Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Passeios Aleatórios e Grandes Desvios em Ambientes Aleatórios

Jeanne Carmo Amaral

Belo Horizonte, fevereiro de 2010

Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Jeanne Carmo Amaral

Passeios Aleatórios e Grandes Desvios em Ambientes Aleatórios

Dissertação apresentada ao corpo docente de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Professor Sacha Friedli

Belo Horizonte
2010

Agradecimentos

Agradeço a Deus, por minha vida e pelas coisas boas que conquistei nos últimos dois anos.
Ao Sacha, pelos ensinamentos, dedicação e disponibilidade.
Aos professores Bernardo, Maria Eulália e Remy que compuseram a banca, pela disponibilidade e pelas sugestões.
Aos demais professores do departamento, pelos ensinamentos.
Ao Cnpq, pelo apoio financeiro.
À minha família, com a qual dividi muitos momentos de alegria, em especial, à minha mãe, que amo tanto e que está sempre pronta quando eu preciso.
Ao Juliano, pelo carinho e por estar sempre ao meu lado.
Aos amigos da Matemática, em especial à Camila, minha grande amiga e Adriana, Daniele e Lia, que além de amigas, são ótimas colegas de estudo.

Resumo

O objetivo desta dissertação é estudar as propriedades do passeio aleatório em ambiente aleatório. Com base no artigo "Random Walk in Random Environment" escrito por O. Zeitouni, apresentaremos o Critério de Recorrência e Transiência do passeio aleatório e a Lei dos Grandes Números para o mesmo, obtidos inicialmente por F. Solomon. Em seguida, o estudo dos grandes desvios para a velocidade do passeio, será baseado no artigo "Quenched, Annealed and Functional Large Deviations for One-Dimensional Random Walk in Random Environment" de F. Comets, N. Gantert e O. Zeitouni. Consideraremos os grandes desvios para o passeio condicionado ao ambiente (*quenched*) e sobre a média em relação ao ambiente (*annealed*).

Palavras-chave: Passeios aleatórios em ambientes aleatórios, grandes desvios.

Abstract

The objective of this dissertation is to study the properties of random walk in random environment. Based on the article " Random Walk in Random Environment"by O. Zeitouni, we present the Criterion of Recurrence and Transience of random walk and the Law of Large Numbers for the same, obtained initially by F. Solomon. Next, the study of large deviations for the walk will be based on the article " Quenched, Annealed and Functional Large Deviations for One-Dimensional Random Walk in Random Environment"by F. Comets, N. Gantert and O. Zeitouni. We will consider the large deviations for the walk conditioning to environment (quenched) and about the average in relation to environment (annealed).

Key Words: Random walks in random environments, large deviations.

Sumário

Introdução

1. O Passeio Aleatório Simples

O passeio aleatório simples em $\mathbb{Z}$ consiste de uma partícula inicialmente na origem, que se move nos sítios de $\mathbb{Z}$ e a cada instante pode pular de um ponto x para um de seus próximos vizinhos $x+1$ ou $x-1$, com probabilidade $p \in [0,1]$ de pular para o sítio à sua direita e probabilidade $q = 1-p$ para o sítio à sua esquerda. O passeio é chamado simétrico quando $p = \frac{1}{2}$. Definimos $S_0 := 0$ e para $n \geq 1$, S_n denota a posição da partícula no instante n. Então, $(S_n)_{n\geq 0}$ descreve uma Cadeia de Markov com as seguintes probabilidades de transição:

$$P(S_{n+1} = x+1 | S_n = x) = p, \quad P(S_{n+1} = x-1 | S_n = x) = q = 1-p.$$

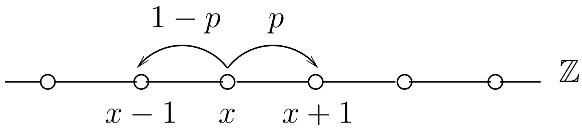

Figura 1. O passeio aleatório simples.

Estas probabilidades são *homogêneas no tempo*, no sentido que p(e q) não dependem da posição x. Descreveremos a seguir, algumas propriedades bem conhecidas do passeio aleatório simples (ver [**Fel71**]):

– Definimos o tempo de primeira visita em x,

$$T_x := \inf\{n \geq 1; S_n = x\},$$

com a convenção que o ínfimo sobre um conjunto vazio é igual a ∞. Um passeio aleatório é chamado recorrente se $P(T_0 < \infty) = 1$ e transiente se $P(T_0 < \infty) < 1$. O passeio aleatório simples é recorrente se e somente se $p = \frac{1}{2}$, já que

$$P(T_0 < \infty) = 1 - |p-q|.$$

Além disso, para o caso simétrico, $E[T_0]$ e $E[T_1]$ são ambas infinitas.

– A *Lei Forte dos Grandes Números* implica que P quase certamente,

$$\frac{S_n}{n} \to 2p - 1 \equiv v_p.$$

Em particular, temos que $P\Big(\lim_{n\to\infty} S_n = \infty\Big) = 1$, quando $p > \frac{1}{2}$ e $P\Big(\lim_{n\to\infty} S_n = \infty\Big) = 1$, quando $p < \frac{1}{2}$.

2. O Ambiente Aleatório

O passeio aleatório em ambiente aleatório é uma modificação em que as probabilidades de transição *podem depender da posição x:*

$$P(S_{n+1} = x+1 | S_n = x) = p_x, \quad P(S_{n+1} = x-1 | S_n = x) = q_x = 1 - p_x.$$

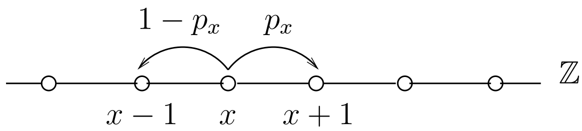

FIGURA 2. O passeio aleatório em ambiente aleatório.

Como a coleção $(p_x, q_x)_{x\in\mathbb{Z}}$ será em geral aleatória, ela será denotada por uma dupla sequência $\omega = (\omega_x)_{x\in\mathbb{Z}}$ chamada de *ambiente*, de forma que $\omega_x \in [0,1]$, $\omega_x \equiv p_x$ e $1-\omega_x \equiv q_x$. Quando o ambiente é fixo, a distribuição acima é denotada por P_ω e é chamada de distribuição *quenched.*

Denotaremos por ω^p o ambiente em que $\omega^p_x = p$, para todo $x \in \mathbb{Z}$, ou seja, ω^p descreve as probabilidades do passeio aleatório simples com probabilidade p de transição para à direita e denotaremos por ω^{SRW} o ambiente em que $\omega^{SRW}_x = \frac{1}{2}$, para todo $x \in \mathbb{Z}$, ou seja, ω^{SRW} descreve as probabilidades do passeio aleatório simples simétrico.

Se A é um evento que depende somente do passeio aleatório S_n, então a probabilidade *annealed*[1] do evento é definida como

$$\mathbb{P}(A) = \int_\Omega P_\omega(A) P(d\omega),$$

em que P é uma medida sobre o conjuntos dos ambientes ω, denotado por Ω.

Dizemos que o passeio aleatório em ambiente aleatório é recorrente sob $\mathbb{P}$ (ou sob P_ω) se $\mathbb{P}(T_0 < \infty) = 1$ (ou $P_\omega(T_0 < \infty) = 1$) e é transiente sob $\mathbb{P}$ (ou sob P_ω) se $\mathbb{P}(T_0 < \infty) < 1$ (ou $P_\omega(T_0 < \infty) < 1$) .

As questões mais naturais sobre o passeio em ambiente aleatório são: Quais são as propriedades típicas do passeio para um ambiente aleatório? Sob hipóteses adicionais, o passeio é uma Cadeia de Markov irredutível sob P_ω, logo, o passeio ou é recorrente ou é transiente. Quem é o parâmetro natural? Existe uma Lei dos Grandes Números para $\frac{S_n}{n}$? Tem dois

[1] Uma tradução para as palavras *quenched* e *annealed* poderia ser temperado e recozido, respectivamente, que são termos vindos da metalurgia. A têmpera e o recozimento são processos térmicos aos quais o aço pode ser submetido objetivando aumentar a dureza do aço, no caso da têmpera, ou diminuir a dureza de um aço temperado ou tornar uma estrutura mais homogênea, no caso do recozimento. Vistos como termos matemáticos, estes dois termos não tem uma tradução padrão, por isso, optamos pelo uso das palavras em Inglês.

tipos de decrições: *quenched*, relativo à medida P_ω para um ambiente fixo e *annealed*, relativo à medida $\mathbb{P}$.

No Capítulo 2, veremos o Critério de Recorrência/Transiência obtido por Solomon **[Sol75]**, que nos fornece para P ergódica, o parâmetro $E_P[\log \rho_0]$, em que $\rho_x := \frac{1-\omega_x}{\omega_x}$. O critério diz que o passeio é recorrente se e somente se $E_P[\log \rho_0] = 0$ e transiente se e somente se $E_P[\log \rho_0] \neq 0$. Sua demonstração é baseada numa técnica elementar: a ruína do apostador.

3. Lei dos Grandes Números e Grandes Desvios

Neste trabalho, estamos interessados em estudar o efeito da aleatoriedade do ambiente sobre as propriedades de *grandes desvios de* $\frac{S_n}{n}$. Vimos que para o passeio aleatório simples,

$$\frac{S_n}{n} \to 2p - 1 \equiv v_p, \quad P\text{-q.c.}$$

As flutuações de ordem n de $\frac{S_n}{n}$ em torno de v_p possuem uma descrição em termos de um Princípio de Grandes Desvios[2] (PGD). Pelo Teorema de Cramér, (Teorema A.2 do Apêndice A): (um sentido preciso será dado à seguinte expressão)

$$P\big(\tfrac{S_n}{n} \in [a,b]\big) \simeq \exp\big(-n \inf_{v\in[a,b]} I_p(v)\big), \tag{1}$$

em que I_p é a *função taxa*, dada pela transformada de Legendre

$$I_p(v) := \sup_{t\in\mathbb{R}}\{tv - \Lambda(t)\},$$

e Λ é a função geradora de momentos dos incremento do passeio, $X_i := S_i - S_{i-1}$, definida por

$$\Lambda(t) := \log E[e^{tX_1}].$$

Através de uma conta explícita, encontramos

$$I_p(v) = \frac{1+v}{2}\log\Big(\frac{1+v}{2p}\Big) + \frac{1-v}{2}\log\Big(\frac{1-v}{2(1-p)}\Big).$$

Suponha que $v_p \notin [a,b]$. Então, de acordo com a Figura 3, $\inf_{v\in[a,b]} I_p(v) > 0$. Com isso, a expressão (1) acima diz que há uma probabilidade exponencialmente pequena de observar $\frac{S_n}{n}$ no intervalo $[a,b]$. Isto é, o PGD acima descreve as probabilidades dos valores atípicos de $\frac{S_n}{n}$.

Maior parte desta dissertação é dedicada ao estudo de um trabalho de Comets, Gantert e Zeitouni **[CGZ00]** em que um Princípio de Grandes Desvios (PGD) da forma (1) é obtido quando o ambiente é aleatório. Este PGD será obtido tanto para a medida *quenched* quanto para a *annealed*. No Capítulo 2 veremos que existe uma função taxa I que depende de P, que fornece o PGD sob P_ω para P-q.t.ω e no Capítulo 3, obteremos o PGD sob $\mathbb{P}$ com função taxa $\mathbb{I}$, que também depende de P. Se P é uma medida produto, então:

PGD *annealed*: Para P-quase todo ambiente ω,

$$P_\omega\big(\tfrac{S_n}{n} \in [a,b]\big) \simeq \exp\big(-n \inf_{v\in[a,b]} I(v)\big). \tag{2}$$

[2] ver definição no Apêndice A.

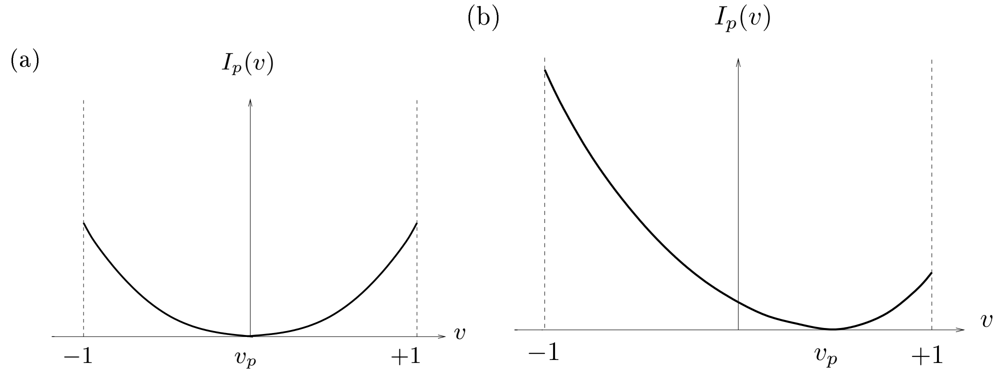

FIGURA 3. Esboço de I_p quando: (a) $p = \frac{1}{2}$ ($v_p = 0$), (b) $p = \frac{3}{4}$ ($v_p > 0$).

PGD *quenched*:

$$\mathbb{P}\big(\tfrac{S_n}{n} \in [a,b]\big) \simeq \exp\big(-n \inf_{v\in[a,b]} \mathbb{I}(v)\big). \tag{3}$$

Compararemos as funções taxa e interpretaremos as suas propriedades tais como os efeitos do ambiente sobre o passeio.

CAPíTULO 1

O Passeio Aleatório em Ambientes Aleatórios em $\mathbb{Z}$

O passeio aleatório em ambiente aleatório foi estudado pela primeira vez por Solomon [**Sol75**]. Neste capítulo seguiremos a apresentação de Zeitouni [**Zei02**]. Na Seção 1.1 definiremos o modelo, em particular, as duas descrições principais do passeio em ambiente aleatório (i.e. *quenched* e *annealed*). Na Seção 1.2 daremos o Critério sobre Recorrência e Transiência e na Seção 1.3 daremos a Lei dos Grandes Números para $\frac{S_n}{n}$.

1. O Modelo Probabilístico

A definição de um passeio aleatório em ambiente aleatório, envolve dois componentes: primeiro, o *ambiente*, que é aleatoriamente escolhido mas é mantido fixo durante a evolução do tempo e segundo, o *passeio aleatório*, que dado o ambiente, é uma cadeia de Markov homogênea cujas probabilidades de transição dependem do ambiente. O ambiente é definido como uma sequência $\omega := (\omega_x)_{x\in\mathbb{Z}}$ em que $\omega_x \in [0,1]$ para todo $x \in \mathbb{Z}$. Seja Ω o conjunto dos ambientes aleatórios ω, equipado com a σ-álgebra de Borel $\mathcal{F}$.

Em $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$, seja $\mathcal{G}$ a σ-álgebra gerada pelos cilindros. Fixados $\omega \in \Omega$ e $z \in \mathbb{Z}$, seja $(S_n)_{n\geq 0}$ a cadeia de Markov em $\mathbb{Z}$ tal que $P^z_\omega(S_0 = z) = 1$ e com probabilidades de transição dadas por

$$P^z_\omega(S_{n+1} = x+1|S_n = x) = \omega_x, \quad P^z_\omega(S_{n+1} = x-1|S_n = x) = 1-\omega_x.$$

Então $(S_n)_{n\geq 0}$ denota o passeio aleatório em ambiente aleatório ω e P^z_ω denota a lei *quenched* do passeio aleatório. No geral, suporemos sempre que $z \equiv 0$ e denotaremos $P^0_\omega \equiv P_\omega$. Para evitar casos triviais, tais como $\omega_x = 1$, para todo $x \in \mathbb{Z}$, suporemos sempre que P é *elíptica*, isto é, que existe $\epsilon \in \left(0, \frac{1}{2}\right)$ tal que

$$\epsilon \leq \omega_x \leq 1-\epsilon, \quad \forall\, x \in \mathbb{Z}.$$

Para todo $G \in \mathcal{G}$, a função $\omega \mapsto P_\omega(G)$ é $\mathcal{F}$-mensurável. Definimos então a lei *annealed* do passeio aleatório $\mathbb{P}$, em $(\Omega \times \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathcal{F}\times\mathcal{G})$ por

$$\mathbb{P}(F \times G) := \int_F P_\omega(G)P(d\omega), \quad F \in \mathcal{F}, G \in \mathcal{G}.$$

A dificuldade em tentar dizer alguma coisa sobre o passeio aleatório sem saber que ambiente particular ω foi escolhido é que, em geral, S_n não é uma cadeia de Markov sob $\mathbb{P}$.[1]

[1] Pode ser verificado que quando P é uma medida produto não degenerada, então, $\mathbb{P}(S_3 = 1|S_2 = 0, S_1 = 1) \neq \mathbb{P}(S_3 = 1|S_2 = 0, S_1 = -1)$.

Note que um evento relativo ao passeio $\frac{S_n}{n}$ que ocorre $\mathbb{P}$-q.c., também ocorre P_ω-q.c. para P quase todo ambiente ω. Ou seja, para todo $A \in \mathcal{G}$,

$$\mathbb{P}(\Omega \times A) = 1 \Rightarrow P_\omega(A) = 1, \text{ para } P\text{-q.t.}\omega. \tag{4}$$

Isso porque $\mathbb{P}(\Omega \times A^c) = \int_\Omega P_\omega(A^c)P(d\omega) = 0$ implica $P_\omega(A^c) = 0$, para P-q.t.ω.

Denotaremos por θ o shift do ambiente, ou seja, para $i \in \mathbb{Z}$ e $x \in \mathbb{Z}$, $\theta^i\omega$ denota o ambiente em que $(\theta^i\omega)_x = \omega_{x+i}$. Para $F \in \mathcal{F}$, seja $\theta^i F := \{\omega : \theta^i\omega \in F\}$. Uma medida P em $(\Omega, \mathcal{F})$ é dita *estacionária* se

$$P(F) = P(\theta^i F), \quad \forall\ F \in \mathcal{F}, i \in \mathbb{Z}.$$

Um conjunto $F \in \mathcal{F}$ é invariante se $\theta^{-1}F = F$. Uma medida estacionária P em $(\Omega, \mathcal{F})$ é *ergódica* se

$$P(F) \in \{0, 1\}, \quad \forall\ F \in \mathcal{F} \text{ invariante}.$$

Diremos que uma medida P em $(\Omega, \mathcal{F})$ é uma medida *produto*, se a sequência $(\omega_x)_{x\in\mathbb{Z}}$ for independente e identicamente distribuída. Em particular, se P é uma produto, então P é estacionária e ergódica. Neste capítulo apresentaremos alguns resultados para as medidas P estacionárias e ergódicas. Nos capítulos seguintes os principais resultados serão para P produto.

Escreveremos E_ω para esperanças com relação à P_ω, E para esperanças com relação à P e $\mathbb{E}$ para esperanças com relação à $\mathbb{P}$. Para P ergódica, utilizaremos em muitas demonstrações o Teorema Ergódico de Birkhoff (ver **[Shi96]**, p.409), que fornece para as funções $f : \Omega \to \mathbb{R}$, o limite da série

$$\frac{1}{n}\sum_{i=0}^{n-1} f(\theta^i\omega) \to E[f], \quad \text{para } P\text{-q.t.}\omega.$$

2. O Critério de Recorrência/Transiência

O primeiro resultado que apresentaremos nos diz que a recorrência ou transiência do passeio é determinado pelo valor $E[\log \rho_0]$, em que $\rho_x := \frac{1-\omega_x}{\omega_x}$. Para o passeio aleatório simples, em que $P = \delta_p^{\otimes\mathbb{Z}}$, com $p \in [\epsilon, 1-\epsilon]$ temos

(*a*) $E[\log \rho_0] < 0 \Leftrightarrow p > \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, $\mathbb{P}$-q.c.
(*b*) $E[\log \rho_0] > 0 \Leftrightarrow p < \frac{1}{2} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$, $\mathbb{P}$-q.c.
(*c*) $E[\log \rho_0] = 0 \Leftrightarrow p = \frac{1}{2} \Leftrightarrow -\infty = \liminf_{n\to\infty} S_n \leq \limsup_{n\to\infty} S_n = \infty$, $\mathbb{P}$-q.c.

O seguinte teorema é uma generalização desse resultado:

Teorema 1.1. *Seja (S_n) o passeio aleatório em ambiente aleatório, definido acima.*
(*a*) $E[\log \rho_0] < 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = \infty$, $\mathbb{P}$-*q.c.*
(*b*) $E[\log \rho_0] > 0 \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} S_n = -\infty$, $\mathbb{P}$-*q.c.*
(*c*) $E[\log \rho_0] = 0 \Leftrightarrow -\infty = \liminf_{n\to\infty} S_n \leq \limsup_{n\to\infty} S_n = \infty$, $\mathbb{P}$-*q.c.*

Demonstração. Fixados $\omega \in \Omega$, $m_-, m_+ \in \mathbb{N}$, denotamos por $\mathbb{Z}_{m_-}^{m_+}$ o conjunto $[-m_-, m_+] \cap \mathbb{Z}$. Definimos $T_0 := 0$ e para $z \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ o tempo de parada T_z, dado por

$$T_z := \inf\{n \geq 1 : S_n = z\},$$

com a convenção que o ínfimo sobre um conjunto vazio é igual a ∞. Para todo $z \in \mathbb{Z}_{m_-}^{m_+}$,

$$\nu_{m_-,m_+,\omega}(z) := P_\omega^z(T_{-m_-} < T_{m_+}).$$

Como $\{S_n\}$ é uma cadeia de Markov homogênea no tempo, $\nu_{m_-,m_+,\omega}$ satisfaz:

$$\nu_{m_-,m_+,\omega}(z) = \begin{cases} (1-\omega_z)\nu_{m_-,m_+,\omega}(z-1) + \omega_z \nu_{m_-,m_+,\omega}(z+1), & z \in \mathbb{Z}_{m_- -1}^{m_+ -1}, \\ 1, & z = -m_- \\ 0, & z = m_+. \end{cases} \tag{5}$$

Então $\nu_{m_-,m_+,\omega}$ é o que chamamos de função harmônica[2] e encontrar uma expressão para $\nu_{m_-,m_+,\omega}$ é um problema equivalente ao conhecido Problema da "Ruína do Apostador". Conforme o Lema B.2 do Apêndice B, uma função harmônica com condições de contorno dadas é única. As funções definidas por

$$A_{m_+,\omega}(z) := \begin{cases} 1 + \rho_{z+1} + \rho_{z+1}\rho_{z+2} + \cdots + \rho_{z+1}\cdots\rho_{m_+ -1}, & z \in \mathbb{Z}_{m_-}^{m_+ -2} \\ 1, & z = m_+ - 1, \\ 0, & z = m_+. \end{cases}$$

$$B_{m_-,\omega}(z) := \begin{cases} \frac{1}{\rho_{-m_- +1}\cdots\rho_z} + \frac{1}{\rho_{-m_- +2}\cdots\rho_z} + \cdots + \frac{1}{\rho_z}, & z \in \mathbb{Z}_{m_- -2}^{m_+}, \\ \frac{1}{\rho_{-m_- +1}}, & z = -m_- + 1, \\ 0, & z = -m_-. \end{cases}$$

satisfazem

$$A_{m_+,\omega}(z) = 1 + \rho_{z+1} A_{m_+,\omega}(z+1) \quad \text{e} \quad B_{m_-,\omega}(z) = \rho_{z+1} B_{m_-,\omega}(z+1) - 1, \tag{6}$$

implicando que as condições em (5) são satisfeitas para

$$\nu_{m_-,m_+,\omega}(z) = \frac{A_{m_+,\omega}(z)}{A_{m_+,\omega}(z) + B_{m_-,\omega}(z)}.$$

Pela expressão de $\nu_{m_-,m_+,\omega}$, a recorrência/transiência do passeio em ambiente ω, pode ser ligada à convergência/divergência das séries $A_{\infty,\omega}(0) := \lim_{m_+ \to \infty} A_{m_+,\omega}(0)$ e $B_{\infty,\omega}(0) := \lim_{m_- \to \infty} B_{m_- \omega}(0)$. Definimos então, os eventos

$$\mathcal{A}_+ := \{A_{\infty,\omega}(0) < \infty\} \qquad \text{e} \qquad \mathcal{B}_- := \{B_{\infty,\omega}(0) < \infty\}.$$

Vejamos as condições sobre o ambiente que determinarão a convergência/transiência do passeio:

[2] Ver definição no Apêndice B.

– Se $\omega \in \mathcal{T}_+$, em que $\mathcal{T}_+ := \mathcal{A}_+ \cap \mathcal{B}_-^c$, então
$$\lim_{m_- \to \infty} \lim_{m_+ \to \infty} P_\omega(T_{-m_-} < T_{m_+}) = 0.$$
Temos que
$$\{S_n \nearrow \infty\} \subset \bigcup_{m_- \geq 1} \bigcap_{m_+ \geq 1} \{T_{-m_-} \geq T_{m_+}\}.$$
Além disso, como $(S_n)_{n\geq 1}$ é uma cadeia de Markov irredutível sob P_ω, segue que o passeio satisfaz: ou é P_ω-q.c. recorrente, ou é P_ω-q.c. transiente, justificando a igualdade
$$\{S_n \nearrow \infty\} = \bigcup_{m_- \geq 1} \bigcap_{m_+ \geq 1} \{T_{-m_-} \geq T_{m_+}\}, \quad P_\omega\text{-q.c.}$$
Logo,
$$P_\omega(S_n \nearrow \infty) = \lim_{m_- \to \infty} \lim_{m_+ \to \infty} P_\omega(T_{-m_-} \geq T_{m_+}) = 1.$$
Isso significa que se o ambiente ω pertence à $\mathcal{T}_+$, então o passeio é transiente para a direita.

– Analogamente, se $\omega \in \mathcal{T}_-$, em que $\mathcal{T}_- := \mathcal{A}_+^c \cap \mathcal{B}_-$, segue que
$$\lim_{m_+ \to \infty} \lim_{m_- \to \infty} P_\omega(T_{m_-} < T_{m_+}) = 1 \;\Rightarrow\; P_\omega(S_n \searrow -\infty) = 1.$$
Isso significa que se o ambiente ω pertence à $\mathcal{T}_-$, então o passeio é transiente para a esquerda.

– Fixe $\omega \in \mathcal{R}$, em que $\mathcal{R} := \mathcal{A}_+^c \cap \mathcal{B}_-^c$. Segue que
$$\lim_{m_- \to \infty} P_\omega(T_{-m_-} \geq T_{m_+}) = 1, \quad \forall\, m_+ \in \mathbb{N},$$
$$\lim_{m_+ \to \infty} P_\omega(T_{-m_-} < T_{m_+}) = 1, \quad \forall\, m_- \in \mathbb{N}.$$
Segue que para todo $z \in \mathbb{Z}$, $T_z < \infty$, P_ω-q.c. Logo,
$$P_\omega(-\infty = \liminf_{n \to \infty} S_n \leq \limsup_{n \to \infty} S_n = \infty) = 1.$$
Isso significa que se o ambiente ω pertence à $\mathcal{R}$, então o passeio é recorrente.

– O caso $\omega \in \mathcal{A}_+ \cap \mathcal{B}_-$ não será tratado aqui, já que $P(\mathcal{A}_+ \cap \mathcal{B}_-) = 0$, como veremos a seguir.

A partir de agora, a demonstração do teorema consiste em estabelecer uma relação entre as probabilidades dos eventos $\mathcal{T}_+$, $\mathcal{T}_-$ e $\mathcal{R}$ e o valor $E[\log \rho_0]$. Por (6) temos que $\mathcal{A}_+$ e $\mathcal{B}_-$ são invariantes e da ergodicidade de P segue que $P(\mathcal{A}_+), P(\mathcal{B}_-) \in \{0,1\}$. Se $P(\mathcal{A}_+) = 1$, então $\rho_1 \cdots \rho_n \to 0$ em probabilidade e como P é estacionária, $\rho_{-1} \cdots \rho_{-n} \to 0$ em probabilidade. Logo, existe uma subsequência $\left(\prod_{i=1}^{n_k} \rho_{-i}\right)_{k\geq 1}$ tal que para P quase todo ω, $\rho_{-1} \cdots \rho_{-n_k} \to 0$, quando $k \to \infty$. Segue que
$$\infty = \sum_{k=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n_k} \frac{1}{\rho_{-i}} \leq \sum_{n=1}^{\infty} \prod_{i=1}^{n} \frac{1}{\rho_{-i}}.$$
Portanto, $P(\mathcal{A}_+) = 1$ implica $P(\mathcal{B}_-) = 0$ e consequentemente, $P(\mathcal{B}_-) = 1$ implica $P(\mathcal{A}_+) = 0$.

Observe que $P(\mathcal{T}_+) = P(\mathcal{A}_+ \cap \mathcal{B}_-^c) = P(\mathcal{A}_+) - P(\mathcal{A}_+ \cap \mathcal{B}_-)$ implica $P(\mathcal{A}_+) - P(\mathcal{B}_-) \leq P(\mathcal{T}_+) \leq P(\mathcal{A}_+)$. Utilizando o fato que $P(\mathcal{A}_+) = 1$ se e somente se $P(\mathcal{B}_-) = 0$, segue que $P(\mathcal{A}_+) = P(\mathcal{T}_+)$. Mostraremos que

$$P(\mathcal{A}_+) = 1 \;\Leftrightarrow\; E[\log \rho_0] < 0. \tag{7}$$

Utilizaremos, o seguinte resultado, devido a Kesten, que nos diz que somas divergentes de variáveis aleatórias estacionárias divergem pelo menos linearmente. Uma demonstração desse resultado encontra-se no Apêndice C.

Teorema 1.2. *Seja $Y_1, Y_2, \cdots$ uma sequência estacionária em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Então*

$$\Big\{ \sum_{i=1}^{\infty} Y_i \to \infty \Big\} \Rightarrow \Big\{ \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Y_i > 0 \Big\}, \quad P\text{-q.c.}$$

O Teorema Ergódico de Birkhoff implica que

$$E[\log \rho_0] = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log \rho_i, \quad P\text{-q.c.} \tag{8}$$

Se $\omega \in \mathcal{A}_+$, então $\lim_{n\to\infty} \rho_1 \cdots \rho_n = 0$ implica $\lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} \log \rho_i = -\infty$. A sequência $\{Y_i\}$ definida por $Y_i := -\log \rho_i$ é estacionária. Logo, pelo Teorema 1.2 e por (8), segue que $E[\log \rho_0] > 0$.

Reciprocamente, suponhamos que $E[\log \rho_0] < 0$ e seja $c := -E[\log \rho_0] > 0$. Por (8), existe $n_0(\omega) < \infty$, P-q.c. tal que para todo $n > n_0(\omega)$, $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \log \rho_i \leq \frac{-c}{2}$, implicando que $\prod_{i=1}^{n} \rho_i \leq e^{\frac{-nc}{2}}$. Seja $C_1(\omega) := \sum_{n=1}^{n_0(\omega)} \rho_1 \cdots \rho_n$. Segue que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \rho_1 \cdots \rho_n \leq C_1(\omega) \; + \sum_{i=n_0(\omega)+1}^{\infty} e^{\frac{-ic}{2}} < \infty, \quad P\text{-q.c.} \quad \Rightarrow \quad P(\mathcal{A}_+) = 1.$$

De forma análoga mostra-se que $P(\mathcal{T}_-) = P(\mathcal{B}_-)$ e $P(\mathcal{B}_-) = 1$ se e somente se $E[\log \rho_0] > 0$. Com isso, $P(\mathcal{R}) = P(\mathcal{A}_+^c \cap \mathcal{B}_-^c) = 1$ se e somente se $E[\log \rho_0] = 0$. □

3. A Lei dos Grandes Números

Sejam $\tau_0 := 0$ e para $n \in \mathbb{N}$, $\tau_n := T_n - T_{n-1}$ e $\tau_{-n} := T_{-n} - T_{-n+1}$. Veremos a seguir que, sob algumas hipóteses, podemos conseguir uma LGN para $(\tau_i)_{i\geq 1}$ que nos fornece também uma LGN para $(S_i)_{i\geq 1}$.

Lema 1.3. *Se $\frac{T_n}{n} \to \alpha$, $\mathbb{P}$-q.c., para alguma constante $\alpha < \infty$ então*

$$\frac{S_n}{n} \to \frac{1}{\alpha}, \quad \mathbb{P}\text{-q.c.}$$

Demonstração. Para $n \in \mathbb{N}$ definimos k_n como o único inteiro k que satisfaz $T_k \leq n < T_{k+1}$. Nesse caso, $S_n < k + 1$ ou, equivalentemente,

$$S_n < k_n + 1. \tag{9}$$

Além disso, se $k \in \mathbb{N}$ é tal que $T_k \leq n < T_{k+1}$, podemos reescrever n como $n = T_k + j$ em que $0 \leq j < T_{k+1} - T_k$. Como $S_{T_k} = k$,

$$S_n = S_{T_{k_n}+j} \geq k_n - j = k_n - (n - T_{k_n}). \tag{10}$$

Logo, por (9) e (10) segue que

$$\frac{k_n}{n} - \Big(1 - \frac{T_{k_n}}{n}\Big) \leq \frac{S_n}{n} \leq \frac{k_n}{n} + \frac{1}{n}.$$

Pela definição de k_n segue que $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{k_n}{n} = \lim\limits_{n\to\infty} \frac{n}{T_n}$ e portanto

$$\frac{1}{\alpha} \leq \liminf_{n\to\infty} S_n \leq \limsup_{n\to\infty} S_n \leq \frac{1}{\alpha}.$$

□

Voltando ao caso em que $P = \delta_p^{\otimes\mathbb{Z}}$, a LFGN implica, $\mathbb{P}$-q.c.,

$$\frac{S_n}{n} \to E[S_1] = 2p - 1 = \begin{cases} \frac{1-\frac{1-p}{p}}{1+\frac{1-p}{p}} = \frac{1-E[\rho_0]}{1+E[\rho_0]}, & p \neq \frac{1}{2} \\ 0, & p = \frac{1}{2}. \end{cases}$$

O seguinte teorema é uma generalização desse resultado.

Teorema 1.4. *Sejam τ_1 e τ_{-1} os tempos de primeira visita em 1 e -1, respectivamente. Então*[3]

(a) $\mathbb{E}[\tau_1] < \infty \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{1}{\mathbb{E}[\tau_1]}$, $\mathbb{P}$-*q.c.*
(b) $\mathbb{E}[\tau_{-1}] < \infty \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = -\frac{1}{\mathbb{E}[\tau_{-1}]}$, $\mathbb{P}$-*q.c.*
(c) $\mathbb{E}[\tau_1] = \infty$ *e* $\mathbb{E}[\tau_{-1}] = \infty \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0$, $\mathbb{P}$-*q.c.*

Segue de (4), a seguinte versão *quenched* desse resultado:

Teorema 1.5. *Para P quase todo ambiente ω,*

(a) $\mathbb{E}[\tau_1] < \infty \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{1}{\mathbb{E}[\tau_1]}$, P_ω-*q.c.*
(b) $\mathbb{E}[\tau_{-1}] < \infty \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = -\frac{1}{\mathbb{E}[\tau_{-1}]}$, P_ω-*q.c.*
(c) $\mathbb{E}[\tau_1] = \infty$ *e* $\mathbb{E}[\tau_{-1}] = \infty \;\Rightarrow\; \lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0$, P_ω-*q.c.*

Definimos

$$\overline{A}_m := \frac{1}{\omega_0} + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\omega_{-j}} \prod_{i=0}^{j-1} \rho_{-i} \qquad \text{e} \qquad \overline{B}_m := \frac{1}{1-\omega_0} + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{1-\omega_j} \prod_{i=0}^{j-1} \rho_i^{-1}$$

[3] O Lema 1.6 a seguir, implica que $\mathbb{E}[\tau_1]$ e $\mathbb{E}[\tau_{-1}]$ não podem ser ambas finitas, já que P-q.c. as séries $\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{i=0}^{j-1} \rho_{-i}$ e $\sum_{j=1}^{\infty}\prod_{i=0}^{j-1} \rho_i^{-1}$ não são ambas finitas, como foi visto na demonstração do Teorema 1.1.

A demonstração do Teorema 1.4 é baseada no Teorema 1.1, no Lema 1.3 e nos seguintes lemas:

Lema 1.6. *Sejam* $\overline{A} := \lim_{m\to\infty} \overline{A}_m$ *e* $\overline{B} := \lim_{m\to\infty} \overline{B}_m$. *Então*

(*a*) $\mathbb{E}[\tau_1] = E[\overline{A}]$,
(*b*) $\mathbb{E}[\tau_{-1}] = E[\overline{B}]$.

Lema 1.7. *Se* $\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty$, $\mathbb{P}$-*q.c., então* $(\tau_i)_{i\geq 1}$ *é estacionária e ergódica sob* $\mathbb{P}$.

demonstração do teorema 1.4. Mostremos primeiro que

$$\mathbb{E}[\tau_1] < \infty \Longrightarrow S_n \nearrow \infty \quad \mathbb{P}\text{-q.c.} \tag{11}$$

De fato, observe que pelo Lema 1.6, $\mathbb{E}[\tau_1] < \infty$ implica $E[\overline{A}] < \infty$. Consequentemente, a cauda da série $\overline{A}$ tende a zero, portanto, $\prod_{j=1}^{i} \rho_{-j} \to 0$ P-q.c. quando $i \to \infty$. Já vimos (vide prova do Teorema 1.2) que pela estacionariedade do ambiente, isto implica que $E[\log \rho_0] < 0$, o que garante $S_n \nearrow \infty$ $\mathbb{P}$-q.c. pelo Teorema 1.2. Se $\mathbb{E}[\tau_1] < \infty$, então (11) e o Lema 1.7 implicam que a sequência $(\tau_i)_{i\geq 1}$ é estacionária e ergódica. Como $T_n = \tau_1 + \cdots + \tau_n$, o Teorema de Birkhoff para $(\tau_i)_{i\geq 1}$ implica que:

$$\frac{T_n}{n} \longrightarrow \mathbb{E}[\tau_1]\,, \quad \mathbb{P}\text{-q.c.}$$

Logo, pelo Lema 1.6 segue que

$$\frac{S_n}{n} \longrightarrow \frac{1}{\mathbb{E}[\tau_1]}\,, \quad \mathbb{P}\text{-q.c.}\,,$$

o que prova a primeira afirmação do teorema. A segunda é provada do mesmo jeito. Para a terceira, se $\mathbb{E}[\tau_1] = \infty$ e $E[\log \rho_0] \leq 0$ a demonstração é igual ao caso em que $\mathbb{E}[\tau_1] < \infty$ e se $\mathbb{E}[\tau_1] = \infty$ e $E[\log \rho_0] \geq 0$ a demontração é igual ao caso $\mathbb{E}[\tau_{-1}] < \infty$. □

demonstração do Lema 1.6. Provaremos primeiro a desigualdade $\mathbb{E}[\tau_1] \geq E[\overline{A}]$. Considere a seguinte decomposição de τ_1:

$$\tau_1 = \mathbf{1}_{\{S_1=+1\}} + \mathbf{1}_{\{S_1=-1\}}(1 + \tau_0'' + \tau_1'')\,, \tag{12}$$

$$= 1 + \mathbf{1}_{\{S_1=-1\}}(\tau_0'' + \tau_1'')\,. \tag{13}$$

em que τ_0'' é definido de maneira tal que $1+\tau_0''$ seja o tempo de primeira volta em 0, e τ_1'' de maneira tal que $1 + \tau_0'' + \tau_1''$ seja o tempo de primeira visita em 1 (veja Figura 4).

Fixe um ambiente $\omega \in \Omega$. Como $P_\omega(S_1 = -1) = 1 - \omega_0$, temos por (13):

$$E_\omega[\tau_1] = 1 + (1-\omega_0)\Big(E_\omega[\tau_0''|S_1 = -1] + E_\omega[\tau_1''|S_1 = -1]\Big)\,.$$

Mostraremos agora que se $\mathbb{E}[\tau_1] < \infty$, então essa identidade leva à seguinte relação de recorrência: para quase-todo ω,

$$E_\omega[\tau_1] = \frac{1}{\omega_0} + \rho_0 E_{\theta^{-1}\omega}[\tau_1]. \tag{14}$$

Primeiro, observe que condicionalmente a $\{S_1 = -1\}$, a distribuição de τ_0'' sob P_ω é igual à distribuição de τ_1 sob $P_{\theta^{-1}\omega}$: $E_\omega[\tau_0''|S_1 = -1] = E_{\theta^{-1}\omega}[\tau_1]$. Por outro lado, observe que se $\mathbb{E}[\tau_1] < \infty$, então a equação (4) implica que $E_\omega[\tau_1] < \infty$ e $P_\omega(\tau_1 < \infty) = 1$ para P-quase

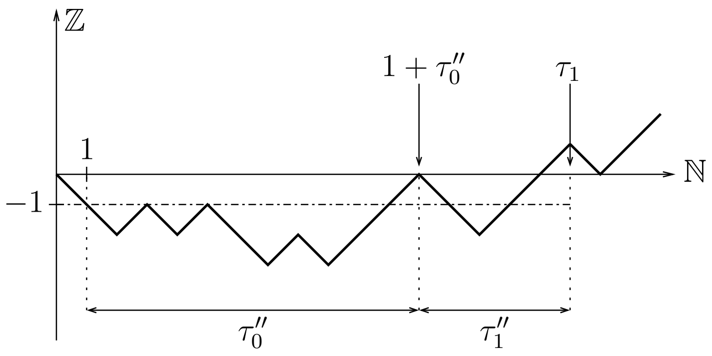

FIGURA 1. A decomposição de τ_1 em (12).

todo ambiente ω. Em particular, $P_\omega(\tau_0'' < \infty | S_1 = -1) \geq P_\omega(\tau_1 < \infty | S_1 = -1) = 1$. Logo,

$$E_\omega[\tau_1'' | S_1 = -1] = E_\omega[\tau_1'' | S_1 = -1, \tau_0'' < \infty] = E_\omega[\tau_1]\,,$$

pois, condicionalmente a $\{S_1 = -1, \tau_0'' < \infty\}$, a distribuição de τ_1'' é igual à distribuição de τ_1 sob P_ω, como segue da Propriedade de Markov forte. Temos então

$$E_\omega[\tau_1] = 1 + (1-\omega_0)\Big(E_{\theta^{-1}\omega}[\tau_1] + E_\omega[\tau_1]\Big)\,,$$

que dá (14) após rearranjo.

Usando recursivamente (14) para os ambientes $\theta^{-1}\omega$, $\theta^{-2}\omega$,..., $\theta^{-(m-1)}\omega$,

$$\begin{aligned}
E_\omega[\tau_1] &= \frac{1}{\omega_0} + \rho_0\Big(\frac{1}{\omega_{-1}} + \rho_{-1} E_{\theta^{-2}\omega}[\tau_1]\Big) \\
&= \cdots \\
&= \frac{1}{\omega_0} + \sum_{j=1}^{m} \frac{1}{\omega_{-j}} \prod_{i=0}^{j-1} \rho_{-i} + E_{\theta^{-m-2}\omega}[\tau_1] \prod_{i=0}^{m+1} \rho_{-i}\,.
\end{aligned}$$

Em particular, $E_\omega[\tau_1] \geq \overline{A}_m(\omega)$. Integrando com respeito a P, $\mathbb{E}[\tau_1] \geq E[\overline{A}_m]$. Tomando $m \to \infty$, o Teorema da Convergência Monótona implica $\mathbb{E}[\tau_1] \geq E[\overline{A}]$. Se $\mathbb{E}[\tau_1] = \infty$, essa desigualdade também é válida.

Para provar a desigualdade contrária, começaremos mostrando que $\mathbb{E}[\tau_1 \mathbf{1}_{\{\tau_1 < \infty\}}] \leq E[\overline{A}]$. Fixado $M \in \mathbb{N}$, como

$$E_\omega[\tau_0'' \mathbf{1}_{\{\tau_1 < M\}} | S_1 = -1] = E_{\theta^{-1}\omega}[\tau_1 \mathbf{1}_{\{\tau_2 < M\}}] \leq E_{\theta^{-1}\omega}[\tau_1 \mathbf{1}_{\{\tau_1 < M\}}] \quad \text{e}$$

$$E_\omega[\tau_1'' \mathbf{1}_{\{\tau_1 < M\}} | S_1 = -1] \leq E_\omega[\tau_1'' \mathbf{1}_{\{\tau_1'' < M\}} | S_1 = -1] = E_\omega[\tau_1 \mathbf{1}_{\{\tau_1 < M\}}]$$

segue de (13) que

$$\begin{aligned}
E_\omega[\tau_1 \mathbf{1}_{\{\tau_1 < M\}}] &= P(\tau_1 < M) + (1-\omega_0) E_\omega[(\tau_0'' + \tau_1'') \mathbf{1}_{\{\tau_1 < M\}} | S_1 = -1] \\
&\leq 1 + (1-\omega_0)\Big(E_{\theta^{-1}\omega}[\tau_1 \mathbf{1}_{\{\tau_1 < M\}}] + E_\omega[\tau_1 \mathbf{1}_{\{\tau_1 < M\}}]\Big).
\end{aligned}$$

Então,

$$E_\omega[\tau_1 \mathbf{1}_{\{\tau_1 < M\}}] \leq \frac{1}{\omega_0} + \rho_0 E_{\theta^{-1}\omega}[\tau_1 \mathbf{1}_{\{\tau_1 < M\}}]$$

implica

$$\begin{aligned}
E_\omega[\tau_1 \mathbf{1}_{\{\tau_1<M\}}] &\le \frac{1}{\omega_0} + \rho_0\Big(\frac{1}{\omega_{-1}} + \rho_{-1}E_{\theta^{-2}\omega}[\tau_1\mathbf{1}_{\{\tau_1<M\}}]\Big)\\
&= \cdots\\
&= \frac{1}{\omega_0} + \sum_{j=1}^{m}\frac{1}{\omega_{-j}}\prod_{i=0}^{j-1}\rho_{-i} + E_{\theta^{-m-2}\omega}[\tau_1\mathbf{1}_{\{\tau_1<M\}}]\prod_{i=0}^{m+1}\rho_{-i}\,.
\end{aligned}$$

Se $E[\overline{A}] < \infty$, então $E\Big[\prod_{i=0}^{m}\rho_{-i}\Big] \to 0$ quando $m \to \infty$, portanto $E_\omega[\tau_1\mathbf{1}_{\{\tau_1<M\}}] \le E[\overline{A}]$. Pelo Teorema da Convergência Monótona segue que $E_\omega[\tau_1\mathbf{1}_{\{\tau_1<\infty\}}] \le E[\overline{A}]$. Se $\mathbb{E}[\tau_1] < \infty$ então $\tau_1 < \infty$, $\mathbb{P}$-q.c. e se $\mathbb{E}[\tau_1] = \infty$ e $E[\log \rho_o] \le 0$, de acordo com o Teorema 1.1, $\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty$, $\mathbb{P}$-q.c. e portanto, $\tau_1 < \infty$, $\mathbb{P}$-q.c. Em ambos, $\mathbb{E}[\tau_1] = \mathbb{E}[\tau_1\mathbf{1}_{\{\tau_1<\infty\}}]$ e portanto, $\mathbb{E}[\tau_1] = E[\overline{A}]$. Para finalizar, se $\mathbb{E}[\tau_1] = \infty$ e $E[\log\rho_o] > 0$, então $P(\mathcal{B}_-) = 1$ e $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\rho_0\cdots\rho_{-n}} < \infty$, P-q.c. Logo, $\rho_0\cdots\rho_{-n} \to \infty, P$-q.c. implicando que $E[\overline{A}] = \infty$. □

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 1.7. A hipótese $\limsup_{n\to\infty} S_n = \infty$, implica que a sequência $(\tau_i)_{i\ge1}$ está bem definida, $\mathbb{P}$-q.c. Sejam U a medida uniforme em $[0,1]$, $\mathbb{U} := U^{\otimes\mathbb{N}}$, $\widetilde{\mathcal{G}}$ a σ-álgebra gerada pelos cilindros em $[0,1]^{\mathbb{N}}$ e $\widetilde{\mathbb{P}}$ a medida produto dada por $\widetilde{\mathbb{P}} := P\otimes\mathbb{U}$ em $(\Omega\times[0,1]^{\mathbb{N}}, \mathcal{F}\times\widetilde{\mathcal{G}})$.

Construiremos em $\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ uma Cadeia de Markov homogênea no tempo $(\widetilde{S}_n)_{n\ge1}\in\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}$ sob $\widetilde{\mathbb{P}}$, da seguinte maneira: Fixados $(\omega,\xi)\in\Omega\times[0,1]^{\mathbb{N}}$, sejam $\widetilde{S}_0 := 0$ e para $n\ge 0$ definimos $\widetilde{S}_{n+1} := \widetilde{S}_n + Y_n$, em que $Y_n := \mathbf{1}\{\xi_{n+1}\le\omega_{\widetilde{S}_n}\} - \mathbf{1}\{\xi_{n+1}>\omega_{\widetilde{S}_n}\}$, para todo $n\in\mathbb{N}$. Se $\widetilde{P}_\omega(\cdot)$ é a distribuição de $(\widetilde{S}_n)_{n\ge1}$ condicionada ao ambiente ω, então

$$\widetilde{P}_\omega(\widetilde{S}_{n+1} = x+1|\widetilde{S}_n = x) = \widetilde{P}_\omega(Y_{n+1} = +1|\widetilde{S}_n = x) = U(\xi_{n+1}\le\omega_x) = \omega_x.$$

Isso implica que $(\widetilde{S}_n)_{n\ge1}$ tem a mesma distribuição que $(S_n)_{n\ge1}$. Seja $A\in\sigma(\tau_1,\tau_2,\cdots)$, i.e, $A = \{(\omega,\xi) : (\tau_1,\tau_2,\cdots)\in B\}$, em que $B\subset\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Definimos $\hat\theta A := \{(\omega,\xi) : (\tau_2,\tau_3,\cdots)\in B\}$. Mostraremos que se A é invariante, ou seja, se $\hat\theta A = A$ então $\widetilde{\mathbb{P}}(A)\in\{0,1\}$. Seja $f(\omega,\xi) := \mathbf{1}_A(\omega,\xi)\in\{0,1\}$. Pelo Teorema de Fubini,

$$\widetilde{\mathbb{P}}(A) = \int f(\omega,\xi)d\widetilde{\mathbb{P}} = \int\Big(\int f(\omega,\xi)\mathbb{U}(d\xi)\Big)P(d\omega).$$

Fixado $\omega\in\Omega$, como $A = \hat\theta^k A$, para todo $k\ge1$, A não depende de $\xi_1,\xi_2,\cdots,\xi_k$, para todo $k\ge1$. Isso significa que $f(\omega,\cdot)$ é σ-$(\xi_{k+1},\xi_{k+2},\cdots)$ mensurável, para todo $k\ge1$ e portanto, $f(\omega,\cdot)$ é $\mathcal{T}^\infty$, em que $\mathcal{T}^\infty$ é a σ-álgebra caudal, definida por

$$\mathcal{T}^\infty := \bigcap_{k\ge1}\sigma\text{-}(\xi_{k+1},\xi_{k+2},\cdots).$$

Como $\mathbb{U}$ também é ergódica (por ser uma medida produto), $\xi\mapsto f(\omega,\xi)$ é $\mathbb{U}$-q.c. uma constante (ver **[Shi96]**, p.408) que denotaremos por $a(\omega)\equiv f(\omega,\xi)$. Então $\widetilde{\mathbb{P}}(A) =$

$\displaystyle\int a(\omega)P(d\omega)$, com $a(\omega) \in \{0,1\}$. Temos que

$$a(\theta\omega) = f(\theta\omega,\cdot) = \mathbf{1}_A(\theta\omega,\cdot) = \mathbf{1}_{\hat{\theta}A}(\omega,\cdot) = \mathbf{1}_A(\omega,\cdot) = a(\omega).$$

Logo, $a(\cdot)$ é invariante sob θ e como P é ergódica, $a(\omega)$ é constante P-q.c. Então $a(\omega) = 0$ (ou 1) P-q.c.,o que implica $\widetilde{\mathbb{P}}(A) \in \{0,1\}$. $\square$

Se P é uma medida produto, então:

$$\begin{aligned} E[\overline{A}] &= E\Big[\frac{1}{\omega_0}\Big] + E\Big[\frac{\rho_0}{\omega_{-1}}\Big] + \cdots + E\Big[\frac{\rho_0\cdots\rho_{-m}}{\omega_{-m-1}}\Big] + \cdots \\ &= E\Big[\frac{1}{\omega_0}\Big] + E\Big[\frac{1}{\omega_{-1}}\Big]E[\rho_0] + \cdots + E\Big[\frac{1}{\omega_{-m-1}}\Big]E[\rho_0]\cdots E[\rho_{-m}] + \cdots \\ &= E\Big[\frac{1}{\omega_0}\Big](1 + E[\rho_0] + E[\rho_0]^2 + \cdots + E[\rho_0]^m + \cdots) \end{aligned}$$

Logo, se $E[\rho_0] < 1$, então, o Lema 1.6 implica

$$\mathbb{E}[\tau_1] = \frac{1+E[\rho_0]}{1-E[\rho_0]}.$$

Analogamente, se $E[\rho_0^{-1}] < 1$, então

$$\mathbb{E}[\tau_{-1}] = \frac{1+E[\rho_0^{-1}]}{1-E[\rho_0^{-1}]}.$$

Com isso, o Teorema 1.8 para P produto tem a seguinte versão:

TEOREMA 1.8. *Seja P uma medida produto em $(\Omega,\mathcal{F})$. Então:*

(*a*) $E[\rho_0] < 1 \Rightarrow \lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = \frac{1-E[\rho_0]}{1+E[\rho_0]}$, $\quad\mathbb{P}$-*q.c.*

(*b*) $E[\rho_0^{-1}] < 1 \ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = -\frac{1-E[\rho_0^{-1}]}{1+E[\rho_0^{-1}]}$, $\quad\mathbb{P}$-*q.c.*

(*c*) $E[\rho_0]^{-1} \leq 1 \leq E[\rho_0^{-1}] \ \Rightarrow\ \lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} = 0$, $\quad\mathbb{P}$-*q.c.*

Fixamos uma medida produto P e denotaremos por v_P o valor do limite $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{S_n}{n}$. Segue da Desigualdade de Jensen que

– Se $E[\log\rho_0] < 0$, então $E[\log\rho_0^{-1}] > 0$ e consequentemente, $E[\rho_0^{-1}] > 1$. Logo, $v_P \geq 0$.

– Se $E[\log\rho_0] > 0$, então $E[\rho_0^{-1}] < 1$. Logo, $v_P \leq 0$.

– Se $E[\log\rho_0] = 0$, então $E[\log\rho_0^{-1}] = 0$. Logo, $E[\rho_0^{-1}] > 1$ e $E[\rho_0] > 1$, portanto, $v_P = 0$.

Considere o passeio aleatório simples correspondente à medida $\delta_{E[\omega_0]}^{\otimes\mathbb{Z}}$, com velocidade $\overline{v}_P := 2E[\omega_0] - 1$. Por (3) temos que se $E[\rho_0] < 1$, ou seja, $v_P > 0$, então $\overline{v}_P > 0$. De forma análoga, $v_P < 0$, implica $\overline{v}_P < 0$. Entretando, é possível construir exemplos em que $v_P = 0$ e $\overline{v}_P \neq 0$, como por exemplo, quando P é dada por $P = \alpha^{\otimes\mathbb{Z}}$, em que α assume os valores $0,6$ e $0,001$ com probabilidade $\frac{10}{11}$ e $\frac{1}{11}$, respectivamente.

Quando $P = \alpha^{\otimes \mathbb{Z}}$, em que α assume os valores $0,6$ e $0,001$ com probabilidade p e $1-p$, respectivamente, podemos observar vários casos dependendo do valor de p:

- O passeio é transiente para a esquerda se $p < 0,944$, recorrente se $p = 0,944$ e transiente para a direita se $p > 0,944$.

- A velocidade v_P é negativa se $p < 0,667$, igual a zero se $p \in [0,667, 0,998]$ e positiva se $p > 0,998$.

- A velocidade $\overline{v}_P$ é negativa se $p < 0,833$, igual a zero se $p = 0,833$ e positiva se $p > 0,833$.

CAPíTULO 2

O Princípio de Grandes Desvios *Quenched*

Vimos no Teorema 1.5 que se $E[\log \rho_0] \leq 0$, então para P quase todo ambiente ω, o passeio aleatório S_n, sob a medida *quenched* P_ω, possui uma velocidade assintótica

$$\frac{S_n}{n} \to \frac{1}{\mathbb{E}[\tau_1]}, \quad P_\omega\text{-q.c.}$$

Nosso interesse neste capítulo é estudar a concentração de $\frac{S_n}{n}$ em torno deste valor assintótico. Isto é, queremos estudar para $C \subset [-1,1]$ e toda realização típica do ambiente ω, o decaimento exponencial de $P_\omega\big(\frac{S_n}{n} \in C\big)$, com o objetivo de obter um PGD para $\frac{S_n}{n}$, quando P é uma medida produto. Enunciaremos a seguir o principal resultado deste capítulo.

TEOREMA 2.1. *Seja P uma medida produto. Então, para P-quase todo ambiente ω, $\big(\frac{S_n}{n}\big)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz um Princípio de Grande Desvios (PGD) sob P_ω. Isto é, existe uma função $I : [-1,1] \to [0,\infty)$, semi-contínua inferiormente, $I \neq \infty$, e $\Omega^* \subset \Omega$ tal que $P(\Omega^*) = 1$ e tal que para todo $\omega \in \Omega^*$: Para todo fechado $F \subset [-1,1]$,*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P_\omega\big(\tfrac{S_n}{n} \in F\big) \leq - \inf_{v\in F} I(v),$$

e para todo aberto $A \subset [-1,1]$,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P_\omega\big(\tfrac{S_n}{n} \in A\big) \geq - \inf_{v\in A} I(v).$$

Um esboço da função taxa I encontra-se na Figura 3, nos casos em que o passeio é recorrente ou transiente para a direita. No decorrer do capítulo, obteremos resultados que nos permitirão obter propriedades da função I, verificadas no Lema 2.14, tais como derivabilidade e convexidade. Na seção 2.3.1, interpretaremos e compararemos as propriedades da função taxa com o caso do passeio aleatório simples.

Se T_n é o tempo de primeira visita no ponto $n \in \mathbb{N}$, obteremos primeiro um PGD *quenched* para a sequência $\frac{T_n}{n}$. Como $\frac{T_n}{n} \in [1,\infty)$, este PGD será *fraco*, no sentido que a cota superior sobre o decaimento exponencial de $P_\omega\big(\frac{S_n}{n} \in F\big)$ vale somente para conjutos $F \subset [1,\infty)$ *compactos*.

Obseve que $T_n = \tau_1 + \cdots + \tau_n$ em que τ_i é o tempo gasto entre a primeira visita em $i-1$ e a primeira visita em i. Apesar de não serem identicamente distibuídas, as variáveis τ_i são independentes. Utilizaremos então um método parecido com a prova do Teorema de Cramér, baseado na definição da seguinte função geradora de momentos,

$$\varphi(r,\omega) := E_\omega[e^{r\tau_1}\mathbf{1}_{\{\tau_1<\infty\}}], \ \forall\, r \in \mathbb{R} \text{ e } \omega \in \Omega, \tag{15}$$

na sua esperança em relação ao ambiente,

$$\Lambda(r) := E[\log \varphi(r,\cdot)], \ \forall\, r \in \mathbb{R}, \tag{16}$$

e na transformada de Legendre de Λ, dada por

$$\Lambda^*(u) := \sup_{r\in\mathbb{R}}\{ru - \Lambda(r)\}, \ \forall\ u \in \mathbb{R}. \tag{17}$$

Com isso, o PGD para $\frac{S_n}{n}$ será obtido via as seguintes inclusões para certos valores de n, δ e ϵ, em que $B_\delta(v) := \{z \in \mathbb{R}; |z - v| < \delta\}$:

$$\left\{\frac{S_n}{n} \geq v\right\} \subset \left\{\frac{T_{\lfloor vn\rfloor}}{\lfloor vn\rfloor} \leq \frac{1}{v} + \epsilon\right\} \quad \text{e} \quad \left\{\frac{1-\epsilon}{v} < \frac{T_{\lfloor vn\rfloor}}{\lfloor vn\rfloor} < \frac{1-\frac{\epsilon}{2}}{v}\right\} \subset \left\{\frac{S_n}{n} \in B_\delta(v)\right\}.$$

Como $\frac{S_n}{n} \in [-1, 1]$, será necessário obter um PGD fraco também para $\frac{T_{-n}}{n}$. As propriedades das funções φ, Λ e Λ^* serão importantes na prova do PGD fraco para $\frac{T_n}{n}$, portanto, iniciaremos o capítulo com o estudo destas funções na Seção 2.1. No próximo capítulo, precisaremos de algumas destas propriedades também para P estacionária e/ou ergódica, por isso, alguns lemas são mais gerais do que o necessário neste capítulo. Na Seção 2.2 obteremos o PGD fraco para $\frac{T_n}{n}$ e para $\frac{T_{-n}}{n}$. Estes PGDs serão então juntados para provar o Teorema 2.1 na Seção 2.3.

Suporemos até o fim do capítulo que $E[\log(\rho_0)] \leq 0$. Isso significa, pelo Teorema 1.1 que o ambiente é tal que o passeio seja recorrente ou transiente para a direita.

Então, $\tau_1 < \infty$, P-q.c. de acordo com o Lema 1.6 e $\varphi(r,\omega) = E_\omega[e^{r\tau_1}]$. O caso $E[\log(\rho_0)] \geq 0$, trata-se de forma análoga.

Apresentaremos a prova obtida por Comets, Gantert e Zeitouni [**CGZ00**]. Greven e den Hollander [**GdH94**] também obtiveram uma prova para o PGD *quenched* e Varadhan [**Var03**] obteve uma prova tanto para o PGD *quenched* quanto para o *annealed.*

1. Propriedades de φ, Λ e Λ^*

Para P uma medida de probabilidade em $(\Omega, \mathcal{F})$, denotaremos por P_x a marginal de P em $x \in \mathbb{Z}$. Definimos o suporte de P_0 como

$$\text{supp}(P_0) := \overline{\{\omega_0 \in [-1, 1] : P_0(B_\epsilon(\omega_0)) > 0, \ \forall\ \epsilon > 0\}}.$$

Segue que $\text{supp}(P_0)$ é compacto. Denotamos por $\omega_{\min}$ o ínfimo de $\text{supp}(P_0)$ e $\omega_{\max}$ o supremo de $\text{supp}(P_0)$. Como P é elíptica segue que

$$\omega_{\min} > 0 \quad \text{e} \quad \omega_{\max} < 1.$$

Suporemos sempre que $\text{supp}(P_0) \cap \left(0, \frac{1}{2}\right] \neq \emptyset$ e que $\text{supp}(P_0) \cap \left[\frac{1}{2}, 1\right) \neq \emptyset$, ou seja,

$$\omega_{\min} \leq \frac{1}{2} \quad \text{e} \quad \omega_{\max} \geq \frac{1}{2}. \tag{18}$$

Lema 2.2. *Sejam P uma medida produto e φ definida por (15). Então, para todo $r > 0$, $\varphi(r,\omega) = \infty$, para P-q.t.ω.*

Demonstração. Usando a decomposição (12), temos que

$$\begin{aligned}\varphi(r,\omega) &= e^r\omega_0 + (1-\omega_0)E_\omega[e^{r(1+\tau_0''+\tau_1'')}|S_1 = -1] \\ &= e^r\omega_0 + (1-\omega_0)e^r\varphi(r,\theta^{-1}\omega)\varphi(r,\omega).\end{aligned} \tag{19}$$

Para $r > 0$ fixo, definimos $A_r := \{\omega : \varphi(r,\omega) = \infty\}$. Se $\theta^{-1}\omega \in A_r$, o lado direito de (19) é infinito, logo, $\varphi(r,\omega)$ também é e portanto, $\omega \in A_r$. Logo, A_r é um evento invariante. Como P é ergódica, $P(A_r) \in \{0,1\}$ e para mostrarmos que $P(A_r) = 1$, é suficiente verificar que $P(A_r) > 0$. Para $N \in \mathbb{N}$, definimos

$$B_N := \{\omega : \omega_x \leq \tfrac{1}{2}, \forall\, x = 0, -1, \cdots, -N\}.$$

Dado $\omega \in \Omega$, seja ω^N o ambiente em que

$$\omega_x^N = \begin{cases} \frac{1}{2}, & \text{se } x \in \{0, -1, \cdots, -N\}, \\ \omega_x, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Um acoplamento permite comparar a probabilidade do evento crescente $\mathbf{1}_{\{\tau_1 < n\}}$ para o passeio no ambiente $\omega \in B_N$ e para o passeio no ambiente ω^N: para todo $n \in \mathbb{N}$ e $\omega \in B_N$, $E_\omega[\mathbf{1}_{\{\tau_1<n\}}] \leq E_{\omega^N}[\mathbf{1}_{\{\tau_1<n\}}]$, logo,

$$\begin{aligned} E_\omega[\tau_1] &= \sum_{n=1}^{\infty} P_\omega(\tau_1 \geq n) = \sum_{n=1}^{\infty}(1 - E_\omega[\mathbf{1}_{\{\tau_1<n\}}]) \\ &\geq \sum_{n=1}^{\infty}(1 - E_{\omega^N}[\mathbf{1}_{\{\tau_1<n\}}]) = \sum_{n=1}^{\infty} P_{\omega^N}(\tau_1 \geq n) = E_{\omega^N}[\tau_1]. \end{aligned}$$

Como $e^x \geq x$ e $r > 0$, segue que

$$\begin{aligned} \varphi(r,\omega) &= E_\omega[e^{r\tau_1}] \geq rE_\omega[\tau_1] \geq rE_{\omega^N}[\tau_1] \\ &\geq rE_{\omega^N}[\tau_1\mathbf{1}_{\{T_1<T_{-N}\}}] \equiv rE_{\omega^{SRW}}[\tau_1\mathbf{1}_{\{T_1<T_{-N}\}}], \end{aligned}$$

em que ω^{SRW} é o ambiente que descreve o passeio aleatório simples simétrico, que satisfaz $E_{\omega^{SRW}}[\tau_1] = \infty$, como foi visto na Introdução. Como $\tau_1 < \infty$, P-q.c., temos que $\lim_{N\to\infty} E_{\omega^{SRW}}[\tau_1\mathbf{1}_{\{T_1<T_{-N}\}}] = E_{\omega^{SRW}}[\tau_1]$. Logo, se $K = \frac{1}{\lfloor e^r\omega_{min}\rfloor} + 1$, existe $N_0 = N_0(r)$ tal que se $\omega \in B_{N_0}$, então $\varphi(r,\omega) \geq K$. Portanto, se $\omega \in B_{N_0+1}$, então $\theta^{-1}\omega \in B_{N_0}$ e $\varphi(r,\theta^{-1}\omega) \geq K$.

Fixe $\omega \in B_{N_0+1}$. Segue de (19) que

$$\begin{aligned} \varphi(r,\omega) &\geq (1-\omega_0)e^r\varphi(r,\theta^{-1}\omega)\varphi(r,\omega) \\ &\geq (1-\omega_0)e^rK\varphi(r,\omega) \geq \lfloor e^r\omega_{min}\rfloor K\varphi(r,\omega). \end{aligned}$$

Se $\varphi(r,\omega) < \infty$, então $K \leq \frac{1}{\lfloor e^r\omega_{min}\rfloor}$, uma contradição. Logo, $\varphi(r,\omega) = \infty$, o que implica $B_{N_0+1} \subset A_r$ e portanto, $P(A_r) \geq P(B_{N_0+1})$. Além disso, $P(B_{N_0+1}) > 0$, já que P é produto e estamos supondo (18). Logo, $P(A_r) > 0$. □

Com isso, temos que $\Lambda \equiv \infty$ em $(0,\infty)$, quando P é uma medida produto. O próximo lema fornece propriedades de Λ para valores não positivos de r.

Lema 2.3. *Sejam P uma medida produto e Λ definida por (16). Então,*

(a) *$r \mapsto \Lambda(r)$ é convexa, $\Lambda(0) = 0$ e $\lim_{r\to-\infty} \Lambda(r) = -\infty$.*

(b) *$r \mapsto \Lambda(r)$ é duas vezes derivável em $(-\infty,0)$. Neste intervalo, Λ' cresce e $\Lambda' \in (1, \mathbb{E}[\tau_1])$. Para $u \in (1,\mathbb{E}[\tau_1])$ existe um único $r(u) \in (-\infty,0)$, tal que*

(20) $$\Lambda'(r)|_{r=r(u)} = u.$$

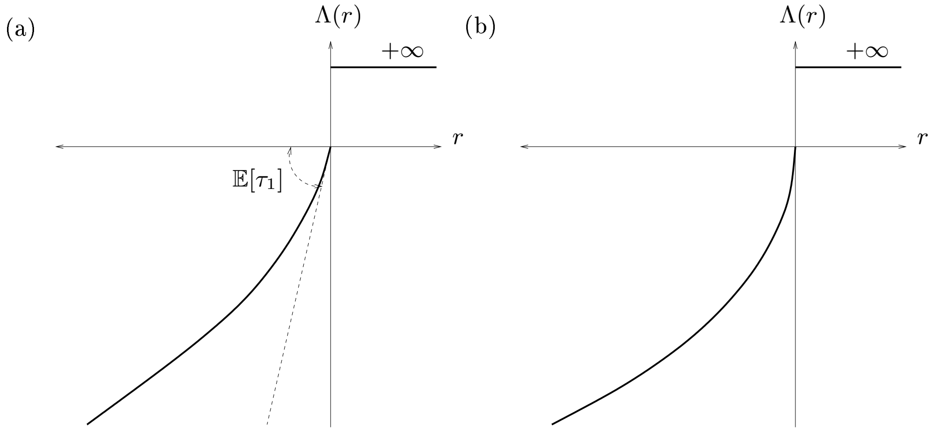

FIGURA 1. Esboço de Λ: (a) quando $\mathbb{E}[\tau_1] < \infty$, (b) quando $\mathbb{E}[\tau_1] = \infty$.

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 2.3. (a) Fixados $r_1 < r_2 \leq 0$ e $t \in [0,1]$, segue da Desigualdade de Hölder que, para todo $\omega \in \Omega$,

$$E_\omega[e^{(tr_1+(1-t)r_2)\tau_1}] = E_\omega[(e^{r_1\tau_1})^t(e^{r_2\tau_1})^{(1-t)}] \leq E_\omega[e^{r_1\tau_1}]^t E_\omega[e^{r_2\tau_1}]^{(1-t)}.$$

Portanto, $\Lambda(tr_1+(1-t)r_2) \leq t\Lambda(r_1)+(1-t)\Lambda(r_2)$, demonstrando a convexidade de $r \mapsto \Lambda(r)$.

Para todo $\omega \in \Omega$, $\varphi(0,\omega) = 1$, logo, $\Lambda(0) = 0$. Como $\tau_1 \geq 1$, se $r < 0$, para todo $\omega \in \Omega$, $\varphi(r,\omega,) \leq e^r$, o que implica $\Lambda(r) \leq r$ e portanto, $\lim_{r\to-\infty} \Lambda(r) = -\infty$.

(b) Fixados $\omega \in \Omega$ e $r < 0$, temos que $\frac{\partial}{\partial r}\log\varphi(r,\omega) = \frac{E_\omega[\tau_1 e^{r\tau_1}]}{E_\omega[e^{r\tau_1}]}$ e

$$\begin{aligned}
1 \leq \frac{E_\omega[\tau_1 e^{r\tau_1}]}{E_\omega[e^{r\tau_1}]} &= \frac{e^r\omega_0 + \sum_{k=2}^\infty ke^{rk}P_\omega(\tau_1 = k)}{e^r\omega_0 + \sum_{k=2}^\infty e^{rk}P_\omega(\tau_1 = k)} \\
&\leq 1 + \frac{e^{-r}}{\omega_{min}}\sum_{k=2}^\infty ke^{rk} = 1 + \frac{e^{-r}}{\omega_{min}}\frac{d}{dr}\sum_{k=2}^\infty e^{rk} \\
&\leq 1 + \frac{3e^r}{\omega_{min}(1-e^r)^2}. \qquad (21)
\end{aligned}$$

Logo, fixado $r' < 0$, a função $r \mapsto \frac{\partial}{\partial r}\log\varphi(r,\omega)$ é limitada em $(-\infty, r']$ e as cotas inferior e superior, 1 e $1 + \frac{2e^{r'}}{\omega_{min}(1-e^{r'})^2}$, respectivamente, independem de ω. Portanto, para todo $r \in (-\infty, r']$, a função $\omega \mapsto \frac{\partial}{\partial r}\log\varphi(r,\omega)$ é integrável, implicando

$$\Lambda'(r) = \frac{\partial}{\partial r}E[\log\varphi(r,\cdot)] = E\Big[\frac{\partial}{\partial r}\log\varphi(r,\cdot)\Big]. \qquad (22)$$

Para o obtenção da derivada segunda, definimos para $k \in \mathbb{N}$, $\nu_{\omega,k} := e^{rk}P_\omega(\tau_1 = k)$ e $Z_\omega := \sum_{k=1}^\infty \nu_{\omega,k}$. Seja $\widetilde{P_\omega}$ tal que $\widetilde{P_\omega}(\tau_1 = k) = \frac{\nu_{\omega,k}}{Z_\omega}$. Então

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2}{\partial r^2}\log\varphi(r,\omega) &= \frac{E_\omega[\tau_1^2 e^{r\tau_1}]}{E_\omega[e^{r\tau_1}]} - \Big(\frac{E_\omega[\tau_1 e^{r\tau_1}]}{E_\omega[e^{r\tau_1}]}\Big)^2 \\
&= E_{\widetilde{P_\omega}}[\tau_1^2] - E_{\widetilde{P_\omega}}[\tau_1]^2 = \mathrm{Var}_{\widetilde{P_\omega}}[\tau_1].
\end{aligned}$$

Analogamente à demonstração de que para $r' < 0$ fixo, a função $r \to \frac{\partial}{\partial r} \log \varphi(r,\omega)$ é integrável em $(-\infty, r']$, pode-se mostrar esse mesmo resultado para a função $r \to \frac{\partial^2}{\partial r^2} \log \varphi(r,\omega)$. E como $\widetilde{P_\omega}$ é não degenerada, por (18), segue que

$$\Lambda''(r) = E\Big[\frac{\partial^2}{\partial r^2} \log \varphi(r,\omega)\Big] > 0. \tag{23}$$

A função $r \mapsto \Lambda'(r)$ é estritamente crescente por (23) e para obtermos (20), é suficiente mostrarmos que

$$\lim_{r \to -\infty} \Lambda'(r) = 1 \text{ e } \lim_{r \nearrow 0} \Lambda'(r) = \mathbb{E}[\tau_1]. \tag{24}$$

Por (21) fica claro que $\lim\limits_{r \to -\infty} \Lambda'(r) = 1$. Para o cálculo do limite $\lim\limits_{r \nearrow 0} \Lambda'(r)$, consideraremos os casos em que $\mathbb{E}[\tau_1] < \infty$ e em que $\mathbb{E}[\tau_1] = \infty$.

Se $\mathbb{E}[\tau_1] < \infty$, então, para todo $\omega \in \Omega$, $E_\omega[\tau_1 e^{r\tau_1}] \leq \mathbb{E}[\tau_1] < \infty$. E como $E_\omega[e^{r\tau_1}] \leq 1$, segue que $\omega \mapsto \frac{\partial}{\partial r} \log \varphi(r,\omega)$ é integrável em $(-\infty, 0]$ e

$$\lim_{r \nearrow 0} \Lambda'(r) = \int_\Omega \lim_{r \nearrow 0} \frac{E_\omega[\tau_1 e^{r\tau_1}]}{E_\omega[e^{r\tau_1}]} P(d\omega) = \int_\Omega \frac{E_\omega[\lim_{r \nearrow 0} \tau_1 e^{r\tau_1}]}{E_\omega[\lim_{r \nearrow 0} e^{r\tau_1}]} P(d\omega) = \mathbb{E}[\tau_1].$$

Se $\mathbb{E}[\tau_1] = \infty$, como $\mathbb{E}[\tau_1] = \sum\limits_{k=1}^{\infty} k\mathbb{P}(\tau_1 = k)$, fixado $M > 0$, existe $k_0 = k_0(M)$ tal que $\sum\limits_{k=1}^{k_0} k\mathbb{P}(\tau_1 = k) \geq 2M$. Então $\lim\limits_{r \nearrow 0} e^{rk_0} = 1$, implica que existe $r_0 < 0$ tal que $e^{r_0 k_0} \geq \frac{1}{2}$. Logo,

$$\begin{aligned} \Lambda'(r_0) &= \int_\Omega \frac{E_\omega[\tau_1 e^{r_0\tau_1}]}{E_\omega[e^{r_0\tau_1}]} P(d\omega) \geq \mathbb{E}[\tau_1 e^{r_0\tau_1}] \\ &\geq \sum_{k=1}^{k_0} k e^{r_0 k} \mathbb{P}(\tau_1 = k) \geq \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{k_0} k\mathbb{P}(\tau_1 = k) \geq M. \end{aligned}$$

Portanto, $\lim\limits_{r \nearrow 0} \Lambda'(r) = \infty = \mathbb{E}[\tau_1]$, concluindo a demonstração.

□

O Lema anterior nos permite deduzir as seguintes propriedades da Transformada de Legendre de Λ:

LEMA 2.4. *Sejam P uma medida produto e Λ^* dada por (17). Segue que*

(a) $\Lambda^*(u) = \infty$, *se* $u < 1$, $\Lambda^*(1) = E[\log(1+\rho_0)]$ *e* $\Lambda^*(u) = 0$ *se* $u \geq \mathbb{E}[\tau_1]$.
(b) *Para* $u \in (1, \mathbb{E}[\tau_1])$ *seja* $r(u)$ *como em (20) e* $r(u) := 0$ *em* $[\mathbb{E}[\tau_1], \infty)$. *Então,*

$$\Lambda^*(u) = ur(u) - \Lambda(r(u)).$$

Além disso, $u \mapsto r(u)$ *é derivável em* $(1,\infty)$ *e estritamente decrescente em* $(1, \mathbb{E}[\tau_1])$ *com* $\lim\limits_{u \nearrow \mathbb{E}[\tau_1]} r(u) = 0$. *Segue que,* $u \mapsto \Lambda^*(u)$ *é derivável em* $(1,\infty)$, *estritamente decrescente em* $(1, \mathbb{E}[\tau_1])$ *e*

$$\lim_{u \searrow 1} \frac{d}{du} \Lambda^*(u) = -\infty.$$

(c) $u \mapsto \Lambda^*(u)$ *é uma função taxa fraca, convexa.*

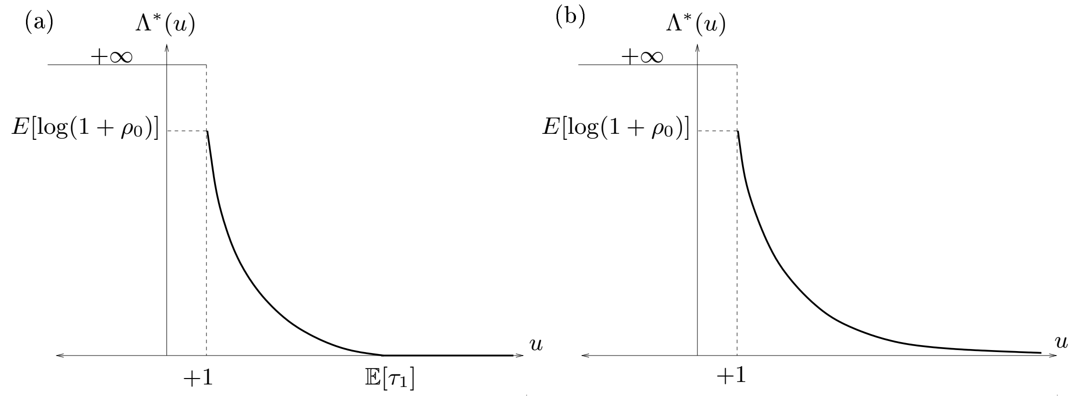

FIGURA 2. Esboço de Λ^*: (a) quando $\mathbb{E}[\tau_1] < \infty$, (b) quando $\mathbb{E}[\tau_1] = \infty$.

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 2.4. Fixado $u \in \mathbb{R}$ definimos,

$$G_u(r) := ru - \Lambda(r), \quad r \in (-\infty, 0].$$

(a) Segue que

- Se $u < 1$, então para todo $r < 0$, $G'_u(r) < 0$, logo, $r \mapsto G_u(r)$ é estritamente decrescente em $(-\infty, 0)$ e
$$\Lambda^*(u) = \sup_{r \in \mathbb{R}} G_u(r) = \infty.$$
- Se $u = 1$, segue também que $G'_1(r) < 0$ para todo $r < 0$ e além disso, $\lim_{r \to -\infty} G'_1(r) = 0$. Logo, $\Lambda^*(1) = \lim_{r \to -\infty} \{r - \Lambda(r)\}$. Como $\varphi(r, \omega) = e^r \omega_0 + e^{2r} \sum_{k=0}^{\infty} e^{kr} P_\omega(\tau_1 = k + 2)$ e $\omega_0 \neq 0$, para todo $\omega \in \Omega$ e $r < 0$, temos que $\varphi(r, \omega) = e^r \omega_0 (1 + O(e^r))$. Da relação $\log(1 + x) = O(x)$, segue $\Lambda(r) = r + E[\log \omega_0] + O(e^r)$. Portanto,
$$\Lambda^*(1) = \sup_{r \searrow -\infty} \{-E[\log \omega_0] - O(e^r)\} = E[\log(1 + \rho_0)].$$
- Se $u \geq \mathbb{E}[\tau_1]$, $G'_u(r) > 0$ para $r < 0$, logo, $r \mapsto G_u(r)$ é estritamente crescente em $(-\infty, 0)$ e
$$\Lambda^*(u) = \sup_{r \in \mathbb{R}} G_u(r) = G_u(0) = 0.$$

(b) Para $u \in (1, \mathbb{E}[\tau_1])$, $G'_u(r) = u - \Lambda'(r) = 0$, se e somente se, $\Lambda'(r) = u$. Pelo Lema 2.3, existe um único $r(u) < 0$ tal que $\Lambda'(r)|_{r=r(u)} = u$ e por (23), temos que $G''_u(r(u)) = -\Lambda''(r(u)) < 0$. Logo, $r(u)$ é ponto de máximo da função $r \mapsto G_u(r)$, portanto, $\Lambda^*(u) = ur(u) - \Lambda(r(u))$. E $\Lambda''(r) > 0$, para todo $r < 0$, implica pelo Teorema da Função Inversa que a função $r \mapsto \Lambda'(r)$ possui inversa derivável e estritamente crescente. Já que $\Lambda'(r)|_{r=r(u)} = u$, essa inversa é dada por $u \mapsto r(u)$. Com isso,
$$\frac{d}{du}\Lambda^*(u) = r(u) + ur'(u) - \Lambda'(r)|_{r=r(u)} \cdot r'(u) = r(u),$$

implica que $u \mapsto \Lambda^*(u)$ é estritamente decrescente em $(1, \mathbb{E}[\tau_1])$. Para finalizar, observamos que de acordo com (20) e (24),

(25) $$\lim_{u \searrow 1} r(u) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{u \nearrow \mathbb{E}[\tau_1]} r(u) = 0.$$

(c) Como $\Lambda^* \neq \infty$ e Λ^* é derivável, logo, é contínua, falta mostrar que Λ^* é convexa. Isso segue do fato de Λ^* ser uma transformada de Legendre: para $u_1, u_2 \in [1, \infty)$ e $t \in [0, 1]$, temos

$$\begin{aligned}\Lambda^*(tu_1 + (1-t)u_2) &= \sup_{r\in\mathbb{R}}\{t(ru_1 - \Lambda(r)) + (1-t)(ru_2 - \Lambda(r))\}\\ &\leq \sup_{r\in\mathbb{R}}\{t(ru_1 - \Lambda(r))\} + \sup_{r\in\mathbb{R}}\{(1-t)(ru_2 - \Lambda_(r))\}\\ &= t\Lambda^*(u_1) + (1-t)\Lambda^*(u_2).\end{aligned}$$

□

2. Princípio de Grandes Desvios Fraco para $\frac{T_n}{n}$ e $\frac{T_{-n}}{n}$

Esta seção é principalmente dedicada à demonstração do seguinte resultado.

PROPOSIÇÃO 2.5. *Seja P uma medida produto. Então, para P-quase todo ambiente ω, $\left(\frac{T_n}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz um Princípio de Grandes Desvios fraco[1] sob P_ω, com função taxa fraca, convexa dada por*

$$\Lambda^*(u) = \sup_{r\in\mathbb{R}}\{ur - \Lambda(r)\}.$$

Isto é, existe $\Omega^* \subset \Omega$ tal que $P(\Omega^*) = 1$ e para todo $\omega \in \Omega^*$ vale: Para todo compacto $K \subset [1, \infty)$,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P_\omega\left(\tfrac{T_n}{n} \in K\right) \leq -\inf_{u\in K} \Lambda^*(u),$$

e para todo aberto $A \subset [1, \infty)$,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P_\omega\left(\tfrac{T_n}{n} \in A\right) \geq -\inf_{u\in A} \Lambda^*(u).$$

Observe que a sequência $\left(\frac{T_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ é dependente, mas para $\omega \in \Omega$ fixo, $(\tau_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é independente sob P_ω. Logo,

$$\log E_\omega[e^{rT_n}] = \log E_\omega[e^{r(\tau_1+\cdots+\tau_n)}] = \log \prod_{i=1}^{n} E_\omega[e^{r\tau_i}] = \sum_{i=0}^{n-1} \log \varphi(r, \theta^i\omega).$$

Então, pelo Teorema Ergódico de Birkhoff segue que

(26) $$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log E_\omega[e^{rT_n}] = \Lambda(r), \ P\text{-q.c.}$$

Vimos que o Lema 2.2 implica que $\Lambda(r) = \infty$ para todo $r > 0$, logo, $0 \notin \operatorname{int}(\mathcal{D}_\Lambda)$ e não poderemos utilizar o Teorema de Gärtner-Ellis (ver Teorema A.3 do Apêndice A), mesmo existindo o limite (26). Mas, poderemos utilizar um argumento parecido com o da demonstração do Teorema de Gärtner-Ellis, que é baseada no Teorema Ergódico

[1] A candidata natural a função taxa de um Princípio de Grandes Desvios para $\frac{T_n}{n}$ é Λ^*. Mas como Λ^* não têm conjuntos de níveis compactos (por exemplo, $\{u; \Lambda^*(u) \leq E[\log(1+\rho_0)]\} = [1, \infty)$, de acordo com o Lema 2.4), $\frac{T_n}{n}$ não satisfaz um PGD.

de Birkhoff e na Desigualdade de Chebyshev, para a obtenção da cota superior para compactos. Utilizaremos também o seguinte lema cuja prova encontra-se em Dembo-Zeitouni (ver [**DZ98**], p.7).

LEMA 2.6. *Para $i \in \{1, 2, \cdots, k\}$, seja $(a_n^{(i)})_{n\geq 1} \subset [0, \infty)$. Então,*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log(a_n^{(1)} + a_n^{(2)} + \cdots + a_n^{(k)}) = \max_{i\in\{1,2,\cdots,k\}} \Big\{ \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log a_n^{(i)} \Big\}.$$

Para a obtenção da cota inferior para abertos, é suficiente mostrar que existe $\Omega^* \subset \Omega$ tal que $P(\Omega^*) = 1$ e para todo $\omega \in \Omega^*$, $u \in (1, \infty)$ e $\delta > 0$,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P_\omega\big(\tfrac{T_n}{n} \in B_\delta(u)\big) \geq -\Lambda^*(u), \tag{27}$$

em que $B_\delta(u) := \{z \in \mathbb{R}, |z - u| < \delta\}$. De fato, se $A \subset (1, \infty)$ é aberto, para todo $u \in A$ podemos tomar $\delta > 0$ tal que $B_\delta(u) \subset A$, implicando

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P_\omega\big(\tfrac{T_n}{n} \in A\big) &\geq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P_\omega\big(\tfrac{T_n}{n} \in B_\delta(u)\big)\\ &\geq -\Lambda^*(u) \geq -\inf_{u\in A} \Lambda^*(u).\end{aligned}$$

É facil ver que $P_\omega(\tau_i \in \cdot)$, $i \in \mathbb{N}$, não tem suporte limitado, por isso, será necessário truncar as variáveis τ_i para podermos utilizar um argumento análogo ao da demonstração da cota inferior do Teorema de Cramér (ver Teorema A.2 do Apêndice A) via uma mudança de medida. Isto é, para cada $u \in (1, \infty)$ definiremos para todo $\omega \in \Omega$, uma sequência de medidas $(\mu_{\omega,M})_{M>u}$, em que $\mu_{\omega,M} \equiv \mu_{\omega,M}(u)$, para as quais $\lim\limits_{n\to\infty} E_{\mu_{\omega,M}}\big[\tfrac{T_n}{n}\big] = u$, P-q.c. e $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_{\omega,M}\big(\tfrac{T_n}{n} \in B_\delta(u)\big) = 1$, para todo $\delta > 0$. Então, através de uma comparação entre $P_\omega\big(\tfrac{T_n}{n} \in B_\delta(u)\big)$ e $\mu_{\omega,M}\big(\tfrac{T_n}{n} \in B_\delta(u)\big)$, obteremos (27).

DEMONSTRAÇÃO DA PROPOSIÇÃO 2.5. **Prova da Cota Superior:** Iniciaremos a demonstração com a obtenção da cota superior para o compacto $K = \{1\}$:

$$\frac{1}{n} \log P_\omega\big(\tfrac{T_n}{n} = 1\big) = \frac{1}{n} \log \omega_0 \cdots \omega_n = \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n} \log \omega_i.$$

Logo, de acordo com o Teorema Ergódico de Birkhoff e com o Lema 2.4.a segue que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P_\omega\big(\tfrac{T_n}{n} = 1\big) = E[\log(\omega_0)] = -\Lambda^*(1).$$

Seja agora $K \subset [1, \infty)$ outro compacto qualquer e $\epsilon > 0$. Para $r \leq 0$ fixo, seja Ω_r o conjunto dos ambientes ω tal que (26) seja válido para esse r. Definimos $\Omega_S^* := \bigcap\limits_{r\in\mathbb{Q}} \Omega_r$. Como $\mathbb{Q}$ é enumerável e $P(\Omega_r) = 1$ para todo $r \in \mathbb{Q}$, temos que $P(\Omega_S^*) = 1$. Fixe um ambiente $\omega \in \Omega_S^*$. Pelo Lema 2.4.b, para todo $u \in (1, \infty)$, existe $-\infty < r(u) \leq 0$ tal que $\Lambda^*(u) = ur(u) - \Lambda(r(u))$ e $\frac{d}{du}\Lambda^*(u) = r(u)$. Como $r(u)$ é finito, para cada $u \in (1, \infty)$ existe uma vizinhança A_u de u tal que

$$\inf_{y\in A_u} r(u)(y - u) \geq -\epsilon. \tag{28}$$

Observe que como $r(u) \leq 0$, esta vizinhança pode ser tomada de forma que $(u-1, u] \subset A_u$ e portanto, se $1 \in K$, então $1 \in \bigcup_{u \in K \setminus \{1\}} A_u$. Por (28) e pela Desigualdade de Chebyshev segue que

$$\begin{aligned} P_\omega\big(\tfrac{T_n}{n} \in A_u\big) &\leq P_\omega\big(r(u)\big(\tfrac{T_n}{n} - u\big) \geq -\epsilon\big) \\ &= P_\omega\big(\exp\big(nr(u)\big(\tfrac{T_n}{n} - u\big)\big) \geq e^{-\epsilon n}\big) \\ &\leq e^{\epsilon n} E_\omega[\exp\big(nr(u)\big(\tfrac{T_n}{n} - u\big)] \\ &= e^{n(\epsilon - ur(u))} E_\omega[e^{r(u)T_n}] \\ &\leq e^{n(\epsilon - ur(u))} E_\omega[e^{qT_n}],\ \forall\ q \in \mathbb{Q} \cap [r(u), 0]. \end{aligned} \tag{29}$$

Como $\omega \in \Omega_S^*$, aplicando (26) a $q \in \mathbb{Q} \cap [r(u), 0]$ e fazedo $q \searrow r(u)$, segue de (29), da continuidade de Λ obtida no Lema 2.3.b e do Lema 2.4.b que para todo $u \in K$,

$$\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log P_\omega\big(\tfrac{T_n}{n} \in A_u\big) \leq \epsilon - \Lambda^*(r(u)). \tag{30}$$

Seja $\bigcup_{i=1}^{N} A_{u_i}$ uma subcobertura finita de $\bigcup_{u \in K} A_u$. Então, de acordo com o Lema 2.6 e com (30),

$$\begin{aligned} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log P_\omega\big(\tfrac{T_n}{n} \in K\big) &\leq \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \Big(\sum_{i=1}^{N} P_\omega\big(\tfrac{T_n}{n} \in A_{u_i}\big)\Big) \\ &= \max_{i \in \{1, \cdots, N\}} \Big\{\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log \big(P_\omega\big(\tfrac{T_n}{n} \in A_{u_i}\big)\big)\Big\} \\ &\leq \epsilon - \min_{i \in \{1, \cdots, N\}} \Lambda^*(u_i) \\ &\leq \epsilon - \inf_{u \in K} \Lambda^*(u), \end{aligned}$$

Para a obtenção da cota superior, basta fazer $\epsilon \searrow 0$.

Prova da Cota Inferior: Para mostrarmos (27), será necessário truncar as variáveis τ_i. Para todo $u \in (1, \infty)$, definimos para todo $M \in \mathbb{N}$, tal que $u < M$ e $\omega \in \Omega$ a distribuição de $(\tau_i)_{i \geq 1}$, condicionada ao evento $\{\tau_i \leq M,\ \forall\ i \in \mathbb{N}\}$, por

$$P_{\omega,M,i}(\tau_i \in \cdot) := P_\omega(\tau_i \in \cdot\ |\tau_i \leq M) \quad \text{e} \quad P_{\omega,M} := \otimes_{i \in \mathbb{N}} P_{\omega,M,i}. \tag{31}$$

Para todo aberto $A \subset (1, \infty)$,

$$\begin{aligned} P_\omega\big(\tfrac{T_n}{n} \in A\big) &\geq P_\omega\big(\tfrac{T_n}{n} \in A, \tau_i \leq M\ \forall\ i \in \{1, \cdots, M\}\big) \\ &= P_{\omega,M}\big(\tfrac{T_n}{n} \in A\big) \prod_{i=1}^{n} P_\omega\big(\tau_i \leq M\big). \end{aligned} \tag{32}$$

Para estudar o comportamento da sequência $\big(\frac{T_n}{n}\big)_{n \geq 1}$ sob $P_{\omega,M}$ será necessário definir as funções

$$\varphi_M(r, \omega) := E_\omega[e^{r\tau_1} \mathbf{1}_{\{\tau_1 \leq M\}}],\ \forall\ r \in \mathbb{R} \text{ e } \omega \in \Omega,$$

a esperança em relação ao ambiente de φ_M, dada por

$$\Lambda_M(r) := E[\log \varphi_M(r, \cdot)],\ \forall\ r \in \mathbb{R} \tag{33}$$

e a transformada de Legendre de Λ_M, dada por

$$\Lambda_M^*(u) := \sup_{r\in\mathbb{R}}\{ru - \Lambda_M(r)\},\ \forall\ u \in \mathbb{R}. \tag{34}$$

As propriedades de Λ_M e Λ_M^*, enunciadas a seguir, podem ser obtidas de forma análoga aos Lemas 2.3 e 2.4, em que são demontradas as propriedade de Λ e Λ^*.

LEMA 2.7. *Seja P ergódica e para $M \in \mathbb{N}$, seja $\Lambda_M(r)$ definida por* (33). *Então, $r \mapsto \Lambda_M(r)$ é duas vezes derivável em $\mathbb{R}$. Para $u \in (1, M)$ existe um único $r_M(u)$ finito tal que*

$$\Lambda_M'(r)|_{r=r_M(u)} = u. \tag{35}$$

LEMA 2.8. *Seja P ergódica e para $M \in \mathbb{N}$, seja Λ_M^* definida por (34). Para todo $u \in (1, M)$, seja $r_M(u)$ como em (35). Então $u \mapsto r_M(u)$ é a inversa derivável de $r \mapsto \Lambda_M'(u)$, $0 \le \Lambda_M^*(u) < \infty$ e*

$$\Lambda_M^*(u) = ur_M(u) - \Lambda_M(r_M(u)). \tag{36}$$

Seja $r_M(u)$ como em (35). Definimos

$$\frac{d\mu_{\omega,M,i}}{dP_{\omega,M,i}} := \frac{e^{r_M(u)\tau_i}}{E_{P_{\omega,M}}[e^{r_M(u)\tau_i}]} \quad \text{e} \quad \mu_{\omega,M} := \otimes_{i\in\mathbb{N}}\mu_{\omega,M,i}. \tag{37}$$

Seja $\delta' :=$sgn$(r_M(u))\delta$, em que sgn$(r_M(u))$ denota o sinal de $r_M(u)$. Então

$$\begin{aligned} P_{\omega,M}\big(\tfrac{T_n}{n} \in B_\delta(u)\big) &= E_{P_{\omega,M}}\big[\mathbf{1}_{\left\{\frac{T_n}{n}\in B_\delta(u)\right\}}\big] \\ &= \prod_{i=1}^{n} E_{P_{\omega,M}}[e^{r_M(u)\tau_i}] \int_{\frac{T_n}{n}\in B_\delta(u)} e^{-r_M(u)T_n} d\mu_{\omega,M} \\ &\ge e^{-nr_M(u)(u+\delta')}\mu_{\omega,M}\big(\tfrac{T_n}{n} \in B_\delta(u)\big) \prod_{i=1}^{n} E_{P_{\omega,M}}[e^{r_M(u)\tau_i}]. \end{aligned}$$

E como para todo $i \in \mathbb{N}$, $\varphi_M(r, \theta^{i-1}\omega) = E_{P_{\omega,M}}[e^{r\tau_i}]P_\omega(\tau_i \le M)$, segue de (32) que

$$P_\omega\big(\tfrac{T_n}{n} \in B_\delta(u)\big) \ge e^{-nr_M(u)(u+\delta')}\mu_{\omega,M}\big(\tfrac{T_n}{n} \in B_\delta(u)\big) \prod_{i=0}^{n-1} \varphi_M(r_M(u), \theta^{i-1}\omega). \tag{38}$$

Mostraremos que pela escolha de $r_M(u)$, $\mu_{\omega,M}\big(\frac{T_n}{n} \in B_\delta(u)\big) \to 1$. A prova do seguinte lema pode ser obtida por conta direta.

LEMA 2.9. *Seja $(X_i)_{i\in\mathbb{N}}$ uma sequência independente em um espaço de probabilidade, tal que $E[X_i] = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Seja $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. Então*

$$E[S_n^4] \le 7n^2 \max_{i\in\{1,\cdots,n\}} E[X_i^4].$$

Temos que

$$\begin{aligned} E_{\mu_{\omega,M}}\big[\tfrac{T_n}{n}\big] &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{E_{P_{\omega,M}}[\tau_i e^{r_M(u)\tau_i}]}{E_{P_{\omega,M}}[e^{r_M(u)\tau_i}]} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{E_{P_\omega}[\tau_i e^{r_M(u)\tau_i}\mathbf{1}_{\{\tau_i\le M\}}]}{E_{P_\omega}[e^{r_M(u)\tau_i}\mathbf{1}_{\{\tau_i\le M\}}]} \\ &= \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial}{\partial r}\log\varphi_M(r, \theta^{i-1}\omega)\Big|_{r=r_M(u)}. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema Ergódico de Birkhoff e por (35), segue que

$$\lim_{n\to\infty} E_{\mu_{\omega,M}}\left[\tfrac{T_n}{n}\right] = E\Big[\frac{\partial}{\partial r}\log\varphi_M(r,\cdot)\Big|_{r=r_M(u)}\Big] = \Lambda_M'(r)|_{r=r_M(u)} = u, \quad P\text{-q.c.} \tag{39}$$

De acordo com o Lema 2.9 e com a Desigualdade de Chebyshev, como $E_{\mu_{\omega,M}}[\tau_i - E_{\mu_{\omega,M}}[\tau_i]] = 0$ para todo $i \in \mathbb{N}$, segue para P-q.t.ω que

$$\begin{aligned}\mu_{\omega,M}\big(\tfrac{T_n}{n} \notin B_\delta(u)\big) &\leq \mu_{\omega,M}\Big(\big(\tfrac{T_n}{n} - E_{\mu_{\omega,M}}\left[\tfrac{T_n}{n}\right]\big)^4 \geq (\tfrac{\delta}{2})^4\Big)\\ &\leq \frac{16E_{\mu_{\omega,M}}[(T_n - E_{\mu_{\omega,M}}[T_n])^4]}{\delta^4 n^4}\\ &\leq \frac{112}{\delta^4 n^2}\max_{i\in\{1,\cdots,n\}} E_{\mu_{\omega,M}}[(\tau_i - E_{\mu_{\omega,M}}[\tau_i])^4].\end{aligned}$$

E como $E_{\mu_{\omega,M}}[(\tau_i - E_{\mu_{\omega,M}}[\tau_i])^4] \leq 8M^4$, para todo $i \in \mathbb{N}$, segue que

$$\mu_{\omega,M}\big(\tfrac{T_n}{n} \notin B_\delta(u)\big) \to 0, \quad P\text{-q.c.} \tag{40}$$

Em particular,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\mu_{\omega,M}\big(\tfrac{T_n}{n} \in B_\delta(u)\big) = 0, \quad P\text{-q.c.} \tag{41}$$

Também pelo Teorema Ergódico e pela definição de Λ_M, temos que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log\varphi_M(r_M(u),\theta^{i-1}\omega) = \Lambda_M(r_M(u)). \quad P\text{-q.c.} \tag{42}$$

Para todo $u \in (1,\infty)\cap\mathbb{Q}$ e $M \in \mathbb{N}$, seja $\Omega_{u,M}$ o conjunto dos ambientes ω para os quais (38), (41) e (42) sejam válidos. Definimos Ω_I^* como a interseção de todos estes conjuntos. Então $P(\Omega_I^*) = 1$, já que $\mathbb{N}$ e $\mathbb{Q}$ são enumeráveis e para todo $u \in (1,\infty)\cap\mathbb{Q}$ e $M \in \mathbb{N}$, $P(\Omega_{u,M}) = 1$. Fixe $\omega \in \Omega_I^*$, $u \in (1,\infty)$ e $\delta > 0$. Se $z \in (u,\infty)\cap\mathbb{Q}$ e $0 < \epsilon < \delta$, tal que $B_\epsilon(z) \subset B_\delta(u)$, então por (38), (41) e (42), segue que

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P_\omega\big(\tfrac{T_n}{n} \in B_\delta(u)\big) &\geq \liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P_\omega\big(\tfrac{T_n}{n} \in B_\epsilon(z)\big)\\ &\geq -r_M(z)(z+\epsilon') + \Lambda_M(r_M(z)).\end{aligned}$$

Pela continuidade de Λ_M e r_M, verificadas nos Lemas 2.7 e 2.8 que $r_M(z)(z+\epsilon') + \Lambda_M(r_M(z)) \to ur_M(u) + \Lambda_M(r_M(u))$ quando $z \to u$ e $\epsilon \to 0$. E como $M > u$, de acordo com (36), $\Lambda_M^*(u) = ur_M(u) - \Lambda_M(r_M(u))$. Logo,

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P_\omega\big(\tfrac{T_n}{n} \in B_\delta(u)\big) \geq -\Lambda_M^*(u).$$

Para todo $r \in \mathbb{R}$ e $M \in \mathbb{N}$, $\Lambda_M(r) \leq \Lambda_{M+1}(r) \leq \Lambda(r)$, logo, $\Lambda_M^*(u) \geq \Lambda_{M+1}^*(u) \geq \Lambda^*(u)$. Segue que, $(\Lambda_M^*(u))_{M>u}$ é não-crescente e limitada inferiormente, o que prova a existência do limite $\lim\limits_{M\to\infty}\Lambda_M^*(u) =: I^*(u)$ e $I^*(u) \in [0,\infty)$, já que de acordo com o Lema 2.8, $\Lambda_M^* \in [0,\infty)$ se M é grande. Para mostrarmos que $I^*(u) \leq \Lambda^*(u)$, basta encontrarmos r_0 tal que

$$I^*(u) \leq ur_0 - \Lambda(r_0),$$

já que para todo $r \in \mathbb{R}$, $ur - \Lambda(r) \leq \Lambda^*(u)$. Como $(\Lambda_M^*(u))_{M>u}$ é não-crescente, segue que $\Lambda_M^*(u) = ur(u) - \Lambda_M(r_M(u)) \geq I^*(u)$, para todo $M > u$ e portanto, os conjuntos

$C_M := \{r : ur - \Lambda_M(r) \geq I^*(u)\}$ são não vazios. De acordo com o Lema 2.7, a função $r \mapsto ur - \Lambda_M(r)$ é contínua, logo, C_M é fechado para todo $M > u$. E como $C_{M+1} \subset C_M$, segue que a interseção $\bigcap\limits_{M>u} C_M$ é não vazia. Seja $r_0 \in \bigcap\limits_{M>u} C_M$. Como $ur_0 - \Lambda_M(r_0) \geq I^*(u)$ e pelo Teorema da Convergência Dominada, $\lim\limits_{M\to\infty} \Lambda_M(r_0) = \Lambda(r_0)$, segue que $ur_0 - \Lambda(r_0) \geq I^*(u)$ e portanto, $I^*(u) \leq \Lambda^*(u)$.

Para finalizar, definimos $\Omega^* := \Omega_S^* \cap \Omega_I^*$. $\square$

Para a obtenção de um PGD fraco para $\frac{T_{-n}}{n}$, olharemos para a sequência $(\overline{\tau}_{-i})_{i\in\mathbb{N}}$ com mesma distribuição de $(\tau_{-i})_{i\in\mathbb{N}}$, condicionada a $\{\tau_{-i} < \infty;\ \forall\, i \in \mathbb{N}\}$, em que τ_{-i} é o tempo entre a primeira visita em $-i+1$ e $-i$. Ou seja,

$$P_\omega(\overline{\tau}_{-i} \in \cdot) := P_\omega(\tau_{-i} \in \cdot\ |\tau_{-i} < \infty).$$

Definimos também, $\overline{T}_{-n} := \overline{\tau}_{-1} + \cdots + \overline{\tau}_{-n}$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e para todo $r \in \mathbb{R}$,

$$\overline{\varphi}(r,\omega) := E_\omega[e^{r\overline{\tau}_{-1}}], \quad \overline{\Lambda}(r) := E[\log \overline{\varphi}(r,\cdot)].$$

Analogamente a (26), temos que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log E_\omega[e^{r\overline{T}_{-n}}] = \overline{\Lambda}(r),\ \ P\text{-q.c.} \tag{43}$$

Definimos para $r \in \mathbb{R}$,

$$\widetilde{\varphi}(r,\omega) := E_\omega[e^{r\tau_{-1}}\mathbf{1}_{\{\tau_{-1}<\infty\}}], \quad \widetilde{\Lambda}(r) := E[\log \widetilde{\varphi}(r,\cdot)]. \tag{44}$$

Pelo Teorema Ergódico de Birkhoff,

$$\begin{aligned} \overline{\Lambda}(r) &= \widetilde{\Lambda}(r) - \int_\Omega \log P_\omega(\tau_{-1} < \infty) P(d\omega) \\ &= \widetilde{\Lambda}(r) - \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P_\omega(T_{-n} < \infty), \quad P\text{-q.c.} \end{aligned} \tag{45}$$

Os seguintes lemas serão demonstrados no final desta seção.

Lema 2.10. *Sejam P ergódica e Λ e $\widetilde{\Lambda}$ definidas por (16) e (44), respectivamente. Então*

$$\widetilde{\Lambda}(r) = \Lambda(r) + E[\log \rho_0].$$

Lema 2.11. *Seja P ergódica. Então para P quase todo ambiente ω, temos que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P_\omega(T_{-n} < \infty) = E[\log \rho_0].$$

De acordo com (45) e com os Lemas 2.10 e 2.11 segue para todo $r \in \mathbb{R}$ que $\overline{\Lambda}(r) = \Lambda(r)$, P-q.c. Logo, as mesmas conclusões tiradas para $(\frac{T_n}{n})_{n\in\mathbb{N}}$ na Proposição 2.5 são válidas para $(\frac{\overline{T}_n}{n})_{n\in\mathbb{N}}$, em função de (43). Isso demonstra a seguinte proposição.

Proposição 2.12. *Seja P uma medida produto. Então, para P-quase todo ambiente ω, $\left(\frac{\overline{T}_{-n}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz um Princípio de Grande Desvios fraco sob P_ω, com função taxa fraca, convexa dada por*

$$\Lambda^*(u) = \sup_{r\in\mathbb{R}}\{ur - \Lambda(r)\}, \quad u \in \mathbb{R}.$$

Do Lema 2.11 e da Proposição 2.12, segue a seguinte proposição, necessária para a demonstração do Teorema 2.1.

PROPOSIÇÃO 2.13. *Seja P uma medida produto. Então, para P-quase todo ambiente ω, $\left(\frac{T_{-n}}{n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ satisfaz um Princípio de Grande Desvios fraco sob P_ω, com função taxa fraca, convexa dada por*

$$\widetilde{\Lambda}^*(u) := \sup_{r\in\mathbb{R}}\{ur - \widetilde{\Lambda}(r)\} = \Lambda^*(u) - E[\log\rho_0], \quad u \in \mathbb{R}.$$

DEMONSTRAÇÃO. Para todo boreliano $A \subset [1,\infty)$ e $\omega \in \Omega$,

$$P_\omega\left(\tfrac{T_{-n}}{n} \in A\right) = P_\omega\left(\tfrac{T_{-n}}{n} \in A, T_{-n} < \infty\right) + P_\omega\left(\tfrac{T_{-n}}{n} \in A, T_{-n} = \infty\right).$$

Se A for aberto, como $P_\omega\left(\frac{T_{-n}}{n} \in A\right) \geq P_\omega\left(\frac{T_{-n}}{n} \in A, T_{-n} < \infty\right)$, segue do Lema 2.11 e da Proposição 2.12 que para P-q.t.ω,

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log P_\omega\left(\tfrac{T_{-n}}{n} \in A\right) &\geq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log P_\omega\left(\tfrac{\overline{T}_{-n}}{n} \in A\right) + \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log P_\omega\left(T_{-n} < \infty\right)\\ &\geq -\inf_{u\in A}\Lambda^*(u) + E[\log\rho_0] = -\inf_{u\in A}\widetilde{\Lambda}^*(u).\end{aligned}$$

Se A for compacto, então A é limitado, logo, para n grande o suficiente, segue que $P_\omega\left(\frac{T_{-n}}{n} \in A\right) = P_\omega\left(\frac{T_{-n}}{n} \in A, T_{-n} < \infty\right)$ implicando para P-q.t.ω,

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log P_\omega\left(\tfrac{T_{-n}}{n} \in A\right) &= \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log P_\omega\left(\tfrac{\overline{T}_{-n}}{n} \in A\right) + \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log P_\omega\left(T_{-n} < \infty\right)\\ &\leq -\inf_{u\in A}\Lambda^*(u) + E[\log\rho_0] = -\inf_{u\in A}\widetilde{\Lambda}^*(u).\end{aligned}$$

□

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 2.10. Em (19) estabelecemos para todo $r \leq 0$ e $\omega \in \Omega$, a seguinte relação

$$\frac{\varphi(r,\omega)}{e^r\omega_0} - 1 = \rho_0\varphi(r,\theta^{-1}\omega)\varphi(r,\omega).$$

De forma análoga, podemos obter para $\widetilde{\varphi}(r,\omega)$ e $\widetilde{\varphi}(r,\theta\omega)$ a relação

$$\frac{\widetilde{\varphi}(r,\omega)}{e^r\omega_0} - \rho_0 = \widetilde{\varphi}(r,\theta\omega)\widetilde{\varphi}(r,\omega).$$

Destas igualdades, segue que

$$\begin{aligned}\rho_0\varphi(r,\omega)(1-\varphi(r,\theta^{-1}\omega)\widetilde{\varphi}(r,\omega)) &= \rho_0\varphi(r,\omega) - \widetilde{\varphi}(r,\omega)\left(\frac{\varphi(r,\omega)}{e^r\omega_0} - 1\right)\\ &= \varphi(r,\omega)\left(\rho_0 - \frac{\widetilde{\varphi}(r,\omega)}{e^r\omega_0}\right) + \widetilde{\varphi}(r,\omega)\\ &= -\varphi(r,\omega)\widetilde{\varphi}(r,\theta\omega)\widetilde{\varphi}(r,\omega) + \widetilde{\varphi}(r,\omega)\\ &= \widetilde{\varphi}(r,\omega)(1-\varphi(r,\omega)\widetilde{\varphi}(r,\theta\omega)).\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\rho_0\varphi(r,\omega)}{\widetilde{\varphi}(r,\omega)} = \frac{1-\varphi(r,\theta^{-1}\omega)\widetilde{\varphi}(r,\omega)}{1-\varphi(r,\omega)\widetilde{\varphi}(r,\theta\omega)},$$

o que demonstra o lema, já que P é estacionária e portanto,

$$E[\log(1-\varphi(r,\theta^{-1}\omega)\widetilde{\varphi}(r,\omega))] = E[\log(1-\varphi(r,\omega)\widetilde{\varphi}(r,\theta\omega))].$$

$\square$

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 2.11. Vimos na demonstração do Teorema 1.1, que $P_\omega(T_{-n} < \infty) = \frac{A_{\infty,\omega}(0)}{A_{\infty,\omega}(0)+B_{n,\omega}(0)}$. Logo, por (7), segue que

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log P_\omega(T_{-n}<\infty) = \begin{cases} 0, & \text{se } E[\log\rho_0]=0 \\ -\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log B_{n,\omega}(0), & \text{se } E[\log\rho_0]<0. \end{cases}$$

Além disso,

$$B_{n,\omega}(0) = \sum_{j=0}^{n-1}\frac{1}{\rho_0\cdots\rho_{-j}} = \sum_{j=0}^{n-1}\exp\Big(-\sum_{i=0}^{j}\log\rho_{-i}\Big).$$

E pelo Teorema Ergódico de Birkhoff,

$$\lim_{j\to\infty}\frac{1}{j}\sum_{i=0}^{j}\log\rho_{-i} = E[\log\rho_0], \quad P\text{-q.c.} \tag{46}$$

Fixe ω para o qual (46) seja válido. Então, para todo $0<\epsilon<-E[\log\rho_0]$, existe j_0 tal que para todo $j>j_0$, $\left|\frac{1}{j}\sum_{i=0}^{j}\log\rho_{-i}-E[\log\rho_0]\right|\le\epsilon$. Logo, existe uma constante C (que depende de ω) tal que para n grande,

$$\begin{aligned} B_{n,\omega}(0) &\le C+\sum_{j=0}^{n-1}e^{-j(E[\log\rho_0]-\epsilon)} \equiv C+\sum_{j=0}^{n-1}\beta^j \qquad \text{com } \beta := e^{\epsilon-E[\log\rho_0]}>1 \\ &= C+\frac{\beta^n-1}{\beta-1}. \end{aligned}$$

Logo, $\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log B_{n,\omega}(0)\le\log\beta = -E[\log\rho_0]+\epsilon$. Por outro lado,

$$B_{n,\omega}(0)\ge\exp(-n\sum_{i=0}^{n}\log\rho_{-i})\ge\exp(-n(E[\log\rho_0]+\epsilon)),$$

que implica $\liminf\limits_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log B_{n,\omega}(0)\ge\log\beta = -E[\log\rho_0]-\epsilon$. $\square$

3. Princípio de Grandes Desvios para $\frac{S_n}{n}$

Nesta seção daremos a prova do Teorema 2.1, juntando os resultados obtidos para $\frac{T_n}{n}$ e $\frac{T_{-n}}{n}$. Lembramos que estaremos sempre supondo $E[\log\rho_0]\le 0$, caso em que o passeio é recorrente ou transiente para a direita. Definimos primeiro a função taxa I do Teorema 2.1: considere as funções taxa Λ^* e $\widetilde{\Lambda}^*$ das Proposições 2.5 e 2.13 e defina

$$I(v) := \begin{cases} v\Lambda^*\big(\frac{1}{v}\big), & v\in(0,1] \\ -v\widetilde{\Lambda}^*\big(\text{-}\frac{1}{v}\big), & v\in[-1,0) \\ 0, & v=0. \end{cases} \tag{47}$$

Vimos na Proposição 2.13 que $\widetilde{\Lambda}^*$ é dada por $\widetilde{\Lambda}^*(u) = \Lambda^*(u) - E[\log \rho_0]$, logo, I pode ser reescrita como

$$I(v) = \begin{cases} v\Lambda^*\left(\frac{1}{v}\right), & v \in (0,1] \\ -v\Lambda^*\left(-\frac{1}{v}\right) + vE[\log \rho_0], & v \in [-1,0) \\ 0, & v = 0. \end{cases}$$

Consideraremos $\frac{1}{\mathbb{E}[\tau_1]} = 0$, quando $\mathbb{E}[\tau_1] = \infty$.

Lema 2.14. *Seja I definida por (47). Então*

(a) *$v \mapsto I(v)$ é estritamente decrescente em $[-1,0]$, linear em $\left[-\frac{1}{\mathbb{E}[\tau_1]}, 0\right]$, identicamente nula em $\left[0, \frac{1}{\mathbb{E}[\tau_1]}\right]$ e estritamente crescente em $\left[\frac{1}{\mathbb{E}[\tau_1]}, 1\right]$.*

(b) *$v \mapsto I(v)$ é contínua em $[0,1]$, derivável em $(-1,0) \cup (0,1)$ e derivável na origem se e somente se $E[\log \rho_0] = 0$.*

(c) *$v \mapsto I(v)$ é uma função taxa, convexa.*

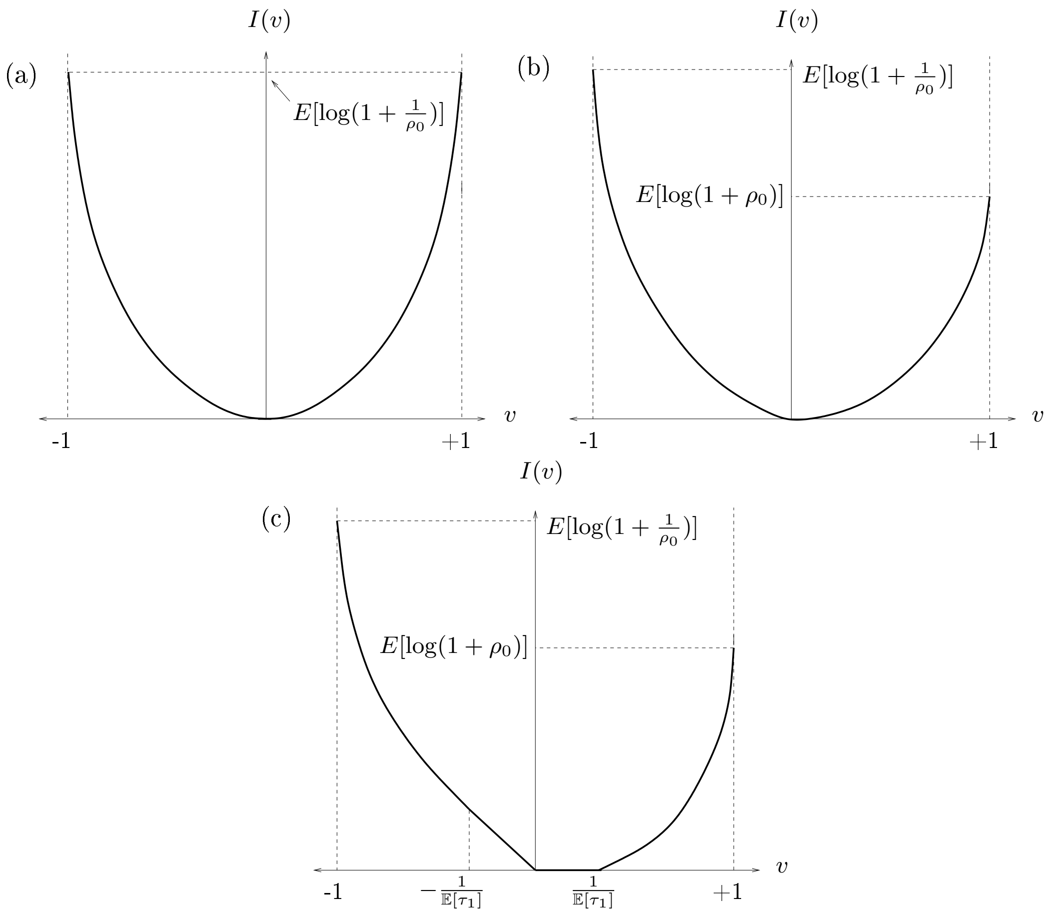

Figura 3. Esboço de I: (a) quando $E[\log \rho_0] = 0$, (b) quando $E[\log \rho_0] < 0$ e $\mathbb{E}[\tau_1] = \infty$,(c) quando $E[\log \rho_0] < 0$ e $\mathbb{E}[\tau_1] < \infty$.

Demonstração. (a) Vimos no Lema 2.4 que $\Lambda^* \equiv 0$ em $[\mathbb{E}[\tau_1], \infty)$ e estritamente decrescente em $[1, \mathbb{E}[\tau_1]]$. Isso implica que $I \equiv 0$ em $\left[0, \frac{1}{\mathbb{E}[\tau_1]}\right]$ e estritamente crescente em $\left[\frac{1}{\mathbb{E}[\tau_1]}, 1\right]$. Se $E[\log \rho_0] = 0$, I é uma função par, logo, estritamente decrescente em $[-1, 0]$. Se $E[\log \rho_0] < 0$, o acréscimo $vE[\log \rho_0]$ fornece o termo linear em $\left[-\frac{1}{\mathbb{E}[\tau_1]}, 0\right]$.

(b) Pela definição de I e pelo Lema 2.4, segue que I é derivável em $[-1, 1] \setminus \{0\}$ e sua derivada é dada por

$$I'(v) = \begin{cases} -\Lambda^*\big(\frac{1}{v}\big) - \frac{1}{v} r\big(\frac{1}{v}\big) = -\Lambda\big(r\big(\frac{1}{v}\big)\big), & v \in (0, 1) \\ -\Lambda^*\big(-\frac{1}{v}\big) + \frac{1}{v} r\big(-\frac{1}{v}\big) + E[\log \rho_0], & v \in (-1, 0). \end{cases} \tag{48}$$

Se $\mathbb{E}[\tau_1] < \infty$, $\Lambda^* \equiv 0$ em $[\mathbb{E}[\tau_1], \infty)$ e $r \equiv 0$ em $[\mathbb{E}[\tau_1], \infty)$, logo, $\lim\limits_{v \searrow 0} I'(v) = 0$. E se $\mathbb{E}[\tau_1] = \infty$, segue de (25) que $\lim\limits_{v \searrow 0} r\big(\frac{1}{v}\big) = 0$, logo pela continuidade de Λ, verificada no Lema 2.3, segue que $\lim\limits_{v \searrow 0} I'(v) = -\lim\limits_{v \searrow 0} \Lambda\big(r\big(\frac{1}{v}\big)\big) = 0$. Em particular, como $\lim\limits_{v \searrow 0} \Lambda^*\big(\frac{1}{v}\big) = 0$, segue que $\lim\limits_{v \searrow 0} \frac{1}{v} r\big(\frac{1}{v}\big) = 0$, para qualquer valor de $\mathbb{E}[\tau_1]$. Logo, $\lim\limits_{v \nearrow 0} \frac{1}{v} r\big(-\frac{1}{v}\big) = 0$ e consequentemente, $\lim\limits_{v \nearrow 0} I'(v) = E[\log \rho_0]$. Segue que I é derivável na origem se e somente se $E[\log \rho_0] = 0$.

(c) Como $I \neq \infty$ e I é contínua, falta verificar que $\{v : I(v) \leq c\}$ é compacto para toda constante c, para mostrarmos que I é uma função taxa. Pela continuidade de I segue que $\{v : I(v) \leq c\}$ é fechado e $\{v : I(v) \leq c\} \subset [-1, 1]$ implica a compacidade. Pelo Lema 2.4, temos que I é convexa em $[-1, 0)$ e em $(0, 1]$. A convexidade em $[-1, 1]$ segue do fato da derivada à esquerda na origem ser menor ou igual a derivada à direita.

□

DEMONSTRAÇÃO DO TEOREMA 2.1. **Prova da Cota Superior:** Fixados $v_0 \in (0, 1]$ e $\epsilon > 0$, se n é grande o suficiente, temos que

$$\big\{\tfrac{S_n}{n} \geq v_0\big\} \subset \big\{T_{\lfloor v_0 n \rfloor} \leq n\big\} \subset \big\{\tfrac{T_{\lfloor v_0 n \rfloor}}{\lfloor v_0 n \rfloor} \leq \tfrac{1}{v_0} + \epsilon\big\}.$$

Então, de acordo com a Proposição 2.5,

$$\begin{aligned} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log P_\omega\big(\tfrac{S_n}{n} \in [v_0, 1]\big) &\leq \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log P_\omega\big(\tfrac{T_{\lfloor v_0 n \rfloor}}{\lfloor v_0 n \rfloor} \leq \tfrac{1}{v_0} + \epsilon\big) \\ &\leq -v_0 \inf_{u \leq \frac{1}{v_0} + \epsilon} \Lambda^*(u). \end{aligned}$$

De acordo com o Lema 2.4, Λ^* é decrescente e contínua. Logo, $\inf\limits_{u \leq \frac{1}{v} + \epsilon} \Lambda^*(u) = \Lambda^*\Big(\frac{1}{v_0} + \epsilon\Big) \to \Lambda^*\Big(\frac{1}{v_0}\Big)$ quando $\epsilon \to 0$. E como I é não-decrescente em $[0, 1]$, de acordo com o Lema 2.14, segue que

$$\begin{aligned} \limsup_{n \to \infty} \frac{1}{n} \log P_\omega\big(\tfrac{S_n}{n} \in [v_0, 1]\big) &\leq -v_0 \Lambda^*\big(\tfrac{1}{v_0}\big) = -I(v_0) \\ &= -\inf_{v \in [v_0, 1]} I(v). \end{aligned} \tag{49}$$

De forma análoga, se $v_0 \in [-1, 0)$ segue da Proposição 2.13 que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P_\omega\big(\tfrac{S_n}{n} \in [-1, v_0]\big) \leq - \inf_{v\in[-1,v_0]} I(v). \tag{50}$$

Seja $F \subset [-1, 1]$ fechado, não vazio, tal que $I(v) \neq 0$ para todo $v \in F$. Definimos $F_- := F \cap [-1, 0]$, $F_+ := F \cap [0, 1]$ e $v_-, v_+ \in [-1, 1]$ tais que (v_-, v_+) é a união de todos os intervalos abertos que contém a origem e não interceptam F. Então $F_- \subset [-1, v_-]$ e $F_+ \subset [v_+, 1]$. Como F é não vazio, F_- e F_+ não podem ser ambos vazios. Suponha F_+ não vazio. Então, de acordo com (49), segue que

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P_\omega\big(\tfrac{S_n}{n} \in F_+\big) &\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P_\omega\big(\tfrac{S_n}{n} \in [v_+, 1]\big) \\ &\leq - \inf_{v\in[v_+,1]} I(v) \leq - \inf_{v\in F_+} I(v).\end{aligned}$$

A mesma desigualdade segue para F_- em função de (50), se $F_- \neq \emptyset$. Logo, pelo Lema 2.6, temos que

$$\begin{aligned}\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P_\omega\big(\tfrac{S_n}{n} \in F\big) &\leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \big(P_\omega\big(\tfrac{S_n}{n} \in F_-\big) + P_\omega\big(\tfrac{S_n}{n} \in F_+\big)\big) \\ &= \max_{C\in\{F_-,F_+\}} \Big\{ \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P_\omega\big(\tfrac{S_n}{n} \in C\big) \Big\} \\ &\leq - \min\Big\{ \inf_{v\in F_-} I(v), \inf_{v\in F_+} I(v) \Big\} = - \inf_{v\in F} I(v).\end{aligned}$$

Prova da Cota Inferior Mostraremos que a equação (27) é válida para $\frac{S_n}{n}$ se trocarmos $u \in (1, \infty)$ por $v \in (-1, 1)$.

Para todo $v \in (0, 1)$ e $\delta = \delta(v) > 0$ tal que $B_\delta(v) \subset (0, 1)$, temos que se $0 < \epsilon < \frac{\delta}{2}$ e se n é grande o suficiente, então

$$\begin{aligned}\Big\{\tfrac{1-\epsilon}{v} < \tfrac{T_{\lceil vn\rceil}}{\lceil vn\rceil} < \tfrac{1-\frac{\epsilon}{2}}{v}\Big\} &\subset \big\{n - \epsilon n < T_{\lceil vn\rceil} < n\big\} \\ &\subset \big\{\lceil vn\rceil - \epsilon n < S_n < \lceil vn\rceil + \epsilon n\big\} \\ &\subset \big\{\tfrac{S_n}{n} \in B_\delta(v)\big\}.\end{aligned}$$

De acordo com o Lema 2.4, Λ^* é decrescente e contínua em $[1, \infty)$, logo,

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P_\omega\big(\tfrac{S_n}{n} \in B_\delta(v)\big) &\geq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P_\omega\Big(\tfrac{T_{\lceil vn\rceil}}{\lceil vn\rceil} \in \Big(\tfrac{1-\epsilon}{v}, \tfrac{1-\frac{\epsilon}{2}}{v}\Big)\Big) \\ &\geq -v \inf_{\frac{1-\epsilon}{v}<u<\frac{1-\frac{\epsilon}{2}}{v}} \Lambda^*(u) = -v\Lambda^*\Big(\tfrac{1-\frac{\epsilon}{2}}{v}\Big),\end{aligned}$$

Novamente pela continuidade de Λ^* e pelo fato de Λ^* ser decrescente e I ser não-crescente em $[0, 1]$, segue que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P_\omega\big(\tfrac{S_n}{n} \in B_\delta(v)\big) \geq -I(v). \tag{51}$$

De forma análoga, a desigualdade (51), pode ser obtida para todo $v \in (-1, 0)$ e $\delta > 0$ que satisfaz $B_\delta(v) \subset (-1, 0)$. Para verificarmos a desigualdade (51) para $v = 0$, fixamos $\epsilon > 0$

e escolhemos para todo $v_0 \in (-\epsilon, \epsilon) \setminus \{0\}$, $\delta = \delta(v_0)$ tal que $B_\delta(v_0) \subset (0, \epsilon)$, se $v_0 > 0$ e $B_\delta(0) \subset (-\epsilon, 0)$, se $v_0 < 0$. Logo, aplicando (51) a estes $v_0's$, temos que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P_\omega\big(\tfrac{S_n}{n} \in B_\epsilon(0)\big) \geq \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P_\omega\Big(\tfrac{S_n}{n} \in B_\delta(v_0)\Big) \geq -I(v_0).$$

De acordo com o Lema 2.14, I é contínua e $\lim_{v_0\to 0} I(v_0) = I(0) = 0$, o que conclui a demonstração. $\square$

3.1. Comparação com o passeio aleatório simples. Faremos uma comparação entre as funções taxa do Princípio de Grandes Desvios (PGD) de $\frac{S_n}{n}$ quando S_n é um passeio aleatório em ambiente aleatório e quando é um passeio aletório simples. Fixada P produto, sejam $\eta := e^{E[\log \rho_0]}$ e $p := \frac{1}{1+\eta}$. Então, ω^p descreve o passeio aleatório simples que satisfaz $\rho_o = \frac{1-\omega_0^p}{\omega_0^p} = \eta$. Sejam Λ_p, $r_p(u)$ e $I_p(v)$ as quantidades análogas à (16), (20) e (47), respectivamente, para a medida $\delta_p^{\otimes \mathbb{Z}}$.

Lema 2.15. *Para todo* $v \in \big(\frac{1}{\mathbb{E}[\tau_1]}, 1\big)$, $I'(v) > I_p'(v)$.

Demonstração. Para todo $r < 0$ e $\omega \in \Omega$ segue da decomposição (12) que

$$\begin{aligned}\varphi(r,\omega) &= e^r\omega_0 + (1-\omega_0)E_\omega[e^{r(1+\tau_0''+\tau_1'')}|S_1 = -1] \\ &= e^r\omega_0 + (1-\omega_0)e^r\varphi(r,\theta^{-1}\omega)\varphi(r,\omega).\end{aligned}$$

Logo,

$$\frac{\partial}{\partial r}\varphi(r,\omega) = \varphi(r,\omega)^2\big(e^{-r}(1-\rho_0) + \rho_0\tfrac{\partial}{\partial r}\varphi(r,\theta^{-1}\omega)\big).$$

Substituindo $e^{-r}(1+\rho_0)$ por $\varphi(r,\omega)^{-1} + \rho_0\varphi(r,\theta^{-1}\omega)$ segue que

$$\frac{\partial}{\partial r}\log\varphi(r,\omega) = 1 + \rho_0\varphi(r,\theta^{-1}\omega)\varphi(r,\omega)\big(1 + \tfrac{\partial}{\partial r}\log\varphi(r,\theta^{-1}\omega)\big). \tag{52}$$

Iterando (52), obtemos

$$\frac{\partial}{\partial r}\log\varphi(r,\omega) = 1 + 2\sum_{x=-\infty}^{0}\prod_{y=x}^{0}\rho_y\varphi(r,\theta^{y-1}\omega)\varphi(r,\theta^y\omega). \tag{53}$$

Tirando a esperança em relação à P em (53), segue de (22) e da Desigualdade de Jensen que

$$\begin{aligned}\Lambda'(r) &= 1 + 2\sum_{x=-\infty}^{0} E\Big[\prod_{y=x}^{0}\rho_y\varphi(r,\theta^{y-1}\omega)\varphi(r,\theta^y\omega)\Big] \\ &> 1 + 2\sum_{x=-\infty}^{0}\exp\Big(E\Big[\sum_{y=x}^{0}\log(\rho_y\varphi(r,\theta^{y-1}\omega)\varphi(r,\theta^y\omega))\Big]\Big).\end{aligned}$$

Seja $e_\Lambda(r) := e^{\Lambda(r)}$. Como P é estacionária e $\eta e_\Lambda(r)^2 = e^{\widetilde{\Lambda}(r)+\Lambda(r)} < 1$ segue que

$$\begin{aligned}\Lambda'(r) &> 1 + 2\sum_{x=-\infty}^{0} e^{(|x|+1)(E[\log\rho_0]+\Lambda(r)^2)} \\ &= 1 + 2\sum_{x=0}^{\infty}(\eta e_\Lambda(r)^2)^{(x+1)} \\ &= \frac{1+\eta e_\Lambda(r)^2}{1-\eta e_\Lambda(r)^2}. \qquad (54)\end{aligned}$$

Fazendo $\omega = \omega^p$ em (52), obtemos

$$\Lambda_p'(r) = \frac{\partial}{\partial r}\log\varphi(r,\omega^p) = \frac{1+\eta e_{\Lambda_p}(r)^2}{1-\eta e_{\Lambda_p}(r)^2}. \qquad (55)$$

Como $r < 0$, segue de (20), (54) e (55), que para $v \in \left(\frac{1}{\mathbb{E}[\tau_1]}, 1\right)$,

$$\frac{1+\eta e_{\Lambda_p}\big(r\big(\frac{1}{v}\big)\big)^2}{1-\eta e_{\Lambda_p}\big(r\big(\frac{1}{v}\big)\big)^2} = \Lambda_p'\big(r\big(\tfrac{1}{v}\big)\big) = \frac{1}{v} = \Lambda'\big(r\big(\tfrac{1}{v}\big)\big) > \frac{1+\eta e_{\Lambda}\big(r\big(\frac{1}{v}\big)\big)^2}{1-\eta e_{\Lambda}\big(r\big(\frac{1}{v}\big)\big)^2}.$$

Logo, $\Lambda\big(r\big(\frac{1}{v}\big)\big) < \Lambda_p\big(r\big(\frac{1}{v}\big)\big)$ e (48) implica $I'(v) > I_p'(v)$. □

De acordo com Greven e den Hollander (ver [**GdH94**]), a explicação para isso é que o ambiente aleatório contém armadilhas que freiam o passeio. Ou seja, existem trechos em que o passeio tende a ir para o centro e quanto maior esses trechos, mais tempo o passeio perde dentro deles. Logo, é menos provável observar velocidades maiores que a velocidade limite v_P para o passeio em ambiente aleatório.

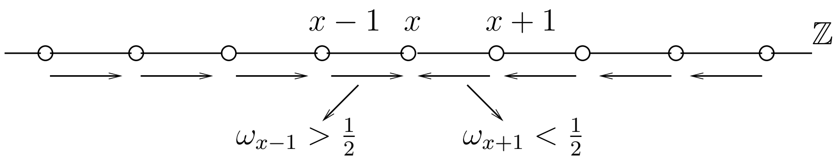

FIGURA 4. Uma amardilha do passeio aleatório em ambiente ω.

CAPíTULO 3

Princípio de Grandes Desvios *Annealed*

No Capítulo 1 vimos que $\frac{S_n}{n} \to \frac{1}{\mathbb{E}[\tau_1]}$, $\mathbb{P}$-q.c. e consequentemente, para P quase todo ambiente ω, $\frac{S_n}{n} \to \frac{1}{\mathbb{E}[\tau_1]}$, P_ω-q.c. Vimos no Capítulo 2 que para P quase todo ambiente ω, $\frac{S_n}{n}$ satisfaz um Princípio de Grandes Desvios (PGD) sob a medida *quenched* P_ω com função taxa I. Neste capítulo, estamos interessados em obter um PGD para $\frac{S_n}{n}$ sob a medida *annealed* $\mathbb{P}$:

Teorema 3.1. *Seja P uma medida produto. Então $\frac{S_n}{n}$ satisfaz um PGD sob $\mathbb{P}$. Isto é, existe uma função taxa $\mathbb{I} : [-1,1] \mapsto [0,\infty]$ tal que para todo fechado $F \subset [-1,1]$,*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\big(\tfrac{S_n}{n} \in F\big) \le -\inf_{v\in F} \mathbb{I}(v),$$

e para todo aberto $A \subset [-1,1]$

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\big(\tfrac{S_n}{n} \in A\big) \ge -\inf_{v\in A} \mathbb{I}(v).$$

Em (60) daremos a expressão explícita para $\mathbb{I}$ em função da função taxa *quenched* I.

Apesar de $\mathbb{P}$ ser a média sobre os ambientes de P_ω, o PGD para $\frac{S_n}{n}$ sob $\mathbb{P}$, não será obtido a partir do Teorema 2.1. Faremos como no Capítulo 2, obteremos um PGD fraco para $\frac{T_n}{n}$ e $\frac{T_{-n}}{n}$, que nos forncerá o PGD para $\frac{S_n}{n}$.

Seja $\mathcal{A}_{n-1} := \sigma(\omega_0, \cdots, \omega_{n-1})$ e $H(Q|P)|_{\mathcal{A}_{n-1}}$ a entropia relativa de Q com respeito à P na σ-álgebra $\mathcal{A}_{n-1}$. Esta cota superior será obtida a partir de um PGD satisfeito para a medida empírica (ver Seção 3.2 para as definições), cuja função taxa é dada por pela *entropia relativa* $h(Q|P)$ definida por

$$h(Q|P) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} H(Q|P)|_{\mathcal{A}_{n-1}}. \tag{56}$$

Escreveremos então o problema da cota superior na forma de uma integral com respeito à medida empírica e usaremos o Lema de Varadhan (ver Teorema A.2 do Apêndice A).

A cota inferior para abertos será obtida a partir de uma estimativa sobre a entropia relativa (ver Lema 3.8).

Denotamos por $\mathcal{M}_1 \supset \mathcal{M}_1^s \supset \mathcal{M}_1^e$ o conjunto das medidas de probabilidade, das medidas de probabilidade estacionárias e das medidas de probabilidade ergódicas em $(\Omega, \mathcal{F})$, respectivamente. Utilizaremos P para medidas produto e Q para outras medidas em $\mathcal{M}_1$. Suporemos sempre que $E[\log \rho_0] \le 0$. Para todo $\mathcal{M} \subset \mathcal{M}_1$,

$$\mathcal{M}^+ := \mathcal{M} \cap \{Q : E_Q[\log \rho_0] \le 0\}, \quad \mathcal{M}^- := \mathcal{M} \cap \{Q : E_Q[\log \rho_0] \ge 0\}$$

e $\mathcal{M}^P := \mathcal{M} \cap \{Q : \mathrm{supp}(Q_0) \subset \mathrm{supp}(P_0)\}$, em que Q_0 e P_0 denotam as marginais de Q e P, respectivamente, na origem. As funções definidas no capítulo anterior, tais como Λ e Λ^*, ganharão um índice que identificará em relação à qual medida elas se referem. Por exemplo, seja φ definida por (15), então Λ_Q e Λ_Q^* denotarão as funções

$$\Lambda_Q(r) = E_Q[\log \varphi(r, \cdot)], \; r \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad \Lambda_Q^*(u) = \sup_{r \in \mathbb{R}}\{ur - \Lambda_Q(r)\}, \; u \in \mathbb{R}.$$

Analogamente à definição de $\mathbb{P}$, para $Q \in \mathcal{M}_1$, $\mathbb{Q}$ denotará a medida em $(\Omega \times \mathbb{Z}^{\mathbb{N}}, \mathcal{F} \times \mathcal{G})$ tal que

$$\mathbb{Q}(F \times G) = \int_F P_\omega(G) Q(d\omega), \quad F \in \mathcal{F} \text{ e } G \in \mathcal{G}.$$

A seguinte proposição é a versão *annealed* da Proposição 2.5.

PROPOSIÇÃO 3.2. *Seja P uma medida produto. Então $\frac{T_n}{n}$ satisfaz um PGD fraco sob $\mathbb{P}$ com função taxa fraca convexa dada por*

$$\Gamma(u) := \inf_{Q \in \mathcal{M}_1^{e,P}} \{\Lambda_Q^*(u) + h(Q|P)\}, \; u \in [1, \infty). \tag{57}$$

Como foi feito no capítulo anterior, podemos mostrar a partir do Lema 2.10, que o mesmo resultado da Proposição 3.2 também é válido para $\frac{T_{-n}}{n}$, com função taxa fraca

$$\widetilde{\Gamma}(u) := \inf_{Q \in \mathcal{M}_1^{e,P}} \{\widetilde{\Lambda}_Q^*(u) + h(Q|P)\}, \; u \in [1, \infty). \tag{58}$$

Com isso, a demonstração do Teorema 3.1 é análoga à demonstração do Teorema 2.1, para a função taxa $\mathbb{I}$ dada por

$$\mathbb{I}(v) := \begin{cases} v\Gamma\big(\frac{1}{v}\big), & v \in (0, 1] \\ -v\widetilde{\Gamma}\big(\text{-}\frac{1}{v}\big), & v \in [-1, 0) \\ 0, & v = 0. \end{cases} \tag{59}$$

Esta função taxa pode ser reescrita como

$$\mathbb{I}(v) = \inf_{Q \in \mathcal{M}_1^{e,P}} \big\{I_Q(v) + |v| h(Q|P)\big\}. \tag{60}$$

Como $h(P|P) = 0$, segue que $\mathbb{I}(v) \leq I_P(v)$, para todo $v \in [-1, 1]$.

1. Cota Superior para Fechados

Estudaremos uma cota superior sobre o decaimento exponencial das probabilidades da forma $\mathbb{P}\big(\frac{T_n}{n} \leq u\big)$, proseguindo da seguinte maneira. Considere a medida empírica $R_n \in \mathcal{M}_1$

$$R_n^\omega := \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \delta_{\theta^i \omega}, \quad \forall \, \omega \in \Omega, n \in \mathbb{N}. \tag{61}$$

Pela Desigualdade de Chebychev, para todo $r \leq 0$,

$$\mathbb{P}\left(\tfrac{T_n}{n} \leq u\right) \leq e^{-rnu}\mathbb{E}[e^{rT_n}] = e^{-rnu}E\Big[\exp\Big(\sum_{i=0}^{n-1}\log\varphi(r,\theta^i\cdot)\Big)\Big]$$
$$= e^{-rnu}\int_\Omega e^{n\Lambda_{R_n^\omega}(r)}P(d\omega)$$

Estudaremos o comportamento assintótico desta última integral via o Lema de Varadhan. Considere $\mathcal{M}_1$ munido com a topologia da convergência fraca, isto é: Considere em Ω a topologia gerada pela distância dada por

$$d(\omega,\omega') := \sum_{i=-\infty}^{\infty}\frac{1}{2^i}|\omega_i - \omega_i'|.$$

Uma sequência de medidas $(Q_n)_{n\geq 1}$ converge fracamente para uma medida Q ($Q_n \Rightarrow Q$) se e somente se $E_{Q_n}[f] \to E_Q[f]$ para toda função $f : \Omega \to \mathbb{R}$ contínua. Considere a *distribuição de R_n com respeito a P*:

$$Q_n(\cdot) := P(R_n \in \cdot).$$

Podemos então fazer uma mudança de variável e escrever

$$\int_\Omega e^{n\Lambda_{R_n^\omega}(r)}P(d\omega) = \int_{\mathcal{M}_1} e_n^{n\Lambda_Q(r)}(dQ).$$

Para aplicarmos o Lema de Varadhan precisaremos do seguinte teorema cuja demonstração pode ser encontrada em **[Pfi02]** e do seguinte lema cuja demonstração será dada no final desta seção.

Teorema 3.3. *Sejam P uma medida produto em $(\Omega,\mathcal{F})$ e Q_n a distribuição da medida empírica dada por* (61). *Então Q_n satisfaz um PGD sob P com função taxa dada por*

$$s(Q|P) := \begin{cases} h(Q|P), & \text{se } Q \in \mathcal{M}_1^{s,P}, \\ \infty, & \text{se } Q \in \mathcal{M}_1 \setminus \mathcal{M}_1^{s,P}, \end{cases} \tag{62}$$

em que $h(Q|P)$ denota a entropia relativa de Q com respeito à P definida em (56).

Lema 3.4. *Para todo $r \in (-\infty,0]$, a função $Q \mapsto \Lambda_Q(r)$ é contínua e limitada superiormente.*

Usando esses dois fatos podemos então aplicar o Lema de Varadhan:

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\int_{\mathcal{M}_1} e^{n\Lambda_Q(r)}Q_n(dQ) = \sup_{Q\in\mathcal{M}_1^{s,P}}\{\Lambda_Q(r) - s(Q|P)\}.$$

Logo, temos para todo $r \in (-\infty,0]$

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\mathbb{P}\left(\tfrac{T_n}{n} \leq u\right) \leq \sup_{Q\in\mathcal{M}_1^{s,P}}\{-ur + \Lambda_Q(r) - h(Q|P)\}.$$

Portanto,

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\mathbb{P}\left(\tfrac{T_n}{n} \leq u\right) \leq \inf_{r\leq 0}\sup_{Q\in\mathcal{M}_1^{s,P}}\{-ur + \Lambda_Q(r) - h(Q|P)\}$$
$$= -\sup_{r\leq 0}\inf_{Q\in\mathcal{M}_1^{s,P}}\{ur - \Lambda_Q(r) + h(Q|P)\}. \tag{63}$$

Como o supremo acima é sobre as medidas estacionárias, será necessário estudar algumas propriedades das funções Λ_Q e Λ_Q^* para Q estacionária. As demonstrações destas propriedades são análogas às demonstrações do Lemas 2.3 e 2.4. Lembramos que $\varphi(r,\omega) = E_\omega[e^{r\tau_1}\mathbf{1}_{\{\tau-1<\infty\}}]$, logo, $\Lambda_Q(0) = E_Q[\log\varphi(0,\cdot)] = \int_\Omega \log P_\omega(\tau_1 < \infty)P(d\omega)$. Como $T_n = \tau_1 + \cdots \tau_n$, o Teorema Ergódico de Birkhoff implica

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\log P_\omega(T_n<\infty) = \int_\Omega \log P_\omega(\tau_1<\infty)Q(d\omega), \quad \text{para } Q\text{-q.t.}\omega.$$

Por um argumento análogo ao da demonstração do Lema 2.11, podemos verificar que para Q-q.t.ω

$$\int_\Omega \log P_\omega(\tau_1<\infty)Q(d\omega) = \begin{cases} 0, & \text{se } Q\in\mathcal{M}_1^+ \\ -E_Q[\log\rho_0], & \text{se } Q\in\mathcal{M}_1^-. \end{cases}$$

Logo,

$$\Lambda_Q(0) = \max\{0, E_Q[\log\rho_0]\}. \tag{64}$$

Lema 3.5. *Seja Q estacionária. Então:*

(a) *Existe $r_{crit}\geq 0$ tal que a função $r\mapsto\Lambda_Q(r)$ é duas vezes derivável em $(-\infty, r_{crit})$ e a função $r\mapsto\Lambda_Q'(r)$ é crescente em $(-\infty, r_{crit})$. Existe $u_{crit}\in[E_{\mathbb{Q}}[\tau_1\mathbf{1}_{\{\tau_1<\infty\}}],\infty]$ tais que para todo $u\in(1,u_{crit})$, existe um único $r_Q(u)\in(-\infty,r_{crit})$, tal que*

$$\Lambda_Q'(r)|_{r=r_Q(u)} = u. \tag{65}$$

(b) *A função $u\mapsto\Lambda_Q^*(u)$ é estritamente decrescente em $\big[1, E_{\mathbb{Q}}[\tau_1]\big]$ e estritamente crescente em $\big[E_{\mathbb{Q}}[\tau_1], u_{crit}\big]$. Se $u<1$, $\Lambda_Q^*(u)=\infty$, $\Lambda_Q^*(1) = E_Q[\log(1+\rho_0)] + \Lambda_Q(0)$, $\Lambda_Q^*\big(E_{\mathbb{Q}}[\tau_1]\big) = \Lambda_Q(0)$ e $\Lambda_Q^*(u) = \Lambda_Q(0)$ se $u>u_{crit}$. Para $u\in(1,u_{crit})$, seja $r_Q(u)$ dado por (65) e $r_Q(u)\equiv\Lambda_Q(0)$ em $[u_{crit},\infty)$. Então*

$$\Lambda_Q^*(u) = ur_Q(u) - \Lambda_Q(r_Q(u)). \tag{66}$$

Demonstração. Primeiro provaremos para $Q\in\mathcal{M}_1^{s,+}$, em que $\Lambda_Q(0)=0$:

(a) Seja

$$r_{crit} := \sup\Big\{r\geq 0 : \omega\mapsto\frac{\partial}{\partial r}\log\varphi(r,\omega) \text{ é integrável } \Big\}.$$

A função $r\mapsto E_Q\big[\frac{\partial}{\partial r}\log\varphi(r,\omega)\big]$ é crescente, logo,

$$\Lambda_Q'(r) = E_Q\Big[\frac{\partial}{\partial r}\log\varphi(r,\omega)\Big], \quad \forall\ r<r_{crit}.$$

Definimos $u_{crit} := \lim_{r\nearrow r_{crit}}\Lambda_Q'(r)$.

(b) Idem Lema 2.4, com

$$G_{Q,u}(r) := ur - \Lambda_Q(r), \quad r\in(-\infty, r_{crit}].$$

Para $Q\in\mathcal{M}_1^{s,-}$, o resultado segue do Lema 2.10. □

Lema 3.6. *Seja Q ergódica. Para todo $u\in(1,\infty)$,*

$$\sup_{r\leq 0}\{ru-\Lambda_Q(r)\} = \inf_{z\leq u}\Lambda_Q^*(z).$$

Demonstração. Fixamos $u \in (1,\infty)$ e definimos

$$M_u := \{Q \in \mathcal{M}_1^e : E_{\mathbb{Q}}[\tau_1 \mathbf{1}_{\{\tau_1<\infty\}}] > u\}.$$

Se $Q \in M_u$, pelo Lema 3.5, Λ_Q^* é decrescente em $[1,u]$ e não há o que demonstrar.

Se $Q \in M_u^c$, para todo $r \leq 0$, segue da Desigualdade de Jensen que

$$\begin{aligned} ru - \Lambda_Q(r) &= ru - \int_\Omega \log E_\omega[e^{r\tau_1}\mathbf{1}_{\{\tau_1<\infty\}}]Q(d\omega) \\ &= ru - \int_\Omega \log E_\omega[e^{r\overline{\tau}_1}]Q(d\omega) - \int_\Omega \log P_\omega(\tau_1<\infty)Q(d\omega) \\ &\leq r(u - E_{\mathbb{Q}}[\overline{\tau}_1]) - \int_\Omega \log P_\omega(\tau_1<\infty)Q(d\omega). \end{aligned}$$

Como $Q \in M_u^c$, temos que $\sup_{r\leq 0} r(u - E_{\mathbb{Q}}[\overline{\tau}_1]) = 0$, atingido em $r=0$. Além disso, $\Lambda_Q(0) = \int_\Omega \log P_\omega(\tau_1<\infty)Q(d\omega)$. Logo, para todo $Q \in M_u^c$,

$$\sup_{r\leq 0}\{ru - \Lambda_Q(r)\} = \Lambda_Q(0).$$

Por ser uma transformada de Legendre, Λ_Q^* é convexa e de acordo com o Lema 3.5, tem valor mínimo igual a $\Lambda_Q(0)$, atingido em $E_{\mathbb{Q}}[\tau_1\mathbf{1}_{\{\tau_1<\infty\}}]$. Como $u \geq E_{\mathbb{Q}}[\tau_1\mathbf{1}_{\{\tau_1<\infty\}}]$, segue o resultado. □

Para a obtenção da cota superior, utilizaremos o seguinte lema, em vez do Lema 3.4.

Lema 3.7. *Seja P uma medida produto. Então, a função $(r,Q) \mapsto \Lambda_Q(r)$ é contínua em $(-\infty,0] \times \mathcal{M}_1^{s,P}$.*

demonstração da cota superior da proposição 3.2. Mostraremos que para todo $u \in (1,\infty)$,

$$\sup_{r\leq 0}\inf_{Q\in\mathcal{M}_1^{s,P}}\{ur - \Lambda_Q(r) + h(Q|P)\} = \inf_{Q\in\mathcal{M}_1^{s,P}}\sup_{r\leq 0}\{ur - \Lambda_Q(r) + h(Q|P)\}. \tag{67}$$

Com isso, segue do Lema 3.6 e de (63) que

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log\mathbb{P}\left(\tfrac{T_n}{n}\leq u\right) &\leq -\inf_{Q\in\mathcal{M}_1^{e,P}}\inf_{z\leq u}\{\Lambda_Q^*(u) + h(Q|P)\} \\ &= -\inf_{z\leq u}\inf_{Q\in\mathcal{M}_1^{e,P}}\{\Lambda_Q^*(u) + h(Q|P)\} \\ &= -\inf_{z\leq u}\Gamma(z). \end{aligned}$$

Para $(r,Q) \in (-\infty,0]\times\mathcal{M}_1^s$, seja $A(r,Q) := ur - \Lambda_Q(r) + h(Q|P)$. Para cada $Q \in \mathcal{M}_1^{s,P}$, seja $r_Q^K(u)$ a interseção das retas $y(r) = ru$ e $y(r) = r - E_Q[\log(1+\rho_0)]$. Então, o Lema 3.5 implica que $\sup_{r\in(-\infty,0]} A(r,Q) = \sup_{r\in(r_Q^K(u),0]} A(r,Q)$. Como isso é válido para todo $Q \in \mathcal{M}_1^{s,P}$, existe $r^K(u)$ que depende de P tal que $[r_Q^K(u),0] \subset [r^K(u),0]$ para todo $Q \in \mathcal{M}_1^{s,P}$. Logo,

$$\sup_{r\in(-\infty,0]}\inf_{Q\in\mathcal{M}_1^{s,P}} A(r,Q) = \sup_{r\in[r^K(u),0]}\inf_{Q\in\mathcal{M}_1^{s,P}} A(r,Q) \tag{68}$$

Então, pelo Teorema do Min-Max cuja demonstração pode ser encontrada em [**Sio58**], temos que

$$\sup_{r\in[r^K(u),0]}\inf_{Q\in\mathcal{M}_1^{s,P}} A(r,Q)=\inf_{Q\in\mathcal{M}_1^{s,P}}\sup_{r\in[r^K(u),0]} A(r,Q). \tag{69}$$

Segue do Teorema 3.3 e do Lema 3.5 que para todo $r\le 0$, a função $Q\mapsto A(r,Q)$ é semi-contínua inferiormente, logo, seu ínfimo é atingido em qualquer compacto. Sejam r_Q tal que $A(r_Q,Q)=\sup_{r\in[r^K(u),0]}A(r,Q)$ e $\overline{Q}$ tal que $A(r_{\overline{Q}},\overline{Q})=\inf_{Q\in\mathcal{M}_1^{s,P}}A(r_Q,Q)$. Como $\overline{Q}$ é estaconária, existe $(Q_k)_{k\ge1}\subset\mathcal{M}_1^{e,P}$ tal que $Q_k\Rightarrow\overline{Q}$ e $h(Q_k|P)\to h(\overline{Q}|P)$ (ver [**FO88**]). Então, para todo $k\in\mathbb{N}$,

$$\inf_{Q\in\mathcal{M}_1^{e,P}}\sup_{r\in[r^K(u),0]} A(r,Q)\le A(r_{Q_k},Q_k) \tag{70}$$

Como $(r_{Q_k})_{k\ge1}\subset[r^K(u),0]$, existe r^* que é o limite de alguma subsequência de $(r_{Q_k})_{k\ge1}$. Pela continuidade da função $(r,Q)\mapsto ur-\Lambda_Q(r)$ e convergência da sequência $(h(Q_k|P))_{k\ge1}$, temos que para todo $\epsilon>0$, existe $k_0=k_0(\epsilon)$ tal que para todo $k\ge k_0$,

$$\begin{aligned}A(r_{Q_k},Q_k)&\le A(r^*,\overline{Q})+\epsilon\le\sup_{r\in[r^K(u),0]}A(r,\overline{Q})+\epsilon\\&=A(r_{\overline{Q}},\overline{Q})+\epsilon=\inf_{Q\in\mathcal{M}_1^{s,P}}A(r_Q,Q)+\epsilon\\&=\inf_{Q\in\mathcal{M}_1^{s,P}}\sup_{r\in[r^K(u),0]}A(r,Q)+\epsilon.\end{aligned} \tag{71}$$

Logo, (67) segue de (68), (69), (70), (71) e de $\mathcal{M}_1^{e,P}\subset\mathcal{M}_1^{s,P}$. □

DEMONSTRAÇÃO DO LEMA 3.7. Para todo $k>1$,

$$\begin{aligned}\varphi(r,\omega)=E_\omega[e^{r\tau_1}\mathbf{1}_{\{\tau_1<\infty\}}]&=E_\omega[e^{r\tau_1}\mathbf{1}_{\{\tau_1<k\}}]+E_\omega[e^{r\tau_1}\mathbf{1}_{\{k\le<\infty\}}]\\&:=\varphi_1^k(r,\omega)+\varphi_2^k(r,\omega).\end{aligned} \tag{72}$$

Para tdo $(r,Q)\in(-\infty,0]\times\mathcal{M}_1^{s,P}$ escrevemos,

$$\Lambda_Q(r)=E_Q\Big[\log\Big(1+\frac{\varphi_2^k(r,\cdot)}{\varphi_1^k(r,\cdot)}\Big)\Big]+E_Q[\log\varphi_1^k(r,\cdot)]. \tag{73}$$

Como $(r,\omega)\mapsto\varphi_1^k(r,\omega)$ é contínua, já que $\varphi_1^k(r,\cdot)$ é σ-$(\omega_{-k},\omega_{-k+1},\cdots,\omega_k)$ mensurável, e é limitada, segue que

$$\lim_{Q'\Rightarrow Q}|E_Q[\log\varphi_1^k(r,\cdot)]-E_{Q'}[\log\varphi_1^k(r,\cdot)]|=0, \tag{74}$$

e também,

$$\lim_{r'\to r}|E_{Q'}[\log\varphi_1^k(r,\cdot)-\log\varphi_1^k(r',\cdot)|=0.$$

Logo, para todo $k\in\mathbb{N}$,

$$\lim_{\substack{Q'\Rightarrow Q\\ r'\to r}}|\Lambda_Q(r)-\Lambda_{Q'}(r')|\le E_Q\Big[\log\Big(1+\frac{\varphi_2^k(r,\cdot)}{\varphi_1^k(r,\cdot)}\Big)\Big]+\lim_{\substack{Q'\Rightarrow Q\\ r'\to r}}E_{Q'}\Big[\log\Big(1+\frac{\varphi_2^k(r',\cdot)}{\varphi_1^k(r',\cdot)}\Big)\Big] \tag{75}$$

Fixe $\epsilon > 0$ e observe que para cada $Q \in \mathcal{M}_1^{s,P}$, $\lim_{k\to\infty} E_Q[\log \varphi_1^k(0,\cdot)] = E_Q[\log \varphi(0,\cdot)] = \Lambda_Q(0)$. Logo, por (73), segue que existe $k_Q = k(Q,\epsilon)$ tal que

$$E_Q\Big[\log\Big(1 + \frac{\varphi_2^{k_Q}(0,\cdot)}{\varphi_1^{k_Q}(0,\cdot)}\Big)\Big] < \epsilon. \tag{76}$$

Para $Q' \in \mathcal{M}_1^e$, temos por (64) que $\Lambda_{Q'}(0) = \max\{0, E_{Q'}[\log \rho_0]\}$. Logo, $Q' \mapsto \Lambda_{Q'}(0)$ é continua e é uniformemente limitada por $\log \frac{1-\omega_{min}}{\omega_{max}}$ em $\mathcal{M}_1^e \cap \mathcal{M}_1^{s,P}$. Pelo Teorema da Decomposição Ergódica, essa cota superio pode ser extendida a qualquer medida estacionária. Como $Q' \mapsto \Lambda_{Q'}(0)$ é linear, isso garante a sua continuidade. Por (74), temos que $Q' \mapsto E_{Q'}[\log \varphi_1^k(0,\cdot)]$ é contínua para todo $k \in \mathbb{N}$. Logo, (73) implica que $Q' \mapsto E_{Q'}\Big[\log\Big(1 + \frac{\varphi_2^{k_Q}(0,\cdot)}{\varphi_1^{k_Q}(0,\cdot)}\Big)\Big]$ é contínua. Por (76), temos que para todo $Q \in \mathcal{M}_1^{s,P}$, existe uma vizinhança B_Q de Q tal que para $Q' \in B_Q$,

$$E_{Q'}\Big[\log\Big(1 + \frac{\varphi_2^{k_Q}(0,\cdot)}{\varphi_1^{k_Q}(0,\cdot)}\Big)\Big] < \epsilon.$$

Como $\mathcal{M}_1^{s,P}$ é compacto, existe $k = k(\epsilon)$ tal que para todo $Q \in \mathcal{M}_1^{s,P}$,

$$E_Q\Big[\log\Big(1 + \frac{\varphi_2^{k}(0,\cdot)}{\varphi_1^{k}(0,\cdot)}\Big)\Big] < \epsilon.$$

Como $\log(1+cx) \leq c\log(1+x)$, para todo $x \geq 0$ e $c \geq 1$, segue para todo $r \in (-\infty, 0]$ e $Q \in \mathcal{M}_1^{s,P}$ que

$$\begin{aligned}
0 \leq E_Q\Big[\log\Big(1 + \frac{\varphi_2^{k}(r,\omega)}{\varphi_1^{k}(r,\omega)}\Big)\Big] &\leq E_Q\Big[\log\Big(1 + \frac{\varphi_2^{k}(0,\cdot)}{e^r\omega_{min}}\Big)\Big] \\
&\leq \frac{1}{e^r\omega_{min}} E_Q[\log(1 + \varphi_2^k(0,\cdot))] \\
&\leq \frac{1}{e^r\omega_{min}} E_Q\Big[\log\Big(1 + \frac{\varphi_2^{k}(0,\cdot)}{\varphi_1^{k}(0,\cdot)}\Big)\Big] \leq \frac{\epsilon}{e^r\omega_{min}}.
\end{aligned}$$

Logo, fazendo $k \to \infty$ em (75), segue que $\lim_{\substack{Q' \Rightarrow Q \\ r' \to r}} |\Lambda_Q(r) - \Lambda_{Q'}(r')| = 0$, provando a continuidade da função. □

2. Cota Inferior para Abertos

A prova da cota inferior será obtida mostrando que para todo $u \in (1,\infty)$, $\delta > 0$ suficientemente pequeno,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\big(\tfrac{T_n}{n} \in B_\delta(u)\big) \geq -\Gamma(u). \tag{77}$$

O ponto de partida é o seguinte lema, que mostra como um controle da entropa relativa leva a uma cota inferior.

Lema 3.8. *Sejam $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um espaço de probabilidade, $(\mathcal{F}_n)$ uma sequência crescente de σ-álgebras e A_n conjuntos $\mathcal{F}_n$ mensuráveis. Seja Q uma distribuição de probabilidade tal* *que* $Q(A_n) \to 1$ *quando* $n \to \infty$ *e tal que*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ H(Q|P)|_{\mathcal{F}_n} \le h,$$

em que $H(\cdot|P)|_{\mathcal{F}_n}$ *denota a entropia relativa com respeito a* P *na* σ*-álgebra* $\mathcal{F}_n$ *e* $h \ge 0$. *Então*

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P(A_n) \ge -h.$$

Demonstração. Definimos

$$\psi(x) := \begin{cases} x\log x, & \text{se } x > 0, \\ 0, & \text{se } x = 0. \end{cases}$$

Então $x \mapsto \psi(x)$ é convexa e a Desigualdade de Jensen implica para todo $n \in \mathbb{N}$ e $A_n \in \mathcal{F}_n$ que

$$\begin{aligned} \int_{A_n} \psi\Big(\frac{dQ}{dP}\Big|_{\mathcal{F}_n}\Big) dP &= P(A_n) E_P\Big[\psi\Big(\frac{dQ}{dP}\Big|_{\mathcal{F}_n}\Big)\Big|A_n\Big] \\ &\ge P(A_n)\psi\Big(E_P\Big[\frac{dQ}{dP}\Big|_{\mathcal{F}_n}\Big|A_n\Big]\Big) \\ &= Q(A_n)\log\Big(\frac{Q(A_n)}{P(A_n)}\Big). \end{aligned}$$

Logo,

$$\begin{aligned} h(Q|P)|_{\mathcal{F}_n} &= \int_\Omega \psi\Big(\frac{dQ}{dP}\Big|_{\mathcal{F}_n}\Big) dP \\ &\ge Q(A_n)\log\Big(\frac{Q(A_n)}{P(A_n)}\Big) + Q(A_n^c)\log\Big(\frac{Q(A_n^c)}{P(A_n^c)}\Big). \end{aligned}$$

E como $Q(A_n)\log Q(A_n) + Q(A_n^c)\log Q(A_n^c) \ge -\log 2$ e $-Q(A_n^c)\log P(A_n^c) \ge 0$, segue que

$$H(Q|P)|_{\mathcal{F}_n} \ge -\log 2 - Q(A_n)\log P(A_n).$$

Logo,

$$-h \le \liminf_{n\to\infty} -\frac{1}{n} H(Q|P)|_{\mathcal{F}_n} \le \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\big(\log 2 + Q(A_n)\log P(A_n)\big),$$

concluindo a demonstração. □

demonstração da cota inferior da proposição 3.2. Fixe $u \in (1,\infty)$ e $\delta > 0$. Mostraremos (77) usando o lema acima. Para todo $M \in \mathbb{N}$ tal que $u < M$, $\omega \in \Omega$ e $Q \in \mathcal{M}_1^{e,+}$ sejam $P_{\omega,M}$ e $\mu_{\omega,M}$ como em (31) e (37), respectivamente, em que $r_M(u) \equiv r_{Q,M}(u)$, é tal que

$$\Lambda'_{Q,M}(r)|_{r=r_{Q,M}(u)} = u.$$

Sejam $A_n := \left\{\frac{T_n}{n} \in B_\delta(u)\right\}$ e $\mu_{Q,M}$ dada por

$$\mu_{Q,M}(G) := \int_\Omega \mu_{\omega,M}(G) Q(d\omega), \quad G \in \mathcal{G}.$$

Por (40), temos que $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_{\omega,M}(A_n^c) = 0$, para Q-q.t.ω. Logo,

$$\lim_{n\to\infty} \mu_{Q,M}(A_n) = 1. \tag{78}$$

Para todo $n \in \mathbb{N}$, considere as σ-álgebras

$$\mathcal{F}_{n,M} := \sigma(\{\omega_j\}_{j=-M}^n, \{\tau_i\}_{i=0}^n), \quad \mathcal{A}_{n,M} := \sigma(\{\omega_j\}_{j=-M}^n) \quad \text{e} \quad \mathcal{T}_n := \sigma(\{\tau_i\}_{i=0}^n).$$

Então,

$$\frac{d\mu_{Q,M}}{d\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_{n,M}} = \frac{d\mu_{\omega,M}}{dP_\omega}\Big|_{\mathcal{T}_n} \frac{dQ}{dP}\Big|_{\mathcal{A}_{n,M}},$$

implica

$$\begin{aligned} H(\mu_{Q,M}|\mathbb{P})|_{\mathcal{F}_{n,M}} &= \int_\Omega \frac{d\mu_{Q,M}}{d\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_{n,M}} \log\Big(\frac{d\mu_{Q,M}}{d\mathbb{P}}\Big|_{\mathcal{F}_{n,M}}\Big) d\mathbb{P} \\ &= \int_\Omega \frac{dQ}{dP}\Big|_{\mathcal{A}_{n,M}} \Big(\int_{\mathbb{Z}^{\mathbb{N}}} \frac{d\mu_{\omega,M}}{dP_\omega}\Big|_{\mathcal{T}_n} \log\Big(\frac{d\mu_{\omega,M}}{dP_\omega}\Big|_{\mathcal{T}_n} \frac{dQ}{dP}\Big|_{\mathcal{A}_{n,M}}\Big) dP_\omega\Big) dP \\ &= \int_\Omega H(\mu_{\omega,M}|P_\omega)|_{\mathcal{T}_n} dQ + H(Q|P)|_{\mathcal{A}_{n,M}} \end{aligned} \tag{79}$$

Como $\varphi_M(r_{Q,M}(u), \theta^{i-1}\omega) = E_{P_{\omega,M}}[e^{r_{Q,M}(u)\tau_i}] P_\omega(\tau_i \le M)$, segue que

$$\begin{aligned} H(\mu_{\omega,M}|P_\omega)|_{\mathcal{T}_n} &= \sum_{\substack{k_1,\cdots,k_n;\\ k_i \le M}} \mu_{\omega,M}(\tau_1 = k_1, \cdots, \tau_n = k_n) \log\Big(\frac{\mu_{\omega,M}(\tau_1 = k_1, \cdots, \tau_n = k_n)}{P_\omega(\tau_1 = k_1, \cdots, \tau_n = k_n)}\Big) \\ &= \sum_{\substack{k_1,\cdots,k_n;\\ k_i \le M}} \mu_{\omega,M}(\tau_1 = k_1, \cdots, \tau_n = k_n) \log\Big(\frac{e^{r_{Q,M}(u)\sum_{i=1}^n \tau_i}}{\prod_{i=1}^n \varphi_M(r_{Q,M}(u), \theta^{i-1}\omega)}\Big) \\ &= r_{Q,M}(u) E_{\mu_{\omega,M}}[T_n] - \sum_{i=1}^n \log \varphi_M(r_{Q,M}(u), \theta^{i-1}\omega). \end{aligned}$$

Segue de (39), (42) e do Lema 2.8 que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \int_\Omega H(\mu_{\omega,M}|P_\omega)|_{\mathcal{T}_n} Q(d\omega) = u r_{Q,M}(u) - \Lambda_M(u) = \Lambda^*_{Q,M}(u), \quad Q\text{-q.c.}$$

E como $\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ H(Q|P)|_{\mathcal{A}_n} \le h(Q|P)$, segue que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\ H(\mu_{Q,M}|\mathbb{P})|_{\mathcal{F}_{n,M}} \le \Lambda^*_{Q,M}(u) + h(Q|P). \tag{80}$$

Por (78), (80) e pelo Lema ref, segue para todo $M > u$ que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(A_n) \ge -(\Lambda^*_{Q,M}(u) + h(Q|P)).$$

Vimos na demonstração da Proposição 2.5 que $\lim_{M\to\infty} \Lambda^*_{Q,M}(u) \le \Lambda^*_Q(u)$. Logo, para $Q \in \mathcal{M}_1^{e,+}$,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}(A_n) \ge -(\Lambda^*_Q(u) + h(Q|P)).$$

O caso $Q \in \mathcal{M}_1^{e,-}$ se faz de forma análoga. Isso implica que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}\big(\tfrac{T_n}{n} \in B_\delta(u)\big) \ge - \inf_{Q \in \mathcal{M}_1^{e,P}} \{\Lambda^*_Q(u) + h(Q|P)\} = -\Gamma(u).$$

Isso prova (77). $\square$

APÊNDICE A

Princípio de Grandes Desvios

Dados $(\Omega, \mathcal{F}, P)$, um espaço de probabilidade e $X_1, X_2, \cdots$ uma sequência de variáveis aleatórias reais, seja $S_n := X_1 + \cdots + X_n$.

Definição A.1. *A sequência* $\left(\frac{S_n}{n}\right)_{n\geq 1}$ *satisfaz um Princípio de Grandes Desvios (PGD) sob* P *se existir uma função* $I : \mathbb{R} \mapsto [0, \infty]$ *semi-contínua inferiormente, com conjuntos de nível* $(\{x; I(x) \leq c\})$ *compactos, tal que para todo fechado* $F \subset \mathbb{R}$,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P\Big(\frac{S_n}{n} \in F\Big) \leq -\inf_{x\in F} I(x)$$

e para todo aberto $A \subset \mathbb{R}$,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log P\Big(\frac{S_n}{n} \in A\Big) \geq -\inf_{x\in A} I(x).$$

A função I que satisfaz as hipóteses acima, é chamada *função taxa.* Enunciaremos a seguir o Teorema de Cramér que fornece, sob certas condições, um PGD para $\frac{S_n}{n}$, quando a sequência $X_1, X_2, \cdots$ é i.i.d. Se X é uma variável aleatória real, sua *função log geradora de momento* é definida por $\Lambda(r) := \log E[e^{rX}]$. A *Transformada de Legendre* de Λ é definida por

$$\Lambda^*(u) := \sup_{r\in\mathbb{R}}\{ru - \Lambda(r)\}.$$

Teorema A.2 (Teorema de Cramér). *Seja* $X_1, X_2, \cdots$ *uma sequência i.i.d. tal que* $E[X_1] < \infty$. *Seja* Λ *a função log geradora de momento de* X_1 *e* Λ^* *a transformada de Legendre de* Λ. *Então, para todo fechado* $F \subset \mathbb{R}$,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} P\Big(\frac{S_n}{n} \in F\Big) \leq -\inf_{u\in F} \Lambda^*(u)$$

e para todo aberto $A \subset \mathbb{R}$,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} P\Big(\frac{S_n}{n} \in A\Big) \geq -\inf_{u\in A} \Lambda^*(u).$$

Em particular, se $0 \in \mathcal{D}_\Lambda$, *em que* $\mathcal{D}_\Lambda := \{r \in \mathbb{R}; \Lambda(r) < \infty\}$, *então* $\frac{S_n}{n}$ *satisfaz um Princípio de Grandes Desvios com função taxa* Λ^*.

O Teorema de Gärtner-Ellis é uma generalização deste resultado para sequências dependentes que satisfazem as seguintes hipóteses:

(1) A função log geradora de momento Λ é semi-contínua inferiormente em $\mathbb{R}$ e diferenciável em $\operatorname{int}(\mathcal{D}_\Lambda)$.

(2) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log E[e^{rS_n}] = \Lambda(r) \in [-\infty, \infty]$ existe.

(3) Ou $\mathcal{D}_\Lambda = \mathbb{R}$ ou $\lim_{r \to \partial\mathcal{D}_\Lambda : r \in \mathcal{D}_\Lambda} |\Lambda'(r)| = \infty$.

TEOREMA A.3 (Teorema de Gärtner-Ellis). *Seja $X_1, X_2, \cdots$ uma sequência de variáveis aleatórias que satisfaz as hipóteses* $1-3$ *acima. Então $\frac{S_n}{n}$ satisfaz um Princípio de Grandes Desvios sob P com função taxa Λ^*.*

A demonstração destes teoremas podem ser encontradas em **[dH00]**, **[DZ98]** e **[OV05]**.

Dado $(\mathcal{X}, d)$ um espaço métrico, seja $\mathcal{M}_1$ o conjunto das medidas de probabilidade em $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$, em que $\mathcal{B}(\mathcal{X})$ denota a σ-álgebra de Borel em $\mathcal{X}$. A definição a seguir é uma generalização da Definição A.1 para sequências de medidas de probabilidades em um espaço métrico.

DEFINIÇÃO A.4. *Uma sequência de medidas de probabilidade $(\mu_n)_{n\geq 1} \subset \mathcal{M}_1$ satisfaz um Pricípio de Grandes Desvios (PGD) se existir uma função $I : \mathcal{X} \mapsto [0, \infty]$ semi-contínua inferiormente, com conjuntos de nível $(\{x; I(x) \leq c\})$ compactos, tal que para todo fechado $F \subset \mathcal{X}$,*

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu_n(F) \leq -\inf_{x\in F} I(x)$$

e para todo aberto $A \subset \mathcal{X}$,

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mu_n(A) \geq -\inf_{x\in A} I(x).$$

TEOREMA A.5 (Lema de Varadhan). *Sejam $(\mathcal{X}, d)$ um espaço métrico e $(\mu_n)_{n\geq 1}$ uma sequência de medidas de probabilidade em $(\mathcal{X}, \mathcal{B}(\mathcal{X}))$ que satisfaz um Princípio de Grandes Desvios (PGD) com função taxa I. Seja $f : \mathcal{X} \mapsto \mathbb{R}$ contínua e limitada superiormente. Então*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \int_{\mathcal{X}} e^{nf(x)} \mu_n(dx) = \sup_{y\in\mathcal{X}} \{f(y) - I(y)\}. \tag{81}$$

DEMONSTRAÇÃO. Sejam $a := \sup_{x\in\mathcal{X}} \{f(x) - I(x)\}$ e $b := \sup_{x\in\mathcal{X}} f(x)$. Como $I \geq 0$, segue que $-\infty \leq a \leq b < \infty$. Para $N \in \mathbb{N}$ e $k \in \{0, 1, \cdots, N-1\}$, definimos

$$\Delta_k^N := \Big[a + k\frac{b-a}{N}, a + (k+1)\frac{b-a}{N}\Big].$$

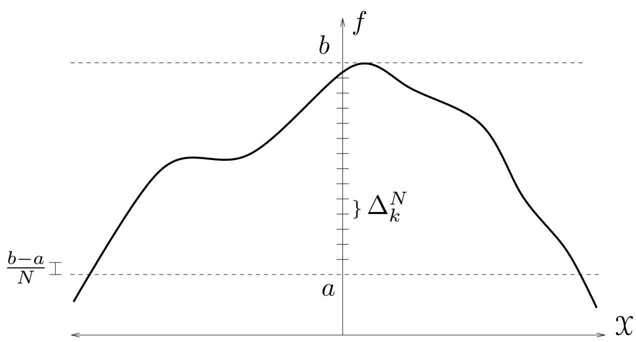

FIGURA 1. Decomposição do intervalo $[a, b]$.

Sejam $F_k^N := f^{-1}(\Delta_k^N)$ e $F := f^{-1}([a,b]) = \bigcup_{k=0}^{N-1} F_k^N$. Como f é contínua, F e cada F_k^N são fechados. Para todo boreliano $B \subset \mathcal{X}$ e $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$J_n(B) := \int_B e^{nf(x)} \mu_n(dx).$$

Para todo $x_0 \in F^c$, temos que $f(x_0) \le a$, logo,

$$J_n(F^c) = \int_{F^c} e^{nf(x)} \mu_n(dx) \le e^{an} \mu_n(F^c) \le e^{an},$$

e portanto,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log J_n(F^c) \le \sup_{x\in\mathcal{X}} \{f(x) - I(x)\}. \tag{82}$$

Além disso, $J_n(F) \le \sum_{k=0}^{N-1} J_n(F_k^N)$. Para todo $n \in \mathbb{N}$, $k \in \{0, 1, \cdots, N-1\}$ e $x_0 \in F_k^N$, $f(x_0) \le \sup_{x\in F_k^N} f(x)$, implica

$$J_n(F_k^N) \le \exp\big(n \sup_{x\in F_k^N} f(x)\big) \mu_n(F_k^N).$$

Como F_k^N é fechado e $(\mu_n)_{n\ge1}$ satisfaz um PGD com função taxa I, temos que

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log J_n(F_k^N) &\le \sup_{x\in F_k^N} f(x) - \inf_{x\in F_k^N} I(x) \\
&\le \inf_{x\in F_k^N} f(x) - \inf_{x\in F_k^N} I(x) + \frac{b-a}{N} \\
&= \sup_{x\in F_k^N} \{f(x) - I(x)\} + \frac{b-a}{N}.
\end{aligned}$$

Logo, de acordo com Lema 2.6, segue que

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log J_n(F) &\le \max_{k\in\{0,1,\cdots,N-1\}} \sup_{x\in F_k^N} \{f(x) - I(x)\} + \frac{b-a}{N} \\
&= \sup_{x\in F_k^N} \{f(x) - I(x)\} + \frac{b-a}{N}. \qquad (83)
\end{aligned}$$

A partir de (82), (83) e do Lema 2.6, basta fazer N tender ao infinito para obter

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log J_n(\mathcal{X}) \le \sup_{x\in F_k^N} \{f(x) - I(x)\}.$$

Para verficarmos que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log J_n(\mathcal{X}) \ge \sup_{x\in F_k^N} \{f(x) - I(x)\},$$

fixamos $x_0 \in \mathcal{X}$ e definimos para todo $\epsilon > 0$, o conjunto $A_\epsilon := \{x \in \mathcal{X}; f(x) > f(x_0) - \epsilon\}$, que é aberto em função da continuidade de f. Como

$$J_n(\mathcal{X}) \ge J_n(A_\epsilon) = \int_{A_\epsilon} e^{nf(x)} \mu_n(dx) \ge e^{n(f(x_0)-\epsilon)} \mu_n(A_\epsilon),$$

e $(\mu_n)_{n\geq 1}$ satisfaz um PGD com função taxa I, segue que

$$\begin{aligned}\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log J_n(\mathcal{X}) &\geq f(x_0)-\epsilon-\inf_{x\in A_\epsilon} I(x)\\ &\geq f(x_0)-\epsilon-I(x_0).\end{aligned}$$

Logo,

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\log J_n(\mathcal{X}) \geq \sup_{x\in F_k^N}\{f(x)-I(x)\}-\epsilon.$$

Para finalizar a demonstração bastar fazer $\epsilon \searrow 0$. $\square$

APÊNDICE B

Funções Harmônicas

Definição B.1. *Sejam $a, b \in \mathbb{N}$ e $\omega_i \in (0,1)$, $\forall\ i \in [a,b] \cap \mathbb{N}$. Dizemos que uma função real $f : [a,b] \cap \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ é harmônica se para todo $x \in (a,b) \cap \mathbb{N}$ tem-se*

$$f(x) = (1-\omega_x) f(x-1) + \omega_x f(x+1).$$

Lema B.2. *Dados $a, b \in \mathbb{N}$, $\omega_i \in (0,1)$ $\forall\ i \in [a,b] \cap \mathbb{N}$, $f : [a,b] \cap \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ e $g : [a,b] \cap \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ funções harmônicas tais que $f(x) = g(x)$ para $x \in \{a,b\}$. Então $f \equiv g$ em $[a,b]$.*

Demonstração. Definimos $h : [a,b] \cap \mathbb{N} \to \mathbb{R}$ por $h(x) := f(x) - g(x)$. Para $x \in (a,b) \cap \mathbb{N}$, temos

$$\begin{aligned} h(x) &= f(x) - g(x) \\ &= (1-\omega_x) f(x-1) + \omega_x f(x+1) - [(1-\omega_x) g(x-1) + \omega_x g(x+1)] \\ &= (1-\omega_x)[f(x-1) - g(x-1)] + \omega_x [f(x+1) - g(x+1)] \\ &= (1-\omega_x) h(x-1) + \omega_x h(x+1). \end{aligned}$$

Logo, h também é harmônica. Mostraremos que uma função harmônica atinge seu máximo e seu mínimo na fronteira e como $h(x) = 0$ se $x \in \{a,b\}$, segue o resultado. Seja M o máximo de h em $[a,b] \cap \mathbb{N}$. Suponhamos que $\max h(a), h(b) < M$. Então existe $x^* \in (a,b) \cap \mathbb{N}$ tal que $h(x^*) = M$. Como $M = (1-\omega_{x^*}) h(x^*-1) + \omega_{x^*} h(x^*+1)$, temos que

- se $h(x^*-1) < M \Rightarrow 0 < \omega_{x^*}[h(x^*+1) - M] \Rightarrow h(x^*+1) > M$,
- se $h(x^*+1) < M \Rightarrow 0 < (\omega_{x^*} - 1)[M - h(x^*-1)] \Rightarrow h(x^*-1) > M$.

Logo, $h(x^*-1) = h(x^*+1) = M$ e $h(x^*) = 0$. O mesmo segue para o mínimo. $\square$

APÊNDICE C

Um Teorema de Kesten

Demonstraremos o seguinte resultado, devido a Kesten, que nos diz que somas divergentes de variáveis aleatórias estacionárias divergem pelo menos linearmente, baseado em [**Kes75**].

Teorema C.1 (Kesten). *Seja* $X_1, X_2, \cdots$ *uma sequência estacionária em* $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ *e* $S_n := X_1 + \cdots + X_n$. *Então* P*-q.c.*

$$\liminf_{n\to\infty} \tfrac{S_n}{n} > 0, \text{ no conjunto } \{S_n \to \infty\}. \tag{84}$$

Definimos $S_0 := 0$ e

$$\nu_0 := \min\big\{j \geq 0 : \inf_{n>j} S_n - S_j > 0\big\},$$

o menor índice k para o qual S_n atinge valores estritamente maiores que S_k para todo $n > k$. Se $\nu_0 < \infty$, $S_{\nu_0} = \inf\limits_{n\geq\nu_0} S_n$ e pela definição de ν_0, para $0 \leq j \leq \nu_0$ existe $n_j \in \mathbb{N}$ tal que $S_{n_j} - S_j \leq 0$, implicando que ν_0 é o maior índice no qual o $\inf\limits_{n\geq 0} S_n$ é atingido. Se $S_n \to \infty$ P-q.c., segue que $\nu_0 < \infty$ P-q.c., e podemos definir para todo $k \in \mathbb{N}$,

$$\nu_{k+1} = \min\big\{j \geq \nu_k : \ \inf_{n>j} S_n - S_j > 0\big\}, \quad (\nu_k < \infty P\text{-q.c.}).$$

Temos que $q := P(\nu_0 = 0) > 0$, pois $P\big(\inf\limits_{n>l} S_n - S_l > 0\big) = P\big(\inf\limits_{n>0} S_n > 0\big)$ já que $(X_i)_{i\geq 1}$ é estacionária e

$$1 = \sum_{l=1}^{\infty} P(\nu_0 = l) \leq \sum_{l=1}^{\infty} P\big(\inf_{n>l} S_n - S_l > 0\big) = \sum_{l=1}^{\infty} P\big(\inf_{n>0} S_n > 0\big) = \sum_{l=1}^{\infty} P(\nu_0 = 0).$$

Definimos então em $(\Omega, \mathcal{F})$ a medida de probabilidade Q dada por

$$Q(A) = P(A \mid \nu_0 = 0), \quad \forall\ A \in \mathcal{F}.$$

Suponhamos que a afirmação 84 seja verdadeira Q-q.c., então, o teorema estará demonstrado, utilizando a estacionaridade de $(X_i)_{i\geq 1}$, como observamos abaixo

$$\begin{aligned}
P\big(\liminf_{n\to\infty} \tfrac{S_n}{n} \geq 0\big) &= \sum_{l=0}^{\infty} P\big(\nu_0 = l : \liminf_{n\to\infty} \tfrac{S_n - S_l}{n} \geq 0\big) \\
&\leq \sum_{l=0}^{\infty} P\big(\inf_{n>l} S_n - S_l > 0 : \liminf_{n\to\infty} \tfrac{S_n - S_l}{n} \geq 0\big) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} P\big(\inf_{n>0} S_n > 0 : \liminf_{n\to\infty} \tfrac{S_n}{n} \geq 0\big) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} P\big(\nu_0 = 0 : \liminf_{n\to\infty} \tfrac{S_n}{n} \geq 0\big) \\
&= \sum_{l=0}^{\infty} qQ\big(\liminf_{n\to\infty} \tfrac{S_n}{n} \geq 0\big) = 0.
\end{aligned}$$

Denotamos por S o espaço das sequências finitas de números reais e definimos $L_j := (X_{\nu_j+1}, \cdots, X_{\nu_{j+1}})$. Para a demonstração do teorema precisamos dos seguintes resultados:

Lema C.2. *Dados $m \in \mathbb{N}$ e $B_0, B_1, \cdots, B_{m-1} \in S$ arbitrários segue que*

$$Q(L_1 \in B_0, L_2 \in B_1, \cdots, L_m \in B_{m-1}) = Q(L_0 \in B_0, L_1 \in B_1, \cdots, L_{m-1} \subset B_{m-1}).$$

Lema C.3.

$$\int \nu_1 dQ < \infty.$$

demonstracao do teorema C.1. Suponhamos $\Omega = \{S_n \to \infty\}$, pois, se $0 < P(S_n \to \infty) < 1$, podemos substituir P por $P(\cdot|S_n \to \infty)$ e se $P(S_n \to \infty) = 0$, não há o que demonstrar. Definimos para todo $j \in \mathbb{N}$, $f(L_j) := \nu_{j+1} - \nu_j$ e $g(L_j) := S_{\nu_{j+1}} - S_{\nu_j} > 0$. Do Lema C.2 segue que $(f(L_j))_{j\geq 0}$ e $(g(L_j))_{j\geq 0}$ são estacionárias. Então, de acordo com o Teorema Ergódico de Birkhoff temos que

- $\displaystyle \lim_{k\to\infty} \frac{\nu_k}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} (\nu_{j+1} - \nu_j) = E_Q[f(L_0)|\mathfrak{I}], \quad Q\text{-q.c.}$
- $\displaystyle \lim_{k\to\infty} \frac{S_{\nu_k}}{k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \sum_{j=0}^{k-1} (S_{\nu_{j+1}} - S_{\nu_j}) = E_Q[g(L_0)|\mathfrak{I}], \quad Q\text{-q.c.}$

Pelo Lema C.3,

$$\int E_Q[f(L_0)|\mathfrak{I}] dQ = \int f(L_0) dQ = \int \nu_0 dQ < \infty,$$

implicando que $E_Q[f(L_0)|\mathfrak{I}] < \infty$, Q-q.c. Como $g(L_0) > 0$, então $E_Q[g(L_0)|\mathfrak{I}] > 0$, Q-q.c. [1] Portanto, como $S_n \le S_{\nu_k}$ para $\nu_k \ge n \ge \nu_{k+1}$, segue que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{S_n}{n} \ge \lim_{k\to\infty} \frac{S_{\nu_k}}{\nu_{k+1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{S_{\nu_k}}{k}\frac{k}{\nu_{k+1}} = \frac{E_Q[g(L_0)|\mathfrak{I}]}{E_Q[f(L_0)|\mathfrak{I}]} > 0, \quad Q\text{-q.c.}$$

□

Para a demonstração dos Lemas C.2 e C.3, precisamos estender a sequência $(X_i)_{i\ge1}$ para todo $i \in \mathbb{Z}$, de forma que $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ seja estacionária. Fixe $l \in \mathbb{N}$. No conjunto $\{\nu_0 = 0\} = \big\{\inf\limits_{n\ge1} S_n > 0\big\}$, ν_1 é o maior índice no qual $\inf\limits_{n\ge1} S_n$ é atingido, o que justifica a igualdade

$$\{\nu_0 = 0 : \nu_1 = l\} = \big\{S_l > 0 : \inf_{n>l} S_n - S_l > 0 : \inf_{n>j} S_n - S_j \le 0, \quad \forall\, j = 1, \cdots, l-1\big\}.$$

Como $S_n - S_j = (S_n - S_l) + (S_l - S_j)$ segue que

$$\begin{aligned}\{\nu_0 = 0 : \nu_1 = l\} &= \big\{\inf_{n>l} S_n - S_l > 0 : S_l > 0 : S_l \le S_j, \quad \forall\, j = 1, \cdots, l-1\big\}\\ &= \big\{\inf_{n>l} S_n - S_l > 0 : \sum_{i=1}^{l} X_i > 0 : \sum_{i=j+1}^{l} X_i \le 0, \quad \forall\, j = 1, \cdots, l-1\big\}.\end{aligned}$$

Sejam $Y_0 := S_{\nu_0}$, $Y_i := X_{-i}$ para todo $i \ge 1$ e $S_n^{Y,\nu_0} := \sum_{i=0}^{n} Y_i$. Definimos

$$\nu^* = \min\big\{m \ge 1 : S_{m-1}^{Y,\nu_0} > 0\big\}.$$

Se $1 \le k \le l$, segue da estacionaridade de $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$ que

$$\begin{aligned}&P(\nu_0 = 0 : \nu_1 = l) =\\ &P\big(\inf_{n>l} S_n - S_l > 0 : \sum_{i=1}^{l} X_i > 0 : \sum_{i=j+1}^{l} X_i \le 0,\ \forall\, j = 1, \cdots, l-1\big) =\\ &P\big(\inf_{n>l-k} S_n - S_{l-k} > 0 : \sum_{i=1-k}^{l-k} X_i > 0 : \sum_{i=j-k+1}^{l-k} X_i \le 0,\ \forall\, j = 1, \cdots, l-1\big) =\\ &P\big(\inf_{n>l-k} S_n - S_{l-k} > 0 : S_{l-k} \le S_j,\ \forall\, j = 1, \cdots, (l-k)-1 :\\ &\qquad S_{l-k} + \textstyle\sum_{i=1-j}^{-1} X_i \le 0,\ \forall\, j = 1, \cdots, k-1\big) =\\ &P\big(\nu_0 = l-k : S_{k-1}^{Y,\nu_0} > 0 : S_{j-1}^{Y,\nu_0} \le 0,\ \forall\, j = 1, \cdots, k-1\big) =\\ &P(\nu_0 = l-k : \nu^* = k).\end{aligned}$$

Observe que para conseguirmos a igualdade acima, foi necessária uma translação em que os índices de todos os $X_i's$, passaram de i para $i-k$. A demonstração dos Lemas C.2 e C.3, segue então dessa igualdade.

DEMONSTRACAO DO LEMA C.2. Fixados $m \in \mathbb{N}$ e $B_0, B_1, \cdots, B_{m-1} \subset S$, condicionado a $\{\nu_1 = l\}$, o evento $\{L_1 \in B_0, \cdots, L_m \in B_{m-1}\}$, pode ser reescrito como

[1] Caso contrário, existe $A \in \mathfrak{I}$ com $Q(A) > 0$ tal que $E_Q[g(L_0)|\mathfrak{I}] \equiv 0$ em A. Logo, $Z := g(L_0)1_A \ge 0$ satisfaz

$$E_Q(Z) = E_Q(g(L_0)1_A) = \int_A E_Q[g(L_0)|\mathfrak{I}]dQ = 0.$$

Então $Z = 0$ Q-q.c., o que é um absurdo, já que $Z > 0$ em A e $Q(A) > 0$.

$\{\{X_r\}_{r\geq l} \in C\}$ para algum $C \subset \mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\cdots$ que não depende de l. De forma análoga, $\{L_0 \in B_0, \cdots, L_{m-1} \in B_{m-1}\}$ condiconado a $\{\nu_0 = 0\}$, pode ser reescrito como $\{\{X_r\}_{r\geq 1} \in C\}$. Usando novamente a estacionaridade de $(X_i)_{i\in\mathbb{Z}}$, segue então

$$\begin{aligned}
Q(L_1 \in B_0, \cdots, L_m \in B_{m-1}) &= \frac{1}{q}P(\nu_0 = 0 : L_1 \in B_0, \cdots, L_m \in B_{m-1}) \\
&= \frac{1}{q}\sum_{l=1}^{\infty} P(\nu_0 = 0 : \nu_1 = l : \{X_r\}_{r\geq l} \in C) \\
&= \frac{1}{q}\sum_{l=1}^{\infty} P(\nu_0 = 0 : \nu^* = l : \{X_r\}_{r\geq 1} \in C) \\
&= Q(\nu^* < \infty : L_0 \in B_0, \cdots, L_{m-1} \in B_{m-1}).
\end{aligned}$$

Mas $S_n^{Y,0}$ tem a mesma distribuição que S_n, implicando que $S_n^{Y,0}$ tende a infinito em probabilidade e $\nu* < \infty$, P-q.c., o que prova a afirmação. $\square$

DEMONSTRACAO DO LEMA C.3. Calculando $\int \nu_1 dQ$ temos que

$$\begin{aligned}
\int \nu_1 dQ &= \sum_{l=1}^{\infty} lQ(\nu_1 = l) = \frac{1}{q}\sum_{l=1}^{\infty} lP(\nu_0 = 0; \nu_1 = l) \\
&= \frac{1}{q}\sum_{l=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{l} P(\nu_0 = l-k; \nu^* = k) \\
&= \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{l=0}^{\infty} P(\nu_0 = l; \nu^* = k) \\
&= \frac{1}{q}\sum_{k=1}^{\infty} P(\nu_0 < \infty; \nu^* = k) = \frac{1}{q}P(\nu_0 < \infty; \nu^* < \infty).
\end{aligned}$$

E como $P(\nu_0 < \infty; \nu^* < \infty) = 1$, segue que $\int \nu_1 dQ = \frac{1}{q}$. $\square$

Referências Bibliográficas

[CGZ00] Francis Comets, Nina Gantert, and Ofer Zeitouni, *Quenched, annealed and functional large deviations for one-dimensional random walk in random environment*, Probab. Theory Related Fields **118** (2000), no. 1, 65–114.

[dH00] Frank den Hollander, *Large deviations*, Fields Institute Monographs, vol. 14, American Mathematical Society, Providence, RI, 2000.

[DZ98] Amir Dembo and Ofer Zeitouni, *Large deviations techniques and applications*, second ed., Applications of Mathematics (New York), vol. 38, Springer-Verlag, New York, 1998.

[Fel71] William Feller, *An introduction to probability theory and its applications. Vol. II.*, Second edition, John Wiley & Sons Inc., New York, 1971.

[FO88] Hans Föllmer and Steven Orey, *Large deviations for the empirical field of a Gibbs measure*, Ann. Probab. **16** (1988), no. 3, 961–977.

[GdH94] Andreas Greven and Frank den Hollander, *Large deviations for a random walk in random environment*, Ann. Probab. **22** (1994), no. 3, 1381–1428.

[Kes75] Harry Kesten, *Sums of stationary sequences cannot grow slower than linearly*, Proc. Amer. Math. Soc. **49** (1975), 205–211.

[OV05] Enzo Olivieri and Maria Eulália Vares, *Large deviations and metastability*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications, vol. 100, Cambridge University Press, Cambridge, 2005.

[Pfi02] Charles-Edouard Pfister, *Thermodynamical aspects of classical lattice systems*, In and out of equilibrium (Mambucaba, 2000), Progr. Probab., vol. 51, Birkhäuser Boston, Boston, MA, 2002, pp. 393–472.

[Shi96] A. N. Shiryaev, *Probability*, second ed., Graduate Texts in Mathematics, vol. 95, Springer-Verlag, New York, 1996, Translated from the first (1980) Russian edition by R. P. Boas.

[Sio58] Maurice Sion, *On general minimax theorems*, Pacific J. Math. **8** (1958), 171–176.

[Sol75] Fred Solomon, *Random walks in a random environment*, Ann. Probability **3** (1975), 1–31.

[Var03] S. R. S. Varadhan, *Large deviations for random walks in a random environment*, Comm. Pure Appl. Math. **56** (2003), no. 8, 1222–1245, Dedicated to the memory of Jürgen K. Moser.

[Zei02] Ofer Zeitouni, *Random walks in random environments*, Proceedings of the International Congress of Mathematicians, Vol. III (Beijing, 2002) (Beijing), Higher Ed. Press, 2002, pp. 117–127.