

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

José Alberto Duarte Maia

Geometria Enumerativa de Variedades Projetivas Contendo Retas

Belo Horizonte

2010

JOSÉ ALBERTO DUARTE MAIA

Geometria Enumerativa de Variedades Projetivas Contendo Retas

Tese apresentada ao Departamento de Matemática da
Universidade Federal de Minas Gerais para obtenção
do título de Doutor em Matemática.

Área de Concentração:
Geometria Algébrica.

Orientador:
Israel Vainsencher.

Belo Horizonte

2010

Dedico este trabalho
À minha esposa Crislay
Aos meus pais Celina e José
Aos meus filhos Pedro e Hannah
Aos meus nove irmãos, em especial Aila e Eudes

Agradecimentos

Agradeço a Deus, pelas oportunidades e pela saúde para caminhar.

Ao meu orientador Israel Vainsencher, pelo incentivo, motivação, colaboração e principalmente pelo brilho nos olhos ao discutir matemática.

À minha esposa Crislay, pela compreensão e pelas sugestões enriquecedoras.

Ao meu filho Pedro, pelos convites irrecusáveis para brincar.

Aos colegas de Recife, em especial Rodrigo, Eder e Aldir, pela amizade e companheirismo.

Aos colegas de BH, Eden, Adriana, Viviana, pela amizade e em especial ao companheiro Heleno Cunha por ser um “irmão”.

Aos colegas da URCA, pela compreensão.

Ao Departamento de Matemática da UFC, pelo apoio.

Agradeço ao professor André Meireles pela colaboração inestimável na elaboração dos “scripts” para a implementação da fórmula de Bott.

Aos professores do Departamento de Matemática da UFPe pelo excelente instrumental teórico oferecido.

Por fim, os maiores agradecimentos são devidos à sociedade brasileira que por meio de seus órgãos de fomento (CAPES e CNPq) financiou meus estudos desde a graduação.

Geometria Enumerativa de Variedades Projetivas

Contendo Retas

Resumo

O principal objetivo desta tese é enumerar cones sobre variedades singulares satisfazendo condições de incidência apropriadas com subespaços lineares. Também estudamos as famílias de superfícies de grau $d \geq 4$ em \mathbb{P}^3 que contêm uma, duas e três retas, respectivamente.

Palavras-chave: Cones, singularidades, superfícies contendo retas, geometria enumerativa.

Enumerative Geometry of Projective Varieties containing lines

Abstract

The main aim of this thesis is to enumerate cones over singular varieties satisfying appropriate incidence conditions to linear subspaces. We study also the families of surfaces of degree $d \geq 4$ in \mathbb{P}^3 containing one, two and three lines respectively.

Keywords: Cones, singularities, surfaces containing lines, enumerative geometry.

Introdução

Esta tese tem o objetivo de estudar, do ponto de vista enumerativo, famílias de variedades projetivas cujos membros possuem geometria de tipo especial, no sentido que apresentam conjunto singular de dimensão positiva ou no sentido que contêm curvas de um tipo não esperado. Especificamente, estudamos famílias de cones em espaços projetivos, cujas bases possuem um número finito (menor que sete) de pontos duplos ordinários e o vértice é um subespaço linear de dimensão adequadamente complementar. Também estudamos as famílias de superfícies de grau maior ou igual a quatro em \mathbb{P}^3 que contêm uma, duas e três retas, respectivamente. Construimos espaços de parâmetros para tais famílias e usamos isso para obter informações enumerativas.

A literatura consultada registra várias contribuições ao estudo enumerativo de famílias de variedades projetivas com singularidades isoladas. O exemplo mais impactante é certamente o resultado obtido por L. Caporaso e J. Harris em [6] para o grau das chamadas variedades de Severi, que parametrizam as famílias de curvas planas com um número prescrito de singularidades. Também encontramos trabalhos que consideram variedades de Severi de curvas em superfícies projetivas arbitrárias (veja [30], [19]), ou mesmo generalizações que passam do caso de curvas ao caso de hipersuperfícies com singularidades isoladas contidas em variedades projetivas, a exemplo de [31]. No entanto, pouco se conhece a respeito da geometria enumerativa de famílias de variedades projetivas, cujos membros possuem singularidades não isoladas.

Um caso inicial a se considerar é aquele em que as variedades são singulares ao longo de uma reta, (ou de um número finito de retas). Nesse ponto, observamos que ao investigarmos a família de superfícies de \mathbb{P}^3 que são singulares ao longo de uma reta, somos levados naturalmente a investigar superfícies de \mathbb{P}^3 que contêm retas. De fato, graças ao teorema de Noether-Lefschetz ([22]), sabe-se que uma superfície genérica em \mathbb{P}^3 de grau maior ou igual a quatro não contém curvas que não sejam suas interseções completas com outras superfícies. Esse fato dá origem ao estudo do chamado lugar de Noether-Lefschetz, cujos pontos parametrizam as superfícies que contêm curvas de tipo inesperado. Em particular, temos a componente maximal (dimensionalmente, veja [23]) cujos pontos correspondem a superfícies contendo retas.

Passemos à descrição do conteúdo dos capítulos, bem como dos resultados obtidos.

O objetivo dos dois primeiros capítulos é estudar a família de cones em \mathbb{P}^m , com $m \geq 3$, cujas bases são curvas planas com até seis pontos duplos ordinários e o vértice é um subespaço linear de dimensão $m - 3$.

Na seção 1.2, considerando $m = 3$, construímos um fibrado projetivo $\mathbb{P}(S_d\mathcal{F})$ (veja eq.1.1) sobre \mathbb{P}^3 , juntamente com um morfismo genericamente injetivo $\varphi : \mathbb{P}(S_d\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{P}^N$, cuja imagem no espaço projetivo que parametriza as superfícies de grau d em \mathbb{P}^3 é exatamente um espaço de parâmetros da família de cones. Essas construções são feitas de modo análogo para o caso geral $m \geq 3$ (veja a seção 1.7). Nas seções 1.3 e 1.4, usamos as construções da seção 1.2 e com um aparato de sequências exatas e classes características exibimos fórmulas para o grau da família de cones de grau d com uma geratriz nodal e também para cones cuja base é cuspidal, veja as fórmulas 1.22 e 1.25. A fórmula 1.22 se generaliza facilmente para o caso de cones com vértice de dimensão nula em \mathbb{P}^m , cuja base é uma hipersuperfície singular em um hiperplano disjunto do vértice, essa generalização é obtida na seção 1.5, veja a fórmula 1.38. Na seção 1.6, nosso objetivo é generalizar a fórmula 1.25 para o caso de cones com vértice de dimensão nula em \mathbb{P}^m , cuja base é uma hipersuperfície com um ponto duplo degenerado, em um hiperplano disjunto do vértice. Nesse caso, podemos classificar os tipos de singularidades de acordo com o posto da hessiana da equação da base. Usando a fórmula de Harris e Tu, para o lugar de degeneração do posto de uma mapa simétrico de fibrados (veja [15]), obtemos a fórmula 1.44 como generalização imediata da fórmula 1.25. Além disso, também obtemos uma fórmula explícita para o grau da variedade que parametriza os cones com vértice de dimensão nula em \mathbb{P}^m , cuja base é uma hipersuperfície (em um hiperplano disjunto do vértice) com um ponto duplo degenerado com hessiana de co-posto igual a dois (Vainsencher [31] denomina esse tipo de singularidade de cork2), veja fórmula 1.50. Como consequência da fórmula 1.50, fazendo $m = 3$, obtemos a fórmula 1.52 que fornece o grau da variedade que parametriza os cones de \mathbb{P}^3 sobre curvas planas com um ponto triplo.

Por fim, observamos que todas essas fórmulas admitem versões para o caso em que deixamos o vértice variar apenas ao longo de um subespaço de codimensão k em \mathbb{P}^m , veja as fórmulas 1.23; 1.26; 1.39; 1.44 e 1.53. Em particular, quando tomamos $k = m$, significa que fixamos um vértice e os resultados obtidos coincidem com resultados já conhecidos, veja a fórmula 1.40. Por esse método, obtemos a fórmula 1.54, que diz que o grau da variedade que parametriza as hipersuperfícies de \mathbb{P}^{m-1} , com um ponto duplo degenerado

de tipo “cork2” é dado por

$$\frac{1}{4} \binom{m+2}{3} \binom{m}{3} (d-2)^2 (d-1)^{m-4} ((m+3)d - 2m).$$

Fazendo $m = 4$, chegamos à fórmula 1.55 que é encontrada em [31].

O principal objetivo da seção 1.8 é fornecer resultados (números) comparativos que servirão como pedra de toque para os resultados a serem exibidos na seção 2.2. Aqui, a essência norteadora é o fato de que uma curva plana irreduzível suporta um número limite (igual ao gênero) de singularidades. Assim, por exemplo uma cúbica plana com dois pontos duplos necessariamente se fatora como produto de uma retas e uma cônica. Do mesmo modo, uma quártica plana com quatro pontos duplos se fatora ou como produto de duas cônicas ou de uma reta por uma cúbica singular. Dentre os resultados obtidos, podemos destacar por exemplo que o número de cones quárticos com quatro geratrizes nodais em \mathbb{P}^3 , passando por 13 pontos em posição geral é **236652**. (veja eq.1.66). Do mesmo modo, o número de cones quárticos em \mathbb{P}^4 passando por 16 pontos em posição geral, cujas bases são curvas planas com quatro pontos duplos ordinários e os vértices são retas é **45476595** (veja eq.1.67), servindo de confirmação experimental aos resultados da seção 2.2.

Na seção 2 transcrevemos as ferramentas, construídas em [30], que possibilitam nossa abordagem ao problema de enumerar cones com mais de uma geratriz nodal.

Na seção 2.1 apresentamos o resultado principal desse primeiro capítulo, o teorema 2.1.1, que nos ensina a calcular o grau $c_{n,d}^m$ da variedade $C_{n,d}^m \subset \mathbb{P}^N$ que parametriza a família de cones em \mathbb{P}^m , com vértice de codimensão três e cujas bases são curvas planas com $n(\leq 6)$ pontos duplos ordinários. Por fim, na seção 2.2 exibimos fórmulas polinomiais explícitas para $c_{n,d}^m$, nos casos $m = 3$ e $m = 4$. Essas fórmulas são obtidas com a ajuda do MAPLE, implementando adaptações dos “scripts” descritos em [31].

No segundo capítulo temos como objetivo estudar as hipersuperfícies de \mathbb{P}^m que são cones com vértice de dimensão $m-4$ sobre superfícies, contidas em um \mathbb{P}^3 variável disjunto do vértice, com até seis pontos duplos ordinários. Mais especificamente, consideramos o caso $m = 4$. Na seção 3.2 apresentamos construções análogas às que fizemos na seção 1.2 do primeiro capítulo. Na seção 3.3, tomando [31] como referência, apresentamos as singularidades de tipo “cork2” para o caso específico de superfícies; o principal resultado apresentado aqui é a proposição 3.3.1, que diz respeito aos tipos de singularidades que

podem ocorrer nos membros de um sistema linear de superfícies, suficientemente geral, de dimensão menor ou igual a seis. A referência original para essa proposição é a proposição 1.1 de [31] e sua demonstração é análoga a demonstração da proposição 2.1.1. Na seção 3.4, novamente para a comodidade do leitor transcrevemos de [31], a construção das classes dos lugares de singularidades de tipo “cork2” e dos seus parentes próximos. Finalizamos a seção apresentando o teorema 3.4.1, que nos ensina a calcular o grau $c_{n,d}^{4,2}$ da subvariedade $C_{n,d}^{4,2} \subset \mathbb{P}^N$, com $N = N(d, 4) - 1$, (cf. 1.2, p. 8) que parametriza os cones de \mathbb{P}^4 com vértice de dimensão nula e cuja base é uma superfície de grau d contida em um hiperplano e com n até seis pontos duplos ordinários. Por fim, na seção 3.5 apresentamos fórmulas polinomiais para $c_{n,d}^{4,2}$, obtidas com ajuda do MAPLE e usando essencialmente os mesmos “scripts” usados para obter as fórmulas do primeiro capítulo.

A partir do quarto capítulo começamos a investigar as superfícies de grau $d \geq 4$ em \mathbb{P}^3 , que contêm retas. Quando olhamos para superfícies contendo uma reta, ou seja, quando consideramos a componente maximal do lugar de Noether-Lefschetz, que denotamos por \mathbb{X}_d^1 , a situação é simples e está descrita na seção 4.2, para servir de motivação ao que desenvolvemos nas seções seguintes. A variedade \mathbb{X}_d^1 é obtida como imagem da projeção de um subfibrado projetivo $\mathbb{P}(\mathcal{F}_d^1) \subset \mathbb{G} \times \mathbb{P}^N$, onde $N = N(d, 3) - 1$ e \mathbb{G} denota a grassmanniana de retas de \mathbb{P}^3 , sobre o segundo fator. O grau de \mathbb{X}_d^1 é um polinômio em d de grau 8.

Em linhas gerais, a tarefa mais árdua tanto no quarto capítulo como no quinto, é a construção de espaços de parâmetros para famílias planas de subesquemas de \mathbb{P}^3 cujos membros genéricos coincidem com a união de duas (resp. três) retas disjuntas.

No quarto capítulo essa construção começa por considerar um mapa racional que vai de $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$ para a grassmanniana de quatro formas quadráticas nas coordenadas homogêneas de \mathbb{P}^3 , obtidas pelas multiplicações das equações das retas. A indeterminação desse mapa é resolvida por meio da explosão de $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$ ao longo da diagonal, obtendo assim uma variedade $\mathbb{G}(2)$ sobre a qual temos um fibrado \mathcal{F}_2^2 de posto quatro, subfibrado do fibrado trivial com fibra o espaço das formas quadráticas. As fibras de \mathcal{F}_2^2 são espaços vetoriais gerados por quatro quádricas que definem subesquemas de \mathbb{P}^3 , com polinômio de Hilbert $2t + 2$ e que têm como suporte (genericamente) a união de duas retas disjuntas (veja a seção 4.3). Daí, multiplicando \mathcal{F}_2^2 por formas lineares, obtemos indutivamente os fibrados \mathcal{F}_d^2 (veja diag. 4.15). A projeção de $\mathbb{P}(\mathcal{F}_d^2) \subset \mathbb{G}(2) \times \mathbb{P}^N$ sobre o segundo fator, denotada

por \mathbb{X}_d^2 , é exatamente o fecho do lugar das superfícies de grau d que contêm duas retas disjuntas. O cálculo efetivo do grau de \mathbb{X}_d^2 , para cada d fixado, é feito usando a fórmula de Bott. MAPLE é usado para rodar “scripts” que calculam as contribuições para cada um dos pontos fixos na ação de \mathbb{C}^* , veja a seção 4.4. De fato, o grau de \mathbb{X}_d^2 é um polinômio em d de grau 16, veja o teorema 4.6.1, obtido por interpolação dos resultados fornecidos pela aplicação da fórmula de Bott fazendo $d \leq 20$. Para validar a interpolação, precisamos de uma estimativa para o grau do polinômio desejado. Isso é feito aplicado o teorema de Grothendieck-Riemann-Roch, veja o final de seção 4.6.

Na seção 4.5 verificamos que, por exemplo para $d = 4$, a fórmula de pontos duplos se aplica à projeção de $\mathbb{P}(\mathcal{F}_d^1)$ sobre \mathbb{P}^N , mas fornece resultado discrepante do nosso. Então, identificamos que isso se deve à contribuição que o lugar de pontos duplos recebe da variedade \mathbb{Y}_d^2 , que parametriza as superfícies que contêm duas retas incidentes, *sem* estrutura imersa no ponto de interseção o que implica polinômio de Hilbert $2t + 1$. Os pontos de $\mathbb{G}(2)$ que correspondem a subesquemas com suporte a união de duas retas incidentes, são tais que o polinômio de Hilbert associado é $2t + 2$, por conta de uma componente imersa com suporte no ponto de interseção. Além disso, uma superfície que contenha um tal esquema terá necessariamente uma singularidade nesse ponto de interseção das retas (veja 4.21, p. 96).

Ainda na seção 4.5 exibimos um polinômio em d de grau 14, que fornece o grau de \mathbb{Y}_d^2 (veja a eq.4.25). Esse polinômio é obtido diretamente, sem a fórmula de Bott.

No quinto capítulo, consideramos superfícies contendo três retas. Tudo começa com um mapa racional que vai de $\mathbb{G}(2) \times_{\mathbb{G}} \mathbb{G}(2)$ para uma grassmanniana de oito cúbicas, veja a seção 5.2. Aqui, *oito* é a dimensão do espaço de cúbicas contendo três retas gerais. O lugar de indeterminação desse mapa é não reduzido e contém a diagonal. Após a explosão da diagonal obtemos uma variedade $\mathbb{G}(3)$ juntamente com um mapa para a grassmanniana de oito cúbicas, que ainda é racional, mas o novo lugar de indeterminação se mostra bastante amigável. De fato, o novo lugar de indeterminação é simplesmente o transformado estrito da subvariedade de $\mathbb{G}(2) \times_{\mathbb{G}} \mathbb{G}(2)$ cujo membro geral corresponde aos lados de um triedro, isto é, uma terna de retas não coplanares incidentes em um mesmo ponto, por exemplo do tipo $xy = xz = yz = 0$, veja a seção 5.3. Fazendo a explosão de $\mathbb{G}(3)$ ao longo dessa variedade, obtemos uma variedade $\widehat{\mathbb{G}(3)}$ e sobre ela um fibrado \mathcal{F}_3^3 de posto 8, cujas fibras são espaços vetoriais gerados por cúbicas. O polinômio de Hilbert dos pontos em cima do

divisor excepcional da segunda explosão se mostra correto, igual a $3t + 3$. No entanto, existem pontos em cima do divisor excepcional proveniente da primeira explosão com polinômio de Hilbert $4t$. Como $4 \cdot 3 = 3 \cdot 3 + 3$, os sistemas de cúbicas correspondentes a esses pontos tem o posto correto, igual a 8. Porém, quando multiplicamos as cúbicas por formas lineares e consideramos o mapa para uma grassmanniana de $20 (= 35 - 3 \cdot 4 - 3)$ quárticas, obtemos apenas um mapa racional e não um morfismo. Felizmente, a situação não é das piores e o novo lugar de indeterminação também é amistoso. Essa fábula se desenvolve no decorrer das seções 5.5 e 5.6. Na seção 5.7 apresentamos o almejado espaço de parâmetros para uma família plana de subesquemas de \mathbb{P}^3 , cujo membro genérico coincide com a união de três retas em posição geral. A seção 5.8, para fins de aplicação da fórmula de Bott, encarrega-se da verificação de que os pontos fixos na ação de \mathbb{C}^* são isolados, bem como da contagem desses pontos fixos. Por fim, na seção 5.9 chegamos ao teorema 5.9.1, o qual nos diz que o grau da subvariedade $\mathbb{X}_d^3 \subset \mathbb{P}^N$ que parametriza as superfícies de grau d em \mathbb{P}^3 , que contêm três retas, é dado por um polinômio em d , de grau 24. Esse polinômio é obtido por interpolação dos valores fornecidos pela fórmula de Bott. Novamente, a interpolação é válida, pois uma aplicação do teorema de Grothendieck-Riemann-Roch nos mostra que o grau do polinômio desejado não supera 36. Esse polinômio quando aplicado em $d = 3$ fornece o número **720**, que é condizente com a combinatória das ternas de retas disjuntas em uma superfície cúbica lisa.

Finalmente, o capítulo sexto é destinado ao apêndice. Ali estão depositados alguns dos “scripts” do MAPLE que foram úteis na verificação e/ou obtenção dos resultados da tese. Observamos porém, que a inclusão de todos os “scripts” utilizados ocuparia espaço em demasia. Assim, optamos por omitir alguns desses códigos.

Sumário

| | | |
|----------|--|----------|
| 1 | Cones sobre curvas planas nodais | 5 |
| 1.1 | Introdução | 5 |
| 1.2 | Cones em \mathbb{P}^3 | 6 |
| 1.2.1 | cones degenerados | 6 |
| 1.2.2 | base abstrata | 7 |
| 1.2.3 | dimensão da família de cones | 8 |
| 1.3 | Cones em \mathbb{P}^3 com uma geratriz nodal | 12 |
| 1.3.1 | partes principais | 12 |
| 1.3.2 | cones com uma reta dupla | 14 |
| 1.3.3 | cálculo do grau | 16 |
| 1.3.4 | restringir o vértice | 17 |
| 1.4 | Cones em \mathbb{P}^3 com uma geratriz cuspidal | 18 |
| 1.4.1 | hessiana | 19 |
| 1.4.2 | vértice restrito | 20 |
| 1.5 | Cones em \mathbb{P}^m com base nodal | 21 |
| 1.6 | Cones em \mathbb{P}^m cuja base admite ponto duplo não ordinário | 25 |
| 1.7 | Cones com vértice de dimensão positiva sobre curvas planas | 35 |
| 1.8 | Cones redutíveis | 37 |
| 1.8.1 | dois cones de mesmo vértice | 37 |
| 1.8.2 | dois cones de mesmo vértice bis | 41 |
| 1.8.3 | um cone e vários hiperplanos pelo vértice | 43 |
| 1.8.4 | cones que são uniões de hiperplanos | 45 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 2 | Feixes de contato | 47 |
| 2.1 | Cones com até seis geratrizes nodais | 52 |
| 2.2 | Fórmulas | 60 |
| 3 | Cones sobre superfícies com pontos duplos ordinários | 64 |
| 3.1 | Introdução | 64 |
| 3.2 | Cones sobre (hiper)-superfícies | 64 |
| 3.3 | Singularidades do tipo cork2 | 67 |
| 3.4 | Classes dos ciclos de singularidades do tipo cork2 | 70 |
| 3.5 | Fórmulas para cones sobre superfícies em \mathbb{P}^4 | 73 |
| 4 | Superfícies em \mathbb{P}^3 contendo duas retas | 75 |
| 4.1 | Introdução | 75 |
| 4.2 | Notação e Preliminares | 76 |
| 4.2.1 | uma reta | 76 |
| 4.3 | Duas retas em \mathbb{P}^3 | 79 |
| 4.3.1 | estudo local | 82 |
| 4.3.2 | divisor excepcional | 84 |
| 4.3.3 | retas incidentes a l_0 | 84 |
| 4.3.4 | o espaço de parâmetros | 88 |
| 4.4 | Aplicando a fórmula de Bott | 90 |
| 4.4.1 | explicitando o grau de \mathbb{X}_d^2 | 91 |
| 4.5 | Comparação com a fórmula de pontos duplos | 93 |
| 4.5.1 | a outra componente do lugar de pontos duplos | 95 |
| 4.5.2 | dessingularizar a incidência | 96 |
| 4.5.3 | superfícies contendo duas retas incidentes | 100 |
| 4.6 | O grau de \mathbb{X}_d^2 | 101 |
| 4.6.1 | Grau(\mathbb{X}_d^2) é polinomial | 105 |
| 5 | Superfícies em \mathbb{P}^3 contendo três retas | 108 |
| 5.1 | Introdução | 108 |
| 5.2 | Estudo local e primeira explosão | 108 |
| 5.2.1 | explosão de $\Delta\mathbb{G}'$ | 112 |

| | | |
|----------|---|------------|
| 5.2.2 | os sistemas de cúbicas associados aos pontos de E'' | 114 |
| 5.2.3 | cúbicas associadas a $\Delta' \cap E' \times E'$ | 118 |
| 5.3 | Identificação global do segundo centro de explosão | 122 |
| 5.3.1 | a caminho das quárticas | 127 |
| 5.4 | As órbitas fechadas na ação induzida em \mathbb{G}'' | 129 |
| 5.5 | A segunda explosão | 136 |
| 5.6 | A indeterminação do mapa para quárticas | 144 |
| 5.6.1 | estudo local | 146 |
| 5.7 | O espaço de parâmetros para três retas | 149 |
| 5.8 | Pontos fixos em $\widehat{\mathbb{G}}(3)$ pela ação de \mathbb{C}^* | 153 |
| 5.9 | Aplicação da fórmula de Bott | 161 |
| 6 | Apêndice | 163 |
| 6.1 | Cones com uma geratriz nodal | 163 |
| 6.2 | Cones com duas geratrizes nodais | 165 |
| 6.3 | Casos teste | 171 |
| 6.3.1 | cones quárticos com quatro geratrizes nodais | 171 |
| 6.3.2 | cones quárticos com cinco geratrizes nodais | 173 |
| 6.3.3 | cones quárticos com 6 geratrizes nodais | 173 |
| 6.4 | Superfícies contendo retas | 174 |
| 6.4.1 | rotinas | 174 |
| 6.4.2 | superfícies contendo duas retas | 177 |
| 6.4.3 | superfícies contendo três retas | 180 |

Capítulo 1

Cones sobre curvas planas nodais

1.1 Introdução

Um dos problemas clássicos da geometria enumerativa é o cálculo do grau das chamadas variedades de Severi, que parametrizam as curvas planas irredutíveis de grau d com n pontos duplos ordinários. Esse problema e sucessivas generalizações foram tratados por diversos autores. Em 1996, Caporaso e Harris apresentaram uma fórmula recursiva que resolve completamente o problema no caso de curvas planas (veja [6]). Para o caso de sistemas lineares adequadamente gerais em uma superfície arbitrária e $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, Vainsencher encontrou fórmulas explícitas que expressam o número de curvas n -nodais (veja [30]). Kleiman e Piene usando uma classificação combinatória das singularidades obtiveram fórmulas para o número de curvas com até oito nós num sistema linear amplo em uma superfície projetiva. Göttsche conjecturou que os números que expressam a quantidade de curvas nodais, aparecem como coeficientes de uma função geradora que pode ser obtida como o produto de certas séries de potências universais (veja [11]). Uma outra generalização natural é considerar hipersuperfícies contidas em uma variedade projetiva lisa, como tratado em [31]. Nesse contexto, se a variedade ambiente tem dimensão maior que 2, temos a possibilidade de observar hipersuperfícies irredutíveis com singularidades não isoladas. Por exemplo, podemos investigar o problema de enumerar superfícies em \mathbb{P}^3 , que são singulares ao longo de um número finito de curvas ou, de modo mais simplificado, ao longo de um número finito de retas. Com esse intuito, vamos considerar o subproblema que consiste em enumerar cones em \mathbb{P}^3 , cuja base possui um número finito de nós,

i.e., pontos duplos ordinários. Nosso objetivo neste capítulo é então utilizar métodos semelhantes aos aplicados em [30], para calcular o grau da variedade $C_{n,d}$, obtida como o fecho do subconjunto $C_{n,d}^0 \subset \mathbb{P}^{N(d)-1}$, que parametriza a família dos cones de grau d em \mathbb{P}^3 que são singulares ao longo de exatamente n (menor que sete) geratrizes distintas, no espaço de todas as superfícies de grau d em \mathbb{P}^3 .

1.2 Cones em \mathbb{P}^3

Durante toda esta seção vamos considerar cones em \mathbb{P}^3 . Uma superfície desse tipo é dada como conjunto de zeros de um polinômio homogêneo que possui um ponto singular de ordem igual ao seu grau. Equivalentemente, uma superfície é cone se possui um ponto com a propriedade de que todas as secantes honestas¹ que o contêm estão contidas na superfície. Diremos que um ponto desse tipo é um vértice do cone. Verifica-se facilmente que o conjunto de vértices é um subespaço linear de \mathbb{P}^3 , o qual será chamado simplesmente de vértice do cone.

1.2.1 cones degenerados

Dizemos que um cone em \mathbb{P}^3 é não degenerado, se o vértice tem dimensão zero. Nesse caso, qualquer reta passando pelo vértice e contida no cone é chamada de geratriz do cone. Observamos ainda, que um cone degenerado ou é um plano com estrutura múltipla, caso em que o vértice é bidimensional, ou a união de planos (possivelmente com multiplicidades) se intersectando ao longo de uma reta, que é o vértice do cone. Registramos esse fato em uma proposição.

Proposição 1.2.1. *Se $S \subset \mathbb{P}^3$ é um cone com vértice unidimensional, então S é a união de planos (possivelmente com multiplicidades) se intersectando ao longo de uma reta.*

Prova: De fato, seja $r \subset S$ o vértice e sejam $p, q \in r$ dois pontos distintos. Então para qualquer $t \in S$ fora da reta $r = \langle p, q \rangle$, o plano gerado $h := \langle p, q, t \rangle$ está contido em S . Com efeito, seja $s \in h$ distinto de p e considere a reta $\langle p, s \rangle$. A interseção $\langle p, s \rangle \cap \langle q, t \rangle$ não é vazia e como q é vértice temos que $\langle q, t \rangle \subset S$. Além disso, como $t \notin \langle p, q \rangle$ concluímos que $\langle p, s \rangle$ intersecta S em um ponto distinto de p . Logo, sendo p um vértice segue que

¹pelo menos dois pontos

$\langle p, s \rangle \subset S$ e como s é arbitrário tem-se $h \subset S$. Assim, cada componente irredutível de S (com estrutura reduzida) é um plano contendo a reta $r = \langle p, q \rangle$. \square

Alternativamente, por uma mudança de variáveis podemos supor que a equação de S é um polinômio em apenas duas das variáveis homogêneas de \mathbb{P}^3 , e portanto se escreve como produto de fatores lineares.

1.2.2 base abstrata

Qualquer seção de um cone não degenerado por um plano que não contenha o seu vértice é uma curva plana de grau igual ao grau do cone e é dita uma base desse cone. É claro que uma base está em bijeção com o conjunto das geratrizes do cone. Assim, podemos pensar no conjunto de geratrizes como uma família unidimensional de retas, ou mais precisamente, como uma curva na grassmanniana de retas de \mathbb{P}^3 , $\mathbb{G}[1, 3] \subset \mathbb{P}^5$. Essa curva será chamada de *base abstrata* do cone. Ela é uma curva plana, haja vista que as retas que passam por um ponto $p \in \mathbb{P}^3$ formam um plano $\mathbb{P}_p^2 \subset \mathbb{G}[1, 3]$ (veja [13], exercício 6.5).

Pode-se mostrar que a *base abstrata* é isomorfa a qualquer base do cone (ver [29]). Dessa forma, temos uma correspondência entre a família dos cones de \mathbb{P}^3 e o conjunto dos pares (p, C) , onde $p \in \mathbb{P}^3$ e $C \subset \mathbb{P}_p^2$ é uma curva. Essa correspondência também transporta propriedades geométricas. Por exemplo, a curva C possui tantos pontos duplos quantas forem as retas geratrizes duplas do cone. Ademais é claro que a condição de um cone, de vértice p , passar por um ponto $q \in \mathbb{P}^3 \setminus \{p\}$ equivale à condição de sua *base abstrata* C passar pelo ponto $q^* \in \mathbb{P}_p^2$, que correspondente à reta determinada por p e q . Veremos que o conjunto de todos os pares (p, C) , com $p \in \mathbb{P}^3$ e $C \subset \mathbb{P}_p^2$ variando no espaço das curvas de um grau fixo, possui uma estrutura de variedade, e mais que isso, coincide com o espaço total de um fibrado projetivo sobre \mathbb{P}^3 .

De forma mais precisa, seja \mathcal{T} o fibrado quociente tautológico de \mathbb{P}^3 , dado pela sequência

$$\mathcal{L} \longrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^4 \twoheadrightarrow \mathcal{T}$$

onde $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^4$ é o fibrado trivial de posto 4 e $\mathcal{L} := \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1)$. A fibra de \mathcal{L} sobre $p \in \mathbb{P}^3$ é ninguém menos que a reta $[p]$ representada por p . Por outro lado, um ponto da fibra $\mathbb{P}(\mathcal{T})_p$ corresponde a um subespaço unidimensional de \mathcal{T}_p e esse, por sua vez, corresponde a um subespaço bidimensional de \mathbb{C}^4 contendo $[p]$, o qual se projetiviza como uma reta

passando por p . Desse modo, podemos identificar $\mathbb{P}(\mathcal{T})_p = \mathbb{P}_p^2$, ou ainda,

$$\mathbb{P}(\mathcal{T}) = \{(p, l) \in \mathbb{P}^3 \times \mathbb{G}[1, 3]; p \in l\}.$$

Na verdade, a identificação anterior formaliza-se por meio do isomorfismo entre $\mathbb{P}(\mathcal{T})$ e $\mathbb{P}(\check{\mathcal{S}})$, onde $\check{\mathcal{S}}$ é o dual do fibrado tautológico de $\mathbb{G}[1, 3]$ (ver [29]).

Agora, se \mathcal{F} é o fibrado dual de \mathcal{T} vemos que uma curva $C \subset \mathbb{P}_p^2$, de grau d , corresponde a um ponto da fibra $\mathbb{P}(S_d\mathcal{F})_p$, onde $S_d\mathcal{F} := \text{Sym}_d(\mathcal{F})$ é a d -ésima potência simétrica. Logo,

$$\mathbb{P}(S_d\mathcal{F}) = \{(p, C); p \in \mathbb{P}^3 \text{ e } C \text{ é uma curva de grau } d \text{ em } \mathbb{P}_p^2\} \quad (1.1)$$

como havíamos afirmado.

1.2.3 dimensão da família de cones

Observe que se definirmos

$$N(m, k) := \binom{m+k}{k}, \forall m, k \in \mathbb{N}, \quad (1.2)$$

então o posto de $S_d\mathcal{F}$ é igual a $N(d, 2)$. Logo, $\mathbb{P}(S_d\mathcal{F})$ é um $\mathbb{P}^{N(d,2)-1}$ -fibrado sobre \mathbb{P}^3 e portanto,

$$\dim \mathbb{P}(S_d\mathcal{F}) = N(d, 2) + 2.$$

Esse número é, de fato, a dimensão esperada para a variedade dos cones de \mathbb{P}^3 , pois um ponto de multiplicidade d impõe $\binom{d+2}{3} - 3$ condições independentes no espaço $\mathbb{P}^{N(d,3)-1}$ de todas as superfícies de grau d em \mathbb{P}^3 .

Vejam de forma mais explícita como é dada a correspondência enunciada no primeiro parágrafo. Para fixar idéias, suponhamos que

$$p \in U_0 = \{(X, Y, Z, W) \in \mathbb{P}^3; X \neq 0\}.$$

Assim, podemos escrever $p = (1, y, z, w)$. Uma reta passando por p é determinada por um outro ponto $(X, Y, Z, W) \in \mathbb{P}^3$ diferente de p . Usando coordenadas de Plücker

$$X_{01}, X_{02}, X_{03}, X_{12}, X_{13}, X_{23}$$

em \mathbb{P}^5 , é fácil ver que $\mathbb{P}_p^2 \subset \mathbb{G} \subset \mathbb{P}^5$ é dado pelas equações lineares

$$X_{12} = yX_{02} - zX_{01}, \quad X_{13} = yX_{03} - wX_{01}, \quad X_{23} = zX_{03} - wX_{02},$$

com $X_{01}|_{\mathbb{G}} = -yX + Y$, $X_{02}|_{\mathbb{G}} = -zX + Z$, $X_{03}|_{\mathbb{G}} = -wX + W$. Daí, a restrição das coordenadas de Plücker X_{01}, X_{02}, X_{03} ao plano \mathbb{P}_p^2 são coordenadas homogêneas para esse plano. Assim, usando a notação $X_{0j}(p) := X_{0j}|_{\mathbb{P}_p^2}$, com $j = 1, 2, 3$, vemos que um elemento $L \in \mathcal{F}_p$ se escreve na forma

$$L = aX_{01}(p) + bX_{02}(p) + cX_{03}(p).$$

Em outras palavras, podemos concluir que o conjunto

$$\{X_{01}(p), X_{02}(p), X_{03}(p)\}$$

é base de \mathcal{F}_p , $\forall p \in U_0$. Note que o referencial $\{X_{01}(p), X_{02}(p), X_{03}(p)\}$ fornece uma trivialização local de \mathcal{F} sobre U_0 .

Do mesmo modo,

$$\{X_{01}(p)^\alpha X_{02}(p)^\beta X_{03}(p)^\gamma, \text{ com } \alpha + \beta + \gamma = d\}$$

fornece uma trivialização de $S_d\mathcal{F}|_{U_0}$:

$$\begin{aligned} S_d\mathcal{F}|_{U_0} &\longrightarrow U_0 \times \mathbb{C}^{N(d,2)} \\ (p, f) &\longrightarrow (p, v), \end{aligned}$$

onde v é o vetor cujas coordenadas são os coeficientes de f na base (ordenada)

$$\mathcal{B} = \{X_{01}(p)^\alpha X_{02}(p)^\beta X_{03}(p)^\gamma, \text{ com } \alpha + \beta + \gamma = d\}.$$

Agora, sendo $\mathbb{P}^{N(d,3)-1} = \mathbb{P}(S_d\check{\mathbb{C}}^4)$, temos um morfismo natural

$$\varphi : \mathbb{P}(S_d\mathcal{F})|_{U_0} \longrightarrow \mathbb{P}^{N(d,3)-1} \quad (1.3)$$

que corresponde a olharmos para uma forma de grau d na base \mathcal{B} e vemos uma forma de grau d na base $\{X^i Y^j Z^k W^l, \text{ com } i + j + k + l = d\}$. A transição é determinada pelas relações do “tipo Plücker”

$$\left\{ \begin{array}{l} X_{01}(p) = -yX + Y \\ X_{02}(p) = -zX + Z \\ X_{03}(p) = -wX + W \end{array} \right. \quad (1.4)$$

Mais explicitamente, dado $(p, [f]) \in \mathbb{P}(S_d\mathcal{F})_p$, com $p = (1, y, z, w) \in U_0$, escrevemos

$$f = \sum_{\alpha+\beta+\gamma=d} a_{\alpha\beta\gamma} X_{01}(p)^\alpha X_{02}(p)^\beta X_{03}(p)^\gamma$$

e definimos

$$\begin{aligned} \varphi((p, [f])) &= (-1)^d \sum_{\alpha+\beta+\gamma=d} a_{\alpha\beta\gamma} (yX - Y)^\alpha (zX - Z)^\beta (wX - W)^\gamma \\ &= (-1)^d \sum_{\alpha+\beta+\gamma=d} a_{\alpha\beta\gamma} \{y^\alpha z^\beta w^\gamma X^d - (\alpha y^{\alpha-1} z^\beta w^\gamma Y + \beta y^\alpha z^{\beta-1} w^\gamma Z + \gamma y^\alpha z^\beta w^{\gamma-1} W) X^{d-1} \\ &\quad + \dots + (-1)^d Y^\alpha Z^\beta W^\gamma\}. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Por outro lado, definindo

$$Q(Y, Z, W) := \sum_{\alpha+\beta+\gamma=d} a_{\alpha\beta\gamma} Y^\alpha Z^\beta W^\gamma.$$

Segue que

$$\begin{aligned} \varphi((p, [f])) &= \sum_{l=0}^d \sum_{i+j+k=l} \frac{(-1)^{d+l}}{i!j!k!} \frac{\partial^l Q(y, z, w)}{\partial Y^i \partial Z^j \partial W^k} X^{d-l} Y^i Z^j W^k \\ &= \sum_{l=0}^{d-1} \sum_{i+j+k=l} \frac{(-1)^{d+l}}{i!j!k!} \frac{\partial^l Q(y, z, w)}{\partial Y^i \partial Z^j \partial W^k} X^{d-l} Y^i Z^j W^k + Q(Y, Z, W). \end{aligned}$$

Afirmamos que a superfície

$$S := \{\varphi((p, [f])) = 0\} \subset \mathbb{P}^3$$

é um cone com vértice p . De fato, segue facilmente da definição de φ que para todo $p_0 \in C'$, onde

$$C' := \{Q(Y, Z, W) = 0\} \cap \{X = 0\} \subset \mathbb{P}^3,$$

a reta determinada por p e p_0 está contida em S . Além disso, para qualquer ponto $q \in S$ a reta determinada por p e q está contida em S e portanto intersecta o plano $\{X = 0\}$ em um ponto $p_0 \in C'$. Logo, concluímos que a superfície S coincide com o cone $\overline{C', p}$ (usando a notação de [13]). De outra forma, a expressão que define $\varphi((p, [f]))$ (veja eq.1.5) já nos diz que a menos de uma mudança de coordenadas a equação de S só depende de três variáveis e isso também equivale a dizer que S é cone.

Note que a curva C' é isomorfa à curva (*base abstrata*)

$$C := \{f = 0\} \subset \mathbb{P}_p^2.$$

Por fim, observamos ainda que se a curva C' (ou C) é lisa, então p é o único ponto singular de S . Por outro lado, para cada ponto singular $q \in C'$ a reta determinada por p e q é composta por singularidades de S , da mesma natureza de q (exceto p).

O mapa φ não é injetivo, pois se a curva $C' \subset \mathbb{P}^3$ se degenera como uma união de retas, não necessariamente distintas, passando por um ponto, então $S \subset \mathbb{P}^3$ é uma união de planos se intersectando ao longo de uma reta L . Daí, segue que cada ponto de L tem multiplicidade d , ou seja, o vértice é indeterminado, ou ainda,

$$\varphi^{-1}(S) = \{(q, C); q \in L\}.$$

Porém, essa indeterminação do vértice é o único fenômeno que causa a não injetividade de φ . Em particular, se d é suficientemente grande, então $C_{d,n}^0$ está em bijeção com o subconjunto de $\mathbb{P}(S_d\mathcal{F})$ formado pelos pares (p, C) tais que $C \subset \mathbb{P}_p^2$ possui exatamente n nós distintos. Na verdade, fixado n , basta tomar d de modo que $\binom{d-1}{2} \geq n$, pois com isso teremos que a curva genérica de grau d com n nós será irredutível. Neste caso, $C_{n,d}$ se identifica com $\mathbb{P}(S_d\mathcal{F})$.

Observação 1.2.3.1. Temos uma outra forma de olhar \mathcal{F} como fibrado sobre \mathbb{P}^3 . De fato, como \mathcal{F} é o dual de \mathcal{T} , temos naturalmente uma sequência exata

$$\mathcal{F} \longrightarrow \check{\mathcal{O}}_{\mathbb{P}^3}^4 \longrightarrow \check{\mathcal{L}},$$

com $\check{\mathcal{L}} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$. O mapa sobrejetivo na sequência acima corresponde, fibra a fibra, ao mapa de restrição de um funcional linear a um subespaço. Assim, para cada $p \in \mathbb{P}^3$ a fibra \mathcal{F}_p é o espaço das formas lineares que se anulam em p . Portanto, um ponto da fibra $(S_d\mathcal{F})_p$ é uma forma de grau d que tem multiplicidade igual a d no ponto p , ou seja,

$$\mathbb{Y} := \{(p, S) \in \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^{N(d,3)-1}; m_p(S) := \text{mult. de } S \text{ em } p = d\}$$

é um fibrado projetivo sobre \mathbb{P}^3 e a projeção no segundo fator $\pi_2 : \mathbb{Y} \rightarrow \mathbb{P}^{N(d,3)-1}$ tem como imagem a família de cones de \mathbb{P}^3 .

A desvantagem nessa abordagem é que perdemos de vista as bases abstratas dos cones, e como vimos no parágrafo anterior uma forma simples de impor uma geratriz dupla em um cone é impor um ponto duplo na sua base abstrata. Na ausência da base abstrata, a imposição de geratrizes nodais se torna difícil de tratar em família. Por exemplo, para

impor uma geratriz dupla seria necessário impor um ponto duplo em uma base do cone, o problema é que a escolha de uma base não é canônica.

Por outro lado, o morfismo $\varphi : \mathbb{P}(S_d\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{P}^{N(d,3)-1}$ definido anteriormente é simplesmente a composição da projeção π_2 com o isomorfismo entre $\mathbb{P}(S_d\mathcal{F})$ e \mathbb{Y} , dado pelas relações do tipo Plücker (veja eqs.1.4), isto é,

$$(p, [f]) \mapsto (p, \varphi(p, [f])).$$

Desse ponto de vista não exigiria esforço algum concluir que a imagem de φ é a família dos cones de \mathbb{P}^3 e também que φ é genericamente injetiva, haja vista que π_2 o é.

1.3 Cones em \mathbb{P}^3 com uma geratriz nodal

Nesta seção vamos obter uma fórmula para o grau da variedade que parametriza os cones de grau d em \mathbb{P}^3 com *uma* geratriz nodal. A fórmula encontrada se generaliza facilmente para o caso de cones em \mathbb{P}^m com vértice de dimensão nula, sobre variedades de codimensão igual a dois, contidas em um hiperplano e com um ponto duplo ordinário. A referida generalização será obtida na seção 1.5; as contas a serem feitas no caso geral são essencialmente as mesmas realizadas aqui. Desse modo, caso deseje, o leitor poderá omitir sem prejuízo a leitura desta seção e dirigir-se diretamente para o caso geral. A justificativa para a permanência da atual seção é naturalmente o fato de a mesma ter sido o mote para o caso geral.

Começamos com as mesmas notações da seção anterior e lembramos que sobre o fibrado projetivo $\mathbb{P}(\mathcal{T})$ existe o fibrado em retas tautológico $\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(-1)$, que aparece como subfibrado de \mathcal{T} , dando origem a sequência exata

$$\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(-1) \twoheadrightarrow \mathcal{T} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}. \quad (1.6)$$

1.3.1 partes principais

Se Ω_{π} denota o feixe cotangente relativo de $\mathbb{P}(\mathcal{T}) \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^3$, sabemos que

$$\Omega_{\pi} = \check{\mathcal{Q}} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{T}}(-1).$$

Para uma prova desse fato veja ([2], p.18). Sabemos ainda que o fibrado das partes principais de primeira ordem do fibrado em retas $\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(d)$, denotado por $P_{\pi}^1(\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(d))$, se

encaixa na seguinte sequência exata de fibrados sobre $\mathbb{P}(\mathcal{T})$ (veja [18], p.341)

$$\Omega_\pi \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{T}}(d) \twoheadrightarrow P_\pi^1(\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(d)) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{T}}(d).$$

Sendo $\mathcal{F} = \check{\mathcal{T}}$ temos uma sobrejeção $S_d\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{T}}(d)$. A partir de agora pensamos em \mathcal{F} como fibrado sobre $\mathbb{P}(\mathcal{T})$, tomando sua imagem recíproca por π . Desse modo, $(S_d\mathcal{F})_{(p,l)}$ é o espaço das formas de grau d em $\mathbb{P}(\mathcal{T})_p$, ou seja,

$$(S_d\mathcal{F})_{(p,l)} = H^0(\mathbb{P}(\mathcal{T})_p, \mathcal{O}_{\mathcal{T}}(d)|_{\mathbb{P}(\mathcal{T})_p}).$$

Por outro lado, segue da construção do feixe de partes principais, que existe um mapa natural (“fibra a fibra”)

$$S_d\mathcal{F} \longrightarrow P_\pi^1(\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(d))$$

com a propriedade de ser sobrejetivo em cada fibra.

Em outras palavras, a sobrejeção $S_d\mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathcal{T}}(d)$ se fatora por meio de $P_\pi^1(\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(d))$ e ficamos com o diagrama de fibrados vetoriais sobre $\mathbb{P}(\mathcal{T})$

$$\begin{array}{ccccc} & & S_d\mathcal{F} & & \\ & & \downarrow & \searrow & \\ \Omega_\pi \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{T}}(d) & \twoheadrightarrow & P_\pi^1(\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(d)) & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}_{\mathcal{T}}(d) \end{array}$$

Logo, se denotarmos por \mathcal{E} o núcleo do epimorfismo vertical no diagrama acima, vemos que

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}) \subset \mathbb{P}(S_d\mathcal{F}) \times_{\mathbb{P}^3} \mathbb{P}(\mathcal{T})$$

dá conta exatamente das ternas (p, C, l) , tais que C é singular em l . Além disso, usando a aditividade da função posto, temos (com a notação de 1.2, p. 8)

$$\text{posto}(\mathcal{E}) = \text{posto}(S_d\mathcal{F}) - \text{posto}(P_\pi^1(\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(d))) = N(d, 2) - 3.$$

Daí, temos que $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ é um $\mathbb{P}^{N(d,2)-4}$ -fibrado sobre $\mathbb{P}(\mathcal{T})$. Como $\mathbb{P}(\mathcal{T})$ é um \mathbb{P}^2 -fibrado sobre \mathbb{P}^3 , segue que

$$\dim \mathbb{P}(\mathcal{E}) = N(d, 2) + 1 = \dim \mathbb{P}(S_d\mathcal{F}) - 1,$$

o que já esperávamos, tendo em vista que a projeção no primeiro fator,

$$p_1 : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{P}(S_d\mathcal{F})$$

é genericamente injetiva, e um aberto de sua imagem corresponde aos cones com exatamente uma reta dupla. Ademais, impor uma reta dupla a um cone é o mesmo que impor um ponto duplo distinto do vértice, o que certamente faz a dimensão cair de uma (=4-3) unidade.

Em particular, segue do exemplo 9.9 de [34] que a classe de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ no anel de Chow da variedade $\mathbb{X} = \mathbb{P}(S_d\mathcal{F}) \times_{\mathbb{P}^3} \mathbb{P}(\mathcal{T})$ é dada por

$$[\mathbb{P}(\mathcal{E})] = c_3(P_\pi^1(\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(d)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_d\mathcal{F})}(1)) \cap [\mathbb{X}]. \quad (1.7)$$

1.3.2 cones com uma reta dupla

Queremos calcular o grau da subvariedade $C_{1,d} \subset \mathbb{P}^{N(d,3)-1}$ que parametriza os cones com uma reta dupla. Como já observamos, $C_{1,d}$ tem dimensão igual a $N(d,2) + 1$. Assim,

$$\text{Grau}(C_{1,d}) = \int_{\mathbb{P}^{N(d,3)-1}} c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N(d,3)-1}}(1))^{N(d,2)+1} \cap [C_{1,d}].$$

Por outro lado, temos um mapa birracional

$$\phi = \varphi \circ p_1 : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \longrightarrow \mathbb{P}^{N(d,3)-1},$$

cuja imagem coincide com $C_{1,d}$. Portanto, usando a fórmula de projeção temos

$$\begin{aligned} \text{Grau}(C_{1,d}) &= \int_{\mathbb{P}^{N(d,3)-1}} c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N(d,3)-1}}(1))^{N(d,2)+1} \cap \phi_*([\mathbb{P}(\mathcal{E})]) \quad (1.8) \\ &= \int_{\mathbb{P}^{N(d,3)-1}} \phi_* (\phi^* c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N(d,3)-1}}(1))^{N(d,2)+1} \cap [\mathbb{P}(\mathcal{E})]) \\ &= \int_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} \phi^* c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N(d,3)-1}}(1))^{N(d,2)+1} \cap [\mathbb{P}(\mathcal{E})] \\ &= \int_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} c_1(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(1))^{N(d,2)+1} \cap [\mathbb{P}(\mathcal{E})]. \end{aligned}$$

Vamos calcular o segundo membro da igualdade acima. Pela definição de classes de Segre, temos

$$\int_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} c_1(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(1))^{N(d,2)+1} \cap [\mathbb{P}(\mathcal{E})] = \int_{\mathbb{P}(\mathcal{T})} s_5(\mathcal{E}) \cap [\mathbb{P}(\mathcal{T})].$$

Agora usamos as seqüências exatas que definem \mathcal{E} e $P_\pi^1(\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(d))$ para obtermos as seguintes relações entre classes características:

$$s(\mathcal{E}) = s(S_d\mathcal{F}) \cdot c(P_\pi^1(\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(d))), \quad (1.9)$$

$$c(P_\pi^1(\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(d))) = c(\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(d)) \cdot c(\check{\mathcal{Q}} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{T}}(d-1)). \quad (1.10)$$

Se $H = c_1(\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(1))$ temos

$$c(\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(d)) = 1 + dH, \quad (1.11)$$

$$c(\check{\mathcal{Q}} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{T}}(d-1)) = c(\check{\mathcal{Q}}) + (d-1)(2 + c_1(\check{\mathcal{Q}}))H + (d-1)^2 H^2. \quad (1.12)$$

Nesse ponto, usamos as seqüências exatas que definem \mathcal{F} e \mathcal{Q} para obtermos

$$c(\check{\mathcal{Q}}) = c(\mathcal{F}) \cdot s(\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(1)) = c(\mathcal{F}) \cdot (1 + H)^{-1} = (1 + h)^{-1} (1 + H)^{-1}, \quad (1.13)$$

onde $h = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))$. Disso segue que

$$c(\check{\mathcal{Q}}) = 1 - H - h + H^2 + Hh + h^2.$$

Portanto, fazendo as substituições devidas chegamos a

$$c(P_{\pi}^1(\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(d))) = (1 + dH) \{1 - H - h + H^2 + Hh + h^2 \quad (1.14)$$

$$+ (d-1)(2 - H - h)H + (d-1)^2 H^2\}. \quad (1.15)$$

Para continuar, precisamos do seguinte fato.

Lema 1.3.0.1. *A seguinte seqüência de fibrados vetoriais sobre \mathbb{P}^3 é exata:*

$$S_d \mathcal{F} \twoheadrightarrow S_d \check{\mathcal{O}}_{\mathbb{P}^3}^4 \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \otimes S_{d-1} \check{\mathcal{O}}_{\mathbb{P}^3}^4. \quad (1.16)$$

Prova:

Começamos olhando para a seqüência

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^4 \twoheadrightarrow \mathcal{T}$$

e daí tomando potências simétricas ficamos com

$$S_d \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^4 \twoheadrightarrow S_d \mathcal{T}. \quad (1.17)$$

Por outro lado, é fácil ver que o mapa de multiplicação

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \otimes S_{d-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^4 \twoheadrightarrow S_d \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^4$$

é de fato injetivo em cada fibra e sua imagem está contida no núcleo de 1.17. Na verdade esses espaços coincidem, pois têm o mesmo posto. Assim, a seqüência abaixo é exata

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-1) \otimes S_{d-1} \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^4 \twoheadrightarrow S_d \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}^4 \twoheadrightarrow S_d \mathcal{T}.$$

Portanto, dualizando, obtemos

$$S_d \mathcal{F} \twoheadrightarrow S_d \check{\mathcal{O}}_{\mathbb{P}^3}^4 \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \otimes S_{d-1} \check{\mathcal{O}}_{\mathbb{P}^3}^4.$$

Com isso terminamos a verificação do lema. □

1.3.3 cálculo do grau

Desse modo, observando que

$$\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1) \otimes S_{d-1} \check{\mathcal{O}}_{\mathbb{P}^3}^4 = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)^{\oplus N(d-1,3)}, \quad (1.18)$$

é a soma direta de $N(d-1,3)$ cópias de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$, segue da sequência 1.16, que

$$s(S_d \mathcal{F}) = (1+h)^{N(d-1,3)}.$$

Juntando as peças obtemos o quebra-cabeças

$$s(\mathcal{E}) = (1+dH)(1+h)^{N(d-1,3)} \{1+(2d-3)H-h+(2-d)Hh+h^2+(d^2-3d+3)H^2\}, \quad (1.19)$$

do qual nos interessa apenas a parte homogênea de grau 5, isto é, $s_5(\mathcal{E})$.

Então escrevamos

$$s_5(\mathcal{E}) = \sum_{i+j=5} c_{ij} H^i h^j. \quad (1.20)$$

Contudo, é fácil ver que $s(\mathcal{T}) = 1-h$, o que implica $s_{i-2}(\mathcal{T}) = 0$ para $i \geq 4$. Além disso, lembrando que $h^j = 0$ para $j \geq 4$, e usando a definição de classes de Segre teremos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{P}(\mathcal{T})} s_5(\mathcal{E}) \cap [\mathbb{P}(\mathcal{T})] &= \int_{\mathbb{P}(\mathcal{T})} \left(\sum_{i+j=5} c_{ij} H^i h^j \right) \cap [\mathbb{P}(\mathcal{T})] \\ &= \int_{\mathbb{P}^3} \left(\sum_{i+j=5} c_{ij} s_{i-2}(\mathcal{T}) h^j \right) \cap [\mathbb{P}^3] \\ &= \int_{\mathbb{P}^3} (c_{23} - c_{32}) h^3 \cap [\mathbb{P}^3] \\ &= c_{23} - c_{32}. \end{aligned} \quad (1.21)$$

Coletando os coeficientes acima na expressão de $s(\mathcal{E})$ e efetuando a diferença chegamos à fabulosa fórmula:

$$\text{Grau}(C_{1,d}) = (d-1)^2 \cdot \left\{ 3 \binom{N(d-1,3)}{3} - d \binom{N(d-1,3)}{2} \right\}. \quad (1.22)$$

Exemplo 1.3.3.0.1. Note que o segundo membro da expressão acima é um polinômio em d de grau igual a 11. Para $d = 3$ temos $N(2,3) = 10$, e daí $\text{Grau}(C_{1,3}) = \mathbf{900}$, coincidindo com o valor encontrado em [7]. Lembramos que $C_{1,3}$ é um dos quatro estratos que aparecem na classificação projetiva das superfícies cúbicas $S \subset \mathbb{P}^3$, com uma reta dupla $l \subset \mathbb{P}^3$ (veja [1]). Essas superfícies são necessariamente regradas, pois dado qualquer

ponto $p \in S$ que não esteja em l , o plano $H = \langle p, l \rangle$ intersecta S em uma cúbica da qual l é uma componente dupla. Logo, a interseção residual com respeito a l é também uma reta. Os demais estratos correspondem aos cones sobre cúbicas cuspidais, aos rolos cúbicos especiais e aos rolos cúbicos não especiais. Em [7] são calculados os graus de todos estes estratos.

1.3.4 restringir o vértice

Além de calcular o grau de $C_{1,d}$ podemos considerar também o problema de enumerar cones com uma reta dupla e cujo vértice satisfaz condições de incidência, como por exemplo variar ao longo de um plano, de uma reta, ou mesmo coincidir com um ponto fixado. Nesse último caso o grau do ciclo correspondente deve ser o grau da variedade de Severi, das curvas planas de grau d com um nó. Vamos estudar esses casos.

Com efeito, denotemos por $C_{1,d}^{3,k} \subset C_{1,d}$ o fechado correspondente aos cones cujo vértice varia em um subespaço linear $L_k \subset \mathbb{P}^3$ de codimensão k . A dimensão de $C_{1,d}^{3,k}$ é

$$\dim C_{1,d}^{3,k} = N(d, 2) + 1 - k$$

A classe de L_k no anel de Chow de \mathbb{P}^3 é dada por $h^k \cap [\mathbb{P}^3]$, onde $h = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))$. Usando a fórmula de projeção como em 1.8 e a definição de classes de Segre, vemos que

$$\text{Grau}(C_{1,d}^{3,k}) = \int_{\mathbb{P}(\mathcal{T})} s_{5-k}(\mathcal{E}) h^k \cap [\mathbb{P}(\mathcal{T})].$$

Daí, procedendo como em em 1.20 e 1.21, obtemos

$$\begin{cases} \text{Grau}(C_{1,d}^{3,1}) &= c_{22} - c_{31} = (d-1)^2 \{3 \binom{N(d-1,3)}{2} - d \binom{N(d-1,3)}{1}\} \\ \text{Grau}(C_{1,d}^{3,2}) &= c_{21} - c_{30} = (d-1)^2 \{3 \binom{N(d-1,3)}{1} - d \binom{N(d-1,3)}{0}\} \\ \text{Grau}(C_{1,d}^{3,3}) &= c_{20} = 3(d-1)^2. \end{cases}$$

Observamos que c_{ij} é o coeficiente do monômio $H^i h^j$ quando olhamos para $s(\mathcal{E})$ (veja eq.1.19) como um polinômio nas variáveis H e h . Podemos até mesmo deduzir uma fórmula geral para calculá-los (veja eq.1.37, p.23).

Note que se convencionarmos, como de costume, que $\binom{M}{i} = 0, \forall i < 0$, então podemos escrever de modo unificado

$$\text{Grau}(C_{1,d}^{3,k}) = (d-1)^2 \{3 \binom{N(d-1,3)}{3-k} - d \binom{N(d-1,3)}{2-k}\}, \forall k \geq 0. \quad (1.23)$$

Como já havíamos observado, $\text{Grau}(C_{1,d}^{3,3}) = 3(d-1)^2$ é o grau da variedade de Severi, das curvas planas singulares.

1.4 Cones em \mathbb{P}^3 com uma geratriz cuspidal

Nesta seção vamos determinar o grau da variedade que parametriza os cones de \mathbb{P}^3 sobre curvas de grau d com uma singularidade do tipo cúspide. O resultado obtido será generalizado na seção 1.6, mas ao contrário do que ocorre entre as seções 1.3 e 1.5, a diferença entre esta seção e o caso geral apresenta um grau de sofisticação um pouco maior. A referida generalização será obtida usando o resultado apresentado em [15], que fornece a classe do lugar de degeneração do posto para um homomorfismo simétrico de fibrados vetoriais. Durante a presente seção manteremos as notações anteriores e usaremos as construções feitas na seção acima.

Começamos lembrando que o fibrado de partes principais de segunda ordem, $P_\pi^2(\mathcal{O}_\mathcal{T}(d))$, protagoniza a seguinte sequência exata

$$S_2(\Omega_\pi) \otimes \mathcal{O}_\mathcal{T}(d) \twoheadrightarrow P_\pi^2(\mathcal{O}_\mathcal{T}(d)) \twoheadrightarrow P_\pi^1(\mathcal{O}_\mathcal{T}(d)).$$

Por construção temos que o epimorfismo $S_d\mathcal{F} \twoheadrightarrow P_\pi^1(\mathcal{O}_\mathcal{T}(d))$ restrito a $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ se fatora por $P_\pi^2(\mathcal{O}_\mathcal{T}(d))$, dando origem ao diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & S_d\mathcal{F} & & \\ & & \downarrow & \searrow & \\ S_2(\Omega_\pi) \otimes \mathcal{O}_\mathcal{T}(d) & \twoheadrightarrow & P_\pi^2(\mathcal{O}_\mathcal{T}(d)) & \twoheadrightarrow & P_\pi^1(\mathcal{O}_\mathcal{T}(d)) \end{array} \quad (1.24)$$

O núcleo \mathcal{E}' do mapa vertical dá conta das ternas (p, C, l) tais que l é ponto triplo de C . Ademais, como \mathcal{E} é o núcleo do mapa diagonal e o diagrama é comutativo, segue diretamente que a seguinte sequência é exata

$$\mathcal{E}' \twoheadrightarrow \mathcal{E} \twoheadrightarrow S_2(\Omega_\pi) \otimes \mathcal{O}_\mathcal{T}(d).$$

Portanto, o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{O}_\mathcal{E}(-1) & & \\ & & \downarrow & \searrow & \\ \mathcal{E}' \twoheadrightarrow & \mathcal{E} & \twoheadrightarrow & S_2(\Omega_\pi) \otimes \mathcal{O}_\mathcal{T}(d) & \end{array} .$$

fornece uma seção do fibrado $S_2(\Omega_\pi) \otimes \mathcal{O}_\mathcal{T}(d) \otimes \mathcal{O}_\mathcal{E}(1)$ sobre $\mathbb{P}(\mathcal{E})$, cujo esquema de zeros é coincide com $\mathbb{P}(\mathcal{E}') \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$ (veja exemplo 9.9 de [34]). Por outro lado, sabemos que $\Omega_\pi = \check{\mathcal{Q}} \otimes \mathcal{O}_\mathcal{T}(-1)$ (veja a seq. 1.6). Daí, segue que

$$S_2(\Omega_\pi) = S_2(\check{\mathcal{Q}}) \otimes \mathcal{O}_\mathcal{T}(-2).$$

Logo, temos na verdade uma seção do fibrado $S_2(\check{\mathcal{Q}}) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{T}}(d-2) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{E}}(1)$.

1.4.1 hessiana

Observando que a fibra de $\check{\mathcal{Q}}$ sobre um ponto $(p, l) \in \mathbb{P}(\mathcal{T})$ coincide com o espaço das equações do ponto l no plano $\mathbb{P}_p^2 := \mathbb{P}(\mathcal{T})_p$, vemos que a existência da seção obtida acima traduz simplesmente, o fato de que uma curva singular em um ponto tem sua equação contida no quadrado do ideal do ponto. O fator $\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(d-2)$ contribui com os coeficientes na escritura da equação da curva (de grau d) em termos dos geradores do quadrado do ideal do ponto. Tipicamente, se tomarmos coordenadas homogêneas x_0, x_1, x_2 em \mathbb{P}_p^2 de modo que l tenha equações $\{x_0 = 0, x_1 = 0\}$, veremos que uma curva de grau d , $C \subset \mathbb{P}_p^2$ tendo l como ponto singular, terá equação do tipo

$$fx_0^2 + gx_0x_1 + hx_1^2 = 0,$$

com f, g, h polinômios homogêneos em x_0, x_1, x_2 . A seção obtida acima simplesmente associa a cada ponto $(p, C, l) \in \mathbb{P}(\mathcal{E})$ a forma quadrática $f(l)x_0^2 + g(l)x_0x_1 + h(l)x_1^2$. Observamos ainda que a matriz hessiana (afim) associada a C no ponto l , é a matriz:

$$M_C(l) = \begin{bmatrix} 2f(l) & g(l) \\ g(l) & 2h(l) \end{bmatrix}.$$

Se $M_C(l)$ é nula então l é ponto triplo de C e se $M_C(l)$ tem determinante nulo então l é ponto duplo degenerado, ou seja, cúspide. Como estamos interessados nos cones com uma geratriz cuspidal, precisamos descrever o anulamento do determinante de $M_C(l)$ com (p, C, l) variando. Com efeito, como estamos em característica diferente de 2, temos que $S_2(\check{\mathcal{Q}})$ mergulha em $\check{\mathcal{Q}} \otimes \check{\mathcal{Q}} = \underline{\text{Hom}}(\mathcal{Q}, \check{\mathcal{Q}})$. Logo, $S_2(\check{\mathcal{Q}}) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{T}}(d-2) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{E}}(1)$ mergulha em

$$\underline{\text{Hom}}(\mathcal{Q}, \check{\mathcal{Q}} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{T}}(d-2) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{E}}(1)).$$

Daí concluímos que nossa seção corresponde a um mapa de fibrados

$$\sigma : \mathcal{Q} \longrightarrow \check{\mathcal{Q}} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{T}}(d-2) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{E}}(1).$$

Na fibra sobre (p, C, l) a matriz do mapa σ coincide, a menos de multiplicação por 2, com a matriz hessiana $M_C(l)$. De fato, como σ provém de $S_2(\check{\mathcal{Q}}) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{T}}(d-2) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{E}}(1)$ temos que numa representação local sua matriz deve ser simétrica. Além disso, revertendo o

processo de obtenção de σ nos convencemos da afirmação. Logo, tomando o determinante de σ e tensorizando com o dual de $\bigwedge^2 \mathcal{Q}$ obtemos a seção

$$\mathcal{O}_{\mathcal{E}} \longrightarrow \left(\bigwedge^2 \check{\mathcal{Q}} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{T}}(d-2) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{E}}(1) \right)^{\otimes 2}$$

que associa a cada ponto (p, C, l) o determinante hessiano da equação de C , calculado no ponto l . Portanto, denotando por $Y_{1,d} \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$ o esquema de zeros dessa seção, vemos que $Y_{1,d}$ parametriza as ternas (p, C, l) tais que l é cuspidal em $C \subset \mathbb{P}_p^2$. Além disso,

$$[Y_{1,d}] = 2c_1 \left(\bigwedge^2 \check{\mathcal{Q}} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{T}}(d-2) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{E}}(1) \right) \cap [\mathbb{P}(\mathcal{E})].$$

Assim, se $\mathbb{Y}_{1,d}$ é a imagem de $Y_{1,d}$ em \mathbb{P}^{N-1} podemos determinar o $\text{Grau}(\mathbb{Y}_{1,d})$.

Primeiro observe que

$$c_1 \left(\bigwedge^2 \check{\mathcal{Q}} \right) = c_1(\check{\mathcal{Q}}) = -H - h.$$

Então, usando a fórmula de projeção e definindo $L = c_1(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(1))$ concluímos que

$$\begin{aligned} \text{Grau}(\mathbb{Y}_{1,d}) &= 2 \int_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} ((-h + (d-3)H + L)L^{N(d,2)}) \cap [\mathbb{P}(\mathcal{E})] \\ &= 2 \int_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} ((-h + (d-3)H)L^{N(d,2)} + L^{N(d,2)+1}) \cap [\mathbb{P}(\mathcal{E})] \\ &= 2 \int_{\mathbb{P}(\mathcal{T})} ((-h + (d-3)H)s_4(\mathcal{E}) + s_5(\mathcal{E})) \cap [\mathbb{P}(\mathcal{T})] \\ &= 2 \int_{\mathbb{P}(\mathcal{T})} (-h + (d-3)H)s_4(\mathcal{E}) \cap [\mathbb{P}(\mathcal{T})] + 2 \int_{\mathbb{P}(\mathcal{T})} s_5(\mathcal{E}) \cap [\mathbb{P}(\mathcal{T})]. \end{aligned}$$

A segunda parcela da soma acima já foi calculada na seção 1.3, o cálculo da primeira parcela é feito usando a mesma estratégia. Após algumas simplificações chegamos à fórmula

$$\text{Grau}(\mathbb{Y}_{1,d}) = 8 \binom{d-1}{2} \left\{ 3 \binom{N(d-1,3)}{3} - 2d \binom{N(d-1,3)}{2} + d \binom{N(d-1,3)}{1} \right\}. \quad (1.25)$$

Fazendo $d = 3$, na fórmula anterior encontramos o valor **960**, que é o grau da variedade que parametriza os cones de \mathbb{P}^3 cuja base é uma cúbica com uma singularidade do tipo cúspide. Como já dissemos, esse número já havia sido encontrado usando essencialmente as mesmas técnicas em [7], Cor. 5.7.

1.4.2 vértice restrito

A exemplo do que fizemos na seção anterior, aqui também podemos considerar a subvariedade $\mathbb{Y}_{1,d}^{3,k}$ de $\mathbb{Y}_{1,d}$ correspondente aos cones com vértice variando em um subespaço

de codimensão k em \mathbb{P}^3 . Nesse caso, verificamos que

$$\begin{aligned}
\text{Grau}(\mathbb{Y}_{1,d}^{3,k}) &= 2 \int_{\mathbb{P}(\mathcal{T})} (-h^{k+1} + (d-3)Hh^k)_{s_{4-k}(\mathcal{E})} \cap [\mathbb{P}(\mathcal{T})] + 2 \int_{\mathbb{P}(\mathcal{T})} s_{5-k}(\mathcal{E})h^k \cap [\mathbb{P}(\mathcal{T})] \\
&= 2(c_{3,1-k} - c_{2,2-k}) + 2(d-3)(c_{1,3-k} - c_{2,2-k}) + 2(c_{2,3-k} - c_{3,2-k}) \\
&= 8 \binom{d-1}{2} \{3 \binom{N(d-1,3)}{3-k} - 2d \binom{N(d-1,3)}{2-k} + d \binom{N(d-1,3)}{1-k}\}.
\end{aligned} \tag{1.26}$$

Assim, $\text{Grau}(\mathbb{Y}_{1,d}^{3,k})$ é um polinômio de grau $11 - 3k$ e em particular, para $k = 3$, obtemos

$$\text{Grau}(\mathbb{Y}_{1,d}^{3,3}) = 24 \binom{d-1}{2}. \tag{1.27}$$

Esse é o grau da variedade que parametriza as curvas planas cuspidais e é um caso particular dos resultados apresentados por Paolo Aluffi em [3].

1.5 Cones em \mathbb{P}^m com base nodal

Agora vamos adaptar as contas feitas na seção 1.3 para obtermos o grau da variedade que parametriza os cones em \mathbb{P}^m cuja base é uma subvariedade de dimensão $m - 2$ com um ponto duplo ordinário, contida em um hiperplano variável. Em outras palavras, a base é de fato uma hipersuperfície singular em seu subespaço gerado (*span*).

Usaremos notações correspondentes às que usamos em na seção 1.3. Assim, temos que \mathcal{T} é o fibrado quociente tautológico de posto m sobre \mathbb{P}^m .

Para $p \in \mathbb{P}^m$ a fibra $\mathbb{P}(\mathcal{T})_p$ se identifica com um espaço projetivo $\mathbb{P}_p^{m-1} \subset \mathbb{G}[1, m]$, grassmanniana de retas de \mathbb{P}^m . Daí, se $S_d\mathcal{F}$ é a d -ésima potência simétrica do fibrado dual de \mathcal{T} então $\mathbb{P}(S_d\mathcal{F})$ é mapeado por um morfismo genericamente injetivo no espaço projetivo que parametriza as hipersuperfícies de grau d em \mathbb{P}^m e tem como imagem a família de cones sobre variedades de grau d e dimensão $m - 2$, que são hipersuperfícies em seu subespaço gerado (veja obs. 1.2.3.1, p. 11).

Agora lembramos que sobre o fibrado projetivo $\mathbb{P}(\mathcal{T})$ temos a sequência exata

$$\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(-1) \twoheadrightarrow \mathcal{T} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}.$$

Além disso, se Ω_π denota o feixe cotangente relativo de $\mathbb{P}(\mathcal{T}) \xrightarrow{\pi} \mathbb{P}^m$, então

$$\Omega_\pi = \check{\mathcal{Q}} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{T}}(-1).$$

Se $P_\pi^1(\mathcal{O}_\mathcal{T}(d))$ denota o fibrado de partes principais de primeira ordem de $\mathcal{O}_\mathcal{T}(d)$, então pelos mesmos motivos vistos na seção 1.3, temos o seguinte diagrama de fibrados vetoriais sobre $\mathbb{P}(\mathcal{T})$.

$$\begin{array}{ccccc} & & S_d\mathcal{F} & & \\ & & \downarrow & \searrow & \\ \Omega_\pi \otimes \mathcal{O}_\mathcal{T}(d) & \xrightarrow{\quad} & P_\pi^1(\mathcal{O}_\mathcal{T}(d)) & \longrightarrow & \mathcal{O}_\mathcal{T}(d) \end{array}$$

Portanto, denotando por \mathcal{E} o núcleo do mapa vertical no diagrama, vemos que a imagem de $\mathbb{P}(\mathcal{E}) \subset \mathbb{P}(S_d\mathcal{F}) \times_{\mathbb{P}^m} \mathbb{P}(\mathcal{T})$ pela primeira projeção é uma subvariedade de $\mathbb{P}(S_d\mathcal{F})$ que corresponde aos cones com alguma geratriz singular. Por outro lado, é fácil ver que

$$\text{posto}(\mathcal{E}) = \text{posto}(S_d\mathcal{F}) - \text{posto}(P_\pi^1(\mathcal{O}_\mathcal{T}(d))) = N(d, m-1) - m,$$

onde $N(d, m) = \binom{d+m}{m}$. Como $\mathbb{P}(\mathcal{T})$ é um \mathbb{P}^{m-1} -fibrado sobre \mathbb{P}^m , segue que

$$\dim \mathbb{P}(\mathcal{E}) = N(d, m-1) + m - 2 = \dim \mathbb{P}(S_d\mathcal{F}) - 1.$$

Seja $C_{1,d}^m \subset \mathbb{P}^{N(d,m)-1}$ a subvariedade que parametriza os cones do tipo que estamos estudando, com uma reta geratriz dupla. Usando os mesmos argumentos de 1.3, vemos que

$$\text{Grau}(C_{1,d}^m) = \int_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} c_1(\mathcal{O}_\mathcal{E}(1))^{N(d,m-1)+m-2} \cap [\mathbb{P}(\mathcal{E})] = \int_{\mathbb{P}(\mathcal{T})} s_{2m-1}(\mathcal{E}) \cap [\mathbb{P}(\mathcal{T})].$$

Agora usamos as seqüências exatas que definem \mathcal{E} e $P_\pi^1(\mathcal{O}_\mathcal{T}(d))$ para obtermos as seguintes relações entre classes características

$$\begin{aligned} s(\mathcal{E}) &= s(S_d\mathcal{F}) \cdot c(P_\pi^1(\mathcal{O}_\mathcal{T}(d))) \\ c(P_\pi^1(\mathcal{O}_\mathcal{T}(d))) &= c(\mathcal{O}_\mathcal{T}(d)) \cdot c(\check{\mathcal{Q}} \otimes \mathcal{O}_\mathcal{T}(d-1)). \end{aligned} \tag{1.28}$$

Escrevendo, $H := c_1(\mathcal{O}_\mathcal{T}(1))$ temos

$$c(\mathcal{O}_\mathcal{T}(d)) = 1 + dH \tag{1.29}$$

$$c(\check{\mathcal{Q}} \otimes \mathcal{O}_\mathcal{T}(d-1)) = \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{i=0}^p a_{ip} c_i(\check{\mathcal{Q}}) ((d-1)H)^{p-i}, \tag{1.30}$$

onde $a_{ip} = \binom{m-1-i}{p-i}$.

Nesse ponto, usamos as seqüências exatas que definem \mathcal{F} e \mathcal{Q} para obtermos

$$c(\check{\mathcal{Q}}) = c(\mathcal{F}) \cdot s(\mathcal{O}_\mathcal{T}(1)) = c(\mathcal{F}) \cdot (1+H)^{-1} = (1+h)^{-1} (1+H)^{-1}, \tag{1.31}$$

onde $h = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1))$. Daí segue que

$$c_i(\check{\mathcal{Q}}) = (-1)^i \sum_{k=0}^i H^{i-k} h^k. \quad (1.32)$$

Portanto, fazendo as substituições devidas chegamos a

$$c(P_\pi^1(\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(d))) = (1 + dH) \left\{ \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{i=0}^p \sum_{k=0}^i (-1)^i a_{ip} (d-1)^{p-i} H^{p-k} h^k \right\} \quad (1.33)$$

Por outro lado, de modo análogo ao que vimos em (1.16), verifica-se que a seguinte sequência é exata

$$S_d \mathcal{F} \longrightarrow S_d \check{\mathcal{O}}_{\mathbb{P}^m}^{m+1} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1) \otimes S_{d-1} \check{\mathcal{O}}_{\mathbb{P}^m}^{m+1}. \quad (1.34)$$

Como $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1) \otimes S_{d-1} \check{\mathcal{O}}_{\mathbb{P}^m}^{m+1} = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^m}(1)^{N(d-1,m)}$, segue que $s(S_d \mathcal{F}) = (1 + h)^{N(d-1,m)}$, ou ainda

$$s(S_d \mathcal{F}) = \sum_{j=0}^m b_j h^j, \text{ com } b_j = \binom{N(d-1,m)}{j} \quad (1.35)$$

Portanto, a classe de Segre total do fibrado \mathcal{E} é dada por

$$s(\mathcal{E}) = (1 + dH) \left\{ \sum_{j=0}^m b_j h^j \right\} \left\{ \sum_{p=0}^{m-1} \sum_{i=0}^p \sum_{k=0}^i (-1)^i a_{ip} (d-1)^{p-i} H^{p-k} h^k \right\}. \quad (1.36)$$

Pensemos em $s(\mathcal{E})$ como um polinômio nas variáveis H e h , e denotemos por $c_{i,j}$ o coeficiente do monômio $H^i h^j$. Com um pouco de tempo e espaço disponíveis podemos mostrar que (com os b 's como em 1.35)

$$c_{i,j} = \left\{ \sum_{k=0}^{m-i} \binom{i+k}{k} b_{i+j-m+k} (-1)^{m-i+k} \right\} (d-1)^i + (-1)^{m+1} b_{i+j-m}. \quad (1.37)$$

Para obtermos o grau de $C_{1,d}^m$ necessitamos integrar a parte homogênea de grau $2m-1$ do polinômio $s(\mathcal{E})$, isto é, $s_{2m-1}(\mathcal{E})$. Para facilitar essa tarefa, escrevemos

$$s_{2m-1}(\mathcal{E}) = \sum_{i+j=2m-1} c_{i,j} H^i h^j.$$

Contudo, é fácil ver que $s(\mathcal{T}) = 1 - h$, o que implica $s_{i-m+1}(\mathcal{T}) = 0$ para $i \geq m+1$. Além disso, lembrando que $h^j = 0$, para $j \geq m+1$ e usando a definição de classes de

Segre teremos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{P}(\mathcal{T})} s_{2m-1}(\mathcal{E}) \cap [\mathbb{P}(\mathcal{T})] &= \int_{\mathbb{P}(\mathcal{T})} \left(\sum_{i+j=2m-1} c_{i,j} H^i h^j \right) \cap [\mathbb{P}(\mathcal{T})] \\
&= \int_{\mathbb{P}^m} \left(\sum_{i+j=2m-1} c_{i,j} s_{i-m+1}(\mathcal{T}) h^j \right) \cap [\mathbb{P}^m] \\
&= \int_{\mathbb{P}^m} (c_{m-1,m} - c_{m,m-1}) h^m \cap [\mathbb{P}^m] \\
&= c_{m-1,m} - c_{m,m-1}.
\end{aligned}$$

Assim, usando a expressão obtida para os coeficientes $c_{i,j}$ chegamos à fórmula

$$\text{Grau}(C_{1,d}^m) = (d-1)^{m-1} \left\{ m \cdot \binom{N(d-1,m)}{m} - d \binom{N(d-1,m)}{m-1} \right\}. \quad (1.38)$$

Note que (cf. 1.2, p. 8) o segundo membro da expressão acima é um polinômio em d de grau igual a $m^2 + m - 1$. Observe que para $m = 3$, obtemos novamente o resultado de (1.22). É claro que olhando para aquele resultado, qualquer “chute” razoável apontaria a fórmula acima como sua generalização.

Observação 1.5.0.1. Para $d = 2$ a fórmula apresentada acima fornece $\text{Grau}(C_{1,2}^m) = 0$, uma explicação para isso é o fato de que neste caso o mapa $\varphi : \mathbb{P}(S_2\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{P}^{N(2,m)-1}$ não é genericamente injetivo. De fato, todos os elementos de $C_{1,2}^m$ são cones quadráticos com vértice de dimensão positiva, haja vista que são cones sobre quádricas singulares. O grau correto de $C_{1,2}^m$ é dado pela fórmula de Giambelli e é caso particular dos resultados apresentados nos artigos [15] e [33]. A fórmula é:

$$\text{Grau}(C_{1,2}^m) = \binom{m+2}{3}.$$

Para $m = 3$ temos que os elementos de $C_{1,2}^3$ são quádricas que se decompõem como a união de dois planos e a fórmula acima fornece $\text{Grau}(C_{1,2}^3) = 10$, esse valor pode ser obtido também usando o diagrama

$$\begin{array}{ccc}
\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^3 & \xrightarrow{\text{Segre}} & \mathbb{P}^{15} \\
& \searrow \pi \circ \text{Segre} & \downarrow \pi \\
& & \mathbb{P}^9
\end{array}$$

Em que π é uma projeção linear com centro em um $\mathbb{P}^5 \subset \mathbb{P}^{15}$ que não intersecte a imagem do mapa de “Segre”.

De modo análogo ao que fizemos na seção 1.3 (veja p.17), podemos considerar a subvariedade $C_{1,d}^{m,k} \subset C_{1,d}^m$ correspondente aos cones cujo vértice varia em um subespaço linear em \mathbb{P}^m de codimensão k . Nesse caso, obtemos facilmente que a generalização de (1.23) é

$$\begin{aligned} \text{Grau}(C_{1,d}^{m,k}) &= c_{m-1,m-k} - c_{m,m-1-k} \\ &= (d-1)^{m-1} \cdot \left\{ m \cdot \binom{N(d-1,m)}{m-k} - d \cdot \binom{N(d-1,m)}{m-1-k} \right\}. \end{aligned} \quad (1.39)$$

Portanto, $\text{Grau}(C_{1,d}^{m,k})$ é um polinômio em d de grau $m^2 + (1-k)m - 1$.

Em particular, fixando o vértice, ou seja, tomando $k = m$, temos

$$\text{Grau}(C_{1,d}^{m,m}) = m(d-1)^{m-1}. \quad (1.40)$$

Esse é exatamente o grau da hipersuperfície discriminante, a qual parametriza a família das hipersuperfícies singulares de grau d em \mathbb{P}^{m-1} .

1.6 Cones em \mathbb{P}^m cuja base admite ponto duplo não ordinário

O caso de um ponto cuspidal em uma curva plana, tratado na seção 1.4, é certamente o exemplo mais simples de um ponto duplo não ordinário. O que caracteriza geometricamente uma cúspide é o fato de as direções tangentes serem coincidentes. De modo mais formal, em uma vizinhança afim em torno de um ponto duplo o cone tangente é dado por uma equação quadrática homogênea em duas variáveis. Se o ponto é cuspidal, a quádrica associada (cone tangente projetivizado) tem posto igual a 1, e isso significa que as direções tangentes coincidem. O caso de dimensão maior é semelhante, porém temos mais possibilidades para o posto do cone tangente projetivizado.

Seja $S \subset \mathbb{P}^{m-1}$ uma hipersuperfície singular, definida por um polinômio homogêneo de grau d , $F \in \mathbb{C}[X_0, \dots, X_{m-1}]$. Seja $p \in \mathbb{P}^{m-1}$ um ponto singular de S . Por uma mudança de coordenadas podemos supor que $p = (0, \dots, 1)$. Desse modo podemos escrever

$$\begin{aligned} F(X_0, \dots, X_{m-1}) &= X_{m-1}^{d-2} f_2(X_0, \dots, X_{m-2}) + \dots + X_{m-1} f_{d-1}(X_0, \dots, X_{m-2}) \\ &+ f_d(X_0, \dots, X_{m-2}), \end{aligned}$$

com f_i homogêneo de grau i . Daí, passando ao aberto afim $\{X_{m-1} \neq 0\} \cong \mathbb{A}^{m-1} \subset \mathbb{P}^{m-1}$,

temos que S é definida por

$$f(x_0, \dots, x_{m-2}) = f_2(x_0, \dots, x_{m-2}) + \dots + f_{d-1}(x_0, \dots, x_{m-2}) + f_d(x_0, \dots, x_{m-2})$$

e $p = (0, \dots, 0)$ é ponto singular. A forma quadrática $f_2(x_0, \dots, x_2)$ (suposta $\neq 0$) define o cone tangente a S no ponto p . Por outro lado, como f_2 é uma forma quadrática podemos considerar a quádrlica definida em \mathbb{P}^{m-2} , que é o cone tangente projetivizado. Seguindo a direção tomada por J.W.Bruce e C.T.C.Wall na classificação das superfícies cúbicas singulares (veja [5]), vamos dizer que o ponto singular p é de tipo co-posto q , com $0 \leq q \leq m-1$, se a matriz de f_2 tiver co-posto igual a q (é o mesmo que dizer que a matriz de f_2 tem posto $m-1-q$). Em particular, se p é de tipo co-posto zero, temos que p é ponto duplo ordinário e se é de tipo co-posto $m-1$, então $f_2 \equiv 0$ e p é pelo menos ponto triplo. Observamos que é fácil verificar as igualdades

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0, 0, \dots, 0) = \frac{\partial^2 f_2}{\partial x_i \partial x_j}(0, 0, \dots, 0) \text{ para } 0 \leq i, j \leq m-2.$$

Portanto, em $p = (0, 0, \dots, 0)$, a Hessiana de f coincide com a matriz da forma quadrática f_2 . Note que no caso de curvas, a forma quadrática f_2 é dada por uma matriz quadrada de ordem 2, assim temos apenas três possibilidades:

1. Co-posto igual a zero (ou hessiano $\neq 0$), neste caso p é ponto duplo ordinário.
2. Co-posto igual a 1 (ou hessiano $= 0$), neste caso p é cuspidal.
3. Co-posto igual a 2 (ou hessiana nula), neste caso p é ponto triplo (ou pior).

Agora lembramos que na seção anterior construímos um fibrado projetivo

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}) \subset \mathbb{P}(S_d \mathcal{F}) \times_{\mathbb{P}^m} \mathbb{P}(\mathcal{T}),$$

tal que a fibra sobre cada $(p, l) \in \mathbb{P}(\mathcal{T})$ é o espaço das hipersuperfícies em \mathbb{P}_p^{m-1} que são singulares em $l \in \mathbb{P}_p^{m-1}$. Pelo que foi visto acima, temos uma filtração de $\mathbb{P}(\mathcal{E})_{(p,l)}$ dada pelo co-posto do cone tangente no ponto singular l . Portanto, temos uma filtração induzida em $\mathbb{P}(\mathcal{E})$, por subesquemas $Y_q \subset \mathbb{P}(\mathcal{E})$ correspondentes às singularidades de co-posto pelo menos igual a q . Ou seja,

$$Y_q = \{(p, f, l) \in \mathbb{P}(\mathcal{E}); \text{ posto}(\text{Hess}_f(l)) \leq m-1-q\}.$$

O objetivo principal desta seção é calcular o grau da imagem, $\mathbb{Y}_{q,d}^m$, de Y_q em $\mathbb{P}^{N(d,m)-1}$.

Vamos repetir a argumentação feita na seção 1.4, p. 18. Assim, sobre $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ obtemos uma seção

$$\sigma : \mathcal{O}_{\mathcal{E}} \longrightarrow S_2 \mathcal{Q}^{\vee} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{T}}(d-2) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{E}}(1).$$

Para simplificar a escrita, vamos denotar

$$\mathcal{L} = \mathcal{O}_{\mathcal{T}}(d-2) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{E}}(1). \quad (1.41)$$

Em característica $\neq 2$, temos o mergulho

$$S_2 \mathcal{Q}^{\vee} \hookrightarrow \mathcal{Q}^{\vee} \otimes \mathcal{Q}^{\vee} \simeq \underline{\text{Hom}}(\mathcal{Q}, \mathcal{Q}^{\vee}).$$

Assim, σ pode ser pensada como um mapa de fibrados

$$\sigma : \mathcal{Q} \longrightarrow \mathcal{Q}^{\vee} \otimes \mathcal{L}.$$

Como σ provém de $S_2 \mathcal{Q}^{\vee}$, segue que

$$\sigma = \check{\sigma} \otimes \mathcal{L}.$$

Nesse sentido dizemos que σ é um mapa simétrico de fibrados. A mesma argumentação de 1.4 mostra que na fibra sobre $(p, S, l) \in \mathbb{P}(\mathcal{E})$ a matriz do mapa σ é, a menos de multiplicação por 2, a Hessiana da equação de $S \subset \mathbb{P}^{\binom{m-1}{p}}$, calculada no ponto singular l . Portanto, o subesquema Y_q coincide com o lugar de degeneração de posto $m-1-q$ do mapa σ . Assim, na hipótese de que a codimensão de Y_q é a correta, a saber codimensão $\binom{q+1}{2}$ em $\mathbb{P}(\mathcal{E})$, a classe de Y_q no anel de Chow de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ será dado pela fórmula determinantal obtida por Joe Harris e Loring W. TU em [15], para a classe do lugar de degeneração de um mapa simétrico de fibrados.

Definimos

$$c_i := \begin{cases} c_i(\mathcal{Q}^{\vee} \otimes \sqrt{\mathcal{L}}), & \text{se } 0 \leq i \leq m-1 \\ 0, & \text{se } i < 0 \text{ ou } i > m-1 \end{cases}$$

onde $\sqrt{\mathcal{L}}$ é um fibrado em retas tal que $\sqrt{\mathcal{L}}^{\otimes 2} = \mathcal{L}$. Então a classe $[Y_q]$ será dada pelo seguinte determinante $q \times q$

$$[Y_q] = 2^q \begin{vmatrix} c_q & c_{q+1} & \cdots & c_{2q-1} \\ c_{q-2} & c_{q-1} & \cdots & c_{2q-3} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ c_{2-q} & c_{3-q} & \cdots & c_1 \end{vmatrix}. \quad (1.42)$$

A verificação de que Y_q é da dimensão correta é consequência da proposição 4.8 de [33] aplicada às fibras de Y_q sobre \mathbb{P}_p^{m-1} , para cada $p \in \mathbb{P}^m$. Portanto,

$$\dim Y_q = N(d, m-1) + m - 2 - \binom{q+1}{2}.$$

1.6.1 Co-posto $q = 1$

Para $q = 1$, temos (por (1.42))

$$[Y_1] = 2c_1(\mathcal{Q}^\vee \otimes \sqrt{\mathcal{L}}) = 2(c_1(\mathcal{Q}^\vee) + 2c_1(\sqrt{\mathcal{L}})) = 2(c_1(\mathcal{Q}^\vee) + c_1(\mathcal{L})).$$

Denotemos

$$L := c_1(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(1)). \quad (1.43)$$

Como $c_1(\mathcal{Q}^\vee) = -H - h$ e $c_1(\mathcal{L}) = (d-2)H + L$, usando os mesmos argumentos e notações semelhantes às da seção anterior, obtemos:

$$\begin{aligned} \text{Grau}(\mathbb{Y}_{1,d}^m) &= 2 \int_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} (-h + (d-3)H + L)L^{N(d,m-1)+m-3} \\ &= 2 \int_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} (-h + (d-3)H)L^{N(d,m-1)+m-3} + L^{N(d,m-1)+m-2} \\ &= 2 \int_{\mathbb{P}(\mathcal{T})} (-h + (d-3)H)s_{2m-2}(\mathcal{E}) + s_{2m-1}(\mathcal{E}) \\ &= 2 \int_{\mathbb{P}(\mathcal{T})} (-h + (d-3)H)s_{2m-2}(\mathcal{E}) + 2 \int_{\mathbb{P}(\mathcal{T})} s_{2m-1}(\mathcal{E}) \\ &= 2\{(d-3)c_{m-2,m} + c_{m,m-2} - (d-2)c_{m-1,m-1} + c_{m-1,m} - c_{m,m-1}\}. \end{aligned}$$

Usando a eq.1.37, chegamos à fórmula

$$\text{Grau}(\mathbb{Y}_{1,d}^m) = 2(d-1)^{m-2} \left\{ \alpha_{10} \binom{N(d-1,m)}{m} - \alpha_{11} \binom{N(d-1,m)}{m} - 1 + \alpha_{12} \binom{N(d-1,m)}{m} - 2 \right\} \quad (1.44)$$

em que os coeficientes são dados por

$$\begin{cases} \alpha_{10} &= (d-3)N(m-1, 2) + 2m \\ \alpha_{11} &= (d-1)^2(m+1) - 2(m-1) \\ \alpha_{12} &= 2(d-2)d. \end{cases} \quad (1.45)$$

Em particular, para $m = 3$, ficamos com $\alpha_{10} = 2(d-2) \cdot 3$, $\alpha_{11} = 2(d-2) \cdot 2d$ e portanto obtemos novamente o resultado da eq.1.25, p.20.

1.6.1.1 Restringindo o vértice

Se tomarmos $\mathbb{Y}_{1,d}^{m,k} \subset \mathbb{Y}_{1,d}^m$, subvariedade que parametriza os cones com vértice variando em um subespaço de codimensão k , então nesse caso ainda é fácil ver que a generalização de 1.44 (α 's com acima, 1.45) é

$$\text{Grau}(\mathbb{Y}_{1,d}^{m,k}) = 2(d-1)^{m-2} \left\{ \alpha_{10} \binom{N(d-1,m)}{m-k} - \alpha_{11} \binom{N(d-1,m)}{m-1-k} + \alpha_{12} \binom{N(d-1,m)}{m-2-k} \right\}. \quad (1.46)$$

Em particular, tomando $k = m$ temos que

$$\text{Grau}(\mathbb{Y}_{1,d}^{m,m}) = 2(d-1)^{m-2} \alpha_{10} = 2(d-1)^{m-2} \left((d-3) \binom{m+1}{2} + 2m \right)$$

é o grau da variedade que parametriza as hipersuperfícies em \mathbb{P}^{m-1} que possuem um ponto duplo degenerado. Isso generaliza a fórmula que encontramos na equação 1.27, p. 21.

1.6.2 Co-posto $q = 2$

Para $q = 2$, temos (com a notação de 1.41, p. 27)

$$\begin{aligned} [Y_2] &= 2^2 \{ c_1(\mathcal{Q}^\vee \otimes \sqrt{\mathcal{L}}) c_2(\mathcal{Q}^\vee \otimes \sqrt{\mathcal{L}}) - c_3(\mathcal{Q}^\vee \otimes \sqrt{\mathcal{L}}) \} \\ &= 4 \left\{ 2 \binom{m}{3} c_1(\sqrt{\mathcal{L}})^3 + m(m-2) c_1(\sqrt{\mathcal{L}})^2 c_1(\mathcal{Q}^\vee) + (m-2) c_1(\sqrt{\mathcal{L}}) c_1(\mathcal{Q}^\vee)^2 \right. \\ &\quad \left. + 2c_1(\sqrt{\mathcal{L}}) c_2(\mathcal{Q}^\vee) + c_1(\mathcal{Q}^\vee) c_2(\mathcal{Q}^\vee) - c_3(\mathcal{Q}^\vee) \right\} \\ &= \binom{m}{3} c_1(\mathcal{L})^3 + m(m-2) c_1(\mathcal{L})^2 c_1(\mathcal{Q}^\vee) + 2(m-2) c_1(\mathcal{L}) c_1(\mathcal{Q}^\vee)^2 \\ &\quad + 4c_1(\mathcal{L}) c_2(\mathcal{Q}^\vee) + 4c_1(\mathcal{Q}^\vee) c_2(\mathcal{Q}^\vee) - 4c_3(\mathcal{Q}^\vee). \end{aligned} \quad (1.47)$$

Lembrando que

$$c_i(\mathcal{Q}^\vee) = (-1)^i \sum_{k=0}^i H^{i-k} h^k \text{ e } c_1(\mathcal{L}) = (d-2)H + L$$

e fazendo as substituições podemos escrever $[Y_2]$ como um polinômio da forma

$$[Y_2] = \sum_{i+j+k=3} a_{ijk} H^i h^j L^k$$

onde os coeficientes a_{ijk} são polinômios em m e d e quando não nulos têm grau em d igual a i . Explicitamente, temos

$$\begin{aligned} [Y_2] &= \binom{m}{3} L^3 + (-2m^2(d-2) + 4m(d-1) - 4) H L h + (2m(d-2) - 4) H h^2 + (-m^2 + 2m) L^2 h \\ &\quad + \left(\binom{m(d-2)}{3} - (d-1) \binom{m(d-2)}{2} + 2m \binom{d}{3} + m \binom{d-1}{2} \right) H^3 + m \left((d-2) \binom{m}{2} - (d-1)m + d \right) H L^2 \\ &\quad - \left(\binom{m(d-2)+1}{2} + \binom{m(d-2)}{2} - 2dm(d-2) + 4(d-1) \right) H^2 h + m \left(\binom{m(d-2)}{2} - 3m \binom{d-1}{2} + d^2 - 2 \right) H^2 L \\ &\quad + 2m L h^2. \end{aligned} \quad (1.48)$$

Portanto, sendo $\mathbb{Y}_{2,d}^m$ a imagem de Y_2 em $\mathbb{P}^{N(d,m)-1}$, temos

$$\begin{aligned}
\text{Grau}(\mathbb{Y}_{2,d}^m) &= \sum_{i+j+k=3} a_{ijk} \int_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} H^i h^j L^{k+N(d,m-1)+m-5} \\
&= \sum_{i+j+k=3} a_{ijk} \int_{\mathbb{P}(\mathcal{T})} H^i h^j s_{2m-4+k}(\mathcal{E}) \\
&= a_{300}(c_{m-4,m} - c_{m-3,m-1}) + a_{210}(c_{m-3,m-1} - c_{m-2,m-2}) + a_{120}(c_{m-2,m-2} - c_{m-1,m-3}) \\
&\quad + a_{201}(c_{m-3,m} - c_{m-2,m-1}) + a_{111}(c_{m-2,m-1} - c_{m-1,m-2}) + a_{021}(c_{m-1,m-2} - c_{m,m-3}) \\
&\quad + a_{102}(c_{m-2,m} - c_{m-1,m-1}) + a_{012}(c_{m-1,m-1} - c_{m,m-2}) \\
&\quad + a_{003}(c_{m-1,m} - c_{m,m-1}),
\end{aligned}$$

com os $c_{i,j}$'s dados em (1.37), p. 23. Com isso podemos verificar que

$$\begin{aligned}
c_{\alpha-1,\beta} - c_{\alpha,\beta-1} &= (d-1)^{\alpha-1} \left\{ \sum_{p=0}^{m-\alpha} (-1)^{m-(\alpha-1)+p} (dN(\alpha,p) - N(\alpha,p-1)) b_{\alpha+\beta-m-1+p} \right. \\
&\quad \left. + N(m-\alpha+1, \alpha-1) b_{\beta} \right\} \\
&= \frac{N(m-\alpha+1, \alpha-1)}{(m!)^{\beta} \beta!} d^{m\beta+\alpha-1} + \dots
\end{aligned}$$

Portanto, $\text{Grau}(\mathbb{Y}_{2,d}^m)$ é um polinômio em d de grau $m^2 + m - 1$ com coeficiente líder dado por

$$\left(\frac{1}{m!}\right)^{m+1} (A_{300}N(4, m-4) + A_{201}N(3, m-3) + A_{102}N(2, m-2) + A_{003}N(1, m-1)),$$

onde A_{ijk} representa o coeficiente líder de a_{ijk} com respeito a d .

Ora, uma inspeção em $[Y_2]$ (na forma da eq. 1.47, p. 29) nos convence de que os coeficientes acima são provenientes da parcela $\binom{m}{3} c_1(\mathcal{L})^3$, logo

$$A_{300} = A_{003} = \binom{m}{3} \text{ e } A_{201} = A_{102} = 3 \binom{m}{3}.$$

Daí, fazendo as substituições podemos escrever

$$\text{Grau}(\mathbb{Y}_{2,d}^m) = \binom{m}{3} \binom{m+3}{4} \left(\frac{1}{m!}\right)^{m+1} d^{m^2+m-1} + \dots \quad (1.49)$$

De outra forma, teremos

$$\text{Grau}(\mathbb{Y}_{2,d}^m) = (d-1)^{m-4} \sum_{i=0}^4 \alpha_{2i} \binom{N(d-1, m)}{m-i}. \quad (1.50)$$

Os coeficientes α_{2k} 's são polinômios em d e m , sendo que α_{20} tem d -grau igual a 3 e os demais têm d -grau igual a 4. De fato, com um pouco de paciência e algumas horas dedicadas a um tedioso cálculo, podemos chegar a

$$\left\{ \begin{array}{l} \alpha_{20} = \frac{1}{4} \binom{m+2}{3} \binom{m}{3} (d-2)^2 ((m+3)d - 2m) \\ \alpha_{21} = -\frac{10}{3} \binom{m+2}{5} d (d-2)^2 ((m+3)d - 2m) \\ \alpha_{22} = \frac{1}{2} \binom{m+2}{3} (m-2) (d-2)^2 ((m+5)d^2 - 2(m+3)d + 4) \\ \alpha_{23} = -\binom{m+2}{3} (d-2)^2 ((m+1)d^2 - 2md + 2) \\ \alpha_{24} = \binom{m+2}{3} d (d-2)^3. \end{array} \right.$$

1.6.2.1 Em \mathbb{P}^4

Temos particular interesse no resultado obtido para $m = 4$, pois $\mathbb{Y}_{2,d}^4$ parametriza os cones cuja base abstrata possui uma singularidade de tipo “cork2” (veja seção 3.4, p. 70). Nesse contexto, a variedade $\mathbb{Y}_{2,d}^4$ juntamente com a variedade dos cones com quatro geratrizes nodais são as únicas componentes na dimensão correta na família dos cones cuja base abstrata possui uma $2^{[4]}$ -singularidade (conceito definido no capítulo 2, p. 47). Nesse caso, obtemos

$$\begin{aligned} \text{Grau}(\mathbb{Y}_{2,d}^4) &= \frac{5}{1990656} d(d-1)(d-2)^3 (7d^{14} + 181d^{13} + 2157d^{12} + 15117d^{11} + 65703d^{10} \\ &+ 162507d^9 + 71399d^8 - 1045009d^7 - 3939930d^6 - 6138684d^5 - 508968d^4 \\ &+ 14056128d^3 + 18161280d^2 + 829440d - 9953280). \end{aligned} \quad (1.51)$$

Observe que o coeficiente líder desse polinômio é

$$\frac{35}{1990656} = \binom{4}{3} \cdot \binom{7}{4} \cdot \left(\frac{1}{4!}\right)^5,$$

verificando assim a expressão geral dada na equação 1.49, p. 30.

1.6.2.2 Em \mathbb{P}^3 : Cones com um geratriz tripla

Vale destacar também que

$$\text{Grau}(\mathbb{Y}_{2,d}^3) = 5(d-2)^2 \left\{ 3 \binom{N(d-1,3)}{3} - 4d \binom{N(d-1,3)}{2} + 4(2d-1) \binom{N(d-1,3)-1}{1} \right\}. \quad (1.52)$$

Esse polinômio é o grau da variedade que parametriza os cones de \mathbb{P}^3 sobre curvas planas com um ponto triplo. Além disso, para $d = 3$ o polinômio acima se anula. A explicação

para isso, como na observação 1.5.0.1, p. 24, é o fato de o mapa que projeta Y_2 em \mathbb{P}^{19} não ser genericamente injetivo, haja vista que uma cúbica plana com um ponto triplo se decompõe como união de três retas incidentes, de onde segue que um cone sobre essa curva é a união de três planos concorrentes ao longo de uma reta.

1.6.2.3 Vértice restrito

Como antes podemos considerar a subvariedade $\mathbb{Y}_{2,d}^{m,k} \subset \mathbb{Y}_{2,d}^m$, que parametriza os cones cujo vértice varia em um subespaço linear de codimensão k em \mathbb{P}^m . Assim, temos

$$\dim \mathbb{Y}_{2,d}^{m,k} = N(d, m-1) - 5 - k.$$

De modo inteiramente análogo ao que fizemos no final da seção 1.4, p. 18, obtemos

$$\text{Grau}(\mathbb{Y}_{2,d}^{m,k}) = (d-1)^{m-4} \sum_{k=0}^4 \alpha_{2k} \binom{N(d-1, m)}{m-i-k}. \quad (1.53)$$

Em particular, tomando $k = m$, vemos que o grau da variedade que parametriza as hipersuperfícies de grau d em \mathbb{P}^{m-1} , que possuem uma singularidade de tipo “cork2” é

$$\text{Grau}(\mathbb{Y}_{2,d}^{m,m}) = \alpha_{20}(d-1)^{m-4} = \frac{1}{4} \binom{m+2}{3} \binom{m}{3} (d-2)^2 (d-1)^{m-4} ((m+3)d-2m). \quad (1.54)$$

Assim, por exemplo, o número de superfícies de grau d em \mathbb{P}^3 que possuem uma singularidade de tipo “cork2” (e que passam por $N(d, 3) - 5$ pontos gerais) é obtido tomando $m = 4$, ou seja, é dado por

$$\text{Grau}(\mathbb{Y}_{2,d}^{4,4}) = 20(d-2)^2(7d-8). \quad (1.55)$$

Esse polinômio coincide com aquele que se encontra na página 16 de [31].

Note também que

$$\text{Grau}(\mathbb{Y}_{2,d}^{3,3}) = 15(d-2)^2$$

é o número de curvas planas de grau d com um ponto triplo e que passam por $N(d, 2) - 5$ pontos em posição geral. Como curvas planas de grau 3 com um ponto triplo são ternas de retas coplanares concorrentes, o número 15 que obtemos fazendo $d = 3$ é o número de configurações desse tipo passando por 5 pontos em posição geral. De fato, a escolha da primeira reta é feita de $10 = \binom{5}{2}$ modos diferentes, para a escolha da segunda reta temos $3 = \binom{3}{2}$ possibilidades, pois como os pontos estão em posição geral e as três retas

incidendem em um mesmo ponto, temos que a interseção da primeira com a segunda reta não pode ser um dos cinco pontos distinguidos. Por fim, a terceira reta é determinada pela interseção das duas primeiras e pelo ponto restante. Assim, o total de configurações é $3 \cdot 10/2 = 15$.

Exemplo 1.6.0.0.1. Tomando $k = m - 1$ na equação 1.53, p. 32, vemos que o número de cones em \mathbb{P}^m cuja base possui uma singularidade de tipo “cork2”, com vértice (de dimensão zero) variando ao longo de uma reta e que passam por um número adequado (a saber: $N(d, m - 1) - 4$) de pontos em posição geral, é dado por

$$\begin{aligned} \text{Grau}(\mathbb{Y}_{2,d}^{m,m-1}) &= (d-1)^{m-4}(\alpha_{20}N(d-1, m) + \alpha_{21}) \\ &= (d-1)^{m-4}(d-2)^2 \left(-\frac{10}{3} \binom{m+2}{5} d + \frac{1}{4} \binom{m+2}{3} \binom{m}{3} \binom{m+d-1}{m}\right) ((m+3)d - 2m) \\ &= 5(d-1)^{m-5}(d-2) \binom{m+2}{5} \binom{d}{3} \left(\binom{m+d-1}{m-1} - 4\right) ((m+3)d - 2m). \end{aligned}$$

1.6.3 Co-posto arbitrário

No caso geral, fazendo $r = \binom{q+1}{2}$ vemos que após desenvolver o determinante e fazer as substituições como nos dois casos acima, teremos que $[Y_q]$ se escreve na forma

$$[Y_q] = \sum_{k=0}^r F_k(H, h) L^{r-k},$$

onde $F_k(H, h)$ é um polinômio homogêneo de grau k , cujos coeficientes dependem de d e m . Desse modo, definindo

$$s := \min\{2m - 1, r\}$$

e escrevendo

$$F_k(H, h) = \sum_{i+j=k} a_{ijk} H^i h^j,$$

teremos

$$\begin{aligned} \text{Grau}(\mathbb{Y}_{q,d}^m) &= \sum_{k=0}^r \int_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} F_k(H, h) L^{N(d,m-1)+m-2-k} \\ &= \sum_{k=0}^r \int_{\mathbb{P}(\mathcal{T})} F_k(H, h) s_{2m-k-1}(\mathcal{E}) \\ &= \sum_{k=0}^s \int_{\mathbb{P}(\mathcal{T})} F_k(H, h) s_{2m-k-1}(\mathcal{E}) \\ &= \sum_{k=0}^s \sum_{i+j=k} a_{ijk} \int_{\mathbb{P}(\mathcal{T})} H^i h^j s_{2m-k-1}(\mathcal{E}). \end{aligned}$$

Por outro lado, escrevendo

$$s_{2m-k-1}(\mathcal{E}) = \sum_{l+n=2m-k-1} c_{l,n} H^l h^n.$$

Podemos concluir que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{P}(\mathcal{T})} H^i h^j s_{2m-k-1}(\mathcal{E}) &= \sum_{l+n=2m-k-1} c_{l,n} \int_{\mathbb{P}(\mathcal{T})} H^{l+i} h^{n+j} \\
&= \sum_{l+n=2m-k-1} c_{l,n} \int_{\mathbb{P}^m} s_{l+i-m+1}(\mathcal{T}) h^{n+j} \\
&= c_{m-i-1, m+i-k} - c_{m-i, m+i-k-1} \\
&= c_{m-i-1, m-j} - c_{m-i, m-j-1}.
\end{aligned}$$

Portanto, definindo $w := \min\{s, m-1\} = \min\{m-1, r\}$ e $t := \max\{0, m-s-1\}$, chegamos a

$$\begin{aligned}
\text{Grau}(\mathbb{Y}_{q,d}^m) &= \sum_{k=0}^s \sum_{i+j=k} a_{ijk} (c_{m-i-1, m-j} - c_{m-i, m-j-1}) \\
&= \sum_{k=0}^s \sum_{i+j=k} a_{ijk} (d-1)^{m-i-1} \left\{ \sum_{p=0}^i (-1)^{i+1+p} (dN(m-i, p) - N(m-i, p-1)) b_{m-k-1+p} \right. \\
&\quad \left. + N(i+1, m-i-1) b_{m-j} \right\} \\
&= (d-1)^{m-w-1} \sum_{n=0}^{m-t} \alpha_{qn} \binom{N(d-1, m)}{m-n}.
\end{aligned}$$

Os coeficientes α_{qk} 's são polinômios em m e d e podem ser efetivamente calculados, desde que conheçamos os coeficientes a_{ijk} 's, como fizemos nos casos $q=1$ e $q=2$. Por exemplo,

$$\alpha_{q0} = \sum_{k=0}^s a_{k0k} (d-1)^{w-k} N(k+1, m-k-1) = \sum_{k=0}^s a_{k0k} \binom{m}{k+1} (d-1)^{w-k}.$$

Observe que α_{q0} tem grau w , como polinômio em d . Os demais coeficientes são um pouco mais intrincados. Porém, pode-se verificar que eles terão grau no máximo $w+1$.

Mais geralmente, teremos

$$\text{Grau}(\mathbb{Y}_{q,d}^{m,l}) = (d-1)^{m-w-1} \sum_{n=0}^{m-x} \alpha_{qn} \binom{N(d-1, m)}{m-n-l}.$$

Pelo que observamos quanto aos graus dos coeficientes α_{qn} 's podemos concluir que $\text{Grau}(\mathbb{Y}_{q,d}^{m,l})$ é um polinômio (em d) de grau $m^2 + (1-l)m - 1$.

Em particular, o grau da variedade que parametriza as hipersuperfícies de \mathbb{P}^{m-1} com um ponto triplo, se escreve na forma

$$\text{Grau}(\mathbb{Y}_{m-1,d}^{m,m}) = (d-1)^{m-w-1} \alpha_{m-1,0} = \sum_{k=0}^s a_{k0k} \binom{m}{k+1} (d-1)^{m-k-1}.$$

A parte desconhecida dessa fórmula, isto é, os coeficientes a_{k0k} , são obtidos desenvolvendo o determinante 1.42, p. 27 e escrevendo-o em termos de H, h, L ; como foi feito nos casos $q=1$ e $q=2$.

1.7 Cones com vértice de dimensão positiva sobre curvas planas

Em todas as seções anteriores os cones que estudamos tinham vértice de dimensão nula. Isso facilitou nossa vida e permitiu que as contas fossem feitas essencialmente sem o auxílio de computadores. De fato, as contas que tínhamos que fazer sempre eram empurradas para serem feitas no anel de Chow da base que parametrizava os vértices, ou seja, um espaço projetivo já que os vértices eram pontos.

Nessa seção vamos generalizar as construções feitas em 1.2 e considerar cones cujo vértice é um subespaço linear de codimensão igual a três em \mathbb{P}^m , $m \geq 3$. Veremos que a situação é semelhante ao que já estudamos.

Para cones desse tipo, vale um resultado análogo ao que provamos na proposição 1.2.1, p. 6, isto é, um cone cujo vértice tem dimensão maior que $m - 3$ é união de hiperplanos se intersectando ao longo de um subespaço de dimensão $m - 2$.

Vejamos a construção intrínseca para a família de cones desse tipo.

Começamos olhando para a sequência tautológica de fibrados sobre a variedade de Grassmann

$$\mathbb{G}_3 = G[m - 3, m],$$

que parametriza os subespaços de codimensão três em \mathbb{P}^m ,

$$\mathcal{R} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}_3}^{m+1} \twoheadrightarrow \mathcal{T}.$$

Aqui $\text{posto}(\mathcal{R}) = m - 2$ e $\text{posto}(\mathcal{T}) = 3$. Para cada $\mathcal{V} \in \mathbb{G}_3$ a fibra $\mathbb{P}(\mathcal{T})_{\mathcal{V}}$ se identifica com o conjunto dos subespaços de codimensão dois em \mathbb{P}^m , que contêm \mathcal{V} . Assim, se $\mathbb{G}_2 = G[m - 2, m]$ então temos a bandeira

$$\mathbb{P}(\mathcal{T}) = \{(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \in \mathbb{G}_3 \times \mathbb{G}_2; \mathcal{V} \subset \mathcal{W}\}$$

Dado um plano $H \subset \mathbb{P}^m$ que não encontre \mathcal{V} , é claro que todo $\mathcal{W} \in \mathbb{P}(\mathcal{T})_{\mathcal{V}}$ intersecta H em um único ponto. Desse modo, $\mathbb{P}(\mathcal{T})_{\mathcal{V}}$ vive em \mathbb{G}_2 como um plano, que vamos denotar por $\mathbb{P}_{\mathcal{V}}^2$ (veja [13], exercício 6.5). Como antes, a base abstrata de um cone de vértice \mathcal{V} é simplesmente uma curva em $\mathbb{P}_{\mathcal{V}}^2$. Logo, se \mathcal{F} é o dual de \mathcal{T} então,

$$\mathbb{P}(S_d\mathcal{F}) = \{(\mathcal{V}, C); \mathcal{V} \in \mathbb{G}_3 \text{ e } C \text{ uma curva de grau } d \text{ em } \mathbb{P}_{\mathcal{V}}^2\}.$$

Temos também um mapa,

$$\varphi : \mathbb{P}(S_d\mathcal{F}) \longrightarrow \mathbb{P}^{N(d,m)-1}$$

cuja imagem é a variedade dos cones sobre curvas planas de grau d , com vértice de dimensão $m-3$ em \mathbb{P}^m , que denotamos por C_d^m . Todas as observações feitas na seção 1.2, p. 6 a respeito do mapa φ continuam valendo no contexto atual. Em particular, um aberto de $\mathbb{P}(S_d\mathcal{F})$ é mapeado isomorficamente sobre o aberto $\tilde{C}_d^m \subset C_d^m$ formado pelos cones “honestos”, isto é, os cones que não são uniões de hiperplanos concorrentes ao longo de um espaço de dimensão $m-2$. Note que

$$\dim(\mathbb{P}(S_d\mathcal{F})) = N(d, 2) + 3m - 7$$

e esse é o valor esperado para a dimensão da variedade de cones do tipo que estamos considerando. De fato, dado $\mathcal{V} \in \mathbb{G}_3$ e fixado um plano $H \subset \mathbb{P}^m$ que não encontra \mathcal{V} , vemos que cada cone de vértice \mathcal{V} é a junção (“join”) de \mathcal{V} com uma curva de grau d em H . Daí, como $\dim \mathbb{G}_3 = 3m - 6$, a soma dos graus de liberdade dá exatamente o valor acima.

Observamos por fim que

$$\dim(C_d^m \setminus \tilde{C}_d^m) = d + 2m - 2. \quad (1.56)$$

Para verificar essa afirmação basta observar que se um cone S é uma união de d hiperplanos se intersectando ao longo de um subespaço linear $L \subset \mathbb{P}^m$ de codimensão igual a 2, então tomando uma reta genérica l disjunta de L , segue que S é determinado e determina d pontos (não necessariamente distintos) em l . Assim, vemos que S é o junção de L com um conjunto de d pontos de l . Como $\dim \mathbb{G}_2 = 2m - 2$, temos $2m - 2$ graus de liberdade para a escolha de L e por outro lado, as configurações de d pontos em $l = \mathbb{P}^1$, tem dimensão projetiva igual a d , logo temos mais d graus de liberdade, totalizando o valor anunciado.

Observação 1.7.0.1. Mesmo no caso mais simples que seria considerar cones em \mathbb{P}^4 com vértice unidimensional e base nodal, não conseguimos fazer (sem uso de computadores) as contas análogas às que foram feitas na seção 1.3, p. 12. A dificuldade principal está no fato de não termos uma sequência exata do tipo 1.34, p. 23, que possibilite o cálculo explícito das classes de Segre das potências simétricas do fibrado \mathcal{F} , dual de \mathcal{T} .

1.8 Cones redutíveis

Na seção 2.1, p. 52 apresentaremos fórmulas para o número de cones com vértice de dimensão $m-3$ em \mathbb{P}^m , cujas bases são curvas planas n -nodais de grau d e $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Evidentemente, para que tal número seja finito devemos impor uma quantidade adequada de condições de incidência do tipo “passar por um ponto” ou “ter o vértice incidente a um dado subespaço linear”. Como veremos, tais fórmulas serão polinômios na variável d e para obtê-las vamos usar os resultados apresentados na próxima seção. Para $m \geq 4$ e/ou $n \geq 2$ foi-nos indispensável o uso de computadores para chegar às fórmulas desejadas. Contudo, podemos testar os resultados em alguns casos particulares que podem ser obtidos diretamente sem muitas dificuldades. Nomeadamente, os “casos-teste” são aqueles em que o número de geratrizes singulares é maior do que poderia ser suportado por um cone irredutível. Por exemplo, sabe-se que uma cúbica plana com dois nós deve necessariamente se decompor como a união de uma reta com uma cônica. Logo, cones cúbicos com duas geratrizes singulares se decompõem como a união de um cone quadrático com um hiperplano passando pelo vértice, ou seja, o número de cones cúbicos com duas geratrizes nodais fornecido pela fórmula prometida deve ser igual ao número de configurações do tipo

“cone quadrático + hiperplano contendo o vértice”,

passando é claro pelo número adequado de pontos. De um modo geral, os casos estudados nesta seção são tais que $n > \binom{d-1}{2}$, pois isso implica em redutibilidade dos cones. O objetivo desta seção é determinar em alguns desses casos particulares quais devem ser os resultados esperados.

1.8.1 dois cones de mesmo vértice

O primeiro caso de interesse, satisfazendo a condição $n > \binom{d-1}{2}$, é exatamente $n = 2$ e $d = 3$. No entanto, vamos generalizar um pouco e considerar a família de cones redutíveis de grau d em \mathbb{P}^m . Ora, a curva plana genérica redutível possui exatamente duas componentes irredutíveis e tem como únicas singularidades os pontos de interseção dessas componentes. Assim, o cone redutível geral se decompõe como a união de dois cones de mesmo vértice. Com isso em mente, vamos construir variedades que parametrizam as componentes da

família de cones redutíveis de um dado grau em \mathbb{P}^m .

Para começar, lembramos que temos um fibrado vetorial \mathcal{F} de posto 3 sobre \mathbb{G}_3 , definido pela sequência exata

$$\mathcal{F} \longrightarrow \check{\mathcal{O}}_{\mathbb{G}_3}^{m+1} \longrightarrow S,$$

ou seja, \mathcal{F} é o dual do quociente tautológico. Para cada $\mathcal{V} \in \mathbb{G}_3$, temos que a fibra $\mathcal{F}_{\mathcal{V}}$ é o subespaço de $\check{\mathbb{C}}^{m+1}$ gerado por 3 equações do vértice \mathcal{V} . Do mesmo modo, para cada inteiro positivo γ a fibra de $S_{\gamma}\mathcal{F}$ sobre $\mathcal{V} \in \mathbb{G}_3$ é o espaço das formas de grau γ em \mathbb{P}^m , que têm multiplicidade igual a γ ao longo de \mathcal{V} . Ou seja, podemos considerar o fibrado projetivo

$$\mathbb{P}(S_{\gamma}\mathcal{F}) = \{(\mathcal{V}, S) \in \mathbb{G}_3 \times \mathbb{P}^{N(\gamma, m)-1}; m_p(S) = \gamma, \forall p \in \mathcal{V}\}.$$

A projeção no segundo fator tem como imagem a família de cones de grau γ com vértice de dimensão $m - 3$ (ou maior) em \mathbb{P}^m . Dados dois inteiros positivos α e β , consideremos então a variedade (cf. 1.2, p. 8)

$$\mathbb{X}_{\alpha, \beta} := \mathbb{P}(S_{\alpha}\mathcal{F}) \times_{\mathbb{G}_3} \mathbb{P}(S_{\beta}\mathcal{F}) \subset \mathbb{G}_3 \times \mathbb{P}^{N(\alpha, m)-1} \times \mathbb{P}^{N(\beta, m)-1}.$$

Note que se $\pi : \mathbb{P}(S_{\alpha}\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{G}_3$ é o morfismo estrutural, então $\mathbb{X}_{\alpha, \beta} = \mathbb{P}(\pi^*(S_{\beta}\mathcal{F}))$, isto é, $\mathbb{X}_{\alpha, \beta}$ se identifica com um $\mathbb{P}^{N(\beta, 2)-1}$ -fibrado projetivo sobre $\mathbb{P}(S_{\alpha}\mathcal{F})$. Em particular, temos

$$\dim \mathbb{X}_{\alpha, \beta} = N(\alpha, 2) + N(\beta, 2) + 3m - 8.$$

Por outro lado, se $d = \alpha + \beta$ vemos que a multiplicação induz um morfismo

$$\eta : \mathbb{P}(S_{\alpha}\mathcal{F}) \times_{\mathbb{G}_3} \mathbb{P}(S_{\beta}\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{P}(S_d\mathcal{F}).$$

que tem grau $1 + \delta_{\alpha\beta}$, onde $\delta_{\alpha\beta}$ é o delta de Kronecker, isto é,

$$\delta_{\alpha\beta} = \begin{cases} 1, & \text{se } \alpha = \beta \\ 0, & \text{se } \alpha \neq \beta \end{cases}.$$

Ademais, compondo com a projeção $\pi_2 : \mathbb{P}(S_d\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{P}^{N(d, m)-1}$, que é genericamente injetiva, obtemos um morfismo

$$\psi : \mathbb{X}_{\alpha, \beta} \rightarrow \mathbb{P}^{N(d, m)-1}. \quad (1.57)$$

cujos grau também é $1 + \delta_{\alpha\beta}$.

Com isso podemos calcular o grau da variedade $C_{\alpha,\beta}^m \subset \mathbb{P}^{N(d,m)-1}$ dada como imagem de ψ . Com efeito, sendo $h_1 = c_1(\mathcal{O}_{S_\alpha\mathcal{F}}(1))$ e $h_2 = c_1(\mathcal{O}_{S_\beta\mathcal{F}}(1))$, as classes hiperplanas e

$$D_{\alpha\beta}^m = N(\alpha, 2) + N(\beta, 2) + 3m - 8,$$

temos

$$\begin{aligned} (1 + \delta_{\alpha\beta})\text{Grau}(C_{\alpha,\beta}^m) &= \int_{\mathbb{P}^{N(d,m)-1}} c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N(d,m)-1}}(1))^{D_{\alpha\beta}^m} \cap \psi_*([\mathbb{X}_{\alpha,\beta}]) \\ &= \int_{\mathbb{P}^{N(d,m)-1}} \psi_*(\psi^*c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N(d,m)-1}}(1))^{D_{\alpha\beta}^m} \cap [\mathbb{X}_{\alpha,\beta}]) \\ &= \int_{\mathbb{X}_{\alpha,\beta}} c_1(\psi^*\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N(d,m)-1}}(1))^{D_{\alpha\beta}^m} \cap [\mathbb{X}_{\alpha,\beta}] \\ &= \int_{\mathbb{X}_{\alpha,\beta}} (h_1 + h_2)^{D_{\alpha\beta}^m} \cap [\mathbb{X}_{\alpha,\beta}]. \end{aligned}$$

Usando a definição de classes de Segre ficamos com

$$(1 + \delta_{\alpha\beta})\text{Grau}(C_{\alpha,\beta}^m) = \sum_{k=N(\beta,2)-1}^{N(\beta,2)+3m-7} \binom{D_{\alpha\beta}^m}{k} \int_{\mathbb{G}_3} s_{N(\beta,2)+3m-7-k}(S_\alpha\mathcal{F})s_{k-N(\beta,2)+1}(S_\beta\mathcal{F}). \quad (1.58)$$

1.8.1.1 Em \mathbb{P}^3

Para $m = 3$, temos $\mathbb{G}_3 = \mathbb{P}^3$ e $s(S_\gamma\mathcal{F}) = (1 + h)^{N(\gamma-1,3)}$, onde $h = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))$. Portanto, o somatório acima se reduz a

$$\begin{aligned} (1 + \delta_{\alpha\beta})\text{Grau}(C_{\alpha,\beta}^3) &= \sum_{k=N(\beta,2)-1}^{N(\beta,2)+2} \binom{D_{\alpha\beta}^3}{k} \binom{N(\alpha-1,3)}{N(\beta,2)+2-k} \binom{N(\beta-1,3)}{k-N(\beta,2)+1} \\ &= \sum_{k=0}^3 \binom{N(\alpha,2)+N(\beta,2)+1}{k+N(\beta,2)-1} \binom{N(\alpha-1,3)}{3-k} \binom{N(\beta-1,3)}{k}. \end{aligned}$$

Perceba que, como havia de ser, essa última expressão é simétrica com respeito a α e β .

Em particular, concluímos que

$$\text{Grau}(C_{d-1,1}^3) = \binom{N(d-1,2)+4}{3} \binom{N(d-2,3)}{2} + \binom{N(d-1,2)+4}{2} \binom{N(d-2,3)}{3}. \quad (1.59)$$

Para $d = 3$, obtemos

$$\text{Grau}(C_{2,1}^3) = \binom{10}{3} \binom{4}{2} + \binom{10}{2} \binom{4}{3} = 6.120 + 45.4 = \mathbf{900}. \quad (1.60)$$

A combinatória desse resultado pode ser descrita de forma simples. De fato, a família dos cones cúbicos com duas geratrizes nodais tem dimensão $10 = 3 + 9 - 2$. Portanto,

para obtermos seu grau devemos contar quantos deles passam por 10 pontos em posição geral. Ora, como nossas configurações são do tipo cone quadrático unido com um plano passando pelo vértice, podemos escolher um plano de $\binom{10}{3}$ maneiras e depois nos perguntar quantos cones quadráticos têm vértice no plano escolhido, a resposta é 6. A outra parcela corresponde a primeiro escolhermos 8 pontos dentre os 10, isso pode ser feito de $\binom{10}{8} = \binom{10}{2}$ maneiras, e depois nos perguntamos quantos cones quadráticos passam por esses 8 pontos, a resposta é 4 pois é o grau do determinante, note que neste caso o plano fica determinado pelos dois pontos que sobram e pelo vértice do cone quadrático. Veja que coincidentemente o resultado **900** também é o grau da variedade que parametriza os cones cúbicos com uma geratriz nodal.

Para $d = 4$ a variedade $C_{2,2}^3$ tem grau igual a

$$\text{Grau}(C_{2,2}^3) = \frac{1}{2} \sum_{k=5}^8 \binom{13}{k} \binom{4}{8-k} \binom{4}{k-5} = 46332. \quad (1.61)$$

Note que $C_{2,2}^3$ não cobre toda a família de cones quárticos com quatro geratrizes nodais. Porém, é bem verdade que um tal cone deve ser redutível e o que falta considerar são as configurações do tipo

“cone cúbico com uma geratriz singular + plano passando pelo vértice”.

A enumeração dessas configurações será feita logo mais abaixo.

1.8.1.2 Em \mathbb{P}^4

Para $m = 4$, a obtenção de uma expressão geral para $\text{Grau}(C_{d-1,1}^4)$ é bem mais delicada. No entanto, para $d = 3$ com a ajuda do MAPLE usando o pacote “Schubert” (veja o final da seção 5.2), podemos chegar a

$$\text{Grau}(C_{2,1}^4) = \binom{13}{11} \cdot 20 + \binom{13}{4} \cdot 27 + \binom{13}{3} \cdot 30 = 29445. \quad (1.62)$$

A combinatória aqui tem uma explicação semelhante ao caso $m = 3$. Com efeito, temos que 13 é a dimensão da família de cones cúbicos com duas geratrizes nodais e $11 = 6 + 5$ é a dimensão da família de quádricas em \mathbb{P}^4 com vértice unidimensional. Assim, dados 13 pontos em posição geral podemos escolher 11 destes e nos perguntarmos quantos cones quadráticos passam por eles. A resposta é 20 e pode ser obtida usando a fórmula dada

na observação 1.5.0.1, p. 24. A segunda parcela corresponde a escolhermos um hiperplano (por 4 dos 13 pontos, $\binom{13}{4}$), e perguntarmos quantas quádricas (com vértice unidimensional) passam pelos outros 9 pontos e têm o vértice contido no hiperplano escolhido, a resposta é 27. Por fim, a última parcela corresponde a escolhermos dez dentre os 13 pontos e contarmos quantas quádricas passam eles e têm o vértice incidente ao plano determinado pelos três pontos que sobraram. Esta última condição implica que o plano e o vértice determinam um hiperplano que é a outra componente do cone cúbico.

1.8.2 dois cones de mesmo vértice bis

Agora faremos algumas modificações nas construções anteriores para podermos apresentar a variedade que parametriza os cones que se decompõem como união de dois cones de mesmo vértice, sendo que um deles possui alguma geratriz singular.

Sejam \mathcal{T} o quociente tautológico de posto 3 sobre \mathbb{G}_3 e \mathcal{F} o seu dual. Para cada inteiro positivo α podemos construir, como foi feito na seção 1.3, p. 12, um fibrado \mathcal{E}_α sobre $\mathbb{P}(\mathcal{T})$ de posto

$$\text{posto}(\mathcal{E}_\alpha) = N(\alpha, 2) - 3$$

tal que o fibrado projetivo

$$\mathbb{P}(\mathcal{E}_\alpha) \subset \mathbb{P}(S_\alpha \mathcal{F}) \times_{\mathbb{G}_3} \mathbb{P}(\mathcal{T})$$

tem como imagem pela primeira projeção exatamente a subvariedade de $\mathbb{P}(S_\alpha \mathcal{F})$ que corresponde aos cones com uma geratriz nodal.

Dessa forma, dado um outro inteiro β podemos definir a variedade

$$\mathcal{X}_{\alpha,\beta} = \mathbb{P}(\mathcal{E}_\alpha) \times_{\mathbb{P}(\mathcal{T})} \mathbb{P}(S_\beta \mathcal{F}).$$

Novamente podemos ver $\mathcal{X}_{\alpha,\beta}$ como um $\mathbb{P}^{N(\alpha,2)-4}$ -fibrado sobre $\mathbb{P}(S_\beta \mathcal{F})$ e concluir que

$$\dim \mathcal{X}_{\alpha,\beta} = N(\alpha, 2) + N(\beta, 2) + 3m - 9 = D_{\alpha\beta}^m - 1.$$

Note que $\mathcal{X}_{\alpha,\beta}$ é subvariedade de

$$\mathbb{P}(S_\alpha \mathcal{F}) \times_{\mathbb{G}_3} \mathbb{P}(\mathcal{T}) \times_{\mathbb{P}(\mathcal{T})} \mathbb{P}(S_\beta \mathcal{F}) = \mathbb{P}(S_\alpha \mathcal{F}) \times_{\mathbb{G}_3} \mathbb{P}(S_\beta \mathcal{F}) = \mathbb{X}_{\alpha,\beta}.$$

A primeira igualdade acima significa isomorfismo canônico.

Assim, $\mathcal{X}_{\alpha,\beta}$ é uma hipersuperfície dentro de $\mathbb{X}_{\alpha,\beta}$ e a restrição do mapa ψ (veja 1.57, p. 38) a $\mathcal{X}_{\alpha,\beta}$ agora é genericamente injetiva. Denotemos por $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}^m \subset \mathbb{P}^{N(d,m)-1}$ a imagem de $\mathcal{X}_{\alpha,\beta}$ por meio do morfismo ψ . Observe que um elemento genérico de $\mathcal{C}_{\alpha,\beta}^m$ possui exatamente $\alpha\beta + 1$ geratrizes nodais. Tomando $d = \alpha + \beta$ e chamando de l a classe hiperplana de $\mathbb{P}(\mathcal{E}_\alpha)$, temos

$$\begin{aligned}
\text{Grau}(\mathcal{C}_{\alpha,\beta}^m) &= \int_{\mathbb{P}^{N(d,m)-1}} c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N(d,m)-1}}(1))^{D_{\alpha\beta}^m - 1} \cap \psi_*([\mathcal{X}_{\alpha,\beta}]) \\
&= \int_{\mathbb{P}^{N(d,m)-1}} \psi_*(\psi^* c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N(d,m)-1}}(1))^{D_{\alpha\beta}^m - 1} \cap [\mathcal{X}_{\alpha,\beta}]) \\
&= \int_{\mathcal{X}_{\alpha,\beta}} c_1(\psi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N(d,m)-1}}(1))^{D_{\alpha\beta}^m - 1} \cap [\mathcal{X}_{\alpha,\beta}] \\
&= \int_{\mathcal{X}_{\alpha,\beta}} (l + h_2)^{D_{\alpha\beta}^m - 1} \cap [\mathcal{X}_{\alpha,\beta}] \\
&= \sum_{k=0}^{D_{\alpha\beta}^m - 1} \binom{D_{\alpha\beta}^m - 1}{k} \int_{\mathbb{P}(\mathcal{T})} s_{k-N(\alpha,2)+4}(\mathcal{E}_\alpha) s_{N(\alpha,2)+3m-8-k}(S_\beta \mathcal{F}) \cap [\mathbb{P}(\mathcal{T})].
\end{aligned} \tag{1.63}$$

1.8.2.1 Em \mathbb{P}^3

Para $m = 3$ temos $s(\mathcal{T}) = 1 - h$ e

$$s_{N(\alpha,2)-k+1}(S_\beta \mathcal{F}) = \binom{N(\beta-1,3)}{N(\alpha,2)-k+1} h^{N(\alpha,2)-k+1}.$$

Se denotarmos $H = c_1(\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(1))$, então

$$s_{k-N(\alpha,2)+4}(\mathcal{E}_\alpha) = \sum_{i+j=k-N(\alpha,2)+4} c_{i,j}^\alpha H^i h^j,$$

com os coeficientes $c_{i,j}^\alpha$ dados por

$$c_{i,j}^\alpha = \left\{ \sum_{p=0}^{3-i} (-1)^{3-i+p} \binom{i+p}{p} \binom{N(\alpha-1,3)}{k+p-N(\alpha,2)+1} \right\} (\alpha-1)^i + \binom{N(\alpha-1,3)}{k-N(\alpha,2)+1}.$$

Daí segue que

$$\begin{aligned}
\text{Grau}(\mathcal{C}_{\alpha,\beta}^3) &= \sum_{k=0}^{N(\alpha,2)+1} \binom{D_{\alpha\beta}^3 - 1}{k} \binom{N(\beta-1,3)}{N(\alpha,2)-k+1} \{c_{2,k-N(\alpha,2)+2}^\alpha - c_{3,k-N(\alpha,2)+1}^\alpha\} \\
&= (\alpha-1)^2 \sum_{k=N(\alpha,2)-1}^{N(\alpha,2)+1} \binom{D_{\alpha\beta}^3 - 1}{k} \binom{N(\beta-1,3)}{N(\alpha,2)-k+1} \{3 \binom{N(\alpha-1,3)}{k-N(\alpha,2)+2} - \alpha \binom{N(\alpha-1,3)}{k-N(\alpha,2)+1}\} \\
&= (\alpha-1)^2 \sum_{k=0}^2 \binom{N(\alpha,2)+N(\beta,2)}{k+N(\alpha,2)-1} \binom{N(\beta-1,3)}{2-k} \{3 \binom{N(\alpha-1,3)}{k+1} - \alpha \binom{N(\alpha-1,3)}{k}\}.
\end{aligned} \tag{1.64}$$

Em particular, obtemos

$$\text{Grau}(\mathcal{C}_{d-1,1}^3) = (d-2)^2 \sum_{k=1}^2 \binom{N(d-1,2)+3}{4-k} \{3 \binom{N(d-2,3)}{k+1} - (d-1) \binom{N(d-2,3)}{k}\} .$$

E para $d = 4$, chegamos a

$$\text{Grau}(\mathcal{C}_{3,1}^3) = 12 \sum_{k=1}^2 \binom{13}{k+9} \left(\binom{10}{k+1} - \binom{10}{k} \right) = 190320 . \quad (1.65)$$

Portanto, o número de cones quárticos com quatro geratrizes nodais em \mathbb{P}^3 é igual a

$$\text{Grau}(\mathcal{C}_{2,2}^3) + \text{Grau}(\mathcal{C}_{3,1}^3) = 46332 + 190320 = 236652. \quad (1.66)$$

1.8.2.2 Em \mathbb{P}^4

O grau da variedade dos cones quárticos com vértice unidimensional, sobre curvas planas em \mathbb{P}^4 , com quatro geratrizes nodais também é obtido usando as construções acima e o MAPLE com ajuda do “Schubert”, para calcular as integrais 1.58, p. 39 e 1.63, p. 42. Veja no apêndice, § 6.3.1, p. 171, lá você encontrará um código para MAPLE que calcula o belo número

$$\text{Grau}(\mathcal{C}_{2,2}^4) + \text{Grau}(\mathcal{C}_{3,1}^4) = 45476595. \quad (1.67)$$

Por motivos já salientados na observação 1.5.0.1, p. 24, a fórmula 1.64, p. 42 não fornece resultados corretos para $\alpha = 2$. Assim, por exemplo, o número de cones quárticos com cinco geratrizes singulares, que em princípio poderíamos pensar que seria igual $\text{Grau}(\mathcal{C}_{2,2}^3)$, deve ser calculado por meios diretos.

1.8.3 um cone e vários hiperplanos pelo vértice

Uma quártica com cinco singularidades necessariamente se decompõe como a união de duas cônicas sendo que uma delas é singular, isto é, um par de retas. Logo, um cone quártico com cinco geratrizes nodais se decompõe como a união de um cone quadrático e dois hiperplanos contendo seu vértice.

Para cobrir as configurações desse tipo, tomemos dois inteiros α e β com $\beta \neq 1$ e consideremos a variedade

$$\mathbb{X}_{1,\alpha,\beta} := \underbrace{\mathbb{P}(\mathcal{F}) \times_{\mathbb{G}_3} \dots \times_{\mathbb{G}_3} \mathbb{P}(\mathcal{F})}_{\alpha \text{ cópias}} \times_{\mathbb{G}_3} \mathbb{P}(S_\beta \mathcal{F}).$$

Assim, temos

$$D_{1^\alpha\beta}^m = \dim \mathbb{X}_{1^\alpha,\beta} = 2\alpha + N(\beta, 2) + 3m - 7.$$

Além disso, se $d = \alpha + \beta$ então a multiplicação induz um morfismo ψ , cujo grau é $\alpha!$ (fatorial).

$$\psi : \mathbb{X}_{1^\alpha,\beta} \rightarrow \mathbb{P}^{N(d,m)-1}.$$

Portanto, chamando de $\mathcal{C}_{1^\alpha,\beta}^m$ a imagem de ψ , segue que

$$\begin{aligned} \alpha! \text{Grau}(\mathcal{C}_{1^\alpha,\beta}^m) &= \int_{\mathbb{P}^{N(d,m)-1}} c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N(d,m)-1}}(1))^{D_{1^\alpha\beta}^m} \cap \psi_*([\mathbb{X}_{1^\alpha,\beta}]) \\ &= \int_{\mathbb{P}^{N(d,m)-1}} \psi_* (\psi^* c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N(d,m)-1}}(1))^{D_{1^\alpha\beta}^m} \cap [\mathbb{X}_{1^\alpha,\beta}]) \\ &= \int_{\mathbb{X}_{1^\alpha,\beta}} c_1(\psi^* \mathcal{O}_{\mathbb{P}^{N(d,m)-1}}(1))^{D_{1^\alpha\beta}^m} \cap [\mathbb{X}_{1^\alpha,\beta}] \\ &= \int_{\mathbb{X}_{1^\alpha,\beta}} (h_1 + \dots + h_\alpha + l)^{D_{1^\alpha\beta}^m} \cap [\mathbb{X}_{1^\alpha,\beta}]. \end{aligned}$$

Onde h_i é a classe hiperplana da i -ésima cópia de $\mathbb{P}(\mathcal{F})$ em $\mathbb{X}_{1^\alpha,\beta}$ e l é a classe hiperplana de $\mathbb{P}(S_\beta\mathcal{F})$. Logo,

$$\begin{aligned} \text{Grau}(\mathcal{C}_{1^\alpha,\beta}^m) &= \frac{1}{\alpha!} \sum \frac{(D_{1^\alpha\beta}^m)!}{k_1!k_2!\dots k_{\alpha+1}!} \int_{\mathbb{X}_{1^\alpha,\beta}} h_1^{k_1} \dots h_\alpha^{k_\alpha} l^{k_{\alpha+1}} \cap [\mathbb{X}_{1^\alpha,\beta}] \\ &= \frac{1}{\alpha!} \sum \frac{(D_{1^\alpha\beta}^m)!}{k_1!k_2!\dots k_{\alpha+1}!} \int_{\mathbb{G}_3} s_{k_1-2}(\mathcal{F}) \dots s_{k_\alpha-2}(\mathcal{F}) s_{k_{\alpha+1}-N(\beta,2)+1}(S_\beta\mathcal{F}) \cap [\mathbb{G}_3], \end{aligned}$$

a soma sendo tomada sobre todas as $(\alpha+1)$ -partições de $D_{1^\alpha\beta}^m$. Na verdade, como cada h_i é imagem inversa da classe hiperplana de $\mathbb{P}(\mathcal{F})$, que por sua vez é imagem inversa da classe hiperplana de \mathbb{P}^m , podemos considerar apenas as partições que satisfazem a condição

$$k_i \leq m, \forall i = 1, 2, \dots, \alpha.$$

Veja a § 6.3.2, p. 173, onde depositamos umas linhas de código para MAPLE que calculam

$$\text{Grau}(\mathcal{C}_{1^2,2}^4) = 12919725. \quad (1.68)$$

1.8.3.1 Em \mathbb{P}^3

Felizmente para $m = 3$, não precisamos de máquinas. De fato, temos

$$s(\mathcal{F}) = 1 + h, \quad \text{onde } h = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)).$$

Além disso,

$$s_{k_{\alpha+1}-N(\beta,2)+1}(S_{\beta}\mathcal{F}) = \binom{N(\beta-1,3)}{k_{\alpha+1}-N(\beta,2)+1} h^{k_{\alpha+1}-N(\beta,2)+1} .$$

Assim, as únicas parcelas que sobrevivem no somatório acima são aquelas para as quais $k_{\alpha+1}$ está entre $N(\beta, 2) - 1$ e $N(\beta, 2) + 2$. Portanto, fazendo $j = k_{\alpha+1} - N(\beta, 2) + 1$ temos que j varia entre 0 e 3. Além disso,

$$k_1 + \dots + k_{\alpha} = 2\alpha + N(\beta, 2) + 2 - k_{\alpha+1} = 2\alpha + 3 - j .$$

Como devemos ter $2 \leq k_i \leq 3$, vemos que as únicas soluções desta equação que produzem parcelas não nulas são aquelas em que temos

$$\alpha + j - 3 \text{ parcelas iguais a } 2 \text{ e } 3 - j \text{ iguais a } 3 .$$

Portanto,

$$\text{Grau}(\mathcal{C}_{1^{\alpha},\beta}^3) = \frac{1}{\alpha!} \sum_{j=0}^3 \frac{(2\alpha+N(\beta,2)+2)!}{2^{\alpha+j-3}(3!)^{3-j}(j+N(\beta,2)-1)!} \binom{N(\beta-1,3)}{j} \binom{\alpha}{3-j} .$$

Em particular, para $\alpha = \beta = 2$, obtemos o grau da variedade do cones quárticos com 5 geratrizes singulares:

$$\text{Grau}(\mathcal{C}_{1^2,2}^3) = \frac{1}{2!} \sum_{j=1}^3 \frac{12!}{2^{j-1}(3!)^{3-j}(j+5)!} \binom{4}{j} \binom{2}{3-j} = 90420 . \quad (1.69)$$

Note ainda, que para $\alpha = 1$ e $\beta = d - 1$ recuperamos os resultados do início desta seção, isto é,

$$\text{Grau}(\mathcal{C}_{1^1,d-1}^3) = \text{Grau}(\mathcal{C}_{d-1,1}^3) = \binom{N(d-1,2)+4}{3} \binom{N(d-2,3)}{2} + \binom{N(d-1,2)+4}{2} \binom{N(d-2,3)}{3} .$$

1.8.4 cones que são uniões de hiperplanos

Por fim, o caso extremo no que diz respeito a cones redutíveis é aquele em que todas as componentes são hiperplanos. Um elemento genérico da família dos cones de grau d desse tipo apresenta $\binom{d}{2}$ geratrizes singulares. Também vale a recíproca. De fato, sabe-se que uma curva plana de grau d que possui $\binom{d}{2}$ pontos duplos distintos deve necessariamente se decompor como a união d retas. Desse modo, enumerar cones cúbicos com três geratrizes nodais é o mesmo que enumerar ternas de hiperplanos distintos. Analogamente, enumerar cones quárticos com seis geratrizes nodais é o mesmo que enumerar quádruplas de hiperplanos se intersectando ao longo de um subespaço linear de codimensão três. As fórmulas para esses casos são obtidas como caso particular do caso tratado acima, fazendo $\beta = 0$.

Concretamente, temos

$$\begin{aligned} \text{Grau}(\mathcal{C}_{1^d}^m) &= \frac{1}{d!} \sum \frac{(2d+3m-6)!}{k_1!k_2!\dots k_d!} \int_{\mathbb{G}_3} s_{k_1-2}(\mathcal{F})s_{k_2-2}(\mathcal{F})\dots s_{k_d-2}(\mathcal{F}) \cap [\mathbb{G}_3] \\ &= \frac{1}{d!} \sum \frac{(2d+3m-6)!}{k_1!k_2!\dots k_d!} . \end{aligned}$$

A soma deve ser tomada sobre todas as d -partições (k_1, k_2, \dots, k_d) de $2d+3m-6$, tais que $2 \leq k_i \leq m, \forall i$. Observamos que no caso $d=3$, m arbitrário, o que estamos enumerando são as ternas de hiperplanos em \mathbb{P}^m e a soma é tomada sobre todas as partições de $3m$. Assim, a única partição que nos interessa é $k_1 = k_2 = k_3 = m$ e portanto,

$$\text{Grau}(\mathcal{C}_{1^3}^m) = \frac{1}{3!} \frac{(3m)!}{(m!)^3} \int_{\mathbb{G}_3} (s_{m-2}(\mathcal{F}))^3 \cap [\mathbb{G}_3] = \frac{1}{3!} \frac{(3m)!}{(m!)^3} .$$

Por outro lado, no caso em que $m=3$ e d é arbitrário temos

$$\text{Grau}(\mathcal{C}_{1^d}^3) = \frac{(2d+3)!}{d!(3!)^3(2!)^{d-3}} \binom{d}{3} = \frac{(2d+3)!}{(d-3)!(3!)^4(2!)^{d-3}} .$$

Em particular, segue que $\text{Grau}(\mathcal{C}_{1^3}^3) = 280$ e esse é o grau da variedade de cones cúbicos em \mathbb{P}^3 com três geratrizes nodais.

Do mesmo modo,

$$\text{Grau}(\mathcal{C}_{1^4}^3) = 15400, \tag{1.70}$$

é o grau da variedade que parametriza os cones quárticos em \mathbb{P}^3 com seis geratrizes nodais.

Para cones cúbicos com três geratrizes nodais e vértice unidimensional em \mathbb{P}^4 , temos

$$\text{Grau}(\mathcal{C}_{1^3}^4) = \frac{12!}{3!(4!)^3} = 5775. \tag{1.71}$$

No caso $d=4$ e $m=4$ aparece um número maior de partições não desprezíveis. Precisamente, aparecem 10 partições que contribuem efetivamente para obtermos

$$\text{Grau}(\mathcal{C}_{1^4}^4) = 1576575. \tag{1.72}$$

Veja o apêndice, 6, p. 163; lá apresentamos códigos para MAPLE que calculam, caso a caso, cada um desses números.

Capítulo 2

Feixes de contato

Para a comodidade do leitor incluiremos neste capítulo os resultados necessários à abordagem do problema de enumerar cones com mais de uma geratriz singular. A idéia é impor singularidades sobre a família de bases abstratas. Assim, a estratégia de enumeração de singularidades desenvolvida a seguir consiste em considerar uma família de divisores $\{\mathcal{D}_s \subset \mathcal{Y}_s\}_{s \in S}$, sobre um esquema de base S . Para estudar os membros dessa família que são singulares é conveniente olhar para os pares (y, s) tais que \mathcal{D}_s é singular em y . Tais resultados são transcritos de [30]. Uma outra referência para essas construções é a seção 4 de [19].

Definição 2.0.1. Seja \mathcal{Y} uma variedade lisa e $D \subset \mathcal{Y}$ um divisor. Dada uma sequência de inteiros $\underline{m} = (m_1, m_2, m_3, \dots, m_r)$, dizemos que D possui uma singularidade de tipo \underline{m} (ou então que D é \underline{m} -singular), se existe $x_1 \in D$ com multiplicidade maior ou igual a m_1 e ao explodirmos \mathcal{Y} em x_1 , o divisor efetivo $D_1 - m_1 E_1$ tem uma singularidade de tipo $\underline{m}' = (m_2, m_3, \dots, m_r)$, onde D_1 é a transformada total de D e E_1 é o divisor excepcional. Dizemos ainda que uma singularidade (x_1, x_2, \dots, x_r) de tipo \underline{m} é de tipo estrito se cada x_i tem multiplicidade exatamente m_i e, para $i \geq 2$, $x_i \notin E_{i-1}$. Se todos os m_i 's são iguais a um certo inteiro p , então escrevemos simplesmente $\underline{m} = p^{[r]}$. Usamos também possíveis variantes dessa notação, por exemplo $(2^{[3]}, 3^{[2]}, 4) := (2, 2, 2, 3, 3, 4)$. Além disso, no caso em que $x_i \in E_{i-1}$, escreveremos $\underline{m} = (m_1, \dots, m_{i-1}(m_i), \dots, m_r)$. Em particular, dizer que D possui uma singularidade de tipo estrito $p^{[r]}$ significa dizer que D possui r pontos singulares de multiplicidade p .

Observação 2.0.4.1. É importante notar que se uma curva C contida numa superfície S tem uma singularidade ordinária de tipo estrito (3), então C também tem uma singularidade de tipo $(2^{[4]})$. De fato, se $p \in C$ é um ponto triplo ordinário e $Bl_p : \tilde{S} \rightarrow S$ é a explosão de S em p , então o divisor $\tilde{C} := Bl_p^*C - 2E$ contém o divisor excepcional como componente e contém também a transformada estrita, $C' := Bl_p^*C - 3E$, de C . Por outro lado, C' e E se intersectam em três pontos distintos: p_1, p_2, p_3 (um para cada direção tangente a C em p) e esses certamente são pontos singulares de \tilde{C} , haja vista que por um ponto liso passa sempre uma única componente. Dessa forma (p, p_1, p_2, p_3) é uma singularidade de tipo $2^{[4]}$ da curva $C \subset S$. Da mesma forma, a existência de uma singularidade ordinária de tipo estrito (4), implica a existência de uma do tipo $2^{[r]}$, para todo $r \geq 1$, pois neste caso E vive em \tilde{C} como uma componente múltipla (não reduzida) e portanto \tilde{C} é singular em todos os pontos de E . Daí, concluímos que a r -sequência formada por p e qualquer $(r-1)$ -sequência de pontos de E , é uma singularidade de tipo $2^{[r]}$ de C . Esse tipo de fenômeno é o que nos faz impor a restrição $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ (veja [30], exemplos: 2.1, 2.2 e 2.3). Em [19], o método aplicado pelos autores se estende também aos casos $n = 7, 8$.

Agora passamos à construção dos chamados feixes de contato, ferramenta fundamental com a qual vamos estudar o caso de cones com mais de uma geratriz singular.

Inicialmente consideremos um morfismo $f : X \rightarrow S$ próprio e liso, e \mathcal{L} um feixe invertível sobre X . Seja $\mathcal{D} \subset X$ o esquema de zeros de uma seção global de \mathcal{L} , não nula. Denotemos: $X_0 = S$, $X_1 = X$ e $f_1 = f : X_1 \rightarrow X_0$. Para cada $r \geq 1$, tomemos

$$b_{r+1} : X_{r+1} \rightarrow X_r \times_{f_r} X_r$$

como a explosão de $X_r \times_{f_r} X_r$ ao longo da diagonal Δ_r , com excepcional $E_{1,r+1}$. Denotemos por $p_{r,i} : X_r \times_{f_r} X_r \rightarrow X_r$ as projeções, $i = 1, 2$. Consideremos X_{r+1} como um esquema sobre X_r com morfismo estrutural dado pela composição $f_{r+1} = p_{r,1} \circ b_{r+1}$.

Definimos também,

$$f_{r+1,2} = p_{r,2} \circ b_{r+1}$$

e denotamos por

$$E_{1,t} := b_t^{-1}(\Delta_t) \subset X_t,$$

o divisor excepcional de b_t , $t \in \{2, 3, \dots, r\}$. Então tomando imagens inversas sucessivas

definimos

$$E_{r-t+2,t} := f_{r+1,2}^* \cdots f_{t+1,2}^* E_{1,t} \subset X_{r+1}.$$

Por fim, para cada sequência de inteiros $\underline{m} = (m_1, m_2, \dots, m_r)$, definimos o divisor

$$\underline{m}E := m_1 E_{1,r+1} + m_2 E_{2,r} + \dots + m_r E_{r,2} \subset X_{r+1}.$$

Podemos condensar parte das informações acima, escrevendo que o seguinte diagrama é comutativo.

$$\begin{array}{ccccc} \underline{m}E \subset X_{r+1} & \xrightarrow{b_{r+1}} & X_r \times_{f_r} X_r & \xrightarrow{p_{r+1,2}} & X_r \\ \downarrow f_{r+1} & & \downarrow p_{r+1,1} & & \downarrow f_r \\ X_r & \xrightarrow{\quad\quad\quad} & X_r & \xrightarrow{f_r} & X_{r-1} \end{array}$$

Note que se $x_1 \in X_1$ vive sobre $x_0 \in X_0$, isto é, $f_1(x_1) = x_0$, então a fibra de f_2 sobre x_1 é

$$(X_2)_{x_1} := f_2^{-1}(x_1) = b_2^{-1}(p_{2,1}^{-1}(x_1)) = b_2^{-1}(\{x_1\} \times f_1^{-1}(x_0)) = b_2^{-1}(\{x_1\} \times (X_1)_{x_0})$$

como $\{x_1\} \times (X_1)_{x_0} \cap \Delta_1 = (x_1, x_1)$ segue que $(X_2)_{x_1}$ é a explosão de $(X_1)_{x_0}$ em x_1 . Traduzindo, isso quer dizer que devemos pensar nos pontos de X_2 como pares de pontos (x_1, x_2) em X_1 , possivelmente infinitamente próximos e que têm a mesma imagem em X_0 . Do mesmo modo, um ponto de X_r deve ser pensado como uma r -upla (x_1, x_2, \dots, x_r) de pontos de X_1 que vivem sobre um mesmo $x_0 \in X_0$ e talvez com x_i infinitamente próximo de x_{i-1} .

Agora definimos sobre X_{r+1} o seguinte feixe associado a \mathcal{L} .

$$\mathcal{L}(\underline{m}) = f_{r+1,2}^* f_{r,2}^* \cdots f_{2,2}^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}(-\underline{m}E).$$

A seção $s \in H^0(X_1, \mathcal{L})$ que define \mathcal{D} , induz via imagem inversa uma seção, também denotada por s , de $f_{r+1,2}^* f_{r,2}^* \cdots f_{2,2}^* \mathcal{L}$ sobre X_{r+1} .

Obtemos assim, o seguinte diagrama de feixes de $\mathcal{O}_{X_{r+1}}$ -módulos:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{O}_{X_{r+1}} & & \\ \downarrow s & \searrow \sigma_{\underline{m}}^{\mathcal{D}} & \\ \mathcal{L}(\underline{m}) \longrightarrow & f_{r+1,2}^* f_{r,2}^* \cdots f_{2,2}^* \mathcal{L} \longrightarrow & f_{r+1,2}^* f_{r,2}^* \cdots f_{2,2}^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{\underline{m}E} \end{array}$$

Por construção segue que $\sigma_{\underline{m}}^{\mathcal{D}}$ se anula ao longo de uma fibra

$$\mathcal{W} := f_{r+1}^{-1}(x_1, x_2, \dots, x_r) \subset X_{r+1},$$

se e somente se (x_1, x_2, \dots, x_r) é uma singularidade de tipo \underline{m} da fibra \mathcal{D}_{x_0} , com $x_0 = f_1(x_1)$. De fato, a fibra de $\underline{m}E$ sobre $(x_1, x_2, \dots, x_r) \in X_r$ é igual a $m_r E_{x_r} + \dots + m_1 E_{x_1}$, onde $E_{x_i} \subset (X_{i+1})_{x_i}$ denota a transformada total do divisor excepcional da explosão de $(X_i)_{x_{i-1}}$ em x_i . E o anulamento de $\sigma_{\underline{m}}^{\mathcal{D}}$ ao longo de \mathcal{W} significa que a seção vertical restrita a \mathcal{W} se fatora por $\mathcal{L}(\underline{m})|_{\mathcal{W}}$, isso implica que a fibra do transformado total de \mathcal{D} sobre (x_1, x_2, \dots, x_r) contém esquematicamente o divisor $m_r E_{x_r} + \dots + m_1 E_{x_1}$, ou seja, (x_1, x_2, \dots, x_r) é uma singularidade de tipo \underline{m} do divisor \mathcal{D}_{x_0} .

Agora definimos sobre X_r o feixe de \underline{m} -contato:

$$\mathcal{C}(\underline{m}, \mathcal{L}) = f_{r+1*}(f_{r+1,2}^* f_{r,2}^* \dots f_{2,2}^* \mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{\underline{m}E})$$

Ao feixe $\mathcal{C}(\underline{m}, \mathcal{L})$ temos automaticamente associada uma seção, obtida como imagem direta de $\sigma_{\underline{m}}^{\mathcal{D}}$ por f_{r+1} , a qual ainda denotaremos por $\sigma_{\underline{m}}^{\mathcal{D}}$ e cujo esquema de zeros denotado $\Sigma(\underline{m}, \mathcal{D})$, vai parametrizar as singularidade de tipo \underline{m} das fibras de \mathcal{D} (Prop. 3.3 de [30]).

Apresentaremos a seguir, sem demonstração, resultados que desvendam a estrutura dos feixes $\mathcal{C}(\underline{m}, \mathcal{L})$, bem como dos esquemas $\Sigma(\underline{m}, \mathcal{D})$. Como quase tudo escrito nesta seção, esses resultados foram pescados de [30], e é para lá que direcionamos o leitor com interesse nas demonstrações. Mais especificamente, os destinos são o Lema 3.1 e as proposições 3.3 e 3.4.

Lema 2.0.0.1. *Com as notações acima, e sendo n a dimensão relativa de f , temos:*

1. $\mathcal{C}(\underline{m}, \mathcal{L})$ é localmente livre de posto $\sum_{i=1}^r \binom{n+m_i-1}{n}$ e sua formação comuta com mudança de base.

2. A seguinte sequência é exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{C}((m_r), \mathcal{L}(\underline{m}')) \longrightarrow \mathcal{C}(\underline{m}, \mathcal{L}) \longrightarrow f_r^* \mathcal{C}(\underline{m}', \mathcal{L}) \longrightarrow 0,$$

onde $\underline{m}' = (m_1, m_2, \dots, m_{r-1})$.

3. Para sequências do tipo (μ) , com um só termo, temos que $\mathcal{C}((\mu), \mathcal{L})$ coincide com o feixe de partes principais de ordem $\mu - 1$ de \mathcal{L} . Portanto, $\mathcal{C}((1), \mathcal{L}) = \mathcal{L}$ e temos a sequência exata

$$0 \longrightarrow \mathcal{L} \otimes \text{Sym}^{\mu-1} \Omega_{X/S} \longrightarrow \mathcal{C}((\mu), \mathcal{L}) \longrightarrow \mathcal{C}((\mu-1), \mathcal{L}) \longrightarrow 0.$$

Prova: Veja Lema 3.1 de [30].

Proposição 2.0.1. *As seguintes afirmações são verdadeiras:*

1. $\Sigma(\underline{m}, \mathcal{D})$ é o esquema de zeros de $\sigma_{\underline{m}}^{\mathcal{D}}$ ao longo das fibras de f_r e portanto parametriza as singularidades de tipo \underline{m} das fibras de \mathcal{D} .
2. Se $\mathcal{D}' = f_{r+1,2}^*(f_{r,2}^* \cdots f_{2,2}^* \mathcal{D} - \underline{m}'E)$ restrito sobre $\Sigma(\underline{m}', \mathcal{D})$ temos

$$\Sigma(\underline{m}, \mathcal{D}) = \Sigma((m_r), \mathcal{D}').$$

3. Cada componente de $\Sigma(\underline{m}, \mathcal{D})$ tem codimensão no máximo igual ao posto de $\mathcal{C}(\underline{m}, \mathcal{L})$
4. Se $\Sigma(\underline{m}, \mathcal{D})$ é vazio ou tem a codimensão esperada, $\rho = \sum_{i=1}^r \binom{n+m_i-1}{n}$, dizemos que \mathcal{D} é \underline{m} -regular e nesse caso a classe de $\Sigma(\underline{m}, \mathcal{D})$ no grupo de Chow de X_r é dada pela fórmula

$$[\Sigma(\underline{m}, \mathcal{D})] = c_\rho(\mathcal{C}(\underline{m}, \mathcal{L})) \cap [X_r]$$

Prova: Veja a proposição 3.3 de [30].

Observação 2.0.4.2. Reexaminemos o caso de cones com uma reta dupla, à luz dos resultados anteriores aplicados ao diagrama

$$\begin{array}{c} \mathbb{X} := \mathbb{P}(S_d\mathcal{F}) \times_{\mathbb{P}^m} \mathbb{P}(\mathcal{T}) \supset \mathcal{D} \\ \downarrow \\ S = \mathbb{P}(S_d\mathcal{F}), \end{array}$$

onde

$$\mathcal{D} := \{(p, C, l) \in \mathbb{P}(S_d\mathcal{F}) \times_{\mathbb{P}^m} \mathbb{P}(\mathcal{T}); l \in C\}.$$

Vemos que $[\Sigma((2), \mathcal{D})]$ coincide com a classe do fibrado projetivo $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ encontrado na seção 1.5, p. 21. Isso se deve ao fato de \mathcal{D} ser o esquema de zeros de uma seção global do feixe $\mathcal{L} := \mathcal{O}_S(1) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{T}}(d)$, o que pela proposição 2.0.1, p. 51 garante que no caso da codimensão ser a esperada, devemos ter a igualdade

$$[\Sigma((2), S)] = c_m(P_{\mathbb{X}/S}^1(\mathcal{L})) \cap [\mathbb{X}].$$

Como $P_{\mathbb{X}/S}^1(\mathcal{L}) = P_\pi^1(\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(d)) \otimes \mathcal{O}_S(1)$, a classe acima é exatamente a classe de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ no grupo de Chow de \mathbb{X} .

Proposição 2.0.2. *Considere $\mathcal{D} \subset X \longrightarrow S$ como no início desta seção e $S' = \Sigma((2), \mathcal{D})$.*

Fixe $p \in \mathcal{D}$ e suponha que

- *S é regular na imagem de p .*
- *\mathcal{D} é liso em p .*
- *As fibras de \mathcal{D} que passam por p têm um ponto duplo ordinário em p .*

Nestas condições podemos concluir que S' é liso em p e além disso,

$$\mathcal{D}' := f_{2,2}^* \mathcal{D}|_{S'} - 2(E_{1,2})|_{S'}$$

é regular ao longo da imagem inversa de p .

Prova: Veja a proposição 3.4 de [30].

2.1 Cones com até seis geratrizes nodais

Mantendo as notações anteriores, consideremos o diagrama

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{X} := \mathbb{P}(S_d \mathcal{F}) \times_{\mathbb{G}_3} \mathbb{P}(\mathcal{T}) \supset \mathcal{D} & & (2.1) \\ \downarrow f & & \\ \mathbb{P}(S_d \mathcal{F}) & & \end{array}$$

onde

$$\mathcal{D} := \{(\mathcal{V}, C, \mathcal{W}) \in \mathbb{P}(S_d \mathcal{F}) \times_{\mathbb{G}_3} \mathbb{P}(\mathcal{T}); C \subset \mathbb{P}_{\mathcal{V}}^2 \text{ e } \mathcal{W} \in C\}.$$

A fibra $\mathcal{D}_{(\mathcal{V}, C)}$ é a curva C vista concretamente dentro de $\mathbb{P}_{\mathcal{V}}^2$. O diagrama deve ser interpretado como uma família de planos, e em cada plano consideramos a família de curvas de grau d . Estamos interessados em mensurar a família de fibras de \mathcal{D} que são curvas planas n -nodais, com $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. Para isso usaremos a maquinária desenvolvida na seção anterior aplicada ao diagrama 2.1. Para validar a aplicação desses métodos, vamos necessitar de alguns fatos. Começamos lembrando um resultado que diz, sem erros de concordância, que “nós impõem condições independentes nos sistemas lineares de curvas em superfícies” (veja [30], prop.2.4).

Para maior comodidade do leitor, apresentamos a seguir o aludido resultado.

Proposição 2.1.1. *Seja \mathcal{Y} uma superfície projetiva não singular e seja $D \subset \mathcal{Y}$ um divisor amplo. Dado $n \in \mathbb{N}$, existe $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $r \geq r_0$ e para todo subsistema linear $S \subset |rD|$ de dimensão n , suficientemente geral, a quantidade de membros de S com uma singularidade de tipo $2^{[n]}$ é finita. Além disso, se $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ temos a seguinte lista de possíveis tipos estritos de singularidades nos membros de S .*

- $n \leq 3 \Rightarrow 2^{[n]}$.
- $n = 4 \Rightarrow 2^{[4]}$ ou (3) .
- $n = 5 \Rightarrow 2^{[5]}$, $(3, 2)$ ou $(2, 3)$.
- $n = 6 \Rightarrow 2^{[6]}$, $(3(2))$, ou qualquer permutação de $(3, 2, 2)$.

Agora, fixado $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, seja \mathbb{X}_n construído usando o método iterativo da seção anterior e tendo como ponto de partida o diagrama 2.1, p. 52, considerado no início da atual seção. Essas construções fornecem um subesquema $\Sigma(2^{[n]}, \mathcal{D}) \subset \mathbb{X}_n$ que parametriza as singularidades de tipo $2^{[n]}$ das fibras de \mathcal{D} . Temos também morfismos

$$\varphi_{np} : \mathbb{X}_n \rightarrow \mathbb{X}_p, \quad p \geq 1$$

obtidos como composição dos mapas estruturais

$$f_k : \mathbb{X}_k \rightarrow \mathbb{X}_{k-1}, \quad k = p + 1, \dots, n.$$

Temos

$$\dim \mathbb{X}_n = N(d, 2) + 3m - 7 + 2n.$$

A codimensão esperada para $\Sigma(2^{[n]}, \mathcal{D})$ é $3n$. Essa expectativa se confirma, pois fixado $\mathcal{V} \in \mathbb{G}_3$ temos pela proposição acima, que a fibra

$$(\Sigma(2^{[n]}, \mathcal{D}))_{\mathcal{V}} \subset \mathbb{P}^{N(d,2)-1} \times (\mathbb{P}_{\mathcal{V}}^2)^{\times n}$$

tem dimensão igual a $N(d, 2) - 1 - n$. Portanto,

$$\dim(\Sigma(2^{[n]}, \mathcal{D})) = N(d, 2) + 3m - 7 - n$$

e a classe de $\Sigma(2^{[n]}, \mathcal{D})$ no anel de Chow de \mathbb{X}_n é dada pela classe de Chern máxima do feixe de contato $\mathcal{C}(2^{[n]}, \mathcal{L})$ (veja a prop. 2.0.1, p. 51, ítem 4).

Vamos denotar por $\Sigma_p^n \subset \mathbb{X}_p$ a imagem de $\Sigma(2^{[n]}, \mathcal{D})$ por meio de φ_{np} . Em particular, para $p = 1$ (convencionamos $\mathbb{X}_1 = \mathbb{X}$, $\varphi_{n1} = \varphi_n$ e $\Sigma_1^n = \Sigma^n$), temos

$$\Sigma^n = \{(\mathcal{V}, C, \mathcal{W}) \in \mathcal{D} \mid C \text{ é } 2^{[n]} \text{ - singular e } \mathcal{W} \in \text{sing}(C)\}.$$

Assim, para um ponto genérico $(\mathcal{V}, C, \mathcal{W}) \in \Sigma^n$, temos que a fibra

$$\varphi_n^{-1}((\mathcal{V}, C, \mathcal{W})) \subset \Sigma(2^{[n]}, \mathcal{D})$$

é finita.

Por outro lado, se denotarmos por $\tilde{\Sigma}^n \subset \mathbb{P}(S_d\mathcal{F})$ a imagem de Σ^n , pela primeira projeção $p_1 : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{P}(S_d\mathcal{F})$, vemos que

$$\tilde{\Sigma}^n = \{(\mathcal{V}, C) \in \mathbb{P}(S_d\mathcal{F}); C \subset \mathbb{P}_{\mathcal{V}}^2 \text{ é } 2^{[n]} \text{ - singular}\}.$$

Portanto, a fibra genérica $p_1^{-1}((\mathcal{V}, C))$ também é finita. Consequentemente o mesmo ocorrerá com a fibra genérica de $\Sigma(2^{[n]}, \mathcal{D})$ sobre $\tilde{\Sigma}^n$.

Desse modo, $\tilde{\Sigma} \subset \mathbb{P}(S_d\mathcal{F})$ tem dimensão igual a

$$\dim \mathbb{X}_n - 3n = N(d, 2) + 3m - 7 - n = \dim \mathbb{P}(S_d\mathcal{F}) - n.$$

Além disso, a proposição 2.1.1, p. 53 também descreve quem são as componentes de $\tilde{\Sigma}^n$. Em particular, a imagem (genericamente bijetiva) de $\tilde{\Sigma}^n$ em $\mathbb{P}^{N(d,m)-1}$ tem como uma de suas componentes ninguém menos que a variedade $C_{n,d}^m$ dos cones de grau d com n geratrizes nodais e vértice de codimensão 3 em \mathbb{P}^m .

Logo, a classe de $C_{n,d}^m$ pode ser encontrada a partir (da imagem direta) da classe de $\Sigma(2^{[n]}, \mathcal{D})$ desde que saibamos com que grau cada componente de $\Sigma(2^{[n]}, \mathcal{D})$ é projetada sobre a respectiva componente de $\tilde{\Sigma}^n$, isto é, para cada ponto geral $(\mathcal{V}, C) \in \tilde{\Sigma}^n$ em uma dada componente de $\tilde{\Sigma}^n$ precisamos determinar a cardinalidade da fibra de $\Sigma(2^{[n]}, \mathcal{D})$ sobre esse ponto.

Precisamos também de informações a respeito de $\Sigma(2^{[n]}, \mathcal{D})$ ser reduzido. Tais informações são fornecidas pela seguinte proposição (cf. prop. 3.5 de [30]).

Antes, convencionemos que, se \mathcal{Y} é uma superfície, S é um sistema linear de curvas em \mathcal{Y} e $\mathcal{D} \subset S \times \mathcal{Y}$ é o divisor universal da família de divisores parametrizada por S então, como é feito em [30], escreveremos $\Sigma(\underline{m}, S)$ no lugar de $\Sigma(\underline{m}, \mathcal{D})$.

Proposição 2.1.2. *Sejam \mathcal{Y} uma superfície projetiva não singular e \mathcal{M} um feixe invertível amplo sobre \mathcal{Y} . Fixado $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, existe $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo inteiro $r \geq r_0$ e para todo subsistema linear $S \subset |\mathcal{M}^r|$ de dimensão n , suficientemente geral, temos que $\Sigma(2^{[n]}, S)$ é finito, reduzido e para cada ponto $(s, y_1, y_2, \dots, y_r) \in \Sigma(2^{[n]}, S)$, temos que (y_1, y_2, \dots, y_r) é uma singularidade de um dos tipos estritos descritos em 2.1.1, p. 53.*

Observação 2.1.0.1. Como de costume, a hipótese de que um subsistema linear seja “suficientemente geral”, que aparece nas proposições 2.1.1, p. 53 e 2.1.2, p. 55, significa apenas que existe um aberto denso na grassmanniana de subespaços de dimensão $n + 1$ em $H^0(\mathcal{Y}, \mathcal{M}^r)$, de modo que os resultados são verificados para qualquer subsistema linear correspondendo a um subespaço nesse aberto. Na situação em que vamos aplicar esses resultados, essa condição pode ser tornada mais precisa exigindo-se que o subsistema seja determinado pela condição de passar por uma quantidade adequada de pontos em posição geral, veja o §5 de [19]. Deve-se observar que na referência citada o contexto é bem mais geral que o nosso.

Especificamente, o que queremos é determinar o grau da imagem de $\tilde{\Sigma}^n$ em \mathbb{P}^M , onde $M = N(d, m) - 1$ (veja 1.2, p. 8). Para isso, é suficiente intersectá-la com um subespaço linear $\mathbb{L} \subset \mathbb{P}^M$, genérico de dimensão complementar e contar o número de pontos dessa interseção. Nesse sentido, vamos mostrar que se d é suficientemente grande podemos escolher um conjunto $\{p_1, p_2, \dots, p_r\} \subset \mathbb{P}^m$ em posição geral, com $r = \dim C_{n,d}^m = \dim C_d^m - n$, de modo que o subespaço linear \mathbb{L} , que parametriza as superfícies de grau d que passam por esses pontos, intersecta a imagem de $\tilde{\Sigma}^n$ propriamente e além disso essa interseção é reduzida e se passa dentro de \tilde{C}_d^m (veja seção 1.7, p. 35).

Com efeito, sejam $\{p_1, p_2, \dots, p_r\} \subset \mathbb{P}^m$ um conjunto de pontos em posição geral e $H_{p_i} \subset \mathbb{P}^M$ o hiperplano que parametriza as hipersuperfícies de grau d em \mathbb{P}^m que passam por p_i , com $i = 1, 2, \dots, r$. Seja $\hat{\Sigma}^n \subset \mathbb{P}^M$ a imagem de $\tilde{\Sigma}^n \subset \mathbb{P}(S_d \mathcal{F})$ e considere $\hat{\Sigma}_0 \subset \hat{\Sigma}^n$ uma componente irredutível (dimensão igual a r). Denotando por $\mathcal{H} \subset \mathbb{P}^m \times \mathbb{P}^M$ a hipersuperfície universal, temos o diagrama

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{H} & \\ \pi_1 \swarrow & & \searrow \pi_2 \\ p_1 \in \mathbb{P}^m & & \hat{\Sigma}_0 \subset \mathbb{P}^M \supset H_{p_1} \end{array}$$

Sejam $\mathcal{C}_o = \pi_2^{-1}(\hat{\Sigma}_0)$ e $\pi := \pi_1|_{\mathcal{C}_o}$. Como o grupo $G = \text{PGL}(m + 1, \mathbb{C})$ age transitivamente

em \mathbb{P}^m , segue do teorema de Kleiman sobre a transversalidade do transladado genérico ([21], teo. 4.1.2 ou [20]) que existe um aberto $U_1 \subset G$ tal que para todo $g \in U_1$, temos

$$\dim \pi^{-1}(gp_1) = \dim \mathcal{C}_0 - m = \dim \widehat{\Sigma}_0 + m - 1 - m = \dim \widehat{\Sigma}_0 - 1.$$

Por outro lado, a fibra $\pi^{-1}(gp_1)$ é projetada isomorficamente sobre $\widehat{\Sigma}_0 \cap H_{gp_1}$, donde concluimos que se pode tomar p_1 de modo que a interseção $\widehat{\Sigma}_0 \cap H_{p_1}$ seja lisa e da dimensão esperada. Além disso, a menos de restringir a escolha de p_1 a um aberto menor, podemos supor o mesmo é verificado para a interseção de H_{p_1} com as demais componentes de $\widehat{\Sigma}^n$.

Agora, suponhamos que a interseção

$$\widehat{\Sigma}_0^{r-1} := \widehat{\Sigma}_0 \cap H_{p_1} \cap \dots \cap H_{p_{r-1}}$$

é lisa e tem dimensão igual a $\dim \widehat{\Sigma}_0 - r + 1 = 1$.

Repetindo o raciocínio anterior com $\widehat{\Sigma}_0^{r-1}$ no lugar de $\widehat{\Sigma}_0$ e p_r em vez de p_1 , vemos que existe um aberto $U \subset G$ tal que para todo $g \in U$, vale

$$\dim(\widehat{\Sigma}_0^{r-1} \cap H_{gp_r}) = \dim \widetilde{\Sigma}_0^n - r = 0.$$

E além disso, $\widehat{\Sigma}_0^r := \widehat{\Sigma}_0^{r-1} \cap H_{gp_r}$ é liso. Ou seja, os p_i 's podem ser escolhidos de modo que $\widehat{\Sigma}_0^r$ seja finito e reduzido. Ademais, como já observamos, podemos supor que as mesmas conclusões são válidas para a interseção dos hiperplanos H_{p_i} com as outras componentes de $\widehat{\Sigma}^n$. Portanto, o grau de $\widehat{\Sigma}^n$ é exatamente o número de cones que passam pelos pontos p_1, p_2, \dots, p_r e cuja base abstrata possui uma $2^{[n]}$ -singularidade.

Por fim, vamos verificar que os p_i 's podem ser escolhidos de modo que a interseção de $\widehat{\Sigma}^n$ com os H_{p_i} 's esteja contida em \widetilde{C}_d^m (cones com vértice de dimensão correta $m - 3$). De fato, a subvariedade $F_d \subset \widehat{\Sigma}^n$ que parametriza os cones degenerados tem dimensão $\dim F_d = d + 2m - 2 - n$ (veja eq.1.56, p. 36). Além disso, a imagem de F_d em \mathbb{P}^M é $C_d^m \setminus \widetilde{C}_d^m$. Portanto, a codimensão de $C_d^m \setminus \widetilde{C}_d^m$ em C_d^m é positiva e daí a escolha dos p_i 's pode ser feita de modo que os cones que passam por esses pontos sejam elementos de \widetilde{C}_d^m .

O mesmo tipo de argumento garante que também podemos evitar os cones cuja base abstrata possui uma singularidade de ordem quatro. De fato, a subvariedade de C_d^m que parametriza os cones cuja base possui um ponto singular de ordem quatro realmente está contida em $\widehat{\Sigma}^n$, mas tem dimensão $N(d, 2) + 3m - 15$. Como

$$\dim \widehat{\Sigma}^n = N(d, 2) + 3m - 7 - n \geq N(d, 2) + 3m - 13,$$

segue que podemos evitar os cones com geratriz quártica.

Sabendo que a interseção de $\widehat{\Sigma}^n$ com os H_{p_i} 's é finita, reduzida e se passa dentro de \widetilde{C}_d^m , teremos que sua pré-imagem em $\widetilde{\Sigma}^n \subset \mathbb{P}(S_d\mathcal{F})$ corresponderá a um conjunto finito de pontos distintos. Seja $x = (\mathcal{V}, C) \in \widetilde{\Sigma}^n$ um desses pontos. Assim, x corresponde a um cone passando pelos pontos p_1, p_2, \dots, p_r e tal que a base abstrata, C , possui uma singularidade de tipo $2^{[n]}$, mas não possui ponto singular de ordem maior ou igual a quatro.

Por outro lado, afirmamos que os p_i 's podem ser tomados de modo que o vértice \mathcal{V} do cone correspondendo ao ponto x não contenha nenhum dos p_i 's. Com efeito, faremos a verificação para $m \geq 4$, para $m = 3$ a verificação é análoga, mas tem que ser feita separadamente. A subvariedade de $\widehat{\Sigma}^n$ que parametriza os cones cujo vértice passa por p_1 tem dimensão

$$a = N(d, 2) + 2 - n,$$

pois a família de subespaços de codimensão três em \mathbb{P}^m , $m \geq 4$, que passam por um ponto fixo é parametrizada por um \mathbb{P}^3 dentro de \mathbb{G}_3 . Além disso, para cada vértice fixado temos que o espaço das bases abstratas (para cones com esse vertice) com n pontos duplos ordinários tem dimensão projetiva $N(d, 2) - 1 - n$.

Assim, como

$$r = N(d, 2) + 3m - 7 - n \geq N(d, 2) + 5 - n = a + 3,$$

podemos concluir que os pontos p_2, p_3, \dots, p_r podem ser tomados de modo que os cones que passam por eles, são tais que o vértice não passa por p_1 . O mesmo vale para cada um dos outros pontos, como afirmamos.

O mesmo tipo de argumento mostra que os p_i 's podem ser tomados de modo que o vértice do cone correspondente ao ponto x não intersekte nenhuma das retas determinadas por quaisquer dois dos p_i 's.

Por fim, um ponto $p \in \{p_1, p_2, \dots, p_r\}$ que não pertence a \mathcal{V} determina um ponto $p^* \in \mathbb{P}_{\mathcal{V}}^2$, que representa o subespaço de codimensão 2 gerado por p e \mathcal{V} . Assim, de acordo com as observações acima, o ponto x corresponde a um cone cuja base abstrata C possui uma singularidade de tipo $2^{[n]}$, não tem singularidade de ordem quatro e varia em um sistema linear determinado pela condição de passar pelos r pontos $p_1^*, p_2^*, \dots, p_r^*$ em \mathcal{V} .

Com isso, podemos apresentar o teorema que conclui nosso estudo sobre cones de base curvas planas com até seis geratrizes nodais. Lembramos que $C_{n,d}^m$ denota a variedade de

cones sobre curvas planas de grau d , com vértice de dimensão $m - 3$ em \mathbb{P}^m e que possuem n geratrizes nodais.

O resultado abaixo é a adaptação proposição 4.1 de [30] ao nosso contexto; sua demonstração é essencialmente a mesma contida lá.

Teorema 2.1.1. Fixado $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, seja $\{p_1, p_2, \dots, p_r\} \subset \mathbb{P}^m$ um conjunto com r pontos em posição geral, onde $r = \dim C_d^m - n$. Seja $c_{n,d}^m$ o número de elementos de $C_{n,d}^m$ que são incidentes aos pontos do conjunto acima. Então:

- $c_{n,d} = \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{X}_n} \Sigma(2^{[n]}, \mathcal{D})$ para $n \leq 3$.
- $c_{4,d} = \frac{1}{4!} \left(\int_{\mathbb{X}_4} \Sigma(2^{[4]}, \mathcal{D}) - 6 \int_{\mathbb{X}_1} \Sigma((3), \mathcal{D}) \right)$.
- $c_{5,d} = \frac{1}{5!} \left(\int_{\mathbb{X}_5} \Sigma(2^{[5]}, \mathcal{D}) - 30 \int_{\mathbb{X}_2} \Sigma((3, 2), \mathcal{D}) \right)$.
- $c_{6,d} = \frac{1}{6!} \left(\int_{\mathbb{X}_6} \Sigma(2^{[6]}, \mathcal{D}) - 30 \int_{\mathbb{X}_2} \Sigma((3(2)), \mathcal{D}) - 90 \int_{\mathbb{X}_3} \Sigma((3, 2, 2), \mathcal{D}) \right)$.

Prova: Das observações feitas anteriormente segue que a classe de $\Sigma(2^{[n]}, \mathcal{D})$ é combinação das classes das componentes de $\widehat{\Sigma}^n$ e a demonstração agora é essencialmente a tarefa combinatória de determinar os coeficientes. Essa tarefa é realizada analisando as fibras de $\Sigma(2^{[n]}, \mathcal{D})$ sobre os pontos de $\widetilde{\Sigma}^n$ que provêm das componentes de $\widehat{\Sigma}^n$ descritas pela proposição 2.1.1, p. 53. Bem, a fibra de $\Sigma(2^{[n]}, \mathcal{D})$ sobre um ponto de $\widetilde{\Sigma}^n$ que provém de $C_{n,d}^m$ tem cardinalidade $n!$ e para $n \leq 3$, a proposição 2.1.1, p. 53 nos diz que $C_{n,d}^m$ é a única componente com dimensão correta. Isso justifica a primeira igualdade. Para $n = 4$, aparece a componente dos pontos triplos. Um ponto de $\widetilde{\Sigma}^n$ proveniente dessa componente dá origem a um único ponto de $\Sigma^n \subset \mathbb{X}$ e este por sua vez dá origem a $3!$ pontos em $\Sigma(2^{[4]}, \mathcal{D})$, veja a observação 2.0.4.1, p. 47, p. 47. Isso justifica o coeficientes 6 na segunda igualdade.

Para a terceira igualdade basta notar que um ponto de $(\mathcal{V}, C) \in \widetilde{\Sigma}^n$ que é pré-imagem de um ponto na componente distinta de $C_{n,d}^m$ vai dar origem a dois pontos $x = (\mathcal{V}, C, \mathcal{W}_1) \in \Sigma^n$ e $y = (\mathcal{V}, C, \mathcal{W}_2) \in \Sigma_1$, onde \mathcal{W}_1 é um ponto duplo de C e \mathcal{W}_2 é ponto triplo. Assim, em cima de x temos $3!$ pontos, devido às três singularidades infinitamente próximas de y . Por outro lado, após a primeira explosão aparecem 4 pontos

(um deles “é x ”) de Σ_2 que se projetam em y , daí a fibra de $\Sigma(2^{[5]}, \mathcal{D})$ sobre y possui 4! pontos, correspondentes às 5-uplas formadas por y seguido de qualquer permutação dos 4 pontos que apareceram em $(\Sigma_2)_y$. Logo, temos um total de $30 = 6 + 24$ pontos de $\Sigma(2^{[5]}, \mathcal{D})$ que se projetam sobre (\mathcal{V}, C) , justificando o coeficiente da terceira igualdade.

Para justificar os coeficientes que ocorrem na última igualdade, começamos observando que um ponto $(\mathcal{V}, C) \in \tilde{\Sigma}^n$ proveniente da componente das singularidades de tipo (3(2)) dá origem a um único ponto $(\mathcal{V}, C, \mathcal{W}) \in \Sigma^n$, onde $\mathcal{W} \in C$ é uma (3(2))-singularidade. Após a primeira explosão aparecem dois pontos, denotados $x = (\mathcal{V}, C, \mathcal{W}, \mathcal{W}_1) \in \Sigma_2^n$ e $y = (\mathcal{V}, C, \mathcal{W}, \mathcal{W}_2) \in \Sigma_2^n$, tais que \mathcal{W}_1 é ponto duplo e \mathcal{W}_2 é ponto triplo da transformada estrita de C . Em Σ_2^n aparecem três pontos que vivem sobre x e assim a fibra de $\Sigma(2^{[6]}, \mathcal{D})$ sobre x tem cardinalidade 3!. Teremos 4 pontos de Σ_2^n vivendo em cima de y (três deles infinitamente próximos) Logo, teremos mais 4! pontos na fibra $(\Sigma(2^{[6]}, \mathcal{D}))_{(\mathcal{V}, C)}$. Isso justifica o coeficiente 30.

Cada ponto de $\tilde{\Sigma}^n$ proveniente da componente correspondente às singularidades do tipo (3, 2, 2) produz 3 pontos $x = (\mathcal{V}, C, \mathcal{W}_1)$, $y = (\mathcal{V}, C, \mathcal{W}_2)$ e $z = (\mathcal{V}, C, \mathcal{W}_3)$ em Σ^n , sendo que \mathcal{W}_1 e \mathcal{W}_2 são pontos duplos e \mathcal{W}_3 é ponto triplo de C . Em Σ_2^n aparecem 5 pontos vivendo em cima de z (três deles infinitamente próximos de z). Assim, em princípio teríamos 5! pontos de $\Sigma(2^{[6]}, \mathcal{D})$ vivendo em cima de z . No entanto, \mathcal{W}_1 e \mathcal{W}_2 são indistinguíveis, isto é, duas 6-uplas que diferem somente pela ordem entre \mathcal{W}_1 e \mathcal{W}_2 representam o mesmo ponto de $\Sigma(2^{[6]}, \mathcal{D})$. Portanto, existem na verdade 60 pontos em cima de z . Os pontos de Σ_2^n em cima de x são $x_1 = (\mathcal{V}, C, \mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2)$ e $x_2 = (\mathcal{V}, C, \mathcal{W}_1, \mathcal{W}_3)$. Já Σ_3 possui apenas um ponto em cima de x_1 , a saber:

$$x_{11} = (\mathcal{V}, C, \mathcal{W}_1, \mathcal{W}_2, \mathcal{W}_3).$$

Σ_4^n possui 3 pontos em cima de x_{11} e portanto teremos três pontos de $\Sigma(2^{[6]}, \mathcal{D})$ que se projetam x , via x_1 .

Por fim, Σ_3^n possui 4 pontos em cima de x_2 e por conseguinte teremos 12 de $\Sigma(2^{[6]}, \mathcal{D})$ se projetando em x , via x_2 . Desse modo, temos um total de 15 pontos em cima de x . A situação para y é a mesma de x e isso justifica o coeficiente $15 + 15 + 60 = 90$. \square

Cada parcela no segundo membro das equações enunciadas no teorema acima pode ser calculada em termos da classe de Chern máxima do respectivo feixe de contato, usando o lema 2.0.0.1, p. 50.

2.2 Fórmulas

Nesta seção vamos apresentar fórmulas explícitas para o grau $c_{n,d}^m$ da variedade dos cones de grau d com n geratrizes nodais sobre curvas planas e com vértice de codimensão 3 em \mathbb{P}^m . O cálculo efetivo para a obtenção dessas fórmulas é feito com a ajuda do Schubert-MAPLE ([17]). As linhas de código são adaptações ingênuas daquelas descritas em [31]. No apêndice incluímos como exemplo aqueles que fornecem o resultado para cones com duas geratrizes nodais. Apresentaremos fórmulas apenas para os casos $m = 3$ e $m = 4$, mas os métodos aplicados em princípio forneceriam fórmulas para todo valor de m . No entanto, a medida que m e n crescem o esforço computacional faz com que processo se torne muito lento e as expressões obtidas são monstruosas.

Embora não tenhamos uma expressão geral para os $c_{n,d}^m$, acreditamos que eles se expressem como polinômios na variável d com grau $9(m-2) + 2n$. Essa crença se confirma pelo menos nos casos apresentados a seguir. É concebível que as expressões “exponenciais”, no espírito de [11] lancem alguma luz, mas ainda não o fizemos.

Para $m = 3$, temos

$$c_{1,d}^3 = \frac{1}{432}(d+3)(d+2)^2(d+1)d(d-1)^3(d-2)(d^2+4d+6).$$

Já a conhecíamos da seção 1.3, p. 12, veja a eq. 1.22, p. 16.

Para $n = 2$, obtemos

$$c_{2,d}^3 = \frac{1}{864}(d+2)(d+1)d(d-1)(d-2)(3d^8 + 15d^7 - 26d^6 - 195d^5 - 35d^4 + 720d^3 + 994d^2 - 1476d - 792).$$

Substituindo $d = 3$, ficamos com $c_{2,3}^3 = 900$ que já conhecíamos da seção 1.8, p. 37, eq. 1.60, p. 39.

Para $n = 3$, temos

$$c_{3,d}^3 = \frac{1}{2592}d(d-1)(d-2)(9d^{12} + 54d^{11} - 198d^{10} - 1575d^9 + 721d^8 + 16346d^7 + 15622d^6 - 169091d^5 - 67126d^4 + 100850d^3 + 450348d^2 + 196632d - 442800)$$

E substituindo $d = 3$ obtemos $c_{3,3}^3 = 280$, que é o grau das ternas de planos distintos em \mathbb{P}^3 e também coincide com o valor obtido na seção 1.8, p. 37, p. 46.

Para $n = 4$, o polinômio é

$$\begin{aligned} c_{4,d}^3 &= \frac{1}{3456}(d-1)(d-2)(d-3)(9d^{14}+63d^{13}-288d^{12}-2700d^{11}+1726d^{10}+42960d^9 \\ &+ 41935d^8-286549d^7-735206d^6+485954d^5+4024992d^4+2192144d^3-6182064d^2 \\ &- 10198080d+6808320) \end{aligned}$$

O teste a ser feito é para $d = 4$; substituindo esse valor ficamos com $c_{4,4}^3 = 236652$ e também bate com o valor já encontrado na seção seção 1.8, p. 37, eq.1.66, p. 43.

Para $n = 5$, encontramos a expressão

$$\begin{aligned} c_{5,d}^3 &= \frac{1}{17280}(d-1)(d-3)(27d^{17}+81d^{16}-2151d^{15}-5877d^{14}+70626d^{13}+180780d^{12} \\ &- 1181021d^{11}-3155523d^{10}+9747437d^9+35636121d^8-24839790d^7-268550862d^6 \\ &- 130932520d^5+1154488128d^4+987572512d^3-1722318048d^2-5184616320d+5632243200). \end{aligned}$$

E o teste que podemos fazer também é para $d = 4$. Fazendo essa substituição encontramos $c_{5,4}^3 = 90420$, como já esperávamos, compare com eq.1.69, p. 45.

Finalmente, para o caso de seis singularidades obtemos

$$\begin{aligned} c_{6,d}^3 &= \frac{1}{103680}(81d^{21}-243d^{20}-9315d^{19}+29484d^{18}+452079d^{17}-1475217d^{16}-11997738d^{15} \\ &+ 38570571d^{14}+192558601d^{13}-545285270d^{12}-2073330077d^{11}+3717807669d^{10} \\ &+ 18274446687d^9-6244396962d^8-144313907542d^7-22749337312d^6+700826206232d^5 \\ &+ 140993353392d^4-1289954094528d^3-3805288034112d^2+9657058705920d \\ &- 5439009254400). \end{aligned}$$

Logo, substituindo $d = 4$, obtemos $c_{6,4}^3 = 15400$, igual ao que já havíamos encontrado na eq.1.70, p. 46.

Note que em todos os casos a prescrição para o grau em d foi verificada. Na verdade, no próximo capítulo vamos construir cones em \mathbb{P}^m sobre variedades de dimensão $b \geq 1$ contidas em algum \mathbb{P}^{b+1} (variável), e cujo vértice tem dimensão $m - b - 2$. Daí, vamos considerar o problema análogo ao que resolvemos no presente capítulo. Nesse contexto a expectativa conjectural é que também encontremos expressões polinomiais em d de grau

$$(m - b - 1)(b + 2)^2 + n(b + 1). \quad (2.2)$$

O caso particular $b = m - 2$ e $n = 1$ já foi tratado em 1.38, p. 24. e lá encontramos uma expressão polinomial de grau $m^2 + m - 1$, o que confirma a expectativa acima.

A seguir vamos apresentar as fórmulas para $m = 4$ e $b = 1$. Os graus esperados são do tipo

$$(4 - 2) \cdot 9 + 2 \cdot n = 18 + 2n,$$

senão vejamos.

Para $n = 1$, temos que

$$\begin{aligned} c_{1,d}^4 &= \frac{5}{15552} \binom{d+3}{6} (d-1)^2 (d^{12} + 15d^{11} + 113d^{10} + 525d^9 + 1563d^8 + 2655d^7 + 680d^6 - 7674d^5 \\ &\quad - 15227d^4 - 3729d^3 + 15462d^2 - 4752d - 38880) \end{aligned}$$

é um polinômio de grau 20. Encontramos com a ajuda do MAPLE-SCHUBERT, usando as linhas descritas na seção 6.1, p. 163 do apêndice.

Para $n = 2$, a expressão que encontramos

$$\begin{aligned} c_{2,d}^4 &= \frac{5}{186624} \binom{d+2}{5} (d^2 - 1) (3d^{15} + 42d^{14} + 229d^{13} + 441d^{12} - 1369d^{11} - 10233d^{10} - 20310d^9 \\ &\quad + 21315d^8 + 180911d^7 + 252936d^6 - 340076d^5 - 1331433d^4 - 379908d^3 + 2246940d^2 \\ &\quad + 1233792d - 2566080) \end{aligned}$$

é um polinômio de grau 22 e para $d = 3$ assume o valor 29445, como foi predito na seção sobre cones redutíveis, veja eq. 1.65, p. 43.

Para $n = 3$, a nossa estratégia para calcular os segundos membros das equações do teorema 1.10.1, fornece o polinômio

$$\begin{aligned} c_{3,d}^4 &= \frac{5}{559872} \binom{d+2}{5} (9d^{19} + 108d^{18} + 243d^{17} - 2115d^{16} - 12644d^{15} - 6499d^{14} + 145499d^{13} \\ &\quad + 463060d^{12} - 230832d^{11} - 4252245d^{10} - 6885094d^9 + 13228834d^8 + 54499519d^7 + 14681684d^6 \\ &\quad - 171332544d^5 - 171486495d^4 + 237827556d^3 + 350171748d^2 - 212533632d - 139268160), \end{aligned}$$

cujo grau é 24. Se $d = 3$ toma o valor igual a 5775, para nossa alegria, pois coincide com o valor encontrado na eq. 1.71, p. 46.

Para cones com quatro geratrizes nodais, encontramos

$$\begin{aligned} c_{4,d}^4 &= \frac{5}{124416} \binom{d+2}{6} (9d^{20} + 117d^{19} + 153d^{18} - 4203d^{17} - 19127d^{16} + 31995d^{15} + 406853d^{14} \\ &\quad + 640913d^{13} - 3084096d^{12} - 13971800d^{11} - 4089655d^{10} + 97895559d^9 + 206915020d^8 \\ &\quad - 197909822d^7 - 1279488537d^6 - 771112219d^5 + 3131031492d^4 + 4576463892d^3 \\ &\quad - 3041479152d^2 - 6192904896d + 624879360), \end{aligned}$$

que é um polinômio de grau 26 e $c_{4,4}^4 = 45476595$, confirmando novamente as contas feitas na seção 1.8, p. 37.

Nos dois casos que faltam, os polinômios são

$$c_{5,d}^4 = \frac{1}{124416} \binom{d+2}{6} (27d^{22} + 297d^{21} - 1044d^{20} - 21924d^{19} - 17088d^{18} + 642270d^{17} + 1764544d^{16} \\ - 8499334d^{15} - 44261915d^{14} + 17839679d^{13} + 545207959d^{12} + 963708215d^{11} - 3177151411d^{10} \\ - 13420319153d^9 + 94367813d^8 + 80895909595d^7 + 116086638407d^6 - 251587787273d^5 \\ - 612875472012d^4 + 108936902988d^3 + 1823977398960d^2 - 234840409920d - 810061689600)$$

que possui grau igual a 28 e vale 12919725 para $d = 4$, verificando a eq. 1.68, p. 44.

Por fim, o outro

$$c_{6,d}^4 = \frac{1}{22394880} \binom{d}{4} (81d^{26} + 972d^{25} - 5346d^{24} - 105381d^{23} + 3744d^{22} + 4801338d^{21} + 10464498d^{20} \\ - 113798088d^{19} - 461043575d^{18} + 1267062610d^{17} + 9923680895d^{16} + 2440153735d^{15} \\ - 119129114821d^{14} - 273497184983d^{13} + 678633575757d^{12} + 3757657970873d^{11} \\ + 1177283213611d^{10} - 24903355126525d^9 - 47029525024928d^8 + 75554586600905d^7 \\ + 313649846595092d^6 + 61129897387248d^5 - 1051303363544496d^4 - 903218213957904d^3 \\ + 1563343232911488d^2 + 1534331429568000d - 1005230835532800)$$

tem grau igual a 30 e toma valor igual 1576575 para $d = 4$, o que verifica a eq. 1.72, p. 46.

Portanto, as expectativas para os graus se confirmaram. Vale notar que a verificação de que os resultados, para valores-teste de d , coincidem com aqueles encontrados na seção sobre cones redutíveis nos tranquiliza quanto a presença de erros nas contas.

Assim como no caso de cones com vértice de dimensão nula e uma geratriz nodal, aqui também podemos considerar a subvariedade $C_{n,d}^{m,k} \subset C_{n,d}^m$ que parametriza os cones cujo vértice varia em um subespaço linear de codimensão k em \mathbb{P}^m , com $k = 1, 2, 3$. Não apresentaremos os graus obtidos, mas informamos que para $k = 3$, ou seja, quando fixamos o vértice o resultado que obtivemos é exatamente o mesmo obtido por Vainsencher para o caso de curvas. Essa é uma outra verificação da provável inexistência de erros nas contas. . . Resta esperar por uma série geradora à la Göttsche!

Capítulo 3

Cones sobre superfícies com pontos duplos ordinários

3.1 Introdução

Neste capítulo vamos estudar as hipersuperfícies de \mathbb{P}^m que são cones obtidos pela junção (“join”) de um subespaço linear \mathcal{V} , de dimensão $m - 4$ e uma superfície S cujo espaço gerado é um \mathbb{P}^3 , isto é $\langle S \rangle = \mathbb{P}^3$, que não intersecta \mathcal{V} . Nosso objetivo é contar, em uma família n -dimensional de cones desse tipo, o número de cones tais que a base é uma superfície com n pontos duplos ordinários. O método utilizado é uma extensão daquele apresentado no primeiro capítulo e como antes aplica-se para $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$. A referência que tomamos como base foi o artigo [31], no qual são apresentadas fórmulas para o número de hipersuperfícies com até seis pontos duplos ordinários em uma variedade projetiva qualquer. Os resultados necessários para o cálculo efetivo são os mesmos apresentados no capítulo 2, p. 47. A palavra “cone” será usada sempre no sentido acima. De fato, apresentaremos resultados apenas para a família desses cones em \mathbb{P}^4 . Por fim, observamos que existe uma redundância proposital entre os conteúdos das seções 1.6, p. 25 e 3.3, p. 67.

3.2 Cones sobre (hiper)-superfícies

Como no caso de cones sobre curvas planas, para aplicar os resultados do capítulo 2 devemos encontrar um “espaço de parâmetros” para a família de cones do tipo que estamos considerando. Isso será feito nos parágrafos seguintes e é uma adaptação óbvia do que foi

feito em 1.7, p. 35. Ademais, observamos que embora nosso interesse seja apenas em cones sobre superfícies, nesta seção vamos produzir cones com vértice de dimensão $m - r - 1$ em \mathbb{P}^m sobre variedades de dimensão $r - 1$ contidas em r -planos de \mathbb{P}^m , com $r \geq 2$. O caso $r = 2$ reproduz o que foi feito em 1.7, p. 35 e o caso $r = m - 1$ reproduz a seção 1.5, p. 21. Nosso interesse neste capítulo é o caso $r = 3$.

Seja $\mathbb{G}_{r+1} = G[m - r - 1, m]$ a grassmanniana de subespaços de codimensão igual a $r + 1$ em \mathbb{P}^m . A variedade \mathbb{G}_{r+1} irá parametrizar a família de vértices. Consideremos a sequência tautológica de fibrados vetoriais sobre \mathbb{G}_{r+1}

$$\mathcal{R} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{G}_{r+1}}^{m+1} \twoheadrightarrow \mathcal{T},$$

onde temos $\text{posto}(\mathcal{R}) = m - r$ e $\text{posto}(\mathcal{T}) = r + 1$. Como na seção 1.7, p. 35, temos que $\mathbb{P}(\mathcal{T})$ se identifica com uma variedade bandeira contida em $\mathbb{G}_{r+1} \times \mathbb{G}_r$, em que $\mathbb{G}_r = G[m - r, m]$. Explicitamente,

$$\mathbb{P}(\mathcal{T}) = \{(\mathcal{V}, \mathcal{W}) \in \mathbb{G}_{r+1} \times \mathbb{G}_r; \mathcal{V} \subset \mathcal{W}\}.$$

Para cada $\mathcal{V} \in \mathbb{G}_{r+1}$ a fibra $\mathbb{P}(\mathcal{T})_{\mathcal{V}}$ se identifica com um r -plano dentro de \mathbb{G}_r . Vamos denotá-lo por $\mathbb{P}_{\mathcal{V}}^r$. Agora a base abstrata de um cone com vértice \mathcal{V} é uma hipersuperfície em $\mathbb{P}_{\mathcal{V}}^r$. De forma mais intrínseca, a base abstrata é um elemento da fibra $\mathbb{P}(S_d \mathcal{F})_{\mathcal{V}}$, onde \mathcal{F} é o dual de \mathcal{T} e d é o grau do cone.

Temos

$$\dim \mathbb{P}(S_d \mathcal{F}) = N(d, r) + (r + 1)(m - r) - 1,$$

onde $N(d, r) = \binom{d+r}{r}$. E como em 1.7, p. 35 temos um morfismo (genericamente injetivo)

$$\varphi : \mathbb{P}(S_d \mathcal{F}) \longrightarrow \mathbb{P}^{N(d, m) - 1}.$$

A imagem de φ é a variedade que parametriza os cones do tipo que estamos considerando, a qual denotaremos por $C_d^{m, r-1}$ (o expoente $r - 1$ indica a dimensão da base do cone).

Se denotarmos por $\tilde{C}_d^{m, r-1} \subset C_d^{m, r-1}$ o aberto formado pelos cones honestos, isto é, cones com vértice de dimensão $m - r - 1$, então $C_d^{m, r-1} \setminus \tilde{C}_d^{m, r-1}$ é formado pelos cones com vértice indeterminado (codimensão menor que $r + 1$). O caso mais degenerado ocorre quando a variedade de base $S \subset \mathbb{P}^r$ se decompõe como uma união de $(r - 1)$ -planos se intersectando ao longo de um $(r - 2)$ -plano. Neste caso nossos cones serão as uniões de hiperplanos se intersectando ao longo de um subespaço de dimensão $m - 2$.

Reciprocamente, se C é uma união de hiperplanos se cortando ao longo de um subespaço de dimensão $m-2$, então C pode ser vista como um cone sobre uma variedade de dimensão $r-1$ que se decompõe como união de $(r-1)$ -planos que se intersectam ao longo de um $(r-2)$ -plano. De fato, se $L \subset C$ é o subespaço linear de dimensão $m-2$ correspondente, então um r -plano genérico $H \subset \mathbb{P}^m$ corta L ao longo de um $(r-2)$ -plano h , e intersecta cada hiperplano contido em C , em um $(r-1)$ -plano que contém h . Assim, tomando $\mathcal{V} \subset L$, de dimensão $m-r-1$ e disjunto de h , temos que C é a junção (“join”) de \mathcal{V} com a união dos “ d ” $(r-1)$ -planos concorrentes ao longo de h , determinados por H . Por outro lado, a situação menos degenerada ocorre quando a variedade de base $S \subset \mathbb{P}^r$ é um cone com vértice de dimensão nula sobre uma hipersuperfície $S' \subset \mathbb{P}^{r-1} \subset \mathbb{P}^r$. Neste caso teremos os cones com vértice de dimensão $m-r$ sobre variedades de dimensão $r-2$ nos $(r-1)$ -planos de \mathbb{P}^m . É claro que temos os casos intermediários, e na verdade temos uma filtração de $C_d^{m,r-1} \setminus \tilde{C}_d^{m,r-1}$ dada pela dimensão do vértice. Isso nos permite concluir que

$$\dim(C_d^{m,r-1} \setminus \tilde{C}_d^{m,r-1}) = N(d, r-1) + r(m-r+1) - 1.$$

Como antes, o mapa φ é um isomorfismo de um aberto de $\mathbb{P}(S_d\mathcal{F})$ sobre $\tilde{C}_d^{m,r-1}$.

Usando notações e argumentos análogos aos da seção 1.5, p. 21 podemos construir um diagrama de fibrados sobre $\mathbb{P}(\mathcal{T})$:

$$\begin{array}{ccccc} & & S_d\mathcal{F} & & \\ & & \downarrow & \searrow & \\ \Omega_\pi \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{T}}(d) & \longrightarrow & P_\pi^1(\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(d)) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathcal{T}}(d) \end{array}$$

tal que o fibrado projetivo $\mathbb{P}(\mathcal{E})$, associado ao núcleo do mapa vertical \mathcal{E} , é uma subvariedade de $\mathbb{X} := \mathbb{P}(S_d\mathcal{F}) \times_{\mathbb{G}_{r+1}} \mathbb{P}(\mathcal{T})$ que parametriza as ternas $(\mathcal{V}, S, \mathcal{W})$ tais que S é singular em $\mathcal{W} \in \mathbb{P}_{\mathcal{V}}^3$. Além disso, a classe de $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ no grupo de Chow de \mathbb{X} é dada por:

$$[\mathbb{P}(\mathcal{E})] = c_{r+1}(P_\pi^1(\mathcal{O}_{\mathcal{T}}(d)) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}(S_d\mathcal{F})}(1)) \cap [\mathbb{X}] \tag{3.1}$$

Lembre que $\Omega_\pi = \tilde{\mathcal{Q}} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{T}}(-1)$, onde \mathcal{Q} é o quociente tautológico de $\mathbb{P}(\mathcal{T})$.

3.3 Singularidades do tipo cork2

Para enumerar cones cuja base é uma superfície (sempre contida em algum \mathbb{P}^3) com até seis pontos duplos ordinários, vamos aplicar os resultados do capítulo 2 ao diagrama:

$$\begin{array}{ccc} \mathcal{L} & \longrightarrow & \mathbb{X} := \mathbb{P}(S_d\mathcal{F}) \times_{\mathbb{G}_4} \mathbb{P}(\mathcal{T}) \supset \mathcal{D} \\ & & \downarrow \\ & & \mathbb{P}(S_d\mathcal{F}) \end{array} \quad (3.2)$$

onde $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{S_d\mathcal{F}}(1) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{T}}(d)$ e $\mathcal{D} := \{(\mathcal{V}, S, \mathcal{W}) \in \mathbb{P}(S_d\mathcal{F} \times_{\mathbb{G}_4} \mathbb{P}(\mathcal{T}); \mathcal{W} \in S)\}$ é o esquema de zeros da seção universal de \mathcal{L} . A fibra $\mathcal{D}_{(\mathcal{V}, S)}$ é a superfície S vista concretamente dentro de $\mathbb{P}_{\mathcal{V}}^3$.

Verifica-se facilmente que, ao contrário do que acontece no caso de curvas, para os sistemas lineares de superfícies a presença de um ponto triplo é uma condição de codimensão 7. Assim, para um sistema linear \mathbb{S} , suficientemente geral e de dimensão menor ou igual a seis, temos que os membros de \mathbb{S} não possuem pontos triplos.

Isso poderia nos levar a concluir erroneamente que a resposta ao nosso problema enumerativo seria dada pelo grau do ciclo $\Sigma(2^{[n]}, \mathcal{D})$, sem necessidade de correções. Porém, Vainsencher observa em [31], que embora excluídos pontos triplos, podem aparecer singularidades de co-posto igual a dois (denotadas cork2, que vamos definir em seguida) que propagam contribuição para os ciclos de singularidades de tipo $2^{[4]}$. Ademais, essas singularidades coincidem com os pontos triplos no caso de curvas, ou seja, no nosso contexto a noção de singularidade de tipo cork2 é a tradução correta da noção de ponto triplo no caso de curvas, no sentido que os ciclos correspondentes são as correções que devem necessariamente aparecer nas fórmulas.

Vamos começar revendo algumas observações feitas em § 1.6, p. 25 do primeiro capítulo, mas agora no contexto específico de superfícies.

Seja $S \subset \mathbb{P}^3$ uma superfície de grau d , definida como os zeros de um polinômio homogêneo $F \in \mathbb{C}[X_0, X_1, X_2, X_3]$. Se $p \in \mathbb{P}^3$ é um ponto singular de S , então por uma mudança de coordenadas podemos supor que $p = (0, 0, 0, 1)$. Desse modo podemos escrever

$$F(X_0, X_1, X_2, X_3) = X_3^{d-2} f_2(X_0, X_1, X_2) + \dots + X_3 f_{d-1}(X_0, X_1, X_2) + f_d(X_0, X_1, X_2)$$

com f_i homogêneo de grau i . Daí, passando ao aberto afim $U_3 := \{X_3 \neq 0\} \subset \mathbb{P}^3$, temos

que S é definida por

$$f(x_0, x_1, x_2) = f_2(x_0, x_1, x_2) + \dots + f_{d-1}(x_0, x_1, x_2) + f_d(x_0, x_1, x_2)$$

e $(0, 0, 0)$ é ponto singular. Como $f_2(x_0, x_1, x_2)$ é uma forma quadrática, podemos falar no posto e no co-posto (ou nulidade). Além disso, podemos verificar que

$$\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x_i \partial x_j}(0, 0, 0)\right) = \left(\frac{\partial^2 f_2}{\partial x_i \partial x_j}(0, 0, 0)\right) \text{ para } 0 \leq i, j \leq 2$$

Portanto, em $p = (0, 0, 0)$, o co-posto da hessiana de f é igual ao co-posto da forma quadrática f_2 . Dizemos que o ponto p é uma singularidade de tipo “*cork2*,” se o co-posto de f_2 for igual a 2.

Note que no caso de curvas, a forma quadrática f_2 é dada por uma matriz quadrada de ordem 2, assim dizer que f_2 tem co-posto 2 significa dizer que essa matriz é a matriz nula, ou seja, f_2 é nula, logo p é ponto triplo.

Como no primeiro capítulo diremos, por exemplo, que (x_1, x_2) é uma singularidade de tipo $(\text{cork2}, 2)$ de S , se $x_1 \in S$ for uma singularidade de tipo *cork2* em S e x_2 for uma singularidade da transformada estrita de S por meio da explosão de \mathbb{P}^3 em x_1 . Além disso, diremos que (x_1, x_2) é uma singularidade de tipo $\text{cork2}(\text{cork2})$ de S , se $x_1 \in S$ for uma singularidade de tipo *cork2* em S e x_2 for uma singularidade de tipo *cork2* da transformada estrita de S , infinitamente próxima de x_1 .

Agora observe que se p não é ponto triplo, sem perda de generalidade, podemos escrever:

$$f_2(x_0, x_1, x_2) = x_0^2 + sx_1^2 + tx_2^2$$

com $t, s \in \{0, 1\}$.

Observamos que se $ts \neq 0$, então p é um ponto duplo ordinário e neste caso se denotarmos por S' a transformada estrita de S por meio da explosão de \mathbb{P}^3 em $(0, 0, 0, 1)$, vemos que S' é não singular ao longo do $S' \cap E$, onde E é o divisor excepcional. De fato, tomando coordenadas locais $x_0, x_1, x_2, x'_0, x'_1$ no aberto $U_3 \times U_2 \subset \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^2$, vemos que nesse aberto a explosão $\tilde{\mathbb{P}}^3$ tem equações da forma:

$$x_i = x'_i x_2 \text{ com } i = 0, 1.$$

Portanto a transformada estrita de S em $\tilde{\mathbb{P}}^3$ é dada localmente pela equação

$$f'(x'_0, x'_1, x_2) := x_0'^2 + sx_1'^2 + t + x_2 f_3(x'_0, x'_1, 1) + \dots + x_2^{d-2} f_d(x'_0, x'_1, 1) = 0.$$

Como o divisor excepcional é dado nesse aberto por $x_2 = 0$, vemos que para S' ser singular em um ponto de

$$S' \cap E = \{x_0'^2 + sx_1'^2 + t = 0\}$$

é necessário que tenhamos $x_0' = sx_1' = 0$, então deve ocorrer também $t = 0$. Portanto, para que S' admita singularidade infinitamente próxima de p é necessário que ocorra $s \cdot t = 0$, ou seja, p deve ser degenerado. Além disso, se p é de tipo cork2, então $s = t = 0$ e daí, para que S' admita singularidade em $S' \cap E$ é necessário e suficiente que tenhamos $x_0' = 0$ e $f_3(0, x_1', 1) = 0$.

Assim, vemos que se p é de tipo cork2 então S' admite três pontos singulares infinitamente próximos de p (um para cada raiz da cúbica acima). Em particular, uma singularidade de tipo cork2 também é uma singularidade de tipo 2^[4]. Note que a presença de uma singularidade de tipo cork2 impõe 4 condições no sistema linear de superfícies de \mathbb{P}^3 . De fato, uma condição para que S seja singular, mais duas para que o co-posto da hessiana seja 2, e por fim mais uma condição que força as singularidades da transformada estrita de S estarem no excepcional.

Por outro lado, se S' admitir p' como singularidade de tipo cork2 infinitamente próximo de p , então p deve ser de tipo cork2 (veja [31], 1.2.1). De fato, suponha que $p' = (0, 0, 0)$. Neste caso, usando a relação

$$x_2^2 f'(x_0', x_1', x_2) = f(x_0, x_1, x_2),$$

podemos verificar que

$$\text{Hess}_{f'}(p') = \begin{pmatrix} 2 & 0 & \frac{\partial^3 f}{2\partial x_2^2 \partial x_0} \\ 0 & 2s & \frac{\partial^3 f}{2\partial x_2^2 \partial x_1} \\ \frac{\partial^3 f}{2\partial x_2^2 \partial x_0} & \frac{\partial^3 f}{2\partial x_2^2 \partial x_1} & \frac{2\partial^4 f}{4!\partial x_2^4} \end{pmatrix}$$

Portanto, para que p' seja singularidade de tipo cork2 é necessário que a matriz acima tenha posto igual a 1. Logo, devemos ter $s = 0$ e assim p também é de tipo pelos menos cork2. Essa observação é fundamental para que possamos definir a estrutura esquemática de $\Sigma(\text{cork2}(\text{cork2}), \mathcal{D})$.

Apresentamos abaixo, o resultado correspondente à proposição 2.1.1, p. 53 do primeiro capítulo. Como já observamos, no lugar dos pontos triplos aparecem as singularidades de tipo cork2. A referência original é a proposição 1.1 de [31].

Proposição 3.3.1. Seja \mathcal{Y} uma variedade projetiva, lisa, de dimensão maior ou igual a 3 e seja \mathcal{L} um feixe invertível e amplo. Fixado $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, existe $r_0 \in \mathbb{N}$ tal que para todo $r \geq r_0$ e para todo subsistema linear $S \subset |\mathcal{L}^{\otimes r}|$ de dimensão n , suficientemente geral, a quantidade de membros de S com uma singularidade de tipo $2^{[n]}$ é finita. Além disso, temos a seguinte lista de possíveis tipos estritos de singularidades ocorrendo nos membros de S :

- $n \leq 3 \Rightarrow 2^{[n]}$.
- $n = 4 \Rightarrow 2^{[4]}$ ou (cork2) .
- $n = 5 \Rightarrow 2^{[5]}, (\text{cork2}, 2)$ ou $(2, \text{cork2})$.
- $n = 6 \Rightarrow 2^{[6]}, (\text{cork2}(\text{cork2}))$, ou qualquer *permutação de* $(\text{cork2}, 2, 2)$.

Prova: A prova dessa proposição é semelhante à prova de 2.1.1, p. 53.

3.4 Classes dos ciclos de singularidades do tipo cork2

Nos parágrafos seguintes vamos descrever a estrutura esquemática e a classe de equivalência racional dos conjuntos:

$$\Sigma(\text{cork2}, \mathcal{D}), \Sigma(2^{[n]}, \text{cork2}, \mathcal{D}) \text{ e } \Sigma(\text{cork2}(\text{cork2}), \mathcal{D}),$$

com $n = 1, 2$. A referência para o conteúdo apresentado é a seção 2.7 de [31].

Começamos lembrando que se V é um espaço vetorial de dimensão finita, V^* é o dual, e $f : V \longrightarrow V^*$ é uma aplicação linear, dizemos que f é simétrica quando $f = f^*$. Ou seja, a aplicação f é representada por uma matriz simétrica. Assim, se \mathcal{N} é um fibrado vetorial sobre uma variedade \mathbb{X} , com o dual denotado por \mathcal{N}^\vee e $f : \mathcal{N} \longrightarrow \mathcal{N}^\vee$ é um morfismo de fibrados, equivalentemente f é uma seção do fibrado $\mathcal{N}^\vee \otimes \mathcal{N}^\vee = \text{Hom}(\mathcal{N}, \mathcal{N}^\vee)$. Então dizemos que f é simétrica quando o mapa linear induzido em cada fibra for simétrico. Por outro lado, como nosso corpo de base é \mathbb{C} (característica $\neq 2$), temos um mergulho $S_2\mathcal{N}^\vee \hookrightarrow \mathcal{N}^\vee \otimes \mathcal{N}^\vee$. Assim, $S_2\mathcal{N}^\vee$ é um subfibrado de $\text{Hom}(\mathcal{N}, \mathcal{N}^\vee)$ e dá conta exatamente dos mapas simétricos. Além disso, se \mathcal{L} é um fibrado em retas sobre \mathbb{X} então uma seção do fibrado $S_2\mathcal{N}^\vee \otimes \mathcal{L}$ é uma seção de $\mathcal{N}^\vee \otimes \mathcal{N}^\vee \otimes \mathcal{L}$ e produz um morfismo de fibrados $s \in \text{Hom}(\mathcal{N}, \mathcal{N}^\vee) \otimes \mathcal{L} = \text{Hom}(\mathcal{N}, \mathcal{N}^\vee \otimes \mathcal{L})$. Dizemos agora que s é simétrico quando

$s = \check{s} \otimes \mathcal{L}$. Se \mathcal{N} tem posto igual a r , vamos denotar por $\text{cork}(s, 2) \subset \mathbb{X}$ o esquema de zeros do mapa

$$\wedge^{r-1} s : \bigwedge^{r-1} \mathcal{N} \longrightarrow \bigwedge^{r-1} (\mathcal{N}^\vee \otimes \mathcal{L})$$

Ou seja, $\text{cork}(s, 2)$ é o lugar de degeneração de posto “ $r - 2$ ” do morfismo s . Assim, se $\text{cork}(s, 2)$ tiver a codimensão correta igual a 3, pela fórmula de Harris & Tu [15], teremos

$$\begin{aligned} [\text{cork}(s, 2)] &= 2^2 \{c_1(\mathcal{N}^\vee \otimes \sqrt{\mathcal{L}})c_2(\mathcal{N}^\vee \otimes \sqrt{\mathcal{L}}) - c_3(\mathcal{N}^\vee \otimes \sqrt{\mathcal{L}})\} \\ &= 4\{2\binom{r+1}{3}c_1(\sqrt{\mathcal{L}})^3 + (r^2 - 1)c_1(\sqrt{\mathcal{L}})^2c_1(\mathcal{N}^\vee) \\ &\quad + (r - 1)c_1(\sqrt{\mathcal{L}})c_1(\mathcal{N}^\vee)^2 + 2c_1(\sqrt{\mathcal{L}})c_2(\mathcal{N}^\vee) + c_1(\mathcal{N}^\vee)c_2(\mathcal{N}^\vee) - c_3(\mathcal{N}^\vee)\}. \end{aligned}$$

Para $r = 3$ ficamos com

$$\begin{aligned} [\text{cork}(s, 2)] &= 4\{c_1(\mathcal{L})^3 + 2c_1(\mathcal{L})^2c_1(\mathcal{N}^\vee) + c_1(\mathcal{L})(c_1(\mathcal{N}^\vee)^2 \\ &\quad + c_2(\mathcal{N}^\vee)) + c_1(\mathcal{N}^\vee)c_2(\mathcal{N}^\vee) - c_3(\mathcal{N}^\vee)\}. \end{aligned}$$

Agora sendo $\mathbb{X} := \mathbb{P}(S_d\mathcal{F}) \times_{\mathbb{G}_4} \mathbb{P}(\mathcal{T})$, $\mathcal{L} = \mathcal{O}_{S_d\mathcal{F}}(1) \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{T}}(d)$ e \mathcal{D} o divisor de zeros da seção universal de \mathcal{L} lembramos que o esquema $\Sigma((2), \mathcal{D})$ coincide com o fibrado projetivo $\mathbb{P}(\mathcal{E})$ da seção 3.2, p. 64 e em todo caso $\Sigma((2), \mathcal{D})$ é o esquema de zeros da seção $\sigma_{(2)}^{\mathcal{D}}$ no seguinte diagrama:

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{O}_{\mathbb{X}} & & \\ & \swarrow \sigma_h & \downarrow & \searrow \sigma_{(2)}^{\mathcal{D}} & \\ \mathcal{L} \otimes S_2\Omega_\pi & \longrightarrow & \mathcal{E}((3), \mathcal{D}) & \longrightarrow & \mathcal{E}((2), \mathcal{D}), \end{array}$$

onde Ω_π é o fibrado cotangente relativo do fibrado projetivo de posto 3, $\mathbb{P}(\mathcal{T}) \xrightarrow{\pi} \mathbb{G}_4$.

Portanto, restringindo o diagrama ao subesquema $\Sigma((2), \mathcal{D}) \subset \mathbb{X}$, a seção vertical se fatora por meio de $\mathcal{L} \otimes S_2\Omega_\pi$ dando origem à seção hessiana σ_h . Como vimos acima, a seção σ_h induz um mapa simétrico de fibrados:

$$\tilde{\sigma}_h : \Omega_\pi^\vee \rightarrow \mathcal{L} \otimes \Omega_\pi.$$

Então definimos $\Sigma(\text{cork}2, \mathcal{D}) \subset \Sigma((2), \mathcal{D})$ como o lugar de degeneração do posto do mapa $\tilde{\sigma}_h$, isto é, $\text{cork}(\tilde{\sigma}_h, 2)$. Assim, na hipótese da codimensão ser a esperada, temos

$$[\Sigma(\text{cork}2, \mathcal{D})] = 4\{h^3 + 2h^2c_1 + h(c_1^2 + c_2) + c_1c_2 - c_3\} \cap [\Sigma((2), \mathcal{D})]$$

onde $h := c_1(\mathcal{L})$ e $c_i := c_i(\Omega_\pi)$.

Além disso, o subesquema $\Sigma(\text{cork}2, \mathcal{D})$ é da dimensão correta, pois coincide com Y_2 (veja eq. 1.42, p. 27) e esse último tem dimensão correta, como observamos na seção 1.6, p. 27).

Lembramos que na seção 1.6 usamos os resultados de Harris-Tu e obtivemos o grau de $[\Sigma(\text{cork2}, \mathcal{D})]$. Precisamente, encontramos (cf. 1.51, p. 31)

$$\begin{aligned} \text{Grau}([\Sigma(\text{cork2}, \mathcal{D})]) = & \frac{5}{1990656}d(d-1)(d-2)^3(7d^{14} + 181d^{13} + 2157d^{12} + 15117d^{11} \\ & + 65703d^{10} + 162507d^9 + 71399d^8 - 1045009d^7 \\ & - 3939930d^6 - 6138684d^5 - 508968d^4 + 14056128d^3 \\ & + 18161280d^2 + 829440d - 9953280). \end{aligned}$$

Esse resultado felizmente coincide com aquele que obtemos por meio de implementação da fórmula de Porteous, como se pode verificar usando as linhas de código para MAPLE apresentadas no apêndice.

De modo análogo definimos

$$\Sigma(2, \text{cork2}, \mathcal{D}) = \Sigma(\text{cork2}, (\pi_{2,2}^* \mathcal{D} - 2E_{1,2})_{\Sigma(2,\mathcal{D})})$$

$$\Sigma(2, 2, \text{cork2}, \mathcal{D}) = \Sigma(\text{cork2}, (\pi_{3,2}^*(\pi_{2,2}^* \mathcal{D} - 2E_{1,2})_{\Sigma((2),\mathcal{D})} - 2E_{1,3})_{\Sigma(2,2,\mathcal{D})})$$

Por fim, para definir a estrutura esquemática de $\Sigma(\text{cork2}(\text{cork2}), \mathcal{D})$, lembramos que se para algum $(\mathcal{V}, S) \in \mathbb{P}(S_d \mathcal{F})$ a superfície $\mathcal{D}_{(\mathcal{V}, S)} \subset \mathbb{P}_{\mathcal{V}}^3$, possui um ponto singular $\mathcal{W} \in \mathbb{P}_{\mathcal{V}}^3$, com uma singularidade de tipo cork2 infinitamente próxima, então o próprio \mathcal{W} é pelo menos de tipo cork2. Com isso definimos

$$\Sigma(\text{cork2}(\text{cork2}), \mathcal{D}) = E_{1,2} \cap \Sigma(\text{cork2}, (\pi_{2,2}^* \mathcal{D} - 2E_{1,2})_{\Sigma(2,\mathcal{D})}).$$

Teorema 3.4.1. *Fixado $n \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$, seja $\{p_1, p_2, \dots, p_r\} \subset \mathbb{P}^m$ um conjunto com r pontos em posição geral, onde $r = \dim C_d^{4,2} - n$. Denotemos por $c_{n,d}^{4,2}$ o número de elementos de $C_{n,d}^{4,2}$ que são incidentes aos pontos do conjunto acima. Então:*

- $c_{n,d}^{4,2} = \frac{1}{n!} \int_{\mathbb{X}_n} h^\nu \cap [\Sigma(2^{[n]}, \mathcal{D})]$ para $n \leq 3$.
- $c_{4,d}^{4,2} = \frac{1}{4!} \left(\int_{\mathbb{X}_4} h^\nu \cap [\Sigma(2^{[4]}, \mathcal{D})] - 6 \int_{\mathbb{X}_1} h^\nu \cap [\Sigma(\text{cork2}, \mathcal{D})] \right)$.
- $c_{5,d}^{4,2} = \frac{1}{5!} \left(\int_{\mathbb{X}_5} h^\nu \cap [\Sigma(2^{[5]}, \mathcal{D})] - 30 \int_{\mathbb{X}_2} h^\nu \cap [\Sigma((2, \text{cork2}), \mathcal{D})] \right)$.
- $c_{6,d}^{4,2} = \frac{1}{6!} \left(\int_{\mathbb{X}_6} \Sigma(2^{[6]}, \mathcal{D}) - 30 \int_{\mathbb{X}_2} \Sigma((\text{cork2}(\text{cork2})), \mathcal{D}) - 90 \int_{\mathbb{X}_3} h^\nu \cap [\Sigma^{est.}((2, 2, \text{cork2}), \mathcal{D})] \right)$.

Prova: A demonstração desse resultado segue as mesmas linhas da demonstração do teorema 2.1.1, p. 58, p. 58. Observe-se porém que no caso presente o ciclo $\Sigma((2, 2, \text{cork2}))$ recebe contribuições do ciclo de singularidade do tipo cork2(cork2) (veja 2.6.1 em [31]). Por

isso, há que se descontar somente a parte de $\Sigma((2, 2, \text{cork2})$ que não está em $\Sigma(\text{cork2}(\text{cork2}))$, a qual denotamos por $\Sigma^{\text{est.}}((2, 2, \text{cork2}), \mathcal{D})$.

□

3.5 Fórmulas para cones sobre superfícies em \mathbb{P}^4

As fórmulas abaixo foram obtidas usando “scripts” do MAPLE, que são adaptações ingênuas dos que foram usados em [31]. Vamos apresentar fórmulas apenas para cones sobre superfícies em \mathbb{P}^4 , mas as técnicas fornecem resultados para cones sobre superfícies em \mathbb{P}^m , $m \geq 4$. No caso de cones sobre superfícies, não temos teste comparativos como tínhamos no caso de cones sobre curvas, pois agora o número de singularidades não é suficiente para forçar a redutibilidade da base. Por exemplo, uma superfície de grau 5 pode ter até 31 pontos duplos ordinários (veja Beauville, [4]). Por outro lado, ainda podemos fazer o teste de fixar um vértice e verificar se os resultados coincidem com aqueles encontrados em [31]. Informamos que esse teste foi feito e a expectativa se confirmou, o que nos deixa um pouco tranquilos quanto à presença de erros de implementação nas contas.

Como já dissemos (veja eq. 2.2, p. 61), a expectativa é que encontremos polinômios em d de grau dado por $16 + 3n$.

Para $n = 1$, o resultado já nos é conhecido desde o primeiro capítulo

$$\begin{aligned} c_{1,d}^{4,2} &= (d-1)^3(4\binom{N(d-1,4)}{4} - d\binom{N(d-1,4)}{3}). \\ &= \frac{5}{13824}\binom{d}{6}(d-1)^3(d^2-5d-2)(d^2-5d+12)(d^2-5d+10)(d^4-10d^3+35d^2-74d-48) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{2,d}^{4,2} &= \frac{35}{27648}\binom{d+4}{7}(d-1)^2(d^2+3d+6)(4d^{11}+40d^{10}+144d^9-9d^8-1464d^7-3426d^6+248d^5 \\ &+ 11903d^4+19932d^3+24324d^2-37872d-86400). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{3,d}^{4,2} &= \frac{5}{20736}\binom{d+3}{6}(4d^{19}+48d^{18}+196d^{17}-171d^{16}-4034d^{15}-11049d^{14}+8236d^{13}+104040d^{12} \\ &+ 204896d^{11}-6072d^{10}-1073164d^9-2824065d^8-1244690d^7+7696521d^6+15817788d^5 \\ &+ 10760364d^4-7716528d^3-118653120d^2+71891712d+39813120). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} c_{4,d}^{4,2} &= \frac{1}{3981312}\binom{d}{3}(32d^{25}+480d^{24}+2592d^{23}+112d^{22}-63408d^{21}-273648d^{20}-76554d^{19} \\ &+ 3031506d^{18}+10519742d^{17}+7087707d^{16}-59292549d^{15}-238831169d^{14}-308223329d^{13} \\ &+ 607099725d^{12}+3194471227d^{11}+5266330307d^{10}-234819225d^9-25383573484d^8 \\ &- 52746846384d^7-17529328944d^6+87362997552d^5+273279222720d^4+188163651456d^3 \\ &- 527674963968d^2-405330905088d+363752570880). \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{5,d}^{4,2} = & \frac{1}{29859840}(d-1)(d-3)(32d^{29}+416d^{28}+1728d^{27}-5136d^{26}-72144d^{25}-205248d^{24} \\
& + 439966d^{23}+4351438d^{22}+10045772d^{21}-10914835d^{20}-131385297d^{19}-353051106d^{18} \\
& - 7904264d^{17}+2504334034d^{16}+7422096548d^{15}+6124860818d^{14}-24324679980d^{13} \\
& - 111495211191d^{12}-122536385353d^{11}+115754907290d^{10}+836365643648d^9 \\
& + 1843016508272d^8-710430890064d^7-4455440587872d^6-8145097732224d^5 \\
& - 7599945316608d^4+34493281615872d^3+22965940482048d^2-54419399147520d \\
& + 15364679270400)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
c_{6,d}^{4,2} = & \frac{1}{179159040}(d-1)(128d^{33}+896d^{32}-1536d^{31}-50400d^{30}-138336d^{29}+665856d^{28}+5406248d^{27} \\
& + 4742360d^{26}-53136224d^{25}-261065570d^{24}-161785770d^{23}+1918200192d^{22}+9686570929d^{21} \\
& + 5189202019d^{20}-45156894720d^{19}-235055440248d^{18}-205345913218d^{17}+528835107908d^{16} \\
& + 4951061185678d^{15}+3092215100080d^{14}-14496652843d^{13}-57490930879117d^{12} \\
& - 114924854454164d^{11}+132773733787672d^{10}+99206273795364d^9+1674664572053376d^8 \\
& - 43466093415072d^7-5134099957011072d^6+669889722381120d^5-17567912559207168d^4 \\
& + 29750889710785536d^3+60281806016802816d^2-121082632633221120d \\
& + 49180317430579200).
\end{aligned}$$

Observe que a presença do fator $d - 3$ em $c_{5,d}^{4,2}$ é compatível com o fato de uma superfície cúbica não poder apresentar mais que quatro singularidades isoladas (veja [28]). Também vale notar que a expectativa para os graus dos polinômio se confirmaram.

Capítulo 4

Superfícies em \mathbb{P}^3 contendo duas retas

4.1 Introdução

É fato conhecido que uma superfície genérica de grau maior ou igual a quatro em \mathbb{P}^3 não contém curvas que não sejam suas interseções completas com outras superfícies (veja [22], [23]). Desse modo temos interesse em estudar a família de superfícies de um dado grau $d \geq 4$, que contêm curvas de tipo inesperado. Certamente um caso inicial a se estudar, é aquele em que consideramos superfícies contendo um número finito de retas.

O caso de superfícies de grau maior ou igual a quatro contendo uma reta é bastante simples. De fato, a condição de uma superfície de grau d conter uma dada reta (fixa) é uma condição linear de codimensão $d + 1$ no espaço projetivo \mathbb{P}^N , que parametriza as superfícies de grau d em \mathbb{P}^3 .

Com efeito, heurísticamente, para que uma superfície de grau d contenha uma reta é necessário e suficiente que ela contenha $d + 1$ pontos dessa reta. Desse modo, a subvariedade $\mathbb{X}_d^1 \subset \mathbb{P}^N$ que parametriza as superfícies contendo uma reta tem codimensão $d - 3$ e é imagem, via projeção no segundo fator (genericamente injetiva), de um subfibrado linear do fibrado projetivo trivial $\mathbb{G} \times \mathbb{P}^N$, onde \mathbb{G} denota a grassmaniana de retas de \mathbb{P}^3 . Portanto, o grau de \mathbb{X}_d^1 é dado pela integral da classe de Segre máxima do fibrado vetorial correspondente, no anel de Chow de \mathbb{G} .

A variedade \mathbb{X}_d^1 é a componente de codimensão mínima (em \mathbb{P}^N) do chamado lugar

de Noether-Lefschetz, composto pelos pontos correspondentes às superfícies $S \subset \mathbb{P}^3$, cujo grupo de Picard não é gerado por $\mathcal{O}_S(1)$ (veja [12]).

Nosso objetivo neste capítulo é construir um espaço de parâmetros para a família de superfícies de grau d em \mathbb{P}^3 , obtida como aderência do lugar das superfícies que contêm duas retas disjuntas. Usaremos esse espaço de parâmetros para determinar grau da referida família. Veremos que tal espaço aparece como um fibrado projetivo sobre uma variedade lisa, construída por meio da explosão de uma variedade lisa, ao longo de centro não singular. Daí, o grau desejado será determinado como o grau de uma classe de Segre do fibrado vetorial correspondente, no anel de Chow da referida variedade. Para calculá-lo aplicaremos a fórmula de resíduos de Bott. A referência que recomendamos para os leitores com pouca experiência no assunto é o item [25] da nossa bibliografia; lá serão encontradas aplicações semelhantes às que exibiremos aqui.

4.2 Notação e Preliminares

Sejam x_0, x_1, x_2, x_3 , coordenadas homogêneas em \mathbb{P}^3 , e seja \mathbb{G} a grassmanniana de retas de \mathbb{P}^3 , pensada como o espaço de parâmetros para a família de subespaços bidimensionais do \mathbb{C} -espaço vetorial $\mathcal{F} = \langle x_0, x_1, x_2, x_3 \rangle$. Desse modo, um ponto $l \in \mathbb{G}$ será escrito na forma $l = \langle h_1, h_2 \rangle$, com $h_1, h_2 \in \mathcal{F}$. Observemos ainda, que o mesmo símbolo “ l ” será usado tanto para denotar o ponto de \mathbb{G} (como subespaço de \mathcal{F}) como para denotar o subespaço linear (reta) de \mathbb{P}^3 .

Como anteriormente, escrevemos $N(d, 3) = \binom{d+3}{3}$ e denotamos por $N = N(d, 3) - 1$, a dimensão do espaço projetivo que parametriza as superfícies de grau d em \mathbb{P}^3 .

Informamos ao caro leitor que, em geral, se tivermos um morfismo entre esquemas $f : X \rightarrow Y$, então um fibrado que vive sobre Y e seu “pull-back” para X serão denotados com o mesmo símbolo. Esperamos que o contexto em que usaremos essa convenção não imponha obstáculo à leitura dessa tese.

4.2.1 uma reta

Como motivação para a caminhada que nos dispomos a realizar, vamos calcular explicitamente o polinômio (em d) que expressa o grau da variedade $\mathbb{X}_d^1 \subset \mathbb{P}^N$ que parametriza

as superfícies de grau d em \mathbb{P}^3 , contendo uma reta. Como observamos na introdução, \mathbb{X}_d^1 é imagem pela segunda projeção de um subfibrado projetivo de $\mathbb{G} \times \mathbb{P}^N$. Objetivamente, o subfibrado que aparece é na verdade a variedade de incidência $\mathbb{I} \subset \mathbb{G} \times \mathbb{P}^N$, dada por

$$\mathbb{I} = \{(l, S) \in \mathbb{G} \times \mathbb{P}^N; l \subset S\}.$$

A construção intrínseca é feita como segue. Consideramos a sequência tautológica de \mathbb{G}

$$\mathcal{E} \twoheadrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}, \quad (4.1)$$

e definimos o fibrado \mathcal{F}_d^1 pela seguinte sequência

$$\mathcal{F}_d^1 \twoheadrightarrow S_d \mathcal{F} \twoheadrightarrow S_d \mathcal{Q}. \quad (4.2)$$

Disso segue que \mathcal{F}_d^1 tem posto igual a $N(d, 3) - (d + 1)$ (1.2, p. 8) e é tal que sua fibra sobre um ponto $l \in \mathbb{G}$ dá conta das formas de grau d que se anulam ao longo da reta l .

Agora, em cima de $\mathbb{G} \times \mathbb{P}^N$ construímos o diagrama de fibrados

$$\begin{array}{ccc} & \mathcal{O}_{S_d \mathcal{F}}(-1) & \\ & \downarrow & \searrow s \\ \mathcal{F}_d^1 \twoheadrightarrow & S_d \mathcal{F} & \twoheadrightarrow S_d \mathcal{Q} \end{array}$$

O mapa diagonal (tracejado) é identicamente nulo exatamente quando o mapa vertical se fatora por \mathcal{F}_d^1 . Ou seja, o anulamento ocorre ao longo da variedade de incidência \mathbb{I} . Por outro lado, segue por princípios gerais que o subfibrado projetivo $\mathbb{P}(\mathcal{F}_d^1)$ é o esquema de zeros da seção

$$s : \mathcal{O}_{\mathbb{G} \times \mathbb{P}^N} \longrightarrow S_d \mathcal{Q} \otimes \mathcal{O}_{S_d \mathcal{F}}(1).$$

Logo, $\mathbb{I} = \mathbb{P}(\mathcal{F}_d^1)$. Daí, \mathbb{X}_d^1 é a projeção de $\mathbb{P}(\mathcal{F}_d^1)$ na segunda coordenada (genericamente injetiva, se $d \geq 4$). Logo, segue que

$$\dim \mathbb{X}_d^1 = N(d, 3) - d + 2.$$

Portanto, \mathbb{X}_d^1 tem codimensão $d - 3$ em \mathbb{P}^N , confirmando a heurística antecipada na introdução deste capítulo. Além disso, pela fórmula de projeção e pelas sequências exatas que apareceram, obtemos

$$\text{Grau}(\mathbb{X}_d^1) = \int_{\mathbb{G}} s_4(\mathcal{F}_d^1) \cap [\mathbb{G}] = \int_{\mathbb{G}} c_4(S_d \mathcal{Q}) \cap [\mathbb{G}].$$

Para calcular esse grau, vamos escrever a classe $c_4(S_d\mathcal{Q})$ em termos das classes de Chern do fibrado tautológico \mathcal{Q} . A estratégia consiste em considerar o fibrado projetivo $\mathbb{P}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathbb{G}$ e olhar para sua sequência tautológica (“à la *splitting principle*”)

$$\mathcal{O}_{\mathcal{Q}}(-1) \twoheadrightarrow \mathcal{Q} \twoheadrightarrow \overline{\mathcal{Q}}.$$

Assim,

$$c_1(\mathcal{Q}) = c_1(\overline{\mathcal{Q}}) + c_1(\mathcal{O}_{\mathcal{Q}}(-1)) \text{ e } c_2(\mathcal{Q}) = c_1(\overline{\mathcal{Q}}) \cdot c_1(\mathcal{O}_{\mathcal{Q}}(-1)).$$

Por outro lado, tomando potências simétricas obtemos

$$\mathcal{O}_{\mathcal{Q}}(-1) \otimes S_{d-1}\mathcal{Q} \twoheadrightarrow S_d\mathcal{Q} \twoheadrightarrow S_d\overline{\mathcal{Q}}.$$

Portanto,

$$c(S_d\mathcal{Q}) = c(\mathcal{O}_{\mathcal{Q}}(-1) \otimes S_{d-1}\mathcal{Q}) \cdot c(S_d\overline{\mathcal{Q}}).$$

Como $\overline{\mathcal{Q}}$ é um fibrado em retas temos que $c(S_d\overline{\mathcal{Q}}) = 1 + dc_1(\overline{\mathcal{Q}})$. Logo,

$$c_j(S_d\mathcal{Q}) = c_j(\mathcal{O}_{\mathcal{Q}}(-1) \otimes S_{d-1}\mathcal{Q}) + dc_1(\overline{\mathcal{Q}}) \cdot c_{j-1}(\mathcal{O}_{\mathcal{Q}}(-1) \otimes S_{d-1}\mathcal{Q})$$

Além disso, a igualdade acima juntamente com a fórmula

$$c_k(\mathcal{O}_{\mathcal{Q}}(-1) \otimes S_{d-1}\mathcal{Q}) = \sum_{i=0}^k \binom{d-i}{k-i} c_i(S_{d-1}\mathcal{Q}) (c_1(\mathcal{O}_{\mathcal{Q}}(-1)))^{k-i},$$

fornece relações de recorrência entre a classe $c_j(S_d\mathcal{Q})$ e as classes $c_p(S_{d-1}\mathcal{Q})$, com $p = 1, \dots, j$. A manipulação (enfadonha) dessas relações nos permite concluir que

$$\begin{aligned} c_1(S_d\mathcal{Q}) &= \binom{d+1}{2} c_1(\mathcal{Q}) \\ c_2(S_d\mathcal{Q}) &= (3\binom{d+2}{4} - \binom{d+1}{3}) c_1(\mathcal{Q})^2 + \binom{d+2}{3} c_2(\mathcal{Q}) \\ c_3(S_d\mathcal{Q}) &= \binom{d+1}{2} \binom{d+1}{4} c_1(\mathcal{Q})^3 + 2d \binom{d+2}{4} c_1(\mathcal{Q}) c_2(\mathcal{Q}) \\ c_4(S_d\mathcal{Q}) &= (105\binom{d+3}{8} + 25\binom{d+2}{6} - \binom{d+1}{5}) c_1(\mathcal{Q})^4 + (10\binom{d+3}{6} - \binom{d+2}{5}) c_2(\mathcal{Q})^2 \\ &\quad + (105\binom{d+3}{7} - 5\binom{d+3}{6} + 23\binom{d+2}{5}) c_1(\mathcal{Q})^2 c_2(\mathcal{Q}). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Por fim, lembrando que $c_1(\mathcal{Q}) \cap [\mathbb{G}]$ é o ciclo das retas incidentes a uma reta fixa e que $c_2(\mathcal{Q}) \cap [\mathbb{G}]$ é o ciclo das retas contidas em um plano (veja exemplo 10.5 em [34],) temos que

$$\int_{\mathbb{G}} c_1(\mathcal{Q})^2 c_2(\mathcal{Q}) \cap [\mathbb{G}] = \int_{\mathbb{G}} c_2(\mathcal{Q})^2 \cap [\mathbb{G}] = 1 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{G}} c_1(\mathcal{Q})^4 \cap [\mathbb{G}] = 2.$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} \text{Grau}(\mathbb{X}_d^1) &= 105\binom{d+4}{8} + 105\binom{d+3}{8} + 5\binom{d+3}{6} + 50\binom{d+2}{6} + 22\binom{d+2}{5} - 2\binom{d+1}{5}. \\ &= \frac{1}{24}\binom{d+1}{4}(3d^4 + 6d^3 + 17d^2 + 22d + 24). \end{aligned} \quad (4.4)$$

Observe que embora tenhamos interesse apenas no caso $d \geq 4$, nada impede de substituir $d = 3$ no polinômio acima. Fazendo isso, obtemos o número 27. Isso não nos causa espanto pois para $d = 3$ a projeção $p_2 : \mathbb{I} \rightarrow \mathbb{P}^{19}$ é sobrejetiva, genericamente finita, e como uma superfície cúbica genérica contém exatamente 27 retas (teo. de Cayley-Salmon), temos que 27 é o grau dessa projeção.

4.3 Duas retas em \mathbb{P}^3

Nessa seção vamos construir um espaço de parâmetros para uma família plana de subesquemas de \mathbb{P}^3 com polinômio de Hilbert $2t + 2$ e cujo membro genérico corresponde à união de duas retas disjuntas. (Note-se de passagem que $\text{Hilb}^{2t+2}\mathbb{P}^3$ contém também uma componente de dimensão 11 cujos pontos parametrizam subesquemas do tipo cônica+ponto.) Usaremos isso para determinar o grau da aderência em \mathbb{P}^N , do lugar das superfícies de grau d em \mathbb{P}^3 , que contêm duas retas em posição geral (genericamente). Também destacaremos alguns fatos que serão úteis na abordagem do problema análogo para o caso de três retas, que trataremos no próximo capítulo.

Denotemos por $\mathbb{G}(2)$ a explosão de $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$ ao longo da diagonal $\Delta \subset \mathbb{G} \times \mathbb{G}$ e consideremos $\mathbb{G}(2)$ como um esquema sobre \mathbb{G} , com mapa estrutural dado pela composição do mapa de explosão com a projeção no primeiro fator

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{G}(2) & \xrightarrow{b_\Delta} & \mathbb{G} \times \mathbb{G} \\ & \searrow & \downarrow p_1 \\ & & \mathbb{G} \end{array} \quad (4.5)$$

Agora fixemos a reta $l_0 \in \mathbb{G}$, com equações $x_0 = 0$ e $x_1 = 0$, isto é, $l_0 = \langle x_0, x_1 \rangle$ e denotemos por $\mathbb{G}' \subset \mathbb{G}(2)$ a fibra de $\mathbb{G}(2)$ sobre l_0 . Como a interseção de $\{l_0\} \times \mathbb{G}$ com a diagonal consiste apenas do ponto (l_0, l_0) , vemos que \mathbb{G}' pode ser identificado com a explosão de \mathbb{G} no ponto l_0 . Tecnicamente, essa identificação se justifica pelo fato de o mergulho diagonal ser normalmente plano, o que implica que tomar a fibra da explosão é o mesmo que explodir a fibra (veja [35], lema 2.3.4). Desse modo, um ponto de \mathbb{G}' deve

ser pensado como um par de retas (l_0, l) , sendo que l pode estar infinitamente próximo de l_0 , ou seja, (l_0, l) pode corresponder a um ponto do divisor excepcional relativo à explosão de \mathbb{G} no ponto l_0 .

Mostraremos que \mathbb{G}' é o espaço de parâmetros para uma família plana de subesquemas de \mathbb{P}^3 , cujo membro *genérico* é a união de l_0 e uma outra reta que não intersecta l_0 . Portanto, o polinômio de Hilbert de qualquer membro dessa família será igual a $2t + 2$. Em particular, o ideal correspondente conterá $4 = 10 - (2 \cdot 2 + 2)$ quádricas, como mostra uma conta simples de regularidade.

Por isso, começamos considerando o mapa racional

$$\phi : \mathbb{G} \dashrightarrow \mathbb{G}r(4, S_2\mathcal{F}). \quad (4.6)$$

Para cada $l \in \mathbb{G}$, a imagem $\phi(l)$ é definida como o espaço gerado pelas quádricas obtidas multiplicando as equações de l pelas equações de l_0 . Verifica-se que o lugar de indeterminação do mapa ϕ coincide, esquematicamente, com o ponto $l_0 \in \mathbb{G}$. Vale a pena observar que se l não intersecta l_0 , então $\phi(l)$ é exatamente o espaço das quádricas que geram o ideal da união $l \cup l_0$. Como já mencionado, o polinômio de Hilbert dessa união é $2t + 2$. Já no caso em que l intersecta $l_0 \neq l$, o ideal da união contém cinco quádricas independentes, enquanto $\phi(l)$ é o espaço de quádricas gerado pelos produtos dos geradores lineares dos ideais de l e l_0 . Neste caso, o ideal gerado pelas quatro quádricas define sobre $l_0 \cup l$ uma estrutura esquemática com polinômio de Hilbert também igual a $2t + 2$, por conta da aparição de uma componente mergulhada suportada em $l_0 \cap l$. Para $l = l_0$ o produto efetuado acima fornece apenas três quádricas independentes

$$l_0^2 = \langle x_0^2, x_0x_1, x_1^2 \rangle.$$

A questão aqui é bastante simples: queremos definir uma estrutura esquemática com suporte em l_0 e polinômio de Hilbert $2t + 2$, que seja especialização de uma união disjunta $l_0 \cup l$.

Para isso é necessário e suficiente escolhermos uma quádrica (não nula módulo l_0^2) contendo l_0 . O espaço das quádricas contendo l_0 tem dimensão 7; matando as três anteriores sobra um espaço de dimensão 4. Então projetivamente existe um \mathbb{P}^3 de escolhas possíveis para a nova quádrica, ou seja, sobre l_0 podemos definir um \mathbb{P}^3 dessas estruturas esquemáticas com polinômio de Hilbert $2t + 2$. Se houvesse uma maneira canônica de escolher uma dentre essas ∞^3 estruturas, \mathbb{G} seria nosso espaço de parâmetros. Tal escolha

canônica não existe, mas existe uma forma natural de “substituir” l_0 por um \mathbb{P}^3 , qual seja, a explosão de \mathbb{G} no ponto l_0 .

Como sabemos que o divisor excepcional relativo à explosão de \mathbb{G} em l_0 é a projetivização de $\mathbb{T}_{l_0}\mathbb{G}$, vemos que formalmente, a discussão acima se justifica pelo seguinte lema.

Lema 4.3.0.1. *Seja E o divisor excepcional relativo à explosão da grassmanniana em um ponto $l \in \mathbb{G}$ e seja $S_2\mathcal{F}^l$ o espaço das quádricas que contêm l . Então temos*

$$E = \mathbb{P}(S_2\mathcal{F}^l/l^2).$$

Prova:

Inicialmente, lembramos que

$$\mathbb{T}_l\mathbb{G} = \text{Hom}(l, \mathcal{F}/l) = \mathcal{F}/l \otimes l^\vee.$$

Por outro lado, a multiplicação induz um isomorfismo

$$\tau : \mathcal{F}/l \otimes l \rightarrow S_2\mathcal{F}^l/l^2.$$

Ademais, como l tem posto igual a 2, temos um isomorfismo natural,

$$l^\vee \simeq l \otimes \wedge^2 l^\vee.$$

Portanto, a partir de τ obtemos

$$\mathcal{F}/l \otimes l^\vee \simeq (S_2\mathcal{F}^l/l^2) \otimes \wedge^2 l^\vee.$$

Logo, $E = \mathbb{P}(S_2\mathcal{F}^l/l^2)$. □

Restringindo sobre l_0 , temos $E' \simeq \mathbb{P}(S_2\mathcal{F}^{l_0}/l_0^2)$. Daí, um ponto de E' é exatamente o que queremos; uma quádrica contendo l_0 e não nula módulo l_0^2 .

Observação 4.3.0.1. Se acompanharmos os isomorfismos escritos acima veremos que a quádrica associada ao elemento $\varphi \in \text{Hom}(l_0, \mathcal{F}/l_0)$ é dada por

$$Q_\varphi = x_0\varphi(x_1) - x_1\varphi(x_0).$$

Oportunamente, essa expressão será relacionada com uma direção normal a l_0 que define um deslocamento infinitesimal.

4.3.1 estudo local

Façamos então a explosão de \mathbb{G} no ponto l_0 . Para isso, sejam a_1, a'_2, a'_3, a'_4 coordenadas locais no aberto canônico $U_{l_0} \subset \mathbb{G}$ que contém l_0 . Um elemento $l \in U_{l_0}$ se escreve na forma

$$\begin{cases} x_0 + a'_2 x_3 + a_1 x_2 = 0 \\ x_1 + a'_4 x_3 + a'_3 x_2 = 0. \end{cases} \quad (4.7)$$

Portanto $\phi(l)$ é o espaço gerado pelas quádricas

$$\begin{cases} Q_1 = x_0(x_0 + a'_2 x_3 + a_1 x_2) \\ Q_2 = x_1(x_0 + a'_2 x_3 + a_1 x_2) \\ Q_3 = x_1(x_1 + a'_4 x_3 + a'_3 x_2) \\ Q_4 = x_0(x_1 + a'_4 x_3 + a'_3 x_2) \end{cases}$$

Reduzindo Q_4 módulo Q_2 , vemos que $\phi(l)$ é o espaço gerado por

$$\begin{cases} Q_1 = x_0(x_0 + a'_2 x_3 + a_1 x_2) \\ Q_2 = x_1(x_0 + a'_2 x_3 + a_1 x_2) \\ Q_3 = x_1(x_1 + a'_4 x_3 + a'_3 x_2) \\ Q_4 = x_0(a'_4 x_3 + a'_3 x_2) - x_1(a'_2 x_3 + a_1 x_2) \end{cases}$$

Ou seja, se fixarmos a base ordenada $\beta = \{x_0^2, x_0 x_1, x_1^2, x_1 x_2, x_0 x_2, x_0 x_3, x_1 x_3\}$ em $S_2 \mathcal{F}^{l_0}$, então ϕ é definido pela matriz

$$M = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a'_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & a_1 & 0 & 0 & a'_2 \\ 0 & 0 & 1 & a'_3 & 0 & 0 & a'_4 \\ 0 & 0 & 0 & -a_1 & a'_3 & a'_4 & -a'_2 \end{pmatrix}.$$

O ideal dos menores 4×4 de M é exatamente o ideal da origem, $l_0 \in U_{l_0}$, $I_{l_0} = (a_1, a'_2, a'_3, a'_4)$.

Assim, podemos tomar as equações locais da explosão \mathbb{G}' como sendo

$$a'_i = a_1 a_i, \quad i = 2, 3, 4, \quad (4.8)$$

onde a_1, a_2, a_3, a_4 são coordenadas locais em \mathbb{G}' e a_1 é a equação do divisor excepcional. Substituindo essas relações em M , vemos que as entradas da última linha passam a ser divisíveis por a_1 . Daí, obtemos um mapa regular (veja o lema 3.1.2 em [35])

$$\phi' : \mathbb{G}' \rightarrow \text{Gr}(4, S_2 \mathcal{F}^{l_0}).$$

Para sermos honestos, o referido lema garante apenas a regularidade de ϕ' em $\tilde{U}_{l_0} \subset U_{l_0} \times \mathbb{P}^3$, explosão de U_{l_0} na origem. No entanto, a ação de $\mathbb{PGL}(4, \mathbb{C})$ em \mathbb{G} induz uma ação do estabilizador de l_0 em \mathbb{G}' e essa ação possui uma única órbita fechada (veja 5.4, p. 129). Além disso, a origem em

$$U'_{l_0} := \tilde{U}_{l_0} \cap U_{l_0} \times \mathbb{A}_0^3, \text{ onde } \mathbb{A}_0^3 = \{(x_0, x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{P}^3; x_0 = 1\},$$

é um representante dessa órbita fechada. Assim, a invariância do mapa ϕ' garante a regularidade em todo o domínio \mathbb{G}' .

Também podemos desviar dessa argumentação, explicitando a imagem de cada ponto $\varphi \in E'$. De fato, à luz de identificação $E' = \mathbb{P}(S_2\mathcal{F}^{l_0}/l_0)$, temos que

$$\phi'(\varphi) = \langle x_0^2, x_0x_1, x_1^2, x_0\varphi(x_1) - x_1\varphi(x_0) \rangle. \quad (4.9)$$

Localmente, cada $(l_0, l) \in U'_{l_0} \subset \mathbb{G}'$ tem como imagem o espaço gerado pelas quádricas

$$(*) \quad \begin{cases} Q_1 = x_0(x_0 + a_1(a_2x_3 + x_2)) \\ Q_2 = x_1(x_0 + a_1(a_2x_3 + x_2)) \\ Q_3 = x_1(x_1 + a_1(a_4x_3 + a_3x_2)) \\ Q_4 = x_1(a_2x_3 + x_2) - x_0(a_4x_3 + a_3x_2) \end{cases} \quad (4.10)$$

Ou ainda, o mapa ϕ' é definido pela matriz

$$M' = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & a_1 & a_1a_2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & a_1a_3 & a_1a_4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & a_1a_3^2 & a_1a_3a_4 & a_1(a_4 - a_2a_3) \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -a_3 & -a_4 & a_2 \end{pmatrix}.$$

Usando essa representação podemos concluir que o morfismo ϕ' é um mergulho. De fato, a injetividade é óbvia e quanto a injetividade de $d\phi'$, basta notar que as funções coordenadas a_1, a_2, a_3, a_4 aparecem como entradas de M' e assim os vetores canônicos $e_i = (0, \dots, 1, \dots, 0), i = 1, \dots, 4$, aparecem como linhas da matriz jacobiana de ϕ' , garantindo posto igual a 4. Esse argumento mostra apenas que no aberto U'_{l_0} o nosso morfismo é um mergulho. Novamente, o argumento de invariância garante que $d\phi'$ é injetivo em todos os pontos da única órbita fechada contida em \mathbb{G}' . Consequentemente, temos injetividade em todos os pontos de \mathbb{G}' , pois do contrário o lugar de pontos onde

ocorresse queda no posto da jacobiana seria um fechado invariante e teria que conter a (única) órbita fechada.

Resumimos a discussão acima como segue.

Proposição 4.3.1. *Seja $\mathbb{G}' \rightarrow \mathbb{G}$ a explosão de \mathbb{G} em l_0 . Então \mathbb{G}' mergulha na grassmanniana $\mathbb{G}r(4, S_2\mathcal{F}^{l_0})$ como a aderência da imagem do mapa racional $\mathbb{G} \dashrightarrow \mathbb{G}r(4, S_2\mathcal{F}^{l_0})$ (cf. 4.6, p. 80).*

4.3.2 divisor excepcional

Para (l_0, l) em cima do divisor excepcional $E' \subset \mathbb{G}'$, as quádricas correspondentes se reduzem a

$$\begin{cases} Q_1 = x_0^2 \\ Q_2 = x_1x_0 \\ Q_3 = x_1^2 \\ Q_4 = x_0(a_4x_3 + a_3x_2) - x_1(a_2x_3 + x_2) \end{cases}$$

Observamos que essas quatro quádricas definem uma estrutura esquemática não reduzida, com suporte em l_0 e polinômio de Hilbert $2t + 2$.

A nova quádrica Q_4 que apareceu corresponde ao ponto $(0, a_2, a_3, a_4) \in E'$ e pode ser interpretada geometricamente. De fato, registremos primeiro que seu determinante hessiano é igual a

$$(a_3a_2 - a_4)^2.$$

4.3.3 retas incidentes a l_0

Consideremos a subvariedade $\tilde{Y}_0 \subset \mathbb{G}'$, obtida como transformada estrita do divisor $Y_0 \subset \mathbb{G}$, que parametriza as retas incidentes à l_0 . Mediante uma simples eliminação usando eq. 4.7, p. 82 e 4.8, p. 82, verifica-se não sem surpresa, que a equação local é exatamente

$$a_4 = a_2a_3.$$

Assim, pelo menos fora de \tilde{Y}_0 , a quádrica Q_4 é lisa e corresponde a um campo de direções normais ao longo da reta l_0 , ou seja, para cada ponto de l_0 temos a especificação de um plano contendo l_0 . Com efeito, sabemos que uma quádrica lisa contém duas famílias unidimensionais de retas, sendo que em cada uma delas os membros são disjuntos entre si, cada membro de uma intersecta todos os membros da outra e por cada ponto em um

membro de uma dessas família passa um membro da outra. Desse modo, para cada ponto $p \in l_0$ temos uma direção normal associada, dada pelo plano gerado por l_0 e pela única reta da outra família que passa por p .

Por outro lado, quando nos restringimos a \tilde{Y}_0 a quádrlica Q_4 codifica também outras informações. De fato, em cima de \tilde{Y}_0 , fazendo $a_4 = a_2a_3$, podemos escrever

$$Q_4 = (a_3x_0 - x_1)(a_2x_3 + x_2).$$

Logo, mesmo em cima do divisor excepcional temos bem definidos um plano h contendo l_0 com equação $a_3x_0 - x_1 = 0$, bem como um ponto de l_0 determinado por $a_2x_4 + x_3 = 0$.

Ou seja, cada ponto de

$$E'_0 := E' \cap \tilde{Y}_0, \quad (4.11)$$

representa a escolha de um ponto sobre l_0 e de um plano contendo l_0 , é isso que Q_4 codifica.

Na verdade, comparando com a situação genérica (fora de \tilde{Y}_0), o que está ocorrendo agora é que para cada ponto de E'_0 o campo de direções normais ao longo de l_0 é constante e para “compensar” um ponto de l_0 é distinguido. Por exemplo, o sistema de quádrlicas que corresponde à origem (isto é, $a_1 = a_2 = a_3 = a_4 = 0$), é $\langle x_0^2, x_0x_1, x_1^2, x_1x_2 \rangle$. O ideal gerado por essas quádrlicas define um subesquema com suporte em l_0 e apresenta uma componente imersa no ponto $p = (0, 0, 0, 1)$. O espaço tangente mergulhado é um plano, constante ao longo de l_0 , exceto no ponto imerso, onde o tangente é todo o ambiente.

Geometricamente, representamos

$$(\dagger) \quad E'_0 = \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagrama: Um retângulo representando um plano } h. \text{ Uma linha horizontal dentro dele representa a reta } l_0. \text{ Um ponto } p \text{ está marcado na linha } l_0. \end{array} \right\}.$$

Vale destacar ainda, que temos uma projeção

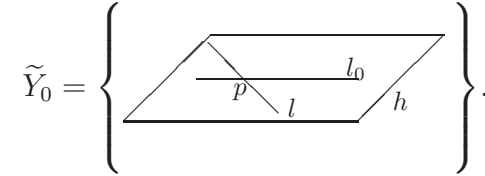
$$\pi : \tilde{Y}_0 \rightarrow l_0^\perp \times l_0^*, \quad (4.12)$$

onde $l_0^* = \mathbb{P}(l_0) = \mathbb{P}(\langle x_0, x_1 \rangle) \subset \mathbb{P}^{3\vee}$, parametriza o feixe de planos contendo a reta l_0 e $l_0^\perp = \mathbb{P}(\mathcal{F}/l_0)$ parametriza os pontos de l_0 por meio de suas equações. Essa projeção faz de \tilde{Y}_0 um \mathbb{P}^1 -fibrado sobre $l_0^\perp \times l_0^*$, cuja fibra sobre o ponto $(\bar{h}_p, h) \in l_0^\perp \times l_0^*$ corresponde a

escolhermos uma reta passando pelo ponto $p \in l_0$ e contida no plano h . Isso nos permite escrever

$$\tilde{Y}_0 = \{(\bar{h}_p, h, l) \in l_0^\perp \times l_0^* \times \mathbb{G}; p \in l \subset h \supset l_0 \ni p\}. \quad (4.13)$$

Mais detalhes serão oferecidos no § 4.5.2, p. 96, e prop. 4.5.1, permitindo inclusive a variação da reta l_0 . A representação geométrica para um ponto genérico em \tilde{Y}_0 é dada na figura seguinte.



Note que E'_0 é a imagem de uma seção do fibrado (4.12) acima, que corresponde à escolha $l = l_0$. Assim, temos $E'_0 \simeq l_0^\perp \times l_0^*$. Isso reafirma a identificação feita em (†).

Por outro lado, como $E' = \mathbb{P}(S_2\mathcal{F}^{l_0}/l_0^2)$, podemos descrever como é dado o mergulho

$$E'_0 = E' \cap \tilde{Y}_0 \simeq l_0^\perp \times l_0^* \hookrightarrow \mathbb{P}(S_2\mathcal{F}^{l_0}/l_0^2).$$

A resposta é simples. A multiplicação induz o mapa injetivo fibrados sobre l_0^\perp

$$\mathcal{O}_{l_0^\perp}(-1) \otimes \mathcal{O}_{l_0}(-1) \xrightarrow{\quad \quad \quad} (\mathcal{F}/l_0) \otimes l_0 \xrightarrow{\quad \quad \quad} S_2\mathcal{F}^{l_0}/l_0^2,$$

onde l_0 é pensado como fibrado trivial sobre $l_0^\perp \times l_0^*$. Esse mapa tem como imagem exatamente as classes (de quádricas) que possuem representantes que se fatoram como o produto de um plano contendo l_0 por uma fator linear que define um ponto sobre l_0 . Assim, temos o mergulho de Segre,

$$E'_0 \simeq l_0^\perp \times l_0^* \hookrightarrow \mathbb{P}(S_2\mathcal{F}^{l_0}/l_0^2) \simeq \mathbb{P}^3. \quad (4.14)$$

Observemos que o fato do divisor excepcional da explosão $\tilde{Y}_0 \rightarrow Y_0$ no ponto duplo que corresponde a $l_0 \in Y_0$ ser uma quádrica no projetivizado tangente ($T_{l_0}Y_0 = T_{l_0}\mathbb{G}$), não é nada excepcional.

Por fim, explicitemos também que o mergulho de \tilde{Y}_0 em \mathbb{G}' (mergulhado em $\mathbb{G}r(4, S_2\mathcal{F}^{l_0})$, via ϕ'), dado por

$$(\bar{h}_p, h, l) \mapsto \langle l_0 \cdot l, h_p h \rangle.$$

O mapa descrito acima está bem definido no sentido que não depende do representante escolhido para \bar{h}_p . Com efeito, a possível redundância decorrente da escolha de um representante de \bar{h}_p , mora em $l_0 \cdot h \subset l_0 \cdot l$, pois h é a equação de um plano que contém l (e também l_0).

Podemos adicionar às informações já apresentadas em 4.3.1, p. 84:

Proposição 4.3.2. \mathbb{G}' admite um fibrado $\mathcal{F}_2^2(l_0)$ de posto 4, subfibrado do fibrado trivial $\mathbb{G}' \times S_2\mathcal{F}$, cuja fibra sobre cada $(l_0, l_1) \in \mathbb{G}'$ gera um ideal que define uma estrutura esquemática com suporte $l_0 \cup l_1$ e polinômio de Hilbert $2t + 2$. O divisor excepcional $E' = \mathbb{P}(S_2\mathcal{F}^{l_0}/l_0^2)$ parametriza estruturas duplas sobre l_0 .

Ou ainda, \mathbb{G}' é um espaço de parâmetros para uma família plana de subesquemas de \mathbb{P}^3 com grau 2, gênero aritmético -1 , e cujo suporte coincide genericamente com a união de duas retas disjuntas, sendo uma delas igual a l_0 .

O fibrado $\mathcal{F}_2^2(l_0)$ é simplesmente o “pull-back” do subfibrado tautológico de $\text{Gr}(4, S_2\mathcal{F}^{l_0})$, por meio do mergulho $\phi' : \mathbb{G}' \rightarrow \text{Gr}(4, S_2\mathcal{F}^{l_0})$, cf. 4.3.1, p. 84.

Observação 4.3.3.1. Vamos denotar o subesquema de \mathbb{P}^3 correspondente ao ponto $(l_0, l) \in \mathbb{G}'$, por $l_0 \sqcup l$. Temos consciência de que no caso $l = l_0$ essa notação é ambígua, mas no contexto em pretendemos usá-la tal ambiguidade será irrelevante.

Agora, usando o fibrado $\mathcal{F}_2^2(l_0)$, construímos sobre \mathbb{G}' um fibrado $\mathcal{F}_d^2(l_0)$, subfibrado do fibrado trivial $\mathbb{G}' \times S_d\mathcal{F}$ e cuja fibra sobre (l_0, l_1) é o espaço das superfícies de grau d que contêm $l_0 \sqcup l_1$. O fibrado $\mathcal{F}_d^2(l_0)$ é definido indutivamente, como imagem do mapa de multiplicação

$$\mathcal{F}_{d-1}^2(l_0) \otimes \mathcal{F} \rightarrow S_d\mathcal{F}. \quad (4.15)$$

Temos o seguinte fato a respeito do posto de $\mathcal{F}_d^2(l_0)$.

Proposição 4.3.3. A fibra de $\mathcal{F}_d^2(l_0)$ sobre cada ponto de \mathbb{G}' tem dimensão M_d^2 , dada por

$$M_d^2 = N(d, 3) - (2d + 2), \forall d \geq 2.$$

Prova: Com efeito, a igualdade acima pode ser provada por indução em d . Para $d = 2$ a igualdade segue da construção de $\mathcal{F}_2^2(l_0)$. Para $d = 3$, uma verificação direta mostra que o resultado é válido. Agora, seja $d \geq 4$, suponhamos que o resultado vale para $d - 1$ e

observemos que se $c_{d-1} = 2(d-1) + 2$, então

$$c_{d-1} = \binom{d}{d-1} + \binom{d-1}{d-2} + \binom{d-3}{d-3}, \quad \forall d \geq 4.$$

Essa decomposição é chamada de $(d-1)$ -ésima decomposição de Macaulay de c_{d-1} .

Daí, com a notação de [24], temos

$$c_{d-1}^{\langle d-1 \rangle} = \binom{d+1}{d} + \binom{d}{d-1} + \binom{d-2}{d-2} = 2d + 2 = c_d.$$

Assim, a hipótese de indução juntamente com o teorema de Macaulay-Gotzmann (veja [24], p.335) garantem que

$$M_d^2 \geq N(d, 3) - (2d + 2).$$

A outra desigualdade é clara. De fato, sabemos que a igualdade ocorre genericamente, pois o ideal da união de duas retas disjuntas tem regularidade igual a 2 (veja teorema 3.12 em [9]). Por outro lado, o lugar dos pontos onde o posto de um mapa de fibrados vetoriais cai é um fechado próprio. Logo, a desigualdade estrita não pode ocorrer. \square

O fibrado projetivo $\mathbb{P}(\mathcal{F}_d^2(l_0)) \rightarrow \mathbb{G}'$ é formado pelos pares (L, F) tais que $L = l_0 \sqcup l$ é uma (especialização da) união de retas disjuntas e F denota uma superfície de grau d que contém o subesquema L .

4.3.4 o espaço de parâmetros

Agora, deixemos l_0 variar em \mathbb{G} . Como a ação de $\mathbb{P}\mathrm{GL}(4, \mathbb{C})$ em \mathbb{G} é transitiva e as construções que fizemos são invariantes, concluímos que $\mathbb{G}(2)$ admite um fibrado vetorial \mathcal{F}_2^2 de posto 4, subfibrado do fibrado trivial $\mathbb{G}(2) \times S_2\mathcal{F}$ e cuja fibra sobre $(l_1, l_2) \in \mathbb{G}(2)$ gera um ideal que define uma estrutura esquemática com suporte $l_1 \cup l_2$ e polinômio de Hilbert $2t + 2$, ou seja, $\mathbb{G}(2)$ é o espaço de parâmetros para uma família plana de subesquemas de \mathbb{P}^3 , cujo membro genérico é a união de duas retas disjuntas. Na verdade, temos um mapa natural de $\mathbb{G}(2)$ sobre a componente de $\mathrm{Hilb}^{2t+2}(\mathbb{P}^3)$ que é isomorfa à explosão do produto simétrico de \mathbb{G} por \mathbb{G} , ao longo da diagonal. Vale notar que o referido morfismo é genericamente de tipo $(2 : 1)$. Observamos também, que $\mathrm{Hilb}^{2t+2}(\mathbb{P}^3)$ possui uma outra componente, cujo ponto geral corresponde à união disjunta de uma cônica e um ponto (veja [14]).

Usando o fibrado \mathcal{F}_2^2 podemos construir indutivamente, via multiplicação por formas lineares, um fibrado vetorial \mathcal{F}_d^2 , em cima de $\mathbb{G}(2)$. O fibrado \mathcal{F}_d^2 é subfibrado do fibrado trivial $\mathbb{G}(2) \times S_d\mathcal{F}$. O fibrado projetivo $\mathbb{P}(\mathcal{F}_d^2)$ parametriza os pares (L, F) , $F =$ superfície de grau d em \mathbb{P}^3 , $L =$ especialização de união de duas retas disjuntas, tais que $L \subset F$.

Portanto, a restrição da segunda projeção

$$p_2 : \mathbb{G}(2) \times \mathbb{P}(S_d\mathcal{F}) \rightarrow \mathbb{P}(S_d\mathcal{F}) = \mathbb{P}^N$$

ao subfibrado $\mathbb{P}(\mathcal{F}_d^2) \subset \mathbb{G}(2) \times \mathbb{P}(S_d\mathcal{F})$ tem como imagem exatamente a variedade \mathbb{X}_d^2 , aderência do lugar das superfícies de grau d que contêm duas retas em posição geral.

Proposição 4.3.4. *O mapa*

$$\rho : \mathbb{P}(\mathcal{F}_d^2) \rightarrow \mathbb{P}^N,$$

obtido por restrição de p_2 , é genericamente $2 : 1$. Portanto, (veja prop. 4.3.3, p. 87)

$$\dim \mathbb{X}_d^2 = M_d^2 + 7$$

Prova:

Como ρ é restrição de p_2 , basta mostrarmos que a diferencial de ρ restrita aos vetores tangente verticais, isto é, tangentes de $\mathbb{P}(\mathcal{F}_d^2)$ que provêm do tangente de $\mathbb{G}(2)$, é genericamente injetiva. Como injetividade é uma condição aberta, basta exibirmos um ponto $(x, S) \in \mathbb{P}(\mathcal{F}_d^2)$ tal que $d\rho_{(x,S)}$ satisfaz a condição desejada. Para isso, é suficiente tomarmos S como a superfície de Fermat de grau d em \mathbb{P}^3 , dada pela equação

$$X_0^d + X_1^d + X_2^d + X_3^d = 0$$

e $x = (l_1, l_2) \in \mathbb{G}(2)$ como um ponto que representa a escolha de duas retas distintas, dentre as muitas (finitas!) retas contidas em S . Daí, observando que

$$T_x\mathbb{G}(2) = T_{l_1}\mathbb{G} \oplus T_{l_2}\mathbb{G},$$

vemos que tudo se resume a verificação de que S não contém retas obtidas por deslocamento infinitesimal, por exemplo, de l_1 . Esse último fato é um cálculo diferencial essencialmente banal e por isso encerramos essa primeira parte aqui. Portanto, pela prop. 4.3.3, p. 87, temos

$$\dim \mathbb{X}_d^2 = \dim \mathbb{P}(\mathcal{F}_d^2) = N(d, 3) - (2d + 2) - 1 + 8 = M_d^2 + 7.$$

Agora, para verificar a afirmação sobre a cardinalidade da fibra genérica, observe que exigir que a fibra de ρ sobre $S \in \mathbb{P}^N$ tenha mais de dois pontos, implica em exigir que a superfície S contenha pelo menos três retas distintas. No entanto, veremos no próximo capítulo (veja eq.5.35, p. 151) que a subvariedade $\mathbb{X}_d^3 \subset \mathbb{X}_d^2$, fecho do lugar das superfícies contendo três retas disjuntas, tem dimensão

$$\dim \mathbb{X}_d^3 = N(d, 3) - (3d + 3) + 11 = M_d^2 + 10 - d < \dim \mathbb{X}_d^2, \forall d \geq 4 .$$

Portanto, a superfície genérica que contém duas retas, contém exatamente duas e assim a fibra genérica de ρ tem cardinalidade dois, pois nosso espaço $\mathbb{G}(2)$ parametriza pares ordenados de retas, haja vista que o mesmo é proveniente do produto $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$. \square

Dessa forma, se H denota a seção hiperplana de $\mathbb{P}(\mathcal{F}_d^2)$, usando a fórmula de projeção vemos que o grau de \mathbb{X}_d^2 se calcula assim:

$$\text{Grau}(\mathbb{X}_d^2) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{P}(\mathcal{F}_d^2)} H^{M_d^2+7} \cap [\mathbb{P}(\mathcal{F}_d^2)] = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{G}(2)} s_8(\mathcal{F}_d^2) \cap [\mathbb{G}(2)]. \quad (4.16)$$

4.4 Aplicando a fórmula de Bott

O cálculo efetivo de $\text{Grau}(\mathbb{X}_d^2)$ é feito aplicando a fórmula de Bott e usando o MAPLE para calcular as contribuições dos pontos fixos por uma ação do toro $T = \mathbb{C}^*$.

Lembramos que a ação usual de \mathbb{C}^* em \mathbb{P}^3 é definida por

$$t \cdot x_i = t^{w_i} x_i, \text{ com } i = 0, \dots, 3.$$

Além disso, essa ação em \mathbb{P}^3 induz uma ação em \mathbb{G} e de modo natural, uma ação diagonal em $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$, que deixa Δ invariante. Portanto, temos uma ação em $\mathbb{G}(2)$.

O lema abaixo mostrará que (para uma escolha genérica dos pesos w_i 's) em $\mathbb{G}(2)$ aparecem somente pontos fixos isolados, num total de 54.

Lema 4.4.0.1. *A ação de \mathbb{C}^* em $\mathbb{G}(2)$ possui somente pontos fixos isolados, num total de 54.*

Prova:

Para uma escolha genérica dos pesos w_i 's é corriqueiro verificar que em \mathbb{G} teremos somente pontos fixos isolados, num total de 6, a saber,

$$l_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle, \text{ com } 0 \leq i < j \leq 3.$$

Conseqüentemente, a ação induzida diagonalmente em $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$ terá 36 pontos fixos (l_{ij}, l_{km}) , dos quais apenas 6 estão sobre a diagonal. Os 30 pontos fixos de $\mathbb{G} \times \mathbb{G} \setminus \Delta$ dão origem a 30 pontos fixos em $\mathbb{G}(2)$. Os demais pontos fixos de $\mathbb{G}(2)$ vivem no divisor excepcional. O excepcional é simplesmente $\mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{G})$, um \mathbb{P}^3 fibrado sobre Δ . Assim, a genericidade dos pesos garante que cada um dos 6 pontos fixos (l_{ij}, l_{ij}) produz mais 4 pontos fixos isolados em $\mathbb{G}(2)$. Por exemplo,

$$\mathbb{T}_{l_{01}}\mathbb{G} = \langle x_0, x_1 \rangle^\vee \otimes \langle x_2, x_3 \rangle = x_0^\vee \otimes x_2 \oplus x_0^\vee \otimes x_3 \oplus x_1^\vee \otimes x_2 \oplus x_1^\vee \otimes x_3$$

tem decomposição em auto-espacos com os pesos $w_2 - w_0, w_2 - w_1, w_3 - w_0, w_3 - w_1$, todos distintos, logo no \mathbb{P}^3 -fibra, só há os 4 pontos fixos básicos (veja seção 5.8, p. 153). Portanto, o conjunto $F_{\mathbb{G}(2)}$ dos pontos fixos de $\mathbb{G}(2)$ terá de fato cardinalidade 54. \square

4.4.1 explicitando o grau de \mathbb{X}_d^2

Reveja eq. 4.16, p. 90. A classe $s_8(\mathcal{F}_d^2)$ se escreve como um polinômio nas classes de Chern de \mathcal{F}_d^2 , obtido como coeficiente do termo de grau 8 no inverso formal do polinômio de Chern de \mathcal{F}_d^2 :

$$\begin{aligned} s_8(\mathcal{F}_d^2) &= c_1^8 - 7c_2c_1^6 + 6c_3c_1^5 + 15c_2^2c_1^4 - 5c_4c_1^4 + 4c_5c_1^3 - 20c_2c_3c_1^3 + 12c_2c_4c_1^2 \\ &\quad - 3c_6c_1^2 + 6c_3^2c_1^2 - 10c_2^3c_1^2 + 12c_2^2c_3c_1 - 6c_2c_5c_1 + 2c_7c_1 - 6c_3c_4c_1 + c_2^4 \\ &\quad - 3c_4c_2^2 - 3c_3^2c_2 + 2c_6c_2 + c_4^2 + 2c_3c_5 - c_8. \end{aligned}$$

Então a fórmula de Bott nos diz que

$$2 \cdot \text{Grau}(\mathbb{X}_d^2) = \int_{\mathbb{G}(2)} s_8(\mathcal{F}_d^2) \cap [\mathbb{G}(2)] = \sum_{p \in F_{\mathbb{G}(2)}} \int_p \frac{s_8^T(\mathcal{F}_d^2) \cap [p]_T}{c_8^T(\mathbb{T}_p\mathbb{G}(2))}.$$

Aqui, $s_8^T(\mathcal{F}_d^2)$ é obtido do polinômio que representa $s_8(\mathcal{F}_d^2)$, substituindo as classes de Chern c_i pelas respectivas classes de Chern \mathbb{C}^* -equivariantes. Como os pontos fixo são isolados, o cálculo fica facilitado pois neste caso as classes de Chern \mathbb{C}^* -equivariantes dos fibrados envolvidos são dadas, em cada grau, pelas respectivas funções simétricas dos pesos associados às decomposições dos fibrados em auto-subfibrados.

Desse modo, para cada ponto fixo $p \in F_{\mathbb{G}(2)}$ precisamos conhecer as decomposições de \mathcal{F}_d^2 e de $\mathbb{T}_p\mathbb{G}(2)$ em auto-subfibrados, para que possamos calcular os pesos e então as classes de Chern \mathbb{C}^* -equivariantes.

As decomposições de $\mathbb{T}_p\mathbb{G}(2)$ são simples, poderíamos descrevê-las explicitamente para cada um dos elementos de $F_{\mathbb{G}(2)}$ e em um minuto teríamos a classe de Chern máxima desse

fibrado. No entanto, vamos omitir tais decomposições tendo a justificativa de que cálculos da mesma natureza serão exibidos exaustivamente na seção 5.8, p. 153.

Quanto às decomposições de \mathcal{F}_d^2 , elas já aparecem explicitamente quando exibimos a fibra de \mathcal{F}_d^2 sobre cada $p \in F_{\mathbb{G}(2)}$. No entanto, as classes de Chern desse fibrado são inviáveis de serem exibidas “à mão”, haja vista que já no caso inicial, $d = 4$, começamos com um fibrado \mathcal{F}_4^2 de posto 25.

Por exemplo, se $p \in E_{\Delta} \subset \mathbb{G}(2)$ se projeta sobre $(l_0, l_0) \in \Delta$, e é tal que

$$(\mathcal{F}_2^2)_p = \langle x_0^2, x_0x_1, x_1^2, x_1x_2 \rangle,$$

então a fibra de \mathcal{F}_4^2 sobre p é dada por

$$(\mathcal{F}_4^2)_p = \langle \underbrace{l_0^4}_{\langle x_0^4, x_0^3x_1, \dots \rangle}, l_0^3x_2, l_0^3x_3, l_0^2x_2^2, l_0^2x_2x_3, l_0^2x_3^2, x_1x_2^3, x_1x_2^2x_3, x_1x_2x_3^2 \rangle$$

Portanto o conjunto de pesos associado é

$$\mathcal{W}_p = \{4w_0, 3w_0 + w_1, \dots, w_1 + 3w_2, w_1 + 2w_2 + w_3, w_1 + w_2 + 2w_3\}.$$

A partir desses pesos deveríamos calcular as classes de Chern c_i^T , ($i = 1, \dots, 8$) que são dadas pelas funções simétricas, depois teríamos que substituir em $s_8^T(\mathcal{F}_4^2)$, para encontrar o numerador da fração correspondente ao ponto fixo p . Esse exemplo mostra que necessitamos do auxílio da ferramenta computacional.

Os “scripts” (encontrados no apêndice) que realizam tais cálculos foram implementados no MAPLE com a ajuda do professor André Meireles (UFRN), a quem registramos aqui nossos agradecimentos.

Dessa forma, para cada grau d (fixado) conseguimos produzir um número inteiro que representa a quantidade de superfícies de grau d em \mathbb{P}^3 contendo duas retas disjuntas (genericamente) e passando por um número adequado de pontos em posição geral.

Por exemplo, para $d = 4$, obtivemos que o número **35640** é a resposta para o problema enumerativo de determinar a quantidade de superfícies quárticas em \mathbb{P}^3 , que contêm duas retas disjuntas (não prefixadas) e que passam por 32 pontos em posição geral.

Observação 4.4.1.2. Já que no caso de superfícies contendo uma reta obtivemos um polinômio, de grau 8, que fornece a solução para todo $d \geq 4$ (veja eq.4.4, p. 79), também para o caso tratado agora temos esperança de obter um polinômio. O problema é que

a fórmula de Bott retorna resultados “caso a caso” (*i.e.*, atribuindo valores ao grau d) e não um polinômio diretamente. Porém, admitindo o caráter polinomial da solução, podemos usar interpolação para obtermos um polinômio. Entretanto, para usar interpolação precisamos ter pelo menos uma cota superior para o grau do desejado polinômio.

De fato, temos razões para acreditar que é razoável esperar um polinômio em d , de grau 16. Com efeito, podemos usar o teorema de Grothendieck-Riemann-Roch (veja teo.15.2 em [10]) para verificar o caráter polinomial em d e encontrar pelo menos um cota para o grau desse polinômio.

Adiaremos um pouco essa discussão (veja a seção 4.6, p. 101), para introduzir alguns fatos sobre a fórmula de pontos duplos. Com isso teremos um novo ingrediente que poderá ajudar a inferir algo a respeito do polinômio esperado.

4.5 Comparação com a fórmula de pontos duplos

Em uma primeira análise poderíamos pensar que o grau de \mathbb{X}_d^2 seria obtido pela aplicação direta da fórmula de pontos duplos (veja p.165 de [10]), à projeção

$$p_2 : \mathbb{P}(\mathcal{F}_d^1) \rightarrow \mathbb{P}^N. \quad (4.17)$$

No entanto, vamos verificar que a resposta fornecida por esse método não coincide com a que encontramos. De fato, veremos que para $d = 4$, o resultado que obteremos aqui (veja eq.4.20, p. 95) é bem maior do que o número **35640** que encontramos na seção acima. Também vamos explicar o motivo para tal excesso.

Inicialmente observamos que

$$\dim \mathbb{P}(\mathcal{F}_d^1) = 4 + N(d, 3) - (d + 1) - 1 = N(d, 3) - d + 2. \quad (4.18)$$

Além disso, também temos

$$\dim \mathbb{P}(\mathcal{F}_d^2) = 8 + N(d, 3) - (2d + 2) - 1 = N(d, 3) - 2d + 5.$$

Assim, temos a inclusão $p_2^{-1}(\mathbb{X}_d^2) \subset \mathbb{P}(\mathcal{F}_d^1)$ em codimensão $d - 3$. Ademais, um ponto genérico $(l_1, l_2, S) \in \mathbb{P}(\mathcal{F}_d^2)$ origina dois pontos (l_1, S) e (l_2, S) em $\mathbb{P}(\mathcal{F}_d^1)$. Isso mostra que $p_2^{-1}(\mathbb{X}_d^2)$ está contido no lugar de pontos duplos de p_2 , $D(p_2) \subset \mathbb{P}(\mathcal{F}_d^1)$, cuja codimensão esperada também é $d - 3$. Portanto, se $D(p_2)$ tiver a codimensão pura esperada, então \mathbb{X}_d^2 será uma componente de $\mathbb{D} = p_2(D(p_2))$.

A partir de agora vamos fixar $d = 4$. A vantagem que obtemos com isso é o fato de passarmos a trabalhar em codimensão 1 (divisores). Neste caso, podemos aplicar a fórmula de pontos duplos na forma do exemplo 9.3.4 de [10]. A verificação efetiva da aplicabilidade da fórmula se resume essencialmente a mostrar que o lugar dos pontos onde a derivada de p_2 deixa de ser injetiva, tem codimensão pelo menos igual a 2. Uma verificação local, com a ajuda do “SINGULAR”, mostra que essa codimensão é de fato igual a 2. Portanto, de acordo com o exemplo citado, fazendo

$$f = p_2, \quad \mathbb{X} = \mathbb{P}(\mathcal{F}_4^1) \quad \text{e} \quad \mathbb{Y} = \mathbb{P}^{34},$$

podemos escrever

$$[D(p_2)] = f^* f_* [\mathbb{X}] - (c_1(f^* T_{\mathbb{Y}}) - c_1(T_{\mathbb{X}})) \cap [\mathbb{X}].$$

Como $\mathbb{X}_4^1 = f(\mathbb{X})$, temos $f_* [\mathbb{X}] = [\mathbb{X}_4^1]$. Ademais, f tem fibra genérica finita, como decorre do cálculo diferencial mencionado na prova da prop. 4.3.4, p. 89. Assim,

$$\dim \mathbb{X}_4^1 = \dim \mathbb{X} = 33.$$

Logo, \mathbb{X}_4^1 é uma hipersuperfície em \mathbb{Y} . Daí, denotando por h e H as classes hiperplanas de \mathbb{Y} e \mathbb{X} , respectivamente, temos

$$f^* f_* [\mathbb{X}] = f^* ([\mathbb{X}_4^1]) = f^* (\text{Grau}(\mathbb{X}_4^1) h) = \text{Grau}(\mathbb{X}_4^1) H = 320H,$$

onde usamos que $\text{Grau}(\mathbb{X}_4^1) = 320$, calculado pelo polinômio encontrado na seção 4.2, p. 76.

Por outro lado, em \mathbb{Y} temos a sequência exata

$$\mathcal{O}_{\mathbb{Y}}(-1) \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{Y}}^{\oplus 35} \twoheadrightarrow \mathcal{A}.$$

Daí vemos que $c_1(\mathcal{A}) = -c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{Y}}(-1)) = h$. Além disso, $T_{\mathbb{Y}} = \mathcal{A} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{Y}}(1)$. Logo,

$$c_1(T_{\mathbb{Y}}) = c_1(\mathcal{A} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{Y}}(1)) = c_1(\mathcal{A}) + 34c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{Y}}(1)) = 35h.$$

Falta calcular $c_1(T_{\mathbb{X}})$. Como $\mathbb{X} = \mathbb{P}(\mathcal{F}_4^1)$ é um fibrado sobre \mathbb{G} , usando a sequência exata natural,

$$T_{\mathbb{X}/\mathbb{G}} \twoheadrightarrow T_{\mathbb{X}} \twoheadrightarrow T_{\mathbb{G}},$$

temos que

$$c_1(T_{\mathbb{X}}) = c_1(T_{\mathbb{G}}) + c_1(T_{\mathbb{X}/\mathbb{G}}).$$

Além disso, as sequências tautológicas de \mathbb{G} e de \mathbb{X} , são respectivamente

$$\begin{aligned} \mathcal{E} &\twoheadrightarrow \mathcal{F} \twoheadrightarrow \mathcal{Q}, \\ \mathcal{O}_{\mathbb{X}}(-1) &\twoheadrightarrow \mathcal{F}_4^1 \twoheadrightarrow \mathcal{G}, \end{aligned}$$

e sabemos que

$$T_{\mathbb{G}} = \mathcal{Q} \otimes \mathcal{E}^{\vee} \quad \text{e} \quad T_{\mathbb{X}/\mathbb{G}} = \mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{X}}(1). \quad (4.19)$$

Portanto, segue que

$$\begin{aligned} c_1(T_{\mathbb{G}}) &= c_1(\mathcal{Q} \otimes \mathcal{E}^{\vee}) = 4c_1(\mathcal{Q}), \\ c_1(T_{\mathbb{X}/\mathbb{G}}) &= c_1(\mathcal{G}) + 29H = c_1(\mathcal{F}_4^1) + 30H. \end{aligned}$$

Para concluir, lembramos que \mathcal{F}_4^1 é definido pela sequência exata

$$\mathcal{F}_4^1 \twoheadrightarrow S_4\mathcal{F} \twoheadrightarrow S_4\mathcal{Q}.$$

$$\text{Assim, } c_1(\mathcal{F}_4^1) = -c_1(S_4\mathcal{Q}) = -\binom{5}{2}c_1(\mathcal{Q}) = -10c_1(\mathcal{Q}).$$

Desse modo,

$$[D(p_2)] = (315H - 6c_1(\mathcal{Q})) \cap [\mathbb{X}].$$

Agora seja $\mathbb{D} \subset \mathbb{P}^N$ a imagem de $D(p_2)$. Pela fórmula de projeção, obtemos

$$\begin{aligned} \text{Grau}(\mathbb{D}) &= \frac{1}{2} \int_{\mathbb{X}} (315H - 6c_1(\mathcal{Q})) H^{32} \cap [\mathbb{X}] \\ &= \frac{315}{2} \int_{\mathbb{X}} H^{33} \cap [\mathbb{X}] - 3 \int_{\mathbb{X}} c_1(\mathcal{Q}) H^{32} \cap [\mathbb{X}] \\ &= \frac{315}{2} \cdot \text{Grau}(\mathbb{X}_4^1) - 3 \int_{\mathbb{G}} c_1(\mathcal{Q}) s_3(\mathcal{F}_4^1) \cap [\mathbb{G}] \\ &= \frac{315}{2} \cdot 320 - 3 \int_{\mathbb{G}} c_1(\mathcal{Q}) c_3(S_4\mathcal{Q}) \cap [\mathbb{G}]. \end{aligned}$$

Por outro lado, de 4.3, p. 78, segue que

$$c_3(S_4\mathcal{Q}) = 50c_1(\mathcal{Q})^3 + 120c_1(\mathcal{Q})c_2(\mathcal{Q}).$$

Assim,

$$\begin{aligned} \text{Grau}(\mathbb{D}) &= 50400 - 3 \cdot \left(\int_{\mathbb{G}} (50c_1(\mathcal{Q})^4 + 120c_1(\mathcal{Q})^2c_2(\mathcal{Q})) \cap [\mathbb{G}] \right) \\ &= 50400 - 3 \cdot (50 \cdot 2 + 120) = \mathbf{49740}. \end{aligned} \quad (4.20)$$

Como dissemos o número fornecido pela fórmula de pontos duplos é maior do que aquele que já conhecemos (**35640**, 4.4.1, p. 92).

4.5.1 a outra componente do lugar de pontos duplos

Vamos identificar de onde vem o excesso. Para isso, começamos observando que o suporte de $D(p_2)$ contém os pontos $(l, S) \in \mathbb{P}(\mathcal{F}_4^1)$ tais que existe $l' \in \mathbb{G}$ com $l' \neq l$ e $l' \subset S$.

Em particular, temos os casos em que $l \cap l' \neq \emptyset$. Entretanto, de acordo com a nossa construção, se uma terna (l, l', S) com $l \cap l' \neq \emptyset$ está em $\mathbb{P}(\mathcal{F}_4^2)$, então o ponto $p = l \cap l'$ possui estrutura múltipla, de modo que a união esquemática $l \sqcup l'$ (com ponto mergulhado) tenha polinômio de Hilbert igual a $2t + 2$. Isso força a superfície S ser singular em p .

Tipicamente, para $l = \langle x_0, x_1 \rangle$ e $l' = \langle x_1, x_2 \rangle$, temos que $p = (0, 0, 0, 1)$ e $l \sqcup l'$ é definido pelo ideal

$$I = (x_0x_1, x_0x_2, x_1^2, x_1x_2) \subset (x_0, x_1, x_2)^2. \quad (4.21)$$

Portanto, toda superfície contendo $l \sqcup l'$ é singular em p .

Por outro lado, a união simples $l \cup l'$ (sem ponto mergulhado) é dada pelo ideal (x_1, x_0x_2) , cujo polinômio de Hilbert é $2t + 1$. O excesso se deve ao fato de a fórmula de pontos duplos não ser sensível à estrutura esquemática da união de l com l' .

Vamos verificar que a variedade das superfícies quárticas contendo pares de retas incidentes (sem ponto imerso) é uma componente de \mathbb{D} , distinta de \mathbb{X}_4^2 , cujo grau corresponde exatamente ao excesso $14100 = 49740 - 35640$.

4.5.2 dessingularizar a incidência

Para isso, seja $\tilde{Y} \subset \mathbb{G}(2)$ a transformada estrita de

$$Y = \{(l, l') \in \mathbb{G} \times \mathbb{G}; l \cap l' \neq \emptyset\},$$

por meio da explosão $\mathbb{G}(2) \rightarrow \mathbb{G} \times \mathbb{G}$ ao longo da diagonal. A fibra de \tilde{Y} sobre $l_0 \in \mathbb{G}$ é a variedade \tilde{Y}_0 , (cf. 4.13, p. 86) a qual sabemos ser uma \mathbb{P}^1 -fibracão sobre $\mathbb{P}(\mathcal{F}/l_0) \times l_0^*$. De fato, \tilde{Y} é um \mathbb{P}^1 fibrado sobre $\mathbb{P}(\mathcal{Q}) \times_{\mathbb{G}} \mathbb{P}(\mathcal{E})$, onde \mathcal{E} e \mathcal{Q} são respectivamente, o subfibrado e o quociente tautológico de \mathbb{G} . A construção formal dessa \mathbb{P}^1 -fibracão, é feita como segue.

Iniciamos com a \mathbb{P}^1 -fibracão, $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathbb{G}$ e olhamos para o pull-back $\pi^*\mathcal{E}$, com o qual construímos mais um andar da nossa torre $\mathbb{P}(\pi^*\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathbb{G}$. Na verdade, essa torre representa simplesmente a construção de $\mathbb{P}(\mathcal{Q}) \times_{\mathbb{G}} \mathbb{P}(\mathcal{E})$, variedade bandeira (ponto, reta, plano). Assim, para cada $l \in \mathbb{G}$, o que fizemos até esse momento foi escolher um plano $h \in \mathbb{P}(\mathcal{E}_l)$ contendo l e um ponto p em l , dado por um $\bar{h}_p \in \mathbb{P}(\mathcal{Q}_l)$. Agora,

consideremos o seguinte diagrama de fibrados com sequências exatas horizontais e central,

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{O}_{\mathcal{E}}(-1) & \longrightarrow & \mathcal{E} & \longrightarrow & \bar{\mathcal{E}} & & \mathcal{N} \\
 & & \downarrow & & & \nearrow & \\
 \mathcal{O}_{\mathcal{E}}(-1) & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{H} & & \\
 & & \downarrow \alpha & \searrow \gamma & \downarrow \beta & & \\
 \mathcal{O}_{\mathcal{Q}}(-1) & \longrightarrow & \mathcal{Q} & \longrightarrow & \mathcal{G} & &
 \end{array} \tag{4.22}$$

O mapa β é induzido por α e está bem definido. Mediante o mergulho natural da nossa variedade bandeira em $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{G} \times \check{\mathbb{P}}^3$, o fibrado \mathcal{G} nada mais é que a restrição de $\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)$.

Seja \mathcal{N} o núcleo de β . Na fibra sobre um ponto $(l, \bar{h}_p, h) \in \mathbb{P}(\pi^*\mathcal{E})$, temos que \mathcal{H} é o espaço das formas lineares no plano h e β pode ser pensado como o mapa de avaliação no ponto p . Assim, $\mathbb{P}(\mathcal{N})$ parametriza as retas contidas em h , passando pelo ponto p .

Proposição 4.5.1. *O transformado estrito $\tilde{Y} \subset \mathbb{G}(2)$ do divisor de incidência $Y \subset \mathbb{G} \times \mathbb{G}$ é obtido como uma torre de \mathbb{P}^1 -fibrados*

$$\tilde{Y} = \mathbb{P}(\mathcal{N}) \rightarrow \mathbb{P}(\pi^*\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathbb{G}.$$

Temos $\dim \tilde{Y} = 7$ e podemos escrever

$$\tilde{Y} = \{(l, \bar{h}_p, h, l') \in \mathbb{G} \times \mathbb{P}(\mathcal{Q}_l) \times \mathbb{P}(\mathcal{E}_l) \times \mathbb{G}; p \in l \subset h \supset l' \ni p\}.$$

O divisor excepcional $\tilde{Y} \cap E_{\Delta}$ corresponde à seção determinada pela escolha $l' = l$.

Sobre \tilde{Y} , o fibrado \mathcal{N} admite os dois subfibrados em retas, $\mathcal{O}_{\mathcal{N}}(-1)$ e $\bar{\mathcal{E}}$ (cf. 4.22). As fibras sobre $(l, \bar{h}_p, h, l') \in \tilde{Y}$ são respectivamente $\bar{l}' = l'/\langle h \rangle$, $\bar{l} = l/\langle h \rangle$, com o abuso costumeiro de identificar a reta l com o espaço bidimensional de suas equações em \mathbb{P}^3 . As imagens na fibra, $\mathcal{F}/\langle h \rangle$ de \mathcal{H} são as equações dessas retas no plano h passando pelo ponto p . A imagem do produto tensorial

$$\mathcal{L} := \mathcal{O}_{\mathcal{N}}(-1) \otimes \bar{\mathcal{E}} \longrightarrow S_2\mathcal{N} \longrightarrow S_2\mathcal{H}$$

fornece equações para o par de retas $l \cup l' \subset h$. Tomando imagem inversa pela sobrejeção $S_2\mathcal{F} \longrightarrow S_2\mathcal{H}$, obtemos o diagrama de sequências exatas

$$\begin{array}{ccccc}
 \mathcal{O}_{\mathcal{E}}(-1) \otimes \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{A} & \longrightarrow & \mathcal{L} \\
 \parallel & & \downarrow & & \downarrow \\
 \mathcal{O}_{\mathcal{E}}(-1) \otimes \mathcal{F} & \longrightarrow & S_2\mathcal{F} & \longrightarrow & S_2\mathcal{H}
 \end{array}$$

que define o fibrado \mathcal{A} de posto 5. A fibra de \mathcal{A} sobre um ponto típico de \tilde{Y} é o espaço de formas quadráticas $h\mathcal{F} + l' \cdot l$, equações (em \mathbb{P}^3) da cônica redutível em questão.

A imagem, \mathcal{G}_4^2 , de $\mathcal{A} \otimes S_2\mathcal{F} \rightarrow S_4\mathcal{F}$ é o fibrado de formas de grau 4 que contêm um par de retas incidentes, o posto de \mathcal{G}_4^2 é $26 = 35 - (2 \cdot 4 + 1)$. Estudemos o diagrama

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}(-1) \otimes \mathcal{F} \otimes S_2\mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{A} \otimes S_2\mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{L} \otimes S_2\mathcal{F} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_{\mathcal{E}}(-1) \otimes S_3\mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{G}_4^2 & \longrightarrow & \overline{\mathcal{G}_4^2}. \end{array} \quad (4.23)$$

onde a 1ª linha provém do diagrama anterior. Temos a sequencia exata

$$\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{E}}(-1) \otimes \mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{L} \otimes S_2\mathcal{F} \longrightarrow \overline{\mathcal{G}_4^2}$$

que permite calcular classes de Chern de $\overline{\mathcal{G}_4^2}$ e de \mathcal{G}_4^2 .

Finalmente, denotando por \mathbb{Y}_4^2 a imagem de $\mathbb{P}(\mathcal{G}_4^2) \subset \tilde{Y} \times \mathbb{P}^{34}$ pela projeção no segundo fator, temos $\dim \mathbb{Y}_4^2 = 32$, com $\mathbb{Y}_4^2 \subset \mathbb{D}$ e além disso, usando a fórmula de projeção obtemos

$$\text{Grau}(\mathbb{Y}_4^2) = \frac{1}{2} \int_{\tilde{Y}} s_7(\mathcal{G}_4^2) \cap [\tilde{Y}].$$

O cálculo efetivo é feito expressando $s_7(\mathcal{G}_4^2)$ em termos das classes características dos fibrados naturais de \tilde{Y} e “empurrando para baixo” ao longo da torre de fibrado que define \tilde{Y} . Explicitamente, temos

$$\begin{aligned} s(\mathcal{G}_4^2) &= s(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(-1) \otimes S_3\mathcal{F}) \cdot s(\overline{\mathcal{G}_4^2}) \\ &= s(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(-1) \otimes S_3\mathcal{F}) \cdot s(\mathcal{L} \otimes S_2\mathcal{F}) \cdot c(\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{E}}(-1) \otimes \mathcal{F}) \\ &= (1 - h_1)^{-20} \cdot (1 + c_1(\overline{\mathcal{E}}) - H)^{-10} \cdot (1 + c_1(\mathcal{E}) - H)^4, \end{aligned}$$

onde $h_1 = c_1(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(1))$, $H = c_1(\mathcal{O}_{\mathcal{N}}(1))$ e do diagrama 4.22, p. 97, $c_1(\overline{\mathcal{E}}) = c_1(\mathcal{E}) + h_1$.

Podemos escrever

$$s(\mathcal{G}_4^2) = (1 + h_1 + h_1^2 + \dots)^{20} \cdot (1 + H - c_1(\overline{\mathcal{E}}) + (H - c_1(\overline{\mathcal{E}}))^2 + \dots)^{10} \cdot (1 + c_1(\mathcal{E}) - H)^4.$$

Daí, observando que

$$s(\mathcal{E}) = c(\mathcal{Q}) = 1 + c_1(\mathcal{Q}) + c_2(\mathcal{Q})$$

vem $s_i(\mathcal{E}) = 0, \forall i \geq 3$.

Assim, vemos que a expansão no primeiro fator de $s(\mathcal{G}_4^2)$ deve parar em h_1^3 , pois as potências superiores a essa se anularão via imagem direta (definição de classe de Segre).

A estratégia agora é olhar $s(\mathcal{G}_4^2)$ como um polinômio em H e usar a definição de classe de Segre para calcular a imagem direta em $\mathbb{P}(\mathcal{Q}) \times_{\mathbb{G}} \mathbb{P}(\mathcal{E})$. Para isso, vamos determinar a classe de Segre de \mathcal{N} . Pelo diagrama 4.22, segue que

$$\begin{aligned}
s(\mathcal{N}) &= s(\overline{\mathcal{E}}) \cdot s(\mathcal{O}_{\mathcal{Q}}(-1)) \\
&= s(\mathcal{E}) \cdot c(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(-1)) \cdot s(\mathcal{O}_{\mathcal{Q}}(-1)) \\
&= c(\mathcal{Q}) \cdot c(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(-1)) \cdot s(\mathcal{O}_{\mathcal{Q}}(-1)) \\
&= c(\mathcal{G}) \cdot c(\mathcal{O}_{\mathcal{E}}(-1)) \\
&= (1 - c_1(\mathcal{E}) + h_2) \cdot (1 - h_1) \\
&= 1 + h_2 - c_1(\mathcal{E}) - h_1 + h_1 c_1(\mathcal{E}) - h_1 h_2,
\end{aligned}$$

onde $h_2 = c_1(\mathcal{O}_{\mathcal{Q}}(1))$. Portanto, $s_i(\mathcal{N}) = 0, \forall i \geq 3$. Em particular, vemos que em $s(\mathcal{G}_4^2)$ basta considerarmos as potências de H até ordem três.

Por outro lado, o coeficiente de H (em $s_7(\mathcal{G}_4^2)$) é um polinômio de grau seis em h_1 e $c_1(\mathcal{E})$, portanto esse coeficiente se reduzirá, via imagem direta, a um polinômio de grau cinco em $c_1(\mathcal{E})$ e $c_2(\mathcal{E})$ correspondendo assim a um ciclo nulo em \mathbb{G} . Desse modo, apenas os coeficientes de H^2 e H^3 são relevantes. Denotemos esses coeficientes, respectivamente, por A_2 e A_3 . Enfatizamos que A_i é homogêneo de grau $7 - i$ nas variáveis h_1 e $c_1(\mathcal{E})$. Dessa forma,

$$s_7(\mathcal{G}_4^2) = A_2 H^2 + A_3 H^3.$$

Calculando a imagem direta em $\mathbb{P}(\mathcal{Q}) \times_{\mathbb{G}} \mathbb{P}(\mathcal{E})$, obtemos

$$\begin{aligned}
s_7(\mathcal{G}_4^2) &\mapsto A_2(h_2 - c_1(\mathcal{E}) - h_1) + A_3(h_1 c_1(\mathcal{E}) - h_1 h_2) \\
&\mapsto -A_2(c_1(\mathcal{E}) + h_1) + A_3 h_1 c_1(\mathcal{E}) + (A_2 - h_1 A_3) h_2.
\end{aligned}$$

E daí, empurrando para $\mathbb{P}(\mathcal{E})$, ficamos com

$$s_7(\mathcal{G}_4^2) \mapsto A_2 - h_1 A_3.$$

O cálculo efetivo de A_2 e A_3 é computacionalmente simples. Com ajuda do MAPLE, obtemos

$$A_2 = -40800h_1^2 c_1(\mathcal{E})^3 + 42840h_1^3 c_1(\mathcal{E})^2 \text{ e } A_3 = 27720c_1(\mathcal{E})^4 + 40800h_1^2 c_1(\mathcal{E})^2 - 28560c_1(\mathcal{E})h_1^3.$$

Assim, calculando a imagem direta para \mathbb{G} , temos

$$\begin{aligned} s_7(\mathcal{G}_4^2) &\mapsto -27720h_1c_1(\mathcal{E})^4 - 40800h_1^2c_1(\mathcal{E})^3 + 2040h_1^3c_1(\mathcal{E})^2 \\ &\mapsto -27720c_1(\mathcal{E})^4 - 40800(-c_1(\mathcal{E}))c_1(\mathcal{E})^3 + 2040(c_1(\mathcal{E})^2 - c_2(\mathcal{E}))c_1(\mathcal{E})^2 \\ &\mapsto 15120c_1(\mathcal{E})^4 - 2040c_1(\mathcal{E})^2c_2(\mathcal{E}). \end{aligned}$$

Portanto,

$$\text{Grau}(\mathbb{Y}_4^2) = \frac{1}{2} \int_{\mathbb{G}} (15120c_1(\mathcal{E})^4 - 2040c_1(\mathcal{E})^2c_2(\mathcal{E})) \cap [\mathbb{G}] = \frac{1}{2}(15120 \cdot 2 - 2040) = \mathbf{14100}.$$

Com isso, pagamos a nossa promessa de identificar o motivo do excesso em 4.20, p. 95.

4.5.3 superfícies contendo duas retas incidentes

Aproveitando a motivação e os cálculos desenvolvidos na seção anterior, observamos que com pouquíssimo esforço adicional podemos determinar o grau da variedade $\mathbb{Y}_d^2 \subset \mathbb{P}^N$, que parametriza as superfícies de grau d em \mathbb{P}^3 que contêm duas retas incidentes.

De fato, as mudanças se dão por conta do diagrama 4.23, p. 98, que passa a ser

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_{\mathcal{E}}(-1) \otimes \mathcal{F} \otimes S_{d-2}\mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{A} \otimes S_{d-2}\mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{L} \otimes S_{d-2}\mathcal{F} \\ \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\ \mathcal{O}_{\mathcal{E}}(-1) \otimes S_{d-1}\mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{G}_d^2 & \longrightarrow & \overline{\mathcal{G}}_d^2. \end{array} \quad (4.24)$$

De modo análogo ao que tínhamos, o fibrado $\overline{\mathcal{G}}_d^2$ aparece como co-núcleo em

$$\mathcal{L} \otimes \mathcal{O}_{\mathcal{E}}(-1) \otimes S_{d-3}\mathcal{F} \longrightarrow \mathcal{L} \otimes S_{d-2}\mathcal{F} \longrightarrow \overline{\mathcal{G}}_d^2.$$

Note que

$$\binom{d+2}{3} + \binom{d}{2} = \binom{d+3}{3} - (2d+1).$$

Logo, \mathcal{G}_d^2 tem o posto esperado, haja vista que o polinômio de Hilbert da união de duas retas incidentes é $2t+1$.

Temos que \mathbb{Y}_d^2 é a projeção de $\mathbb{P}(\mathcal{G}_d^2) \subset \tilde{Y} \times \mathbb{P}^N$. Daí,

$$\text{Grau}(\mathbb{Y}_d^2) = \frac{1}{2} \int_{\tilde{Y}} s_7(\mathcal{G}_d^2) \cap [\tilde{Y}].$$

Neste caso temos,

$$s(\mathcal{G}_d^2) = (1+h_1+h_1^2+h_1^3)^{N(d-1,3)} \cdot (1+H-c_1(\overline{\mathcal{E}})+(H-c_1(\overline{\mathcal{E}}))^2+\dots)^{N(d-2,3)} \cdot (1+c_1(\mathcal{E})-H)^{N(d-3,3)}$$

Todas as observações feita para o caso $d = 4$, continuam válidas e o problema se resume essencialmente a calcular os coeficientes de H^2 e H^3 em $s_7(\mathcal{G}_d^2)$. Esse é um cálculo simples e seguindo o mesmo raciocínio usando para $d = 4$, obtemos

$$\begin{aligned} \text{Grau}(\mathbb{Y}_d^2) = \frac{1}{2304} \binom{d}{3} (3d^{11} - 9d^{10} + 14d^9 + 122d^8 - 817d^7 + 2859d^6 - 7216d^5 + 12612d^4 \\ - 17040d^3 + 16960d^2 - 11520d + 11520). \end{aligned} \quad (4.25)$$

Observe que $\text{Grau}(\mathbb{Y}_d^2)$ é um polinômio de grau 14 na variável d .

Para $d = 3$, esse polinômio fornece o valor **135**. Esse resultado é compatível com a combinatória envolvendo os pares de retas incidentes em uma superfície cúbica lisa. De fato, em uma cúbica lisa podemos escolher uma reta de 27 modos. Escolhida uma dessas, sabemos que existem 10 outras retas (dentre as 26 restantes) incidentes a ela (veja teo.2.1.4 de [27]). Portanto, podemos formar $270 = 27 \cdot 10$ pares ordenados e $135 = 270/2$ pares não ordenados de retas incidentes, contidas em uma superfície lisa de grau 3 em \mathbb{P}^3 . O número 270 trata-se do grau da projeção $\mathbb{P}(\mathcal{G}_3^2) \rightarrow \mathbb{P}^{19}$.

4.6 O grau de \mathbb{X}_d^2

Nesta seção vamos mostrar que o grau de \mathbb{X}_d^2 é um polinômio de grau 16 na variável d . Vamos ver que esse polinômio pode ser obtido por interpolação dos resultados encontrados “caso a caso” com a fórmula de Bott. Começamos com um pouco de heurística e depois (veja subseção 4.6.1) usamos o teorema de Grothendieck-Riemann-Roch para um argumento preciso que valida a interpolação.

Inicialmente observamos que, pelo menos dimensionalmente, faz sentido pensar em \mathbb{X}_d^2 como interseção própria de duas cópias de \mathbb{X}_d^1 . De fato, a dimensão esperada para tal interseção, de acordo com a equação 4.18, seria

$$2 \dim \mathbb{X}_d^1 - N(d, 3) + 1 = N(d, 3) - 2d + 4 + 1 = N(d, 3) - 2d + 5 = \dim \mathbb{X}_d^2.$$

Por outro lado, sendo $D(p_2) \subset \mathbb{P}(\mathcal{F}_d^1)$ o lugar dos pontos duplos para a projeção p_2 (veja 4.17), temos que a codimensão esperada para $D(p_2)$ é $d - 3$. Essa também é a codimensão de \mathbb{X}_d^2 em \mathbb{X}_d^1 .

Além disso, temos uma classe $\mathbb{D}(p_2)$ bem definida, em codimensão $d - 3$, no grupo de Chow de $D(p_2)$. Essa classe coincidirá com a classe fundamental de $D(p_2)$ se a codimensão

esperada para $D(p_2)$ for efetiva. Aqui, não faremos a verificação de que $D(p_2)$ tem a dimensão esperada e essa é uma das razões para dizermos que essa parte inicial é heurística.

Em todo caso, podemos fazer algumas contas com $\mathbb{D}(p_2)$ para termos uma idéia do que aconteceria no “melhor dos mundos”.

Mantendo as notações da seção anterior, a fórmula de pontos duplos nos ensina que

$$\mathbb{D}(p_2) = (f^*f_*[\mathbb{X}] - (c(f^*T_{\mathbb{Y}}) \cdot s(T_{\mathbb{X}}))_{d-3}) \cap [\mathbb{X}].$$

Vamos calcular essa classe explicitamente. As contas são basicamente as mesmas que lá fizemos.

A primeira parcela $f^*f_*[\mathbb{X}]$, corresponde à autointerseção de \mathbb{X} (moralmente \mathbb{X}_d^2) e se escreve na forma

$$f^*f_*[\mathbb{X}] = \text{Grau}(\mathbb{X}_d^1) \cdot H^{d-3},$$

com $H = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{X}}(1))$.

Quanto à segunda parcela, precisamos calcular $c(f^*T_{\mathbb{Y}})$ e $s(T_{\mathbb{X}})$.

Bem, temos que $T_{\mathbb{Y}}$ se encaixa na sequência exata

$$\mathcal{O}_{\mathbb{Y}} \twoheadrightarrow \mathcal{O}_{\mathbb{X}}(1) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{Y}}^{N(d,3)} \twoheadrightarrow T_{\mathbb{Y}}.$$

Assim, como na seção anterior, denotamos $h = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{Y}}(1))$ e segue que $H = f^*h$. Portanto,

$$c(f^*T_{\mathbb{Y}}) = (1 + H)^{N(d,3)}.$$

Para $T_{\mathbb{X}}$, usamos o fato que \mathbb{X} é um fibrado sobre \mathbb{G} de onde segue que temos uma sequência exata

$$T_{\mathbb{X}/\mathbb{G}} \twoheadrightarrow T_{\mathbb{X}} \twoheadrightarrow T_{\mathbb{G}}.$$

Logo, $s(T_{\mathbb{X}}) = s(T_{\mathbb{X}/\mathbb{G}}) \cdot s(T_{\mathbb{G}})$.

Por outro lado, como na seção anterior, (cf. 4.19, p. 95)

$$T_{\mathbb{G}} = \mathcal{Q} \otimes \mathcal{E}^{\vee} \text{ e } T_{\mathbb{X}/\mathbb{G}} = \mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{X}}(1).$$

Daí segue que

$$\begin{aligned} s(T_{\mathbb{G}}) &= s(\mathcal{Q} \otimes \mathcal{E}^{\vee}), \\ s(T_{\mathbb{X}/\mathbb{G}}) &= s(\mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{X}}(1)) = s(\mathcal{F}_d^1 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{X}}(1)). \end{aligned}$$

A classe de Chern $s(\mathcal{Q} \otimes \mathcal{E}^\vee)$ se escreve em termos das classes de Chern de \mathcal{Q} . Expliciteamente, fazendo $c_i = c_i(\mathcal{Q})$, temos

$$s(T_{\mathbb{G}}) = 1 - 4c_1 + 9c_1^2 - 16c_1^3 + 4c_1c_2 + 25c_1^4 - 16c_1^2c_2 - 6c_2^2.$$

Para facilitar a escrita, vamos denotar por d_i a parte homogênea de grau i em $s(T_{\mathbb{G}})$.

Para calcular $s(\mathcal{F}_d^1 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{X}}(1))$, usamos a sequência

$$\mathcal{F}_d^1 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{X}}(1) \twoheadrightarrow S_d \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{X}}(1) \twoheadrightarrow S_d \mathcal{Q} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{X}}(1),$$

de onde concluímos que

$$\begin{aligned} s(T_{\mathbb{X}/\mathbb{G}}) &= s(\mathcal{F}_d^1 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{X}}(1)) \\ &= s(S_d \mathcal{F} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{X}}(1)) \cdot c(S_d \mathcal{Q} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{X}}(1)) \\ &= c(S_d \mathcal{Q} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{X}}(1)) \cdot (1 + H)^{-N(d,3)}. \end{aligned}$$

Portanto, temos o seguinte ciclo (classe módulo equivalência racional)

$$\mathbb{D}(p_2) = (\text{Grau}(\mathbb{X}_d^1) \cdot H^{d-3} - (c(S_d \mathcal{Q} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{X}}(1)) \cdot s(T_{\mathbb{G}}))_{d-3}) \cap [\mathbb{X}].$$

A partir disso, fazendo $\kappa = N(d, 3) - 2d + 5$ e observando que

$$\kappa + d - 3 = N(d, 3) - d + 2 = \dim \mathbb{X},$$

obtemos a classe de um zero-ciclo

$$\mathbb{D}_0 = \mathbb{D}(p_2) \cdot H^\kappa = (\text{Grau}(\mathbb{X}_d^1) \cdot H^{N(d,3)-d+2} - H^\kappa \cdot (c(S_d \mathcal{Q} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{X}}(1)) \cdot s(T_{\mathbb{G}}))_{d-3}) \cap [\mathbb{X}].$$

Vamos calcular a imagem direta desse zero-ciclo no anel de Chow de \mathbb{G} .

Falta calcularmos as classes $\sigma_j = c_j(S_d \mathcal{Q} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{X}}(1))$, com $j = d - 7, \dots, d - 3$. Bem, fazendo $n = \min\{j, 4\}$, temos

$$\sigma_j = \sum_{k=0}^n \binom{d+1-k}{j-k} c_k(S_d \mathcal{Q}) \cdot H^{j-k}.$$

Portanto, se $\pi : \mathbb{X} \rightarrow \mathbb{G}$ é o mapa estrutural, segue que

$$\begin{aligned} \pi_*(\mathbb{D}_0) &= \pi_*(\text{Grau}(\mathbb{X}_d^1) \cdot H^{N(d,3)-d+2} - \sum_{l=0}^4 \sum_{k=0}^n d_l \binom{d+1-k}{l+4} c_k(S_d \mathcal{Q}) \cdot H^{N(d,3)-d+2-l-k}) \cap [\mathbb{G}]. \\ &= (\text{Grau}(\mathbb{X}_d^1) \cdot s_4(\mathcal{F}_d^1) - \sum_{l=0}^4 \sum_{k=0}^{n-l} \binom{d+1-k}{l+4} d_l c_k(S_d \mathcal{Q}) \cdot s_{4-l-k}(\mathcal{F}_d^1)) \cap [\mathbb{G}]. \\ &= (\text{Grau}(\mathbb{X}_d^1) \cdot c_4(S_d \mathcal{Q}) - \sum_{l=0}^4 \sum_{k=0}^{n-l} \binom{d+1-k}{l+4} d_l c_k(S_d \mathcal{Q}) \cdot c_{4-l-k}(S_d \mathcal{Q})) \cap [\mathbb{G}] \\ &= (a(d)c_1(\mathcal{Q})^4 + b(d)c_1(\mathcal{Q})^2c_2(\mathcal{Q}) + c(d)c_2(\mathcal{Q})^2) \cap [\mathbb{G}]. \end{aligned}$$

Os coeficientes $a(d)$, $b(d)$ e $c(d)$ são polinômios em d , tais que o primeiro tem grau 16 e os demais têm grau inferior. Com efeito, sabemos $\text{Grau}(\mathbb{X}_d^1)$ é um polinômio de grau 8 (veja p.76, eq.4.2). Além disso, das expressões obtidas em 4.3 (p.78) sabemos que

$$c_4(S_d\mathcal{Q}) = a_1(d)c_1(\mathcal{Q})^4 + a_2(d)c(\mathcal{Q})^2c_2(\mathcal{Q}) + a_3(d)c_2(\mathcal{Q})^2,$$

onde $a_1(d)$ tem grau 8 e os outros dois coeficientes tem grau inferior. Portanto, a primeira parte “ $\text{Grau}(\mathbb{X}_d^1) \cdot c_4(S_d\mathcal{Q})$ ” contribui com grau 16 para $a(d)$.

Por outro lado, os coeficientes binomiais que aparecem em cada parcela do somatório têm grau $l + 4$. Pelas expressões obtidas na página 78, temos que $c_k(S_d\mathcal{Q})$ tem grau $2k$ e $c_{4-l-k}(S_d\mathcal{Q})$ tem grau $8 - 2l - 2k$. Portanto, a segunda parte contribui com parcelas cujo grau é $12 - l$, ou seja, no máximo grau 12. Assim, a segunda parte não altera o grau de $a(d)$.

O grau do zero-ciclo $\pi_*\mathbb{D}_0$, é dado pelo seguinte polinômio de grau 16.

$$P_{\mathbb{D}_0}(d) = 2a(d) + b(d) + c(d).$$

Objetivamente,

$$\begin{aligned} P_{\mathbb{D}_0}(d) = & \frac{1}{69120} \binom{d+1}{4} (45d^{12} + 90d^{11} + 285d^{10} + 210d^9 - 5965d^8 + 50902d^7 - 254353d^6 \\ & + 782806d^5 - 1798060d^4 + 3057448d^3 - 3828672d^2 + 3654144d - 2695680). \end{aligned}$$

Esse polinômio (dividido por 2), mesmo para $d = 4$ (caso em que verificamos que as dimensões esperadas são efetivas), como vimos não fornece o grau de \mathbb{X}_d^2 , precisamos de correções. Entretanto, também vimos que no caso $d = 4$ devemos descontar apenas a contribuição proveniente da variedade que parametriza as superfícies quárticas que contêm duas retas incidentes, *sem* estrutura imersa no ponto de interseção. Assim, o melhor que poderia acontecer seria que para d arbitrário a correção necessária também fosse apenas essa. Ora, na seção anterior encontramos que $\text{Grau}(\mathbb{Y}_d^2)$, é um polinômio de grau 14 (veja eq.4.25, p. 101).

Portanto, um candidato plausível para $\text{Grau}(\mathbb{X}_d^2)$ seria:

$$\begin{aligned} \frac{P_{\mathbb{D}_0}(d)}{2} - \text{Grau}(\mathbb{Y}_d^2) = & \frac{1}{552960} \binom{d}{3} (45d^{13} + 135d^{12} - 345d^{11} + 2655d^{10} - 9115d^9 + 15657d^8 - 7371d^7 \\ & - 157707d^6 + 716586d^5 - 1767492d^4 + 3318376d^3 - 4244928d^2 + 3723264d - 5460480). \end{aligned}$$

Observamos que esse polinômio interpola os valores fornecidos pela fórmula de Bott para todos os valores que de d que testamos ($d \leq 30$). Logo, se por algum argumento conseguirmos mostrar que $\text{Grau}(\mathbb{X}_d^2)$ é um polinômio em d de grau \leq trinta, então $\text{Grau}(\mathbb{X}_d^2)$ será de fato igual ao candidato acima.

Em fim, na subseção seguinte vamos usar o teorema de Grothendieck-Riemann-Roch para mostrar que $\text{Grau}(\mathbb{X}_d^2)$ é um polinômio em d de grau no máximo 24. Portanto, podemos apresentar o resultado:

Teorema 4.6.1. *O grau da variedade que parametriza as superfícies de grau $d \geq 4$ em \mathbb{P}^3 que contêm duas retas disjuntas (genericamente) é dado pelo polinômio*

$$\text{Grau}(\mathbb{X}_d^2) = \frac{1}{552960} \binom{d}{3} (45d^{13} + 135d^{12} - 345d^{11} + 2655d^{10} - 9115d^9 + 15657d^8 - 7371d^7 - 157707d^6 + 716586d^5 - 1767492d^4 + 3318376d^3 - 4244928d^2 + 3723264d - 5460480).$$

Observação 4.6.0.1. Note que substituindo $d = 3$, no polinômio acima obtemos 216. Esse número representa não o grau da imagem e sim a metade do grau do mapa de projeção na segunda coordenada. Com efeito, a projeção no segundo fator é dominante pois toda cúbica lisa contém pares de retas reversas. O total de pares (ordenados) de retas reversas contidas em um cúbica lisa é exatamente $432 = 2 \cdot 216$, calculado do seguinte modo. Escolhemos uma reta dentre as 27 possíveis. Feita essa escolha, das outras 26 retas existem exatamente 16 que são disjuntas da reta escolhida (veja teo.2.1.4 de [27]). Assim, o cálculo segue pelo princípio fundamental da contagem $27 \cdot 16 = 432$.

4.6.1 $\text{Grau}(\mathbb{X}_d^2)$ é polinomial

Finalmente, vamos pagar nossa dívida quanto ao caráter polinomial de $\text{Grau}(\mathbb{X}_d^2)$ em d , bem como a respeito de uma limitação para o grau. Começamos considerando o subesquema universal $\mathbb{L}(2) \subset \mathbb{G}(2) \times \mathbb{P}^3$, isto é, o espaço total da família de subesquemas de \mathbb{P}^3 parametrizada por $\mathbb{G}(2)$. Consideramos também $\mathbb{F} \subset \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^N$, com $N = N(d, 3) - 1$, a superfície universal. Suporemos $d \geq 2$, lembrando que a regularidade da família vale justo 2. Isto nos diz em particular que para cada $L \in \mathbb{G}(2)$, temos $H^1(\mathcal{O}_L(2)) = 0$.

Em $\mathbb{X} = \mathbb{G}(2) \times \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^N$ podemos considerar o diagrama de feixes

$$\begin{array}{ccccc} & & \mathcal{I}_2 \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\mathbb{F}) & & \\ & & \downarrow & & \\ \mathcal{O}_{\mathbb{X}} & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\mathbb{F}) & \longrightarrow & \mathcal{O}_{\mathbb{F}}(\mathbb{F}) \\ & \searrow \alpha & \downarrow & & \\ & & \mathcal{O}_{\mathbb{L}(2)} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\mathbb{F}) & & \end{array}$$

onde \mathcal{I}_2 denota o feixe de ideais que define $\mathbb{L}(2)$ como subesquema fechado. O feixe de ideais de \mathbb{F} é $\mathcal{O}_{\mathbb{X}}(-\mathbb{F}) = \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(-d) \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(-1)$. Sejam $\mathcal{R} = \mathcal{O}_{\mathbb{L}(2)} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\mathbb{F})$ e

$$\pi : \underbrace{\mathbb{X}}_{\mathbb{P}^3 \times \mathbb{Y}} \rightarrow \mathbb{G}(2) \times \mathbb{P}^N =: \mathbb{Y}.$$

a projeção. Temos que o feixe \mathcal{R} é π -plano e a formação de $\pi_*\mathcal{R}$ comuta com mudança de base, dado que $R^1\pi_*\mathcal{O}_{\mathbb{L}(2)}(d) = 0$, ($d \geq 2$) por conta da regularidade aludida. Assim, a seção α satisfaz as condições de [2, (2.3)]. Segue que a adjunta da seção α se anula na fibra sobre $(l_{12}, f) \in \mathbb{Y}$ se e somente se f representa uma superfície que contém o subesquema l_{12} . Como a dimensão do esquema de zeros é a correta, o ciclo que nos interessa corresponde à classe de Chern de ordem 8 ($= \dim \mathbb{G}(2)$) de $\pi_*\mathcal{R}$.

A idéia é estimar o grau em d para $c_8(\pi_*\mathcal{R})$, sem a necessidade de calcular a imagem direta.

Para isso, lembramos o teorema de Grothendieck-Riemann-Roch, teorema 15.2 em [10], o qual garante que no caso presente, morfismo próprio de variedades não singulares, vale (veja o exemplo 15.2.8 em [10])

$$\text{ch}(\pi_*(\mathcal{R})) = \pi_*(\text{ch}(\mathcal{R}) \cdot \text{td}(T_\pi)) = \pi_*(\text{ch}(\mathcal{R}) \cdot \text{td}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)^{\oplus 4})).$$

Aqui, ch denota o caracter de Chern de um feixe coerente e td indica a classe de Todd. Sendo $h = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))$, temos

$$\text{td}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1)^{\oplus 4}) = 1 + 2ht + \frac{11}{6}t^2h^2 + t^3h^3.$$

Por outro lado, lembramos que feixes coerentes sobre variedades projetivas lisas admitem resolução finita por feixes localmente livres. Assim, usando uma resolução de $\mathcal{R} = \mathcal{O}_{\mathbb{L}(2)} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{X}}(\mathbb{F})$ conseguimos expressar tudo como combinação de termos da forma $\mathcal{G} \otimes \mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(dh)$, onde \mathcal{G} provém de \mathbb{Y} . Ademais, usando o fato que o caracter de Chern é um homomorfismo de anéis, podemos escrever

$$\text{ch}(\mathcal{R}) \cdot \text{td}(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^3}(1))^4 = \sum y_i h^i,$$

onde os coeficientes y_i são provenientes de \mathbb{Y} e como polinômios em d têm grau menor ou igual a i . Desse modo, no cálculo da imagem direta só resta o coeficiente de h^3 , que é y_3 e este se escreve como um polinômio em t, d (grau em d menor ou igual a 3) e em classes de \mathbb{Y} . Assim,

$$\text{ch}(\pi_*(\mathcal{R})) = y_3 = k_0 + k_1t + k_2t^2 + \dots$$

Para terminar, basta lembrar que a classe de Chern de ordem 8 de $\pi_*(\mathcal{R})$ se escreve como um polinômio nos coeficientes k_i , com grau total igual a 8 e k_i considerado com peso igual a i . Desse modo podemos concluir que como polinômio em d obteremos grau menor ou igual a $8 \cdot 3 = 24$.

Capítulo 5

Superfícies em \mathbb{P}^3 contendo três retas

5.1 Introdução

A experiência adquirida no capítulo anterior nos diz que para estudar a variedade das superfícies de grau d em \mathbb{P}^3 contendo três retas em posição geral, devemos inicialmente construir um espaço de parâmetros para uma família plana de subesquemas de \mathbb{P}^3 cujo membro genérico seja a união de três retas disjuntas 2 a 2. Tendo em vista que o polinômio de Hilbert associado ao ideal da união de três retas em posição geral é $3t + 3$, vemos que esse deve ser o polinômio de Hilbert de qualquer membro da pretendida família. O ideal de um membro qualquer dessa família deve conter oito cúbicas independentes. Portanto, seria razoável esperar que o ideal de um tal membro arbitrário pudesse ser gerado por cúbicas. No entanto, veremos que na nossa construção, para obtermos uma família plana, precisaremos de quárticas. Intuitivamente, isso significa que existem limites planos da união de três retas em posição geral, cujo ideal não pode ser gerado só por cúbicas.

5.2 Estudo local e primeira explosão

Inicialmente, considere $\mathbb{G}(3)$ como um esquema sobre \mathbb{G} , obtido pela explosão de $\mathbb{G}(2) \times_{\mathbb{G}} \mathbb{G}(2)$ ao longo da diagonal relativa. Lembramos que $\mathbb{G}(2)$ é obtido pela explosão de $\mathbb{G} \times \mathbb{G}$ ao longo da diagonal (veja seção 4.5, p. 79).

Se \mathbb{G}'' denota a fibra de $\mathbb{G}(3)$ sobre $l_0 \in \mathbb{G}$, vemos que \mathbb{G}'' se identifica com a explosão de $\mathbb{G}' \times \mathbb{G}'$ ao longo da diagonal $\Delta' \subset \mathbb{G}' \times \mathbb{G}'$.

Agora vamos fazer aparecer oito cúbicas e para isso usaremos o fibrado $\mathcal{F}_2^2(l_0)$ que construímos no capítulo anterior (4.3.2, p. 87). Com efeito, consideremos a variedade $\mathbb{G}' \times \mathbb{G}'$ e sejam p_1 e p_2 as projeções no primeiro e segundo fator, respectivamente. Seja \mathcal{E} o fibrado de posto 2 sobre \mathbb{G}' , obtido como imagem recíproca do subfibrado tautológico de \mathbb{G} . Lembramos que a fibra de \mathcal{E} sobre um ponto de \mathbb{G}' que se aplica em $l \in \mathbb{G}$ nada mais é que o espaço de equações lineares da reta l . Denotemos por \mathcal{E}_i e $\mathcal{F}_{2i}(l_0)$, as imagens recíprocas de \mathcal{E} e $\mathcal{F}_2^2(l_0)$ por meio de p_i , para $i = 1, 2$. A multiplicação induz um mapa de fibrados, com posto genérico igual a 8 e posto mínimo igual a 6

$$\mathcal{E}_1 \otimes \mathcal{F}_{22}(l_0) \oplus \mathcal{E}_2 \otimes \mathcal{F}_{21}(l_0) \rightarrow S_3\mathcal{F}^{l_0}, \quad (5.1)$$

onde $S_3\mathcal{F}^{l_0}$ denota o espaço 16-dimensional das cúbicas contendo l_0 . Este mapa de fibrados induz um mapa racional

$$\psi' : \mathbb{G}' \times \mathbb{G}' \dashrightarrow Gr(8, S_3\mathcal{F}^{l_0}). \quad (5.2)$$

Para cada $(l_0, l_1, l_2) \in \mathbb{G}' \times \mathbb{G}'$, a imagem $\psi'((l_0, l_1, l_2))$ é definida como o subespaço gerado pelas 16 cúbicas provenientes de

$$(\mathcal{E}_1)_{(l_0, l_1, l_2)} \cdot (\mathcal{F}_{22}(l_0))_{(l_0, l_1, l_2)} \quad \text{e} \quad (\mathcal{E}_2)_{(l_0, l_1, l_2)} \cdot (\mathcal{F}_{21}(l_0))_{(l_0, l_1, l_2)},$$

obtidas multiplicando as transformadas das equações de l_i pelas quádricas que definem a estrutura de esquema “correta” em $l_0 \cup l_j$, com $\{i, j\} = \{1, 2\}$.

Usando (*) (veja p.83), vemos que essas cúbicas estão na interseção do ideal de $l_0 \sqcup l_1$, gerado por $(\mathcal{F}_2^2(l_0))_{(l_0, l_1)}$, com o ideal de $l_0 \sqcup l_2$, gerado por $(\mathcal{F}_2^2(l_0))_{(l_0, l_2)}$. Observamos que tal interseção contém no máximo $12 = 20 - (2 \cdot 3 + 2)$ cúbicas independentes, e contém exatamente 8 se, por exemplo, $l_1 \neq l_2$ e não intersectam l_0 . Então vemos que as cúbicas acima genericamente geram o ideal da união dos dois esquemas $l_0 \sqcup l_1$ e $l_0 \sqcup l_2$, que genericamente coincide com a união de três retas disjuntas.

Agora vamos jogar fora a “gordura” presente no sistema de geradores apresentado acima. Com efeito, se escrevermos $(\mathcal{E}_1)_{(l_0, l_1, l_2)} = \langle h_1, h_2 \rangle$ e $(\mathcal{E}_2)_{(l_0, l_1, l_2)} = \langle h_3, h_4 \rangle$, de acordo com (*) vemos que

$$(\mathcal{F}_{21}(l_0))_{(l_0, l_1, l_2)} = \langle x_0 h_1, x_1 h_1, x_1 h_2, Q \rangle,$$

onde $x_0 h_2 - x_1 h_1 = a_1 Q$ e a_1 é uma equação local do divisor excepcional na primeira cópia de \mathbb{G}' . Do mesmo modo, temos

$$(\mathcal{F}_{22}(l_0))_{(l_0, l_1, l_2)} = \langle x_0 h_3, x_1 h_3, x_1 h_4, Q' \rangle,$$

onde $x_0h_4 - x_1h_3 = b_1Q'$, e b_1 é uma equação local do divisor excepcional na segunda cópia de \mathbb{G}' . Com essas notações verificamos que das 16 cúbicas apenas 11 são distintas, a saber:

$$x_0h_1h_3, x_0h_1h_4, x_0h_2h_3, x_1h_1h_3, x_1h_1h_4, x_1h_2h_3, x_1h_2h_4, Qh_3, Qh_4, Q'h_1, Q'h_2$$

Por outro lado, as relações

$$\begin{cases} a_1h_3Q = x_0h_2h_3 - x_1h_1h_3 \\ b_1h_1Q' = x_0h_1h_4 - x_1h_1h_3 \end{cases}$$

dizem-nos que podemos descartar $x_0h_2h_3$ e $x_0h_1h_4$. Além disso, combinando as relações

$$\begin{cases} a_1h_4Q = x_0h_2h_4 - x_1h_1h_4 \\ b_1h_2Q' = x_0h_2h_4 - x_1h_2h_3 \end{cases}$$

vemos que

$$x_1h_2h_3 = a_1h_4Q + x_1h_1h_4 - b_1h_2Q'.$$

Logo, podemos descartar também a cúbica $x_1h_2h_3$. Assim, ficamos apenas com as 8 cúbicas

$$\psi'((l_0, l_1, l_2)) = \langle x_0h_1h_3, x_1h_1h_3, x_1h_1h_4, x_1h_2h_4, Qh_3, Qh_4, Q'h_1, Q'h_2 \rangle. \quad (5.3)$$

Agora vejamos como fica esse sistema de cúbicas em coordenadas locais. Com efeito, sendo a_1, a_2, a_3, a_4 coordenadas locais na primeira cópia de \mathbb{G}' e b_1, b_2, b_3, b_4 na segunda cópia, teremos

$$\begin{cases} h_1 = x_0 + a_1(a_2x_3 + x_2) \\ h_2 = x_1 + a_1(a_4x_3 + a_3x_2) \\ h_3 = x_0 + b_1(b_2x_3 + x_2) \\ h_4 = x_1 + b_1(b_4x_3 + b_3x_2) \end{cases}$$

Logo, expandindo as cúbicas que geram $\psi'((l_0, l_1, l_2))$ obtemos

$$\begin{cases} x_0h_1h_3 = x_0(x_0 + a_1(a_2x_3 + x_2))(x_0 + b_1(b_2x_3 + x_2)) = x_0^3 + \dots \\ x_1h_1h_3 = x_1(x_0 + a_1(a_2x_3 + x_2))(x_0 + b_1(b_2x_3 + x_2)) = x_0^2x_1 + \dots \\ x_1h_1h_4 = x_1(x_0 + a_1(a_2x_3 + x_2))(x_1 + b_1(b_4x_3 + b_3x_2)) = x_0x_1^2 + \dots \\ x_1h_2h_4 = x_1(x_1 + a_1(a_4x_3 + a_3x_2))(x_1 + b_1(b_4x_3 + b_3x_2)) = x_1^3 + \dots \\ Qh_3 = (x_0(a_4x_3 + a_3x_2) - x_1(a_2x_3 + x_2))(x_0 + b_1(b_2x_3 + x_2)) = -x_0x_1x_2 + \dots \\ Qh_4 = (x_0(a_4x_3 + a_3x_2) - x_1(a_2x_3 + x_2))(x_1 + b_1(b_4x_3 + b_3x_2)) = -x_1^2x_2 + \dots \\ Q'h_1 = (x_0(b_4x_3 + b_3x_2) - x_1(b_2x_3 + x_2))(x_0 + a_1(a_2x_3 + x_2)) = \dots \\ Q'h_2 = (x_0(b_4x_3 + b_3x_2) - x_1(b_2x_3 + x_2))(x_1 + a_1(a_4x_3 + a_3x_2)) = \dots \end{cases}$$

Expandindo $Q'h_1$ e indicando por \sim a redução com respeito ao espaço gerado pelas anteriores, vemos que

$$\begin{aligned} Q'h_1 &\sim (b_3 - a_3)x_0^2x_2 + (b_4 - a_4)x_0^2x_3 + (a_2 - b_2)x_0x_1x_3 + (b_3a_1 - b_1a_3)x_0x_2^2 + \\ &+ (a_1a_2b_3 - b_1b_2a_3 + b_4a_1 - b_1a_4)x_0x_2x_3 + (a_1a_2b_4 - b_1b_2a_4)x_0x_3^2 + \\ &+ (b_1 - a_1)x_1x_2^2 + (a_2 + b_2)(b_1 - a_1)x_1x_2x_3 + a_2b_2(b_1 - a_1)x_1x_3^2. \end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned} Q'h_2 &\sim a_3(b_3 - a_3)x_0^2x_2 + a_4(b_3 - a_3)x_0^2x_3 + (a_2 - b_2)x_1^2x_3 + (b_4 - a_4 + a_2(a_3 - b_3))x_0x_1x_3 \\ &+ (a_4(b_3a_1 - b_1a_3) + b_4a_3(a_1 - b_1) + b_1b_2a_3(b_3 - a_3))x_0x_2x_3 + (a_3b_1 - a_1a_3)x_1x_2^2 \\ &+ a_3(b_3a_1 - b_1a_3)x_0x_2^2 + (a_4b_4(a_1 - b_1) + b_1b_2a_4(b_3 - a_3))x_0x_3^2 \\ &+ (b_1b_2(a_3 - b_3) + a_3(a_2b_1 - a_1b_2) + b_1b_4 - a_1a_4)x_1x_2x_3 \\ &+ (a_2b_1b_2(a_3 - b_3) + a_2b_1b_4 - b_2a_1a_4)x_1x_3^2. \end{aligned}$$

Se denotarmos por v_1 e v_2 os vetores de coeficientes das duas cúbicas acima, vemos que o lugar de indeterminação de ψ' é exatamente o lugar onde v_1 e v_2 são linearmente dependentes. Ou seja, o lugar de indeterminação de ψ' é dado pelo anulamento de todos os “45” menores 2×2 da matriz 2×10 cujas linhas são v_1 e v_2 . Usando o “SINGULAR” podemos ver que o ideal gerado por esses menores tem decomposição primária do tipo $J \cap I^2$, onde I é o ideal da diagonal $\Delta' \subset \mathbb{G}' \times \mathbb{G}'$ e

$$J = \langle b_4 - b_2b_3, a_4 - a_2a_3, a_2 - b_2 \rangle. \quad (5.4)$$

Em outros termos, para a escolha de uma base ordenada adequada em $S_3\mathcal{F}^{l_0}$, o que temos em mãos é uma representação matricial para o mapa ψ' , (5.2, p. 109) na forma

$$[\psi'] = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_6 & \star_{6 \times 10} \\ 0_{2 \times 6} & \mathcal{P} \end{pmatrix}, \quad (5.5)$$

onde \mathcal{I}_6 é uma matriz triangular superior de ordem 6, cujos elementos da diagonal principal são iguais a 1. Por sua vez, \mathcal{P} é uma matriz de tipo 2×10 , cujas entradas da primeira linha são os coeficientes de $Q'h_1$ e a segunda são os coeficientes de $Q'h_2$. O ideal $J \cap I^2$ é ninguém menos que o ideal de Fitting dos menores 8×8 da matriz $[\psi']$.

Para nós essas informações seriam impossíveis de obter sem um computador. Porém, mesmo sem o uso de ferramentas de computação algébrica, podemos facilmente obter algumas informações parciais, que nos conduzirão por caminhos amenos.

De fato, denotemos por I_i o ideal gerado pelos coeficientes da cúbica $Q'h_i$, com $i = 1, 2$. Então o lugar de indeterminação de ψ' certamente contém o lugar dado por $I_1 \cap I_2$, onde pelo menos uma dessas cúbicas é nula. Além disso, se verifica facilmente que $I_2 \subset I_1$, donde $I_1 \cap I_2 = I_2$. Ademais o lugar sobre o qual temos apenas 6 cúbicas independentes e definido pelo ideal $I_1 + I_2 = I_1$, o qual coincide com o ideal da diagonal $\Delta' \subset \mathbb{G}' \times \mathbb{G}'$, isto é,

$$I_1 = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3, a_4 - b_4).$$

Logo, sobre Δ' temos apenas seis cúbicas independentes e fora dessa variedade o sistema de cúbicas tem posto pelo menos sete.

Atenção: Eventualmente cometeremos o abuso de notação de representar um ponto da diagonal Δ' como (l_0, l, l) , deixando implícita a interpretação correta (estrutura como esquemas), no caso de se tratar de um ponto em $\Delta' \cap E' \times E'$.

5.2.1 explosão de $\Delta\mathbb{G}'$

Passemos então à explosão de $\mathbb{G}' \times \mathbb{G}'$ ao longo de Δ' , a qual denotaremos por

$$b_{\Delta'} : \mathbb{G}'' \rightarrow \mathbb{G}' \times \mathbb{G}'.$$

Podemos considerar coordenadas locais de modo que essa explosão seja dada pelas equações

$$(**) \quad \begin{cases} b_2 - a_2 = d_2 t \\ b_3 - a_3 = d_3 t \\ b_4 - a_4 = d_4 t \end{cases}, \quad (5.6)$$

onde

$$t := b_1 - a_1$$

é tomado como gerador do ideal do divisor excepcional de \mathbb{G}'' , e

$$a_1, a_2, a_3, a_4, t, d_2, d_3, d_4$$

são coordenadas locais em \mathbb{G}'' .

Observação 5.2.1.1. Note que se tomarmos a equação do divisor excepcional como sendo $a_2 - b_2$, então após a explosão teremos oito cúbicas bem definidas, pois $b_2 - a_2$ é o coeficiente de $x_0 x_1 x_3$ na cúbica $Q'h_1$ e de $x_1^2 x_3$ em $Q'h_2$.

Fazendo as substituições ditadas por (**) vemos que as entradas de \mathcal{P}_1 , primeira linha de \mathcal{P} , (5.5, p. 111) tornam-se divisíveis por t , gerador excepcional. Assim, a partir de $[\psi']$ e a menos de uma reordenação na base de $S_3\mathcal{F}^{l_0}$, obtemos a nova matriz

$$[\psi''] = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_7 & \star_{7 \times 10} \\ 0_{1 \times 7} & \mathcal{P}'_2 \end{pmatrix},$$

onde \mathcal{I}_7 é uma matriz triangular superior, cujos elementos da diagonal principal são iguais a 1. A matriz linha \mathcal{P}'_2 é obtida da segunda linha de \mathcal{P} , fazendo as substituições ditadas por (**). A matriz $[\psi'']$ define um mapa racional

$$\psi'' : \mathbb{G}'' \dashrightarrow \mathbb{G}r(8, S_3\mathcal{F}^{l_0}), \quad (5.7)$$

cujo lugar de indeterminação é o ideal gerado pelas entradas de \mathcal{P}'_2 . Para determinar esse ideal, vamos transcrever as entradas não nulas de \mathcal{P}'_2 , denotadas por σ_i , com $i = 1, \dots, 7$.

$$\left\{ \begin{array}{l} \sigma_1 = -d_2 \\ \sigma_2 = a_4d_3 - a_3d_4 \\ \sigma_3 = d_4 + a_3d_2 - a_2d_3 \\ \sigma_4 = d_2a_3(d_3t^2 + a_1d_3t + a_3t + a_1a_3) - a_3(d_4 - a_2d_3)t - a_3(a_4 - a_2a_3) + a_1(a_4d_3 - a_3d_4) \\ \sigma_5 = d_2a_4(d_3t^2 + a_1d_3t + a_3t + a_1a_3) - a_4(d_4 - a_2d_3)t - a_4(a_4 - a_2a_3) + a_1a_2(a_4d_3 - a_3d_4) \\ \sigma_6 = -d_2(d_3t^2 + a_1d_3t + a_3t + a_1a_3) + a_1(d_4 - a_2d_3) + (a_4 - a_2a_3) + (d_4 - a_2d_3)t \\ \sigma_7 = -d_2(a_2d_3t^2 + a_1a_2d_3t + a_2a_3t + a_1a_4) + a_2(d_4 - a_2d_3)t + a_1a_2(d_4 - a_2d_3) + a_2(a_4 - a_2a_3) \end{array} \right.$$

Agora é só observar que o ideal

$$\langle \sigma_1, \sigma_3, \sigma_6 \rangle = \langle d_2, d_4 - a_2d_3, a_4 - a_2a_3 \rangle$$

contém todos os outros σ_i , com $i \in \{2, 4, 5, 7\}$. Com efeito, é suficiente ver que

$$a_4d_3 - a_3d_4 = a_4d_3 - a_2a_3d_3 + a_2a_3d_3 - a_3d_4 = d_3(a_4 - a_2a_3) - a_3(d_4 - a_2d_3).$$

Portanto, nessa vizinhança coordenada temos que o ideal

$$J_1 = \langle d_2, a_4 - a_2a_3, d_4 - a_2d_3 \rangle, \quad (5.8)$$

define o lugar $Y_0'' \subset \mathbb{G}''$ sobre o qual temos somente 7 cúbicas independentes. Note que o ideal J_1 é exatamente a saturação (com respeito ao gerador excepcional t) do ideal que obtemos como imagem do ideal J , (5.4, p. 111) no anel de coordenadas de \mathbb{G}'' .

5.2.2 os sistemas de cúbicas associados aos pontos de E''

Vamos mostrar que os sistemas de cúbicas associados aos pontos de E'' podem ser escritos de modo mais intrínseco (livre de coordenadas). Vamos considerar separadamente as fibras de E'' sobre $\Delta' \setminus E' \times E'$ e sobre $\Delta' \cap E' \times E'$.

Para a fibra de E'' sobre $(l_0, l, l) \in \Delta' \setminus E' \times E'$, inicialmente lembramos que

$$\mathbb{T}_l \mathbb{G} = \text{Hom}(l, \mathcal{F}/l)$$

e observamos que

$$E''_{(l_0, l, l)} = \mathbb{P}(\mathbb{T}_{(l_0, l)} \mathbb{G}') = \mathbb{P}(\mathbb{T}_l G),$$

desde que $(l_0, l) \in \mathbb{G}' \setminus E'$. Daí, para cada $\varphi \in E''_{(l_0, l, l)}$ com $l \neq l_0$, escrevamos $l = \langle h_1, h_2 \rangle$, tomemos representantes $\varphi(h_1), \varphi(h_2) \in \mathcal{F}$ para os geradores da imagem de φ em \mathcal{F}/l e consideremos a reta

$$l_\varepsilon = \langle h_1 + \varepsilon\varphi(h_1), h_2 + \varepsilon\varphi(h_2) \rangle$$

obtida pelo deslocamento infinitesimal a partir de l , na direção dada por φ . Com isso, verificamos que o sistema de cúbicas associado a (l_0, l, l_ε) é

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 h_1^2 + \varepsilon x_0 h_1 \varphi(h_1) \\ x_0 h_1 h_2 + \varepsilon x_0 h_2 \varphi(h_1) \\ x_0 h_2^2 + \varepsilon x_0 h_2 \varphi(h_2) \\ x_1 h_1^2 + \varepsilon x_1 h_1 \varphi(h_1) \\ x_1 h_1 h_2 + \varepsilon x_1 h_2 \varphi(h_1) \\ x_1 h_2^2 + \varepsilon x_1 h_2 \varphi(h_2) \\ x_0 (h_1 \varphi(h_2) - h_2 \varphi(h_1)) \\ x_1 (h_1 \varphi(h_2) - h_2 \varphi(h_1)) \end{array} \right. \quad (5.9)$$

Daí, tomando o limite quando $\varepsilon \rightarrow 0$ ficamos com

$$\underbrace{\langle x_0 h_1^2, x_0 h_1 h_2, \dots \rangle}_{l_0 \cdot l^2}, x_0 (h_1 \varphi(h_2) - h_2 \varphi(h_1)), x_1 (h_1 \varphi(h_2) - h_2 \varphi(h_1)).$$

Note que o sistema de cúbicas obtido não depende da escolha dos representantes

$$\varphi(h_1), \varphi(h_2) \in \mathcal{F}.$$

De outra forma, a quádrlica $Q = h_1 \varphi(h_2) - h_2 \varphi(h_1)$ está bem definida apenas como um elemento de $S_2 \mathcal{F}^l / l^2$ e o sistema de cúbicas acima não depende da escolha de um representante para essa quádrlica.

Proposição 5.2.1. *O sistema de 8 cúbicas descrito acima é linearmente dependente se e somente se $l_0 \cap l \neq \emptyset$ e a quádrlica $Q = h_1\varphi(h_2) - h_2\varphi(h_1)$ (possui um representante que) se fatora como o produto de um plano contendo l_0 por um plano contendo l .*

Prova: Suponhamos que as cúbicas sejam linearmente dependentes, isto é, temos uma combinação linear nula, não trivial

$$\begin{aligned} & a_1x_0h_1^2 + a_2x_0h_1h_2 + a_3x_0h_2^2 + a_4x_1h_1^2 + a_5x_1h_1h_2 + a_6x_1h_2^2 \\ & + a_7x_0(h_1\varphi(h_2) - h_2\varphi(h_1)) + a_8x_1(h_1\varphi(h_2) - h_2\varphi(h_1)) = 0. \end{aligned} \quad (5.10)$$

A equação acima implica as seguintes relações de divisibilidade

$$(\diamond) \quad \begin{cases} h_1 \mid (a_3x_0 + a_6x_1)h_2 - (a_7x_0 + a_8x_1)\varphi(h_1) \\ h_2 \mid (a_1x_0 + a_4x_1)h_1 + (a_7x_0 + a_8x_1)\varphi(h_2) \end{cases}$$

Ora, as relações acima implicam que

$$(a_7x_0 + a_8x_1)\varphi(h_1) \in \langle h_1, h_2 \rangle \quad \text{e} \quad (a_7x_0 + a_8x_1)\varphi(h_2) \in \langle h_1, h_2 \rangle,$$

onde $\langle h_1, h_2 \rangle$ é o ideal (primo) gerado por h_1, h_2 . Assim, como $\varphi \neq 0$, podemos concluir que $a_7x_0 + a_8x_1 \in \langle h_1, h_2 \rangle$. Portanto, temos duas possibilidades

$$\begin{cases} a_7x_0 + a_8x_1 \equiv 0 \\ \text{ou} \\ l_0 \cap l \neq \emptyset \end{cases}$$

É fácil ver que a primeira possibilidade implicaria $l = l_0$ (consequência de (\diamond)), o que não é verdade. Logo, para que as cúbicas sejam dependentes é necessário que l intersekte l_0 .

Falta verificar a propriedade enunciada com respeito à quádrlica

$$Q = h_1\varphi(h_2) - h_2\varphi(h_1).$$

Com efeito, podemos escrever

$$a_7x_0 + a_8x_1 = ah_1 + bh_2 \quad (5.11)$$

e substituir em (\diamond) , de onde obtemos

$$(\diamond\diamond) \quad \begin{cases} h_1 \mid (a_3x_0 + a_6x_1) - b\varphi(h_1) \\ h_2 \mid (a_1x_0 + a_4x_1) + a\varphi(h_2) \end{cases}$$

Disso segue que

$$b\varphi(h_1) = \alpha h_1 + (a_3x_0 + a_6x_1) \quad \text{e} \quad a\varphi(h_2) = \beta h_2 - (a_1x_0 + a_4x_1), \quad (5.12)$$

com α, β constantes. Daí, no quociente \mathcal{F}/l temos

$$\overline{b\varphi(h_1)} = a_3\bar{x}_0 + a_6\bar{x}_1 \quad \text{e} \quad \overline{a\varphi(h_2)} = -a_1\bar{x}_0 - a_4\bar{x}_1, \quad (5.13)$$

onde a “barra” indica a classe em \mathcal{F}/l .

Ademais, pela equação 5.11, p. 115 segue que ou $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Suponhamos que $a \neq 0$, o caso $b \neq 0$ é análogo. Neste caso deduzimos que

$$\overline{\varphi(h_2)} = -\frac{a_1}{a}\bar{x}_0 - \frac{a_4}{a}\bar{x}_1.$$

Agora temos duas possibilidades, $b = 0$ ou $b \neq 0$.

Para $b \neq 0$, começamos observando que $\overline{\varphi(h_1)}$ e $\overline{\varphi(h_2)}$ são linearmente dependentes, pois nesse caso ambos são combinação linear de \bar{x}_0, \bar{x}_1 e pela equação 5.11, temos

$$a_7\bar{x}_0 + a_8\bar{x}_1 = 0.$$

Além disso, das equações 5.13, segue que podemos tomar um representante $h \in \langle x_0, x_1 \rangle$, isto é, podemos tomar um plano h contendo l_0 , de modo que

$$\overline{\varphi(h_1)} = \alpha_1\bar{h} \quad \text{e} \quad \overline{\varphi(h_2)} = \alpha_2\bar{h}.$$

Assim,

$$Q = h_1\varphi(h_2) - h_2\varphi(h_1) \quad \underbrace{=} \quad (\alpha_2h_1 - \alpha_1h_2) \cdot h. \\ \text{módulo } l^2$$

Se $b = 0$, então pelas equações 5.11 e 5.12 teríamos

$$a_7x_0 + a_8x_1 = ah_1, \quad a_3x_0 + a_6x_1 = -\alpha h_1.$$

Substituindo essas relações juntamente com a segunda equação em 5.12, na equação de dependência linear (veja eq. 5.10, p. 115), concluímos que

$$\overline{a\varphi(h_1)} = a_2\bar{x}_0 + a_5\bar{x}_1,$$

Novamente, pelos mesmos motivos de antes, segue que $\overline{\varphi(h_1)}$ e $\overline{\varphi(h_2)}$ são linearmente dependentes e podemos encontrar $h \in \langle x_0, x_1 \rangle$, de modo que

$$\overline{\varphi(h_1)} = \alpha_1\bar{h} \quad \text{e} \quad \overline{\varphi(h_2)} = \alpha_2\bar{h}.$$

Portanto,

$$Q = h_1\varphi(h_2) - h_2\varphi(h_1) \quad \underbrace{=} \quad (\alpha_2h_1 - \alpha_1h_2) \cdot h. \\ \text{módulo } l^2$$

Com isso findamos a verificação da proposição. \square

Trocando em miúdos, para cada ponto na fibra de E'' sobre $(l_0, l, l) \in \Delta' \setminus E' \times E'$ temos associada uma quádrlica Q contendo l , não nula módulo l^2 , com a qual produzimos

duas novas cúbicas x_0Q e x_1Q . Estas juntamente com $l_0 \cdot l^2$ formam um sistema com 8 cúbicas, sendo que no mínimo 7 delas são linearmente independentes. Desse modo, para cada ponto φ na fibra de E'' sobre $(l_0, l, l) \in \Delta' \setminus E' \times E'$ o sistema de cúbicas associado é gerado por

$$l_0 \cdot (l^2 + Q_\varphi) \subset S_3\mathcal{F},$$

onde $Q_\varphi \in S_2\mathcal{F}^l/l^2$.

Além disso, teremos apenas sete cúbicas independentes somente quando $l_0 \cap l \neq \emptyset$ e apenas nos pontos da fibra para os quais a classe da quádriga Q_φ possui um representante que se fatora como o produto de um plano contendo l por uma forma linear que se anula ao longo de l_0 e é responsável por marcar o ponto $l_0 \cap l$ sobre a reta l . Aparentemente existe ambigüidade na escolha desse segundo fator da quádriga Q . De fato, ele deve ser tomado como um representante para o gerador de $l_0/l_0 \cap l$. Porém, como ele está sendo multiplicado por um plano contendo l , a ambigüidade na sua escolha vive em l^2 e portanto é irrelevante visto que a quádriga Q_φ é bem definida como elemento de $S_2\mathcal{F}^l/l^2$. Ou seja, o espaço de quatro quádriga $\mathcal{F}_2^2(l)_\varphi = \langle l^2, Q_\varphi \rangle$ não depende de escolhas feitas para representantes. Desse modo, conhecemos também uma descrição geométrica dos sistemas de cúbicas (de posto 7) associados aos pontos de $E'' \cap Y_0''$ que vivem sobre $\Delta' \setminus E' \times E'$.

Formalmente, consideramos o isomorfismo

$$\mathbb{T}_l\mathbb{G} \simeq \mathcal{F}/l \otimes l^\vee \simeq S_2\mathcal{F}^l/l^2 \otimes \wedge^2 l^\vee,$$

de onde concluímos que

$$E''_{(l_0, l, l)} = \mathbb{P}(\mathbb{T}_l\mathbb{G}) \simeq \mathbb{P}(S_2\mathcal{F}^l/l^2)$$

Por outro lado, temos um mapa injetivo

$$\frac{l_0}{l_0 \cap l} \otimes l \longrightarrow S_2\mathcal{F}^l/l^2.$$

No caso em que $l_0 \cap l = \emptyset$, (abusando notação, l =reta em \mathbb{P}^3 , l =subespaço bidimensional de \mathcal{F}) esse mapa é na verdade um isomorfismo. No caso em que $l_0 \cap l \neq \emptyset$, a imagem desse mapa é exatamente o subespaço de $S_2\mathcal{F}^l/l^2$ gerado pelas quádrigas que possuem representantes que se fatoram como produto de um plano contendo l por um fator linear que se anula ao longo de l_0 e cuja classe gera $l_0/l_0 \cap l$. Ou seja, são os pontos para os quais temos somente sete cúbicas independentes. Em outras palavras, temos indícios para

acreditar que

$$(E'' \cap Y_0'')_{(l_0, l, l)} = \mathbb{P}(l_0 / (l_0 \cap l) \otimes l) \simeq \mathbb{P}(l).$$

No futuro (p.127) veremos que isso de fato é verdade, pois vamos verificar que Y_0'' coincide com \tilde{Y}'_0 , transformada estrita de Y'_0 (veja a seção 5.3, p. 122), e $E'' \cap \tilde{Y}'_0$ se identifica com o segundo membro da igualdade acima (veja 5.28, p. 127).

5.2.3 cúbicas associadas a $\Delta' \cap E' \times E'$

Agora também descreveremos, de forma livre de coordenadas, os sistemas de cúbicas associados aos pontos das fibras de E'' que vivem sobre $\Delta' \cap E' \times E'$.

Bem, dado $\varphi \in E' = \mathbb{P}(\mathbb{T}_{l_0}\mathbb{G})$, vamos denotar por $\langle \varphi \rangle$ o subespaço unidimensional de $\mathbb{T}_{l_0}\mathbb{G}$ representado por φ . Assim, temos

$$\mathbb{T}_\varphi E' = \mathbb{T}_\varphi \mathbb{P}(\mathbb{T}_{l_0}\mathbb{G}) = \text{Hom}(\langle \varphi \rangle, \mathbb{T}_{l_0}\mathbb{G} / \langle \varphi \rangle) \cong \mathbb{T}_{l_0}\mathbb{G} / \langle \varphi \rangle. \quad (5.14)$$

Em particular, cada elemento $\varphi' \in \mathbb{T}_{l_0}\mathbb{G}$ independente de φ , dá origem a uma direção tangente $\langle \overline{\varphi}' \rangle \subset \mathbb{T}_\varphi \mathbb{G}'$, normal à direção dada por $\langle \varphi \rangle$. Este último é na verdade a fibra do normal de E' em \mathbb{G}' , no ponto φ .

Dado um vetor tangente não nulo $a\varphi + b\overline{\varphi}' \in \mathbb{T}_\varphi \mathbb{G}'$, ou seja, dado um ponto de $E''_{(\varphi, \varphi)} = \mathbb{P}(\mathbb{T}_\varphi \mathbb{G}')$, pretendemos descrever o sistema de cúbicas associado. Para isso, vamos considerar inicialmente os dois casos $a = 0$ e $b = 0$.

Vamos ao primeiro. Se $b = 0$ então como $\langle \varphi \rangle \subset \mathbb{T}_\varphi \mathbb{G}'$ é normal a E' , segue que qualquer deslocamento na direção dada por φ sai do divisor excepcional E' . Mais que isso, um tal deslocamento se projeta pelo mapa de explosão, em um deslocamento sobre a grassmanniana \mathbb{G} , saindo de l_0 e na direção de φ . Assim, podemos considerar o ponto (φ, φ) como limite dos pontos do tipo $(\varphi, (l_0, l_\varepsilon))$, onde (l_0, l_ε) é obtido por um deslocamento infinitesimal saindo de $\varphi \in E'$ e na direção $\langle \varphi \rangle \subset \mathbb{T}_\varphi \mathbb{G}'$, com $l_\varepsilon = \langle x_0 + \varepsilon\varphi(x_0), x_1 + \varepsilon\varphi(x_1) \rangle$. Portanto, temos

$$(\mathcal{F}_2^2(l_0))_{(l_0, l_\varepsilon)} = \langle x_0^2 + \varepsilon x_0\varphi(x_0), x_0x_1 + \varepsilon x_1\varphi(x_0), x_1^2 + \varepsilon x_1\varphi(x_1), Q_\varphi \rangle$$

E assim, o sistema de cúbicas associado ao ponto $(\varphi, (l_0, l_\varepsilon))$ é gerado por

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = x_0^3 + \varepsilon x_0 \varphi(x_0) \\ c_2 = x_0^2 x_1 + \varepsilon x_0 x_1 \varphi(x_0) \\ c_3 = x_0 x_1^2 + \varepsilon x_0 x_1 \varphi(x_1) \\ c_4 = x_1^3 + \varepsilon x_1^2 \varphi(x_1) \\ c_5 = x_0 Q_\varphi \\ c_6 = x_1 Q_\varphi \\ c_7 = \varphi(x_0) Q_\varphi \\ c_8 = \varphi(x_1) Q_\varphi \end{array} \right.$$

Tomando o limite com $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos

$$\langle l_0^3, x_0 Q_\varphi, x_1 Q_\varphi, \varphi(x_0) Q_\varphi, \varphi(x_1) Q_\varphi \rangle.$$

Usando o fato que $\varphi(x_i)$, (com $i = 0, 1$) são representantes para elementos de \mathcal{F}/l_0 , que não são simultaneamente nulos, vemos que as oito cúbicas acima são independentes, a menos que $\varphi(x_0)$ e $\varphi(x_1)$ sejam dependentes. Ou seja, com a notação da § 4.3.1, p. 82, é necessário que tenhamos $\varphi \in E'_0 := E' \cap \tilde{Y}_0$.

Agora vamos ao segundo caso, $a = 0$. Ficamos com um vetor tangente, $\bar{\varphi}' \in \mathbb{T}_\varphi E'$, e pensaremos em (φ, φ) como limite dos pontos do tipo $(\varphi, \varphi + \varepsilon \varphi')$, obtidos por um deslocamento infinitesimal na direção dada por φ' , saindo de $\varphi \in E'$. Desse modo, temos

$$(\mathcal{F}_2^2(l_0))_{\varphi + \varepsilon \varphi'} = \langle x_0^2, x_0 x_1, x_1^2, x_0(\varphi + \varepsilon \varphi')(x_1) - x_1(\varphi + \varepsilon \varphi')(x_0) \rangle$$

Portanto, sendo $Q_{\varphi'} = x_0 \varphi'(x_1) - x_1 \varphi'(x_0)$, segue que o sistema de cúbicas associado ao ponto $(\varphi, \varphi + \varepsilon \varphi')$ é

$$\langle l_0^3, Q_\varphi l_0, Q_{\varphi'} l_0 \rangle. \quad (5.15)$$

Isso mesmo, o ε desaparece milagrosamente. Logo, o sistema acima é o candidato natural a ser associado ao ponto $\bar{\varphi}' \in E''$. Além disso, se supusermos que essas cúbicas são dependentes, é fácil ver que tal dependência implica em relações do seguinte tipo:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a_1 \varphi + a_2 \varphi')(x_1) = 0 \\ (a_3 \varphi + a_4 \varphi')(x_0) = 0 \\ (a_1 \varphi + a_2 \varphi')(x_0) = (a_3 \varphi + a_4 \varphi')(x_1), \end{array} \right. \quad (5.16)$$

$$(5.17)$$

$$(5.18)$$

onde nem todos os a_i 's são iguais a zero. Ademais, como φ, φ' são independentes segue que nenhum dos pares $(a_1, a_2); (a_1, a_3); (a_2, a_4); (a_3, a_4)$ pode ser igual a $(0, 0)$. Em particular, a_2 e a_4 não podem ser simultaneamente nulos. Suponhamos, por exemplo que $a_2 \neq 0$. Assim, vemos que $a_1\varphi + a_2\varphi'$ é um representante legítimo para a classe $\overline{\varphi'} \in E''$. Por outro lado, como era de se esperar, a substituição de φ' por $a_1\varphi + a_2\varphi'$ não altera o sistema de cúbicas. Em outras palavras, podemos admitir, sem perda de generalidade, que $\varphi'(x_1) = 0$.

Agora temos dois casos a considerar: $a_4 = 0$ ou $a_4 \neq 0$.

Se $a_4 = 0$, então $a_3 \neq 0$ e daí, pela equação 5.17, p. 119, segue que $\varphi(x_0) = 0$. Por outro lado, da equação 5.16 temos $a_1\varphi(x_1) = 0$ e então $a_1 = 0$. Assim, pela equação 5.18, concluimos que $\varphi(x_1)$ e $\varphi'(x_0)$ são linearmente dependentes e as quádricas $Q_{\varphi'}$ e Q_φ fatoram um mesmo elemento de \mathcal{F}/l_0 .

Se $a_4 \neq 0$, então também deve ocorrer $a_3 \neq 0$, pois do contrário teríamos $\overline{\varphi'} = 0$. Logo, podemos deduzir que

$$\varphi(x_0) = -a_4\varphi(x_1) \text{ e } a_2\varphi'(x_0) = a_3\varphi(x_1).$$

Assim $\varphi(x_0)$ e $\varphi'(x_0)$ são múltiplos de $\varphi(x_1)$. Portanto, para que tenhamos somente sete cúbicas independentes devemos ter $\varphi \in E'_0$ e $Q_{\varphi'}, Q_\varphi$ são independentes, mas possuem um fator linear comum proveniente de \mathcal{F}/l_0 .

No caso geral em que temos $a \neq 0$ e $b \neq 0$, o resultado é surpreendentemente uma “soma” dos anteriores. De fato, certamente temos que $a\varphi + b\overline{\varphi'} \notin \mathbb{T}_\varphi E'$, logo um deslocamento nessa direção sai de E' . Ademais, podemos absorver os coeficientes a, b e considerar somente $\varphi + \overline{\varphi'}$. Por outro lado, um deslocamento nessa direção se decompõe como um deslocamento na direção de φ e um na direção de $\overline{\varphi'}$. Portanto, um deslocamento infinitesimal na direção de $\varphi + \overline{\varphi'}$, vai bater em um ponto do tipo $(l_0, l_\varepsilon) \in \mathbb{G}'$, com

$$l_\varepsilon = \langle x_0 + \varepsilon(\varphi + \varepsilon\varphi')(x_0), x_0 + \varepsilon(\varphi + \varepsilon\varphi')(x_1) \rangle.$$

O ponto $(\varphi, \varphi) \in \Delta'$ é limite de $(\varphi, (l_0, l_\varepsilon))$ quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Temos

$$(\mathcal{F}_2^2(l_0))_{(l_0, l_\varepsilon)} = \begin{cases} \langle x_0^2 + \varepsilon x_0\varphi(x_0) + \varepsilon^2 x_0\varphi'(x_0) \\ x_0x_1 + \varepsilon x_1\varphi(x_0) + \varepsilon^2 x_1\varphi'(x_0) \\ x_1^2 + \varepsilon x_1\varphi(x_1) + \varepsilon^2 x_1\varphi'(x_1) \\ x_0\varphi(x_1) - x_1\varphi(x_0) + \varepsilon(x_0\varphi'(x_1) - x_1\varphi'(x_0)) \rangle \end{cases}$$

Portanto o sistema de cúbicas associado ao ponto $(\varphi, (l_0, l_\varepsilon))$ é gerado por

$$\begin{cases} c_1 = x_0^3 + \varepsilon x_0^2 \varphi(x_0) + \varepsilon^2 x_0^2 \varphi'(x_0) \\ c_2 = x_0^2 x_1 + \varepsilon x_0 x_1 \varphi(x_0) + \varepsilon^2 x_0 x_1 \varphi'(x_0) \\ c_3 = x_0 x_1^2 + \varepsilon x_0 x_1 \varphi(x_0) + \varepsilon^2 x_0 x_1 \varphi'(x_0) \\ c_4 = x_1^3 + \varepsilon x_1^2 \varphi(x_0) + \varepsilon^2 x_1^2 \varphi'(x_0) \\ c_5 = x_0(Q_\varphi + \varepsilon Q_{\varphi'}) \\ c_6 = x_1(Q_\varphi + \varepsilon Q_{\varphi'}) \\ c_7 = (x_0 + \varepsilon \varphi(x_0) + \varepsilon^2 \varphi'(x_0))Q_\varphi \\ c_8 = (x_1 + \varepsilon \varphi(x_1) + \varepsilon^2 \varphi'(x_1))Q_\varphi \end{cases}$$

Observe que $c_5 - c_7$ e $c_6 - c_8$ são divisíveis por ε . Desse modo, fazendo as reduções possíveis e tomando o limite com $\varepsilon \rightarrow 0$, ficamos com as 8 cúbicas

$$\begin{cases} c_1 = x_0^3 \\ c_2 = x_0^2 x_1 \\ c_3 = x_0 x_1^2 \\ c_4 = x_1^3 \\ c_5 = x_0 Q_\varphi \\ c_6 = x_1 Q_\varphi \\ c_7 = x_0 Q_{\varphi'} - \varphi(x_0) Q_\varphi \\ c_8 = x_1 Q_{\varphi'} - \varphi(x_1) Q_\varphi \end{cases} \quad (5.19)$$

Se supusermos que as cúbicas acima são dependentes, então a conclusão é a mesma de antes, isto é, $\varphi'(x_0), \varphi(x_0), \varphi'(x_1), \varphi(x_1)$ são múltiplos de uma mesma forma linear, que representa um elemento de $\mathcal{F}/l_0 = \langle \bar{x}_2, \bar{x}_3 \rangle$.

Toda essa análise feita nos parágrafos acima estabelece o seguinte fato.

Proposição 5.2.2. *Para cada ponto $a\varphi + b\varphi'$ na fibra de E'' sobre $(\varphi, \varphi) \in \Delta' \cap E' \times E'$, o sistema de oito cúbicas é dado por*

$$\langle l_0^3, l_0 Q_\varphi, b x_0 Q_{\varphi'} - a \varphi(x_0) Q_\varphi, b x_1 Q_{\varphi'} - a \varphi(x_1) Q_\varphi \rangle.$$

Além disso, o posto mínimo é sete, atingido apenas quando $\varphi \in E'_0$ e somente para os pontos da fibra $E''_{(\varphi, \varphi)}$ tais que $Q_{\varphi'}$ (possui um representante que) se fatora como o produto de um plano contendo l_0 , por um fator linear $h \in \mathcal{F}/l_0$, que também divide $Q_\varphi = x_0 \varphi(x_1) - x_1 \varphi(x_0)$.

Prova: Veja a discussão desenvolvida nas páginas 118, ..., 121. \square

Exemplo 5.2.3.0.1. No caso em que $Q_\varphi = x_1x_2$, isto é, $\varphi(x_0) = x_2 \varphi(x_1) = 0$, então para os pontos de $E''_{(\varphi, \varphi)} \cap Y_0''$ (sendo $Y_0'' \subset \mathbb{G}''$ definido localmente pelo ideal J_1 , eq. 5.8, p. 113) teremos somente sete cúbicas independentes. A saber, seis delas são

$$\langle x_0^3, x_0^2x_1, x_0x_1^2, x_1^3, x_0x_1x_2, x_1^2x_2 \rangle = l_0^3 + l_0 \cdot Q_\varphi$$

e a sétima cúbica será do tipo

$$c_7 = x_2(\alpha x_0^2 + \beta x_1x_2).$$

5.3 Identificação global do segundo centro de explosão

A discussão na seção anterior (veja as proposições 5.2.1, p. 115 e 5.2.2, p. 121) dá uma indicação de que o segundo centro de explosão Y_0'' (veja eq. 5.8, p. 113), está relacionado com a variedade $\tilde{Y}_0 \times \tilde{Y}_0$, onde $\tilde{Y}_0 \subset \mathbb{G}'$ é a transformada estrita do divisor das retas incidentes a l_0 , (cf. 4.3.3, p. 84, 4.12, p. 85). De fato, veremos que Y_0'' é a transformada estrita de uma subvariedade $Y_0' \subset \tilde{Y}_0 \times \tilde{Y}_0$, que tem interpretação geométrica explícita.

Para começar, lembramos que o divisor $\tilde{Y}_0 \subset \mathbb{G}'$ é dado em coordenadas locais, pela equação $a_4 = a_2a_3$. Portanto, podemos considerar a subvariedade $\tilde{Y}_0 \times \tilde{Y}_0 \subset \mathbb{G}' \times \mathbb{G}'$, definida pelas equações

$$\begin{cases} a_4 - a_2a_3 = 0, \\ b_4 - b_2b_3 = 0. \end{cases}$$

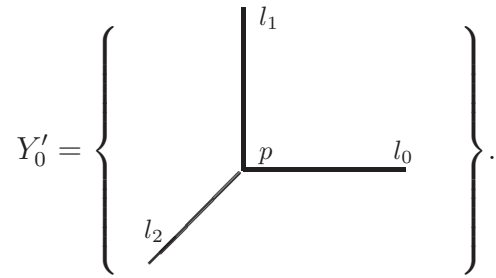
Por outro lado, também já vimos que um ponto $(l_0, l_1) \in \tilde{Y}_0$, mesmo sobre o divisor excepcional E' , determina um único ponto $p \in l_0$. Denotamos p por $l_0 \cap l_1$. Assim, podemos considerar a subvariedade $Y_0' \subset \tilde{Y}_0 \times \tilde{Y}_0$ formada pelas ternas $(l_0, l_1, l_2) \in \tilde{Y}_0 \times \tilde{Y}_0$ para as quais temos

$$l_0 \cap l_1 = l_0 \cap l_2. \quad (5.20)$$

De modo mais preciso, já vimos (cf. 4.12, p. 85) que \tilde{Y}_0 é um \mathbb{P}^1 -fibrado em cima de $l_0^\perp \times l_0^*$. Assim, podemos considerar \tilde{Y}_0 naturalmente como um esquema sobre l_0^\perp . Com isso, podemos definir Y_0' pelo seguinte produto fibrado

$$Y_0' = \tilde{Y}_0 \times_{l_0^\perp} \tilde{Y}_0. \quad (5.21)$$

Geometricamente, um ponto genérico de Y'_0 corresponde aos lados de um triedro, *e.g.*, $\langle x_0x_1, x_0x_2, x_1x_2 \rangle$, ilustrado na figura



Tendo em vista o fato imediatamente verificável de que uma cúbica lisa não contém triedros, vemos que o sistema de cúbicas contendo um elemento genérico de Y'_0 é formado por cúbicas singulares.

Em coordenadas locais a equação que define $Y'_0 \subset \tilde{Y}_0 \times \tilde{Y}_0$ (cf. eq. 5.20) equivale a

$$(0, 0, -a_2, 1) = (0, 0, -b_2, 1),$$

isto é, $a_2 = b_2$.

Portanto, Y'_0 é definida em $\mathbb{G}' \times \mathbb{G}'$ pelas equações:

$$\begin{cases} a_4 - a_2a_3 = 0 \\ b_4 - b_2b_3 = 0 \\ b_2 - a_2 = 0 \end{cases}$$

Denotemos a transformada estrita de Y'_0 por \tilde{Y}'_0 . As equações locais para \tilde{Y}'_0 são obtidas a partir das equações acima, fazendo as substituições ditadas por (**), p. 112 (produzindo assim o transformado total) e dividindo cada uma delas pela maior potência possível da equação do divisor excepcional. Na realidade, deveríamos calcular o ideal saturado com respeito à equação do divisor excepcional; por sorte, resulta correto pois o ideal obtido pela receita ingênua é primo, módulo o qual a equação excepcional não divide zero. Essas operações fornecem exatamente o ideal

$$J_1 = \langle d_2, a_4 - a_2a_3, d_4 - a_2d_3 \rangle.$$

Com isso verificamos, pelo menos localmente, que Y''_0 coincide realmente com \tilde{Y}'_0 .

A análise feita na seção anterior (proposições 5.2.1, p. 115 e 5.2.2, p. 121) nos diz que $\tilde{Y}'_0 \subset Y''_0$. Mais que isso, a tal análise revela que o suporte de Y''_0 coincide com \tilde{Y}'_0 .

Desse modo, o que precisaremos fazer é verificar que eles coincidem em vizinhanças de representantes para as órbitas fechada em \tilde{Y}'_0 (veja lema 4.4 , [26]).

Na seção 5.4, p. 129 faremos um estudo das órbitas fechadas sob a ação induzida pelo estabilizador da reta l_0 ao longo das explosões. Para facilitar a identificação dessas órbitas fechadas, vamos identificar o divisor excepcional, $E'' = \tilde{Y}'_0 \cap E''$, com um fibrado projetivo $\mathbb{P}(\mathcal{G}_2(l_0))$, construído sobre $\tilde{Y}_0 = \Delta' \cap Y'_0$, seguindo o roteiro abaixo.

Começamos apresentando uma construção mais intrínseca para a variedade \tilde{Y}_0 . Com efeito, relembremos as notações de 4.12, p. 85, temos $l_0^* = \mathbb{P}(l_0)$ e $l_0^\perp = \mathbb{P}(\mathcal{F}/l_0)$. Além disso, \tilde{Y}_0 é um \mathbb{P}^1 -fibrado sobre $l_0^\perp \times l_0^*$, cuja fibra sobre (\bar{h}, h_0) corresponde a escolher uma reta l contida no plano h_0 e passando pelo ponto $l_0 \cap l$, de equação \bar{h} mod. l_0 . Assim, cada ponto de \tilde{Y}_0 corresponde a um par de bandeiras,

$$\begin{aligned} \langle h_0 \rangle \subset \langle x_0, x_1 \rangle = l_0 \subset \langle x_0, x_1, h \rangle \\ \langle h_0 \rangle \subset \langle h_0, h_1 \rangle = l \subset \langle x_0, x_1, h \rangle. \end{aligned} \quad \begin{array}{c} \text{Diagram illustrating the flag structure:} \\ \text{A 3D coordinate system with axes } x_0, x_1, h. \\ \text{A horizontal plane } h_0 \text{ is shown.} \\ \text{A line } l_0 \text{ is shown in the plane } h_0. \\ \text{A point } l_0 \cap l \text{ is marked on } l_0. \\ \text{A line } l \text{ is shown passing through } l_0 \cap l \text{ and lying in the plane } \langle x_0, x_1, h \rangle. \end{array} \quad (5.22)$$

A primeira dessas bandeiras corresponde simplesmente um ponto de $l_0^* \times l_0^\perp$. A segunda, corresponde ao \mathbb{P}^1 -fibrado fornecido pela escolha da reta l na forma descrita. Lembramos também que $E'_0 = \tilde{Y}_0 \cap E'$, corresponde a escolher a reta l como a própria l_0 . Deve-se observar a possibilidade de termos $h_1 = h$.

Um ponto de \tilde{Y}_0 será denotado por $p = (h_0, h_1, h)$, com significado expresso pela bandeira dada acima. Denotaremos ainda por \mathcal{E} o “pull-back” do subfibrado tautológico de \mathbb{G} para \mathbb{G}' . Assim, a fibra $\mathcal{E}_p = \langle h_0, h_1 \rangle$, equações da reta l . Em cima de $l_0^\perp \times l_0^*$ podemos construir o seguinte diagrama com linhas e coluna central exatas,

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_{l_0^*}(-1) & \longrightarrow & l_0 & \longrightarrow & \bar{l}_0 \\ & & \downarrow & & \\ \mathcal{O}_{l_0^*}(-1) & \longrightarrow & \mathcal{F} & \longrightarrow & \mathcal{F}/\mathcal{O}_{l_0^*}(-1) \\ & & \downarrow \alpha & & \downarrow \beta \\ \mathcal{O}_{l_0^\perp}(-1) & \longrightarrow & \mathcal{F}/l_0 & \longrightarrow & \mathcal{G}. \end{array}$$

O mapa β é induzido por α e verifica-se facilmente que está bem definido, por conta das sequências exatas que temos. Daí, definindo \mathcal{N}_0 como o núcleo de β , segue que \mathcal{N}_0 tem posto igual a dois: cada fibra é o espaço que corresponde a um feixe de retas, digamos no plano $\langle h_0 \rangle$ e passando pelo ponto $\langle x_0, x_1, h \rangle$. Assim, $\tilde{Y}_0 = \mathbb{P}(\mathcal{N}_0)$. De outra forma, a

fibra de \mathcal{N}_0 dá conta das equações desse ponto no plano $\langle h_0 \rangle$. Denotemos por $\widetilde{\mathcal{N}}_0 \subset \mathcal{F}$ a imagem inversa de \mathcal{N}_0 .

A seqüência tautológica de \widetilde{Y}_0 como \mathbb{P}^1 -fibrado sobre $l_0^\perp \times l_0^*$ será escrita na forma

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_{\mathcal{N}_0}(-1) & \twoheadrightarrow & \mathcal{N}_0 & \twoheadrightarrow & \overline{\mathcal{N}}_0 \\ (\overline{\langle h_1 \rangle}) & & \overline{\langle h_1, h_2 \rangle} & & \overline{\langle h_2 \rangle} \end{array}$$

onde indicamos na 2ª linha as respectivas fibras típicas (cf. 5.22).

A fibra de $\overline{\mathcal{N}}_0$ sobre (h_0, h_1, h) é exatamente a equação do ponto $l_0 \cap l$ na reta l . A fibra de $\widetilde{\mathcal{N}}_0$ é $\langle x_0, x_1, h \rangle = \langle h_0, h_1, h_2 \rangle$, equações do ponto em \mathbb{P}^3 .

Também observamos que se \mathcal{E} denota o “pull-back” do tautológico de \mathbb{G} para \mathbb{G}' , então a restrição de \mathcal{E} para \widetilde{Y}_0 se encaixa na seguinte seqüência exata

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_{l_0^*}(-1) & \twoheadrightarrow & \mathcal{E}_{\widetilde{Y}_0} & \twoheadrightarrow & \mathcal{O}_{\mathcal{N}_0}(-1). \\ (\langle h_0 \rangle) & & \langle h_0, h_1 \rangle & & \overline{\langle h_1 \rangle} \end{array}$$

Agora lembramos que sobre \mathbb{G}' temos um fibrado $\mathcal{F}_2^2(l_0)$ (veja 4.3.2, p. 87) de quádricas, de posto 4. Considerando a restrição desse fibrado ao divisor \widetilde{Y}_0 , podemos definir o fibrado $\mathcal{G}_2(l_0)$ pela seguinte seqüência

$$\mathcal{O}_{l_0^*}(-1) \otimes \mathcal{E}_{\widetilde{Y}_0} \twoheadrightarrow \mathcal{F}_2^2(l_0)_{\widetilde{Y}_0} \twoheadrightarrow \mathcal{G}_2(l_0).$$

Assim, estamos nos propondo a mostrar que

$$E_0'' = \mathbb{P}(\mathcal{G}_2(l_0)). \quad (5.23)$$

Para tanto, observamos que nossa fábrica de cúbicas (veja o início da seção anterior), associa a cada ponto $(l_0, l_1, l_2) \in Y_0'$ um sistema de cúbicas de posto genérico sete, que cai ao mínimo seis precisamente quando $(l_0, l_1, l_2) \in \Delta'$. Assim, temos um mapa racional

$$\psi_0' : Y_0' \dashrightarrow \mathbb{G}r(7, S_3\mathcal{F}^{l_0}).$$

A explosão de Y_0' ao longo de $\widetilde{Y}_0 = \Delta' \cap Y_0'$ é o fecho do gráfico desse mapa. Ou seja, ψ_0' se estende a um morfismo

$$\widetilde{\psi}_0' : \widetilde{Y}_0' \longrightarrow \mathbb{G}r(7, S_3\mathcal{F}^{l_0}).$$

Em particular, temos um mergulho de $E_0'' = \widetilde{Y}_0' \cap E''$ em $\widetilde{Y}_0' \times \mathbb{G}r(7, S_3\mathcal{F}^{l_0})$. Nossa estratégia para provar (5.23) é mostrar que $\mathbb{P}(\mathcal{G}_2(l_0))$ também mergulha em $\widetilde{Y}_0' \times \mathbb{G}r(7, S_3\mathcal{F}^{l_0})$.

Para tanto, seja $\widetilde{\mathcal{G}} \subset \mathcal{F}_2^2(l_0)_{\widetilde{Y}_0'}$ a imagem inversa de $\mathcal{O}_{\mathcal{G}_2(l_0)}(-1) \subset \mathcal{G}_2(l_0)$. Esclareçamos fibras típicas sobre $p = (x_1, x_2, x_2)$ (isto é, $h_0 = x_1$, $h_1 = x_2$ e $h = x_2$):

$$\begin{array}{ccccc} \mathcal{O}_{l_0^*}(-1) \otimes \mathcal{E}_{\widetilde{Y}_0'} & \twoheadrightarrow & \mathcal{F}_2^2(l_0)_{\widetilde{Y}_0'} & \twoheadrightarrow & \mathcal{G}_2(l_0) \\ x_1 \langle x_1, x_2 \rangle & & \langle x_0 x_1, x_0 x_2, x_1 x_2, x_1^2 \rangle & & \overline{\langle x_0 x_1, x_0 x_2 \rangle} \end{array}$$

A fibra de $\tilde{\mathcal{G}}$ sobre o ponto correspondente a $\overline{\langle ax_0x_1 + bx_0x_2 \rangle}$ é evidentemente

$$\langle x_1^2, x_1x_2, ax_0x_1 + bx_0x_2 \rangle.$$

Fazendo o “pull-back” dos fibrados que existem em \tilde{Y}_0 para $\mathbb{P}(\mathcal{G}_2(l_0))$, podemos considerar o seguinte mapa de fibrados sobre $\mathbb{P}(\mathcal{G}_2(l_0))$, induzido por multiplicação

$$\xi : \mathcal{F}_2^2(l_0)_{\tilde{Y}_0} \otimes \mathcal{E}_{\tilde{Y}_0} \oplus \tilde{\mathcal{G}} \otimes \tilde{\mathcal{N}}_0 \longrightarrow S_3\mathcal{F}^{l_0}. \quad (5.24)$$

Além disso, esse mapa tem posto constante igual a sete. Por exemplo, sobre o ponto $(p, \overline{\langle ax_0x_1 + bx_0x_2 \rangle})$ discutido acima, a imagem é gerada pelos 7 monômios

$$x_0x_1^2, x_0x_1x_2, x_0x_2^2, x_1^3, x_1^2x_2, x_1x_2^2, ax_0^2x_1 + bx_0^2x_2. \quad (5.25)$$

Desse modo, o nosso mapa de fibrados sobre $\mathbb{P}(\mathcal{G}_2(l_0))$ induz um morfismo

$$\xi : \mathbb{P}(\mathcal{G}_2(l_0)) \rightarrow \text{Gr}(7, S_3\mathcal{F}^{l_0}).$$

E de fato, temos um mergulho induzido

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{G}_2(l_0)) &\hookrightarrow \tilde{Y}_0 \times \text{Gr}(7, S_3\mathcal{F}^{l_0}) \\ (p, f) &\mapsto (p, \xi(p, f)). \end{aligned} \quad (5.26)$$

Assim, para mostrarmos que $E_0'' = \mathbb{P}(\mathcal{G}_2(l_0))$ basta, por razões dimensionais, verificarmos por exemplo que $E_0'' \supset \mathbb{P}(\mathcal{G}_2(l_0))$.

Para estabelecermos essa inclusão, seja $p_\varepsilon = (l_0, l, l_\varepsilon) \in Y_0'$ tal que

$$l = \langle x_1, x_2 \rangle \text{ e } l_\varepsilon = \langle x_1 - \varepsilon bx_0, x_2 + \varepsilon ax_0 \rangle.$$

Com essa escolha, de modo análogo ao que temos em 5.9, p. 114, vemos que o espaço de sete cúbicas associado a p_ε é dado por

$$\tilde{\psi}'_0(p_\varepsilon) = \psi'_0(p_\varepsilon) = \begin{cases} c_1 = x_0x_1^2 - \varepsilon bx_0^2x_1 \\ c_2 = x_0x_1x_2 + \varepsilon ax_0^2x_1 \\ c_3 = x_0x_2^2 + \varepsilon ax_0^2x_2 \\ c_4 = x_1^3 - \varepsilon bx_0x_1^2 \\ c_5 = x_1^2x_2 + \varepsilon ax_0x_1^2 \\ c_6 = x_1x_2^2 + \varepsilon ax_0x_1x_2 \\ c_7 = ax_0^2x_1 + bx_0^2x_2 \end{cases} \quad (5.27)$$

Por outro lado, o ponto $(p_\varepsilon, \psi'_\varepsilon(p_\varepsilon)) \in \tilde{Y}'_0 \times \mathbb{G}r(7, S_3\mathcal{F}^{l_0})$ tem como limite um ponto da fibra de E''_0 sobre $p = (l_0, l) \in \tilde{Y}_0$. A saber, o ponto

$$(p, \mathcal{F}_p^{a,b}) \in E''_0 \subset \tilde{Y}_0 \times \mathbb{G}r(7, S_3\mathcal{F}^{l_0}),$$

onde $\mathcal{F}_p^{a,b}$ é obtido de 5.27, p. 126, fazendo $\varepsilon = 0$, isto é,

$$\mathcal{F}_p^{a,b} = \langle x_0x_1^2, x_0x_1x_2, x_0x_2^2, x_1^3, x_1^2x_2, x_1x_2^2, ax_0^2x_1 + bx_0^2x_2 \rangle.$$

Agora é só observar que quando pensamos em $p = (l_0, l) \in \tilde{Y}_0$ com o sentido de 5.22, p. 124, então $p = (x_1, x_2, x_2)$. Assim, por 5.25, segue que a imagem de $\mathbb{P}(\mathcal{G}_2(l_0)_p)$ pelo mergulho 5.26 é

$$(p, \overline{\langle ax_0x_1 + bx_0x_2 \rangle}) \rightsquigarrow (p, \langle x_0x_1^2, x_0x_1x_2, x_0x_2^2, x_1^3, x_1^2x_2, x_1x_2^2, ax_0^2x_1 + bx_0^2x_2 \rangle) = (p, \mathcal{F}_p^{a,b}).$$

Isso mostra que $(E''_0)_p = \mathbb{P}(\mathcal{G}_2(l_0)_p)$. Lembrando que $p = (l_0, l)$ é um representante da órbita densa de \tilde{Y}_0 , podemos de fato concluir

$$E''_0 = \mathbb{P}(\mathcal{G}_2(l_0)). \quad (5.28)$$

Exemplo 5.3.0.0.1. A fibra

$$(E''_0)_{(\varphi, \varphi)} = (E'' \cap \tilde{Y}'_0)_{(\varphi, \varphi)} = \mathbb{P}(\mathcal{G}_2(l_0)_\varphi),$$

no caso em que $\varphi \in E'_0$ corresponde à quádrlica x_1x_2 , é obtida observando que

$$\mathcal{O}_{l_0^*}(-1)_\varphi = \langle x_1 \rangle \text{ e } \mathcal{F}_2^2(l_0)_\varphi = \langle x_0^2, x_0x_1, x_1^2, x_1x_2 \rangle.$$

Portanto, $\mathcal{G}_2(l_0)_\varphi = \langle x_0^2, x_1x_2 \rangle$. Daí, a sétima cúbica que surge para completar a imagem de ξ é do tipo $x_2(ax_0^2 + bx_1x_2)$.

Isso, de acordo com a análise feita na subseção 5.2.2, p. 114 (veja ex.5.2.3.0.1, p. 122), reforça as evidências de que $Y''_0 = \tilde{Y}'_0$, globalmente. Esse fato será comprovado definitivamente no final da seção 5.4, p. 129.

5.3.1 a caminho das quárticas

Estendendo um pouco mais essa discussão, gostaríamos de destacar alguns fatos, e adiantamos que eles serão importantes para o estudo do lugar de indeterminação do mapa que definiremos para a grassmanniana de subespaços de posto 20 de $S_4\mathcal{F}^{l_0}$.

Bem, dado que

$$E' = \mathbb{P}(S_2\mathcal{F}^{l_0}/l_0^2) = \mathbb{P}(\langle x_0x_2, x_0x_3, x_1x_2, x_1x_3 \rangle),$$

consideremos φ , como no exemplo 5.3.0.0.1, p. 127, correspondendo à quádrlica $\boxed{x_1x_2}$. Observemos que $\langle l_0^2, x_1x_2 \rangle = \mathcal{F}_2^2(l_0)_\varphi$. Daí segue

$$\mathbb{T}_\varphi E' = \text{Hom}(\langle x_1x_2 \rangle, S_2\mathcal{F}^{l_0}/\mathcal{F}_2^2(l_0)_\varphi) \simeq S_2\mathcal{F}^{l_0}/\mathcal{F}_2^2(l_0)_\varphi = \langle x_0x_2, x_0x_3, x_1x_3 \rangle. \quad (5.29)$$

Ademais, a análise que fizemos nas subseção 5.2.2, p. 114 mostra que a quádrlica $\boxed{x_0x_2}$ corresponde a um ponto de $E'' \cap Y_0''$ e os outros dois geradores $\boxed{x_0x_3, x_1x_3}$ representam pontos de E'' para os quais o sistemas de cúbricas associado tem posto correto igual a oito.

O ponto correspondente à quádrlica x_0x_3 é um ponto do “bem”, no sentido que o polinômio de Hilbert do ideal gerado pelo sistema de cúbricas correspondente é o correto, $3t + 3$. Porém, o ponto correspondente à quádrlica x_1x_3 é a “pedra no sapato”, pois o sistema de cúbricas associado é (veja 5.15, p. 119)

$$\langle l_0^3, x_1x_2l_0, x_1x_3l_0 \rangle, \quad \text{com } l_0 = \langle x_0, x_1 \rangle, \quad (5.30)$$

e para nossa tristeza, o ideal gerado tem polinômio de Hilbert $4t$.

Nesse momento se esvaem nossas esperanças de que seja plana a família de subesquemas definidos pelos ideais (gerados por oito cúbricas), que estamos construindo. No entanto não desanimamos e seguimos.

Vejamos o que já temos. Na seção 5.2, p. 108 fomos apresentados ao mapa racional

$$\psi'' : \mathbb{G}'' \dashrightarrow \mathbb{G}r(8, S_3\mathcal{F}),$$

cujos lugar de indeterminação (onde o posto do sistema de cúbricas cai para sete) é a subvariedade $Y_0'' \subset \mathbb{G}''$, definida em coordenadas locais pelo ideal (veja eq.5.8, p. 113)

$$J_1 = \langle d_2, a_4 - a_2a_3, d_4 - a_2d_3 \rangle.$$

Além disso, temos fortes evidências da identificação (global) de Y_0'' com \tilde{Y}'_0 , que é a transformada estrita, pelo mapa de explosão de $\mathbb{G}' \times \mathbb{G}'$ na diagonal, de Y'_0 (definida pela eq.5.21, p. 122). Essa identificação será confirmada no final da próxima seção.

Observação 5.3.1.1. Para os pontos de Y'_0 que estão fora de Δ' o plano determinado por l_1 e l_2 é bem definido. Mas isso não acontece para os pontos em $\tilde{Y}'_0 = Y'_0 \cap \Delta'$. A explosão

de Y'_0 em \tilde{Y}'_0 corrige esse defeito, pelo menos fora de $Y'_0 \cap (E' \times E') \cap \Delta'$, no sentido que fibra de $E''_0 = E'' \cap \tilde{Y}'_0$ sobre $(l_0, l_1, l_2) \in Y'_0$, com $l_1 = l_2 = l \neq l_0$, é um \mathbb{P}^1 que corresponde a escolher um plano contendo l . A fibra de E''_0 em cima de $(\varphi, \varphi) \in Y'_0 \cap (E' \times E') \cap \Delta'$ também é um \mathbb{P}^1 , mas como vimos, ex.5.3.0.0.1, p. 127, parametriza um feixe de quádras contendo l_0 .

5.4 As órbitas fechadas na ação induzida em \mathbb{G}''

Como havíamos dito, para fazer a verificação de que Y''_0 realmente coincide com \tilde{Y}'_0 , transformada estrita de Y'_0 , é necessário fazer um estudo das órbitas fechadas na ação induzida em \mathbb{G}'' por meio do estabilizador da reta l_0 em $\mathbb{PGL}(4, \mathbb{C})$. De fato, é suficiente mostrarmos que a referida igualdade ocorre em vizinhanças de representantes para as órbitas fechadas em \tilde{Y}'_0 .

Para tanto, começamos lembrando que a ação de $\mathbb{PGL}(4, \mathbb{C})$ em \mathbb{P}^3 induz uma ação na grassmanniana $\mathbb{G} = \mathbb{G}r[1, 3]$. No nosso caso, estamos interessados em estudar a ação induzida em \mathbb{G}'' . Devemos então considerar o estabilizador de l_0 , $\mathbb{H}_{l_0} \subset \mathbb{PGL}(4, \mathbb{C})$. Um elemento $A \in \mathbb{H}_{l_0}$ é do tipo

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}.$$

A ação de \mathbb{H}_{l_0} em \mathbb{G} produz uma decomposição da grassmanniana \mathbb{G} em três órbitas

$$\mathbb{G} = \overline{\langle x_2, x_3 \rangle} \cup \overline{\langle x_0, x_2 \rangle} \cup \{l_0\},$$

sendo que o ponto fixo l_0 é a única órbita fechada.

Por outro lado, como \mathbb{H}_{l_0} deixa o centro de explosão invariante, também temos uma ação de \mathbb{H}_{l_0} em \mathbb{G}' . Fora do divisor excepcional E' , a ação é como agir em \mathbb{G} .

O que precisamos agora é entender com clareza a ação de \mathbb{H}_{l_0} em E' .

Antes de descrever formalmente esta ação, lembramos que um ponto de $E'_0 = E' \cap \tilde{Y}'_0$ corresponde a uma configuração geométrica em \mathbb{P}^3 , em que temos a bandeira formada por um plano contendo l_0 e um ponto marcado em cima de l_0 . É fácil ver que dadas

duas configurações desse tipo podemos enviar uma na outra, agindo com um elemento adequado de \mathbb{H}_{l_0} . Assim, como a ação em \mathbb{G}' é induzida pela ação em \mathbb{P}^3 , vemos que a ação de \mathbb{H}_{l_0} em E' deve ser tal que E'_0 seja uma órbita. De fato, veremos que $E' \setminus E'_0$ também é uma órbita e portanto E'_0 é a única órbita fechada, na ação de \mathbb{H}_{l_0} em \mathbb{G}' .

Com efeito, mais uma vez lembramos que

$$E' = \mathbb{P}(\mathbb{T}_{l_0}G) \quad \text{e} \quad \mathbb{T}_{l_0}G = \text{Hom}(l_0, \mathcal{F}/l_0).$$

Assim, um ponto de E' é representado por um elemento não nulo $\varphi \in \mathbb{T}_{l_0}G$. Por outro lado, os elementos de \mathcal{F} são funcionais lineares em \mathbb{C}^4 e a ação de \mathbb{H}_{l_0} em \mathcal{F} , induzida pela ação em \mathbb{C}^4 , é definida por $A \cdot x_i = x_i \circ A^{-1}$, para $i = 0, \dots, 3$ e $\forall A \in \mathbb{H}_{l_0}$. Em particular, para todo $A \in \mathbb{H}_{l_0}$ temos um operador linear $A : \mathcal{F} \rightarrow \mathcal{F}$, $A(x_i) := A \cdot x_i$. Esse mapa deixa o subespaço $l_0 \subset \mathcal{F}$ invariante e portanto temos operadores lineares $A^{-1} = A^{-1}_{|_{l_0}}$ e \overline{A} , induzidos em l_0 e em \mathcal{F}/l_0 , respectivamente. Dado $\varphi \in \mathbb{T}_{l_0}G$, montamos o diagrama

$$\begin{array}{ccc} l_0 & \xrightarrow{\varphi} & \mathcal{F}/l_0 \\ A^{-1} \uparrow & & \downarrow \overline{A} \\ l_0 & \xrightarrow[A \cdot \varphi]{} & \mathcal{F}/l_0 \end{array}$$

A seta tracejada é exatamente a definição da ação, isto é, $A \cdot \varphi := \overline{A} \circ \varphi \circ A^{-1}$. A verificação de que isso realmente define uma ação, é trivial. Verificações corriqueiras mostram que essa ação produz o efeito geométrico esperado, ou seja, E'_0 é uma órbita, e escolhemos como representante o elemento $\varphi_{20} \in E'$ definido por

$$\varphi_{20}(x_0) = x_2 \quad \text{e} \quad \varphi_{20}(x_1) = 0.$$

O ponto φ_{20} em coordenadas locais corresponde a $(0, 0, 0, 0) \in E'$, origem do sistema de coordenadas locais que fixamos em \mathbb{G}' . Do mesmo modo, $E' \setminus E'_0$ também é uma órbita, e escolhemos como representante o elemento $\varphi_{23} \in E'$ definido por

$$\varphi_{23}(x_0) = x_2 \quad \text{e} \quad \varphi_{23}(x_1) = x_3.$$

Portanto, temos a decomposição em órbitas de dimensão 4, 3, 3, 2, respectivamente.

$$\mathbb{G}' = \overline{\langle x_2, x_3 \rangle} \cup \overline{\langle x_0, x_2 \rangle} \cup \overline{\varphi_{23}} \cup \overline{\varphi_{20}}.$$

Proposição 5.4.1. *A órbita de φ_{20} é a única órbita fechada na ação de \mathbb{H}_{l_0} em \mathbb{G}' .*

Prova: É claro que a órbita $\overline{\varphi}_{20}$ é fechada. Para mostrar que é a única, basta ver que $\overline{\varphi}_{23}$ não é fechada, pois as outras duas já sabemos que não o são. Para isso, consideremos o subgrupo a um parâmetro $A : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{H}_{l_0}$, com

$$A_t := A(t) := \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & t^2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & t \end{pmatrix}$$

Assim, se definirmos $\varphi_t := A_t \cdot \varphi_{23}$, segue que $\varphi_t(x_0) = x_2$ e $\varphi_t(x_1) = tx_3$. Portanto, φ_{20} está na aderência de $\overline{\varphi}_{23}$ e por conseguinte $\overline{\varphi}_{20}$ é a única órbita fechada na ação de \mathbb{H}_{l_0} em \mathbb{G}' . \square

Observação 5.4.0.1. Sempre que denotarmos um ponto de $E' = \mathbb{P}(\mathbb{T}_{l_0}\mathbb{G})$ na forma φ_{ij} , ficará subentendido que

$$\varphi_{ij}(x_0) = \overline{x}_i \quad \text{e} \quad \varphi_{ij}(x_1) = \overline{x}_j,$$

onde a barra denota a classe em \mathcal{F}/l_0 . Em particular, $i \in \{0, 1\}$ implica que $\varphi_{ij}(x_0) = 0$ e do mesmo modo, $j \in \{0, 1\}$ implica que $\varphi_{ij}(x_1) = 0$.

Agora consideremos \mathbb{H}_{l_0} agindo diagonalmente em $\mathbb{G}' \times \mathbb{G}'$, isto é,

$$A \cdot (x, y) := (A.x, A.y), \quad \forall A \in \mathbb{H}_{l_0}.$$

Note que esta ação deixa a diagonal $\Delta' \subset \mathbb{G}' \times \mathbb{G}'$ invariante e portanto teremos uma ação induzida em \mathbb{G}'' . Vamos mostrar que a ação de \mathbb{H}_{l_0} em $\mathbb{G}' \times \mathbb{G}'$, possui somente uma órbita fechada, cujo representante será denotado por

$$\varphi_{2020} := (\varphi_{20}, \varphi_{20}) \in \Delta'.$$

Para isso, serão úteis os dois lemas a seguir.

Lema 5.4.1.1. *O estabilizador de φ_{20} é o subgrupo de \mathbb{H}_{l_0} dado pelas equações*

$$a_{21} = 0 \quad \text{e} \quad a_{34} = 0.$$

Prova: Com efeito, como $\dim(\overline{\varphi_{20}}) = \dim(E'_0) = 2$, segue que

$$\dim(\mathbb{H}_{\varphi_{20}}) = \dim(\mathbb{H}_{l_0}) - 2 = 11 - 2 = 9.$$

Além disso, os elementos $B \in \mathbb{H}_{l_0}$ do tipo

$$B = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 & 0 \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix}$$

fixam φ_{20} . Logo, por razões dimensionais, vemos que $\mathbb{H}_{\varphi_{20}}$ é dado em \mathbb{H}_{l_0} pelas condições

$$a_{21} = 0 \quad \text{e} \quad a_{34} = 0.$$

Geometricamente, φ_{20} corresponde à configuração em que temos l_0 contida no plano $x_1 = 0$ e o ponto distinguido $p = (0, 0, 0, 1) \in l_0$. A condição $a_{34} = 0$ é para que o ponto p seja fixado e $a_{21} = 0$ é a condição complementar para que o plano seja fixado. \square

Observação 5.4.0.2. Observamos que $\mathbb{H}_{\varphi_{20}}$ é um grupo solúvel, pois $\varphi_{02} \in \overline{\varphi_{20}}$ e o estabilizador de φ_{02} é solúvel, haja vista ser formado por matrizes triangulares. Portanto, como os estabilizadores de elementos numa mesma órbita são conjugados, segue a solubilidade de $\mathbb{H}_{\varphi_{20}}$. Esse fato será usado ainda nesta seção, quando quisermos encontrar as órbitas fechadas em E'' . Em virtude da solubilidade, as órbitas fechadas serão detectadas como pontos fixos da fibra, pela ação do estabilizador do ponto base, sobre o representante da órbita fechada de $\mathbb{G}' \times \mathbb{G}'$ (veja corolário 4.3 em [26]).

Lema 5.4.1.2. *O ponto $\varphi_{2020} = (\varphi_{20}, \varphi_{20})$ está na aderência da órbita de $(\varphi_{20}, A \cdot \varphi_{20})$, para qualquer $A \in \mathbb{H}_{l_0}$.*

Prova: De fato, observando que $\{\varphi_{20}, \varphi_{02}, \varphi_{30}, \varphi_{03}\}$ é uma base para $\text{Hom}(l_0, \mathcal{F}/l_0)$, podemos escrever

$$A \cdot \varphi_{20} = a\varphi_{20} + b\varphi_{02} + c\varphi_{30} + d\varphi_{03}$$

Agora, sejam α e β duas constantes não nulas, $n \in \mathbb{N}$ e consideremos os subgrupos a um parâmetro $A_t, B_t : \mathbb{C}^* \rightarrow \mathbb{H}_{\varphi_{20}}$, definidos por

$$A_t := \begin{pmatrix} \alpha & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & t & 0 \\ 0 & 0 & -1 & t^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad B_t := \begin{pmatrix} 1 & \beta t^n & 0 & 0 \\ 0 & t^{n+1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Assim, temos que

$$\begin{aligned} A_t \cdot \varphi_{30}(x_0) &= A_t \circ \varphi_{30} \circ A_t^{-1}(x_0) = A_t \circ \varphi_{30}(x_0 \circ A_t) \\ &= A_t \circ \varphi_{30}(\alpha x_0) = \alpha A_t(x_3) = \alpha \cdot x_3 \circ A_t^{-1}. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} x_3 \circ A_t^{-1}(e_0) &= \frac{1}{\alpha} x_3(e_0) = 0 \\ x_3 \circ A_t^{-1}(e_1) &= x_3(e_1) = 0 \\ x_3 \circ A_t^{-1}(e_3) &= x_3(te_3) = t \\ x_3 \circ A_t^{-1}(e_2) &= x_3(t^{-1}e_2 + e_3) = 1. \end{aligned}$$

O conjunto $\{e_0, e_1, e_3, e_4\}$ é a base de \mathbb{C}^4 dual de $\{x_0, x_1, x_2, x_3\} \subset \mathcal{F}$.

Portanto, podemos concluir que

$$A_t \cdot \varphi_{30}(x_0) = \alpha x_2 + t\alpha x_3.$$

Além disso,

$$\begin{aligned} A_t \cdot \varphi_{30}(x_1) &= A_t \circ \varphi_{30} \circ A_t^{-1}(x_1) = A_t \circ \varphi_{30}(x_1 \circ A_t) \\ &= A_t \circ \varphi_{30}(x_1) = A_t(0) = 0. \end{aligned}$$

Portanto,

$$A_t \cdot \varphi_{30} = \alpha \varphi_{20} + t \cdot \alpha \varphi_{30}.$$

De forma análoga, temos

$$A_t \cdot \varphi_{03} = \varphi_{02} + t\varphi_{03}, \quad A_t \cdot \varphi_{02} = \frac{1}{t}\varphi_{02} \text{ e } B_t \cdot \varphi_{02} = t^n(\beta\varphi_{20} + t\varphi_{02})$$

Assim, agindo sucessivamente com A_t e B_t em $A \cdot \varphi_{20}$, ficamos com

$$(A_t A) \cdot \varphi_{20} = (a + \alpha c)\varphi_{20} + \left(\frac{b}{t} + d\right)\varphi_{02} + ct\alpha\varphi_{30} + dt\varphi_{03}$$

$$(B_t A_t A) \cdot \varphi_{20} = (a + \alpha c + \beta b t^{n-1} + \beta d t^n)\varphi_{20} + t^n(b + dt)\varphi_{02} + ct\alpha B_t \cdot \varphi_{30} + dt B_t \cdot \varphi_{03}.$$

Se $b = 0$ tomamos $n = 0$ e escolhemos α e β de modo que $a + \alpha c + \beta d \neq 0$. Se $b \neq 0$ tomamos $n = 1$ e escolhemos α e β de modo que $a + \alpha c + \beta b \neq 0$. Em qualquer caso, vemos que $(\varphi_{20}, \varphi_{20})$ está no fecho da \mathbb{H}_{l_0} -órbita de $(\varphi_{20}, A \cdot \varphi_{20})$. \square

Em particular, se φ_{20} não está na órbita de $A \cdot \varphi_{20}$ pela ação de $\mathbb{H}_{\varphi_{20}}$, temos que $(\varphi_{20}, \varphi_{20})$ não está na órbita de $(\varphi_{20}, A \cdot \varphi_{20})$ pela ação de \mathbb{H}_{l_0} e conseqüentemente essa órbita não é fechada.

Proposição 5.4.2. *A órbita de φ_{2020} é a única órbita fechada na ação de \mathbb{H}_{l_0} em $\mathbb{G}' \times \mathbb{G}'$.*

Prova: Sejam $\mathbf{O} \subset \mathbb{G}' \times \mathbb{G}'$ uma órbita fechada e p_1, p_2 as projeções no primeiro e segundo fator respectivamente. Então lembrando que órbita fechada projeta-se em órbita fechada temos

$$p_1(\mathbf{O}) = p_2(\mathbf{O}) = \overline{\varphi_{20}}.$$

Assim, tomando um representante $(x, y) \in \mathbf{O}$, segue que

$$x \in \overline{\varphi_{20}} \quad \text{e} \quad y \in \overline{\varphi_{20}}.$$

Logo, $y = A \cdot x$ para algum $A \in \mathbb{H}_{l_0}$. Ademais, podemos supor sem perda de generalidade que $x = \varphi_{20}$. Portanto,

$$\mathbf{O} = \overline{(\varphi_{20}, A \cdot \varphi_{20})}.$$

Note que para provarmos que $\mathbf{O} = \overline{(\varphi_{20}, \varphi_{20})}$, devemos mostrar que existe $B \in \mathbb{H}_{l_0}$ tal que

$$(B \cdot \varphi_{20}, BA \cdot \varphi_{20}) = (\varphi_{20}, \varphi_{20}),$$

ou seja, deve ocorrer que $B \in \mathbb{H}_{\varphi_{20}}$, onde $\mathbb{H}_{\varphi_{20}}$ é o estabilizador de φ_{20} .

Ora, o lema 5.4.1.2, p. 132 nos diz que $(\varphi_{20}, \varphi_{20})$ está na aderência de \mathbf{O} ; como \mathbf{O} é uma órbita fechada, um tal B de fato existe. \square

Falta determinar as órbitas fechadas na ação de \mathbb{H}_{l_0} em \mathbb{G}'' . Ora, sabemos que órbitas fechadas se projetam em órbitas fechadas. Por outro lado, como a única órbita fechada $\overline{\varphi_{2020}} \subset \Delta' \subset \mathbb{G}' \times \mathbb{G}'$ está no centro de explosão, vemos que as órbitas fechadas de \mathbb{G}'' vivem em E'' . Como $\mathbb{H}_{\varphi_{20}}$ é solúvel, essas órbitas são detectadas como pontos fixos da fibra $E''_{\varphi_{2020}}$ pela ação de $\mathbb{H}_{\varphi_{2020}} = \mathbb{H}_{\varphi_{20}}$ (veja corolário 4.3 em [26]).

Por outro lado, temos que

$$E''_{\varphi_{2020}} = \mathbb{P}(\mathbb{T}_{\varphi_{20}} \mathbb{G}').$$

Assim, para entendermos a ação de $\mathbb{H}_{\varphi_{20}}$ em $E''_{\varphi_{2020}}$ é suficiente entendermos a ação em $\mathbb{T}_{\varphi_{20}} \mathbb{G}'$. Mais especificamente, nosso interesse inicial é determinar as órbitas fechadas em $E''_0 = E'' \cap \tilde{Y}'_0$ e para isso vamos lançar mão das identificações que deduzimos (veja eq.5.28, p. 127). Bem, a quádrlica associada ao ponto $\varphi_{20} \in E'$ é

$$Q_{\varphi_{20}} = x_1 x_2.$$

Logo, pelo que vimos no exemplo 5.3.0.0.1, p. 127,

$$(E''_0)_{\varphi_{2020}} = \mathbb{P}(\langle x_0^2, x_1x_2 \rangle),$$

onde $\langle x_0^2, x_1x_2 \rangle = \mathcal{G}_2(l_0)_{\varphi_{20}}$ é o quociente de

$$\mathcal{F}_2^2(l_0)_{\varphi_{20}} = \langle x_0^2, x_0x_1, x_1^2, x_1x_2 \rangle$$

por $x_1l_0 = \langle x_0x_1, x_1^2 \rangle$.

Desse modo, como $\mathbb{H}_{\varphi_{20}}$ fixa φ_{20} , na verdade x_1 é fixado, a menos de fator constante, x_2 é fixado módulo l_0 e x_0 é enviado em $a_{11}x_0 + a_{12}x_1$. Temos que a ação de $\mathbb{H}_{\varphi_{20}}$ em $\langle x_0^2, x_1x_2 \rangle$ certamente fixa x_1x_2 e x_0^2 como elementos de $\mathcal{G}_2(l_0)_{\varphi_{20}}$. Logo esses dois vetores representam pontos fixos em $(E'' \cap \tilde{Y}'_0)_{\varphi_{2020}}$.

Ademais, eles são os únicos pontos fixos em $(E'' \cap \tilde{Y}'_0)_{\varphi_{2020}}$. De fato, dado $ax_0^2 + bx_1x_2 \in \langle x_0^2, x_1x_2 \rangle$, temos que a ação é a que segue.

$$\begin{aligned} ax_0^2 + bx_1x_2 &\mapsto a(a_{11}x_0 + a_{12}x_1)^2 + ba_{22}x_1(a_{31}x_0 + a_{32}x_1 + a_{33}x_2) \\ &\underbrace{=}_{\text{módulo } x_1l_0} aa_{11}^2x_0^2 + ba_{22}a_{33}x_1x_2. \end{aligned}$$

Logo, para $a_{11}^2 \neq a_{22}a_{33}$, vemos que $ax_0^2 + bx_1x_2$ só é invariante quando $a = 0$ ou $b = 0$.

Portanto, devido a solubilidade de $\mathbb{H}_{\varphi_{20}}$, temos que esses dois pontos fixos representam as duas únicas órbitas fechadas em $E''_0 = E'' \cap \tilde{Y}'_0$. Na verdade essas são as duas únicas órbitas fechadas em \tilde{Y}'_0 , pois órbita fechada se projeta em órbita fechada e a base $\mathbb{G}' \times \mathbb{G}'$ possui uma única órbita fechada, contida no centro de explosão. Denotaremos os representantes por x_{1212} e x_{1202} , correspondendo a x_1x_2 e x_0^2 , respectivamente.

A primeira dessas órbitas pode ser representada exatamente pela origem do sistema de coordenadas locais que adotamos em \mathbb{G}'' . Quanto à órbita de x_{1202} , temos duas alternativas, uma é tentar encontrar um representante na vizinhança que fixamos e a outra é mudar de vizinhança. Preferimos a segunda opção.

De fato, se na explosão de $\mathbb{G}' \times \mathbb{G}'$ ao longo da diagonal, tomarmos a equação do divisor excepcional como sendo $b_3 - a_3$ em vez de $b_1 - a_1$, então nessa nova vizinhança a origem estará na órbita de x_{1202} e além disso, as equações locais do lugar de indeterminação de ψ'' serão

$$d_2 = 0, a_4 - a_2a_3 = 0 \text{ e } d_4 - a_2 = 0.$$

Note que estas ainda coincidem com as equações da transformada estrita de Y'_0 .

Com isso, concluímos que Y_0'' coincide esquematicamente com a transformada estrita de Y_0' (veja lema 4.4 , [26]).

Observação 5.4.0.3. Antes de encerrarmos essa seção, observamos que o ponto de $E''_{\varphi_{2020}}$ para o qual temos oito cúbricas que geram um ideal com polinômio de Hilbert $4t$ (veja 5.30, p. 128), também é um ponto fixo pela ação de $\mathbb{H}_{\varphi_{2020}}$. De fato, esse ponto corresponde à (classe da) quádrlica x_1x_3 , a qual é definida módulo $\mathcal{F}_2^2(l_0)_{\varphi_{20}} = \langle l_0^2, x_1x_2 \rangle$ (veja eq.5.29, p. 128). A ação nessa quádrlica é dada por

$$x_1x_3 \mapsto x_1(a_{41}x_0 + a_{42}x_1 + a_{43}x_2 + a_{44}x_3) \underset{\text{módulo } \mathcal{F}_2^2(l_0)_{\varphi_{20}}}{=} x_1x_3.$$

Desse modo, x_1x_3 é fixado como elemento de $S_2\mathcal{F}^{l_0}/\mathcal{F}_2^2(l_0)_{\varphi_{20}}$. O ponto de $E''_{\varphi_{2020}}$ que representa a classe de x_1x_3 será denotado por φ_{2030} .

Por outro lado, o ponto de $E''_{\varphi_{2020}}$ correspondente à quádrlica x_0x_3 (representa um outro gerador de $\in \mathbb{T}_{\varphi_{20}}E'$, veja 5.29, p. 128) não é fixo pela ação de $\mathbb{H}_{\varphi_{2020}}$. Assim, na fibra $E''_{\varphi_{2020}}$ teremos somente três pontos fixos e conseqüentemente, devido à solubilidade de $\mathbb{H}_{\varphi_{2020}} = \mathbb{H}_{\varphi_{20}}$, em E'' aparecem somente três órbitas fechadas pela ação de \mathbb{H}_{l_0} , duas delas contidas em Y_0'' . Na verdade, podemos concluir que essas três são as únicas órbitas fechadas em \mathbb{G}'' , pois como já observamos as órbitas fechadas de \mathbb{G}'' vivem em E'' .

5.5 A segunda explosão

Como já observamos (veja 5.7, p. 113) o mapa racional

$$\psi'' : \mathbb{G}'' \dashrightarrow \text{Gr}(8, S_3\mathcal{F}^{l_0})$$

é dado pela matriz

$$[\psi''] = \begin{pmatrix} \mathcal{I}_7 & \star_{7 \times 10} \\ 0_{1 \times 7} & \mathcal{P}'_2 \end{pmatrix}.$$

O lugar de indeterminação desse mapa, $Y_0'' \subset \mathbb{G}''$, é definido localmente pelo ideal

$$J_1 = \langle d_2, a_4 - a_2a_3, d_4 - a_2d_3 \rangle,$$

gerado pelas entradas de \mathcal{P}'_2 . Geometricamente, o ponto geral de Y_0'' corresponde a um triedro, cf. Fig. 5.3, p. 123.

Agora passemos à explosão $b_{Y_0''} : \mathbb{G}''' \rightarrow \mathbb{G}''$. Em coordenadas locais podemos escrever as equações na forma

$$\begin{cases} a_4 - a_2 a_3 = d_2 \lambda_1 \\ d_4 - a_2 d_3 = d_2 \lambda_2 \end{cases}$$

onde d_2 é a equação do divisor excepcional e

$$a_1, a_2, a_3, t, d_2, d_3, \lambda_1, \lambda_2$$

são as coordenadas locais em \mathbb{G}''' .

Essa explosão resolve a indeterminação de ψ'' e produz um morfismo

$$\psi''' : \mathbb{G}''' \rightarrow \text{Gr}(8, S_3 \mathcal{F}^{l_0}). \quad (5.31)$$

4.5.1 os sistemas de cúbicas para os ponto de $E''' \cap \tilde{E}''$

No que segue, iremos descrever, de modo livre de coordenadas, a imagem de ψ''' em cada ponto de $E''' = \mathbb{P}(\mathcal{N}_{Y_0''/\mathbb{G}''})$. Observamos que essa descrição será útil para a construção do código para MAPLE para implementação da fórmula de Bott. Começemos analisando um exemplo.

Exemplo 5.5.0.0.1. Consideremos a subvariedade $X \subset \mathbb{G}'''$ dada localmente pelo ideal $\langle t, d_2, a_2 \rangle$, correspondendo às ternas (l_0, l_1, l_2) tais que “ $l_1 = l_2'$ e intersectam l_0 no ponto $(0, 0, 0, 1)$ ”. Ou seja, X é uma seção de $E''' \cap \tilde{E}''$, onde \tilde{E}'' é a transformada estrita de $E'' \subset \mathbb{G}''$ por meio de $b_{Y_0''}$. Em cima de X , as 8 cúbicas são as seguintes

$$\left\{ \begin{array}{l} c_1 = x_0(x_0 + a_1 x_2)^2 = x_0^3 + \dots \\ c_2 = x_1(x_0 + a_1 x_2)^2 = x_0^2 x_1 + \dots \\ c_3 = x_1(x_0 + a_1 x_2)(x_1 + a_1 a_3 x_2) = x_0 x_1^2 + \dots \\ c_4 = x_1(x_1 + a_1 a_3 x_2)^2 = x_1^3 + \dots \\ c_5 = x_2(a_3 x_0 - x_1)(x_0 + a_1 x_2) = -x_0 x_1 x_2 + \dots \\ c_6 = x_2(a_3 x_0 - x_1)(x_1 + a_1 a_3 x_2) = x_1^2 x_2 + \dots \\ c_7 = x_2(d_3 x_0(x_0 + a_1 x_2) - x_2(a_3 x_0 - x_1)) = x_1 x_2^2 + \dots \\ c_8 = x_3((\lambda_1(x_0 + a_1 x_2) - (x_1 + a_1 a_3 x_2))(a_3 x_0 - x_1) - \lambda_2(d_3 x_0(x_0 + a_1 x_2) \\ - x_2(a_3 x_0 - x_1))) \end{array} \right.$$

Com a ajuda do “SINGULAR” podemos verificar que o ideal gerado por essas cúbicas define um subesquema de \mathbb{P}^3 , com polinômio de Hilbert $3t + 3$ e tendo como suporte a

união da reta l_0 com a reta

$$l = \langle x_0 + a_1x_2, x_1 + a_1a_3x_2 \rangle = \langle x_0 + a_1x_2, a_3x_0 - x_1 \rangle.$$

Além disso, quando $a_1 \neq 0$, a reta l é uma componente “dupla planar”, contida no plano cuja equação é $h = a_1d_3(x_0 + a_1x_2) + (a_3x_0 - x_1)$. Esse plano não tem nada de misterioso, ele pode ser entendido da seguinte forma. Se considerarmos uma reta do tipo

$$l_\lambda = \langle x_0 + (a_1 + \lambda)x_2, (a_3 + d_3\lambda)x_0 - x_1 \rangle,$$

ou seja, incidente a l_0 também no ponto $(0, 0, 0, 1)$, então h é exatamente o limite do plano determinado por l e l_λ quando fazemos l_λ tender a l . De fato, o plano determinado por l e l_λ é um elemento da interseção vetorial

$$\langle x_0 + a_1x_2, a_3x_0 - x_1 \rangle \cap \langle x_0 + (a_1 + \lambda)x_2, (a_3 + d_3\lambda)x_0 - x_1 \rangle.$$

Portanto devemos “determinar” $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ tais que

$$a(x_0 + a_1x_2) + b(a_3x_0 - x_1) = c(x_0 + (a_1 + \lambda)x_2) + d((a_3 + d_3\lambda)x_0 - x_1)$$

Uma manipulação elementar das relações consequentes da igualdade acima fornece a identidade

$$a\lambda = (d_3a_1 + d_3\lambda)b\lambda$$

Agora dividindo por λ , obtemos $a = (a_1d_3 + d_3\lambda)b$. Portanto, o plano determinado por l e l_λ é

$$h_\lambda = (a_1d_3 + d_3\lambda)(x_0 + a_1x_2) + (a_3x_0 - x_1)$$

e tem como limite (quando $\lambda \rightarrow 0$) exatamente o plano h .

Vale observar que temos a relação

$$a_1c_7 + c_5 = x_0x_2h.$$

Portanto, se $a_1 \neq 0$ podemos substituir c_7 por x_0x_2h . Aparentemente é por esse motivo que, quando $a_1 \neq 0$, a componente com suporte em l é planar. Ademais, como c_7 é exatamente a nova cúbica que surge após a primeira explosão, vemos que a fibra de $E'' \cap Y_0''$ sobre $(l_0, l, l) \in \Delta' \cap Y_0'$, $l \neq l_0$ pode ser pensada como um “ \mathbb{P}^1 ” que parametriza os planos contendo l . Isto confirma o que já havíamos dito na observação [5.3.1.1](#), p. [128](#).

Quando $a_1 = 0$, a componente com suporte em l_0 tem grau 3 e como a substituição acima não pode ser feita, ela não é planar mas sim contida na quádrlica

$$d_3x_0^2 - x_2(a_3x_0 - x_1) = 0,$$

que é um fator de c_7 . Novamente, confirmando o que dissemos na observação 5.3.1.1, a fibra de $E'' \cap Y_0''$ sobre $(l_0, l, l) \in \Delta' \cap Y_0'$, $l = l_0$, é um \mathbb{P}^1 de quádrlicas bem determinadas contendo l_0 . Sem surpresas até aqui.

Objetivamente, o espaço formado pelas seis primeira cúbicas é

$$(\mathcal{F}_2^2(l_0))_{(l_0, l)} \cdot l \subset S_3\mathcal{F}^{l_0}.$$

E é assim desde $\mathbb{G}' \times \mathbb{G}'$, com $l_1 = l_2 = l$. Por outro lado, o fato de estarmos em E''' , que se projeta em Y_0'' , implica que existe um plano h (no caso, $a_3x_0 - x_1$) contendo l_0 e l . No caso em que $l = l_0$, tal h é o fator de um representante da quádrlica $Q \in S_2\mathcal{F}/l_0^2$ correspondente a um plano contendo l_0 . Temos também uma forma linear h_1 , representante de um elemento não nulo de \mathcal{F}/l , responsável por marcar $l_0 \cap l$ em l (no caso em que $l = l_0$, h_1 é o fator linear de um representante da quádrlica Q , que dá origem a um elemento não nulo de \mathcal{F}/l_0).

Ademais, por estarmos em $\tilde{E}'' \cap E'''$, que se projeta em $E'' \cap Y_0''$, temos que a sétima cúbica é proveniente da multiplicação de h_1 , por um elemento $\tilde{Q} \in \mathcal{F}_2^2(l_0)_{(l_0, l)}$ bem definido módulo $h \cdot l$, ou seja, \tilde{Q} representa um elemento de

$$\mathcal{G}_2(l_0)_{(l_0, l)} = (\mathcal{F}_2^2(l_0))_{(l_0, l)} / (h \cdot l),$$

corroborando assim, com a identificação

$$(E'' \cap Y_0'')_{(l_0, l, l)} = \mathbb{P}(\mathcal{G}_2(l_0)_{(l_0, l)}).$$

Por fim, o fator linear x_3 da cúbica c_8 é simplesmente um representante para um elemento de \mathcal{F}/l , independente de \bar{h}_1 . O fator quadrático de c_8 , é para ser pensado como está escrito, ou seja, um elemento do espaço tridimensional

$$\langle h.l, \tilde{Q} \rangle \subset \mathcal{F}_2^2(l_0)_{(l_0, l)}.$$

Para ilustrar a discussão acima, explicitemos por exemplo os sistemas de cúbicas associados aos pontos da fibra de E''' sobre $(l_0, l_1, l_2) \in \Delta' \cap Y_0'$, com $l_1 = l_2 = l = \langle x_i, x_j \rangle$,

com $i = 0, 1$ e $j = 2, 3$. Neste caso temos

$$(\mathcal{F}_2^2(l_0))_{(l_0, l)} = \langle x_i^2, x_i x_k, x_k x_j, x_i x_j \rangle \text{ e } \mathcal{F}/l = \langle x_k, x_m \rangle, \text{ com } \{i, k\} = \{0, 1\} \text{ e } \{j, m\} = \{2, 3\}.$$

Assim, $h = x_i$ e $h_1 = x_k$. As seis primeiras cúbicas são

$$(\mathcal{F}_2^2(l_0))_{(l_0, l)}.l = \langle x_i^3, x_i^2 x_k, x_i x_k x_j, x_i^2 x_j, x_k x_j^2, x_i x_j^2 \rangle$$

Para as outras, temos $c_7 = x_k \tilde{Q}$, onde \tilde{Q} deve ser um elemento de $\mathcal{G}_2(l_0)_{(l_0, l)} = \langle x_i x_k, x_k x_j \rangle$.

Portanto,

$$\begin{cases} c_7 &= x_k^2 (a x_i + b x_j), \\ c_8 &= x_m (c x_i^2 + d x_i x_j + e (a x_i x_k + b x_k x_j)). \end{cases}$$

Assim, temos um \mathbb{P}^1 de “escolhas” possíveis para c_7 e depois temos um \mathbb{P}^2 de liberdade para c_8 . Isso é coerente com as explosões que foram feitas, pois $E''' \cap \tilde{E}''$ tem dimensão igual a 6 e se projeta sobre $\Delta' \cap Y'_0$, que tem dimensão igual a 3. Logo cada fibra tem dimensão igual a 3, e pinta como um \mathbb{P}^2 -fibrado em cima de um \mathbb{P}^1 -fibrado sobre $\Delta' \cap Y'_0$.

Vejamos um outro exemplo. Consideremos a fibra de E''' sobre

$$(l_0, l_1, l_2) \in \Delta' \cap Y'_0 \cap (E' \times E').$$

Nesse caso temos $l_0 = l_1 = l_2 = l$ e

$$(\mathcal{F}_2^2(l_0))_{(l_0, l)} = \langle x_0^2, x_0 x_1, x_1^2, (a_0 x_0 + a_1 x_1)(b_2 x_2 + b_3 x_3) \rangle$$

Vamos considerar os quatro casos em que a última quádriga Q é monomial. Escrevamos

$$Q = x_i x_j, \text{ com } i = 0, 1 \text{ e } j = 2, 3.$$

Temos que as seis primeiras cúbicas são

$$(\mathcal{F}_2^2(l_0))_{(l_0, l)}.l = \langle x_0^3, x_0^2 x_1, x_0 x_1^2, x_1^3, x_0 x_i x_j, x_1 x_i x_j \rangle$$

Além disso, $h = x_i$ e $h_1 = x_j$, donde $h \cdot l = \langle x_i^2, x_i x_k \rangle$, com $\{i, k\} = \{0, 1\}$. Portanto,

$$\begin{aligned} c_7 &= x_j (a x_k^2 + b x_i x_j), \\ c_8 &= x_m (c x_i^2 + d x_i x_k + e (a x_k^2 + b x_i x_j)), \end{aligned} \tag{5.32}$$

com $\{j, m\} = \{2, 3\}$.

Também nesse caso, a fibra de $E''' \cap \tilde{E}''$ aparece como um \mathbb{P}^2 -fibrado em cima de um \mathbb{P}^1 -fibrado sobre a variedade $\Delta' \cap Y'_0$. Isso encerra a descrição para os sistemas de cúbicas associados aos pontos de $E''' \cap \tilde{E}''$.

4.5.2 os sistemas de cúbicas associados aos pontos de $E''' \setminus \tilde{E}''$

Para os pontos de $E''' \setminus \tilde{E}''$, os sistemas de cúbicas admitem descrição livre de coordenadas, análoga à que acabamos de fazer na subseção anterior.

Os pontos de $E''' \setminus \tilde{E}''$ se projetam em $Y_0'' \setminus E''$. Neste caso o sistema de oito cúbicas independentes é obtido a partir de um sistema de sete cúbicas independentes, que na verdade já existem para os pontos de $Y_0' \setminus \Delta'$. De fato, vimos que fora de Δ' temos pelo menos sete cúbicas independentes (veja p. 112). Os coeficientes dessas sete cúbicas são modificados por meio das relações determinadas pelas equações locais das explosões.

A oitava cúbica, c_8 , aparece após a explosão de \mathbb{G}'' ao longo de Y_0'' e as contas locais (aqui, evitamos explicitar o sistema de cúbicas em coordenadas locais como fizemos no exemplo 5.5.0.0.1, p. 137) revelam que c_8 se escreve como o produto de um fator linear por um fator quadrático, que admitem a seguinte interpretação global.

Para qualquer ponto $(l_0, l_1, l_2) \in Y_0' \setminus \Delta'$ temos em correspondência uma forma linear h_1 que representa um elemento não nulo de \mathcal{F}/l_0 . De fato, lembrando que (veja eq. 5.21, p. 122) $Y_0' = \tilde{Y}_0 \times_{l_0^\perp} \tilde{Y}_0$, onde $l_0^\perp = \mathbb{P}(\mathcal{F}/l_0)$, temos que um ponto de Y_0' sempre vem acompanhado de um elemento não nulo de \mathcal{F}/l_0 . Assim, o fator linear da oitava cúbica c_8 é simplesmente um representante para o gerador de $\mathcal{F}/\langle l_0, h_1 \rangle$. No caso $l_1 \neq l_0 \neq l_2$, temos que h_1 representa o plano determinado por l_1 e l_2 . Caso contrário, se $l_i = l_0$ para $i = 1$ ou $i = 2$, então h_1 é o fator (de um representante) da quádrlica

$$Q_i \in (\mathcal{F}_2^2(l_0))_{(l_0, l_i)} = \langle l_0^2, Q_i \rangle,$$

que marca um ponto em l_0 , o qual é componente imersa do esquema definido pelo ideal gerado pelas quádrlicas $\langle l_0^2, Q_i \rangle$.

Já o fator quadrático da cúbica c_8 , observamos que ele é um elemento de

$$(\mathcal{F}_2^2(l_0))_{(l_0, l_1)} \cap (\mathcal{F}_2^2(l_0))_{(l_0, l_2)}.$$

Portanto, a cúbica c_8 é proveniente de

$$\mathcal{F}/\langle l_0, h_1 \rangle \cdot ((\mathcal{F}_2^2(l_0))_{(l_0, l_1)} \cap (\mathcal{F}_2^2(l_0))_{(l_0, l_2)}).$$

Vale destacar, que pelo fato de $(l_0, l_1, l_2) \in Y_0' \setminus \Delta'$, segue que

$$\dim_{\mathbb{C}}((\mathcal{F}_2^2(l_0))_{(l_0, l_1)} \cap (\mathcal{F}_2^2(l_0))_{(l_0, l_2)}) = 3.$$

Logo, temos um \mathbb{P}^2 de escolhas possíveis para a cúbica c_8 . Isso é exatamente o que esperamos, haja vista que o divisor excepcional E''' é um \mathbb{P}^2 -fibrado, obtido como projeção do fibrado normal de Y_0'' em \mathbb{G}'' .

Além disso, observe que o espaço tridimensional de cúbicas onde escolhemos c_8 , apresenta uma simetria desejável com respeito à permutação das retas l_1 e l_2 .

Vejamos então como ficam os sistemas de cúbicas associados aos pontos de E''' que vivem em cima de $(l_0, l_1, l_2) \in Y_0' \setminus \Delta'$. Temos quatro tipos de pontos:

$$\begin{aligned} (l_0, l_1, l_2) &\in Y_0' \setminus (\Delta' \cup E' \times E') \\ (l_0, l_1, l_2) &\in Y_0' \setminus (\Delta' \cup (\mathbb{G}' \setminus E') \times E') \\ (l_0, l_1, l_2) &\in Y_0' \setminus (\Delta' \cup E' \times (\mathbb{G}' \setminus E')) \\ (l_0, l_1, l_2) &\in (Y_0' \setminus \Delta') \cap E' \times E' \end{aligned}$$

No primeiro caso, tipicamente temos $l_1 = \langle x_0, x_j \rangle$ e $l_2 = \langle x_1, x_j \rangle, j = 2, 3$. Assim, as sete cúbicas iniciais são

$$(\mathcal{F}_2^2(l_0))_{(l_0, l_1)} \cdot l_2 + (\mathcal{F}_2^2(l_0))_{(l_0, l_2)} \cdot l_1 = l_0 l_1 l_2 = \langle x_0^2 x_1, x_0^2 x_j, x_0 x_1^2, x_0 x_1 x_j, x_0 x_j^2, x_1^2 x_j, x_1 x_j^2 \rangle.$$

Além disso,

$$\mathcal{F}_2^2(l_0)_{(l_0, l_1)} \cap \mathcal{F}_2^2(l_0)_{(l_0, l_2)} = \langle x_0 x_1, x_0 x_j, x_1 x_j \rangle.$$

Portanto,

$$c_8 = x_m(ax_0 x_1 + bx_0 x_j + cx_1 x_j), \text{ com } \{j, m\} = \{2, 3\}.$$

Para os pontos do segundo tipo temos $(l_0, l_1) \in \tilde{Y}_0 \cap E'$. Consideremos por exemplo $l_2 = \langle x_i, x_j \rangle$, com $i = 0, 1; j = 2, 3$. Assim, o ponto marcado em l_0 tem equação $x_j = 0$.

Portanto,

$$(\mathcal{F}_2^2(l_0))_{(l_0, l_1)} = \langle x_0^2, x_0 x_1, x_1^2, x_j(a_0 x_0 + a_1 x_1) \rangle.$$

Daí, vamos olhar para os casos $a_0 = 0$ e $a_1 = 0$. Logo, podemos escrever

$$(\mathcal{F}_2^2(l_0))_{(l_0, l_1)} = \langle x_i^2, x_i x_k, x_k^2, x_n x_j \rangle$$

$$(\mathcal{F}_2^2(l_0))_{(l_0, l_2)} = \langle x_i^2, x_i x_k, x_k x_j, x_i x_j \rangle,$$

com $n = 0, 1$ e $\{i, k\} = \{0, 1\}$.

Desse modo,

$$(\mathcal{F}_2^2(l_0))_{(l_0, l_1)} \cdot l_2 + (\mathcal{F}_2^2(l_0))_{(l_0, l_2)} \cdot l_1 = \langle x_i^2 x_k, x_i x_k^2, x_k^3, x_k^2 x_j, x_i^2 x_j, x_i x_k x_j, x_n x_j^2 \rangle.$$

Ademais,

$$\left\{ \begin{array}{l} \mathcal{F}_2^2(l_0)_{(l_0, l_1)} \cap (\mathcal{F}_2^2(l_0))_{(l_0, l_2)} = \langle x_i^2, x_i x_k, x_i x_j \rangle \\ \text{ou} \\ \mathcal{F}_2^2(l_0)_{(l_0, l_1)} \cap (\mathcal{F}_2^2(l_0))_{(l_0, l_2)} = \langle x_i^2, x_i x_k, x_k x_j \rangle, \end{array} \right.$$

conforme tenhamos $n = i$ ou $n = k$, respectivamente. Portanto,

$$c_8 = x_m(ax_i^2 + bx_i x_k + cx_i x_j) \text{ ou } c_8 = x_m(ax_i^2 + bx_i x_k + cx_k x_j).$$

Para os pontos do terceiro tipo, a descrição é a mesma que essa que acabamos de fazer.

Por fim, para os pontos do quarto tipo teremos $(l_0, l_1), (l_0, l_2) \in \tilde{Y}_0 \cap E'$. Assim, os esquemas $l_0 \sqcup l_1$ e $l_0 \sqcup l_2$ têm l_0 como suporte e possuem componente imersa com suporte em um mesmo ponto de l_0 . Desse modo, tipicamente teremos

$$(\mathcal{F}_2^2(l_0))_{(l_0, l_1)} = \langle x_0^2, x_0 x_1, x_1^2, x_0 x_j \rangle$$

$$(\mathcal{F}_2^2(l_0))_{(l_0, l_2)} = \langle x_0^2, x_0 x_1, x_1^2, x_1 x_j \rangle.$$

Daí, segue que

$$(\mathcal{F}_2^2(l_0))_{(l_0, l_1)} \cdot l_2 + (\mathcal{F}_2^2(l_0))_{(l_0, l_2)} \cdot l_1 = \langle x_0^3, x_0^2 x_1, x_0 x_1^2, x_1^3, x_0^2 x_j, x_0 x_1 x_j, x_1^2 x_j \rangle$$

$$\mathcal{F}_2^2(l_0)_{(l_0, l_1)} \cap (\mathcal{F}_2^2(l_0))_{(l_0, l_2)} = \langle x_0^2, x_0 x_1, x_1^2 \rangle.$$

Logo,

$$c_8 = x_m(ax_0^2 + bx_0 x_1 + cx_1^2).$$

Desse modo, em qualquer dos casos considerados acima, vemos que para cada ponto $(l_0, l_1, l_2) \in Y_0'' \setminus E''$, existe um \mathbb{P}^2 de escolhas possíveis para a estrutura esquemática, com polinômio de Hilbert $3t+3$ e suporte $l_0 \cup l_1 \cup l_2$. Como não há uma maneira de escolher uma delas, a solução é substituir cada ponto por um \mathbb{P}^2 e isso é feito por meio da explosão. O \mathbb{P}^2 que aparece é simplesmente a fibra de E''' , ou seja, a projetivização da fibra do fibrado normal de Y_0'' em \mathbb{G}'' . Vale notar que pontos distintos nesse \mathbb{P}^2 correspondem a subesquemas distintos de \mathbb{P}^3 .

Observação 5.5.0.1. Gostaríamos de enfatizar que todos os pontos de E''' são “bons”, no sentido que o polinômio de Hilbert dos ideais gerados pelas cúbicas correspondentes é $3t + 3$ e o espaço das quárticas que contêm o esquema correspondente, tem o posto esperado igual a 20. Mais precisamente, basta verificar essa afirmação para os sistemas de

cúbicas que obtemos quando fazemos $a = 0$ ou $b = 0$ em 5.32, p. 140, com $i = 1$ e $j = 2$, pois esses casos correspondem a olhar para as fibras de E''' sobre os representantes das órbitas fechadas em Y_0'' .

No entanto, deve-se observar que o mapa ψ''' definido em 5.31, p. 137 não é injetivo. Por exemplo, vimos em 5.30, p. 128 que o sistema de cúbicas correspondente ao ponto $\varphi_{2030} \in E'' \setminus Y_0''$ (veja obs. 5.4.0.3, p. 136) é dado por

$$\langle l_0^3, x_1x_2l_0, x_1x_3l_0 \rangle.$$

Por outro lado, se tomarmos $(\varphi_{20}, \varphi_{30}) \in E' \times E' \subset \mathbb{G}' \times \mathbb{G}'$, então por 5.1, p. 109 vemos que esse ponto está fora dos centros de explosão (logo corresponde a um ponto de \mathbb{G}''' distinto daquele que vive sobre φ_{2030}) e o sistema de cúbicas associado é (veja também obs. 4.3.0.1, p. 81 e eq. 4.9, p. 83) o mesmo exposto acima.

5.6 A indeterminação do mapa para quárticas

Nesta seção vamos construir uma variedade $\widehat{\mathbb{G}}$ obtida pela explosão de \mathbb{G}''' ao longo de uma subvariedade lisa. A variedade $\widehat{\mathbb{G}}$ será o almejado espaço de parâmetros para uma família plana de subesquema de \mathbb{P}^3 com grau 3, gênero aritmético -2, e cujo suporte coincide genericamente com a união de três retas disjuntas, uma delas fixada igual a l_0 .

Pelo que vimos na seção anterior, já temos um morfismo bem definido

$$\psi''' : \mathbb{G}''' \rightarrow \text{Gr}(8, S_3\mathcal{F}).$$

Assim, podemos definir o fibrado $\mathcal{F}_3(l_0) \rightarrow \mathbb{G}'''$ como sendo o “pull-back” do fibrado tautológico de $\text{Gr}(8, S_3\mathcal{F})$ e considerar o mapa de fibrados

$$\mu : \mathcal{F}_3(l_0) \otimes \mathcal{F} \rightarrow S_4\mathcal{F} \tag{5.33}$$

O posto esperado para esse mapa é 20, que é a dimensão do espaço das quárticas que contêm três retas em posição geral. Como a codimensão de $\mathcal{F}_3(l_0)$ em $S_3\mathcal{F}$ é 12 e

$$12 = \binom{5}{3} + \binom{2}{2} + \binom{1}{1},$$

o teorema de Macaulay-Gotzmann (veja [24], p.335) nos diz que a imagem de μ tem codimensão no máximo

$$17 = \binom{6}{4} + \binom{3}{3} + \binom{2}{2}.$$

Logo, o posto mínimo esperado para μ é $18 = 35 - 17$.

Felizmente, as contas locais mostram que a nossa situação não é das piores, isto é, o posto genérico é 20 e cai somente para 19 (posto mínimo efetivo) ao longo do subesquema fechado (não vazio)

$$Z_0 = Z(\wedge^{20}\mu) \subset \mathbb{G}'''.$$

Assim, o subesquema Z_0 é o lugar de indeterminação do mapa racional, induzido pelo mapa de fibrados que temos acima (veja 5.33, p. 144) e que denotamos com o mesmo símbolo

$$\mu : \mathbb{G}''' \dashrightarrow \text{Gr}(20, S_4\mathcal{F}).$$

Portanto, para resolver a indeterminação desse mapa, devemos fazer a explosão de \mathbb{G}''' ao longo de Z_0 .

Antes disso, observamos que Z_0 não intersecta E''' . De fato, como estes dois são fechados invariantes pela ação de \mathbb{H}_{l_0} , a sua interseção também é invariante e se não vazia deveria conter uma órbita fechada. Esta órbita seria detectada como ponto fixo da fibra de E''' sobre o representante de alguma órbita fechada de Y_0'' (ponto fixo pela ação do estabilizador do representante). Ora, em Y_0'' temos somente duas órbitas fechadas e pela observação 5.5.0.1, p. 143 as fibras de E''' sobre os representantes dessas órbitas não intersectam Z_0 . Assim,

$$Z_0 \cap E''' = \emptyset.$$

Desse modo, Z_0 se projeta isomorficamente para \mathbb{G}'' . Essa projeção será denotada por Z_0'' e é claro que $Z_0'' \cap Y_0'' = \emptyset$, lembrando que Y_0'' é o centro da explosão $\mathbb{G}''' \rightarrow \mathbb{G}''$.

Por outro lado, verificamos também que existem pontos “ruins” em $E'' \setminus Y_0''$, isto é,

$$Z_0'' \cap E'' \neq \emptyset.$$

De fato, de 5.30, p. 128 sabemos que $Z_0'' \cap E''_{\varphi_{2020}}$ contém o ponto correspondente à quádrlica x_1x_3 , denotado φ_{2030} . Esse ponto representa a única órbita fechada de E'' que está fora de Y_0'' e portanto, é a única órbita fechada em Z_0'' . Com efeito, basta lembrar (veja obs. 5.4.0.3, p. 136) que as tres órbitas fechadas de \mathbb{G}'' vivem em E'' , e que as outras duas estão contidas em Y_0'' , disjunto de Z_0'' . Na verdade veremos que $Z_0'' \cap E''$ coincide com a órbita φ_{2030} .

5.6.1 estudo local

Pelo que vimos logo acima, nos pontos de $Z''_0 \subset \mathbb{G}''$ temos sempre oito cúbricas bem definidas, mesmo em E'' . Em consonância com a observação 5.2.1.1, p. 112, vemos que isso ocorre, por exemplo, quando na explosão de $\mathbb{G}' \times \mathbb{G}'$ ao longo de Δ' tomamos a equação do divisor excepcional como $t = b_2 - a_2$. Façamos essa escolha. As equações da explosão ficam da forma

$$(\heartsuit) \quad \begin{cases} b_1 - a_1 = d_1 t, \\ b_3 - a_3 = d_3 t, \\ b_4 - a_4 = d_4 t. \end{cases} \quad (5.34)$$

As coordenadas locais em \mathbb{G}'' são

$$a_1, a_2, a_3, a_4, d_1, d_3, d_4, t.$$

Observamos que a origem desse sistema de coordenadas corresponde ao ponto $\varphi_{2030} \in E''$, representante da única órbita fechada de Z''_0 . Nessas coordenadas e para uma ordenação adequada da base monomial de $S_4 \mathcal{F}^{l_0}$, o mapa $\mu : \mathbb{G}''' \dashrightarrow \mathbb{G}r(20, S_4 \mathcal{F}^{l_0})$ é dado por uma matriz M de tipo 20×30 que tem o seguinte aspecto

$$M = \begin{pmatrix} I_{19} & \boxtimes \\ 0 & N \end{pmatrix}.$$

Aqui I_{19} é uma matrix triangular superior, de ordem 19, cujos elementos da diagonal principal são iguais a 1. Por outro lado, N é uma matrix linha, cujas entradas geram o ideal de Fitting dos menores 20×20 , da matriz M .

Com a ajuda do “SINGULAR” conseguimos verificar que esse ideal é dado por

$$\mathcal{I}_{Z''_0} = \langle a_1, d_1, d_3, a_4 - a_2 a_3, d_4 - a_3 \rangle.$$

Logo, Z''_0 tem dimensão 3 e é uma variedade não singular, pois o é na vizinhança de um representante da única órbita fechada que contém. Afinal, a pedra no sapato não era tão pontiaguda.

Acontece também que o ideal acima é o ideal da transformada estrita da subvariedade

$$Z'_0 = E'_0 \times_{l'_0} E'_0 \subset \mathbb{G}' \times \mathbb{G}'.$$

Um ponto genérico de Z'_0 representa uma configuração geométrica, como descrita abaixo

$$Z'_0 = \left\{ \begin{array}{c} \text{Diagrama de um plano contendo uma linha } l_0 \text{ com pontos } p_1 \text{ e } p_2 \text{ e uma altura } h. \end{array} \right\}.$$

De fato, sabemos que $E'_0 = l_0^\perp \times l_0^*$ onde $l_0^\perp = \mathbb{P}(\mathcal{F}/l_0)$ e $l_0^* = \mathbb{P}(l_0)$. Logo, $Z'_0 = l_0^\perp \times l_0^\perp \times l_0^*$. De outro ponto de vista, um ponto de E'_0 corresponde a (classe de) uma quádriga que (possui um representante que) se fatora como produto de um plano contendo l_0 por um elemento de $\mathcal{F}/l_0 = \langle \bar{x}_2, \bar{x}_3 \rangle$ (veja 4.14, p. 86). Portanto, os pontos de Z'_0 são pares de quádrigas que fatoram um mesmo elemento de $\langle x_0, x_1 \rangle$.

Localmente, nas coordenadas $a_i, i = 1..4$ de \mathbb{G}' , como $E'_0 = E' \cap \tilde{Y}_0$, vemos que E'_0 é dado por $\langle a_1, a_4 - a_2a_3 \rangle$ e a quádriga correspondente é $(a_3x_0 - x_1)(a_2x_3 + x_2)$. Portanto, nas coordenadas $a_i, b_i, i = 1..4$ de $\mathbb{G}' \times \mathbb{G}'$, vemos que Z'_0 é dado por

$$\mathcal{I}_{Z'_0} = \langle a_1, b_1, a_4 - a_2a_3, b_4 - b_2b_3, b_3 - a_3 \rangle.$$

Fazendo as substituições ditadas pelas equações (\heartsuit) (p.146) e calculando o ideal saturado com respeito a equação do divisor excepcional, obtemos exatamente o ideal $\mathcal{I}_{Z''_0}$.

Desse modo, concluímos que Z''_0 coincide esquematicamente com a transformada estrita de Z'_0 , haja vista que coincidem na vizinhança da única órbita fechada.

Além disso, observamos que $Z'_0 \cap \Delta' = E'_0$ é um divisor em Z'_0 . Portanto, $Z''_0 \cap E''$ é isomorfo a E'_0 . Com isso podemos concluir que $Z''_0 \cap E''$ coincide com a órbita de φ_{2030} .

Seja $b_{Z_0} : \widehat{\mathbb{G}} \rightarrow \mathbb{G}'''$ a explosão de \mathbb{G}''' ao longo de Z_0 e seja E_{Z_0} o divisor excepcional. Essa explosão resolve a indeterminação do mapa μ e produz um morfismo

$$\nu : \widehat{\mathbb{G}} \rightarrow \text{Gr}(20, S_4\mathcal{F}^{l_0}).$$

Para os pontos $z \in \widehat{\mathbb{G}}$, fora do excepcional, temos que $\nu(z)$ coincide com a imagem do mapa μ nessa fibra.

Para os pontos em cima do excepcional vamos ver o que aparece.

Como $\dim \widehat{Z}_0 = 3$, temos que o divisor excepcional é um \mathbb{P}^4 -fibrado. Desse modo, ao sabor das nossas observações anteriores, para cada ponto fixado em Z_0 deve aparecer um espaço 5-dimensional de quádricas de modo que um ponto do excepcional corresponde à

escolha de uma quártica nesse espaço, a qual juntamente com as outras 19 formará um ideal com polinômio de Hilbert $3t + 3$.

Em Z_0 temos pontos de duas naturezas

- os que estão em \tilde{E}'' , transformado estrito de E'' , e
- os que estão fora desse divisor.

Na verdade, como Z_0 é isomorfo a Z_0'' , basta olharmos para este último. Os representantes típicos para estas linhagens de pontos são, respectivamente, $\varphi_{2030} \in E''_{(\varphi_{20}, \varphi_{20})}$ e $(\varphi_{20}, \varphi_{30}) \in \mathbb{G}'' \setminus E''$, lembrando que

- φ_{20} corresponde à quádrlica $Q = x_1x_2$ e
- φ_{30} à $\hat{Q} = x_1x_3$.

Para o ponto φ_{2030} , começamos observando que as 19 quárticas de que já dispomos inicialmente são

$$l_0^4 + l_0^3 \langle x_2, x_3 \rangle + x_1 l_0 \langle x_2, x_3 \rangle^2.$$

Por outro lado, de 5.19, p. 121 temos que o sistema de cúbricas associado aos pontos de $E''_{(\varphi_{20}, \varphi_{20})}$ é dado por

$$\langle l_0^3, x_1x_2l_0, \alpha x_0Q' - \beta x_1x_2^2, x_1Q' \rangle,$$

onde $Q' \in S_2\mathcal{F}^{l_0}/\mathcal{F}_2^2(l_0)_{\varphi_{20}}$ com $\mathcal{F}_2^2(l_0)_{\varphi_{20}} = \langle l_0^2, x_1x_2 \rangle$. Logo, $Q' \in \langle x_0x_2, x_0x_3, x_1x_3 \rangle$. Como φ_{2030} está fora de Y_0'' , temos que o sistema de cúbricas associado tem posto oito e portanto numa vizinhança de φ_{2030} o mapa para quárticas é dado pelo produto

$$\langle l_0^3, x_1x_2l_0, \alpha x_0Q' - \beta x_1x_2^2, x_1Q' \rangle \cdot \mathcal{F}.$$

Escrevendo $Q' = ax_0x_2 + bx_0x_3 + cx_1x_3$, vemos que as quárticas acima se exprimem como soma de 24 monômios. Deletando os 19 que tínhamos, restam

$$\langle x_0^2x_2^2, x_0^2x_2x_3, x_0^2x_3^2, x_1x_2^2x_3, x_1x_2^3 \rangle = (l_0/x_1)^2(\mathcal{F}/l_0)^2 + x_2Q\mathcal{F}/l_0.$$

Portanto, este é naturalmente o espaço 5-dimensional de quárticas que esperávamos.

De modo análogo verificamos que o espaço 5-dimensional de quárticas que aparece em correspondência com os pontos da fibra de E_{Z_0} sobre $(\varphi_{20}, \varphi_{30})$ é

$$\langle x_0^2x_2^2, x_0^2x_2x_3, x_0^2x_3^2, x_1x_2^2x_3, x_1x_2x_3^2 \rangle = (l_0/x_1)^2(\mathcal{F}/l_0)^2 + x_2x_3 \langle Q, \hat{Q} \rangle.$$

Note que esse espaço de quárticas apresenta uma simetria desejável com respeito a x_2, x_3 , haja vista que os pontos $(\varphi_{20}, \varphi_{30})$ e $(\varphi_{30}, \varphi_{20})$ diferem apenas pela ordem.

Também destacamos que os ideais gerados pelos sistemas de vinte quárticas associados aos pontos de E_{Z_0} têm polinômio de Hilbert correto, $3t + 3$.

5.7 O espaço de parâmetros para três retas

Pelo que vimos na seção anterior, temos um morfismo

$$\nu : \widehat{\mathbb{G}} \rightarrow \mathbb{G}r(20, S_4\mathcal{F}^{l_0}).$$

Assim, podemos considerar sobre $\widehat{\mathbb{G}}$ o fibrado $\mathcal{F}_4^3(l_0)$ obtido como imagem recíproca (por meio de ν) do tautológico da grassmanniana e cuja fibra sobre cada ponto de $\widehat{\mathbb{G}}$, que vive sobre $(l_0, l_1, l_2) \in \mathbb{G}' \times \mathbb{G}'$ corresponde a um ideal que define um subsquema de \mathbb{P}^3 , com suporte $l_0 \cup l_1 \cup l_2$ e polinômio de Hilbert $3t + 3$. Denotaremos esse esquema por $l_0 \sqcup l_1 \sqcup l_2$.

Agora, usando o fibrado $\mathcal{F}_4^3(l_0)$, construímos sobre $\widehat{\mathbb{G}}$ um fibrado $\mathcal{F}_d^3(l_0)$, subfibrado do fibrado trivial $\widehat{\mathbb{G}} \times S_d\mathcal{F}$ e cuja fibra sobre um ponto de $\widehat{\mathbb{G}}$ que vive em cima de $(l_0, l_1, l_2) \in \mathbb{G}' \times \mathbb{G}'$ é o espaço das superfícies de grau d contendo $l_0 \sqcup l_1 \sqcup l_2$.

O fibrado $\mathcal{F}_d^3(l_0)$ é definido indutivamente, para $d \geq 5$, como imagem do mapa de multiplicação

$$\mathcal{F}_{d-1}^3(l_0) \otimes \mathcal{F} \rightarrow S_d\mathcal{F}.$$

Temos o seguinte fato a respeito do posto de $\mathcal{F}_d^3(l_0)$.

Proposição 5.7.1. A fibra de $\mathcal{F}_d^3(l_0)$ sobre cada ponto de $\widehat{\mathbb{G}}$ tem a dimensão correta, M_d^3 , dada por

$$M_d^3 = \binom{d+3}{3} - (3d + 3) = N(d, 3) - (3d + 3).$$

Prova: Com efeito, a igualdade acima pode ser provada por indução em d . Por construção temos que a igualdade vale para $d = 4$ e uma verificação direta mostra que também vale para $d = 5$ e $d = 6$.

Por outro lado, se $d \geq 7$ e $c_{d-1} = 3(d - 1) + 3$, temos que

$$c_{d-1} = \binom{d}{d-1} + \binom{d-1}{d-2} + \binom{d-2}{d-3} + \binom{d-4}{d-4} + \binom{d-5}{d-5} + \binom{d-6}{d-6},$$

é a $(d - 1)$ -ésima decomposição de Macaulay de c_{d-1} e com a notação de [24],

$$c_{d-1}^{\langle d-1 \rangle} = \binom{d+1}{d} + \binom{d}{d-1} + \binom{d-1}{d-2} + \binom{d-3}{d-3} + \binom{d-4}{d-4} + \binom{d-5}{d-5} = c_d = 3d + 3.$$

Assim, o teorema de Macaulay-Gotzmann juntamente com a hipótese de indução implicam que, para $d \geq 7$, temos

$$M_d^3 \geq N(d, 3) - (3d + 3).$$

A outra desigualdade é clara. Com efeito, sabemos que a igualdade ocorre genericamente, pois o ideal da união de três retas disjuntas tem regularidade menor ou igual a 3 (veja teorema 3.12 em [9]). Por outro lado, o lugar dos pontos onde o posto de um mapa de fibrado cai é um fechado próprio. Logo, a desigualdade estrita não pode ocorrer. \square

O fibrado projetivo $\mathbb{P}(\mathcal{F}_d^3(l_0)) \rightarrow \mathbb{G}'$ é formado pelos pares (L, S) tais que $L = l_0 \sqcup l_1 \sqcup l_2$ é uma (especialização de) união de retas disjuntas e S denota uma superfície de grau d que contém o subesquema L .

Agora, deixando l_0 variar em \mathbb{G} , iniciamos com $\mathbb{G}(3) \rightarrow \mathbb{G}(2) \times_{\mathbb{G}} \mathbb{G}(2)$ sendo a explosão ao longo da diagonal relativa e vamos construir subvariedades $Z'', Y'' \subset \mathbb{G}(3)$, que aparecem como torres de fibrações e são tais que as fibras sobre $l_0 \in \mathbb{G}$ são respectivamente $Z''_0, Y''_0 \subset G''$. Com efeito, para construir Y'' , primeiro lembramos que a variedade \tilde{Y} foi construída na página 97, como a torre de fibrados

$$\tilde{Y} = \mathbb{P}(\mathcal{N}) \rightarrow \mathbb{P}(\pi^* \mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathbb{G},$$

com \mathcal{Q} e \mathcal{E} sendo respectivamente o quociente e o subfibrado tautológico de \mathbb{G} e $\pi : \mathbb{P}(\mathcal{Q}) \rightarrow \mathbb{G}$, o morfismo estrutural. Então definimos

$$Y' = \mathbb{P}(\mathcal{N}) \times_{\mathbb{P}(\mathcal{Q})} \mathbb{P}(\mathcal{N}).$$

Obtemos Y'' , tomando a transformada estrita de Y' .

A construção de Z é feita considerando inicialmente o \mathbb{P}^1 -fibrado $\pi_1 : \mathbb{P}(\mathcal{E}) \rightarrow \mathbb{G}$. Daí, tomamos o pull-back $\pi_1^* \mathcal{Q}$ e construímos o fibrado projetivo $\mathbb{P}(\pi_1^* \mathcal{Q}) \rightarrow \mathbb{P}(\mathcal{E})$. Por fim, definimos Z'' como a transformada estrita de

$$Z' = \mathbb{P}(\pi_1^* \mathcal{Q}) \times_{\mathbb{P}(\mathcal{E})} \mathbb{P}(\pi_1^* \mathcal{Q}) \simeq \mathbb{P}(\mathcal{Q}) \times_{\mathbb{G}} \mathbb{P}(\mathcal{Q}) \times_{\mathbb{G}} \mathbb{P}(\mathcal{E}).$$

Desse modo, a partir de $\mathbb{G}(2) \times_{\mathbb{G}} \mathbb{G}(2)$ construímos uma variedade $\widehat{\mathbb{G}}(3)$ por meio de uma sequência de três explosões

$$\widehat{\mathbb{G}}(3) \xrightarrow{b_Z} \widetilde{\widehat{\mathbb{G}}(3)} \xrightarrow{b_{Y''}} \mathbb{G}(3) \xrightarrow{b_{\Delta(2)}} \mathbb{G}(2) \times_{\mathbb{G}} \mathbb{G}(2),$$

onde Z é a transformada estrita de Z'' e $\Delta(2) = \Delta_{\mathbb{G}(2)/\mathbb{G}}$, diagonal relativa.

Além disso, como os centros de explosões são obtidos a partir de fibrações, considerando $\widehat{\mathbb{G}}(3)$ como um esquema sobre \mathbb{G} temos que a fibra sobre $l_0 \in \mathbb{G}$ coincide com a variedade $\widehat{\mathbb{G}}$ que foi construída fixando l_0 desde o início. Essencialmente, estamos usando o fato de que nas nossas condições vale que “a fibra da explosão é a explosão da fibra”. (veja [35], lema 2.3.4). Portanto, como $\mathbb{PGL}(4, \mathbb{C})$ age transitivamente em \mathbb{G} , a construção feita com l_0 fixa permite construir um fibrado de posto 20,

$$\mathcal{F}_4^3 \subset \widehat{\mathbb{G}}(3) \times S_4\mathcal{F}.$$

A partir disso, obtemos também um fibrado \mathcal{F}_d^3 de posto M_d^3 , de modo que o fibrado projetivo

$$\mathbb{P}(\mathcal{F}_d^3) \subset \widehat{\mathbb{G}}(3) \times \mathbb{P}^N$$

é tal que o mapa $\rho : \mathbb{P}(\mathcal{F}_d^3) \rightarrow \mathbb{P}^N$, dado pela restrição da projeção no segundo fator, é genericamente finito.

A verificação desse fato é análoga àquela que fizemos para o caso de duas retas (veja a prop. 4.3.4, p. 89).

A imagem de ρ é a aderência do lugar das superfícies de grau d em \mathbb{P}^3 que contêm três retas em posição geral, denotada por \mathbb{X}_d^3 . Assim,

$$\dim \mathbb{X}_d^3 = M_d^3 + 11. \quad (5.35)$$

Além disso, a fibra genérica dessa projeção tem cardinalidade $3!$.

De fato, seja $S \in \mathbb{X}_d^3$ e sejam l_1, l_2, l_3 três retas contidas em S . O espaço das superfícies contendo l_1, l_2, l_3 tem dimensão M_d^3 , essa é a dimensão da fibra de \mathcal{F}_d^3 sobre $x = l_1 \cup l_2 \cup l_3 \in \widehat{\mathbb{G}}(3)$. Por outro lado, exigir que a fibra sobre S contenha mais de $3!$ pontos, implica em exigir que S contenha pelo menos quatro retas distintas, isto é, deve existir $l_4 \subset S$ diferente de $l_i, i = 1, 2, 3$. No entanto, o ideal da união de quatro retas distintas em \mathbb{P}^3 tem regularidade no máximo quatro (veja teo.3.12 em [9]) e portanto o espaço vetorial das superfícies de grau $d \geq 4$ que contêm quatro retas distintas (fixadas) tem dimensão

$$M_d^4 := N(d, 3) - (4d + 4) = M_d^3 - d - 1.$$

Assim, a subvariedade de $\rho(\mathbb{P}((\mathcal{F}_d^3)_x))$ obtida como aderência do lugar das superfícies que

contêm l_1, l_2, l_3 e alguma outra reta, tem dimensão

$$M_d^3 - d - 1 - 1 + 4 = M_d^3 - d + 2 < M_d^3 - 1 = \dim \mathbb{P}((\mathcal{F}_d^3)_x), \forall d \geq 4.$$

Logo, existe alguma superfície S' que contém as retas l_1, l_2, l_3 e somente essas. Dessa forma, a subvariedade de \mathbb{X}_d^3 obtida como aderência do lugar das superfícies que contêm quatro retas distintas é um fechado próprio e portanto a superfície genérica que contém três retas, contém exatamente três. Logo, a fibra genérica de ρ tem cardinalidade 3! correspondendo ao número de permutações das três retas.

Desse modo, se $h = c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}^N}(1))$, teremos por princípios gerais,

$$\begin{aligned} \text{Grau}(\mathbb{X}_d^3) &= \int_{\mathbb{X}_d^3} h^{M_d^3+11} \cap [\mathbb{X}_d^3] \\ &= \frac{1}{3!} \int_{\mathbb{P}(\mathcal{F}_d^3)} c_1(\mathcal{O}_{\mathbb{P}(\mathcal{F}_d^3)}(1))^{M_d^3+11} \\ &= \frac{1}{3!} \int_{\widehat{\mathbb{G}}(3)} s_{12}(\mathcal{F}_d^3) \cap [\widehat{\mathbb{G}}(3)], \end{aligned}$$

onde $s_{12}(\mathcal{F}_d^3)$ é a classe de Segre de ordem 12 do fibrado \mathcal{F}_d^3 .

A classe $s_{12}(\mathcal{F}_d^3)$ se escreve como um polinômio homogêneo de grau 12, nas classes de Chern $c_i = c_i(\mathcal{F}_d^3)$; cada c_i tem peso i .

Para os leitores mais curiosos, apresentamos explicitamente esse polinômio, obtido como o coeficiente do termo de grau 12 no inverso formal do polinômio de Chern de \mathcal{F}_d^3 .

$$\begin{aligned} s_{12}(\mathcal{F}_d^3) &= c_1^{12} - 11c_2c_1^{10} + 10c_3c_1^9 - 9c_4c_1^8 + 45c_2^2c_1^8 + 8c_5c_1^7 - 72c_3c_2c_1^7 - 7c_6c_1^6 + 56c_4c_2c_1^6 - 84c_2^3c_1^6 \\ &\quad + 28c_3^2c_1^6 + 6c_7c_1^5 - 42c_5c_2c_1^5 - 42c_4c_3c_1^5 + 168c_3c_2^2c_1^5 - 5c_8c_1^4 + 30c_6c_2c_1^4 + 30c_5c_3c_1^4 + 15c_4^2c_1^4 \\ &\quad + 70c_2^4c_1^4 - 105c_4c_2^2c_1^4 - 105c_3^2c_2c_1^4 + 4c_9c_1^3 - 20c_7c_2c_1^3 - 20c_6c_3c_1^3 - 20c_4c_5c_1^3 + 120c_4c_3c_2c_1^3 \\ &\quad + 60c_5c_2^2c_1^3 - 140c_3c_2^3c_1^3 + 20c_3^3c_1^3 - 3c_{10}c_1^2 + 12c_8c_2c_1^2 + 12c_7c_3c_1^2 + 12c_4c_6c_1^2 + 6c_5^2c_1^2 - 21c_2^5c_1^2 \\ &\quad - 30c_6c_2^2c_1^2 - 30c_4^2c_2c_1^2 - 30c_4c_3^2c_1^2 + 90c_3^2c_2^2c_1^2 + 60c_4c_3^2c_1^2 - 60c_5c_3c_2c_1^2 + 2c_1c_{11} - 6c_9c_1c_2 \\ &\quad - 6c_8c_1c_3 - 6c_4c_1c_7 - 6c_6c_1c_5 - 20c_5c_2^3c_1 + 24c_4c_5c_1c_2 - 60c_4c_3c_2^2c_1 + 12c_4^2c_1c_3 + 12c_7c_2^2c_1 \\ &\quad + 12c_5c_3^2c_1 - 20c_3^3c_2c_1 + 30c_3c_2^4c_1 + 24c_6c_2c_1c_3 + c_2^6 - 5c_4c_2^4 - 10c_3^2c_2^3 + 4c_6c_2^3 - 3c_8c_2^2 \\ &\quad + 12c_5c_3c_2^2 + 6c_4^2c_2^2 + 2c_{10}c_2 - 6c_7c_3c_2 - 6c_4c_6c_2 - 3c_5^2c_2 + 12c_4c_3^2c_2 + c_3^4 - 3c_6c_3^2 - 6c_4c_5c_3 \\ &\quad + 2c_9c_3 - c_4^3 + 2c_4c_8 + 2c_7c_5 + c_6^2 - c_{12}. \end{aligned}$$

O cálculo efetivo de $\text{Grau}(\mathbb{X}_d^3)$ será feito usando a fórmula de Bott e para isso precisamos determinar os pontos fixos de $\widehat{\mathbb{G}}(3)$ sob a ação do toro $T = \mathbb{C}^*$. É isso que faremos na seção a seguir.

5.8 Pontos fixos em $\widehat{\mathbb{G}}(3)$ pela ação de \mathbb{C}^*

Continuemos denotando por x_0, x_1, x_2, x_3 , as coordenadas homogêneas em \mathbb{P}^3 . Agora consideremos a ação do toro $T = \mathbb{C}^*$ em \mathbb{P}^3 , com pesos w_0, w_1, w_2, w_3 , isto é, $t \cdot x_i := t^{w_i} x_i$.

Com isso temos uma ação induzida em $\mathbb{G} = \mathbb{G}r[1, 3]$ para a qual $l_0 = \langle x_0, x_1 \rangle$ é ponto fixo. Portanto, temos também uma ação de T induzida em \mathbb{G}' .

Se os pesos forem bem escolhidos, essa ação possui exatamente 9 pontos fixos. De fato, se os pesos forem dois a dois distintos, além de l_0 a ação em \mathbb{G} terá apenas mais cinco pontos fixos $l_{ij} = \langle x_i, x_j \rangle$, com $i = 0, 1, 2; j = 2, 3$. Estes correspondem a cinco pontos fixos em \mathbb{G}' . Os outros pontos fixos de \mathbb{G}' estão sobre $E' = \mathbb{P}(\mathbb{T}_{l_0}\mathbb{G})$. Para explicitá-los, começamos lembrando que

$$\mathbb{T}_{l_0}\mathbb{G} = \text{Hom}(\langle x_0, x_1 \rangle, \langle x_2, x_3 \rangle) = \langle x_2, x_3 \rangle \otimes \langle x_0, x_1 \rangle^\vee.$$

Portanto, $\mathbb{T}_{l_0}\mathbb{G}$ é gerado pelos vetores $x_2 \otimes x_0^\vee, x_2 \otimes x_1^\vee, x_3 \otimes x_0^\vee, x_3 \otimes x_1^\vee$. Além disso, a ação induzida em $\mathbb{T}_{l_0}\mathbb{G}$ é determinada por:

$$t \cdot (x_i \otimes x_j^\vee) = t^{w_i - w_j} (x_i \otimes x_j^\vee), \text{ com } i = 2, 3; j = 0, 1.$$

Assim, se supusermos que os pesos além de dois a dois distintos também satisfazem a condição:

$$w_i + w_2 \neq w_j + w_3, \text{ com } i, j = 0, 1$$

então um argumento simples mostra que existem apenas quatro subespaços unidimensionais invariantes e são exatamente os correspondentes aos geradores acima. Desse modo, em cima de E' temos os quatro pontos fixos:

$$x_{12} := x_2 \otimes x_0^\vee, x_{02} := x_2 \otimes x_1^\vee, x_{13} := x_3 \otimes x_0^\vee, x_{03} := x_3 \otimes x_1^\vee.$$

A justificativa para a notação acima é dada a seguir. Uma outra forma de pensar nos pontos fixos em E' , é lembrar que cada ponto $\phi \in E'$ corresponde a um único subesquema de \mathbb{P}^3 cujo ideal é do tipo: $\langle x_0^2, x_0 x_1, x_1^2, x_0 \phi(x_1) - x_1 \phi(x_0) \rangle$. Ora, é claro que temos uma ação induzida no espaço das quádricas de \mathbb{P}^3 e se queremos fixar um ponto em E' , o ideal correspondente deve ser fixado. Como as três primeiras quádricas no ideal são sempre fixadas, devemos exigir que a última também o seja.

Escrevendo $\phi(x_1) = ax_2 + bx_3$ e $\phi(x_0) = cx_2 + dx_3$, vemos que, com a condição imposta sobre os pesos, isso ocorrerá somente quando apenas um coeficiente for não nulo. Logo, as

quádricas invariantes são as seguintes: $x_1x_2, x_0x_2, x_1x_3, x_0x_3$. As estruturas esquemáticas sobre l_0 associadas a elas, correspondem exatamente aos quatro pontos fixos descritos acima, haja vista que, por exemplo, o ponto fixo $x_2 \otimes x_0^\vee$ corresponde ao elemento ϕ tal que $\phi(x_0) = x_2$ e $\phi(x_1) = 0$. Portanto, o ideal associado é $\langle x_0^2, x_0x_1, x_1^2, x_1x_2 \rangle$. Na notação x_{12} , os dois índices indicam a quádrica que juntamente com l_0^2 definem a estrutura esquemática sobre l_0 . Note que dos pontos fixos de \mathbb{G}' o único que não está em \tilde{Y}_0 é l_{23} .

Pelo exposto, a ação induzida em $\mathbb{G}' \times \mathbb{G}'$ possui 81 pontos fixos, dos quais apenas 9 estão sobre a diagonal $\Delta' \subset \mathbb{G}' \times \mathbb{G}'$, a saber:

$$F_{\Delta'} = \{(l_{ij}, l_{ij}); (x_{ij}, x_{ij}); (l_{23}, l_{23}), \text{ com } i = 0, 1; j = 2, 3\}$$

Desses, os oito primeiros estão sobre Y'_0 . Ao todo, a variedade Y'_0 possui 32 pontos fixos que são os seguintes:

$$F_{Y'_0} = \{(x_{ij}, l_{kj}); (l_{kj}, x_{ij}); (l_{ij}, l_{kj}); (x_{ij}, x_{kj}), \text{ com } i, k = 0, 1; j = 2, 3\}.$$

Note que por comodidade de notação estamos omitindo o l_0 , quando escrevemos, por exemplo, (l_{ij}, l_{kl}) em vez de (l_0, l_{ij}, l_{kl}) .

Na variedade Z'_0 temos 8 pontos fixos, a saber:

$$F_{Z'_0} = \{(x_{ij}, x_{im}), \text{ com } i = 0, 1; j, m = 2, 3\}.$$

Vale notar que

$$F_{Z'_0} \cap F_{\Delta'} = F_{Z'_0} \cap F_{Y'_0} = \{(x_{ij}, x_{ij}), \text{ com } i = 0, 1; j = 2, 3\}$$

Cada um dos 44 pontos fixos de $\mathbb{G}' \times \mathbb{G}' \setminus (\Delta' \cup Y'_0 \cup Z'_0)$ é dito terminal, pois corresponde a um único ponto fixo em $\hat{\mathbb{G}}$. Dos outros 37, temos 28 que estão fora de Δ' e por isso cada um deles vai determinar um ponto fixo em $Z''_0 \cup Y''_0 \subset \mathbb{G}''$.

Os demais pontos fixos em \mathbb{G}'' vivem nas fibras de E'' , sobre os nove elementos de $F_{\Delta'}$. Como \mathbb{G}'' é a explosão de $\mathbb{G}' \times \mathbb{G}'$ ao longo da diagonal, temos que $E'' = \mathbb{P}(\mathbb{T}\mathbb{G}')$. Portanto, para cada $x \in F_{\Delta'}$ temos $E''_x = \mathbb{P}(\mathbb{T}_y\mathbb{G}')$, onde $y = p_1(x) \in \mathbb{G}'$. Ademais, se $x \neq (x_{ij}, x_{ij})$ então $y \in \mathbb{G}' \setminus E'$, donde $\mathbb{P}(\mathbb{T}_y\mathbb{G}') = \mathbb{P}(\mathbb{T}_{l_{ij}}\mathbb{G}')$, com $i = 0, 1, 2; j = 2, 3$.

O mesmo raciocínio de antes mostra que há somente quatro pontos fixos na fibra de E'' em cima de (l_{ij}, l_{ij}) . Por exemplo, para $i = 2$ e $j = 3$, os pontos fixos são:

$$l_{2303} := x_0 \otimes x_2^\vee, l_{2313} := x_1 \otimes x_2^\vee, l_{2302} := x_0 \otimes x_3^\vee, l_{2312} := x_1 \otimes x_3^\vee.$$

Nenhum desses pontos está em Y_0'' , pois $l_0 \cap l_{23} = \emptyset$.

Por outro lado, para $i = 0, 1$ e $j = 2, 3$, os pontos fixos em cima de (l_{ij}, l_{ij}) são:

$$l_{ijkj} := x_k \otimes x_i^\vee, l_{ijik} := x_k \otimes x_j^\vee, l_{ijjm} := x_m \otimes x_i^\vee, l_{ijim} := x_m \otimes x_j^\vee,$$

onde $\{i, k\} = \{0, 1\}$ e $\{j, m\} = \{2, 3\}$. Desses, apenas os dois primeiros estão em Y_0'' , pois como vimos na proposição 5.2.1, p. 115 para um ponto na fibra $E''_{(l_{ij}, l_{ij})}$ estar em Y_0'' é necessário que a quádrlica se decomponha como um plano contendo a reta l_{ij} , e um plano que marca o ponto $l_0 \cap l_{ij}$ sobre l_{ij} . No caso em questão o ponto é marcado por x_k , de onde segue que a quádrlica deve ser $x_k x_j$ e de acordo com a observação 4.3.0.1, p. 81, essa quádrlica corresponde ao ponto l_{ijkj} .

Dessa forma, temos mais 12 pontos fixos terminais e mais 8 pontos fixos em Y_0'' .

Falta contabilizar os pontos fixos em cima de (x_{ij}, x_{ij}) , com $i = 0, 1$ e $j = 2, 3$.

Neste caso, a quádrlica $Q = x_i x_j$ corresponde ao elemento:

$$\varphi_{ij} := x_j \otimes x_k^\vee \in \mathbb{T}_{l_0} G = \langle x_j \otimes x_i^\vee, x_j \otimes x_k^\vee, x_m \otimes x_i^\vee, x_m \otimes x_k^\vee \rangle$$

onde $\{i, k\} = \{0, 1\}$ e $\{j, m\} = \{2, 3\}$. Como já vimos, temos a igualdade

$$\mathbb{T}_{x_{ij}} \mathbb{G}' = \langle \varphi_{ij} \rangle \oplus \mathbb{T}_{\varphi_{ij}} E',$$

com

$$\mathbb{T}_{\varphi_{ij}} E' = \text{Hom}(\langle \varphi_{ij} \rangle, \mathbb{T}_{l_0} G / \langle \varphi_{ij} \rangle).$$

Portanto, a fibra de E'' sobre (x_{ij}, x_{ij}) possui quatro pontos fixos:

$$x_{ijij} := x_j \otimes x_k^\vee, x_{ijkj} := (x_j \otimes x_i^\vee) \otimes \varphi_{ij}^\vee, x_{ijkm} := (x_m \otimes x_i^\vee) \otimes \varphi_{ij}^\vee, x_{ijim} := (x_m \otimes x_k^\vee) \otimes \varphi_{ij}^\vee.$$

Na notação acima, os dois últimos índices indicam a nova quádrlica Q' . Os dois primeiros pontos fixos listados acima estão em Y_0'' , pois Q' deve ser múltiplo de x_j . O quarto ponto x_{ijim} está em Z_0'' , pois a quádrlica Q' é divisível por x_i . Portanto, temos mais 8 pontos fixos em Y_0'' , mais 4 em Z_0'' e mais 4 pontos fixos terminais. Assim, temos

$$F_{Y_0''} = \{x_{ijnj}; l_{ijik}; l_{ijkj}; (l_{ij}, l_{kj}); (x_{ij}, l_{nj}); (l_{nj}, x_{ij}); (x_{ij}, x_{kj}), \text{ com } n = 0, 1\}.$$

$$F_{Z_0''} = \{(x_{ij}, x_{im}), x_{ijim}, \text{ com } i = 0, 1; j, m = 2, 3\}.$$

Na variedade $\widehat{\mathbb{G}}$ já temos 60 pontos fixos terminais. Os demais pontos fixos em $\widehat{\mathbb{G}}$ vivem em cima dos 40 pontos fixos de Y_0'' ou dos 8 pontos fixos em Z_0'' .

Agora precisamos estudar o fibrado normal de Y_0'' em \mathbb{G}'' , pelo menos sobre os pontos de $F_{Y_0''}$. Para isso, vamos escrever os fibrados envolvidos como soma de auto-subfibrados. Além disso, vamos usar a mesma simplificação de notação adotada em [29], na qual substituímos o subfibrado pelo caracter correspondente. Começamos pelos pontos (l_{ij}, l_{kj}) , Neste caso temos

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{(l_{ij}, l_{kj})} \mathbb{G}' \times \mathbb{G}' &= \mathbb{T}_{l_{ij}} \mathbb{G}' \oplus \mathbb{T}_{l_{kj}} \mathbb{G}' = \mathbb{T}_{l_{ij}} G \oplus \mathbb{T}_{l_{kj}} G \\ &= \langle x_k, x_m \rangle \otimes \langle x_i, x_j \rangle^\vee \oplus \langle x_i, x_m \rangle \otimes \langle x_k, x_j \rangle^\vee \\ &= x_i/x_k + x_i/x_j + x_k/x_i + x_k/x_j + x_m/x_i + x_m/x_k + 2.x_m/x_j \end{aligned}$$

Com $\{i, k\} = \{0, 1\}$ e $\{j, m\} = \{2, 3\}$. Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{l_{ij}} \tilde{Y}_0 &= \langle x_k \otimes x_i^\vee, x_k \otimes x_j^\vee, x_m \otimes x_j^\vee \rangle \\ &= x_k/x_i + x_k/x_j + x_m/x_j \\ \mathbb{T}_{l_{kj}} \tilde{Y}_0 &= \langle x_i \otimes x_k^\vee, x_i \otimes x_j^\vee, x_m \otimes x_j^\vee \rangle \\ &= x_i/x_k + x_i/x_j + x_m/x_j \end{aligned}$$

Estes foram calculados usando o fato que \tilde{Y}_0 é um \mathbb{P}^1 -fibrado sobre $l_0^\perp \times l_0^*$, observando que a fibra que contém l_{nj} corresponde às retas contidas no plano $x_n = 0$ e passando pelo ponto $l_{nj} \cap l_0 = \{x_j = 0\}$. Além disso, como $Y_0' = \tilde{Y}_0 \times_{l_0^\perp} \tilde{Y}_0$, segue que

$$\mathbb{T}_{(l_{ij}, l_{kj})} Y_0' = x_i/x_k + x_i/x_j + x_k/x_i + x_k/x_j + x_m/x_j.$$

Com isso, podemos calcular o fibrado normal de Y_0'' em \mathbb{G}'' , no ponto (l_{ij}, l_{kj})

$$(\mathcal{N}_{Y_0''/\mathbb{G}''})_{(l_{ij}, l_{kj})} = (\mathcal{N}_{Y_0'/\mathbb{G}' \times \mathbb{G}'})_{(l_{ij}, l_{kj})} = x_m/x_i + x_m/x_k + x_m/x_j.$$

Portanto, em cima de (l_{ij}, l_{kj}) os pontos fixos são isolados e temos três pontos fixos, um para cada auto-subfibrado da decomposição acima.

Agora, vamos aos pontos do tipo (x_{ij}, l_{nj}) . Neste caso, temos $\varphi_{ij} = x_j \otimes x_k^\vee$, de onde segue que

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{x_{ij}} E' &= \text{Hom}(\langle \varphi_{ij} \rangle, \mathbb{T}_{l_0} G / \langle \varphi_{ij} \rangle) = \langle x_j \otimes x_i^\vee, x_m \otimes x_i^\vee, x_m \otimes x_k^\vee \rangle \otimes \langle x_j \otimes x_k^\vee \rangle^\vee \\ &= (x_j/x_i + x_m/x_i + x_m/x_k) \cdot (x_j/x_k)^{-1} = x_k/x_i + x_m/x_j + x_k \cdot x_m/x_i \cdot x_j \end{aligned}$$

Dessa forma temos:

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{(x_{ij}, l_{nj})} \mathbb{G}' \times \mathbb{G}' &= \mathbb{T}_{x_{ij}} \mathbb{G}' \oplus \mathbb{T}_{l_{nj}} \mathbb{G}' = \langle x_j \otimes x_k^\vee \rangle \oplus \mathbb{T}_{x_{ij}} E' \oplus \mathbb{T}_{l_{nj}} G \\ &= x_k/x_i + x_p/x_j + x_p/x_n + x_j/x_k + x_m/x_n + x_k \cdot x_m/x_i \cdot x_j + 2.x_m/x_j \end{aligned}$$

com $\{n, p\} = \{i, k\} = \{0, 1\}$.

Por outro lado, temos que x_{ij} vive na fibra de \tilde{Y}_0 sobre $(x_j, x_i) \in l_0^\perp \times l_0^*$ e corresponde a escolher a própria reta l_0 como reta contida no plano $x_i = 0$ e passando pelo ponto $l_0 \cap \{x_j = 0\}$. Assim, segue que:

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{x_{ij}} \tilde{Y}_0 &= \mathbb{T}_{x_j} l_0^\perp \oplus \mathbb{T}_{x_i} l_0^* \oplus \mathbb{T}_{x_{ij}} (\tilde{Y}_0)_{(x_j, x_i)} \\ &= x_m/x_j + x_k/x_i + x_j/x_k \\ \mathbb{T}_{l_{nj}} \tilde{Y}_0 &= \langle x_p \otimes x_n^\vee, x_p \otimes x_j^\vee, x_m \otimes x_j^\vee \rangle \\ &= x_p/x_n + x_p/x_j + x_m/x_j \end{aligned}$$

A última parcela de $\mathbb{T}_{x_{ij}} \tilde{Y}_0$ foi obtida observando que $(\tilde{Y}_0)_{(x_j, x_i)} = \mathbb{P}(\langle x_k, x_j \rangle)$, e escolher x_{ij} no primeiro membro equivale a escolher x_k no segundo. Daí, obtemos

$$\mathbb{T}_{(x_{ij}, l_{nj})} Y'_0 = x_p/x_n + x_p/x_j + x_j/x_k + x_k/x_i + x_m/x_j.$$

Logo, temos o fibrado normal

$$(\mathcal{N}_{Y'_0/\mathbb{G}''})_{(x_{ij}, l_{nj})} = (\mathcal{N}_{Y'_0/\mathbb{G}' \times \mathbb{G}'})_{(x_{ij}, l_{nj})} = x_m/x_n + x_m/x_j + x_m \cdot x_k/x_i \cdot x_j.$$

Portanto, na fibra de E''' sobre (x_{ij}, l_{nj}) , também temos somente três pontos fixos. O mesmo vale por simetria para a fibra em cima de (l_{nj}, x_{ij}) .

Consideremos agora os pontos do tipo (x_{ij}, x_{kj}) . Como antes temos

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{(x_{ij}, x_{kj})} \mathbb{G}' \times \mathbb{G}' &= \mathbb{T}_{x_{ij}} \mathbb{G}' \oplus \mathbb{T}_{x_{kj}} \mathbb{G}' = \langle x_j \otimes x_k^\vee \rangle \oplus \mathbb{T}_{x_{ij}} E' \oplus \langle x_j \otimes x_i^\vee \rangle \oplus \mathbb{T}_{x_{kj}} E' \\ &= x_i/x_k + x_k/x_i + x_j/x_i + x_j/x_k + x_i x_m/x_k x_j + x_k x_m/x_i x_j + 2x_m/x_j \end{aligned}$$

E de modo análogo aos anteriores, obtemos

$$\mathbb{T}_{(x_{ij}, x_{kj})} Y'_0 = x_i/x_k + x_k/x_i + x_j/x_i + x_j/x_k + x_m/x_j.$$

Portanto,

$$(\mathcal{N}_{Y'_0/\mathbb{G}''})_{(x_{ij}, x_{kj})} = (\mathcal{N}_{Y'_0/\mathbb{G}' \times \mathbb{G}'})_{(x_{ij}, x_{kj})} = x_m/x_j + x_i \cdot x_m/x_k \cdot x_j + x_k \cdot x_m/x_i \cdot x_j.$$

Daí concluímos que a fibra de E''' sobre (x_{ij}, x_{kj}) também possui somente três pontos fixos.

Para os pontos do tipo $l_{ijk} \in E''_{(l_{ij}, l_{ij})}$ temos que calcular o fibrado normal de Y_0'' em \mathbb{G}'' diretamente, sem o benefício de fazer esse cálculo na base $\mathbb{G}' \times \mathbb{G}'$. Então começamos descrevendo

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{l_{ijk}} \mathbb{G}'' &= \langle x_k \otimes x_i^\vee \rangle \oplus \mathbb{T}_{(l_{ij}, l_{ij})} \Delta' \oplus \mathbb{T}_{l_{ijk}}(E''_{(l_{ij}, l_{ij})}) \\ &= \langle x_k \otimes x_i^\vee \rangle \oplus \mathbb{T}_{l_{ij}} G \oplus \mathbb{T}_{l_{ijk}}(\mathbb{P}(\mathbb{T}_{l_{ij}} G)) \\ &= 2x_k/x_i + x_k/x_j + x_m/x_i + x_m/x_j + (x_k/x_j + x_m/x_i + x_m/x_j)(x_k/x_i)^{-1} \\ &= 2x_k/x_i + x_k/x_j + x_i/x_j + x_m/x_i + x_m/x_j + x_m/x_k + x_i x_m/x_k x_j. \end{aligned}$$

Por outro lado, vimos que a fibra $X := (E'' \cap Y_0'')_{(l_{ij}, l_{ij})}$ é um \mathbb{P}^1 , que parametriza os planos contendo a reta l_{ij} . Logo, $X = \mathbb{P}(\langle x_i, x_j \rangle)$, e daí lembrando que $\Delta' \cap Y_0' = \tilde{Y}_0$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{l_{ijk}} Y_0'' &= \langle x_k \otimes x_i^\vee \rangle \oplus \mathbb{T}_{l_{ijk}}(E'' \cap Y_0'') \\ &= \langle x_k \otimes x_i^\vee \rangle \oplus \mathbb{T}_{(l_{ij}, l_{ij})}(\Delta' \cap Y_0') \oplus \mathbb{T}_{l_{ijk}} X \\ &= 2x_k/x_i + x_k/x_j + x_m/x_j + x_i/x_j. \end{aligned}$$

Portando, chegamos a:

$$(\mathcal{N}_{Y_0''/\mathbb{G}''})_{l_{ijk}} = x_m/x_i + x_m/x_k + x_i x_m/x_k x_j.$$

De modo inteiramente análogo, temos

$$(\mathcal{N}_{Y_0''/\mathbb{G}''})_{l_{jik}} = x_m/x_i + x_m/x_k + x_j x_m/x_i x_k.$$

Então, concluímos que temos somente três pontos fixos em cada uma das fibras $E'''_{l_{ijk}}$ e $E'''_{l_{jik}}$.

Finalmente chegamos aos pontos $x_{ijn} \in E''$. Consideraremos separadamente os casos $n = i$ e $n = k$. Para $n = i$, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{x_{ijj}} \mathbb{G}'' &= \langle x_j \otimes x_k^\vee \rangle \oplus \mathbb{T}_{x_{ij}} \mathbb{G}' \oplus \mathbb{T}_{x_{ijj}}(E''_{(x_{ij}, x_{ij})}) \\ &= \langle x_j \otimes x_k^\vee \rangle \oplus \langle x_j \otimes x_k^\vee \rangle \oplus \mathbb{T}_{x_{ij}} E' \oplus \mathbb{T}_{x_{ijj}}(\mathbb{P}(\mathbb{T}_{x_{ij}} \mathbb{G}')) \\ &= 2x_j/x_k + x_k/x_i + x_m/x_j + x_k x_m/x_i x_j + (x_k/x_i + x_m/x_j + x_k x_m/x_i x_j) \cdot (x_j/x_k)^{-1} \\ &= 2x_j/x_k + x_k/x_i + x_m/x_j + x_k x_m/x_i x_j + x_k^2/x_i x_j + x_k x_m/x_j^2 + x_k^2 x_m/x_i x_j^2. \end{aligned}$$

Por outro lado, a fibra $X := (Y_0'' \cap E'')_{(x_j, x_{ij})}$ é um \mathbb{P}^1 que parametriza as quádricas que são combinação linear de x_k^2 e $x_i x_j$, isto é, $X = \mathbb{P}(\langle x_k^2, x_i x_j \rangle)$. Portanto,

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{x_{ijj}} Y_0'' &= \langle x_j \otimes x_k^\vee \rangle \oplus \mathbb{T}_{x_{ijj}}(E'' \cap Y_0'') \\ &= \langle x_j \otimes x_k^\vee \rangle \oplus \mathbb{T}_{(x_j, x_{ij})}(\Delta' \cap Y_0') \oplus \mathbb{T}_{x_{ijj}} X \\ &= 2x_j/x_k + x_k/x_i + x_m/x_j + x_k^2/x_i x_j. \end{aligned}$$

A partir disso, obtemos

$$(\mathcal{N}_{Y_0''/\mathbb{G}''})_{x_{ijj}} = x_k x_m/x_i x_j + x_k x_m/x_j^2 + x_k^2 x_m/x_i x_j^2$$

Para terminar vamos ao caso $n = k$. Agora temos

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{x_{ijkj}} \mathbb{G}'' &= \langle (x_j \otimes x_i^\vee) \otimes \varphi_{ij}^\vee \rangle \oplus \mathbb{T}_{x_{ij}} \mathbb{G}' \oplus \mathbb{T}_{x_{ijkj}}(E''_{(x_j, x_{ij})}) \\ &= \langle (x_j \otimes x_i^\vee) \otimes \varphi_{ij}^\vee \rangle \oplus \langle x_j \otimes x_k^\vee \rangle \oplus \mathbb{T}_{x_{ij}} E' \oplus \mathbb{T}_{x_{ijkj}}(\mathbb{P}(\mathbb{T}_{x_{ij}} \mathbb{G}')) \\ &= 2x_k/x_i + x_j/x_k + x_m/x_j + x_k x_m/x_i x_j + (x_j/x_k + x_m/x_j + x_k x_m/x_i x_j) \cdot (x_k/x_i)^{-1} \\ &= 2x_k/x_i + 2x_m/x_j + x_j/x_k + x_k x_m/x_i x_j + x_i x_j/x_k^2 + x_i x_m/x_k x_j. \end{aligned}$$

Como antes, temos $X = (Y_0'' \cap E'')_{(x_j, x_{ij})} = \mathbb{P}(\langle x_k^2, x_i x_j \rangle)$, donde segue que:

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{x_{ijkj}} Y_0'' &= \langle (x_j \otimes x_i^\vee) \otimes \varphi_{ij}^\vee \rangle \oplus \mathbb{T}_{x_{ijkj}}(E'' \cap Y_0'') \\ &= \langle (x_j \otimes x_i^\vee) \otimes \varphi_{ij}^\vee \rangle \oplus \mathbb{T}_{(x_j, x_{ij})}(\Delta' \cap Y_0') \oplus \mathbb{T}_{x_{ijkj}} X \\ &= 2x_k/x_i + x_j/x_k + x_m/x_j + x_i x_j/x_k^2. \end{aligned}$$

Portanto, concluímos que:

$$(\mathcal{N}_{Y_0''/\mathbb{G}''})_{x_{ijkj}} = x_m/x_j + x_k x_m/x_i x_j + x_i x_m/x_k x_j.$$

Assim, vemos que em cada uma das fibras $E''_{x_{ijj}}$ e $E''_{x_{ijkj}}$ também temos somente três pontos fixos, um para cada um dos auto-subfibrados presentes na decomposição apresentada acima. Dessa forma, na variedade $\widehat{\mathbb{G}}$ já contabilizamos um total de $180 = 60 + 3 \cdot 40$ pontos fixos isolados.

Os demais pontos fixos de $\widehat{\mathbb{G}}$ vivem em cima dos 8 pontos fixos de Z_0 . Desse modo, devemos determinar as fibras de $\mathcal{N}_{Z_0/\mathbb{G}'''} = \mathcal{N}_{Z_0''/\mathbb{G}''}$ sobre os pontos de $F_{Z_0''}$.

Para os pontos do tipo (x_{ij}, x_{im}) , com $\{j, m\} = \{2, 3\}$ e $i \in \{0, 1\}$, temos

$$\mathbb{T}_{(x_j, x_{kj})} \mathbb{G}'' = \mathbb{T}_{(x_j, x_{kj})} \mathbb{G}' \times \mathbb{G}'.$$

E de modo análogo ao que fizemos antes, encontramos

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{(x_{ij}, x_{im})} \mathbb{G}' \times \mathbb{G}' &= \mathbb{T}_{x_{ij}} \mathbb{G}' \oplus \mathbb{T}_{x_{im}} \mathbb{G}' = \langle x_j \otimes x_k^\vee \rangle \oplus \mathbb{T}_{x_{ij}} E' \oplus \langle x_m \otimes x_k^\vee \rangle \oplus \mathbb{T}_{x_{im}} E' \\ &= 2x_k/x_i + x_j/x_k + x_m/x_k + x_j/x_m + x_m/x_j + x_k x_j/x_i x_m + x_k x_m/x_i x_j. \end{aligned}$$

Além disso,

$$\mathbb{T}_{(x_{ij}, x_{im})} Z'_0 = x_k/x_i + x_j/x_m + x_m/x_j.$$

Portanto,

$$(\mathcal{N}_{Z'_0/\mathbb{G}''})_{(x_{ij}, x_{im})} = (\mathcal{N}_{Z'_0/\mathbb{G}' \times \mathbb{G}'})_{(x_{ij}, x_{im})} = x_k/x_i + x_j/x_k + x_m/x_k + x_k x_j/x_i x_m + x_k x_m/x_i x_j.$$

Logo, na fibra sobre (x_{ij}, x_{im}) aparecem 5 pontos fixos isolados, perfazendo um total de mais 20 pontos fixos em $\widehat{\mathbb{G}}$. Para os pontos do tipo x_{ijim} os cálculos são como segue.

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{x_{ijim}} \mathbb{G}'' &= \langle (x_m \otimes x_k^\vee) \otimes \varphi_{ij}^\vee \rangle \oplus \mathbb{T}_{x_{ij}} \mathbb{G}' \oplus \mathbb{T}_{x_{ijim}} (E''_{(x_{ij}, x_{ij})}) \\ &= \langle (x_m \otimes x_k^\vee) \otimes \varphi_{ij}^\vee \rangle \oplus \langle x_j \otimes x_k^\vee \rangle \oplus \mathbb{T}_{x_{ij}} E' \oplus \mathbb{T}_{x_{ijim}} (\mathbb{P}(\mathbb{T}_{x_{ij}} \mathbb{G}')) \\ &= 2x_m/x_j + x_j/x_k + x_k/x_i + x_k x_m/x_i x_j + (x_j/x_k + x_k/x_i + x_k x_m/x_i x_j) \cdot (x_m/x_j)^{-1} \\ &= 2x_k/x_i + 2x_m/x_j + x_j/x_k + x_k x_m/x_i x_j + x_k x_j/x_i x_m + x_j^2/x_k x_m. \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\mathbb{T}_{(x_{ijim})} Z''_0 = x_k/x_i + 2x_m/x_j,$$

de onde concluímos que

$$(\mathcal{N}_{Z''_0/\mathbb{G}''})_{(x_{ijim})} = x_k/x_i + x_j/x_k + x_k x_m/x_i x_j + x_k x_j/x_i x_m + x_j^2/x_k x_m.$$

Desse modo, vemos que na fibra sobre cada um dos pontos x_{ijim} temos 5 pontos fixos isolados e daí concluímos que variedade $\widehat{\mathbb{G}}$ contém $220 = 60 + 3 \cdot 40 + 5 \cdot 8$ pontos fixos isolados e somente estes. Portanto, o conjunto $F_{\widehat{\mathbb{G}}(3)}$ dos pontos fixos de $\widehat{\mathbb{G}}(3)$ é formado por pontos fixos isolados e tem cardinalidade $1320 = 6 \cdot 220$.

Agora vamos escrever a decomposição de $T_p \widehat{\mathbb{G}}$, com $p \in F_{\widehat{\mathbb{G}}}$.

Para os pontos que se projetam sobre $\mathbb{G}' \times \mathbb{G}' \setminus \Delta' \cup Y'_0 \cup Z'_0$, isto é, para os pontos $q \in F_{\widehat{\mathbb{G}}}$ que se projetam sobre cada um dos 44 pontos

$$\{(l_{ij}, l_{km}), (l_{mj}, l_{ij}), (l_{km}, x_{ij}), (x_{ij}, l_{km}), (x_{ij}, x_{pm})\},$$

com $\{j, m\} = \{2, 3\}$, $k \in \{0, 1, j\}$ e $\{i, p\} = \{0, 1\}$, temos que o tangente de $\widehat{\mathbb{G}}$ em q é o tangente de $\mathbb{G}' \times \mathbb{G}'$ na projeção de q . Assim, sendo $\{l, n, k\} = \{0, 1, j\}$, vemos que as decomposições são as seguintes

$$\begin{aligned} \mathbb{T}_{(l_{ij}, l_{km})} \mathbb{G}' \times \mathbb{G}' &= \mathbb{T}_{l_{ij}} \mathbb{G} \oplus \mathbb{T}_{l_{km}} \mathbb{G} \\ &= x_p/x_i + x_p/x_j + x_m/x_i + x_m/x_j + x_n/x_k + x_n/x_m + x_l/x_k + x_l/x_m, \\ \mathbb{T}_{(l_{mj}, l_{ij})} \mathbb{G}' \times \mathbb{G}' &= \mathbb{T}_{l_{mj}} \mathbb{G} \oplus \mathbb{T}_{l_{ij}} \mathbb{G} \\ &= x_p/x_m + 2x_p/x_j + x_i/x_m + x_i/x_j + x_p/x_i + x_m/x_i + x_m/x_j. \\ \mathbb{T}_{(x_{ij}, l_{km})} \mathbb{G}' \times \mathbb{G}' &= \mathbb{T}_{(l_{km}, x_{ij})} \mathbb{G}' \times \mathbb{G}' = \mathbb{T}_{l_{km}} \mathbb{G} \oplus \mathbb{T}_{x_{ij}} \mathbb{G}' \\ &= x_n/x_k + x_n/x_m + x_l/x_k + x_l/x_m + x_j/x_p + x_p/x_i + x_m/x_j + x_p x_m/x_i x_j. \\ \mathbb{T}_{(x_{ij}, x_{pm})} \mathbb{G}' \times \mathbb{G}' &= \mathbb{T}_{x_{ij}} \mathbb{G}' \oplus \mathbb{T}_{x_{pm}} \mathbb{G}' \\ &= x_j/x_p + x_p/x_i + x_m/x_j + x_p x_m/x_i x_j + x_m/x_i + x_i/x_p + x_j/x_m + x_i x_j/x_p x_m. \end{aligned}$$

Vamos considerar agora os pontos $q \in F_{\widehat{\mathbb{G}}}$ que se projetam em $x_{ijpm} \in \mathbb{G}''$. Como esse ponto está fora de $Z''_0 \cup Y''_0$ temos que o tangente de $\widehat{\mathbb{G}}$ coincide com $\mathbb{T}_{x_{ijpm}} \mathbb{G}''$. De modo análogo a outros casos que já fizemos nesta seção obtemos

$$\mathbb{T}_{(x_{ijpm})} \mathbb{G}'' = x_j/x_m + x_i/x_p + x_p/x_i + x_j/x_p + x_m/x_j + 2x_p x_m/x_i x_j + x_i x_j^2/x_p^2 x_m.$$

Para os demais pontos de $F_{\widehat{\mathbb{G}}(3)}$ as decomposições serão omitidas. Os ingredientes necessários são os tangentes dos centros de explosão e os respectivos fibrados normais. Eles foram calculados ao longo dessa seção.

5.9 Aplicação da fórmula de Bott

Nesta seção vamos usar a fórmula de resíduos de Bott para calcular o grau de $\mathbb{X}_d^3 \subset \mathbb{P}^N$. Como os pontos fixos de $\widehat{\mathbb{G}}(3)$ sob a ação do toro $T = \mathbb{C}^*$ são isolados, a aplicação da fórmula é formalmente simples. De fato, como já dissemos, as classes de Chern T -equivariantes, das restrições dos fibrados ao conjunto de pontos fixos, são dadas pelas funções simétricas elementares dos pesos correspondentes aos caracteres associados aos auto-subfibrados que ocorrem como somando dessas restrições. A mágica se apresenta na seguinte forma

$$\text{Grau}(\mathbb{X}_d^3) = \int_{\widehat{\mathbb{G}}(3)} s_{12}(\mathcal{F}_d^3) \cap [\widehat{\mathbb{G}}(3)] = \sum_{p \in F_{\widehat{\mathbb{G}}(3)}} \int_p \frac{s_{12}^T(\mathcal{F}_d^3) \cap [p]_T}{c_{12}^T(\mathbb{T}_p \widehat{\mathbb{G}}(3))},$$

onde $s_{12}^T(\mathcal{F}_d^3)$ é obtido do polinômio $s_{12}(\mathcal{F}_d^3)$, substituindo as classes de Chern c_i pelas respectivas classes de Chern T -equivariantes. Assim, para cada ponto fixo $q \in F_{\widehat{\mathbb{G}}(3)}$, usamos as decomposições de $\mathbb{T}_q \widehat{\mathbb{G}}(3)$ (seção anterior) e de \mathcal{F}_d^3 , como soma de auto-subfibrados, para calcular os pesos, e daí encontrar a contribuição desse ponto. Como no capítulo anterior, os “scripts” que realizam esses cálculos foram implementados no MAPLE com a inestimável colaboração do professor André Meireles (UFRN) e serão disponibilizados no apêndice.

Como no capítulo anterior, observamos que a fórmula de Bott fornece resultados “caso a caso”. Daí, para obtermos um polinômio precisamos usar interpolação. Esse método é honesto pois o mesmo tipo de argumento (veja a subseção 4.6.1 p. 105) que usamos no final do quarto capítulo, mostra que $\text{Grau}(\mathbb{X}_d^3)$ é um polinômio em d de grau menor ou igual a $12 \cdot 3 = 36$ e por interpolação obtemos

Teorema 5.9.1. *O grau da variedade que parametriza a aderência da família das superfícies de grau $d \geq 4$ em \mathbb{P}^3 , que contêm três retas em posição geral é dado pelo polinômio*

$$\begin{aligned} \text{Grau}(\mathbb{X}_d^3) &= \frac{1}{220723937280} \binom{d-1}{2} (10395d^{22} + 31185d^{21} - 405405d^{20} + 1590435d^{19} + 679140d^{18} \\ &\quad - 47122614d^{17} + 288217622d^{16} - 990632874d^{15} + 1925104115d^{14} - 776459211d^{13} \\ &\quad - 6122385577d^{12} + 35263846215d^{11} - 317356063490d^{10} + 2348419505664d^9 \\ &\quad - 11794584945440d^8 + 41910000473328d^7 - 109450732226336d^6 \\ &\quad + 214044651812736d^5 - 312731335941120d^4 + 332706442622976d^3 \\ &\quad - 240386042732544d^2 + 69285020958720d + 61802702438400). \end{aligned}$$

Exemplo 5.9.0.0.1. Para $d = 4$ obtemos que o número de superfícies quárticas em \mathbb{P}^3 que contêm três retas disjuntas e passam por 31 pontos em posição geral é **1872200**.

Observação 5.9.0.1. Para $d = 3$, obtemos o número **720**. Isto corresponde ao número de ternas de retas disjuntas contidas em uma superfície cúbica lisa. De fato, em uma cúbica lisa, uma reta pode ser escolhida de 27 modos. Feita essa escolha, temos que das outras 26 retas contidas na cúbica, exatamente 16 são disjuntas da primeira (teo 2.I.4 em [27]). Escolhida uma segunda reta, disjunta da primeira, restam 10 retas que são disjuntas das duas primeiras (veja [27], p.33). Assim, o total de ternas não ordenadas de retas disjuntas é $27 \cdot 16 \cdot 10/6 = 720$. Trata-se aqui do grau do mapa $\mathbb{P}(\mathcal{F}_3^3) \rightarrow \mathbb{P}^{19}$.

Capítulo 6

Apêndice

Neste apêndice vamos incluir as folhas de código para MAPLE que usamos para calcular e confirmar alguns resultados desta tese. Os mais importantes são os que fornecem soluções para o grau da variedade dos cones com mais de uma geratriz nodal. Eles foram adaptados dos “scripts” citados em [30]. Na verdade, por razões de economia de espaço, optamos por incluir aqui somente o código para o caso de cones com duas geratrizes nodais. Os demais podem ser solicitados via e-mail, caso o leitor tenha interesse. O mesmo vale para os “scripts” que usamos para o cálculo efetivo na fórmula de Bott, para o problema de superfícies contendo duas e três retas. Também apresentamos alguns que foram úteis na seção sobre cones redutíveis, principalmente no caso de vértice de dimensão positiva.

6.1 Cones com uma geratriz nodal

O seguinte código para MAPLE fornece como resultado o polinômio que expressa o grau da variedade dos cones (sobre curvas) com uma geratriz nodal em termos do grau d da curva.

```
with(schubert):  
m:= 3; #Dimensão do ambiente projetivo  
r:= 0: #Dimensão do vértice  
grass(m-r,m+1,c):#Tabela da grassmanniana  
T:=Qc: # A fibra de P(T) sobre um ponto l de X se identifica com o conjunto  
#de (m-r-1)-planos de P^m contendo a reta l e mora naturalmente como um P^2  
#dentro de X
```

```

F:=dual(T):
S_dF:=Symm(d,F):
  #A fibra do projetivizado de Symm(d,F) sobre p em P^4 dá conta das curvas
  ##de grau d na fibra de P(T) sobre p
DIM:=DIM+rank(T)-1:
l:=DIM:
R:=T-o(-H); # (H é a classe hiperplana de P(T)).
P1d:=collect(dual(R)*o((d-1)*H)+o(d*H),t):
# (P1d é o feixe das partes principais de primeira ordem de  $cl\{0(d)\}$ ).
G(d):=S_dF-P1d:
## G(d) dá conta das curvas de grau d que são singulares. Aparece como núcleo
#de um mapa  $Symm(d,F) \dashrightarrow P1d$  obtido pelo levantamento do mapa natural
# $Symm(d,F) \dashrightarrow o(dH)$ 
SG(d):=chern(l,-G(d)):
#Classe de Segre obtida de potência da classe hiperplana de  $P(G(d))$ 
f:=collect(SG(d),H):
#se h é a classe hiperplana de  $P(G(d))$  devemos calcular  $h^\alpha$ 
#onde  $\alpha = \text{Dimensão de } P(G(d))$ , mas isso é igual a classe de Segre de  $G(d)$ 
#de ordem = Dimensão de  $P(G(d)) - \text{posto de } P(G(d))$ 
p:=0:
for i from 2 to l do
  p:=p+coeff(f,H,i)*chern(i-rank(T)+1,-T):
od:
a:=sort(integral(p)):
eval(a,d=3):
N[d-1,m]:=binomial(m+d-1,m):
C[1,d]:=(d-1)^(m-1)*(m*binomial(N[d-1,m],m)-d*binomial(N[d-1,m],m-1)):
if r=0 then
  expand(a-C[1,d]):
#(Deve ser nulo, pelo que vimos no primeiro capítulo )
end if:
factor(a);

```

6.2 Cones com duas geratrizes nodais

Nesta seção chamamos atenção em particular para o teste que é feito no final do seguinte código, ele fornece diretamente o número de cones sobre curvas de grau 3 que possuem duas geratrizes nodais. Antes, apresentaremos um pacote de subrotinas chamado “procs4push.txt” que é utilizado no cálculo de imagens diretas de ciclos.

```
with(schubert):
if not assigned(_luv_)then _luv_:=1:print(' from Katz&Stromme with luv ')fi:
#####
print("loaded procs4push: schubert, logg, omit,\
coefmon, Groebner, lt, fixorder, sol, coef, whichmon");
# logg: Calcula o caracter de Chern de um feixe
logg:=proc()
local AA,dim,p,c,i,k:
  userinfo(10,expp,'enter schubert:-logg');
  if nargs=1 then
    dim:=DIM
  elif nargs=2 then
    if type(args[2],integer) then
      dim:=args[2]
    else
      ERROR('second argument not integer')
    fi
  else
    ERROR('schubert:-logg must have 1 or 2 arguments')
  fi;
AA:=expand(args[1]);
p:=array(0..dim);
c:=array(0..dim);
for k from 1 to dim do
  c[k]:=coeff(AA,t,k)
od;
for k from 1 to dim do
  p[k]:=strip(-k*c[k]-sum(p[i]*c[k-i],i=1..k-1));
```



```

        userinfo(10,expp,cat('done degree ',k))
    od;
    sum(p[i]/i!*(-1)^i*t^i,i=1..dim)
end:#logg
with(Groebner):
si:=simplify:
omit:=proc()
local i,j,lista,x:
    if nargs<2 or not type(args[1],list)then
        ERROR('USAGE omit(list1,list2) or omit(list1,x1,x2,...)')else
        lista := args[1]:
        if type(args[2],list) or type(args[2],set) then x := args[2]
        else x := [seq(args[i],i = 2 .. nargs)]
        fi:
        j := []:
        for i to nops(lista) do
            if not member(lista[i],x) then j := [op(j),lista[i]]
            fi
        od:
        RETURN(j)
    fi
end:#omit
coefmon:=proc() #f,vars,monomio
#####
local n,f0,i,v,monomio:
    if nargs = 2 then monomio := args[2]: v := indets(monomio)
    elif nargs = 3 then monomio := args[3]: v := args[2]
    fi:
    n := nops(v):
    degree(monomio,v[1]):
    f0 := coeff(collect(args[1],v[1]),v[1],%):
    for i from 2 to n while f0 <> 0 do
        degree(monomio,v[i]): f0 := coeff(collect(f0,v[i]),v[i],%)
    od:

```

```

    RETURN(f0)
end:#coefmon
lt:=proc()
leadmon(args[1],plex(op(args[2]))) :
%[1]*%[2]
end:#lt
fixorder := proc(base, vvars)
local i, s, x2y2z3;
    x2y2z3 := base;
    s := sum(x2y2z3['i'], 'i' = 1 .. nops(x2y2z3));
    [];
    for i to nops(x2y2z3) do
        lt(s, vvars); [op('%'), %]; s := s - '%'; '%';
    end do;
    x2y2z3 := %
end proc:#fixorder
sol:= proc()
    if nargs = 1 then solve(convert(args[1], set))
    elif nargs = 2 then
        solve(convert(args[1], set), convert(args[2], set))
    end if
end proc:#sol
coef:=proc(f,x,i)coeff(collect(f,x),x,i)end:#coef
whichmon:=proc(f,vars)local i,v,z: #extraí monômios em um grupo de variáveis
    if type(f,numeric)then RETURN(f)
    elif type(z,'*')or type(z,'^')or type(z,'name') then
        v:=[seq(vars[i]=1,i=1..nops(vars))]:
        RETURN(f/subs(v,f)):
    else ERROR('invalid arg')
    fi:
end:
myrem:=proc(f,rel, v)
local g, g1, re, rels, h, i, d, e;
    g, re := collect(f, v), collect(rel, v);

```

```

d, e := degree(g, v), degree(re, v);
if e <= d then
  re := collect(re/coeff(re, v, e), v);
  rels := [v^e = -re + v^e];
  for i from e + 1 to d do
    rels := [op(rels), v^i =
              subs(rels, collect(v*rhs(rels[i - e]), v))];
  end do;
  g := collect(subs(rels, g), v)
end if;
g
end proc:

```

Agora apresentamos as linha de código que fornecem o grau da variedade que parametriza os cones com duas geratrizes nodais.

```

with(schubert):
read("../procs4push.txt");# Caminho para o arquivo ‘procs4push.txt’.
m:=3 ;#Dimensão do projetivo ambiente.
b:=1 ;#Dimensão da base do cone, o vértice tem dim=m-b-2.
X:=grass(b+2,m+1,c);
relDIM:=b+1;dim:=DIM;
T:=bundle(relDIM+1,h);
hs:=chern(1,relDIM+1,T);
rels:=seq(cat(h,i)=chern(i,Qc),i=1..relDIM+1);
#DIM:=DIM+relDIM;#P(T), o(-H[1])>-->T
DIM0:=DIM;
temp:=bundle(relDIM,d):#Para fazer o papel de cotangente relativo.
sing:=chern(1+relDIM,(temp+1)*o(D1));
sing:=unapply(sing,D1,seq(d||i,i=1..relDIM));
omega1:=dual(Hom(o(-h[1]),T-o(-h[1]))):
chern(1,relDIM,omega1);
sing1:=sing(d*h[1]+H1,op(%));
relh[1]:=chern(relDIM+1,T-o(-h[1]));
relh[2]:=subs(h[1]=h[2],relh[1]);

```

```

sing1:=collect(rem(sing1,relh[1],h[1]),h[1]):
sing1:=collect(sing1,h[1]);
a1:=degree(%,h[1]);
f:=0;
for j from b+1 to a1 do
f:=collect(collect(collect(f +
coef(sing1,h[1],j)*
chern(j-b-1,-T),d),hs),H1)
end do;
f;
dd:=4;sdT:=symm(dd,dual(T)):
rank(sdT);#DIM:=DIM0+%-1;
%-1 +dim;DIM1:=% -1;
collect(subs(d=dd,f)*H1^DIM1,H1);
chern(1,dim,-sdT):
eval(sum('coef(%,H1,i)*%[i-rank(sdT)+1]', 'i'=DIM1..DIM1+1));
subs(rels,%);
integral(%);
N:=binomial(dd+m-1,m);
(dd-1)^(m-1)*(m*binomial(N,m)-dd*binomial(N,m-1));
#%=%%% no caso dimvert=0
#2nd sing
DIM:=DIM+relDIM;
omega2:=subs(h[1]=h[2],
mtaylor(omega1*(e[1,2]),t,DIM+1))
+ o(-e[1,2]) - 1:
chern(1,relDIM,omega2);
sing2:=mtaylor(sing1*rem(sing(d*h[2]+H1-2*e[1,2],op(%)),relh[2],h[2]),hs,dim+1):
DIM0:=DIM;
relexc:=collect(rem(chern(relDIM+1,omega2),relh[2],h[2]),e[1,2]);
sing2:=collect(sing2,e[1,2]):
print(degree(sing2,e[1,2])):
dim;
sing2:=collect(rem(sing2,relexc,e[1,2]),e[1,2]):

```

```

degree(sing2,e[1,2]);
sing20:=collect(subs(e[1,2]=0,sing2),h[2]):
#Fora do divisor excepcional
print(indets(%),degree(sing2,e[1,2]),
degree(sing20,h[2]));
degree(sing20,h[2]);
sing20:=collect(collect(collect(collect(
coeff(rem(sing20,relh[2],h[2]),h[2],relDIM),d),hs),H1),h[1]);
degree(sing20,h[1]); sing20:=collect(collect(collect(
coeff(rem(sing20,relh[1],h[1]),h[1],relDIM),d),hs),H1);
print(indets(%));
sing2:=-(-1)^relDIM*collect(collect(collect(subs(h[2]=h[1],
coef(sing2,e[1,2],relDIM)),d),hs),h[1]);
sing2:=collect(collect(collect(collect(sing2,d),hs),H1),h[1]);
print(indets(sing2));a2:=degree(sing2,h[1]);
chern(0,rank(T),-T);
sing2:=eval(sum('coeff(sing2,h[1],i)*%[i-rank(T)+1+1]', 'i'=rank(T)-1..a2));
sing2:=collect(collect(collect(sing2+sing20,d),hs),H1);
# Para comparação com os resultados de Vainsencher obtidos em [30] e [31].
if b=1 then
curvas:=factor(subs(h1=0,h2=0,h3=0,H1=1,sing2)/2);
degree(%,d);
eval(curvas,d=3);#=binomial(7,5)
end if;
if b=2 then
superficies:=factor(subs(h1=0,h2=0,h3=0,H1=1,sing2)/2);
degree(%,d);
end if;
N2:=collect(subs(rels,sing2)/2,[c1,c2,c3,H1]);
DD:=degree(%,H1);dd:=ldegree(N2,H1);
nsing:=2;
#Para nao precisar interpolar
F:=dual(Qc):
sdF:=Symm(d,F):

```

```

N22:=0:
for k from dd to DD do
N22:=N22+coeff(N2,H1,k)*chern(dim+k-nsing,-sdF) end do:
N22:=factor(integral(collect(N22,[c1,c2,c3]]))); #Esse é o polinômio almejado.
degree(N22,d);#0 grau esperado é (m-b-1)(b+2)^2+2(b+1)
a1:=eval(N22,d=3);
#verificação feita para d=3 e b=1
dd:=3;
if b=1 then
  FF:=symm(dd-1,dual(Qc)):
  for i from 0 to dim do
    a[i]:=integral(chern(dim-i,-FF)*chern(i,-dual(Qc)))
  end do;
  a2:=sum('binomial(DIM1,DIM1-2-kk)*a[kk]',
    'kk'=0..dim);
  print(a2-a1);#Deve ser igual a zero
end if:

```

6.3 Casos teste

Nesta seção vamos apresentar os “scripts” que nos ajudaram no cálculo dos graus de algumas variedades de cones redutíveis (sobre curvas planas). Note que em alguns casos usamos o artifício de escrever Binomial em vez de binomial, a idéia é que isso facilita uma interpretação combinatória do resultado. Essas linhas de código foram escritas baseadas nas construções da seção 1.8, p. 37.

6.3.1 cones quárticos com quatro geratrizes nodais

```

with(schubert):
m:=3 ;#Dimensão do projetivo ambiente.
X:=grass(3,m+1,c);
dim:=DIM;
T:=Qc:

```

```

F:=dual(T):
R:=T-o(-H):
Symm(d,F):
chern(dim,-Symm(d,F)):#Grau da variedade dos cones.
eval(integral(%),d=2);
#Cones quárticos com 4 geratrizes nodais
##Primeiro caso: Cones sobre reta + cúbica singular.
r:=rank(symm(3,F))-1;relDIM:=2;
DIM1:=dim+r+relDIM-1;
P1(3):=collect(dual(R)*o(2*H)+o(3*H),t):
G(3):=symm(3,F)-P1(3):
r1:=rank(G(3))-1;
r2:=DIM1-relDIM;
A:=0:
for i from r1 to r2 do
A:=A+Binomial(DIM1,i)*chern(i-r1,-G(3))*chern(r2-i,-dual(Qc))
end do:
collect(A,H):
d1:=degree(A,H);
B:=0:
for i from 2 to d1 do B:=B+coeff(A,H,i)*chern(i-2,-Qc):od:
A1:=integral(B);
##Segundo caso:Dois cones quadráticos
s2F:=symm(2,dual(Qc)):r:=rank(s2F)-1:
A2:=0:
for i from r to dim+r do
A2:=A2+Binomial(dim+2*r,i)*chern(i-r,-s2F)*chern(dim+r-i,-s2F);
end do:
A2:=integral(A2)/2;
A1+A2;
expand(subs(Binomial=binomial,%));
#Esse é o grau da variedade que parametriza cones quárticos
com 4 geratrizes nodais.

```

6.3.2 cones quárticos com cinco geratrizes nodais

```

with(schubert):
m:=3 ;#Dimensão do projetivo ambiente.
X:=grass(3,m+1,c);
dim:=DIM;
T:=Qc:
F:=dual(T):
s2F:=symm(2,F):
r:=rank(s2F)-1;relDIM:=2;
DIM1:=dim+r+2*relDIM;
r2:=DIM1-relDIM;
for i from r to r2 do
  for k from relDIM to r2-i do;
    a[i,k]:=Binomial(DIM1,i)*Binomial(DIM1-i,k)*integral(chern(i-5,-s2F)*
    chern(k-relDIM,-F)*chern(r2-i-k,-F));
    if %<>0 then print(b[i,k]=%)fi;
  end do:
end do:
for i from r to r2-relDIM do
  A[i]:=factor(sum(a[i,kk],kk=relDIM..r2-i))
end do;
A:=sum(A[p],p=r..r2-relDIM);
expand(subs(Binomial=binomial,%));
#Para m=4, A=(4binomial(12,3)binomial(9,3)+6binomial(12,7)2binomial(5,3)
#+4binomial(12,8)binomial(4,2))/2=90420;

```

6.3.3 cones quárticos com 6 geratrizes nodais

```

with(schubert):
m:=3;#Dimensão do projetivo ambiente.
X:=grass(3,m+1,c);
dim:=DIM;
T:=Qc:
F:=dual(T):

```



```

relDIM=2:
DIM2:=dim+4*relDIM;
r2:=DIM2-relDIM;total:=0;
for i from relDIM to r2 do
  for j from relDIM to r2-i do
    for k from relDIM to r2-i-j do;
      a[i,j,k]:=Binomial(DIM2,i)*Binomial(DIM2-i,j)*Binomial(DIM2-i-j,k)
      *integral(chern(i-relDIM,-F)*chern(j-relDIM,-F)*chern(k-relDIM,-F)
      *chern(r2-i-j-k,-F));
      if %<>0 then print(b[i,j,k]=%); total:=total+%;fi;
    end do:
  end do:
end do:total;
# 0 resultado é obtido somando os a[i,j,k]

```

6.4 Superfícies contendo retas

Inicialmente apresentamos umas rotinas escritas pelo professor André Meireles e que serão usadas tanto no caso de duas como no caso de três retas.

6.4.1 rotinas

```

## ROTINAS.TXT
#### necessita do valor de n=dim P^n.
xx:= [seq(x[i], i=0..n)];
ww:= [seq(w[i], i=0..n)];
si:=expand:
cs:=proc(x) convert(x,'+') end:
cp:=proc(x) convert(x,'*') end:
cc:=proc(x) convert(x,set) end:
cl:=proc(x) convert(x,list) end:
xxs:=cs(xx):
#### sf(vars,d) gera o espaco vetorial das formas de grau d
####          nas variaveis vars.

```

```

sf:=proc(vars,d) local i;
  if d=0 then 1:
  else coeff(expand(series(product( (1/(1-t*vars[i])),
  i=1..nops(vars) ),t=0,d+1)),t^d): fi:
end:
#### sumwts(H) calcula a soma dos pesos da representacao H.
####          Utilizada para o calculo de  $c_1^T(H)$ 
sumwts:= proc(H) local t, cof, mon, res, u, uu, i;
  u:=sort([op(indets(H))]);
  cof:= [coeffs(H,u,'mon' )]:
  mon:= subs(seq(u[i]=t^u[i], i=1..nops(u)),[mon]):
  res:=0:
  for i from 1 to nops(mon) do
    res:= res+subs(t=1,diff(mon[i],t))*cof[i]:
  od:
end:
#### prodwts(H) calcula o produto dos pesos da representacao H
####          Utilizada para o calculo de  $c_{top}^T(H)$ 
prodwts:= proc(H) local t, cof, mon, res, u, uu, i;
  u:=sort([op(indets(H))]);
  cof:= [coeffs(H,u,'mon' )]:
  mon:= subs(seq(u[i]=t^u[i], i=1..nops(u)),[mon]):
  res:=1:
  for i from 1 to nops(mon) do
    res:= res*subs(t=1,diff(mon[i],t))^cof[i]:
  od:
end:
#### dualrep(H) retorna a representacao de H dual
dualrep:=proc(H) local u;
  u:=sort([op(indets(H))]);
  subs(seq(u[i]=1/u[i],i=1..nops(u)),H)
end:
#### colar(V,W) relaciona os pontos fixos correspondentes de
####           $P(V)=P(W)$  bem como os espacos tangentes.

```

```

colar:=proc(V,W) local i,j,n,s,ss,r,VV,WW;
  VV:=expand(cs(V)): WW:=expand(cs(W)):
  n:=nops(VV):
  if nops(WW)=n then r:=[]:
    for i to n do
      s:=(VV-op(i,VV))/op(i,VV);
      for j to n do
        ss:=(WW-op(j,WW))/op(j,WW);
        if expand(s-ss)=0 then
          r:=[op(r),[op(i,VV),op(j,WW),si(s)]];
          break
        fi:
      od:
    od:
    if nops(r)<>n then
      print(nops(r)):
      ERROR(' NAO COLA')
    else
      r
    fi:
  else
    ERROR(nops(v),nops(w))
  fi:
end:
omit:=proc() local i,j,lista,x:
  if nargs<2 or not type(args[1],list) then
    ERROR('USAGE omit(list1,list2) or omit(list1,x1,x2,...)')
  else
    lista := args[1]:
    if type(args[2],list) or type(args[2],set) then
      x:=args[2]
    else
      x:=[seq(args[i],i = 2 .. nargs)]
    fi:
  fi:
end:

```

```

    j :=[]:
    for i to nops(lista) do
        if not member(lista[i],x) then
            j := [op(j),lista[i]]
        fi:
    od:
    RETURN(j)
fi:
end:
mdc:=proc() local i,list_or_set:
    if nargs=1 then
        list_or_set:=args[1]:
    else
        list_or_set:={seq(args[i],i=1..nargs)}
    fi:
    list_or_set[1]:
    for i from 2 to nops(list_or_set) do
        gcd(list_or_set[i],%)
    od:
    RETURN(%):
end:
see:=proc(L) local i:
    for i to nops(L) do
        print(i,L[i]):
    od:
end:

```

6.4.2 superfícies contendo duas retas

```

tau:=20; # Cota superior para o grau do polinômio esperado
n:=3; dim:=8;
read("../rotinas.txt");
r:=[0,seq(si(binomial(n+i,i)-2*i-2),i=2..tau)];
pesos:=proc(H,L) local res,ii;

```

```

res:=[]:
for ii in H do
  res:=[op(res),subs(t=1,diff(subs(seq(x[i]=t^w[i],i=0..n),ii/L),t))]:
od:
subs(seq(w[i]=x[i],i=0..n),res);
end:
s2fs:=sf(xx,2):
s3fs:=sf(xx,3):
s4fs:=sf(xx,4):
#### GRASSMANINANA DE RETAS EM P^n
G:=[]: TG:=table[]: REL:=table[]:
for i from 0 to n-1 do
  for j from i+1 to n do
    pp:=[x[i],x[j]]:
    G:=[op(G),pp]:
    TG[pp]:=si((xxs-x[i]-x[j])*(1/x[i]+1/x[j])):
    REL[{x[i],x[j]}]:=[x[i],x[j]]:
  od:
od:
print(G); TG[pp]; print(REL);
G0:=[[x[0],x[1]] ];
GG:=[]: TGG:=table[]:
A:=table[]:          ## TAUT DE G
E:=table[]:          ## DIV EXC
F2:=table[]:
for l0 in G do
  L0:=l0[1]; L1:=l0[2]; P0s:=L0+L1;
#### BLOW-UP DE G NO PONTO l0
## FIB DE POSTO 4 DE QUAD QUE CONTEM l0 (MOD l0^2)
for l in G do
  if l<>l0 then
    pp:=[l0,l]:
    GG:=[op(GG),pp]:
    TGG[pp]:=si(TG[l0]+TG[l]):

```

```

A[pp]:=1:
E[pp]:=1:
F2[pp]:=L0*1[1]+L0*1[2]+L1*1[1]+L1*1[2]:
else
DEG:=si(L0*xxs+L1*xxs-P0s^2): # DIV EXC GEOM
NN:=TG[10]:
for jj in colar(DEG,NN) do
pp:=[10,1,jj[1]]:
GG:=[op(GG),pp]:
TGG[pp]:=si(TG[10]+jj[2]+jj[3]):
E[pp]:=jj[2]:
A[pp]:=10:
F2[pp]:=L0^2+L0*L1+L1^2+jj[1]:
od:
fi:
od:
od:
RELS:={x[0]=31,x[1]=15,x[2]=137,x[3]=1153};
N:=[seq(0,i=1..tau)]; cont:=0;
for i from 3 to 20 do print(i):
SF:=cl(sf(xx,i-2)):
cont:=0:
for ii in GG do cont:=cont+1:
if irem(cont,5)=0 then print(i,cont): fi:
FF:=cs({seq(op(si(SF[j]*F2[ii])),j=1..nops(SF) )}):
for jj in FF do
NUM:=(-sumwts(jj))^(dim+r[i]-1):
DEN:=(prodwts(si(TGG[ii]+(FF-jj)/jj) )):
N[i]:=N[i]+ subs(RELS,(NUM/DEN/2)):
if DEN=0 then print(ERROU): fi:
od:
od:
print(i,'NN'=factor(N[i])):
od:

```

```

cont;
N:=[0, 0, 216, 35640, 1513715, 30593535, 379960140, 3332248871, 22482531750,
123551691045, 575654485395, 2341611129165, 8501719597371, 28025983329890,
85023270096765, 239964593896230, 635668930931600, 1592080176388866,
3793187058034710, 8641552222120650];
POLY:=cs([seq(A[i]*dd^i,i=0..16)]);
SS:=solve({seq(subs(dd=i,POLY)=N[i],i=1..17)},{seq(A[i],i=0..16)});
PP:=factor(subs(SS,POLY));
subs(dd=20,PP)-N[20];

```

6.4.3 superfícies contendo três retas

```

tau:=28:
n:=3: dim:=12:
read("C:/Users/ALBERTO/Desktop/final/rotinas.txt"):
r:=[0,0,seq(si(binomial(n+i,i)-3*i-3),i=3..tau)]:
cherns:=proc(F_) local i_,j_, r_;
  r_:=nops(F_):
  [seq(si(coeff(mtaylor(cp([seq(1+F_[i_]*t,i=1..r_)]),
t=0,dim+1),t^j_)),j_=1..dim)]:
end:
segre:=proc(F_,d_) local i_, r_;
  r_:=nops(F_):
  si(coeff(mtaylor(cp([seq(1/(1+F_[i_]*t),i=1..r_)]),
t=0,dim+1),t^d_)):
end:
s12F:=si(coeff(mtaylor(1/(1+cs([seq(cc[i]*t^i,i=1..dim)])),
t=0,dim+1),t^dim)):
pesos:=proc(H) local res,ii;
  res:=[]:
  for ii in H do
    res:=[op(res),subs(t=1,diff(subs(seq(x[i]=t^w[i],
i=0..n),ii),t))]:
  od:

```

```

    subs(seq(w[i]=x[i],i=0..n),res);
end:
s2fs:=sf(xx,2):
s3fs:=sf(xx,3):
s4fs:=sf(xx,4):
#### GRASSMANINANA DE RETAS EM P^n
G:=[]: TG:=table[]: REL:=table[]:
  for i from 0 to n-1 do
    for j from i+1 to n do
      pp:=[x[i],x[j]]:
      G:=[op(G),pp]:
      TG[pp]:=si((xxs-x[i]-x[j])*(1/x[i]+1/x[j])):
      REL[{x[i],x[j]}]:=[x[i],x[j]]:
    od:
  od:
G0:=[[x[0],x[1]] ];
GGG:=[]:
TGGG:=table[]:
FFF3:=table[]:
GGGG:=[]:
TGGGG:=table[]:
FFFF3:=table[]:
FFFF4:=table[]:
Z:=[]: TZ:=table[]: Z_in_GGG:=table[]:
for l0 in G0 do
L0:=l0[1]; L1:=l0[2]; P0s:=L0+L1;
#### BLOW-UP DE G NO PONTO l0
GG:=[]: TGG:=table[]:
A:=table[]:      ## TAUT DE G
E:=table[]:      ## DIV EXC
F2:=table[]:     ## FIB DE POSTO 4 DE QUAD QUE CONTEM l0 (MOD l0^2)
for l in G do
  if l<>l0 then
    pp:=l:

```



```

GG:=[op(GG),pp]:
TGG[pp]:=TG[1]:
A[pp]:=1:
E[pp]:=1:
F2[pp]:=L0*1[1]+L0*1[2]+L1*1[1]+L1*1[2]:
else
DEG:=si(L0*xxs+L1*xxs-P0s^2): # DIV EXC GEOM
NN:=TG[10]:
for jj in colar(DEG,NN) do
pp:=[1,jj[1]]:
GG:=[op(GG),pp]:
TGG[pp]:=si(jj[2]+jj[3]):
E[pp]:=jj[2]:
A[pp]:=10:
F2[pp]:=L0^2+L0*L1+L1^2+jj[1]:
od:
fi:
od:
#### BLOW UP DE GG x GG NA DIAGONAL
GG2:=[]: TGG2:=table[]:
Fibra:=table[]:
F3:=table[]: ## FIB DE POSTO 8 DE CUBICAS CONTENDO AS 3 RETAS
EE:=table[]: ## DIV EXC
for l1 in GG do
for l2 in GG do
if l1<>l2 then
pp:=[l1,l2]:
GG2:=[op(GG2),pp]:
TGG2[pp]:=TGG[l1]+TGG[l2]:
EE[pp]:=1:
F3[pp]:=cs(si({op(si(A[l1][1]*F2[l2])),op(si(A[l1][2]*F2[l2])),
op(si(A[l2][1]*F2[l1])),op(si(A[l2][2]*F2[l1]))})):
else
NN:=TGG[l1]:

```

```

Fibra[l1]:=table[]:
if member(l1,cc(G)) then          ## l2=l1<>10
  DEG:=si(l1[1]*xxs+l1[2]*xxs-(l1[1]+l1[2])^2): # DIV EXC GEOM
  for jj in colar(DEG,NN) do
    pp:=[[l1,l2],jj[1]]:
    GG2:=[op(GG2),pp]:
    TGG2[pp]:=si(TGG[l2]+jj[2]+jj[3]):
    EE[pp]:=jj[2]:
    F3[pp]:=cs(si({op(si(A[l1][1]*F2[l2])),op(si(A[l1][2]*F2[l2])),
      L0*jj[1],L1*jj[1]))):
    Fibra[l1][jj[2]]:=jj[1]:
  od:
else                                ## l2=l1=[10,q]:
  q:=l1[2]:
  if gcd(q,L0)=1 then h:=L0: m:=q/L1: else h:=L1: m:=q/L0: fi:
  DEG:=si(q*m+h^2*(xxs-P0s)+L0*L1*(xxs-P0s-m)): #print(l1,DEG);
  for jj in colar(DEG,NN) do
    pp:=[[l1,l2],jj[1]]: #print(q,m,pp):
    GG2:=[op(GG2),pp]:
    TGG2[pp]:=si(TGG[l2]+jj[2]+jj[3]):
    EE[pp]:=jj[2]:
    if jj[1]=q*m or jj[1]=h^2*m then
      F3[pp]:=cs(si({op(si(A[l1][1]*F2[l2])),
        op(si(A[l1][2]*F2[l2])),jj[1]))):
    else
      F3[pp]:=cs(si({op(si(A[l1][1]*F2[l2])),
        op(si(A[l1][2]*F2[l2])),jj[1],jj[1]*(P0s-h)/h})):
    fi:
    Fibra[l1][jj[2]]:=jj[1]:
  od:
fi:
fi:
od:
od:
od:

```

```

nops(GG); nops(GG2);81-9+(9*4);
Y:=[]: TY:=table[]: Y_in_GG:=table[]:
for hp in xxs-P0s do          # hp marca um ponto P na reta l0
  for h in P0s do            # h plano contendo l0
    h0:=P0s-h:                # h0 eq de l0 em h
    xxsp:=h0+hp:
    for lp in xxsp do        # lp reta em h que passam pelo ponto P
      yy:=[hp,h,lp]:
      Y:=[op(Y),yy]:
      if lp<>h0 then
        Y_in_GG[yy]:=REL[{lp,h}]:
      else
        Y_in_GG[yy]:=[l0,h*hp]:
      fi:
      TY[yy]:=si((xxs-P0s-hp)/hp+(P0s-h)/h+(xxsp-lp)/lp):
    od:
  od:
od:
Y;
YxY_k:=[]: TYxY_k:=table[]:
for ii in Y do
  for jj in Y do
    if ii[1]=jj[1] then
      kk:=[ii,jj]:
      YxY_k:=[op(YxY_k),kk]:
      TYxY_k[kk]:=TY[ii]+TY[jj]-(xxs-P0s-ii[1])/jj[1]:
    fi:
  od:
od:
YY:=[]: TYY:=table[]: YY_in_GG2:=table[]:
for kk in YxY_k do
  ii:=kk[1]:
  jj:=kk[2]:
  if ii<>jj then

```

```

YY:=[op(YY),kk]:
TTY[kk]:=TYxY_k[kk]:
YY_in_GG2[kk]:=[Y_in_GG[ii],Y_in_GG[jj]]:
else
NN:=TYxY_k[kk]-TY[ii]:
for nn in NN do
qc:=Fibra[Y_in_GG[ii]] [nn]:
yy:=[ii,jj,qc]:
YY:=[op(YY),yy]:
YY_in_GG2[yy]:=[[Y_in_GG[ii],Y_in_GG[jj]],qc]:
TTY[yy]:=si(TY[ii]+nn+(NN-nn)/nn):
od:
fi:
od:
nops(GG2);
#for ii in YY do if nops(ii)=3 then print(YY_in_GG2[ii]): fi: od:
TEMP:=omit(GG2,cc(YY_in_GG2)):
for ii in TEMP do
ppp=[10,ii]:
GGG=[op(GGG),ppp]:
TGGG[ppp]:=si(TG[10]+TGG2[ii]):
FFF3[ppp]:=F3[ii]:
od:
for kk in YY do
NN:=TGG2[YY_in_GG2[kk]]-TTY[kk]:
if nops(kk)=2 then
if member(YY_in_GG2[kk][1],cc(G)) and
member(YY_in_GG2[kk][2],cc(G)) then
l1:=YY_in_GG2[kk][1]: l2:=YY_in_GG2[kk][2]:
x2:=kk[1][1]: xm:=xss-P0s-x2:
DEG:=si(xm*cs({op(F2[l1])} intersect {op(F2[l2])}));
elif member(YY_in_GG2[kk][2],cc(G)) then
l:=YY_in_GG2[kk][2]: q:=YY_in_GG2[kk][1][2]:
if l[1]*l[2]=q then

```

```

    x2:=kk[1][1]: xm:=xxs-P0s-x2: xi:=l[1]+l[2]-x2:
    DEG:=si(xi*xm*(P0s+x2));
else
    x2:=kk[1][1]: xm:=xxs-P0s-x2: xi:=l[1]+l[2]-x2:
    DEG:=si(xm*xi*P0s+xm*x2*(P0s-xi)):
fi:
elif member(YY_in_GG2[kk][1],cc(G)) then
    l:=YY_in_GG2[kk][1]: q:=YY_in_GG2[kk][2][2]:
    if l[1]*l[2]=q then
        x2:=kk[1][1]: xm:=xxs-P0s-x2: xi:=l[1]+l[2]-x2:
        DEG:=si(xi*xm*(P0s+x2));
    else
        x2:=kk[1][1]: xm:=xxs-P0s-x2: xi:=l[1]+l[2]-x2:
        DEG:=si(xm*xi*P0s+xm*x2*(P0s-xi)):
    fi:
else
    x2:=kk[1][1]: xm:=xxs-P0s-x2:
    DEG:=si(xm*(L0^2+L0*L1+L1^2)):
fi:
else
    if member(YY_in_GG2[kk][1][1],cc(G)) then
        l:=YY_in_GG2[kk][1][1]: q:=YY_in_GG2[kk][2]:
        if q=L0*L1 then
            x2:=kk[1][1]: xm:=xxs-P0s-x2: xi:=l[1]+l[2]-x2:
            DEG:=si(xi*xm*(P0s+x2)):
        else
            x2:=kk[1][1]: xm:=xxs-P0s-x2: xi:=l[1]+l[2]-x2:
            DEG:=si(xm*(xi^2+P0s*x2)):
        fi:
    else
        q:=YY_in_GG2[kk][1][1][2]: c:=YY_in_GG2[kk][2]:
        x2:=kk[1][1]: xm:=xxs-P0s-x2: xi:=q/x2:
        if c=x2*q then
            DEG:=si(xm*xi*(P0s+x2)):    ###    P0s-xi

```

```

        else
            DEG:=si(xm*(L0^2+L0*L1+L1^2)):
        fi:
    fi:
fi:
for ii in colar(DEG,NN) do
    ppp:=[l0,[YY_in_GG2[kk],ii[1]]]:
    GGG:=[op(GGG),ppp]:
    TGGG[ppp]:=si(TG[l0]+TYY[kk]+ii[2]+ii[3]):
    FFF3[ppp]:=cs({op(F3[YY_in_GG2[kk]]),ii[1]}):
od:
od:
### Gerando Z
for h in P0s do
    for hp in (xxs-P0s) do
        for hq in (xxs-P0s) do
            pp:=[l0,h,hp,hq]:
            Z:=[op(Z),pp]:
            TZ[pp]:=si(TG[l0]+(P0s-h)/h+(xxs-P0s-hp)/hp
                +(xxs-P0s-hq)/hq):
            if hp<>hq then
                Z_in_GGG[pp]:=[l0,[ [l0,h*hp], [l0,h*hq] ]]:
            else
                Z_in_GGG[pp]:=[l0,[ [l0,h*hp] , [l0,h*hq] ],
                    L0*L1*(xxs-P0s-hp)]:
            fi:
        od:
    od:
od:od:
TEMP:= omit(GGG,cc(Z_in_GGG)):
for ii in TEMP do
    GGGG:=[op(GGGG),ii]:
    TGGGG[ii]:=TGGG[ii]:
    FFFF3[ii]:=FFF3[ii]:

```

```

      FFFF4[ii]:=cs({op(si(x[0]*FFF3[ii])),op(si(x[1]*FFF3[ii])),
                    op(si(x[2]*FFF3[ii])),op(si(x[3]*FFF3[ii]))}):
od:
for ii in Z do
  iii:=Z_in_GGG[ii]:
  NN:=TGGG[iii]-TZ[ii]:
  if ii[3]<>ii[4] then
    x0:=ii[1][1]: x1:=ii[1][2]: h:=ii[2]: lp:=ii[3]: lq:=ii[4]:
    NG:=si((x0+x1-h)^2*(lp^2+lp*lq+lq^2)+h*(lp^2*lq+lp*lq^2)):
  else
    x0:=ii[1][1]: x1:=ii[1][2]: h:=ii[2]: lp:=ii[3]:
    lr:=xxs-x0-x1-lp: cub:=x[0]*x[1]*x[2]*x[3]/ii[3]:
    NG:=si((x0+x1-h)^2*(lp^2+lp*lr+lr^2)+h*lp^2*(xxs-x0-x1)):
  fi:
  for jj in colar (NG,NN) do
    pp:=[ii,jj[1]]:
    GGGG:=[op(GGGG),pp]:
    TGGGG[pp]:=si(TZ[ii]+jj[2]+jj[3]):
    FFFF3[pp]:=FFF3[ii]:
    FFFF4[pp]:=cs({op(si(x[0]*FFF3[iii])),op(si(x[1]*FFF3[iii])),
                    op(si(x[2]*FFF3[iii])),op(si(x[3]*FFF3[iii])),jj[1]}):
  od:
od:
REL:=[]:
yy:=seq(x[i]=y[i],i=0..3):
for ii in G do
  x0:=subs(yy,ii[1]): x1:=subs(yy,ii[2]):
  P0:=si(xxs-ii[1]-ii[2]): x2:=subs(yy,op(1,P0)):
  x3:=subs(yy,op(2,P0)):
  REL:=[op(REL),{x[0]=x0,x[1]=x1,x[2]=x2,x[3]=x3}]:
od:
{x[3]=y[2], x[1]=y[3], x[2]=y[0], x[0]=y[1]}:
#TGGGG[pp];
RELS:={y[0]=0,y[1]=-1,y[2]=3,y[3]=11}:

```

```

N:=[0,0,6*720,0,seq(0,i=5..tau)]: cont:=0:
for i from 4 to 28 do print(i):
  print('d'=i,'rank'=r[i]):
  SF:=cl(sf(xx,i-4)):
  for ii in GGGG do
    cont:=cont+1: #if irem(cont,10)=0 then print(i,cont): fi:
    for ij in REL do
      FF:=segre(subs(RELS,subs(ij,pesos(cl({seq(
        op(si(SF[j]*FFFF4[ii])),j=1..nops(SF) }))))),dim):
      NUM:=FF:
      DEN:=subs(RELS,subs(ij,prodwts(TGGGG[ii]))):
      N[i]:=N[i]+NUM/DEN:
    od:
  od:
  print(i,'NN'=N[i]):
od:
# N:=[0, 0, 6*720, 11233200, 3538497480, 350852221920, 16325449186200,
#443327305031940, 8034243785652360, 106214818815966840, 1090213970923201800,
#9091795727820224160, 63742832236486239060, 385742629789393749600,
#2057128835568570164310, 9829945548385379187840, 42663135956069012886480,
#170068597354429993171080, 628522704225321968385120, 2170524585254042987476440,
#7051284823218157497432240, 21673653717800328059078760, 63345950610089232044178900,
#176811832419250932553789620, 473106633488229173656034280,
#1217629587330104130460891200, 3023198533996917518610864600,
#7260365623234947189137818920];
cont:=0: for ii in N do cont:=cont+1:print(cont,ii/6): od:
POLY:=cs([seq(A[i]*dd^i,i=0..24)]);
SS:=solve({seq(subs(dd=i,POLY)=N[i],i=5..29)},{seq(A[i],i=0..24)});
PP:=factor(subs(SS,POLY));
degree(PP);

```


Referências Bibliográficas

- [1] ABHYANKAR, S., Cubic surfaces with a double line. *Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto. Ser. A. Math.* 32 1960 455–511.
- [2] ALTMAN, I. A. and KLEIMAN, S. L., Foundations of the theory of Fano schemes. *Compositio Math.* 34 (1977), no. 1, 3–47.
- [3] ALUFFI, A., Some characteristic numbers for nodal and cuspidal plane curves of any degree. *Manuscripta Math.* 72 (1991), no. 4, 425–444.
- [4] BEAUVILLE, A., Sur le nombre maximum de points doubles d’une surface dans P^3 ($\mu(5) = 31$). (French) *Journées de Géométrie Algébrique d’Angers, Juillet 1979/Algebraic Geometry, Angers, 1979*, pp. 207–215, Sijthoff & Noordhoff, Alphen aan den Rijn—Germantown, Md., 1980.
- [5] BRUCE, J.W. and WALL, C.T.C., On the classification of cubic surfaces. *J. London Math. Soc.* (2) 19 (1979), no. 2, 245–256.
- [6] CAPORASO, L. and HARRIS, J., Counting plane curves of any genus. *Invent. Math.* 131 (1998), no. 2, 345–392.
- [7] CORAY, D. and VAINSENER, I. Enumerative formulae for ruled cubic surfaces and rational quintic curves. *Comment. Math. Helv.* 61 (1986), no. 3, 501–518.
- [8] CHIANTINI, L. and CILIBERTO, C., On the Severi varieties on surfaces in \mathbb{P}^3 . *J. Algebraic Geom.* 8 (1999), no. 1, 67–83.
- [9] EISENBUD, D. and SIDMAN, J., Lectures on the geometry of syzygies. (English summary) With a chapter by Jessica Sidman. *Math. Sci. Res. Inst. Publ.*, 51, Trends in commutative algebra, 115–152, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 2004.
- [10] FULTON, W., *Intersection Theory*, Springer-Verlag, New York, 1985.

- [11] GÖTTSCHE, L., A conjectural generating function for numbers of curves on surfaces. (English summary) *Comm. Math. Phys.* 196 (1998), no. 3, 523–533.
- [12] GREEN, M., Components of maximal dimension in the Noether-Lefschetz locus. *J. Differential Geom.* 29 (1989), no. 2, 295–302.
- [13] HARRIS, J., *Algebraic Geometry, a first course*, GTM 133, Springer-Verlag, New York, 1992.
- [14] HARRIS, J., *Curves in projective space*. With the collaboration of David Eisenbud. *Séminaire de Mathématiques Supérieures [Seminar on Higher Mathematics]*, 85. Presses de l'Université de Montréal, Montreal, Que., 1982. 138 pp.
- [15] HARRIS, J. and TU, L.W., On symmetric and skew-symmetric determinantal varieties. *Topology* 23 (1984), no. 1, 71–84.
- [16] HARTSHORN, R., *Algebraic Geometry*, Graduate text in Math., Springer-Verlag, New York, 1977.
- [17] KATZ, S. and STRØMME, S.A. SCHUBERT: A MAPLE package for intersection theory, <ftp.math.okstate.edu>.
- [18] KLEIMAN, S. L., The enumerative theory of singularities. *Real and complex singularities (Proc. Ninth Nordic Summer School/NAVF Sympos. Math., Oslo, 1976)*, pp. 297–396.
- [19] KLEIMAN, S. and PIENE, R., Enumerating singular curves on surfaces. (English summary) *Algebraic geometry: Hirzebruch 70 (Warsaw, 1998)*, 209–238, *Contemp. Math.*, 241, Amer. Math. Soc., Providence, RI, 1999.
- [20] KLEIMAN, S.L., The transversality of a general translate. *Compositio Math.* 28 (1974), 287–297.
- [21] KOCK, J. e VAINSENER, I., *An invitation to quantum cohomology. Kontsevich's formula for rational plane curves*. Progress in Mathematics, 249. Birkhäuser Boston, Inc., Boston, MA, 2007. xiv+159 pp.
- [22] LEFSCHETZ, S., On certain numerical invariants of algebraic varieties with application to abelian varieties. *Trans. Amer. Math. Soc.* 22 (1921), no. 3, 327–406.
- [23] LOPEZ, A. F., Noether-Lefschetz theory and the Picard group of projective surfaces. *Mem. Amer. Math. Soc.* 89 (1991), no. 438, x+100 pp.

- [24] LOPEZ, A. F. and MACLEAN, C. , Explicit Noether-Lefschetz for arbitrary threefolds. (English summary) *Math. Proc. Cambridge Philos. Soc.* 143 (2007), no. 2, 323–342.
- [25] MEIRELES, A. and VAINSENCER, I., Equivariant intersection theory and Bott’s residue formula. 16th School of Algebra, Part I (Portuguese) (Brasília, 2000). *Mat. Contemp.* 20 (2001), 1–70.
- [26] ROJAS, J. and VAINSENCER, I., Canonical curves in \mathbb{P}^3 . *Proc. London Math. Soc.* (3) 85 (2002), no. 2, 333–366.
- [27] SANTOS, C. H., Superfícies cúbicas projetivas não singulares, Dissertação de mestrado, Impa.
- [28] STAGNARO, E., On Basset’s limitations for the maximum number of isolated singularities on an algebraic surface. *Commutative algebra (Trento, 1981)*, pp. 291–304, *Lecture Notes in Pure and Appl. Math.*, 84, Dekker, New York, 1983.
- [29] VAINSENCER, I., Enumeration of cones over cubic scrolls. *Israel J. Math.* 161 (2007), 103–123.
- [30] VAINSENCER, I., Enumeration of n -fold tangent hyperplanes to a surface. *J. Algebraic Geom.* 4 (1995), no. 3, 503–526.
- [31] VAINSENCER, I., Hypersurfaces with up to six double points. Special issue in honor of Steven L. Kleiman. *Comm. Algebra* 31 (2003), no. 8, 4107–4129.
- [32] VAINSENCER, I., Counting divisors with prescribed singularities. *Trans. Amer. Math. Soc.* 267 (1981), no. 2, 399–422.
- [33] VAINSENCER, I., The degrees of certain strata of the dual variety. *Compositio Math.* 38 (1979), no. 2, 241–252.
- [34] VAINSENCER, I., *Classes Características em Geometria Algébrica*, 15º Colóquio Brasileiro de Matemática, 1977.
- [35] XAVIER, F., Uma compactificação para o espaço das cúbicas reversas, tese de doutorado-UFPE, maio-2000.