \mathcal{C}$, além disso, $\mathcal{C}$ é aberto em $\overline{\mathbb{C}}$. De fato, seja $c_0 \in \mathcal{C}$, como $P_{c_0}^n(z_{c_0}) \longrightarrow 0$, existe um inteiro positivo n_0 tal que $|P_{c_0}^{n_0}(z_{c_0})| < \frac{1}{4}$ para todo $n \geq n_0$. Pela continuidade da aplicação $c \longrightarrow P_c(z_c)$, existe uma vizinhança V_0 de c_0, tal que, $|P_c^{n_0}(z_c)| < \frac{1}{4}$ para todo $c \in V_0$. Pelo lema 3.3.2, temos que $P_c^n(z_c) \longrightarrow 0$ para todo $c \in V_0$, de onde obtemos que $\mathcal{C}$ é aberto. Como visto no Teorema C, o interior de $M_{3,2}$ é não vazio, assim resta mostrar que, dado $c_0 \in \partial M_{3,2}$ existe $c \in Int(M_{3,2})$ próximo de c_0. Seja $D(c_0, r)$ um disco aberto de raio r com centro em c_0, e suponha que $0 \notin D(c_0, r)$, pois $0 \in Int(M_{3,2})$. Supomos também que $D(c_0, r)$ não possui nenhum parâmetro c, tal que, P_c possua um ciclo (super)atrator não nulo ou mesmo que $P_c^n(z_c) \longrightarrow 0$, pois em ambos os casos $c \in Int(M_{3,2})$. Definimos abaixo a seguinte a família

$$f_n(c) = \frac{P_c^n(z_c)}{z_c}, \; c \in D(c_0, r)$$

Observe que cada f_n evita os pontos $1, 0$ e ∞ pertencentes a $\overline{\mathbb{C}}$. De fato, como $0 \notin D(c_0, r)$ temos que z_c e $P_c^n(z_c)$ são ambos não nulos. Também não podemos ter $P_c^n(z_c) = z_c$, pois neste caso, z_c seria um ponto periódico superatrator e assim c pertenceria ao interior de $M_{3,2}$. Assim, a família $\{f_n\}$ é uma família normal sobre $D(c_0, r)$. Mas note que $D(c_0, r)$ possui parâmetros $c \in M_{3,2}$, tais que a seqüência $f_n(c)$ é limitada e parâmetros $c \in \overline{\mathbb{C}} \setminus M_{3,2}$, tais que $f_n(c)$ não é limitada. Mas isto implica que $\{f_n\}$ não pode ser uma família normal, gerando uma contradição. Portanto, $D(c_0, r)$ deve conter pontos do interior de $M_{3,2}$, provando o teorema. $\square$

Capítulo 4

Familia $P_c(z) = z^n + cz^k$

4.1 O Conjunto de Mandelbrot $M_{n,k}$

Neste capítulo, voltamos nossa atenção para a família de polinômios complexos

$$P_c(z) = z^n + cz^k,\ c \in \mathbb{C}$$

onde n e k devem satisfazer a seguinte propriedade

$$n > k \geq 2 \tag{4.1}$$

Nos capítulos anteriores, trabalhamos com $n = 3$ e $k = 2$. Aqui, n e k podem variar livremente, somente respeitando a condição 4.1. Para cada par n e k fixados, definimos o conjunto de Mandelbrot da respectiva família associada de forma análoga ao que foi definido para $M_{3,2}$, assim

$$M_{n,k} = \{c \in \mathbb{C};\ J_c \text{ conexo}\}$$

onde J_c e F_c representam os conjuntos de Julia e Fatou associados a respectiva família. Apesar da livre variação do par n e k, o conjuto de Mandelbrot $M_{n,k}$ fica limitado a um disco aberto de raio menor que 5 e centro na origem, seja qual for o par n e k. Apresentamos abaixo uma caracterização para o conjunto de Mandelbrot $M_{n,k}$, para cada par n e k fixados, que é o principal resultado deste capítulo.

Teorema G. *Para cada par n e k, o conjunto $M_{n,k}$ é não vazio e mais, existe um número real $1 < \delta \leq 2$ tal que*

$$M_{n,k} = \Big\{c \in \mathbb{C};\ |P_c^m(z_c)| \leq 2 + \delta^2 \quad \forall\ m \in \mathbb{N}\Big\}$$

onde z_c é um ponto crítico finito e não nulo associado a P_c. Além disso, $M_{n,k}$ está contido no disco aberto de raio $1 + \delta^2$.

Como corolário do Teorema G, mostraremos que o conjunto de Mandelbrot $M_{n,k}$ é compacto.

4.2 Definições e Propriedades de $M_{n,k}$

Fixados n e k tal que $n > k \geq 2$, considere a seguinte família de polinômios a um parâmetro complexo, definida na esfera de Riemann

$$P_c(z) = z^n + cz^k \tag{4.2}$$

Os pontos fixos de cada polinômio P_c pertencente a esta família, em relação ao parâmetro c, são as soluções da equação $z^k(z^{n-k} + c) = z$, onde $z = 0$ é uma destas soluções. Os pontos críticos de P_c, são $z = 0$ com multiplicidade $k - 1$ e as $(n-k)$-raízes do número complexo $z = -\frac{k}{n}c$, isto é, são os números z que satisfazem a equação

$$z^{n-k} = -\frac{k}{n}c \tag{4.3}$$

Observação 4.2.1. *Se z_1 e z_2 são pontos críticos finitos e não nulos de P_c, então temos que $z_1 = \omega z_2$, onde ω é uma $(n-k)$-raíz da unidade ($\omega^{n-k} = 1$), pois ambos devem satisfazer a equação (4.3). Assim, se z_0 é um ponto crítico de P_c, os outros são $z_1 = \omega z_0, \ldots, z_{n-k-1} = \omega^{n-k-1} z_0$.*

Para a familia P_c em questão, se $n > k + 1$ então temos mais de um ponto crítico finito e não nulo. O seguinte resultado reduz o trabalho de verificar o comportamento das órbitas dos pontos críticos não nulos de P_c, isto é, basta verificar somente uma delas.

Lema 4.2.2. *Seja $P_c(z) = z^n + cz^k$, com $n > k + 1$, e suponha z_c um ponto crítico finito e não nulo qualquer de P_c. Se a órbita de z_c é limitada, então também é limitada a órbita de todo ponto crítico finito não nulo de P_c.*

Demonstração. Suponha que z_1 e z_2 sejam pontos críticos finitos e não nulos de P_c. Pela observação 4.2.1 podemos supor que $z_1 = \omega z_2$, onde $\omega^{n-k} = 1$. Assim,

$$\begin{aligned} P_c(z_1) &= P_c(\omega z_2) = \omega^n z_2^n + c\omega^k z_2^k \\ &= \omega^k(\omega^{n-k} z_2^n + cz_2^k) \\ &= \omega^k(z_2^n + cz_2^k) \\ &= \omega^k P_c(z_2) \end{aligned}$$

Indutivamente obtemos que

$$P_c^m(z_1) = \omega^{k^m} P_c^m(z_2)$$

Assim temos que a órbita de todos os pontos críticos finitos e não nulos de P_c, são limitadas ou convergem todas para o infinito. $\square$

Observe que o ponto crítico $z = 0$ é um ponto fixo superatrator de P_c, logo sua órbita é limitada. Assim, pelo lema 4.2.2 e Teorema 1.2.1, obtemos a seguinte situação para o conjunto de Julia J_c. Se algum ponto crítico finito e não nulo de P_c tiver a órbita limitada, então J_c é conexo, de outro lado J_c é desconexo. Para esta família em questão, não encontraremos o caso onde o conjunto de Julia é totalmente desconexo, basta observar que o crítico $z = 0$ é também um fixo superatrator, e o bordo da bacia imediata $A_0(0, P_c)$ é uma curva fechada contida em J_c, de forma que J_c não pode ser totalmente desconexo.

A variação da diferença entre n e k implica em diferenças no comportamento dinâmico das famílias definidas em (4.2), como podemos verificar no exemplo abaixo.

Exemplo 4.2.3. *Fixando n e k tal que $n > 3k$, temos que $c \notin M_{n,k}$ para todo $c \in \mathbb{C}$ satisfazendo $|c| \geq \frac{n}{k}$. De fato, podemos supor $\dfrac{n}{k} < |c| \leq 5$, pois o Teorema G nos diz que $c \notin M_{n,k}$ para todo $c \in \mathbb{C}$ tal que $|c| > 5$. Assim segue que*

$$\begin{aligned}
|P_c(z_c)| &= |z_c^k(z_c^{n-k} + c)| \\
&= |z_c|^k|\frac{n-k}{n}||c| \\
&= |\frac{-kc}{n}|^{\frac{k}{n-k}}\ |c||\frac{n-k}{n}| \\
&= |c|^{\frac{k}{n-k}}\ |c|\ |\frac{k}{n}|^{\frac{k}{n-k}}|\ \frac{n-k}{n}| \\
&\geq |\frac{n}{k}|^{\frac{n}{n-k}}|\frac{k}{n}|^{\frac{k}{n-k}}\ |\frac{n-k}{n}| \\
&= |\frac{n}{k}||\frac{n-k}{n}| = |\frac{n-k}{k}| > 2
\end{aligned}$$

Supondo por indução sobre r que

$$|P_c^r(z_c)| \geq (\frac{n-k}{k})^r$$

temos

$$\begin{aligned}
|P_c^{r+1}(z_c)| &\geq |(\frac{n-k}{k})^r|^k\ ||(\frac{n-k}{k})^{r(n-k)}| - |c|| \\
&\geq (\frac{n-k}{k})^{r+1}
\end{aligned}$$

pois

$$||(\frac{n-k}{k})^{r(n-k)}| - |c|| > |2^{r(n-k)} - 5| > 1$$

portanto, quando $n > 3k$, obtemos que $P_c^r(z_c) \to \infty$ quando $r \to \infty$. Mas isto implica que o conjunto de Julia J_c associado a P_c não é conexo. Por outro lado, colocando $n = 3$ e $k = 2$ (neste caso $n < 2k$), temos que para $c = 2i$ ($|c| > \frac{n}{k}$) $\{P_c^n(z_c)\}_n$ é limitada como vimos no capítulo 2, portanto o conjunto de Julia associado a P_c é conexo.

Proposição 4.2.4. *O conjunto de Mandelbrot $M_{n,k}$ tem as seguintes propriedades:*

(a) $M_{n,k}$ contém o disco fechado $\overline{D}(0, \frac{\sqrt{2}}{2})$.

(b) $M_{n,k}$ é simplesmente conexo.

Demonstração. (a) Suponha $c \in \mathbb{C}$ com $|c| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$ e z_c um dos pontos críticos de P_c, finito e não nulo. Observe que

$$|z_c| = |\frac{-kc}{n}|^{\frac{k}{n-k}}$$

assim temos que

$$\begin{aligned} |P_c(z_c)| &= |z_c|^k |z_c^{n-k} + c| \\ &= |\frac{-kc}{n}|^{\frac{k}{n-k}} \, |\frac{-kc}{n} + c| \\ &= |\frac{k}{n}|^{\frac{k}{n-k}} \, |\frac{n-k}{n}| \, |c|^{\frac{k}{n-k}+1} \\ &\leq |c|^{\frac{k}{n-k}+1} \leq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

supondo por indução sobre m que

$$|P_c^m(z_c)| \leq \frac{\sqrt{2}}{2}$$

temos que

$$\begin{aligned} |P_c^{m+1}(z_c)| &\leq |P_c^m(z_c)|^k |P_c^m(z_c)^{n-k} + c| \\ &\leq (\frac{\sqrt{2}}{2})^k ((\frac{\sqrt{2}}{2})^{n-k} + \frac{\sqrt{2}}{2}) \\ &\leq \frac{\sqrt{2}}{2} \end{aligned}$$

Isto mostra que a órbita do ponto crítico z_c por P_c é limitada, e assim obtemos que $c \in M_{n,k}$.

(b) A prova é análoga ao que foi feito no Teorema A do capítulo 2. Se $M_{n,k}$ não é simplesmente conexo, então $\mathbb{C} \setminus M_{n,k}$ não é conexo, e portanto deve possuir uma componente limitada, digamos W, tal que, $\partial W \subset M_{n,k}$ devido a compacidade de $M_{n,k}$. Pelo Teorema G, a desigualdade $|P_c^m(z_c)| \leq (2+\delta^2)$ é satisfeita pra todo $c \in \partial W$, para todo $m \geq 1$. Segue então pelo Teorema do Módulo Máximo, que a sequência $\{|P_c^n(z_c)|\}$ é limitada para todo $c \in W$, o que contradiz o fato de $W \subset (\mathbb{C} \setminus M_{n,k})$. $\square$

Como visto na observação 4.2.1 acima, para $n > k+1$, se z_c é um ponto crítico de P_c então ωz_c também é, onde $\omega^{n-k} = 1$. Em princípio, isto parece indicar que o conjunto de Mandelbrot é invariante pelas $(n-k)$-raízes da unidade, isto é, se $c \in M_{n,k}$ então $\omega c \in M_{n,k}$, mas como veremos no exemplo abaixo, isto não é verdade em geral.

Exemplo 4.2.5. *Fixando $n = 6$ e $k = 2$, obtemos a família de polinômios complexos $P_c(z) = z^6 + cz^2$. Para cada c não nulo, P_c possui quatro pontos críticos, z_c, ωz_c, $\omega^2 z_c$, $\omega^3 z_c$, onde $\omega = I$. Para $c = 1,42$, temos que a sequência $P_c^m(z_c)$ converge para ∞, sendo que, na quinta iterada temos $|P_c^5(z_c)| > 145$, que é um raio de escape de P_c, como visto no capítulo 1. Por outro lado, tomando $\widehat{c} = \omega c$, temos que a sequência $P_{\widehat{c}}^m(z_{\widehat{c}})$ converge para zero, sendo que, na quinta iterada temos $|P_{\widehat{c}}^m(z_{\widehat{c}})| < \frac{1}{6}$, e é fácil ver que a sequência converge para zero a partir daí.*

O próximo resultado fornece uma cota para a norma de z, que depende do parâmetro c e do par n e k, para a qual, qualquer ponto do domínio de P_c é capturado pela bacia do infinito.

Proposição 4.2.6. *Dado $c \in \mathbb{C}$ então $\{z \in \overline{\mathbb{C}}; |z| > (1+|c|)^{\frac{1}{n-k}}\} \subset A(\infty, P_c)$*

Demonstração. Temos que

$$\begin{aligned} |P_c(z)| &= |z|^k |z^{n-k} + c| \\ &\geq |z|^k (|z|^{n-k} - |c|) \\ &> |z|^k (1 + |c| - |c|) = |z|^k \end{aligned}$$

portanto

$$|P_c(z)| > |z|^k > |z|$$

e para qualquer inteiro $r > 1$ temos

$$|P_c^r(z)| > |P_c^{r-1}(z)|$$

Note que $P_c^r(z)$ não pode convergir para um ponto fixo finito z_0. De fato, se isto fosse verdade, então

$$|z_0| = |P_c(z_0)| \geq |P_c^r(z)| > |z|$$

mas isto implica que

$$|z_0| > (1+|c|)^{\frac{1}{n-k}}$$

contradizendo o que acabamos de provar acima. Assim, devemos ter $z \in A(\infty, P_c)$. $\square$

4.3 Prova do Teorema G

Demonstração. A afirmação que $M_{n,k}$ é não vazio segue facilmente do seguinte fato, para qualquer par n e k, o conjunto J_0 é conexo, pois neste caso o único ponto crítico finito é $z_c = 0$, cuja a órbita por P_c é limitada, assim temos que $0 \in M_{n,k}$. Quanto a segunda afirmação, temos que

$$\begin{aligned} |P_c(z_c)| &= |z_c|^k |z_c^{n-k} + c| \\ &= |\frac{-kc}{n}|^{\frac{k}{n-k}} |\frac{-kc}{n} + c| \\ &= |c|^{1+\frac{k}{n-k}} |\frac{k}{n}|^{\frac{k}{n-k}} |\frac{n-k}{n}| \end{aligned}$$

Agora note que

$$\begin{aligned} |c|^{1+\frac{k}{n-k}} |\frac{k}{n}|^{\frac{k}{n-k}} |\frac{n-k}{n}| &> (1+|c|)^{\frac{1}{n-k}} \\ &\Updownarrow \\ \frac{|c|^n}{1+|c|} &> \frac{n^n}{k^k (n-k)^{n-k}} \\ &\Updownarrow \\ \frac{|c|}{(1+|c|)^{\frac{1}{n}}} &> \frac{n}{k^{\frac{k}{n}} (n-k)^{\frac{n-k}{n}}} \end{aligned}$$

Colocando

$$\delta = \frac{n}{k^{\frac{k}{n}} (n-k)^{\frac{n-k}{n}}} \quad \text{e} \quad t = |c|$$

temos que

$$\begin{aligned} \frac{t}{(1+t)^{\frac{1}{n}}} > \delta \quad &\Leftrightarrow \quad t^n > \delta^n (1+t) \\ &\Leftrightarrow \quad t^n - \delta^n t - \delta^n > 0 \end{aligned}$$

Portanto,

$$|P_c(z_c)| > (1+|c|^{\frac{1}{n-k}}) \quad \Leftrightarrow \quad t^n - \delta^n t - \delta^n > 0 \tag{4.4}$$

Note que

$$\delta = \frac{n}{k^{\frac{k}{n}}(n-k)^{\frac{n-k}{n}}} \quad = \quad (\frac{n}{n-k})(\frac{n-k}{k})^{\frac{k}{n}}$$

assim, se colocarmos $v = \frac{n}{k}$, temos que

$$\delta = \frac{v}{v-1}(v-1)^{\frac{1}{v}}$$

Como $v > 1$, é fácil ver que $1 < \delta \leq 2$, já que o único ponto crítico da função $\delta(v)$ é $v = 2$, o qual é um ponto de máximo com $\delta(2) = 2$. Usando o fato que $n \geq 3$, temos

$$(\frac{1}{\delta} + \delta)^{n-1} \quad > \quad \delta$$

o que é equivalente a

$$(1 + \delta^2)^{n-1} \quad > \quad \delta^n \tag{4.5}$$

Supondo que $t \geq 1 + \delta^2$, segue da desigualdade (4.5) que

$$t^{n-1} - \delta^n \quad > \quad 0$$

de onde é fácil ver que

$$\begin{aligned} t^n - t\delta^n - \delta^n &= t(t^{n-1} - \delta^n) - \delta^n \\ &\geq (1 + \delta^2)((1 + \delta^2)^{n-1} - \delta^n) - \delta^n \end{aligned}$$

Agora note que

$$\begin{aligned} (1 + \delta^2)((1 + \delta^2)^{n-1} - \delta^n) - \delta^n &> 0 \\ &\Updownarrow \\ (1 + \delta^2)^n &> \delta^n(2 + \delta^2) \\ &\Updownarrow \\ (\frac{1}{\delta} + \delta)^n &> 2 + \delta^2 \end{aligned}$$

Como $\delta > 1$ e $n > 2$, a última desigualdade acima é verdadeira, portanto, por (4.4) obtemos

$$|P_c(z_c)| \quad > \quad (1 + |c|)^{\frac{1}{n-k}}$$

Assim, pela proposição 4.2.6, obtemos que $z_c \in A(\infty, P_c)$, logo $c \notin M_{n,k}$. Portanto, $M_{n,k}$ está contido no disco aberto de raio $1 + \delta^2$. Por outro lado, se

$|c| < 1 + \delta^2$ e $|P_c^m(z_c)| > 2 + \delta^2$, para algum $m \geq 1$, temos que

$$\begin{aligned} |P_c^{m+1}(z_c)| &= |P_c^m(z_c)|^k |P_c^m(z_c)^{n-k} + c| \\ &> |2 + \delta^2|^k (|P_c^m(z_c)|^{n-k} - |c|) \\ &> (2 + \delta^2)^k |1 + (1 + \delta^2) - |c|) \\ &> 2 + \delta^2 = 1 + 1 + \delta^2 \geq 1 + |c| \\ &> (1 + |c|)^{\frac{1}{n-k}} \end{aligned}$$

E novamente pela proposição 4.2.6 obtemos que $c \notin M_{n,k}$, o que termina a prova do teorema. □

Observe que, quando $v \to \infty$ temos que $\delta(v) \to 1$, portanto o conjunto de Mandelbrot para v suficientemente grande, está contido no disco de raio 2 e centro na origem.

Corolário 4.3.1. *$M_{n,k}$ é compacto.*

Demonstração. Pelo Teorema G temos que $M_{n,k} \subset \{c; |c| \leq 1 + \delta^2\}$, de onde segue que é limitado. Por outro lado, para cada inteiro positivo m definimos o seguinte conjunto

$$B_m = \left\{ c \in \mathbb{C};\ |P_c^m(z_c)| \leq 2 + \delta^2 \right\}$$

Note que para cada m, B_m é fechado em $\mathbb{C}$, além disso é fácil ver que

$$M_{n,k} = \bigcap_m B_m$$

A interseção enumerável de conjuntos fechados é também um conjunto fechado, assim $M_{n,k}$ é um conjunto fechado em $\mathbb{C}$. Isto conclui a prova que $M_{n,k}$ é compacto. □

Considerações Finais

O objetivo deste trabalho era descrever o comportamento dinâmico da família de polinômios complexos a um parâmetro,

$$P_c(z) = z^3 + cz^2, \; c \in \mathbb{C}$$

Uma ferramenta fundamental para cumprir tal objetivo é a descrição do conjunto de Mandelbrot associado a esta família, o qual denotamos por $M_{3,2}$. Para os parâmetros pertencentes ao complementar do conjunto de Mandelbrot $M_{3,2}$, a descrição das propriedades dinâmicas da família P_c foi completa, como pode ser visto no capítulo 2, onde provamos também alguns resultados topológicos a respeito de $M_{3,2}$. Quanto aos parâmetros pertencentes a $M_{3,2}$, obtivemos vários resultados, que não esgotam o assunto, mas descrevem uma grande parte do conjunto. Como pode ser visto no capítulo 3, mostramos que se P_c possui um ciclo (super)atrator finito e não nulo então c pertence a uma componente do interior de $M_{3,2}$, por outro lado, se P_c possui um ciclo neutro(racional ou irracional) então c pertence ao bordo de uma das componentes do interior de $M_{3,2}$ associada a ciclos (super)atratores. Algumas perguntas ainda não foram respondidas, dentre elas: Em geral, como é a dinâmica de P_c para c pertencente ao bordo da componente C_0? E para c pertencente ao bordo de uma componente qualquer do interior de $M_{3,2}$? Qual o comportamento dinâmico de P_c quando o ponto crítico livre z_c pertence ao respectivo conjunto de Julia associado a P_c?

No capítulo 4 fizemos uma abordagem inicial, em relação ao estudo das propriedades dinâmicas da família de polinômios complexos a um parâmetro,

$$P_c(z) = z^n + cz^k, \; c \in \mathbb{C}, \; n > k \geq 2$$

que generaliza o caso anterior. Obtemos alguns resultados em relação ao conjunto de Mandelbrot $M_{n,k}$ associado a esta família. Verificamos que a dinâmica de P_c, quando variamos o par n e k, apresenta aspectos similares com a família $P_c(z) = z^3 + cz^2$. Por exemplo, o fato do conjunto de Julia ser conexo ou não, depende em qualquer um dos casos da órbita de um único ponto crítico finito e não nulo, como vimos no lema 4.2.2. Ressaltamos aqui, que o trabalho de descrever, do ponto de vista dinâmico, o comportamento desta família está em aberto ainda.

Apêndice A

A.1 Alguns Resultados de Análise Complexa

Apresentamos nesta seção, sem demonstração, alguns teoremas de Análise Complexa que foram utilizados durante o texto acima, e que podem ser encontrados com mais detalhes nas referências indicadas no final do trabalho.

Teorema A.1.1 (Teorema do Módulo Máximo). *Seja G um conjunto aberto e limitado em $\mathbb{C}$, e suponha f uma função contínua sobre $\overline{G}$ sendo analítica em G. Então*

$$max\{|f(z)|;\ z \in \overline{G}\} = max\{|f(z)|;\ z \in \partial G\}$$

Teorema A.1.2 (Teorema da Aplicação Aberta). *Seja Ω uma região em $\mathbb{C}$, isto é, um conjunto aberto e conexo. Se f é uma função analítica definida em Ω, então $f(\Omega)$ é também uma região ou um ponto.*

O próximo teorema pode ser visto como um corolário do Teorema da Aplicação Aberta.

Teorema A.1.3. *Seja Ω uma região em $\mathbb{C}$. Se $f : \Omega \longrightarrow \mathbb{C}$ é uma função analítica e injetiva e $f(\Omega) = G$, então $f^{-1} : G \longrightarrow \Omega$ é analítica e além disso, $(f^{-1})'(w) = [f'(z)]^{-1}$, onde $w = f(z)$.*

Os dois próximos resultados são devidos a Carathéodory, podendo ser encontrados em [14].

Teorema A.1.4. *Seja Ω uma região simplesmente conexa de $\overline{\mathbb{C}}$. Um isomorfismo conforme $\phi : D(0,1) \longrightarrow \Omega$ extende-se para uma aplicação contínua, do disco fechado $\overline{D}(0,1)$ sobre $\overline{\Omega}$ se, e somente se, o bordo de Ω é localmente conexo.*

Teorema A.1.5. *Se o bordo de Ω é uma curva de Jordan, então $\phi : D(0,1) \longrightarrow \Omega$ extende-se para um homeomorfismo do disco fechado $\overline{D}(0,1)$ sobre $\overline{\Omega}$.*

Referências Bibliográficas

[1] Beardon A. F. *Itaration of Rational Functions* - Springer, New York, 2000.

[2] Branner, B., Hubbard, J. H. *The itaration of cubics polynomials, Parte I: The global topology of parameter space*, Acta Math. 160 (1988) 143-206.

[3] Branner, B., Hubbard, J. H. *The itaration of cubics polynomials, Parte II: Patterns and parapatterns*, Acta Math. 169 (1992) 229-325.

[4] Carleson L., Gamelin T. W. *Complex Dynamics* - Springer-Verlag, New York 1993.

[5] Chademan A., Zireh A. *Extension Of The Douady-Hubbard's Theorem On Connectedness Of The Mandelbrot Set To Symmetric Polynomials*. Bulletin of the Iraniam Mathematical Society Vol. 31 No. 1 (2005), pp 71-84.

[6] Connay J. B. *Functions of One Complex Variable* - Springer-Verlag, New York, 1975.

[7] Devaney, R. L., Look, D. M., and Uminsky, D. *The Escape Trichotomy for Singularly Perturbed Rational Maps* - Indiana University Mathematics Journal 54 (2005), 1621-1634. MR 2189680 (2006i:37105) - (2205).

[8] Douady A. *Does a Julia set depend continuously on the polynomial* - Proc. Symposia Appl. Math.(1994) vol 49, 91-138.

[9] Eremenko A. É., Levin M. G. *Periodic Points of Polynomials*, Ukrainian Mathematical Journal, 41 (1989), 1258-1262.

[10] Forster O. *Lectures on Riemann Surfaces* - Springer-Verlag, New York, 1981.

[11] Gukenheimer J. *Endomorphisms of the Riemann Sphere* Proc. Am. Math. Soc. Symposia in Pure Math. XIV,(1970), 95-124.

[12] Lima E. L. *Grupo Fundamental e Espaços de Recobrimento* - IMPA, Rio de Janeiro, 1998.

[13] Lyubich M. Yu. *The Dynamics Of Rational Transforms: The Topological Picture* - Russian Math. Surveys 41: (1986), 43-117.

[14] Milnor J. *Dynamics in One Complex Variable* - AMS, New Jersey, 2006.

[15] Rudin W. *Real e Complex Analysis* - McGraw-Hill Book Company, 3ª ed., Singapore, 1987.

[16] Sad P. *Introdução À Dinâmica Das Funções Racionais Na Esfera de Riemann* - IMPA, Rio de Janeiro, 1983.

[17] Shishikura M. *The Parabolic Bifurcation Of Rational Maps* - IMPA, Rio de Janeiro, 1993.

Índice Remissivo

bacia
  atração, 8
  imediata de atração, 9

componente
  hiperbólica, 39
  periódica, 11
  principal, 40
conjugação, 14
conjunto
  estável, 8
  Fatou, 8
  hiperbólico, 11
  instável, 8
  Julia, 8
    -estável, 39
    cheio, 9
  Mandelbrot
    $M_{3,2}$, 9
    $M_{n,k}$, 59
converçência local uniforme, 8
curva
  Jordan, 11

disco
  Siegel, 12
domínio, 7

estabilidade, 39

família
  $P_c(z) = z^3 + cz^2$, 9
  $P_c(z) = z^n + cz^k$, 59
  normal, 8
  Quadrática, 1

k-ciclo, 8

multiplicador, 8

polinômio
  hiperbólico, 10
  subhiperbólico, 11
ponto
  crítico, 9
    livre, 13
  periódico, 7
    acessível, 20
    atrator, 8
    irracionalmente neutro, 8
    parabólico, 8
    racionalmente neutro, 8
    repulsor, 8
    superatrator, 8
  pré-periódico, 55

quasecírculo, 11

raio de escape, 7

shift, 14

teorema
  A, 19
  Aplicação Aberta, 69
  Böttcher, 14
  C, 40
  Carathéodory, 69
  D, 44
  de estabilidade, 40
  E, 47
  F, 50
  G, 59
  Módulo Máximo, 69