

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**  
**DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA**

# **Percolação Auto-Destrutiva**

**por**

**Elisa Fonseca Sena e Silva**

**Orientador: Bernardo Nunes Borges de Lima**

**Belo Horizonte-MG**

**2010**

**ELISA FONSECA SENA E SILVA <sup>1</sup>**

## **Percolação Auto-Destrutiva**

Dissertação de mestrado, feita sob orientação de Bernardo Nunes Borges de Lima, apresentada como requisito da obtenção do título de Mestre pelo Departamento de Matemática, Universidade Federal de Minas Gerais.

**Belo Horizonte-MG  
2010**

---

<sup>1</sup> Bolsista do CNPq - Brasil

"A persistência é o caminho do êxito."

Charles Chaplin

# Agradecimentos

Aos meus pais, por sempre me incentivarem a estudar. À minha irmã Ana Paula, por estar sempre a meu lado.

Ao meu orientador Bernardo Nunes Borges de Lima, por ter guiado meu estudo durante todos esses anos.

Aos professores Gastão de Almeida Braga, Adrian Pablo Luna e Remy de Paiva Sanchis pela participação na banca e pelas sugestões.

Aos meus companheiros do mestrado, em especial aos meus amigos Bárbara e Roney, pelo apoio e pela companhia nas horas de estudo.

Às minhas amigas Cândida, Priscila, Eliane e Letícia, com as quais sempre pude contar nos momentos de dificuldade e, principalmente, de alegria.

## Resumo

O modelo de percolação auto-destrutiva, introduzido por van den Berg e Brower, é definido como segue: considere o modelo de percolação ordinária com parâmetro  $p > p_c$ . Remova o aglomerado infinito e dê a cada sítio (ou, para percolação de elos, a cada elo) que está vago uma chance extra  $\delta$  de se tornar ocupado. Seja  $\delta_c(p)$  o valor mínimo de  $\delta$  necessário para se reintroduzir um aglomerado infinito.

O principal objetivo dessa dissertação é estudar o valor de  $\delta_c(p)$  quando  $p > p_c$  é próximo do ponto crítico para grafos bidimensionais, como a rede quadrada e a árvore binária, dentre outras. Para tanto, vamos estudar os artigos "*Self-destructive percolation*" escrito por van den Berg e Brower, e "*Linear lower bounds for  $\delta_c(p)$  for a class of 2D self-destructive percolation models*" escrito por van den Berg e de Lima.

# Abstract

The self-destructive percolation model, introduced by van den Berg and Brower, is defined as follows: consider the ordinary percolation model parameter  $p > p_c$ . Remove the infinite occupied cluster and give each vertex (or, for bond percolation, each edge) that is vacant an extra chance  $\delta$  to become occupied. Let  $\delta_c(p)$  be the minimal value of  $\delta$  needed to reintroduce an infinite occupied cluster.

The main goal of this dissertation is to study the value of  $\delta_c(p)$  when  $p > p_c$  is near the critical point for bidimensional graphs, like the square lattice and the binary tree, among others. We will study the articles "*Self-destructive percolation*" written by van den Berg and Brower, and "*Linear lower bounds for  $\delta_c(p)$  for a class of 2D self-destructive percolation models*" written by van den Berg and de Lima.

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>vii</b>
<b>1 Percolação Auto-Destrutiva</b>	<b>1</b>
1.1 Percolação: definições e resultados básicos	1
1.2 Percolação auto-destrutiva: definindo o modelo	6
<b>2 Percolação Auto-Destrutiva em Grafos Bidimensionais</b>	<b>14</b>
2.1 Percolação auto-destrutiva na rede quadrada	14
2.2 Outras redes bidimensionais	18
2.3 A Conjectura de van den Berg	23
<b>3 Percolação Auto-Destrutiva na Árvore Binária</b>	<b>31</b>
<b>A - Propriedades da Associação</b>	<b>38</b>
<b>B - Existência de Percolação</b>	<b>40</b>
<b>Referências</b>	<b>43</b>

# Introdução

Historicamente, o modelo de percolação surgiu do estudo do fenômeno do transporte de um fluido através de um meio poroso, como, por exemplo, a água em um filtro de areia. Formulado no final da década de 50 por Broadbent e Hammersley ([4]), tal modelo considera o meio poroso como constituído por poros e canais microscópicos por onde passa o fluido. Se o número de canais for suficientemente grande então eles estarão interligados e o meio se tornará permeável à passagem do líquido. Nesse caso dizemos que houve a *percolação* do fluido.

Os canais e poros que constituem o meio podem estar abertos ou fechados à passagem do fluido dependendo de diversas características que poderiam ser resumidas em um só parâmetro. Para isso, vamos descrever probabilisticamente a distribuição de poros (ou canais) abertos e fechados: cada poro (ou canal), independentemente dos demais, estará aberto com probabilidade  $p$  - o parâmetro do modelo - e fechado com probabilidade complementar. A questão básica é a ocorrência de percolação, ou seja, queremos saber se existe uma quantidade infinita de poros abertos adjacentes (chamado *caminho aberto* infinito) que permitam a passagem do fluido através do meio poroso. No primeiro capítulo deste trabalho introduziremos esse modelo de maneira mais formal, bem como alguns resultados que serão usados ao longo do texto. Dentre esses resultados está a existência de um valor crítico do parâmetro  $p$ , denominado *ponto crítico* e denotado por  $p_c$ , tal que se  $p > p_c$  a probabilidade de percolar é positiva e se  $p < p_c$  a probabilidade de percolar é nula.

O principal objetivo deste trabalho é estudar o modelo de *percolação auto-destrutiva*, introduzido por van den Berg e Brower em [1] e [5], descrito a seguir: seja  $\Gamma$  um subconjunto de poros do meio em questão. Primeiro, vamos declarar cada poro como aberto com probabilidade  $p$ , e fechado com probabilidade  $1 - p$ , independente dos outros poros. Então, no próximo passo, destruímos todos os poros que estão conectados a  $\Gamma$  através de um caminho aberto, ou



seja, cada poro que pertence a um caminho aberto até  $\Gamma$  se torna fechado. Finalmente, no último passo, cada poro que está fechado ao final da etapa anterior ganha uma chance extra de se tornar aberto com probabilidade  $\delta$ . Ainda no primeiro capítulo definiremos tal modelo de maneira mais formal e demonstraremos alguns resultados técnicos que serão utilizados posteriormente.

Nos capítulos seguintes iremos abordar a principal questão da percolação auto-destrutiva: depois da catástrofe, qual é o valor de  $\delta$  necessário para haver percolação, ou seja, para existir um caminho aberto infinito? Para encontrar essa resposta vamos estudar o comportamento da função  $\theta(p, \delta)$  (probabilidade de existir percolação ao final de todo o processo) para diversos valores de  $p$  e  $\delta$ . No segundo capítulo vamos mostrar que, ao representarmos graficamente o meio por  $\mathbb{Z}^2$ , teremos que se  $\delta \leq \frac{p-p_c}{p}$  então  $\theta(p, \delta) = 0$ , ou seja, não há percolação. Veremos também alguns resultados similares para outras possíveis representações do meio, dedicando o Capítulo 3 exclusivamente para a árvore binária (representação gráfica em que existe um único caminho ligando quaisquer dois de seus poros).

Considerando o meio representado por  $\mathbb{Z}^2$ , seria razoável pensar que basta um processo com  $\delta$  pequeno para que volte a existir percolação. No entanto, na última seção do Capítulo 2 estudaremos as razões que levaram van den Berg e Brower a conjecturar em [1] e [5] que isso não seja verdade.

# 1 Percolação Auto-Destrutiva

## 1.1 Percolação: definições e resultados básicos

Suponha que uma grande pedra porosa seja imersa num balde de água. Qual é a probabilidade de seu centro se molhar? Ao formular um modelo para tal situação, Broadbent e Hammersley ([4]) criaram o modelo de percolação. A pedra porosa é considerada como um meio constituído de poros e canais microscópicos por onde passa o líquido. Estes podem estar abertos ou fechados à passagem do fluido dependendo de diversas características que poderiam ser resumidas em um só parâmetro. Para isso, vamos descrever probabilisticamente a distribuição de poros (ou canais) abertos e fechados: cada poro (ou canal), independentemente dos demais, estará aberto com probabilidade  $p$  - o parâmetro do modelo - e fechado com probabilidade complementar. Iremos representar graficamente o meio através de um *grafo*.

**Definição 1.1.** Um *grafo*  $G$  é um par  $(V,E)$ , onde  $V$  é um conjunto enumerável de pontos chamados *vértices* (ou *sítios*) e  $E$  é um conjunto de pares não-ordenados de vértices chamados *elos*. (veja exemplos nas figuras abaixo.)

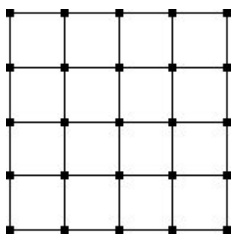


Figura 1: Rede Quadrada

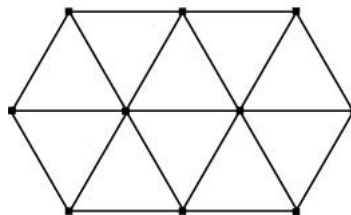


Figura 2: Rede Triangular

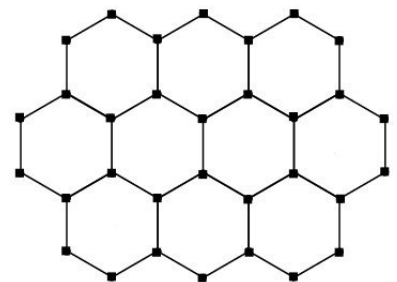


Figura 3: Rede Hexagonal

Dessa forma, os vértices representam os poros e os elos, os canais. O modelo que estuda o estado (aberto ou fechado) dos poros é chamado *percolação independente de sítios* e aquele que trata do estado dos canais é dito *percolação independente de elos*. A questão básica é a existência de um caminho infinito de sítios (ou elos) abertos atravessando o meio. À resposta afirmativa damos o nome de *percolação*. A seguir, introduziremos o modelo em detalhe.

Um conjunto de vértices distintos de  $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\} \subset V$  será dito um *caminho* se estes formarem uma seqüência de sítios adjacentes. Se  $v_1 = v_n$ , dizemos que os vértices formam um *circuito*. Se um grafo  $G$  tiver a propriedade de existir um único caminho ligando quaisquer dois de seus vértices dizemos que o grafo  $G$  é uma *árvore* (veja figura abaixo). O *grau* de um

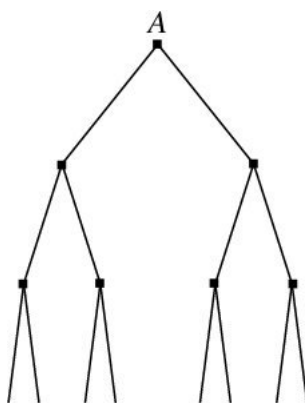


Figura 4: Árvore Binária

vértice  $v$  em um grafo  $G$  é definido como o número de vértices adjacentes a  $v$ . Na rede triangular representada acima, por exemplo, temos que todo vértice tem grau 6, enquanto na árvore binária o vértice  $A$  (veja fig. 4) tem grau 2 e os demais tem grau 3. Um grafo é dito *localmente finito* se cada vértice possui grau finito. Note que todos os exemplos de grafos mostrados neste trabalho são localmente finitos. Definimos a *distância* entre dois vértices de um grafo como o número mínimo de elos necessários para formar um caminho que os conecta. Dados dois vértices adjacentes  $x, y \in V$  denotamos o elo que os une por  $\langle x, y \rangle$ .

Seja  $p$  tal que  $0 \leq p \leq 1$ . Cada vértice  $v$  de  $V$  está *aberto* com probabilidade  $p$  e *fechado* com probabilidade  $1 - p$ , independente dos outros vértices. Denotaremos a distribuição assim definida por  $\mathcal{P}_p$ . O espaço amostral do modelo será dado por  $\Omega = \{0, 1\}^V$ , cujos pontos, as *configurações*, são representados por  $\omega = (\omega(v) : v \in V)$ . O valor  $\omega(v) = 0$  corresponde a  $v$  estar fechado, enquanto  $\omega(v) = 1$  corresponde a  $v$  estar aberto. A  $\sigma$ -álgebra é a usual, denotada por  $\mathcal{E}$ , gerada pelos eventos cilíndricos, a saber, aqueles que dependem apenas de elos em subconjuntos finitos de  $V$ .

Considerando uma configuração, um caminho será dito *aberto* se todos os seus vértices estiverem abertos, ou seja, se  $\omega(v_i) = 1, \forall i = 1, 2, \dots, n$ . Podemos, de forma análoga, definir *circuito aberto*. Diremos que dois sítios da rede,  $x$  e  $y$ , estão *conectados* (notação:  $x \leftrightarrow y$ ) se existir um caminho aberto  $\{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ , com  $x = v_1$  e  $y = v_n$ .

Dada uma configuração  $\omega \in \Omega$ , considere todos os caminhos abertos que partem de um dado vértice  $x$  do grafo  $G$ . Ao conjunto de vértices desses caminhos damos o nome de *aglomerado* de  $x$ , representado por  $C_x$ .

$$C_x(\omega) \equiv \{y \in V; x \leftrightarrow y \text{ em } \omega\}$$

Um vértice do grafo será chamado de *origem* e seu aglomerado será denotado por  $C$ , objeto básico de nosso estudo. Estaremos interessados inicialmente em  $|C|$ , o volume (ou cardinalidade) do aglomerado da origem, mais precisamente em sua distribuição. Observe que em grafos transitivos (aqueles em que dado qualquer par de vértices  $x$  e  $y$  existe um automorfismo de grafos que leva  $x$  a  $y$ ) a distribuição de  $|C|$  é a mesma de  $|C_x|$  para todo sítio  $x$ . Especificamente, queremos saber se aglomerados infinitos podem ocorrer com probabilidade positiva.

Definimos como *probabilidade de percolação* a probabilidade de um dado sítio da rede pertencer a um aglomerado de tamanho infinito. Vamos trabalhar com grafos transitivos podemos tomar tal sítio como sendo a origem. Desse modo, definimos:

$$\begin{aligned} \theta(p) &\equiv \mathcal{P}_p(\omega \in \Omega; |C| = \infty) \\ &\equiv \mathcal{P}_p(|C| = \infty). \end{aligned}$$

Essa função é objeto de extenso estudo na área de percolação e sobre a qual ainda existem várias questões em aberto. Sobre o grafo  $\mathbb{Z}^d$ , por exemplo, sabemos que em qualquer dimensão espacial  $d \geq 1$ , se  $p \approx 0$ , então  $\theta(p) = 0$ ; se  $d \geq 2$  e  $p \approx 1$ , temos  $\theta(p) \approx 1$ . O interessante é saber quando ocorre essa *transição de fase*, ou seja, quando o estado da rede muda da posse de somente aglomerados finitos para o surgimento de um aglomerado infinito. Sendo assim, é conveniente definir o *ponto crítico* (ou probabilidade crítica) como o supremo de todos os valores de  $p$  para os quais  $\theta(p) = 0$ :

$$p_c \equiv \sup\{p : \theta(p) = 0\}. \quad (1.1)$$

Chamamos de *fase subcrítica* o intervalo  $0 \leq p < p_c$  e de *fase supercrítica* ao intervalo  $1 \geq p > p_c$ . Sobre o fenômeno da transição de fase, temos o seguinte resultado:

**Teorema 1.1.** Para  $d \geq 2$ , existe um valor crítico  $p_c$  do parâmetro  $p$ , chamado ponto crítico, no intervalo aberto  $(0,1)$  tal que

$$\theta(p) = 0, \text{ se } p < p_c$$

$$\theta(p) > 0, \text{ se } p > p_c.$$

O Teorema 1.1 não informa o que acontece em  $p = p_c$ . Para o grafo  $\mathbb{Z}^d$ , sabe-se que  $\theta(p)$  é uma função contínua, exceto possivelmente em  $p = p_c$  (veja [8], seção 8.3), e que  $\theta(p_c) = 0$  em  $d = 2$  (provado por Kesten em [11]) e  $d \geq 19$  (provado por Hara-Slade em [10]). Segue abaixo um esboço do que esperaríamos que fosse o gráfico da função  $\theta(p)$ .

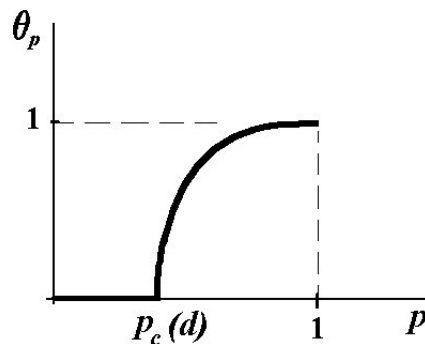


Figura 5: Esboço do possível gráfico da função  $\theta(p)$  para  $\mathbb{Z}^d$ , quando  $d = 2$  ou  $d \geq 19$ .

A possibilidade de uma descontinuidade de salto em  $p_c(d)$  ainda não foi excluída quando  $3 \leq d < 19$ .

As definições acima correspondem à descrição do modelo de percolação independente de sítios, que será o mais utilizado nesse trabalho. Embora a maior parte do que foi dito seja análogo para percolação de elos, algumas definições e resultados são diferentes neste modelo. Para maiores informações sobre esses e outros resultados de percolação consulte [8] ou [7].

A maior parte dos argumentos disponíveis para modelos de percolação pode ser adaptada para percolação tanto de elos quanto de sítios. De fato, existe uma maneira para qual todo modelo de elos pode ser reformulado como modelo de sítios; mas o inverso é falso. Dessa forma, percolação de sítios mais geral que percolação de elos. Dado um grafo  $G$ , o *grafo de cobertura*  $G_c$  é construído da seguinte forma: a cada elo de  $G$  corresponde um vértice distinto de  $G_c$ , e dois tais vértices são ditos adjacentes se, e somente se, os elos correspondentes de  $G$  compartilham um vértice. Suponha que exista um processo de percolação de elos em  $G$ . Dizemos que um vértice de  $G_c$  está aberto se, e somente se, o elo correspondente de  $G$  está aberto. Isso induz um processo de percolação de sítios em  $G_c$ . Além disso, percebe-se que

todo caminho de elos abertos em  $G$  corresponde a um caminho de vértices abertos em  $G_c$  (e vice-versa). Assim, usando (1.1), concluímos que

$$p_c^{\text{elo}}(G) = p_c^{\text{sítio}}(G_c).$$

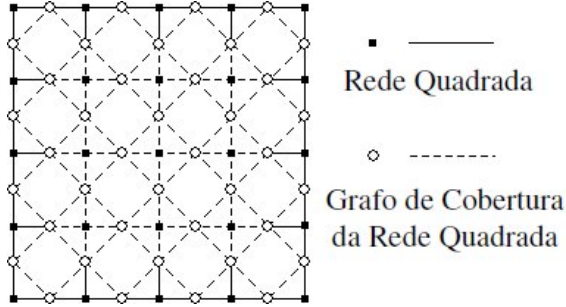


Figura 6: Construção do grafo de cobertura da rede quadrada.

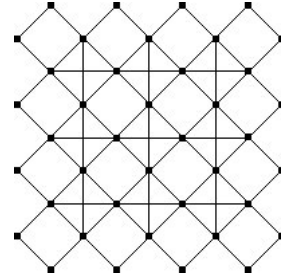


Figura 7: Grafo de cobertura da rede quadrada, conhecido como tabuleiro de xadrez.

Existe uma relação entre os pontos críticos da percolação de elos e da percolação de sítios em um dado grafo  $G$ .

**Teorema 1.2.** *Seja  $G = (V, E)$  um grafo conexo infinito com uma quantidade enumerável de elos, com origem 0, e grau máximo  $\Delta$  finito. As probabilidades críticas de  $G$  satisfazem*

$$\frac{1}{\Delta - 1} \leq p_c^{\text{elo}} \leq p_c^{\text{sítio}} \leq 1 - (1 - p_c^{\text{elo}})^\Delta.$$

Uma consequência desse teorema é que  $p_c^{\text{elo}}(G) < 1$  se, e somente se,  $p_c^{\text{sítio}}(G) < 1$ . A demonstração desse resultado pode ser encontrada na Seção 1.6 de [8].

Na fase supercrítica temos diversos resultados interessantes. As demonstrações dos seguintes teoremas são feitas para percolação de elos, mas com poucas modificações pode-se fazê-las para percolação de sítios.

**Teorema 1.3** (Unicidade do aglomerado infinito). *Em  $\mathbb{Z}^d$ , se  $p$  é tal que  $\theta(p) > 0$ , então*

$$\mathcal{P}_p(\text{existir um único aglomerado infinito}) = 1.$$

Na Seção 8.2 de [8] há uma demonstração do teorema acima. Os próximos resultados tratam da geometria do aglomerado infinito em  $\mathbb{Z}^2$  e para enunciá-los precisamos fazer algumas definições. Um *cruzamento esquerda-direita* de um retângulo  $B$  é um caminho aberto em  $B$  que

um vértice do lado esquerdo de  $B$  a algum vértice do lado direito de  $B$ , mas que não usa elos da fronteira do retângulo. Para inteiros positivos  $k$  e  $l$ , defina o retângulo

$$B(kl, l) = [-l, (2k - 1)l] \times [-l, l];$$

além disso,  $B(l, l) = B(l)$ . Considere

$$LR(kl, l) \equiv \{\text{existe um cruzamento esquerda-direita em } B(kl, l)\},$$

e abreviamos  $LR(l, l)$  para  $LR(l)$ .

**Teorema 1.4.** *Para o grafo  $\mathbb{Z}^2$ , se  $\theta(p) > 0$  então  $\mathcal{P}_p(LR(n)) \rightarrow 1$  quando  $n \rightarrow \infty$ .*

Seja  $A(l)$  o anel  $B(3l) \setminus B(l)$ , e seja

$$O(l) \equiv \{\text{existe um circuito aberto em } A(l) \text{ contendo a origem da rede em seu interior}\}.$$

Uma contribuição duradoura de Russo, Seymour e Welsh é a demonstração de que, se existe uma probabilidade significativa do cruzamento aberto na caixa  $B(l)$ , há uma probabilidade significativa de existir um circuito no anel  $A(l)$ .

**Teorema 1.5 (RSW).** *Para percolação de elos em  $\mathbb{Z}^2$ , se  $p > p_c$  e  $\mathcal{P}_p(LR(l)) = \tau > 0$  então*

$$\mathcal{P}_p(O(l)) \geq \{\tau(1 - \sqrt{1 - \tau})^4\}^{12}.$$

Demonstrações desses resultados podem ser encontradas nas seções 8.8 e 11.7 de [8].

## 1.2 Percolação auto-destrutiva: definindo o modelo

Sejam  $G = (V, E)$  um grafo conexo, infinito, localmente finito e transitivo,  $\Gamma$  um subconjunto de  $V$  ou o símbolo  $\infty$ . Sejam  $p, \delta \in [0, 1]$ . Primeiro, vamos declarar cada vértice como ocupado (ou aberto) com probabilidade  $p$ , e vago (ou fechado) com probabilidade  $1 - p$ , independente dos outros sítios. Então, no próximo passo, destruímos todos os aglomerados que interceptam  $\Gamma$  (quando  $\Gamma = \infty$ , destrói-se o aglomerado infinito), ou seja, cada vértice que tem um caminho ocupado até  $\Gamma$  se torna vago. Finalmente, no último passo, cada vértice que está vago ao final da etapa anterior ganha uma chance extra de se tornar ocupado com probabilidade  $\delta$ . Esse modelo, chamado *percolação auto-destrutiva*, foi introduzido por van den Berg e

Brower em [1] e [5].

Seja  $\mathbb{P}_{p,\delta}^{(G,\Gamma)}$  a distribuição da configuração final desse processo (quando a escolha de  $G$  está clara, este não aparece na notação; o mesmo ocorre quando  $\Gamma = \infty$ ) e defina

$$\theta(p, \delta) \equiv \mathbb{P}_{p,\delta}^{(G,\Gamma)}(0 \leftrightarrow \infty).$$

Uma definição mais formal desse modelo é a que segue. Sejam  $X_i$ ,  $i \in V$ , variáveis aleatórias independentes, sendo  $X_i = 1$  com probabilidade  $p$  e  $X_i = 0$  com probabilidade  $1 - p$ . Defina também  $\mathcal{Y}_i$ ,  $i \in V$ , como variáveis aleatórias independentes, sendo  $\mathcal{Y}_i = 1$  com probabilidade  $\delta$  e  $\mathcal{Y}_i = 0$  com probabilidade  $1 - \delta$ . Além disso, tome a coleção  $\{\mathcal{Y}_i\}$  independente de  $\{X_i\}$ .

Seja  $X_i^*$ ,  $i \in V$ , definida por

$$X_i^* = \begin{cases} 1, & \text{se } X_i = 1 \text{ e não há caminho } \mathcal{X}\text{-ocupado de } i \text{ a } \Gamma, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (1.2)$$

em que por "caminho  $\mathcal{X}$ -ocupado" queremos dizer um caminho no qual cada vértice  $j$  tem  $X_j = 1$ .

Finalmente, definimos  $Z_i = \max\{X_i^*, \mathcal{Y}_i\}$ . Dessa forma, a sequência  $\{Z_i\}$ ,  $i \in V$ , é a configuração final e  $\mathbb{P}_{p,\delta}^{(G,\Gamma)}$  é sua distribuição. Para entender melhor seu comportamento vamos calcular explicitamente a distribuição quando  $\Gamma = \infty$ . Nesse caso, temos:

$$Z_i = \begin{cases} 0, & \text{se } X_i^* = 0 \text{ e } \mathcal{Y}_i = 0, \\ 1, & \text{se } X_i^* = 1 \text{ ou } \mathcal{Y}_i = 1. \end{cases} \quad (1.3)$$

Primeiro, temos que  $Z_i = 0$  se o sítio  $i$  está  $\mathcal{X}$ -vago e  $\mathcal{Y}$ -vago; ou se está  $\mathcal{X}$ -ocupado, mas pertence ao aglomerado infinito, e está  $\mathcal{Y}$ -vago. Observe que em ambos os casos temos  $X_i^* = 0$ . Assim, podemos calcular:

$$\mathbb{P}_{p,\delta}^{(G)}(Z_i = 0) = (1 - p)(1 - \delta) + p \cdot \theta(p)(1 - \delta) = (1 - \delta)(1 - p + p\theta(p)).$$

Temos que  $Z_i = 1$  se  $X_i^* = 1$ , ou seja, se  $i$  está  $\mathcal{X}$ -ocupado, mas não pertence ao aglomerado infinito; ou se  $\mathcal{Y}_i = 1$  e  $i$  está  $\mathcal{Y}$ -ocupado.

$$\mathbb{P}_{p,\delta}^{(G)}(Z_i = 1) = p(1 - \theta(p)) + \delta - p\delta(1 - \theta(p)).$$



Continuando o estudo de  $\mathbb{P}_{p,\delta}^{(G,\Gamma)}$ , precisaremos de mais algumas definições. Dado  $\omega \in \Omega = [0, 1]^V$ , definimos uma *ordem parcial* em  $\Omega$ , como segue:

$$\omega \leq \omega' \text{ se } \omega_i \leq \omega'_i, \quad \forall i \in V.$$

**Definição 1.2.** Dizemos que um evento  $A$  é *crecente* quando  $\omega \in A$  e  $\omega < \omega'$  implicar que  $\omega' \in A$ .

Em outras palavras, um evento  $A$  é crescente quando, ao aumentar o número de elos abertos de uma configuração, aumentam-se as chances do evento ocorrer. Se uma configuração faz com que o evento ocorra, ao acrescentarmos elos abertos à mesma, o mesmo continua ocorrendo. Um evento é *decrecente* se seu complementar for crescente. Eventos crescentes têm um papel fundamental em percolação. Um exemplo de evento crescente é  $A = \{x \leftrightarrow y\}$ : dois sítios estarem conectados por um caminho aberto. De forma análoga, dizemos que uma variável aleatória  $N$  é crescente se, dado  $\omega \leq \omega'$ , temos  $N(\omega) \leq N(\omega')$ . Um resultado importante sobre eventos e variáveis aleatórias crescentes é a *desigualdade de FKG*.

**Teorema 1.6. (Desigualdade de FKG)**

(a) Se  $X$  e  $Y$  são variáveis aleatórias crescentes tais que  $\mathbb{E}_p(X^2) < \infty$  e  $\mathbb{E}_p(Y^2) < \infty$ , então

$$\mathbb{E}_p(XY) \geq \mathbb{E}_p(X)\mathbb{E}_p(Y).$$

(b) Se  $A$  e  $B$  são eventos crescentes, então

$$\mathcal{P}_p(A \cap B) \geq \mathcal{P}_p(A)\mathcal{P}_p(B).$$

Uma demonstração desse resultado pode ser encontrada no Capítulo 2 de [8]. Desigualdades similares são válidas para variáveis aleatórias e eventos decrescentes. Por exemplo, se  $X$  e  $Y$  são ambas decrescentes então  $-X$  e  $-Y$  são crescentes, temos que

$$\mathbb{E}_p(XY) \geq \mathbb{E}_p(X)\mathbb{E}_p(Y),$$

desde que  $X$  e  $Y$  tenham segundo momento finito. Analogamente, se  $X$  é crescente e  $Y$  é decrescente, então podemos aplicar a desigualdade de FKG a  $X$  e  $-Y$  e encontrar

$$\mathbb{E}_p(XY) \leq \mathbb{E}_p(X)\mathbb{E}_p(Y). \quad (1.4)$$

Uma coleção finita de variáveis aleatórias binárias  $(v_i, 1 \leq i \leq n)$  (ou, sua medida de probabilidade correspondente, a saber  $\mu$ , em  $\{0, 1\}^n$ ) é dita ser *associada* se para todo evento crescente  $A, B \subset \{0, 1\}^n$ ,

$$\mu(A \cap B) \geq \mu(A)\mu(B). \quad (1.5)$$

Isso é equivalente a dizer que, para todas funções crescentes  $f, g$  em  $\{0, 1\}^n$ ,

$$\mathbb{E}_\mu(fg) \geq \mathbb{E}_\mu(f)\mathbb{E}_\mu(g), \quad (1.6)$$

onde  $\mathbb{E}_\mu(f) = \sum_{x \in \{0,1\}^n} \mu(x)f(x)$ . De fato, observe que se tomarmos  $f = \mathbb{I}_A$  e  $g = \mathbb{I}_B$ , em que  $\mathbb{I}$  é a função indicadora, temos que

$$\mathbb{E}_\mu = \mathbb{E}_\mu(\mathbb{I}_A \mathbb{I}_B) = \mathbb{E}_\mu(\mathbb{I}_{A \cap B}) = \mu(A \cap B).$$

No entanto, por (1.6), temos

$$\mu(A \cap B) = \mathbb{E}_\mu(fg) \geq \mathbb{E}_\mu(f)\mathbb{E}_\mu(g) = \mu(A)\mu(B),$$

e obtemos (1.5). Por outro lado, usando que função crescente é soma de função degrau podemos obter (1.6) a partir de (1.5).

**Lema 1.1.** Seja  $G = (V, E)$  um grafo finito, e sejam  $\Gamma, p, \delta$  como acima. Então  $\mathbb{P}_{p, \delta}^{(G; \Gamma)}$  é associada.

*Demonstração.* Os fatos abaixo (a) - (c) sobre variáveis aleatórias binárias serão demonstrados no apêndice A.

- (a) Uma coleção de variáveis aleatórias independente é associada.
- (b) Se uma coleção  $(v_i, 1 \leq i \leq n)$  é associada, e uma coleção  $(\sigma_i, 1 \leq i \leq m)$  é associada, e essas duas coleções são independentes, então a coleção conjunta  $(v_i, 1 \leq i \leq n; \sigma_i, 1 \leq i \leq m)$  é associada.
- (c) Se a coleção  $(v_i, 1 \leq i \leq n)$  é associada, e  $f_1, \dots, f_k$  são funções binárias não-decrescentes em  $\{0, 1\}^n$ , então a coleção

$$(f_1(v_1, \dots, v_n), \dots, f_k(v_1, \dots, v_n))$$

é associada.

Agora sejam as variáveis  $\mathcal{X}_i, \mathcal{Y}_i, \mathcal{X}_i^*$  e  $\mathcal{Z}_i$  como definidas anteriormente. Usando os fatos mencionados acima, para provar o lema, é suficiente mostrar que  $\mathcal{X}_i^*, i \in V$ , é associada. De fato, temos por (a) que  $\mathcal{X}_i$  e  $\mathcal{Y}_i$  são associadas, por (b) concluímos que, se  $\mathcal{X}_i^*$  e  $\mathcal{Y}_i$  forem associadas e independentes uma da outra,  $\{\mathcal{X}_i^*, \mathcal{Y}_i\}$  serão associadas. Por (c), ao tomarmos  $f_i = \max$ , teremos que  $\mathcal{Z} = \max\{\mathcal{X}_i^*, \mathcal{Y}_i\}$  é associada. Observe que as variáveis  $\mathcal{X}_i^*$  não são independentes entre si, mas são independentes de  $\mathcal{Y}_i$ .

Seja  $\Omega = \{0, 1\}^V$ . Para  $\omega \in \Omega$ , seja  $C = C(\Gamma, \omega)$  o aglomerado ocupado de  $\Gamma$  (isto é, conjunto de todos os vértices que possuem um caminho aberto até  $\Gamma$ ). Tomando  $W \subset V, \overline{W}$

denota o conjunto que é a união de  $W$  e de todos seus vizinhos. Se  $A \subset \Omega$  for um evento crescente, o evento  $\{A \text{ ocorre fora de } W\}$  irá denotar o conjunto de todas configurações  $\omega \in \Omega$  tais que  $\omega'$ , definida por

$$\omega'_i = \begin{cases} 0, & \text{se } i \in W, \\ \omega_i, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (1.7)$$

está em  $A$ . Em outras palavras, para saber se uma configuração  $\omega \in \Omega$  pertence a  $\{A \text{ ocorre fora de } W\}$  fecha-se todo sítio  $i \in W$  e verifica-se se o evento  $A$  ainda ocorre nessa configuração, ou seja, se  $A$  ocorre nos vértices fora de  $W$ .

Seja  $\mu_p$  o produto de medidas de Bernoulli com parâmetro  $p$  em  $\Omega$ , isto é,  $\mu_p$  é a medida correspondente à coleção de variáveis aleatórias  $(X_i, i \in V)$ . Seja  $\mu_p^*$  a medida em  $\Omega$  correspondente à coleção  $(X_i^*, i \in V)$ . Somando sobre todos subconjuntos  $W \subseteq V$ , temos que

$$\mu_p^*(A \cap B) = \sum_W \mu_p(\overline{C(\Gamma)} = W, A \cap B \text{ ocorre fora de } W),$$

pois para que a intersecção ocorra, como  $X^* = \{X_i^*\}$  fecha todos os sítios do aglomerado de  $\Gamma$ ,  $A \cap B$  tem que acontecer fora de  $W$ . O evento  $\{A \cap B \text{ ocorre fora de } W\}$  depende dos sítios de  $V \setminus W$  enquanto  $\overline{C(\Gamma)} = W$  depende dos sítios de  $W$  e assim, temos:

$$\begin{aligned} \mu_p^*(A \cap B) &= \sum_W \mu_p(\overline{C(\Gamma)} = W) \mu_p(A \cap B \text{ ocorre fora de } W) \\ &\geq \sum_W \mu_p(\overline{C(\Gamma)} = W) \mu_p(A \text{ ocorre fora de } W) \mu_p(B \text{ ocorre fora de } W). \end{aligned}$$

A desigualdade usa a propriedade de associação da medida da coleção  $X = \{X_i, i \in V\}$ . Note que, para  $W$  fixo, os eventos  $\{A \text{ ocorre fora de } W\}$  e  $\{B \text{ ocorre fora de } W\}$  são crescentes.

Agora seja  $f(W)$ , para  $W \subset V$ , notação para  $\mu_p(A \text{ ocorre fora de } W)$  e  $g(W)$  para  $\mu_p(B \text{ ocorre fora de } W)$ . Então a expressão acima é igual a:

$$\begin{aligned} \mu_p^*(A \cap B) &\geq \sum_{\omega \in \Omega} \mu_p(\omega) f(\overline{C(\Gamma, \omega)}) g(\overline{C(\Gamma, \omega)}) \\ &= \sum_W \sum_{\omega \in \Omega; \overline{C(\Gamma, \omega)} = W} \mu_p(\omega) f(W) g(W) \end{aligned}$$

Se  $W \subset W'$ , então  $f(W) \geq f(W')$ , e analogamente para  $g$ . De fato, para verificar se  $A$  ocorre fora de  $W'$  fechamos uma quantidade maior de sítios do que seria necessário para verificar se  $A$  ocorre fora de  $W$ . Logo a seguinte desigualdade vale porque  $f(\overline{C(\Gamma, \omega)})$  e  $g(\overline{C(\Gamma, \omega)})$  são ambos decrescentes em  $\omega$  e então podemos aplicar a propriedade da associação:

$$\mu_p^*(A \cap B) \geq \sum_{\omega \in \Omega} \mu_p(\omega) f(\overline{C(\Gamma, \omega)}) \sum_{\omega \in \Omega} \mu_p(\omega) g(\overline{C(\Gamma, \omega)})$$

Além disso, fazendo a mesma argumentação, mas no sentido inverso, temos:

$$\begin{aligned}
\sum_{\omega \in \Omega} \mu_p(\omega) f(\overline{C(\Gamma, \omega)}) &= \sum_W \sum_{\omega \in \Omega; \overline{C(\Gamma, \omega)} = W} \mu_p(\omega) f(W) \\
&= \sum_W \mu_p(\overline{C(\Gamma)} = W) f(W) \\
&= \sum_W \mu_p(\overline{C(\Gamma)} = W) \mu_p(A \text{ ocorre fora de } W) \\
&= \sum_W \mu_p(\overline{C(\Gamma)} = W; A \text{ ocorre fora de } W) = \mu_p^*(A).
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\mu_p^*(A \cap B) \geq \mu_p^*(A) \mu_p^*(B),$$

e  $\mathcal{X}_i^*$  é uma coleção de variáveis aleatórias associada, provando o lema.  $\square$

Dando continuidade ao nosso estudo de  $\mathbb{P}_{p, \delta}^{(G; \Gamma)}$ , vamos demonstrar alguns resultados sobre monotonicidade. Primeiro, vemos que  $\mathbb{P}_{p, \delta}^{(G; \Gamma)}$  é *estocasticamente crescente*: para  $A$  fixo, se  $\delta < \delta'$ , temos que  $\mathbb{P}_{p, \delta}(A) \leq \mathbb{P}_{p, \delta'}(A)$ . De fato, se  $\delta < \delta'$ , então ao final do  $\delta$ -processo teremos mais sítios abertos do que no final do  $\delta'$ -processo, o que contribui para a ocorrência de  $A$ .

Não há monotonicidade estrita em  $p$ . Contudo, vamos mostrar que há alguma forma de monotonicidade, resultado que será importante quando, no Capítulo 3, estivermos estudando percolação auto-destrutiva em árvores binárias.

**Lema 1.2.** Seja  $0 \leq p < q \leq 1$ . Para  $q$  fixo, a família de medidas de probabilidade

$$\left\{ \mathbb{P}_{p, \frac{q-p}{1-p}}^{(G; \Gamma)}, 0 < p < q \right\}$$

é estocasticamente decrescente em  $p$ . Isto é, se  $0 < p < p' < q$ , então  $\mathbb{P}_{p, \frac{q-p}{1-p}}^{(G; \Gamma)}$  domina  $\mathbb{P}_{p', \frac{q-p'}{1-p'}}^{(G; \Gamma)}$ .

*Demonstração.* Considere a seguinte evolução temporal. No tempo 0 cada sítio de  $G$  está vago. Vértices tornam-se, independentemente uns dos outros, ocupados com taxa 1. Se isso simplesmente continuasse, então, para cada  $t \geq 0$ , a distribuição da configuração no tempo  $t$  seria  $\mathcal{P}_{1-e^{-t}}$ .

Agora suponha que em um tempo determinístico  $T$  uma catástrofe aconteça: todos os sítios que têm, nesse tempo, um caminho ocupado até  $\Gamma$ , se tornam instantaneamente vagos. A partir daí, o processo se comporta normalmente de novo, isto é, vértices vagos se tornam ocupados com taxa 1. Segue do argumento de acoplamento feito a seguir, que, para  $t > 0$  fixo, a configuração no tempo  $t$  é estocasticamente decrescente no tempo  $T$  ( $T > t$ ) no qual a catástrofe

acontece.

Sejam  $U_i^{(k)}$ ,  $i \in V$ ,  $k \in \{1, 2\}$  variáveis aleatórias independentes com distribuição exponencial com esperança 1.  $U_i^{(1)}$  denota o tempo no qual  $i$  se torna ocupado pela primeira vez. Se um sítio se torna vago pela catástrofe no tempo  $T$ , então se torna ocupado de novo no tempo  $T + U_i^{(2)}$ . Mais formalmente, se deixarmos  $\eta_i(t)$  denotar o estado [ocupado (=1) ou vago (=0)] de  $i$  no tempo  $t$ , então temos  $\forall t > T$ :  $\eta_i(t) = 0 \Leftrightarrow U_i^{(1)} > t$ ; ou  $U_i^{(2)} > t - T$  e existe um caminho  $\pi$  de  $i$  a  $\Gamma$  com  $U_j^{(1)} \leq T$  para todos os sítios  $j$  de  $\pi$ . Como essa condição vale para  $T < t$ , então a mesma vale para todo  $T' \in (T, t)$ .

Pela definição acima, temos que a distribuição de  $(\eta_i(t), i \in V(G))$  é  $\mathbb{P}_{1-e^{-t}, 1-e^{-(t-T)}}$ . Isso, juntamente com a observação de monotonicidade de  $T$ , nos dá que, para  $t$  fixo, a família de distribuições

$$\mathbb{P}_{1-e^{-t}, 1-e^{-(t-T)}}, \quad 0 \leq T < t$$

é estocasticamente decrescente em  $T$ . O lema segue tomando  $t$  e  $T$  tais que  $p = 1 - e^{-T}$  e  $q = 1 - e^{-t}$ , e então  $(q - p)/(1 - p) = 1 - e^{-(t-T)}$ . □

Uma conseqüência imediata desse lema e da monotonicidade de  $\mathcal{P}_{p, \delta}^{(G; \Gamma)}$  em  $\delta$  é a seguinte:

**Corolário 1.1.** Se  $p_2 \geq p_1$  e  $p_2 + (1 - p_2)\delta_2 \leq p_1 + (1 - p_1)\delta_1$ , então

$$\mathbb{P}_{p_1, \delta_1}^{(G; \Gamma)} \text{ domina } \mathbb{P}_{p_2, \delta_2}^{(G; \Gamma)}.$$

*Demonstração.* Tome  $q \in [0, 1]$ ,  $q > p_1$  tal que possamos escrever

$$\delta_1 = \frac{q - p_1}{1 - p_1}.$$

De fato, basta tomar  $q = p_1 + (1 - p_1)\delta_1$ . Dessa forma, temos

$$\mathbb{P}_{p_1, \delta_1}^{(G; \Gamma)} = \mathbb{P}_{p_1, \frac{q - p_1}{1 - p_1}}^{(G; \Gamma)}.$$

Aplicando o lema anterior, temos

$$\mathbb{P}_{p_1, \frac{q - p_1}{1 - p_1}}^{(G; \Gamma)} \text{ domina } \mathbb{P}_{p_2, \frac{q - p_2}{1 - p_2}}^{(G; \Gamma)}.$$

Pela hipótese acima,

$$p_2 + (1 - p_2)\delta_2 \leq p_1 + (1 - p_1)\delta_1 = q,$$

ou seja,

$$\frac{q - p_2}{1 - p_2} \geq \delta_2.$$

Com isso, usando a monotonicidade de  $\mathbb{P}_{p,\delta}^{(G;\Gamma)}$  em  $\delta$ , concluímos que  $\mathbb{P}_{p_2, \frac{q-p_2}{1-p_2}}^{(G;\Gamma)}$  domina  $\mathbb{P}_{p_1, \delta_1}^{(G;\Gamma)}$ , e o resultado está provado. □

Não será necessário usar a notação geral  $\mathbb{P}_{p,\delta}^{(G;\Gamma)}$  durante todo o texto. A partir do próximo capítulo, salvo menção em contrário, vamos assumir que  $\Gamma = \infty$ . Dessa forma, a catástrofe que destrói o aglomerado de  $\Gamma$  irá tornar vago todo sítio que pertence a algum aglomerado infinito de  $G$ .

## 2 Percolação Auto-Destrutiva em Grafos Bidimensionais

Considerando o processo de percolação auto-destrutiva é natural pensar que se  $p > p_c$  e destruímos o aglomerado infinito vamos precisar de um  $\delta > 0$  mínimo (que depende de  $p$ ) para reintroduzir o aglomerado infinito. Na primeira seção deste capítulo vamos mostrar que tal intuição é verdadeira para percolação de sítios (ref. [1]) e elos (ref. [2]) na rede quadrada. Em seguida vamos estender esse resultado para um número maior de redes bidimensionais, fato demonstrado por van den Berg e de Lima em [2].

Continuando a explorar as características do modelo, como na percolação ordinária temos  $\theta(p) \searrow \theta(p_c) = 0$  quando  $p \searrow p_c$ , poderíamos concluir que o mesmo vale para percolação auto-destrutiva, ou seja, que  $\lim_{p \searrow p_c} \theta(p, \delta) = \theta(p_c, \delta)$ . No artigo "*Self-destructive Percolation*" de van den Berg e Brower (ref. [1]) conjectura-se que tal conclusão é falsa e estudaremos esse assunto na última seção deste capítulo.

### 2.1 Percolação auto-destrutiva na rede quadrada

Na percolação auto-destrutiva a principal questão é, depois da catástrofe, encontrar qual valor de  $\delta$  é necessário para se reintroduzir um aglomerado infinito. Para isso, vamos começar estudando o comportamento da função  $\theta(p, \delta)$  para diversos valores de  $p$  e  $\delta$ .

No caso em que  $p \leq p_c$ , como não há percolação (pois  $\theta(p) = 0$ ), não existe aglomerado infinito, e, conseqüentemente, não se destrói nenhum vértice. Então, na configuração final,

após o processo de percolação com parâmetro  $\delta$ , os sítios estão ocupados com probabilidade  $p + (1 - p)\delta$ . Formalmente, se  $p \leq p_c$ , temos:

$$\mathbb{P}_{p,\delta} = \mathbb{P}_{p+(1-p)\delta}.$$

Em particular,

$$\theta(p_c, \delta) = \theta(p_c + (1 - p_c)\delta) > 0$$

para cada  $\delta > 0$ . Logo, se  $p = p_c$ , qualquer  $\delta > 0$  é suficiente para que exista aglomerado infinito. Por outro lado, temos que se  $\delta > p_c$ , então  $\theta(p, \delta) > 0$  para todo  $p$ . De fato,

$$\mathbb{P}_{p,\delta}(Z_i = 1) = \delta + (1 - \delta)(p - p\theta(p)) > p_c + (1 - p_c)(p - p\theta(p)) > p_c,$$

o que implica que há percolação.

Lembre-se que, como observamos na última seção, na percolação auto-destrutiva há monotonicidade em  $\delta$ , ou seja, se  $\delta' > \delta$  podemos concluir que  $\theta(p, \delta') > \theta(p, \delta)$ . Essa característica implica que para cada  $p > p_c$ , vai existir um delta crítico  $\delta_c(p) \in [0, 1]$  tal que

$$\theta(p, \delta) = 0, \forall \delta \in [0, \delta_c(p))$$

$$\theta(p, \delta) > 0, \forall \delta \in (\delta_c(p), 1].$$

Como observamos anteriormente, se  $\delta > p_c$ , então,  $\theta(p, \delta) > 0, \forall p \in [0, 1]$ , logo

$$\delta_c(p) \leq p_c \quad \forall p.$$

Como limite inferior para  $\delta_c(p)$ , vamos mostrar que, para percolação de sítios na rede quadrada,  $\delta_c(p)$  é no mínimo linear em  $p - p_c$ . Mais precisamente, van den Berg e Brower demonstraram em [1] que:

$$\text{se } p(1 - \delta) \geq p_c, \text{ então } \theta(p, \delta) = 0,$$

ou, equivalentemente,

$$\delta_c(p) \geq \frac{p - p_c}{p}, p \geq p_c. \quad (2.1)$$

Em outras palavras, é possível mostrar que, se  $p > p_c$  e destruímos o aglomerado infinito, vamos precisar de uma chance extra (que depende de  $p$ ) para reintroduzir um aglomerado aberto infinito.

**Teorema 2.1.** *Para percolação auto-destrutiva de sítios na rede quadrada*

$$(a) \quad \forall p > p_c, \exists \delta > 0 \text{ tal que } \theta(p, \delta) = 0.$$



Em particular,

(b) se  $p(1 - \delta) \geq p_c$  (ou, equivalentemente  $\delta \leq \frac{p - p_c}{p}$ ), então  $\theta(p, \delta) = 0$ .

*Demonstração.* Observe que se demonstrarmos a parte (b), poderemos concluir que a parte (a) é verdadeira. Para provar (b), vamos usar as variáveis  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$  introduzidas na seção anterior. A princípio, vamos colorir cada sítio  $i$  de vermelho se  $X_i = 1$  e  $Y_i = 0$ . Então, cada sítio é independente dos outros, vermelho com probabilidade  $p(1 - \delta)$ . Agora suponha que o par  $p, \delta$  satisfaz a condição (b), a saber,  $p(1 - \delta) \geq p_c$ . Se  $\delta = 0$ , depois da destruição do aglomerado infinito, não houve mudança na configuração, resultando em  $\theta(p, \delta) = 0$ .

Como  $p(1 - \delta) \geq p_c$ , decorre do Teorema (1.5) que existem quase certamente infinitos circuitos vermelhos disjuntos contornando a origem. Além disso, como  $p > p_c$ , existe q.c. um aglomerado infinito  $\mathcal{X}$ -ocupado. Esse aglomerado intercepta, exceto um número finito, todos os contornos mencionados acima. No entanto, como dizer que um sítio  $i$  é vermelho significa  $X_i = 1$ , cada um dos circuitos vermelhos em torno da origem que é interceptado pelo aglomerado infinito  $\mathcal{X}$ -ocupado está contido nele. Então, em cada contorno desse tipo, temos  $X^* = 0$  e, como  $\mathcal{Y} = 0$ , temos  $Z = 0$ . Logo, podemos concluir que não existe q.c. caminho infinito saindo da origem no qual  $Z = 1$ . Portanto,  $\theta(p, \delta) = 0$ .  $\square$

Observe que, pela monotonicidade mencionada anteriormente, para todo  $\delta'$  menor que um  $\delta$  que satisfaz a parte (a) deste Teorema, temos  $\theta(p, \delta') = 0$ .

A seguir, veremos que o teorema acima também vale para percolação de elos na rede quadrada, resultado demonstrado por van den Berg e de Lima em [2]. Para tanto, precisaremos da construção do *grafo de emparelhamento*, que é muito útil quando se estuda percolação de sítios. Um par de grafos de emparelhamento  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$  é construído da seguinte forma: começamos com um grafo planar  $G$  com origem  $O$ , e selecionamos alguma família arbitrária  $\mathcal{F}$  de faces de  $G$ . Vamos obter  $\mathcal{G}_1$  (respectivamente  $\mathcal{G}_2$ ) a partir de  $G$  ao se adicionar todas as diagonais de todas as faces de  $\mathcal{F}$  (respectivamente, todas as diagonais das faces que não estão em  $\mathcal{F}$ ). Em outras palavras, dois grafos  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$  são emparelhados se existe um grafo planar  $G$  e um subconjunto  $\mathcal{F}$  de faces de  $G$  tais que  $\mathcal{G}_1$  é obtido a partir de  $G$  quando adicionamos todas as diagonais das faces de  $\mathcal{F}$ , e  $\mathcal{G}_2$  é obtido de  $G$  quando adicionamos todas as diagonais das faces

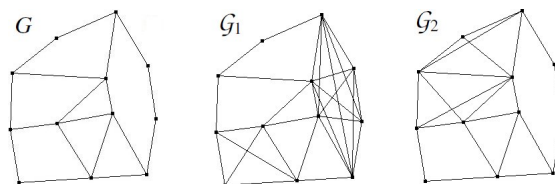


Figura 1: Grafos de emparelhamento  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$  construídos a partir do grafo  $G$ .

que não estão em  $\mathcal{F}$ .

Por exemplo, sendo a rede quadrada um grafo planar, seu grafo emparelhado é obtido quando adicionamos em cada face as duas diagonais como elos extras. Além disso, observe que o emparelhamento da rede triangular é a própria.

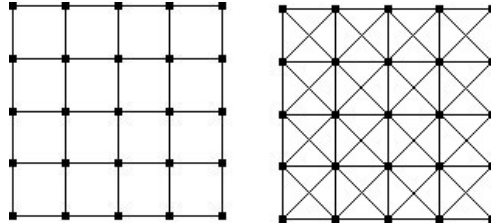


Figura 2: Rede quadrada e seu emparelhamento.

Os grafos  $G$ ,  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$  têm o mesmo conjunto de vértices, e com isso, um processo de percolação de sítios em  $G$  induz processos em  $\mathcal{G}_1$  e  $\mathcal{G}_2$ . Se a origem  $O$  pertence a um aglomerado aberto finito de  $\mathcal{G}_1$ , então o limite externo desse aglomerado forma um circuito fechado de  $\mathcal{G}_2$ , e essa é uma propriedade muito útil. Para maiores informações sobre grafos emparelhados veja a seção 3.1 de [8].

Para mostrar que o Teorema (2.1) vale para percolação de elos na rede quadrada, vamos usar percolação de sítios na rede do tabuleiro de xadrez. Lembre-se que, sendo a rede tabuleiro de xadrez o grafo de cobertura da rede quadrada, como foi mostrado na seção (1.1), percolação de sítios na primeira é equivalente à percolação de elos na segunda. Além disso, observe que a rede do tabuleiro de xadrez é uma translação do seu emparelhamento, o que é fundamental na demonstração feita por van den Berg e de Lima em [2].

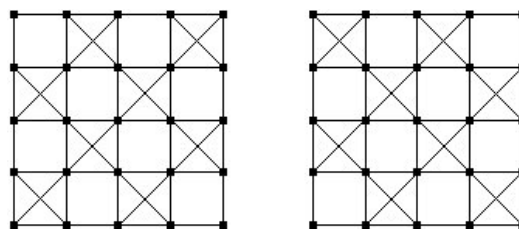


Figura 3: Rede do tabuleiro de xadrez e seu emparelhamento.

**Teorema 2.2.** *Para o modelo de percolação auto-destrutiva de sítios na rede do tabuleiro de xadrez (ou, equivalentemente, percolação auto-destrutiva de elos na rede quadrada), temos que*

$$\text{se } p(1 - \delta) > p_c, \text{ então } \theta(p, \delta) = 0.$$

Portanto,

$$\delta_c(p) \geq \frac{p - p_c}{p}.$$

*Demonstração.* Dado  $i \in V$ , vamos usar a notação  $\bar{i} \equiv i + (1, 0)$ . Tome  $X_i, \mathcal{Y}_i$  e  $Z_i, i \in V$ , como definidos na seção (1.2). Vamos colorir cada vértice  $i \in V$  de vermelho se  $X_i = 1$  e  $\mathcal{Y}_i = 0$ .

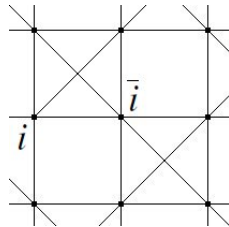


Figura 4: Representação de  $i$  e  $\bar{i}$  na rede do tabuleiro de xadrez.

Então, cada vértice  $i$  vai se tornar vermelho com probabilidade  $p(1 - \delta)$ , independente dos outros vértices. Como  $p(1 - \delta) > p_c$ , segue que existe, quase certamente, um aglomerado infinito vermelho que contém vários circuitos ao redor da origem (Teorema (1.5)).

Seja  $\gamma$  um desses circuitos. Defina

$$\bar{\gamma} = \gamma + (1, 0).$$

Observe que  $\bar{\gamma}$  é um circuito no emparelhamento do grafo.

Seja  $\bar{i} \in \bar{\gamma}$ . Por construção  $\mathcal{Y}_{\bar{i}} = 0$ . Além disso, como  $\bar{i}$  é vizinho do aglomerado infinito  $\mathcal{X}$ -ocupado (pois  $i = \bar{i} - (1, 0)$  é vermelho), temos  $X_{\bar{i}}^* = 0$ . Então,  $Z_{\bar{i}} = 0$ . Concluindo, temos que, quase certamente, existe um circuito  $Z$ -vago no grafo emparelhado ao redor ou que contém a origem. Portanto,  $\theta(p, \delta) = 0$ .

□

Observe que na demonstração do Teorema (2.1) utilizamos indiretamente o fato da rede quadrada estar contida em seu emparelhamento, e como isso não vale para a rede tabuleiro de xadrez, houve a necessidade de modificarmos a demonstração a fim de obter o mesmo resultado.

## 2.2 Outras redes bidimensionais

Nesta seção vamos mostrar um resultado que, apesar de ser um pouco mais fraco do que (2.1), tem a vantagem de conseguirmos demonstrá-lo para uma quantidade maior de redes bidimensionais. Queremos mostrar que:

$$\exists \hat{p} > p_c \text{ e } \exists C > 0 \text{ tais que } \forall p \in [p_c, \hat{p}], \text{ temos } \delta_c(p) \geq C(p - p_c). \quad (2.2)$$

Na demonstração dos teoremas anteriores, a definição de vértices vermelhos foi feita para que cada vértice fosse vermelho independentemente dos outros vértices. Nessa seção, a cor de cada vértice vai envolver o valor da variável aleatória  $\mathcal{Y}$  de todos seus primeiros vizinhos. Essa estratégia, desenvolvida por van den Berg e de Lima em [2] para mostrar (2.2) é válida para uma grande classe de redes bidimensionais, mas leva a dependências um pouco mais complicadas de se analisar.

**Teorema 2.3.** *Para percolação auto-destrutiva de sítios no grafo emparelhado das redes quadrada ou hexagonal, e para percolação auto-destrutiva de elos na rede triangular, o que segue é verdadeiro:*

*Existem  $\hat{p} > p_c$  e  $C > 0$  tais que*

$$\forall p \in [p_c, \hat{p}], \delta_c(p) \geq C(p - p_c).$$

*Demonstração.* Denote por  $G = (V, E)$  o grafo emparelhado das rede quadrada ou hexagonal, ou o grafo de cobertura da rede triangular, e seja  $p_c$  a probabilidade crítica da percolação de sítios em  $G$ .

Nesta demonstração vamos atribuir cores aos vértices, mas estas não serão independentes como ocorreu na demonstração dos teoremas anteriores. No entanto, ainda conseguiremos comparar essa percolação colorida com o processo de percolação usual e obter o resultado que queremos.

Para começar, para cada vértice  $i \in V$ , definimos

$$D_i = \{j \in V, \langle i, j \rangle \in E\}.$$

Seja  $d = |D_i|$ . No grafo emparelhado da rede quadrada, por exemplo, temos  $d = 8$ .

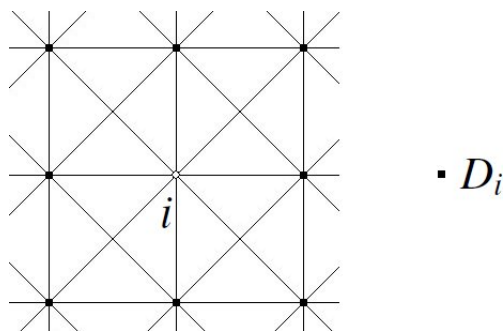


Figura 5: Conjunto  $D_i$  no grafo emparelhado da rede quadrada.

Observe que, sem o fato do grafo ser localmente finito, essa definição e, conseqüentemente, essa estratégia de demonstração, não seriam possíveis.

Sejam  $\mathcal{X}_i$  e  $\mathcal{Y}_i$ ,  $i \in V$ , como definidas na Seção (1.2). Um vértice  $i \in V$  será vermelho se for  $\mathcal{X}$ -ocupado e seus primeiros vizinhos forem  $\mathcal{Y}$ -vagos. Em outras palavras, defina a seqüência de variáveis aleatórias  $\mathcal{R}_i$ ,  $i \in V$ ,

$$\mathcal{R}_i = \begin{cases} 1, & \text{se } \mathcal{X}_i = 1 \text{ e } \mathcal{Y}_j = 0, \forall j \in D_i, \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.3)$$

dizemos que  $i$  é vermelho se  $\mathcal{R}_i = 1$ .

Para que possamos continuar com a demonstração do teorema vamos precisar de dois resultados auxiliares. O primeiro é um teorema cuja demonstração está em [12]; e o segundo é um lema que iremos provar.

**Teorema 2.4.** *Seja  $\gamma$  um circuito em  $G$ . Então todo caminho que começa no interior de  $\gamma$  e termina no exterior de  $\gamma$  contém um vértice que é adjacente a um vértice de  $\gamma$ .*

**Lema 2.1.** *Seja  $\varepsilon > 0$ . Existe uma constante  $c_\varepsilon > 0$  tal que para o modelo de percolação auto-destrutiva de sítios em  $G$  com parâmetros  $0 < \delta \leq p_c$  e  $p \in (p_c, 1 - \varepsilon)$  o que segue é verdadeiro: para todo  $i \in V$ , todo conjunto finito de vértices  $F \subset V$  e todo conjunto de cores  $(r_j, j \in F)$  de  $F$ ,*

$$\frac{\mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{Y}_i = 1; \mathcal{R}_j = r_j, \forall j \in F)}{\mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{Y}_i = 0; \mathcal{R}_j = r_j, \forall j \in F)} \leq c_\varepsilon \delta. \quad (2.4)$$

Então,

$$\mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{Y}_i = 1 | \mathcal{R}_j = r_j, \forall j \in F) \leq c_\varepsilon \delta. \quad (2.5)$$

*Demonstração.* Primeiro observe que, se provarmos (2.4), encontramos (2.5). De fato, por (2.4), temos:

$$\mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{Y}_i = 1; \mathcal{R}_j = r_j, \forall j \in F) \leq c_\varepsilon \delta \mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{Y}_i = 0; \mathcal{R}_j = r_j, \forall j \in F).$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{Y}_i = 1 | \mathcal{R}_j = r_j, \forall j \in F) &= \frac{\mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{Y}_i = 1; \mathcal{R}_j = r_j, \forall j \in F)}{\mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{R}_j = r_j, \forall j \in F)} \\ &\leq \frac{\mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{Y}_i = 0; \mathcal{R}_j = r_j, \forall j \in F)}{\mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{R}_j = r_j, \forall j \in F)} c_\varepsilon \delta \\ &= \mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{Y}_i = 0 | \mathcal{R}_j = r_j, \forall j \in F) c_\varepsilon \delta \leq c_\varepsilon \delta. \end{aligned}$$

Na última desigualdade usamos que  $\mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{Y}_i = 0 | \mathcal{R}_j = r_j, \forall j \in F)$  é medida de probabilidade, sendo menor ou igual a 1.

Para provar (2.4) temos que estudar a dependência entre as variáveis  $\mathcal{Y}_i$  e  $\mathcal{R}_j$ . Como  $\mathcal{R}_j$  depende de  $j \in F$  e de todos os seus primeiros vizinhos, para que  $\mathcal{Y}_i$  e  $\mathcal{R}_j$  sejam independentes temos que nos assegurar de que  $i$  não é um desses vizinhos. Colocando de outra forma, queremos que em  $D_i$ , o conjunto dos primeiros vizinhos de  $i$ , não exista  $j \in F$ . Logo, se  $D_i \cap F = \emptyset$ , a variável aleatória  $\mathcal{Y}_i$  é independente da sequência  $\mathcal{R}_j, \forall j \in F$ , e então

$$\begin{aligned} \frac{\mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{Y}_i = 1; \mathcal{R}_j = r_j, \forall j \in F)}{\mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{Y}_i = 0; \mathcal{R}_j = r_j, \forall j \in F)} &= \frac{\mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{Y}_i = 1)\mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{R}_j = r_j, \forall j \in F)}{\mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{Y}_i = 0)\mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{R}_j = r_j, \forall j \in F)} \\ &= \frac{\mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{Y}_i = 1)}{\mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{Y}_i = 0)} = \frac{\delta}{1 - \delta}. \end{aligned}$$

Assim, se escolhermos  $c_\varepsilon \geq \frac{1}{1-\delta}$ , chegamos ao resultado de (2.4).

Para o caso em que as variáveis  $\mathcal{Y}_i$  e  $\mathcal{R}_j$  não são independentes, ou seja, se  $F' = D_i \cap F \neq \emptyset$ , consideramos dois subcasos:

★  $\exists j \in F'$  tal que  $r_j = 1$ . Observe que se  $j \in D_i$  então  $i \in D_j$ , logo, para que  $\mathcal{R}_j = r_j = 1$ , teremos  $\mathcal{Y}_i = 0$ , o que nos leva a concluir que

$$\mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{Y}_i = 1; \mathcal{R}_j = r_j, \forall j \in F) = 0$$

e, pela definição de  $\mathcal{R}_j$ , vemos que  $\mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{Y}_i = 0; \mathcal{R}_j = r_j, \forall j \in F) > 0$ . Então, nesse caso, podemos escolher qualquer valor para  $c_\varepsilon > 0$  e (2.4) está demonstrada.

★ Se  $r_j = 0, \forall j \in F'$ , temos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{Y}_i = 1; \mathcal{R}_j = r_j, \forall j \in F) &= \mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{Y}_i = 1)\mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{R}_j = r_j, \forall j \in F | \mathcal{Y}_i = 1) \\ &\leq \delta \mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{R}_j = r_j, \forall j \in F \setminus F' | \mathcal{Y}_i = 1), \text{ pois } F \setminus F' \text{ é subconjunto de } F, \\ &= \delta \mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{R}_j = r_j, \forall j \in F \setminus F'). \end{aligned}$$

A última igualdade ocorre pois, para  $j \in F \setminus F'$ ,  $\mathcal{R}_j$  e  $\mathcal{Y}_i$  são independentes. Além disso,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{Y}_i = 0; \mathcal{R}_j = r_j, \forall j \in F) &= \mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{Y}_i = 0)\mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{R}_j = r_j, \forall j \in F | \mathcal{Y}_i = 0) \\ &\geq (1 - \delta)\mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{R}_j = r_j, \forall j \in F; \mathcal{X}_z = 0, \forall z \in D_i | \mathcal{Y}_i = 0) \end{aligned}$$

A desigualdade ocorre pois o evento  $\{\mathcal{R}_j = r_j, \forall j \in F; \mathcal{X}_z = 0, \forall z \in D_i\}$  está contido no evento  $\{\mathcal{R}_j = r_j, \forall j \in F\}$ . Usando a propriedade de probabilidade condicional

$$\mathbb{P}_{p,\delta}(A \cap B|C) = \mathbb{P}_{p,\delta}(A)\mathbb{P}_{p,\delta}(B|A \cap C),$$

temos que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{Y}_i = 0; \mathcal{R}_j = r_j, \forall j \in F) &\geq (1 - \delta)(1 - p)^d \mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{R}_j = r_j, \forall j \in F | \mathcal{Y}_i = 0; \mathcal{X}_z = 0, \forall z \in D_i) \\ &\geq (1 - \delta)(1 - p)^d \mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{R}_j = r_j, \forall j \in F \setminus F'). \end{aligned}$$

Combinando essas duas equações, temos

$$\frac{\mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{Y}_i = 1; \mathcal{R}_j = r_j, \forall j \in F)}{\mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{Y}_i = 0; \mathcal{R}_j = r_j, \forall j \in F)} \leq \frac{\delta}{(1 - \delta)(1 - p)^d} \leq \frac{\delta}{(1 - p_c)(1 - p)^d} \leq \frac{\delta}{(1 - p_c)\epsilon^d}.$$

Observe que na segunda desigualdade acima usamos que  $\delta \leq p_c$  enquanto a última é válida uma vez que  $p \in (p_c, 1 - \epsilon)$  Logo, basta tomar  $c_\epsilon = \frac{1}{(1 - p_c)\epsilon^d}$ .

□

Agora vamos continuar a demonstração do teorema. Seja  $\epsilon > 0$ . Suponha  $p \in (p_c, 1 - \epsilon)$ , e seja  $\delta$  tal que  $p(1 - dc_\epsilon\delta) > p_c$ , onde  $c_\epsilon$  é a constante dada no lema acima.

Seja  $i \in V$ ,  $F$  um conjunto finito de vértices que não contém  $i$  e  $r_j \in \{0, 1\}$ ,  $\forall j \in F$ . Temos que:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{R}_i = 1 | \mathcal{R}_j = r_j, \forall j \in F) &= \mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{X}_i = 1; \mathcal{Y}_z = 0, \forall z \in D_i | \mathcal{R}_j = r_j, \forall j \in F) \\ &= \mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{X}_i = 1) \mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{Y}_z = 0, \forall z \in D_i | \mathcal{R}_j = r_j, \forall j \in F), \end{aligned}$$

em que usamos a independência das variáveis  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$ . Além disso,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{Y}_z = 0, \forall z \in D_i | \mathcal{R}_j = r_j, \forall j \in F) &= 1 - \mathbb{P}_{p,\delta}((\mathcal{Y}_z = 0, \forall z \in D_i)^c | \mathcal{R}_j = r_j, \forall j \in F) \\ &= 1 - \mathbb{P}_{p,\delta}\left(\bigcup_{z \in D_i} \mathcal{Y}_z = 1 | \mathcal{R}_j = r_j, \forall j \in F\right) \\ &> 1 - \sum_{z \in D_i} \mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{Y}_z = 1 | \mathcal{R}_j = r_j, \forall j \in F) \\ &> 1 - dc_\epsilon\delta. \end{aligned}$$

A última desigualdade segue do Lema (2.1). Assim,

$$\mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{R}_i = 1 | \mathcal{R}_j = r_j, \forall j \in F) \geq p(1 - dc_\epsilon\delta).$$

Como  $p(1 - dc_\varepsilon\delta) > p_c$ , o processo  $(\mathcal{R}_i, i \in V)$  domina um processo i.i.d. com parâmetro maior que  $p_c$ . Uma comparação com percolação comum mostra que q.c. existe um aglomerado infinito  $\mathcal{R}$ -ocupado (veja o Lema (3.1) no apêndice B) que contém um circuito ao redor da origem. Seja  $\gamma$  tal circuito. Observe que pela definição de coloração,  $\gamma$  pertence a um aglomerado infinito  $\mathcal{X}$ -ocupado. Defina:

$$\Gamma \equiv \bigcup_{i \in \gamma} D_i.$$

Para cada  $w \in \Gamma$  temos que ou  $\mathcal{X}_w = 1$  caso em que  $w$  pertence a um aglomerado infinito  $\mathcal{X}$ -aberto, ou temos,  $\mathcal{X}_w = 0$ . Em ambos os casos,  $\mathcal{X}_w^* = 0$ . Como temos também  $\mathcal{Y}_w = 0$ , temos  $\mathcal{Z}_w = 0, \forall w \in \Gamma$ . Pelo Teorema (2.4), concluímos que não existe aglomerado infinito  $\mathcal{Z}$ -aberto começando na origem.

Então, provamos que  $\forall \varepsilon > 0$  e  $p < 1 - \varepsilon$ , se  $p(1 - dc_\varepsilon\delta) > p_c$ , temos que  $\theta(p, \delta) = 0$ , ou seja,

$$\delta_c(p) \geq \frac{p - p_c}{pdc_\varepsilon}, \quad p < 1 - \varepsilon,$$

o que completa a demonstração deste teorema.  $\square$

## 2.3 A Conjectura de van den Berg

Como em  $\mathbb{Z}^2$   $\theta(p) \searrow \theta(p_c) = 0$  quando  $p \searrow p_c$ , temos que, se  $p > p_c$  tem valor muito próximo ao do ponto crítico  $p_c$ , somente uma porção pequena (a saber,  $\theta(p)$ ) de sítios é afetada pela catástrofe. Considere a distribuição  $\mathbb{P}_{p,\delta}$ . Fazendo um paralelo com percolação usual, seria razoável pensar que basta um processo com  $\delta$  pequeno para reintroduzir um aglomerado infinito, ou seja, intuitivamente achamos que

$$\forall \delta > 0, \quad \exists p > p_c \quad \text{tal que} \quad \theta(p, \delta) > 0. \quad (2.6)$$

Podemos ir mais adiante e nos perguntar se

$$\lim_{p \searrow p_c} \theta(p, \delta) = \theta(p_c, \delta),$$

o que, como observamos antes, é igual a  $\theta(p_c + (1 - p_c)\delta)$ , que é positivo.

De fato, durante algum tempo acreditou-se que isso era verdade. (E podemos provar esse resultado para a árvore binária, veja no Capítulo 3). Mas van den Berg e Brower conjecturaram em [1] e [5] que a afirmativa (2.6) acima não é verdade para redes planas regulares incluindo a rede quadrada.



**Conjectura 2.1** (van den Berg). Para percolação auto-destrutiva de sítios na rede quadrada conjectura-se que

$$\exists \delta > 0 \quad \text{tal que } \forall p > p_c, \quad \theta(p, \delta) = 0.$$

A seguir, vamos definir a seqüência  $(a_n(\delta))$  e provar que se para algum  $\delta > 0$  esta é afastada de 1, então a Conjectura (2.1) acima é verdadeira. Seja  $n > 0$  e  $p = p_c$ . Considere a caixa  $[0, 3n] \times [0, 2n]$  como subconjunto da rede quadrada, o que forma um grafo, denotado por  $G = G(n)$ . Seja  $L = L(n)$  o lado de baixo  $\{(i, 0) : 0 \leq i \leq 3n\}$  da caixa,  $M = M(n)$  a linha horizontal do meio  $\{(i, n) : 0 \leq i \leq 3n\}$ , e  $U = U(n)$  o lado de cima  $\{(i, 2n) : 0 \leq i \leq 3n\}$  da caixa.

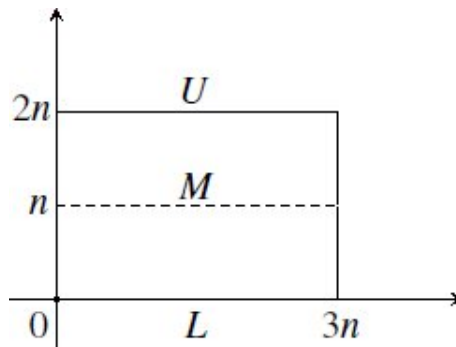


Figura 6: Grafo  $G(n)$ : caixa  $[0, 3n] \times [0, 2n]$ .

Então  $a_n = a_n(\delta)$  é formalmente definido como

$$a_n \equiv \mathbb{P}_{p_c, \delta}^{(G, U)}(L \rightarrow M). \quad (2.7)$$

Baseado em simulações computacionais, acredita-se no que segue:

**Conjectura 2.2.**

$$\exists \delta > 0 \quad \text{tal que} \quad a \text{ seqüência } (a_n(\delta)) \text{ é afastada de } 1. \quad (2.8)$$

Em outras palavras,  $\exists \delta > 0$  tal que  $(a_n(\delta))$  tem a seguinte propriedade:

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{tal que } a_n(\delta) < 1 - \varepsilon, \quad \forall n.$$

No decorrer dessa seção vamos estudar vários resultados que são válidos se assumirmos que a conjectura acima é verdadeira.

**Teorema 2.5.** Se para algum  $\delta$  a seqüência de probabilidades  $(a_n(\delta))$  é afastada de 1, então

$$\exists \delta > 0 \quad \text{tal que } \forall p > p_c, \quad \theta(p, \delta) = 0.$$

Este teorema mostra que a conjectura (2.2) acima implica na Conjectura de van den Berg (2.1). Para prová-lo precisamos de alguns lemas auxiliares. Para isso vamos introduzir algumas notações. Defina

$$B(n) = [-n, n] \times [-n, n], \quad n \geq 0. \quad S(n) = B(n) \setminus B(n-1), \quad n > 1,$$

isto é,  $S(n)$  é a fronteira de  $B(n)$ . Além disso, defina o anel

$$A(n, m) = B(m) \setminus B(n-1), \quad 1 \leq n \leq m.$$

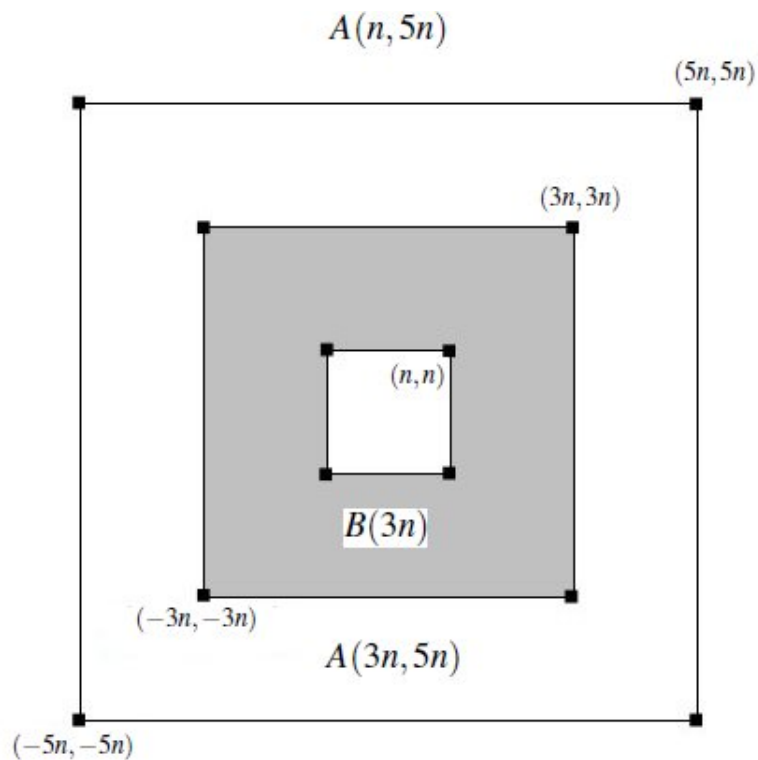


Figura 7: Representação dos anéis  $A(n, 5n)$ ,  $A(3n, 5n)$  e da caixa  $B(3n)$ .

Além da seqüência  $(a_n)$  acima, vamos definir a seqüência  $(b_n)$  como segue: tome o anel  $A(n, 5n)$  como subconjunto da rede quadrada e o considere como um grafo finito. Primeiro vamos fazer percolação usual com parâmetro  $p$ , ou seja, cada sítio do grafo será dito ocupado com probabilidade  $p$  ou vago com probabilidade complementar, independentemente dos demais. Então vamos tornar vago cada sítio cujo aglomerado contém um contorno ao redor de  $B(3n)$ . Finalmente, faremos um processo de percolação independente de sítios com parâmetro  $\delta$ . Definimos  $b_n = b_n(p, \delta)$  como a probabilidade de que a configuração final tenha um caminho ocupado de  $S(n)$  a  $S(3n)$ . Por simplicidade, freqüentemente escreveremos "contorno em  $A(3n, 5n)$ " no lugar de "contorno ocupado ao redor de  $B(3n)$  em  $A(3n, 5n)$ ".

**Lema 2.2.** Se  $\delta > 0$  é tal que a seqüencia  $(a_n(\delta))$ , definida por (2.7), é afastada de 1, então a seqüencia  $(b_n(p_c, \delta))$  também é afastada de 1.

*Demonstração.* Escreva  $a_n$  para  $a_n(\delta)$  e  $b_n$  para  $b_n(p_c, \delta)$ , a fim de simplificar a notação. Afir-  
mamos que

$$b_n \leq \mathbb{P}_{p_c, \delta}(\text{não existe contorno em } A(3n, 5n)) \\ + (1 - (1 - a_{2n})^4) \mathbb{P}_{p_c, \delta}(\text{existe contorno ocupado em } A(3n, 5n)).$$

Observe que o lado direito da inequação acima é estritamente menor que 1, fazendo com que  $(b_n)$  seja afastada de 1. De fato, primeiro temos que

$$\mathbb{P}_{p_c, \delta}(\text{existe contorno em } A(3n, 5n)) + \mathbb{P}_{p_c, \delta}(\text{não existe contorno em } A(3n, 5n)) = 1,$$

pois são eventos complementares. Usando o Teorema RSW (1.5), podemos garantir que  $\mathbb{P}_{p_c, \delta}(\text{existe contorno em } A(3n, 5n)) > 0$ . Como  $0 < (1 - (1 - a_{2n})^4) < 1$ , uma vez que  $a_{2n}$  é probabilidade e é afastada de 1, temos que

$$b_n \leq \mathbb{P}_{p_c, \delta}(\text{não existe contorno em } A(3n, 5n)) \\ + (1 - (1 - a_{2n})^4) \mathbb{P}_{p_c, \delta}(\text{existe contorno ocupado em } A(3n, 5n)) < 1,$$

o que demonstra o lema, desde que a afirmação seja verdadeira.

*Prova da Afirmação.* Defina  $\mathcal{X}_i, \mathcal{Y}_i, i \in V(A(n, 5n))$  como na seção (1.2) e defina as seguintes variáveis aleatórias em termos das variáveis  $\mathcal{X}$  e  $\mathcal{Y}$ :

$$\mathcal{X}_i^{(*c)} = \begin{cases} 1, & \text{se } \mathcal{X}_i = 1 \text{ mas o aglomerado } \mathcal{X}\text{-ocupado de } i \text{ não contém contorno ao redor de } B(3n), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.9)$$

e

$$\mathcal{X}_i^{(*S)} = \begin{cases} 1, & \text{se } \mathcal{X}_i = 1 \text{ mas } \nexists \text{ caminho } \mathcal{X}\text{-ocupado em } A(n, 5n) \text{ de } i \text{ a } S(5n), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (2.10)$$

para  $i \in V(A(n, 5n))$ .

Além disso, seja

$$\mathcal{Z}_i^{(c)} \equiv \max\{\mathcal{X}_i^{(*c)}, \mathcal{Y}_i\},$$

e

$$\mathcal{Z}_i^{(S)} \equiv \max\{\mathcal{X}_i^{(*S)}, \mathcal{Y}_i\}.$$

Então, na notação acima,  $b_n = \mathbb{P}_{p_c, \delta}(\exists \text{ caminho } \mathcal{Z}_i^{(c)}\text{-ocupado de } S(n) \text{ a } S(3n))$ . Para  $i \in A(n, 3n)$ , cada caminho de  $i$  a  $S(5n)$  intercepta todo contorno em  $A(3n, 5n)$ . A partir disso e das definições acima, segue que se existe um contorno  $\mathcal{X}$ -ocupado em  $A(3n, 5n)$ , então, para todo  $i \in A(n, 3n)$ ,  $\mathcal{X}_i^{(*c)} \leq \mathcal{X}_i^{(*S)}$ . De fato, existindo tal contorno, o caminho aberto de  $i$  a  $S(5n)$  pode existir (o que daria  $\mathcal{X}_i^{(*c)} = 0 \leq \mathcal{X}_i^{(*S)} = 0$ ) ou não (o que daria  $\mathcal{X}_i^{(*c)} = 0 \leq \mathcal{X}_i^{(*S)} = 1$ ). Então

$$\begin{aligned} b_n &= \mathbb{P}_{p_c, \delta}(\exists \text{ caminho } \mathcal{Z}^{(c)}\text{-ocupado de } S(n) \text{ a } S(3n)) \\ &\leq \mathbb{P}_{p_c, \delta}(\nexists \text{ contorno } \mathcal{X}\text{-ocupado em } A(3n, 5n)) \\ &+ \mathbb{P}_{p_c, \delta}(\exists \text{ contorno } \mathcal{X}\text{-ocupado em } A(3n, 5n); \exists \text{ caminho } \mathcal{Z}^{(S)}\text{-ocupado de } S(n) \text{ a } S(3n)) \end{aligned}$$

Na desigualdade observe que

$$\{\exists \text{ caminho } \mathcal{Z}^{(c)}\text{-ocupado de } S(n) \text{ a } S(3n)\} \subset$$

$$\{\nexists \text{ contorno } \mathcal{X}\text{-ocupado em } A(3n, 5n)\} \cup \{\exists \text{ contorno } \mathcal{X}\text{-ocupado em } A(3n, 5n)\},$$

pois essa união é o espaço amostral. Contudo, se

$$\omega \in \{\exists \text{ caminho } \mathcal{Z}^{(c)}\text{-ocupado de } S(n) \text{ a } S(3n)\} \cap \{\exists \text{ contorno } \mathcal{X}\text{-ocupado em } A(3n, 5n)\},$$

todo sítio  $i$  do caminho  $\mathcal{Z}^{(c)}$ -ocupado dessa configuração é tal que  $\mathcal{Y}_i = 1$  ou  $\mathcal{X}_i = 1$ , o que implica  $\mathcal{Z}_i^{(S)} = 1$ . Usando que o evento  $\{\exists \text{ contorno } \mathcal{X}\text{-ocupado em } A(3n, 5n)\}$ , que depende somente de  $\mathcal{X}_i, i \in A(3n, 5n)$ , é crescente nessas variáveis enquanto o evento  $\{\exists \text{ caminho } \mathcal{Z}^{(S)}\text{-ocupado de } S(n) \text{ a } S(3n)\}$  é decrescente nas mesmas, podemos usar a Desigualdade de FKG (mais especificamente, a equação (1.4)), e obter:

$$\begin{aligned} b_n &\leq \mathbb{P}_{p_c, \delta}(\nexists \text{ contorno } \mathcal{X}\text{-ocupado em } A(3n, 5n)) \\ &+ \mathbb{P}_{p_c, \delta}(\exists \text{ contorno } \mathcal{X}\text{-ocupado em } A(3n, 5n)) \times \mathbb{P}_{p_c, \delta}(\exists \text{ caminho } \mathcal{Z}^{(S)}\text{-ocupado de } S(n) \text{ a } S(3n)). \end{aligned} \tag{2.11}$$

Sejam  $R_1, R_2, R_3, R_4$  os quatro retângulos de comprimento  $6n$  e largura  $2n$  cuja união é  $A(n, 3n)$ . Mais explicitamente, seja  $R_1$ , dentre os retângulos horizontais, o inferior. Denote os dois lados maiores de  $R_1$  por  $L_1$  e  $L_2$ , onde  $L_2$  é a base  $\{(i, -3n); -3n \leq i \leq 3n\}$ . Seja  $R$  a união de  $R_1$  e sua imagem refletida em um espelho colocado em  $L_2$ . Finalmente, seja  $L_3$  a base de  $R$ , formada pelo conjunto  $\{(i, -5n); -3n \leq i \leq 3n\}$ .

O fator

$$\mathbb{P}_{p_c, \delta}(\exists \text{ caminho } \mathcal{Z}^{(S)}\text{-ocupado de } S(n) \text{ a } S(3n))$$

do lado direito da equação (2.11), de acordo com a notação introduzida na seção (1.2), é

$$\mathbb{P}_{p_c, \delta}^{(A(n, 5n); S(5n))}(S(n) \rightarrow S(3n)).$$

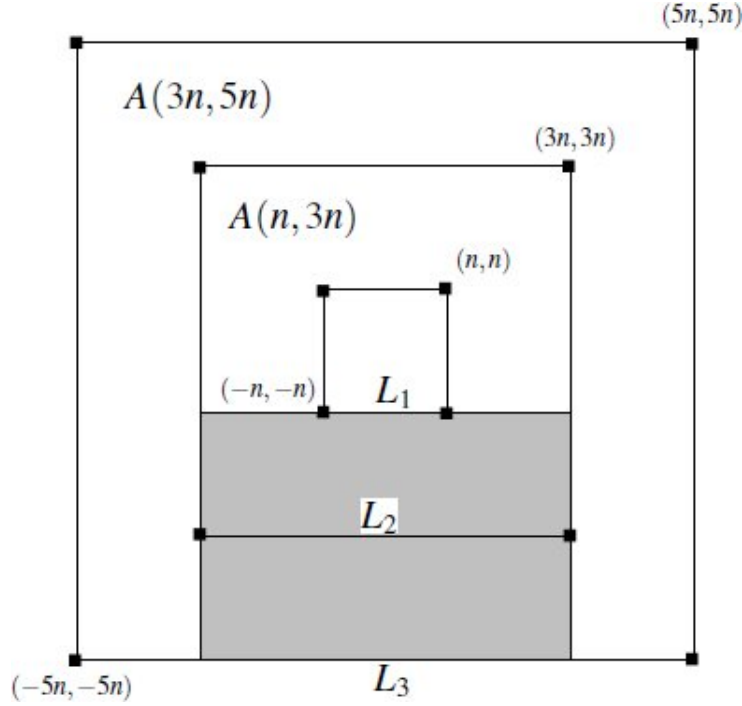


Figura 8: A região sombreada representa o retângulo  $R$ .

Usando o fato de que um caminho de  $S(n)$  a  $S(3n)$  sempre contém um subcaminho em um dos quatro retângulos  $R_1, R_2, R_3, R_4$ , entre os dois lados mais compridos do mesmo, temos

$$\begin{aligned} & \mathbb{P}_{p_c, \delta}^{(A(n, 5n); S(5n))} (S(n) \rightarrow S(3n)) \leq \\ & \mathbb{P}_{p_c, \delta}^{(A(n, 5n); S(5n))} \left( \bigcup_{i=1}^4 \exists \text{ caminho } \mathcal{Z}^{(S)}\text{-ocupado entre os lados mais compridos de } R_i \right) \\ & = 1 - \mathbb{P}_{p_c, \delta}^{(A(n, 5n); S(5n))} \left( \bigcap_{i=1}^4 (\exists \text{ caminho } \mathcal{Z}^{(S)}\text{-ocupado entre os lados mais compridos de } R_i)^C \right). \end{aligned}$$

Como  $(A(n, 5n))$  é um grafo finito,  $\mathbb{P}_{p_c, \delta}^{(A(n, 5n); S(5n))}$  é uma medida associada (Lema (1.1)), podemos aplicar a propriedade (1.5) e, juntamente com a simetria da construção (cada um dos retângulos desempenha o mesmo papel), obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{p_c, \delta}^{(A(n, 5n); S(5n))} (S(n) \rightarrow S(3n)) & \leq 1 - \mathbb{P}_{p_c, \delta}^{(A(n, 5n); S(5n))} (A(n, 5n; S(5n))) (L_1 \nrightarrow L_2 \text{ em } R_1)^4 \\ & = 1 - (1 - \mathbb{P}_{p_c, \delta}^{(A(n, 5n); S(5n))} (L_1 \rightarrow L_2 \text{ em } R_1))^4. \end{aligned}$$

Usando um argumento de monotonicidade, temos

$$\mathbb{P}_{p_c, \delta}^{(A(n, 5n); S(5n))} (S(n) \rightarrow S(3n)) \leq 1 - (1 - \mathbb{P}_{p_c, \delta}^{(R; L_3)} \{L_1 \rightarrow L_2\})^4.$$

Por definição de  $a_n$ , isso é igual a  $1 - (1 - a_{2n})^4$  e usando esse fato em (2.11), a demonstração da afirmação está completa. □

**Lema 2.3.** Se  $\delta > 0$  é tal que a seqüência  $(b_n(p_c, \delta))$  é afastada de 1, então  $\exists \varepsilon > 0$  tal que a família  $(b_n(p, \varepsilon), n = 1, 2, \dots, p \in [p_c, p_c + \varepsilon])$  é afastada de 1.

*Demonstração.* Tome  $\varepsilon$  tão pequeno que

$$(p_c + \varepsilon) + (1 - p_c - \varepsilon)\varepsilon < p_c + (1 - p_c)\delta.$$

Se  $p_1 = p_c$ ,  $\delta_1 = \delta$ ,  $p_2 = p_c + \varepsilon$  e  $\delta_2 = \varepsilon$ , usando o Corolário (1.1), temos

$$\mathbb{P}_{p_c + \varepsilon, \varepsilon} \text{ é dominado por } \mathbb{P}_{p_c, \delta}.$$

Com isso,

$$b_n(p, \varepsilon) \leq b_n(p_c, \delta), \quad p \in [p_c, p_c + \varepsilon].$$

Portanto, como  $b_n(p_c, \delta)$  é afastada de 1, chegamos ao resultado desejado. □

**Lema 2.4.** Se  $\delta > 0$  é tal que a seqüência  $\{a_n(\delta)\}$  é afastada de 1, então

$$\exists \varepsilon > 0 \quad \text{tal que} \quad \theta(p, \varepsilon) = 0, \quad p \in (p_c, p_c + \varepsilon].$$

*Observação.* De fato, vamos provar a seguinte afirmação mais forte: se existe um  $\delta > 0$  para o qual a seqüência  $(a_n(\delta))$  é afastada de 1, então existem  $\varepsilon > 0$  e  $\alpha > 0$  tais que

$$\forall p \in (p_c, p_c + \varepsilon], \quad \exists C \quad \forall n \quad \mathbb{P}_{p, \delta}(O \rightarrow S(n)) \leq Cn^{-\alpha}.$$

*Demonstração.* Suponha que  $\delta$  satisfaz a condição do enunciado. Então, pelos dois lemas anteriores, podemos encontrar um  $\varepsilon > 0$  e um  $b < 1$  tais que, para todos  $p \in [p_c, p_c + \varepsilon]$  e todos  $n \geq 1$ ,

$$b_n(p, \varepsilon) < b. \tag{2.12}$$

Sejam  $n \geq 1$  e  $p \in (p_c, p_c + \varepsilon)$ . Seja  $C_1$  uma constante positiva (no momento vamos tomar  $C_1$  arbitrária; mais adiante vamos escolher um valor adequado, dependendo de  $p$ ). Defina, para cada  $i \in \mathbb{Z}^2$ , as variáveis aleatórias  $\mathcal{X}_i, \mathcal{X}_i^*, \mathcal{Y}_i$  e  $\mathcal{Z}_i$  como anteriormente. Além disso, defina agora

$$\mathcal{X}_i^{(*C)} = \begin{cases} 1, & \text{se } \mathcal{X}_i = 1 \text{ mas seu alçomurado } \mathcal{X}\text{-ocupado não contém contorno ao redor de } B(C_1 \log n), \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \tag{2.13}$$

e

$$\mathcal{Z}_i^{(C)} = \max\{\mathcal{X}_i^{(*C)}, \mathcal{Y}_i\}.$$

Com isso, temos

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{p,\delta}(O \rightarrow S(n)) &= \mathbb{P}(\exists \text{ caminho } \mathcal{Z}\text{-ocupado de } O \text{ a } S(n)) \\ &\leq \mathbb{P}(\exists \text{ caminho } \mathcal{Z}\text{-ocupado de } S(C_1 \log n) \text{ a } S(n))\end{aligned}$$

Note que se existe um caminho infinito  $\mathcal{X}$ -ocupado saindo de  $S(C_1 \log n)$ , então, como esse caminho intersepta todo contorno ao redor de  $B(C_1 \log n)$ , temos  $X_i^* \leq X_i^{*C}$  (e assim  $Z_i \leq Z_i^C$ ) para todo  $i \in \mathbb{Z}^2 \setminus B(C_1 \log n)$ .

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{p,\delta}(O \rightarrow S(n)) &\leq \mathbb{P}_{p,\delta}(\exists \text{ caminho } \mathcal{Z}^{(C)}\text{-ocupado de } S(C_1 \log n) \text{ a } S(n)) \quad (2.14) \\ &\quad + \mathbb{P}_{p,\delta}(\nexists \text{ caminho infinito } \mathcal{X}\text{-ocupado saindo de } S(C_1 \log n)).\end{aligned}$$

Da percolação usual sabemos que o último termo do lado direito da equação (2.14) é no máximo (veja seção 8.6 de [8])

$$C_2 e^{(-\beta_1(p)C_1 \log n)}, \quad (2.15)$$

onde  $C_2(p)$  e  $\beta_1(p)$  são constantes positivas que dependem somente de  $p$ .

Agora vamos tratar do primeiro termo do lado direito da equação (2.14). Seja  $K$  o conjunto de todos os inteiros positivos  $k$  com  $C_1 \log n < 3^k < 5 \times 3^k < n$ , e considere o anel  $A(3^k, 5 \times 3^k)$ ,  $k \in K$ . Esses anéis são disjuntos par a par. Assim, pela construção, temos que

$$\mathbb{P}_{p,\delta}(\exists \text{ caminho } \mathcal{Z}^{(C)}\text{-ocupado de } S(C_1 \log n) \text{ a } S(n)) \leq \prod_{k \in K} b_{3^k}(p, \varepsilon) < b^{|K|}, \quad (2.16)$$

em que a última desigualdade vem de (2.12) e  $|K|$  denota o tamanho de  $K$ . A partir da definição de  $K$  sabemos que existe um  $C_3 > 0$  (que é uma função de  $C_1$ ), e uma constante  $\beta_2 > 0$  tais que, para todo  $n$ , (2.16) é no máximo  $C_3 n^{-\beta_2}$ . Então para todo  $C_1 > 0$ , existe  $C_3 > 0$  constante tal que para todo  $p \in (p_c, p_c + \varepsilon)$  e todo  $n \geq 1$ ,

$$\begin{aligned}\mathbb{P}_{p,\delta}(\exists \text{ caminho } \mathcal{Z}\text{-ocupado de } O \text{ a } S(n)) &\leq C_2(p) e^{(-\beta_1(p)C_1 \log n)} + C_3 n^{-\beta_2} \\ &= C_2(p) e^{(\log n - \beta_1(p)C_1)} + C_3 n^{-\beta_2} \\ &= C_2(p) n^{-\beta_1(p)C_1} + C_3 n^{-\beta_2}.\end{aligned}$$

Se escolhermos  $C_1$  tão grande (dependendo de  $p$ ) que  $C_1 \beta_1 \geq \beta_2$ ,

$$\mathbb{P}_{p,\delta}(\exists \text{ caminho } \mathcal{Z}\text{-ocupado de } O \text{ a } S(n)) \leq C_2(p) n^{-\beta_2} + C_3(p) n^{-\beta_2} = (C_2(p) + C_3) n^{-\beta_2}.$$

□

Finalmente, o teorema agora segue imediatamente ao se combinar esse lema com o Teorema (2.1) parte (b).

### 3 Percolação Auto-Destrutiva na Árvore Binária

O grafo  $\mathcal{T}$ , a árvore binária, é uma árvore infinita na qual um vértice, que chamaremos de raiz, tem dois vizinhos, e todos os outros têm três vizinhos. Denotaremos a raiz por 0 e seus

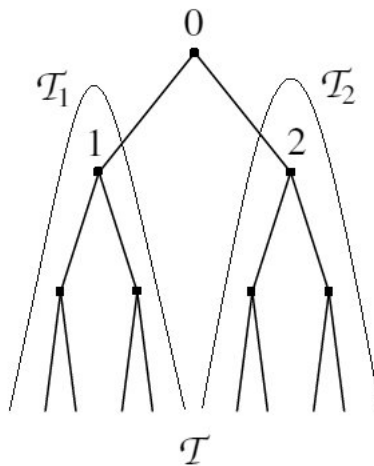


Figura 1: Árvore Binária

dois vizinhos por 1 e 2, respectivamente. Os sítios 1 e 2 podem ser considerados como raízes das sub-árvores  $\mathcal{T}_1$  e  $\mathcal{T}_2$ , respectivamente.

Considerando percolação usual de sítios em  $\mathcal{T}$  com parâmetro  $p$ , como  $\mathcal{T}_1$  e  $\mathcal{T}_2$  são cópias de  $\mathcal{T}$ , tais grafos possuem o mesmo  $\theta(p)$ . Assim, para que exista percolação em  $\mathcal{T}$ , a raiz 0 tem que estar aberta (o que ocorre com probabilidade  $p$ ) e tem que existir um caminho aberto infinito saindo da raiz de pelo menos uma das sub-árvores  $\mathcal{T}_1$  e  $\mathcal{T}_2$ . Observe que a probabilidade de que não exista tal caminho em nenhum desses ramos é  $(1 - \theta^2(p))$ , logo a probabilidade da



raiz de alguma das sub-árvores percolar é  $1 - (1 - \theta^2(p))$ . Portanto, a probabilidade de existir caminho infinito aberto em  $\mathcal{T}$  é

$$\theta(p) = p(1 - (1 - \theta^2(p))) = p(2\theta(p) - \theta^2(p)). \quad (3.1)$$

Resolvendo essa equação para  $\theta(p)$ , temos, para  $p > p_c$ , que

$$\theta(p) \equiv \mathcal{P}_p(0 \rightarrow \infty) = \frac{2p-1}{p}. \quad (3.2)$$

A função  $\theta(p)$  é contínua, pois é raiz do polinômio  $p(2x - x^2)$ . Como  $\theta(p) = 0$  para  $p < p_c$ , concluímos que  $\theta(p_c) = 0$  e

$$\theta(p_c) = 0 \Leftrightarrow \frac{2p-1}{p} = 0 \Leftrightarrow p_c = \frac{1}{2}.$$

Portanto, o ponto crítico de  $\mathcal{T}$  é  $p_c = 1/2$ .

Partindo para o estudo do processo de percolação auto-destrutiva na árvore binária  $\mathcal{T}$ , vamos mostrar que é (2.6) válida. Na verdade, mostraremos algo mais específico,

$$\lim_{p \searrow p_c} \theta(p, \delta) = \theta(p_c, \delta),$$

lembrando que  $\theta(p_c, \delta) = \theta(p_c + (1 - p_c)\delta) > 0$ . Tais resultados foram demonstrados por van den Berg e Brower na seção 5 do artigo [1] e na seção 2.6 da tese [5].

**Teorema 3.1.** *No processo de percolação auto-destrutiva com parâmetros  $p$  e  $\delta$  em  $\mathcal{T}$ , temos que:*

$$(i) \quad \forall p > p_c, \exists \delta > 0, \text{ tal que } \theta(p, \delta) = 0.$$

*Em particular,*

$$(ii) \quad \text{se } p(1 - \delta) \geq p_c, \text{ então } \theta(p, \delta) = 0.$$

$$(iii) \quad \forall \delta > 0 \exists \hat{p} > p_c \text{ e } \exists \alpha > 0 \text{ tais que } \forall p \in [p_c, \hat{p}], \text{ temos } \theta(p, \delta) > \alpha.$$

*Mais geralmente,*

$$(iv) \quad \lim_{p \searrow p_c} \theta(p, \delta) = \theta(p_c, \delta), \forall \delta > 0.$$

*Demonstração.* Assim como fizemos na percolação usual para encontrar (3.1), vamos usar o fato de que  $\mathcal{T}_1$  e  $\mathcal{T}_2$  são cópias de  $\mathcal{T}$  para demonstrar os resultados de percolação auto-destrutiva enunciados acima. No entanto, a remoção de aglomerados infinitos introduz dependência entre essas cópias, o que complica nossa argumentação. Por isso, vamos definir uma classe de variá-

veis aleatórias para que tais complicações possam ser tratadas de forma mais simples. Sejam  $\mathcal{X}_i, \mathcal{Y}_i, \mathcal{X}_i^*$  e  $\mathcal{Z}_i, i \in V$ , como definidas na seção (1.2). Sendo assim, defina para  $i \in V$ ,

$$\mathcal{X}_i^{*+} = \begin{cases} 1, & \text{se } \mathcal{X}_i = 1 \text{ e não existe caminho } \mathcal{X}\text{-ocupado saindo de } i \text{ para } \infty \text{ ou para } 0, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.3)$$

e

$$\mathcal{Z}_i^+ = \max\{\mathcal{X}_i^{*+}, \mathcal{Y}_i\}.$$

Observe que, a partir dessa definição, temos  $\mathcal{X}_0^{*+} = 0$ .

Também vamos definir variáveis análogas para  $\mathcal{T}_1$  e  $\mathcal{T}_2$ . Assim,  $\mathcal{X}_i^{*(1)}, i \in V(\mathcal{T}_1)$  é definida por:

$$\mathcal{X}_i^{*(1)} = \begin{cases} 1, & \text{se } \mathcal{X}_i = 1 \text{ e não há caminho infinito } \mathcal{X}\text{-ocupado saindo de } i \text{ em } \mathcal{T}_1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.4)$$

A definição de  $\mathcal{X}_i^{*+(1)}, i \in V(\mathcal{T}_1)$  é a que segue:

$$\mathcal{X}_i^{*+(1)} = \begin{cases} 1, & \text{se } \mathcal{X}_i = 1 \text{ e não existe caminho } \mathcal{X}\text{-ocupado em } \mathcal{T}_1 \text{ saindo de } i \text{ para } \infty \text{ ou para } 1, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.5)$$

Além disso, defina

$$\mathcal{Z}_i^{(1)} = \max\{\mathcal{X}_i^{*(1)}, \mathcal{Y}_i\}, \quad i \in V(\mathcal{T}_1),$$

e

$$\mathcal{Z}_i^{+(1)} = \max\{\mathcal{X}_i^{*+(1)}, \mathcal{Y}_i\}, \quad i \in V(\mathcal{T}_1).$$

Finalmente, defina  $\mathcal{X}_i^{*(2)}, \mathcal{X}_i^{*+(2)}, \mathcal{Z}_i^{(2)}$  e  $\mathcal{Z}_i^{+(2)}, i \in V(\mathcal{T}_2)$  de modo análogo.

Vamos primeiro demonstrar a parte (ii) do teorema. Para isso, observe que se o aglomerado  $\mathcal{Z}$ -ocupado da origem  $O$  é infinito, então o evento  $A$  a seguir tem que ocorrer:

$$A \equiv \{\max\{\mathcal{X}_O, \mathcal{Y}_O\} = 1 \text{ e } \exists i \in \{1, 2\} \text{ tal que } i \text{ está em um caminho infinito } \mathcal{Z}^{(i)}\text{-ocupado em } \mathcal{T}_i\}.$$

Assim

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{p,\delta}(A) &= \mathbb{P}_{p,\delta}\{\max\{\mathcal{X}_O, \mathcal{Y}_O\} = 1\} \mathbb{P}_{p,\delta}\{\exists i \in \{1, 2\} \text{ tal que } i \rightarrow \infty \text{ em } \mathcal{T}_i\} \\ &= (p + (1-p)\delta) \mathbb{P}_{p,\delta}\{\exists i \in \{1, 2\} \text{ tal que } i \rightarrow \infty \text{ em } \mathcal{T}_i\} \\ &= (p + (1-p)\delta)(2\theta(p, \delta) - \theta(p, \delta)^2). \end{aligned}$$

Note que a última igualdade é válida por argumentos análogos aos usados para encontrar (3.1), basta trocar  $\theta(p)$  por  $\theta(p, \delta)$ . Como o evento  $\{0 \rightarrow \infty\}$  está contido em  $A$ , temos

$$\theta(p, \delta) \leq \mathbb{P}_{p, \delta}(A) = (p + (1 - p)\delta)(2\theta(p, \delta) - \theta(p, \delta)^2). \quad (3.6)$$

Por outro lado, se  $A$  ocorre e o aglomerado  $\mathcal{X}$ -ocupado de 0 é finito, então o aglomerado  $\mathcal{Z}$ -ocupado de 0 é infinito. De fato, se  $\mathcal{X}_0 = 1$  e aglomerado  $\mathcal{X}$ -ocupado é finito, temos  $\mathcal{X}_0^* = 1$  e, assim,  $\mathcal{Z}_0 = 1$ ; se  $\mathcal{Y}_0 = 1$ , temos também  $\mathcal{Z}_0 = 1$ . Se acrescentarmos o fato de que a raiz de uma das subárvores percola, temos que o aglomerado  $\mathcal{Z}$ -ocupado de 0 é infinito. Então, temos

$$\theta(p, \delta) \geq \mathbb{P}_{p, \delta}(A) - \theta(p) = (p + (1 - p)\delta)(2\theta(p, \delta) - \theta(p, \delta)^2) - \theta(p). \quad (3.7)$$

Em seguida vamos melhorar o limite superior (3.6). Primeiro definimos o evento

$$B \equiv \{\mathcal{X}_0 = 1, \mathcal{Y}_0 = 0 \quad \text{e} \quad \exists i \in \{1, 2\} \text{ tal que } i \text{ está em um caminho infinito } \mathcal{Z}^{(i)}\text{-ocupado} \\ \text{em } \mathcal{T}_i \text{ e } 3 - i \text{ está em um caminho infinito } \mathcal{X}\text{-ocupado em } \mathcal{T}_{3-i}\}.$$

Podemos ver que  $B \subset A$ , mas também se  $B$  ocorre, então  $\mathcal{Z}_0 = 0$  e a origem não está em um caminho infinito  $\mathcal{Z}$ -ocupado. Logo, para que a raiz 0 percole, é necessário que ocorra  $A$  sem  $B$  e, assim, temos:

$$\theta(p, \delta) \leq \mathbb{P}_{p, \delta}(A) - \mathbb{P}_{p, \delta}(B). \quad (3.8)$$

Resta, agora, saber a probabilidade de  $B$  ocorrer:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{p, \delta}(B) &= p(1 - \delta) \\ &\times (2\theta(p, \delta)\theta(p) - \mathbb{P}_{p, \delta}\{i \text{ está em um caminho infinito } \mathcal{Z}^{(i)}\text{-ocupado em } \mathcal{T}_i \\ &\quad \text{e está em um caminho infinito } \mathcal{X}\text{-ocupado em } \mathcal{T}_i, i \in \{1, 2\}\}) \\ &\geq p(1 - \delta) \times (2\theta(p, \delta)\theta(p) \\ &\quad - \mathbb{P}_{p, \delta}\{i \text{ está em um caminho infinito } \mathcal{Z}^{(i)}\text{-ocupado em } \mathcal{T}_i, i \in \{1, 2\}\}) \\ &= p(1 - \delta)(2\theta(p, \delta)\theta(p) - \theta(p, \delta)^2). \end{aligned}$$

Isso, juntamente com (3.8) e a expressão para  $\mathbb{P}_{p, \delta}(A)$  em (3.6), nos dá

$$\theta(p, \delta) \leq (p + (1 - p)\delta)(2\theta(p, \delta) - \theta(p, \delta)^2) - p(1 - \delta)(2\theta(p, \delta)\theta(p) - \theta(p, \delta)^2).$$

Então, se  $\theta(p, \delta) > 0$ ,

$$1 \leq (p + (1 - p)\delta)(2 - \theta(p, \delta)) - p(1 - \delta)(2\theta(p) - \theta(p, \delta)). \quad (3.9)$$

Usando (3.2) e algumas manipulações, vemos que o lado direito da desigualdade acima é igual a

$$1 < 2(1 - p + p\delta) - \delta\theta(p, \delta).$$

Resumindo,  $\theta(p, \delta) > 0$  implica que  $1 < 2(1 - p + p\delta)$ , ou, equivalentemente, que  $p(1 - \delta) < 1/2$ . Como  $1/2 = p_c$ , isso prova a parte (ii) (e também a parte (i)) do teorema.

Antes de provar as partes (iii) e (iv) vamos fazer algumas observações. Quando  $p$  é maior que, mas bem próximo, a  $p_c$ ,  $\theta(p)$  é próximo de 0 e ambas (3.6) e (3.7) estão próximas de (3.1), com  $\theta(p + (1 - p)\delta)$  ao invés de  $\theta(p)$ . Poderíamos concluir a partir disso que se  $p \searrow p_c$ , então

$$\theta(p, \delta) \rightarrow \theta(p_c + (1 - p_c)\delta) = \theta(p_c, \delta),$$

e obteríamos a parte (iv) do teorema. Contudo, quando tomamos  $\theta(p, \delta) = 0$  as desigualdades acima também são satisfeitas, o que invalida o argumento. Assim, a solução é provar que  $\liminf_{p \searrow p_c} \theta(p, \delta) > 0$  e usar (3.1) e o fato de  $\theta(p)$  ser a única solução positiva de  $p(2x - x^2)$ . A positividade desse  $\liminf$  segue imediatamente a partir da parte (iii), que demonstramos agora.

Vamos definir, para  $n \geq 1$ , os seguintes eventos:

$$A_n = \{\text{existe um caminho } \mathcal{Z}\text{-ocupado de tamanho } n \text{ saindo da raiz } 0\},$$

$$B_n = \{\text{existe um caminho } \mathcal{Z}^+\text{-ocupado de tamanho } n \text{ saindo da raiz } 0\},$$

$$E = \{\text{aglomerado } \mathcal{X}\text{-ocupado da origem é infinito}\}.$$

Analogamente, para  $\mathcal{T}_1$  e  $\mathcal{T}_2$ , defina  $A_n^{(j)}$ ,  $B_n^{(j)}$  e  $E^{(j)}$  para  $j = 1, 2$ , respectivamente. Por exemplo,

$$A_n^{(1)} = \{\text{existe um caminho } \mathcal{Z}^{(1)}\text{-ocupado de tamanho } n \text{ saindo de } 1 \text{ em } \mathcal{T}_1\}.$$

Vamos considerar, para cada  $n$ , as probabilidades das combinações da ocorrência desses eventos:

$$f_1(n) \equiv \mathbb{P}_{p, \delta}(\neg E, \neg A_n, \neg B_n)$$

$$f_2(n) \equiv \mathbb{P}_{p, \delta}(E, \neg A_n, \neg B_n)$$

$$f_3(n) \equiv \mathbb{P}_{p, \delta}(\neg E, A_n, B_n)$$

$$f_4(n) \equiv \mathbb{P}_{p, \delta}(\neg E, A_n, \neg B_n)$$

$$f_5(n) \equiv \mathbb{P}_{p, \delta}(E, A_n, B_n),$$

em que  $\neg$  é notação para a não ocorrência de um dado evento.

Note que deveríamos ter oito combinações, mas algumas não ocorrem, como, por exemplo,  $(E, \neg A_n, B_n)$  e  $(\neg E, \neg A_n, B_n)$ , uma vez que  $B_n$  implica  $A_n$ . O evento  $(E, A_n, \neg B_n)$  também não ocorre. De fato, suponha que  $E$  e  $A_n$  aconteçam. Tomando  $i$  no caminho  $\mathcal{Z}$ -aberto de tamanho  $n$ , temos duas opções:  $\mathcal{Y}_i = 1$ , logo  $Z_i^+ = 1$ ; ou  $X_i^* = 1$ , fazendo com que  $X_i = 1$  (pois, caso contrário, estaria no aglomerado infinito da origem). Assim,  $X_i^+ = 1$  e  $Z_i^+ = 1$ . Portanto, se  $E$  e  $A_n$  ocorrem,  $B_n$  tem que ocorrer. Podemos verificar que, para  $p > p_c$  e  $\delta > 0$ , cada  $f_1(n), \dots, f_5(n)$  é positivo e a soma de todos os  $f_i(n)$  é igual a 1.

Além disso, para  $n$  fixo, as ocorrências de  $A_{n+1}, B_{n+1}, E$  são completamente determinadas pelas ocorrências de  $(A_n^{(1)}, B_n^{(1)}, E^{(1)})$ ,  $(A_n^{(2)}, B_n^{(2)}, E^{(2)})$ , e pelos valores de  $X_0$  e  $\mathcal{Y}_0$ . De fato, suponha que os seguintes eventos ocorrem  $(\neg E^{(1)}, A_n^{(1)}, \neg B_n^{(1)})$ , assim como  $(\neg E^{(2)}, \neg A_n^{(2)}, \neg B_n^{(2)})$  e  $X_0 = 1$  (observe que isso tem probabilidade  $pf_1(n)f_4(n)$ ). Logo, também ocorre  $(\neg E, A_{n+1}, \neg B_{n+1})$ , cuja probabilidade de acontecer é  $f_4(n+1)$ . O mesmo é verdade quando trocamos os papéis de  $\mathcal{T}_1$  e  $\mathcal{T}_2$ , o que nos dá uma contribuição de  $2pf_1(n)f_4(n)$  a  $f_4(n+1)$ . O evento  $(\neg E, A_{n+1}, \neg B_{n+1})$  também acontece se houver a ocorrência simultânea dos eventos  $\neg E^{(1)}, \neg A_n^{(1)}, \neg B_n^{(1)}, \neg E^{(2)}, A_n^{(2)}, B_n^{(2)}$ ,  $X_0 = 1, \mathcal{Y}_0 = 0$ , e o mesmo com 1 e 2 trocados, o que contribui com  $2p(1-\delta)f_1(n)f_3(n)$  a  $f_4(n+1)$ . Então, temos

$$f_4(n+1) \geq 2p(1-\delta)f_1(n)f_3(n) + 2pf_1(n)f_4(n). \quad (3.10)$$

É possível transformar (3.10) numa igualdade se encontrarmos todas as contribuições necessárias. Contudo, para essa demonstração, é suficiente a estimativa acima.

Da forma com que foram definidas, as funções  $f_1(n)$  e  $f_2(n)$  são crescentes em  $n$  e  $f_3(n)$  e  $f_5(n)$  são decrescentes em  $n$ . A partir dessa monotonicidade, seus limites quando  $n \rightarrow \infty$ , que denotaremos por  $f_1, f_2, f_3, f_5$ , existem e dependem dos valores de  $p$  e  $\delta$ . Como a soma  $\sum_i f_i(n) = 1$ , o limite  $f_4$  da sequência  $f_4(n)$  também tem que existir. Além disso, os limites satisfazem o análogo da equação (3.10).

Continuando a demonstração do teorema, seja  $\delta > 0$  dado e suponha que  $p$  é tal que  $\theta(p, \delta) = 0$ . Assim, o evento  $A_n$  não ocorre, fazendo com que  $f_3(n) + f_4(n) + f_5(n) \rightarrow 0$  e  $f_2(n) = \mathbb{P}_{p, \delta}(E, \neg A_n, \neg B_n) = \theta(p)$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Como  $\sum_i f_i(n) = 1$ ,  $f_1(n) \rightarrow 1 - \theta(p)$ , quando  $n \rightarrow \infty$ . Escolha  $\varepsilon > 0$  tal que  $(1 + \delta(1 - \delta))(1 - \varepsilon) > 1$ , o que será conveniente a seguir. Por causa da convergência de  $f_1(n)$  para  $1 - \theta(p)$ , podemos encontrar um  $n_0$  tal que  $\forall n > n_0$ ,  $f_1(n) > 1 - \theta(p) - \varepsilon$ . Aplicando isso a (3.10), temos, para todo  $n > n_0$ ,

$$f_4(n+1) \geq (2p(1-\delta)f_3(n) + 2pf_4(n))(1 - \theta(p) - \varepsilon). \quad (3.11)$$

Agora podemos usar

$$f_3(n) \geq \delta \frac{1-p}{p} f_4(n), \quad (3.12)$$

que pode ser obtida a partir das definições. De fato

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_{p,\delta}(\neg E, A_n, \neg B_n) &= \mathbb{P}_{p,\delta}(\mathcal{X}_0 = 1, \neg E, A_n, \neg B_n) \\ &= p \mathbb{P}_{p,\delta}(\neg E, A_n, \neg B_n | \mathcal{X}_0 = 1) \\ &\leq p \mathbb{P}_{p,\delta}(\neg E, A_n, B_n | \mathcal{X}_0 = 0, \mathcal{Y}_0 = 1) \\ &= p \frac{\mathbb{P}_{p,\delta}(\neg E, A_n, B_n, \mathcal{X}_0 = 0, \mathcal{Y}_0 = 1)}{(1-p)\delta} \\ &\leq \frac{p}{(1-p)\delta} \mathbb{P}_{p,\delta}(\neg E, A_n, B_n), \end{aligned}$$

onde a primeira desigualdade deve-se ao fato de que, ao mudar de  $\neg B_n$  para  $B_n$ , temos que ter  $\mathcal{Y}_0 = 1$  para garantir a ocorrência de  $A_n$ .

Aplicando isso a (3.11), obtemos para todo  $n > n_0$ ,

$$f_4(n+1) \geq (2p + 2(1-\delta)\delta(1-p))(1 - \theta(p) - \varepsilon) f_4(n).$$

Se tivermos

$$(2p + 2(1-\delta)\delta(1-p))(1 - \theta(p) - \varepsilon) > 1, \quad (3.13)$$

vamos obter  $f_4(n+1) > f_4(n)$  para todo  $n > n_0$ , o que contradiz a hipótese de que, para o valor escolhido de  $p$ ,  $f_4(n) \rightarrow 0$ , quando  $n \rightarrow \infty$ .

Se colocarmos  $p = p_c = 1/2$  na desigualdade (3.13), temos que esta é satisfeita devido à nossa escolha de  $\varepsilon$ .

$$\begin{aligned} (2p_c + 2(1-\delta)\delta(1-p_c))(1 - \theta(p_c) - \varepsilon) &= (2 \cdot 1/2 + 2(1-\delta)\delta(1-1/2))(1 - \theta(1/2) - \varepsilon) \\ &= (1 + \delta(1-\delta))(1 - \varepsilon) > 1. \end{aligned}$$

Então, por continuidade, existe um  $p' > p_c$  tal que a desigualdade é satisfeita para todo  $p \in [p_c, p']$ . Como isso faz com que encontremos uma contradição, só podemos concluir que a hipótese feita inicialmente estava errada e, portanto, temos que  $\theta(p, \delta) > 0$  para todos esses  $p$ . Resumindo, provamos o seguinte:

$$\forall \delta > 0 \quad \exists p' > p_c \quad \text{tal que} \quad \forall p \in [p_c, p'], \text{ temos } \theta(p, \delta) > 0. \quad (3.14)$$

A partir disso, temos a parte (iii) do teorema como segue: seja  $\delta > 0$ . Por (3.14) podemos encontrar um  $\hat{p} > p_c$  que satisfaz  $\theta(\hat{p}, \delta/2) > 0$  e tomando  $\hat{p}$  suficientemente perto de  $p_c$ ,

$$\hat{p} + (1 - \hat{p})\delta/2 < p_c + (1 - p_c)\delta,$$

e então  $\hat{p} + (1 - \hat{p})\delta/2 < p + (1 - p)\delta$  para todo  $p \in [p_c, \hat{p}]$ . O Corolário (1.1) implica que, para todo  $p \in [p_c, \hat{p}]$ ,  $\theta(p, \delta) \geq \theta(\hat{p}, \delta/2)$ , o que é estritamente positivo.

□

# APÊNDICE A - Propriedades da Associação

Uma definição de associação alternativa à enunciada no capítulo 1, dada em [6], é considerar duas variáveis aleatórias  $S$  e  $T$  como associadas se  $Cov[S, T] = \mathbb{E}ST - \mathbb{E}S\mathbb{E}T \geq 0$ . Observe que essa definição é equivalente à dada anteriormente, pois

$$\mathbb{E}ST - \mathbb{E}S\mathbb{E}T \geq 0 \Leftrightarrow \mathbb{E}ST \geq \mathbb{E}S\mathbb{E}T,$$

que, como mostramos naquela seção, é equivalente a (1.5).

**Definição 3.1.** Dizemos que as variáveis aleatórias  $T_1, \dots, T_n$  são **associadas** se

$$Cov[f(S), g(T)] \geq 0$$

para todas as funções não decrescentes  $f$  e  $g$  para as quais  $\mathbb{E}f(T)$ ,  $\mathbb{E}g(T)$  e  $\mathbb{E}f(T)g(T)$  existem.

Vamos agora à demonstração das propriedades usadas no Lema (1.1):

★ *Uma coleção de variáveis aleatórias independentes é associada.*

*Demonstração.* Se as variáveis aleatórias  $S = (S_1, S_2, \dots, S_n)$  são independentes, então  $f$  e  $g$  aplicadas à esta também o são:

$$\mathbb{E}f(S_i)g(S_j) = \mathbb{E}f(S_i)\mathbb{E}g(S_j).$$

Logo,

$$Cov[f(S_i), g(S_j)] = \mathbb{E}f(S_i)g(S_j) - \mathbb{E}f(S_i)\mathbb{E}g(S_j) = 0.$$

□



- ★ *Se dois conjuntos de variáveis aleatórias associadas são independentes um dos outros, sua união é um conjunto de variáveis aleatórias associadas.*

*Demonstração.* Sejam  $S = (S_1, S_2, \dots, S_n)$  e  $T = (T_1, \dots, T_n)$  dois conjuntos de variáveis aleatórias associadas, com  $S$  e  $T$  independentes uma da outra. Sejam  $f, g$  funções não decrescentes. Escrevendo  $f$  para  $f(S, T)$  e  $g$  para  $g(S, T)$ , temos que

$$\begin{aligned} \text{Cov}[f, g] &= \mathbb{E}_{S, T} fg - \mathbb{E}_{S, T} f \mathbb{E}_{S, T} g \\ &= \mathbb{E}_S \mathbb{E}_T fg - \mathbb{E}_S \{ \mathbb{E}_T f \mathbb{E}_T g \} + \mathbb{E}_S \{ \mathbb{E}_T f \mathbb{E}_T g \} - \mathbb{E}_S \mathbb{E}_T f \mathbb{E}_S \mathbb{E}_T g \\ &= \mathbb{E}_S (\text{Cov}_T [f, g]) + \text{Cov}_S [\mathbb{E}_T f, \mathbb{E}_T g]. \end{aligned}$$

onde  $\mathbb{E}_S$  denota a esperança na distribuição de  $S$ ,  $\mathbb{E}_T$  a esperança na distribuição de  $T$ , e  $\mathbb{E}_{S, T}$  a esperança na distribuição conjunta de  $S$  e  $T$ . Temos que  $\mathbb{E}_{S, T} = \mathbb{E}_S \mathbb{E}_T$  porque  $S$  e  $T$  são independentes. Como  $\text{Cov}_T [f(s, T), g(s, T)] \geq 0$ , para cada  $s$  fixo, pois  $T$  é associada, então  $\mathbb{E}_S \text{Cov}_T [f, g] \geq 0$ . As funções  $\mathbb{E}_T f(s, T)$ ,  $\mathbb{E}_T g(s, T)$  são não decrescentes em  $s$  e denotando  $F(s) = \mathbb{E}_T f(s, T)$  e  $G(s) = \mathbb{E}_T g(s, T)$ , temos

$$\text{Cov}_S [\mathbb{E}_T f, \mathbb{E}_T g] = \text{Cov}_S [F(s), G(s)] \geq 0,$$

pois  $S$  é associada. □

- ★ *Funções não-decrescentes de variáveis aleatórias associadas são associadas.*

*Demonstração.* Sejam  $T_1, \dots, T_n$  associadas,  $f_i$  não-decrescentes e  $S_i \equiv f_i(T)$ ,  $i = 1, \dots, m$ . Se  $f$  e  $g$  são não-decrescentes, então  $f(f_1, \dots, f_m)$  e  $g(f_1, \dots, f_m)$  são não-decrescentes. Então, pela definição acima

$$\text{Cov}_S [f(S), g(S)] = \text{Cov}_T [f(f_i(T)), g(f_i(T))] \geq 0. \quad \square$$

Para maiores informações sobre associação e suas propriedades, veja o artigo "*Association of random variables, with applications*" (ref. [6]).

## APÊNDICE B - Existência de percolação, a construção dinâmica do aglomerado infinito

Para demonstrar a existência de percolação num processo que domina outro com parâmetro maior que  $p_c$  vamos usar uma técnica desenvolvida por Grimmett e Marstrand na seção 3 de [9].

Seja  $F$  um subconjunto infinito conexo de  $\mathbb{Z}^d$  contendo a origem. Vamos começar atribuindo uma ordem para os elos do grafo induzido por  $F : e_0, e_1, e_2, \dots$ . Seja  $g : V(\mathbb{Z}^d) \rightarrow \{0, 1\}$  uma variável aleatória dada, em que para cada  $v \in V(\mathbb{Z}^d)$ , dizemos que  $v$  é aberto se  $g(v) = 1$ ; e  $v$  é fechado se  $g(v) = 0$ . Sendo assim, vamos definir indutivamente a seqüência  $(S_n) = (A_n, B_n)$ ,  $A_n, B_n \in F$ , formada por pares ordenados de subconjuntos de  $V(\mathbb{Z}^d)$  da seguinte forma:

$$S_0 = (A_0 = \{v_0\}, B_0 = \emptyset) = (\{v_0\}, \emptyset) \quad (3.15)$$

$$S_n = \begin{cases} (A_1 = A_0 \cup \{v_1\}, B_1 = B_0 = \emptyset), & \text{se } g(v_1) = 1 \\ (A_1 = A_0 = \{v_0\}, B_1 = B_0 \cup \{v_1\} = \{v_1\}), & \text{se } g(v_1) = 0. \end{cases} \quad (3.16)$$

em que  $v_0$  é a origem. Agora vamos definir  $S_{t+1}$ ,  $t > 0$ , como segue:

◇ **Caso 1.** Seja  $v_t$  o último vértice adicionado a  $A_{t-1}$  ou a  $B_{t-1}$  no  $t$ -ésimo passo, se tal sítio existir. Tome  $e_{t+1} = \langle v_t, v_{t+1} \rangle$  como sendo o elo de menor ordem, tal que  $v_{t+1}$  não pertence a  $A_t \cup B_t$ . Então escrevemos:

$$S_{t+1} = \begin{cases} (A_{t+1} = A_t \cup \{v_{t+1}\}, B_{t+1} = B_t), & \text{se } g(v_{t+1}) = 1, \\ (A_{t+1} = A_t, B_{t+1} = B_t \cup \{v_{t+1}\}), & \text{se } g(v_{t+1}) = 0. \end{cases} \quad (3.17)$$

◇ **Caso 2.** Se o  $v_{t+1}$  do Caso 1 não existir, dizemos que  $S_{t+1} = S_t$

Observe que, se o caso 2 ocorre, não há aglomerado infinito saindo da origem. De fato,  $A_t$  é um subconjunto desse aglomerado, e  $(A_n)$  se torna estacionário depois do  $t$ -ésimo passo e, assim,  $A_t$  tem no máximo  $t + 1$  elementos.

No limite, defina  $S = (A, B)$ , em que

$$A = \bigcup_{t=1}^{\infty} A_t \quad \text{e} \quad B = \bigcup_{t=1}^{\infty} B_t.$$

Então, após examinar os vértices de  $F$  um por um podemos ver que se a origem  $O$  é aberta, eventualmente vamos construir o aglomerado aberto  $A$  contendo  $O$  e contido em  $F$ . Observe que  $B$  é o limite externo (fronteira) de  $A$  em  $F$ .

O procedimento acima resulta numa seqüência infinita  $\mathcal{S} = (S_0, S_1, \dots)$  que examina os valores  $g(v_1), g(v_2), \dots$ . O mesmo procedimento pode ser usado se  $\{g(v_i)\}$  são variáveis aleatórias binárias e o resultado  $\mathcal{S}$  é, então, uma seqüência aleatória. Vamos escrever, para  $t \geq 0$ ,

$$\rho(\mathcal{S}, t) = \begin{cases} \mu(g(v_{t+1}) = 1 | S_0, S_1, \dots, S_t), & \text{se } v_{t+1} \text{ existe,} \\ 1, & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.18)$$

em que  $\mu$  é a medida de probabilidade associada à seqüência de variáveis aleatórias  $\{g(v_i)\}$ .

Seja  $(f(x) : x \in \mathbb{Z}^d)$  uma família de variáveis aleatórias independentes com distribuição uniforme em  $[0, 1]$ , e escreva

$$\Omega^* = [0, 1]^{\mathbb{Z}^d}.$$

Seja  $\mathcal{F}^*$  a  $\sigma$ -álgebra usual de  $\Omega^*$  e  $\mathcal{P}$  a medida de probabilidade em  $(\Omega^*, \mathcal{F}^*)$ . Para cada  $\hat{p} \in [0, 1]$  e  $x \in \mathbb{Z}^d$  dizemos que  $x$  está  $\hat{p}$ -aberto se  $f(x) < \hat{p}$  e está  $\hat{p}$ -fechado se  $f(x) \geq \hat{p}$ . Então,  $\mathcal{P}(x \text{ está } \hat{p}\text{-aberto}) = \hat{p}$  e  $\mathcal{P}(x \text{ está } \hat{p}\text{-fechado}) = 1 - \hat{p}$ .

**Lema 3.1.** Usando a notação acima, suponha que existe  $\gamma$  tal que  $\gamma > p_c(F)$  e

$$\rho(\mathcal{S}, t) \geq \gamma, \quad \forall \mathcal{S}, t. \quad (3.19)$$

Então,

$$\mu(|A| = \infty) > 0. \quad (3.20)$$

*Demonstração.* Sejam  $(f(x) : x \in \mathbb{Z}^d)$  as variáveis aleatórias mencionadas no parágrafo anterior e considere o processo  $\mathcal{J}$  com medida produto associada  $\mathcal{P}$  como definida acima.

Dizemos que a origem de  $\mathbb{Z}^d$  é *verde* se  $f(O) \leq \mu(g(O) = 1)$ , e é *vermelha* caso contrário. Se a origem é vermelha terminamos o processo. Se a origem é verde encontramos o elo de menor ordem  $e_1$  anexo à origem, e declaramos seu outro vértice-final  $v_2$  verde se  $f(v_2) \leq \mu(g(v_2) = 1 | S_1 = \sigma_1)$ , onde  $\sigma_1 = (A_1, B_1)$ ,  $A_1 = \{O\}$  e  $B_1 = \{\emptyset\}$ . Vamos iterar esse processo passo a passo como descrito anteriormente. O passo geral é declarar  $v_{t+1}$ , se existir, verde se

$$f(v_{t+1}) \leq \mu(g(v_{t+1}) = 1 | S_i = \sigma_i \text{ para } 0 \leq i \leq t)$$

e vermelho caso contrário, onde  $\sigma_i(A_i, B_i)$  é o vetor do conjunto  $A_i$  de vértices verdes e o conjunto  $B_i$  de vértices vermelhos depois de se considerar  $v_i$ ,

$$\sigma_i = \begin{cases} (A_{i-1} \cup \{v_i\}, B_{i-1}), & \text{se } f(v_i) \leq \mu(g(v_i) = 1 | S_j = \sigma_j \text{ para } 0 \leq j \leq i), \\ (A_{i-1}, B_{i-1} \cup \{v_i\}), & \text{caso contrário.} \end{cases} \quad (3.21)$$

Seja  $A$  o aglomerado no limite de vértices verdes, como limite externo  $B$  em  $F$ . Segue se (3.19) que todo vértice em  $B$  é  $\gamma$ -fechado. O aglomerado  $C_\gamma$  de vértices  $\gamma$ -abertos na origem não pode intersepar  $B$ , e então  $C_\gamma$  é um subconjunto de  $A$ . Por outro lado,  $\gamma > p_c(F)$ , então existe uma probabilidade estritamente positiva de que  $C_\gamma$  é infinito, e assim,  $\mathcal{P}(|C_\gamma| = \infty) > 0$ . O processo  $\mathcal{J}$  tem a mesma distribuição do processo  $\mathcal{S}$  e o resultado (3.20) segue.  $\square$

Para maiores informações sobre essa construção e suas consequências veja o artigo "*The supercritical phase of percolation is well behaved.*" (ref. [9]).

## Referências Bibliográficas

- [1] van den Berg, J. e Brower, R. (2004) Self-Destructive Percolation, *Random Structures and Algorithms* **24**, 480-501.
- [2] van den Berg, J. e de Lima, B.N.B. (2009) Linear Lower Bounds for  $\delta_c(p)$  for a Class of 2D Self-Destructive Percolation Models, *Random Structures and Algorithms* **34**, 520-526.
- [3] Braga, G., Oliveira, M., Sanchis, R. e Schieber, T. (2002) Percolação para Principiantes. UFMG. Disponível em <<http://www.mat.ufmg.br/rsanchis/Artigos/percolacaoprincipiantes.pdf>>.
- [4] Broadbent, S.R., e Hammersley, J.M. (1957) Percolation processes I. Crystals and mazes, *Proceedings of Cambridge Philosophical Society* **53**, 629-641.
- [5] Brower, R. (2005) *Percolation, forest-fires and monomer-dimers*. PhD Thesis, Amsterdam.
- [6] Esary, J.D., Proshan, F. e Walkup, D.W. (1967) Association of random variables, with applications, *Ann. Math. Statistics* **38**, 1466-1474.
- [7] Fontes, L.R. Notas em Percolação. IME -USP. Disponível em <<http://www.ime.usp.br/lrenato/percolacao.pdf>>.
- [8] Grimmett, G.R. (1999) *Percolation*, 2ª ed, Springer-Verlag, Berlim.
- [9] Grimmett, G.R. e Marstrand, J.M. (1990) The supercritical phase of percolation is well behaved, *Pro. Royal Society London A*, 439-457.
- [10] Hara, T. e Slade, G.(1990) Mean-field critical behaviour of percolation in high dimensions, *Communication in Mathematical Physics* **128**, 333-391.

- [11] Kesten, H. (1980) The critical probability of bond percolation on the square lattice equals  $1/2$ . *Communications in Mathematical Physics* **74**, 41-59.
- [12] Kesten, H. (1982) *Percolation Theory for Mathematicians*, Birkhäuser, Boston.