

Universidade Federal de Minas Gerais

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

**DOMÍNIOS DE DIRICHLET E DE FORD DE SUBGRUPOS
CÍCLICOS DE $PSL(2, \mathbb{C})$ AGINDO EM $\partial\mathbb{H}^3$**

Rejane Izabel Lima Corrêa

Belo Horizonte

2010

Universidade Federal de Minas Gerais

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

**DOMÍNIOS DE DIRICHLET E DE FORD DE SUBGRUPOS
CÍCLICOS DE $PSL(2, \mathbb{C})$ AGINDO EM $\partial\mathbb{H}^3$**

Rejane Izabel Lima Corrêa

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para obtenção do grau de Mestre em Matemática.

Orientador: PROF. FRANCISCO DUTENHEFNER

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço à Deus por me dar forças para alcançar mais uma meta em minha vida. Muito obrigada Senhor por estar ao meu lado me amparando em todos os momentos.

Agradeço ao meu orientador Francisco Dutenhfner, pela atenção, paciência, dedicação e pela forma com que me incentivou e ajudou em todo o mestrado. Sem sua ajuda nada seria possível.

Ao meu pai Carlos e aos meus irmãos, Regina e Ricardo, pelo apoio e carinho. Por acreditarem em mim, me dando força a cada etapa.

À minha mãe Eva, que mesmo não estando presente, foi e sempre será um exemplo de força, determinação e alegria que sempre irei seguir.

Aos meus amigos e todos os colegas pelo companheirismo e atenção.

Muito obrigada!

Resumo

Seja Γ um subgrupo cíclico de $PSL(2, \mathbb{C})$ gerado por um elemento loxodrômico. Os domínios fundamentais de Ford e de Dirichlet para a ação de Γ em \mathbb{H}^3 são os complementares de uma configuração de semi-esferas centradas em $\widehat{\mathbb{C}} = \partial\mathbb{H}^3$. Jorgensen demonstrou que a fronteira da interseção do domínio fundamental de Ford com $\partial\mathbb{H}^3$ sempre possui dois, quatro ou seis lados formados por arcos circulares.

Neste trabalho estaremos interessados em expandir o resultado demonstrado por Jorgensen para o domínio fundamental de Dirichlet. Analisaremos os domínios fundamentais de Ford e Dirichlet, e demonstraremos algumas propriedades combinatoriais destes domínios que permitirão demonstrar que suas interseções com $\partial\mathbb{H}^3$ sempre possuem dois, quatro ou seis lados.

Abstract

Let Γ be a cyclic subgroup of $PSL(2, \mathbb{C})$ generated by an element loxodromic. The fundamental domain of Ford and Dirichlet for the action of Γ in \mathbb{H}^3 are complementary to a configuration of semi-spheres centered at $\widehat{\mathbb{C}} = \partial\mathbb{H}^3$. Jorgensen showed that the boundary of the intersection of the fundamental domain of Ford with $\partial\mathbb{H}^3$ always has two, four or six sides formed by circular arcs.

In this work we are interested in extending the result shown by Jorgensen for the Dirichlet fundamental domain. Analyze the fundamental domain for Ford and Dirichlet, and demonstrate some combinatorial properties of these domain that will demonstrate that their intersections with $\partial\mathbb{H}^3$ always have two, four or six sides.

Sumário

Introdução	1
1 Transformações Lineares Fracionárias	2
1.1 Introdução	2
1.2 Classificação das Transformações Lineares Fracionárias	3
1.3 Inversão em Círculos	8
1.4 Círculos Isométricos	9
2 Geometria Hiperbólica	13
2.1 Espaço Hiperbólico	13
2.2 Classificação das Isometrias em \mathbb{H}^3	14
2.2.1 Elementos Parabólicos	14
2.2.2 Elementos Elípticos	14
2.2.3 Elementos Loxodrômicos	15
3 Poliedros Fundamentais	18
3.1 Definição	18
3.2 Superfícies Equidistantes	19

3.3	Domínio de Dirichlet	22
3.4	Domínio de Ford	24
3.5	A localização dos pontos fixos de um elemento lo-xodrômico	25
3.6	Propriedades Combinatoriais	29
4	Domínios de Ford e Dirichlet em $\partial\mathbb{H}^3$	36
4.1	Gerador Parabólico	36
4.2	Gerador Elíptico	38
4.3	Gerador Loxodrômico	42
	Referências Bibliográficas	53

Introdução

Seja Γ um subgrupo cíclico de $PSL(2, \mathbb{C})$ gerado por um elemento loxodrômico. Os domínios fundamentais de Ford e de Dirichlet para a ação de Γ em \mathbb{H}^3 são os complementares de uma configuração de semi-esferas centradas em $\widehat{\mathbb{C}} = \partial\mathbb{H}^3$. Em [5], Jorgensen demonstrou que a fronteira da interseção do domínio fundamental de Ford com $\partial\mathbb{H}^3$ sempre possui dois, quatro ou seis lados formados por arcos circulares.

Neste trabalho estaremos interessados em expandir o resultado demonstrado por Jorgensen para o domínio fundamental de Dirichlet. Analisaremos os domínios fundamentais de Ford e Dirichlet, e demonstraremos algumas propriedades combinatoriais destes domínios que permitirão demonstrar que suas interseções com $\partial\mathbb{H}^3$ sempre possuem dois, quatro ou seis lados. Este resultado está demonstrado em [3].

Esta dissertação está dividida em 4 capítulos assim organizados.

No capítulo 1 apresentamos um estudo sobre as transformações lineares fracionárias em $\widehat{\mathbb{C}}$ e suas classificações como elementos parabólicos, elípticos, hiperbólicos e loxodrômicos. Além disso, apresentamos um breve estudo sobre inversão em círculos e o conceito de círculos isométricos. Em sequência, no capítulo 2, apresentamos o espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 e analisamos o grupo de isometrias deste espaço. No capítulo 3 definimos o conceito de poliedro fundamental em \mathbb{H}^3 e, em particular, os conceitos de domínios fundamentais de Ford e Dirichlet. Neste caso particular, demonstramos algumas propriedades combinatoriais destes domínios fundamentais para a ação de um grupo cíclico de isometrias de \mathbb{H}^3 em sua fronteira $\widehat{\mathbb{C}}$. Finalmente, no capítulo 4, reunimos todos os resultados obtidos para demonstrar que, no caso de grupos cíclicos, os domínios fundamentais de Ford e Dirichlet em $\partial\mathbb{H}^3$ possuem dois, quatro ou seis lados.

Capítulo 1

Transformações Lineares Fracionárias

1.1 Introdução

Uma transformação linear fracionária é um homeomorfismo do plano complexo estendido $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ que tem a forma

$$g(z) = \frac{az + b}{cz + d}, \quad g(\infty) = \frac{a}{c}, \quad g\left(-\frac{d}{c}\right) = \infty, \quad (1.1)$$

onde $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ e $ad - bc \neq 0$. Denotaremos o grupo destas transformações lineares fracionárias por \mathbb{M} . Toda transformação $g \in \mathbb{M}$ ou é a identidade ou tem até dois pontos fixos.

Uma tal transformação $g \in \mathbb{M}$ pode ser relacionada com a matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Mais precisamente, existe um isomorfismo entre \mathbb{M} e $PGL(2, \mathbb{C})$: o grupo projetivo das matrizes não-singulares, 2×2 , com entradas complexas. Um cálculo fácil mostra que a composição de aplicações em \mathbb{M} corresponde à multiplicação de matrizes em $PGL(2, \mathbb{C})$. Observe que a transformação não é alterada se multiplicarmos todos os quatro elementos a, b, c, d pelo mesmo número $t \neq 0$, enquanto a matriz é alterada. Assim, podemos sempre escolher um fator t apropriado tal que o determinante seja igual 1. Neste caso, estabelecemos um isomorfismo entre \mathbb{M} e $PSL(2, \mathbb{C})$: o grupo projetivo das matrizes 2×2 com entradas complexas e determinante 1.

Toda transformação linear fracionária é completamente determinada por seu valor em três pontos distintos de $\widehat{\mathbb{C}}$. Considere três pontos distintos z_1, z_2, z_3 em $\widehat{\mathbb{C}}$ e quaisquer outros três pontos distintos w_1, w_2, w_3 . Existe um elemento $g \in \mathbb{M}$ tal que $g(z_1) = w_1, g(z_2) = w_2$ e

$g(z_3) = w_3$. Tal transformação g é única, pois, se existe outra transformação $f \in \mathbb{M}$ tal que $f(z_i) = w_i$, então $f^{-1} \circ g(z_i) = z_i$, $i = 1, 2, 3$. O que implica que $f^{-1} \circ g$ tem, pelo menos, três pontos fixos, e, portanto, é a identidade.

1.2 Classificação das Transformações Lineares Fracionárias

Inicialmente classificaremos os elementos de \mathbb{M} pela quantidade de seus pontos fixos.

Toda transformação linear fracionária que tem exatamente um ponto fixo é dita *parabólica*.

Proposição 1.1 *Todo elemento parabólico de \mathbb{M} é conjugado a translação $z \mapsto z + 1$.*

Prova: Seja z_1 o ponto fixo do elemento parabólico g e z_2 e z_3 outros pontos distintos tais que $g(z_2) = z_3$. Seja $f \in \mathbb{M}$ uma aplicação que leva z_1, z_2, z_3 em $\infty, 0, 1$ respectivamente. Defina $h = f \circ g \circ f^{-1}$. Então

$$h(\infty) = f \circ g \circ f^{-1}(\infty) = f \circ g(z_1) = f(z_1) = \infty \text{ e}$$

$$h(0) = f \circ g \circ f^{-1}(0) = f \circ g(z_2) = f(z_3) = 1.$$

Isto implica que h é da forma $h(z) = az + 1$. Como h tem ∞ como único ponto fixo devemos ter $a = 1$ e assim $h(z) = z + 1$. ■

Toda transformação linear com dois pontos fixos é conjugada a uma outra que fixa 0 e ∞ . Tais transformações têm necessariamente a forma $z \mapsto k^2z$, $k \in \mathbb{C}$.

Existem dois tipos especiais destas transformações, as rotações da forma $z \mapsto e^{i\theta}z$, $\theta \in \mathbb{R}$, $e^{i\theta} \neq 1$, e as dilatações da forma $z \mapsto k^2z$, $k \in \mathbb{R} - \{1\}$.

Uma transformação conjugada a uma rotação é dita *elíptica*; uma transformação conjugada a uma dilatação é dita *hiperbólica*; e uma transformação conjugada a uma aplicação da forma $z \mapsto k^2e^{i\theta}z$ é dita *loxodrômica*, $k \in \mathbb{R} - \{1\}$ (esta inclui as transformações hiperbólicas).

Além da classificação pela quantidade de pontos fixos podemos, também, classificar as transformações lineares fracionárias pelo traço da matriz que a representa, dado que o traço

de uma matriz é invariante por conjugação. Mas o traço não está bem definido em $PSL(2, \mathbb{C})$ pois, tanto uma matriz A quanto a matriz $-A$ representam uma mesma transformação $g \in \mathbb{M}$, porém o traço das matrizes têm sinais opostos. Portanto classificaremos os elementos de \mathbb{M} de acordo com $tr^2(A)$ que é bem definido em $PSL(2, \mathbb{C})$.

Proposição 1.2 *Seja $g \in \mathbb{M}$, $g \neq Id$, representada por uma matriz $g \in SL(2, \mathbb{C})$.*

- (i) *g é elíptico se, e somente se, $tr^2(g)$ é real e $tr^2(g) \in [0, 4)$;*
- (ii) *g é parabólico se, e somente se, $tr^2(g) = 4$;*
- (iii) *g é hiperbólico se, e somente se, $tr^2(g)$ é real e $tr^2(g) > 4$;*
- (iv) *g é loxodrômico e não hiperbólico se, e somente se, $tr^2(g) \notin [0, \infty)$.*

Prova: (i) Considere g elíptico. Portanto g é conjugado a rotação $z \mapsto e^{i\theta}z$. Tal rotação pode ser representada pela matriz

$$g = \begin{pmatrix} e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & e^{-i\frac{\theta}{2}} \end{pmatrix}.$$

Desda forma, temos que $tr(g) = 2 \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ e $tr^2(g) \in [0, 4)$.

(ii) Considere agora g parabólico. Assim g é conjugado a translação $z \mapsto z + 1$, que pode ser representada pela matriz

$$g = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Então $tr(g) = 2$ e $tr^2(g) = 4$.

(iii) Seja g hiperbólico. Portanto g é conjugado a dilatação $z \mapsto k^2z$, que pode ser representada pela matriz

$$g = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & \frac{1}{k} \end{pmatrix}.$$

Então $tr(g) = k + \frac{1}{k} = \frac{k^2 + 1}{k}$ e, portanto, $tr^2(g) > 4$.

(iv) Considere g loxodrômico, não hiperbólico. Portanto g é conjugado à aplicação $z \mapsto k^2 e^{i\theta} z$ e pode ser representado pela matriz

$$g = \begin{pmatrix} k e^{i\frac{\theta}{2}} & 0 \\ 0 & \frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{k} \end{pmatrix}.$$

Então $tr(g) = k e^{i\frac{\theta}{2}} + \frac{e^{-i\frac{\theta}{2}}}{k} \notin [0, \infty)$. ■

Vamos agora encontrar representações matriciais para aplicações parabólica, elíptica, hiperbólica e loxodrômica cujos pontos fixos são diferentes de 0 e ∞ .

Suponha g um elemento parabólico com ponto fixo $x \neq \infty$. Sabemos que existe uma matriz com determinante 1 e traço 2 representando g . Escreva os termos da diagonal como $1 + px$ e $1 - px$.

$$g = \begin{pmatrix} 1 + px & b \\ c & 1 - px \end{pmatrix}.$$

Como x é ponto fixo de g , $x = \frac{(1 + px)x + b}{cx + 1 - px}$ o que implica, $b = cx^2 - 2px^2$. (I)

E como o determinante é 1, $bc = -p^2 x^2$. (II)

De (I) e (II) temos que $c = p$ e $b = -px^2$.

Concluimos que se g é parabólico com ponto fixo $x \neq \infty$, então existe um número complexo $p \neq 0$ tal que

$$g = \begin{pmatrix} 1 + px & -px^2 \\ p & 1 - px \end{pmatrix}. \tag{1.2}$$

A matriz (1.2) é denominada *forma normal para um elemento parabólico de ponto fixo x* .

Acharemos agora a forma normal para transformações com dois pontos fixos. Seja $g \in \mathbb{M}$ uma aplicação com dois pontos fixos x e y , ambos diferentes do ponto ideal ∞ . A transformação

$h(z) = \frac{z-x}{z-y}$ é tal que $h(x) = 0$ e $h(y) = \infty$. Logo a conjugação hgh^{-1} possui dois pontos fixos, a saber 0 e ∞ . Portanto tal conjugação tem a forma $hgh^{-1}(z) = k^2z$. Daí segue que $hg(z) = k^2h(z)$ e $\frac{g(z)-x}{g(z)-y} = k^2\frac{z-x}{z-y}$. Resolvendo esta equação para $g(z)$ obtemos:

$$g(z) = \frac{(x - k^2y)z + k^2xy - xy}{(1 - k^2)z + k^2x - y}$$

Esta transformação linear fracionária pode ser representada pela matriz

$$\begin{pmatrix} xk^{-1} - yk & xy(k - k^{-1}) \\ k^{-1} - k & xk - yk^{-1} \end{pmatrix}.$$

Multiplicando por uma constante apropriada vemos que esta transformação também pode ser representada pela seguinte matriz de determinante 1

$$\frac{1}{x-y} \begin{pmatrix} xk^{-1} - yk & xy(k - k^{-1}) \\ k^{-1} - k & xk - yk^{-1} \end{pmatrix}. \quad (1.3)$$

A matriz (1.3) é dita *forma normal para elementos de pontos fixos x e y* , sendo ambos $\neq \infty$.

Analisaremos agora a ação de cada tipo de transformação linear fracionária no plano complexo.

É fácil descrever a ação da translação $z \mapsto z + 1$. Toda linha paralela ao eixo real é invariante por essa ação. A família das linhas paralelas ao eixo imaginário permanece fixa, como família (a translação permuta membros desta família).

A uma transformação parabólica com ponto fixo $x \neq \infty$ também podemos associar duas tais famílias. A primeira é uma família de círculos tangentes entre si no ponto x . Cada membro desta família é invariante pela ação. A segunda, é uma família de trajetórias ortogonais à primeira. Esta família também é formada por círculos tangentes em x . Tal família é invariante como família, cada círculo é levado em outro círculo. Ver figura 1.1.

A ação da dilatação $z \mapsto k^2z$ é também descrita em termos de um par de famílias de círculos ortogonais. A primeira família é a das retas que passam pela origem, onde cada reta é invariante pela transformação. As trajetórias ortogonais a esta família é a família dos círculos

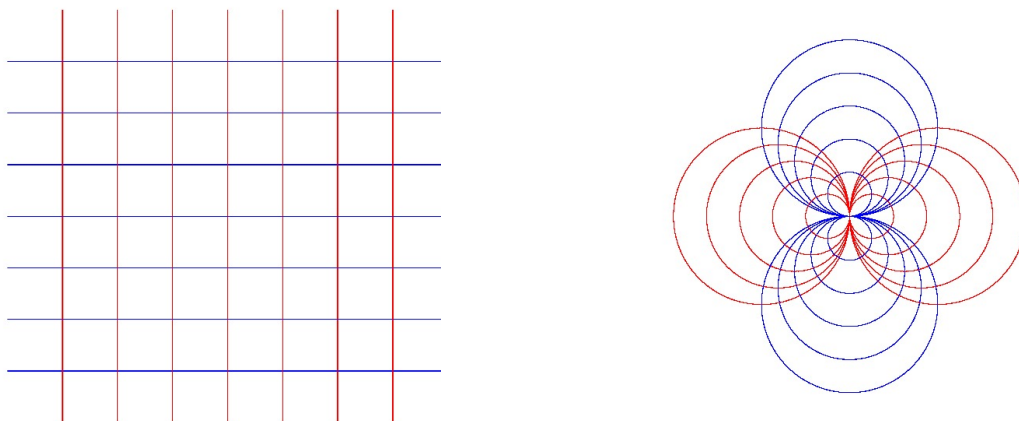


Figura 1.1: Ação da translação quando o ponto fixo é ∞ e quando é $x \neq \infty$

centrados na origem. Cada um destes círculos é aplicado pela transformação em outro círculo da mesma família.

Para a transformação hiperbólica com pontos fixos finitos x e y temos também duas famílias de círculos. A primeira, é a família de círculos que passam por x e y . Cada elemento desta família é mantido invariante. A segunda, é a família das trajetórias ortogonais à primeira. É a família de círculos cuja inversão de x com relação a um círculo desta família é y .

Para descrever a ação da rotação $z \mapsto e^{i\theta}z$ encontramos as mesmas famílias de círculos da dilatação. Sendo que, neste caso, a família invariante elemento a elemento é a dos círculos centrados na origem e a invariante como família é a das retas que passam pela origem. Assim, para a transformação elíptica geral, a família de círculos passando por x e y é mantida invariante, elemento a elemento, e a família dos círculos que “refletem” x e y é invariante como família.

A transformação loxodrômica não hiperbólica $z \mapsto k^2 e^{i\theta}z$ mantém a família de círculos centrados na origem invariante como família, mas nenhum membro desta família é mantido invariante. A família das retas que passam pela origem também é mantida invariante, mas nenhuma reta é mantida invariante como elemento. Ver figura 1.2.

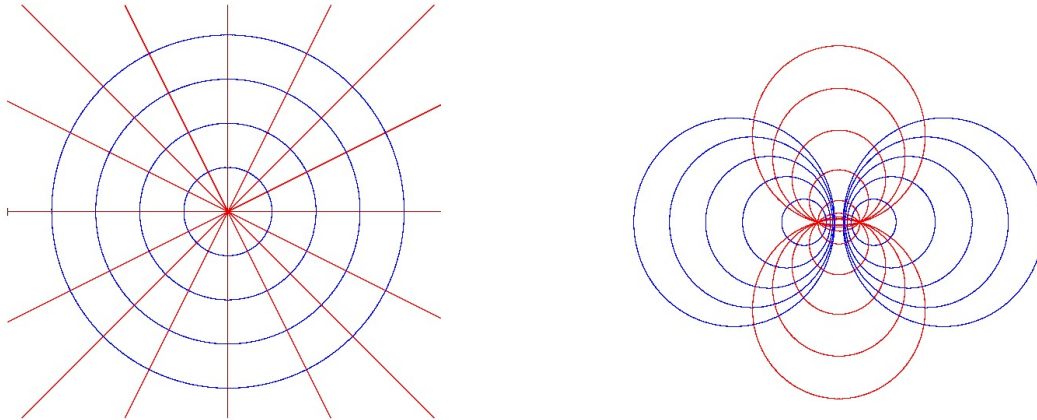


Figura 1.2: Ação da dilatação e rotação quando os ponto fixos são 0 e ∞ e quando são $x, y \neq \infty$

1.3 Inversão em Círculos

Seja $\mathcal{C}(a, r)$ um círculo de centro a e raio r . Para todo ponto $z \in \mathbb{C} - \{a\}$, o inverso de z em relação ao círculo $\mathcal{C}(a, r)$ é definido como o único ponto z' na semi-reta de origem a e que passa por z tal que $|\vec{az}| \cdot |\vec{az}'| = r^2$. Em coordenadas, $z' = a + \frac{r^2}{|az|^2} \vec{az}$.

O vetor unitário na direção de \vec{az} é o vetor $\frac{\vec{az}}{|\vec{az}|}$.

Daí,
$$\vec{az}' = \frac{r^2}{|\vec{az}|} \cdot \frac{\vec{az}}{|\vec{az}|} \quad \text{e} \quad z' = a + \frac{r^2}{|az|^2} \cdot \vec{az}.$$

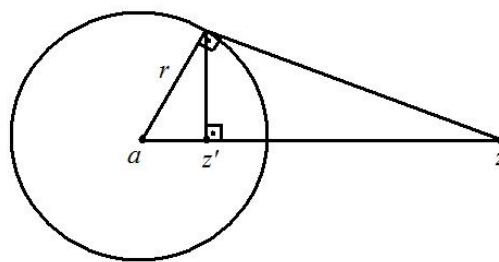


Figura 1.3: Inversão de z em $\mathcal{C}(a, r)$

Portanto a *inversão em* $\mathcal{C}(a, r)$ será o homeomorfismo $\Phi : \widehat{\mathbb{C}} \rightarrow \widehat{\mathbb{C}}$ definido por

$$\Phi(z) = a + \frac{r^2}{|z - a|^2}(z - a) \text{ e } \Phi(a) = \infty \quad (1.4)$$

No caso especial de $\mathcal{C}(0, 1)$ a inversão se reduz a $\Phi = \frac{z}{|z|^2} = \frac{1}{\bar{z}}$.

Uma reta em \mathbb{C} pode ser vista como um círculo em $\widehat{\mathbb{C}}$ passando por ∞ . Se L é uma reta passando por z_0 com inclinação α , a *inversão em L* (ou reflexão em L) se escreve como $\Phi_L(z) = e^{2i\alpha}(\bar{z} - \bar{z}_0) + z_0$.

Note que tanto Φ quanto Φ_L podem ser escritas da forma $z \mapsto \frac{a\bar{z} + b}{c\bar{z} + d}$, com $a, b, c, d \in \mathbb{C}$ e $ad - bc \neq 0$. Portanto são aplicações anti-holomorfas, conseqüentemente invertem a orientação do plano complexo.

A seguir citaremos algumas propriedades da inversão Φ no círculo $\mathcal{C}(a, r)$ de centro a e raio r :

1. $z \in \mathcal{C}(a, r)$ se, e somente se, $\Phi(z) = z$;
2. $(\Phi)^2 = \text{Id}$;
3. A imagem por Φ do exterior de $\mathcal{C}(a, r)$ é o interior de $\mathcal{C}(a, r)$ e vice-versa;
4. Φ preserva ângulos;
5. Φ transforma retas e círculos em retas ou círculos;
6. Se Σ é uma reta ou círculo em \mathbb{C} , então $\Phi(\Sigma)$ é uma reta se, e somente se, Σ passa pelo ponto a ;
7. Se Σ é uma reta ou um círculo, então $\Phi(\Sigma) = \Sigma$ se, e somente se, Σ e $\mathcal{C}(a, r)$ são ortogonais.

1.4 Círculos Isométricos

Seja $g = \frac{az + b}{cz + d}$ uma transformação linear fracionária representada pela matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$

tal que $g(\infty) \neq \infty$, ou seja, $c \neq 0$ e $ad - bc = 1$. E sejam $\alpha = g^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}$ e $\alpha' = g(\infty) = \frac{a}{c}$.

As retas que passam por α e ∞ são aplicadas por g em retas que passam por ∞ e α' . Assim, trajetórias ortogonais às primeiras retas são aplicadas em trajetórias ortogonais às segundas. Ou seja, círculos centrados em α são levados em círculos centrados em α' .

De fato, seja $\mathcal{C}(\alpha, r)$ o círculo centrado em α e de raio r . Se $z \in \mathcal{C}(\alpha, r)$ então

$$|g(z) - \alpha'| = \left| \frac{az + b}{cz + d} - \frac{a}{c} \right| = \left| \frac{bc - ad}{c(cz + d)} \right| = \frac{|bc - ad|}{|c|^2 \left| z + \frac{d}{c} \right|} = \frac{1}{|c|^2 |z - \alpha|} = \frac{1}{|c|^2 r}.$$

Logo g transforma o círculo $\mathcal{C}(\alpha, r)$ no círculo $\mathcal{C}(\alpha', r')$ centrado em α' e com raio $r' = \frac{1}{|c|^2 r}$. Desta expressão vemos que o círculo $I_{g^{-1}}$ de centro α e raio $r = \frac{1}{|c|}$ é transformado por g no círculo I_g de centro α' e mesmo raio $r = \frac{1}{|c|}$. Neste caso, o círculo $I_{g^{-1}}$ de centro $\alpha = g^{-1}(\infty) = -\frac{d}{c}$ e raio $r = \frac{1}{|c|}$ é chamado *círculo isométrico* de g^{-1} e o círculo I_g , de centro $\alpha' = g(\infty) = \frac{a}{c}$ e raio $r = \frac{1}{|c|}$ é o círculo isométrico de g . Observe que, para o leitor acostumado, estamos usando a definição trocada em relação à definição apresentada no livro do Beardon [2].

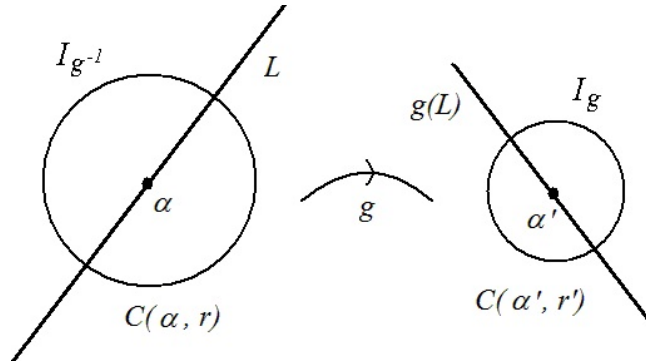


Figura 1.4: Esquema da transformação g

Proposição 1.3 *Todo $g \in \mathbb{M}$ com $g(\infty) \neq \infty$ pode ser escrito da forma $g = r \circ q \circ p$, onde p é a inversão no círculo isométrico de g , e r e q são movimentos rígidos Euclidianos.*

Prova: Sejam $p = p(g)$ a inversão no círculo isométrico $I_{g^{-1}}$ de g e $q = q(g)$ a reflexão Euclidiana na reta que bissecta o segmento $\alpha\alpha'$ ortogonalmente. Se $\alpha = \alpha'$, então $q = 1$ (ver figura 1.5).

Defina $r = r(g) = g \circ (q \circ p)^{-1}$. Note que:

- $r^{-1}(\infty) = q \circ p \circ g^{-1}(\infty) = q \circ p(\alpha) = q(\infty) = \infty$

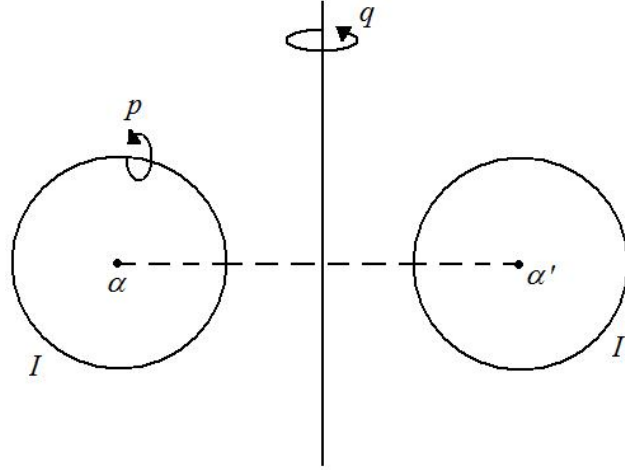


Figura 1.5: Inversão no círculo isométrico $I_{g^{-1}}$ de g e reflexão Euclidiana

- $r^{-1}(\alpha') = q \circ p \circ g^{-1}(\alpha') = q \circ p(\infty) = q(\alpha) = \alpha'$
- $r^{-1}(I_g) = q \circ p \circ g^{-1}(I_g) = q \circ p(I_{g^{-1}}I) = q(I_{g^{-1}}) = I_g$

Escreva $r^{-1} = \frac{az + b}{cz + d}$. Como $r^{-1}(\infty) = \infty$ devemos ter $c = 0$ e r^{-1} se reduz a $r^{-1} = az + b$. Do segundo item temos $r^{-1}(\alpha') = \alpha'$ e daí $a\alpha' + b = \alpha'$, implicando em $b = \alpha' + a\alpha'$. Desta forma $r^{-1} = a(z - \alpha') + \alpha'$. E como $r^{-1}(I_g) = I_g$ devemos ter $|a| = 1$ e portanto $r^{-1} = e^{i\theta}(z - \alpha') + \alpha'$. Concluimos que r^{-1} é uma rotação ao redor de I_g , que é um movimento rígido Euclidiano e $g = r \circ q^{-1} \circ p^{-1} = r \circ q \circ p$.

■

Proposição 1.4 \mathbb{M} é gerado por reflexões.

Prova: Como todo elemento $g \in \mathbb{M}$ é conjugado a um que não fixa o ∞ , é suficiente considerar apenas tais transformações. Como p e q , da proposição anterior, são ambas composição de reflexões, temos que g é um produto de reflexões.

■

Proposição 1.5 \mathbb{M} é gerado por translações ($z \mapsto z + a$), rotações ($z \mapsto e^{i\theta}z$, $\theta \in \mathbb{R}$), dilatações ($z \mapsto \lambda z$, $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda \neq 1$) e pela transformação $z \mapsto \frac{1}{z}$.

Prova: Seja g a transformação linear fracionária $g = \frac{az + b}{cz + d}$.

Se $c = 0$, então $g(z) = \frac{az + b}{d} = \frac{a}{d} \left(z + \frac{b}{a} \right)$, que pode ser escrita como a composição

$$z \xrightarrow{z + \frac{b}{a}} z + \frac{b}{a} \xrightarrow{\frac{a}{d}z} \frac{a}{d} \left(z + \frac{b}{a} \right).$$

Se $c \neq 0$, então g pode ser escrita como $g(z) = \left(\frac{bc - ad}{cz + d} \right) + \frac{a}{c}$ que é dada pela composição

$$z \xrightarrow{cz} cz \xrightarrow{z+d} cz + d \xrightarrow{\frac{1}{z}} \frac{1}{cz + d} \xrightarrow{\frac{bc-ad}{c}z} \frac{\left(\frac{bc - ad}{c} \right)}{cz + d} \xrightarrow{z + \frac{a}{c}} \frac{\left(\frac{bc - ad}{c} \right)}{cz + d} + \frac{a}{c}$$

■

Capítulo 2

Geometria Hiperbólica

2.1 Espaço Hiperbólico

Neste trabalho, utiliza-se o modelo do semi-espaço superior para o espaço hiperbólico complexo de dimensão 3. Este é definido por

$$\mathbb{H}^3 = \{(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R} \mid t > 0\} = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 \mid x_3 > 0\}$$

Dados dois pontos x e y em \mathbb{H}^3 definimos a distância hiperbólica $\rho(x, y)$ entre x e y por

$$\cosh \rho(x, y) = 1 + \frac{\|x - y\|^2}{2x_3y_3} \quad (2.1)$$

onde $\|\cdot\|$ denota a norma euclidiana em \mathbb{R}^3 , $x = (x_1, x_2, x_3)$, $y = (y_1, y_2, y_3)$.

Nesta métrica, o grupo de isometrias de \mathbb{H}^3 é gerado por (ver [6], pg. 54):

- (i) Translação: $(z, t) \mapsto (z + a, t)$, $(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$
- (ii) Rotação: $(z, t) \mapsto (e^{i\theta}z, t)$, $(z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}$
- (iii) Dilatação: $x \mapsto \lambda x$, $x \in \mathbb{R}^3$, $\lambda > 0$, $\lambda \neq 1$
- (iv) Inversão: $x \mapsto \frac{x}{\|x\|^2}$, $x \in \mathbb{R}^3$.

O grupo das isometrias de \mathbb{H}^3 pode ser identificados com $PSL(2, \mathbb{C})$:

Um dado elemento $\gamma \in PSL(2, \mathbb{C})$ representado pela matriz

$$\gamma = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SL(2, \mathbb{C}) \quad (2.2)$$

age como uma transformação linear fracionária (como já visto) em $\widehat{\mathbb{C}}$ ou como a isometria

$$\gamma : (z, t) \mapsto \left(\frac{(az + b)\overline{(cz + d)} + a\bar{c}t^2}{|cz + d|^2 + |c|^2t^2}, \frac{t}{|cz + d|^2 + |c|^2t^2} \right) \quad (2.3)$$

em \mathbb{H}^3 (ver [2], pg. 58).

A fronteira de \mathbb{H}^3 é o plano complexo estendido $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ e as geodésicas são os arcos de círculos ortogonais à fronteira $\widehat{\mathbb{C}}$.

2.2 Classificação das Isometrias em \mathbb{H}^3

No capítulo anterior vimos que o tipo de uma transformação linear fracionária g , representada por uma matriz $g = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ em $SL(2, \mathbb{C})$, fica caracterizado por $tr^2(g) = (a + d)^2$. Como cada uma destas aplicações define uma isometria de \mathbb{H}^3 , vamos revisitar a classificação dos elementos de $PSL(2, \mathbb{C})$ como parabólico, elíptico, hiperbólico e loxodrômico olhando agora estes elementos como isometrias de \mathbb{H}^3 .

2.2.1 Elementos Parabólicos

Um elemento γ é dito parabólico se o traço $\tau = tr(\gamma) = \pm 2$. Todo elemento parabólico é conjugado a um que fixa o ponto 0 em $\widehat{\mathbb{C}}$. Da matriz (1.2), temos que tal elemento de $SL(2, \mathbb{C})$ é da seguinte forma:

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ note que } \gamma^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}. \quad (2.4)$$

2.2.2 Elementos Elípticos

Um elemento γ é dito elíptico se seu traço τ é real e $-2 < \tau < 2$. Todo elemento elíptico fixa, ponto a ponto em \mathbb{H}^3 , uma geodésica (e seus extremos), atua como uma rotação e é conjugado a um elemento de maneira que sua geodésica tem pontos extremos 0 e 1 em $\widehat{\mathbb{C}}$. Da matriz (1.3)

temos que a matriz de $SL(2, \mathbb{C})$ conjugada à um elemento elíptico é da seguinte forma:

$$\gamma = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ e^{i\theta} - e^{-i\theta} & e^{-i\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \beta_1 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \text{ note que } \gamma^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ \beta_n & \lambda^{-n} \end{pmatrix} \quad (2.5)$$

onde

$$\lambda^n = e^{ni\theta} \quad \text{e} \quad \beta_n = \lambda^n - \lambda^{-n} = e^{ni\theta} - e^{-ni\theta} = 2i \operatorname{sen}(n\theta) \quad (2.6)$$

Neste caso, o traço de γ é $\tau = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos(\theta)$ e o traço de γ^n é $\tau_n = \operatorname{tr}(\gamma^n) = 2 \cos(n\theta)$.

2.2.3 Elementos Loxodrômicos

Um elemento γ é dito loxodrômico se não é parabólico e nem elíptico. Todo elemento loxodrômico deixa invariante uma geodésica em \mathbb{H}^3 , denominada eixo, e atua como uma translação ao longo deste eixo e como uma rotação em torno do eixo. Um elemento loxodrômico é dito hiperbólico se o traço τ é real.

Os pontos finais a e b da geodésica invariante são pontos fixos de γ , e definimos a como ponto fixo atrator se $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma^n x = a$ para todo $x \in \mathbb{H}^3$ e b como ponto fixo repulsor se $\lim_{n \rightarrow -\infty} \gamma^n x = b$ para todo $x \in \mathbb{H}^3$.

Escolhe-se representantes das classes de conjugação dos elementos loxodrômicos tais que 1 seja o ponto fixo atrator e 0 o ponto fixo repulsor. Neste caso, pela matriz (1.3), vemos que tal elemento pode ser representado pela matriz

$$\gamma = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \beta_1 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \text{ note que } \gamma^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ \beta_n & \lambda^{-n} \end{pmatrix}. \quad (2.7)$$

Como $\gamma^n(1) = 1$ vemos que $\beta_n = \lambda^n - \lambda^{-n}$.

Observe agora que, para todo $x \in \mathbb{C}$,

$$\gamma^n x = \frac{\lambda^n x}{(\lambda^n - \lambda^{-n})x + \lambda^{-n}} = \frac{x}{x + \frac{1-x}{\lambda^{2n}}}$$

Daí segue que $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma^n(x) = 1$ se $|\lambda| > 1$ e $\lim_{n \rightarrow \infty} \gamma^n(x) = 0$ se $|\lambda| < 1$. Como queremos $x = 1$ como ponto fixo atrator devemos ter $|\lambda| > 1$.

Por outro lado, como $\beta_1 = \lambda - \lambda^{-1}$ e como o traço de γ é $\tau = \lambda + \lambda^{-1}$, temos que, dado o traço τ de γ , podemos definir o elemento γ calculando λ como

$$\lambda = \frac{\tau \pm \sqrt{\tau^2 - 4}}{2}.$$

Para determinarmos o valor de λ é necessário escolher um ramo para a raiz quadrada de um número complexo. Neste trabalho vamos escolher esse ramo como sendo o eixo real positivo, de modo que a função $\lambda(\tau) = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4}}{2}$ é descontínua somente ao longo dos segmentos $(-\infty, -2)$ e $(2, \infty)$ do eixo real.

Deste modo a função $\lambda(\tau) = \frac{\tau + \sqrt{\tau^2 - 4}}{2}$ é contínua no semi-plano superior unido com o segmento $[-2, 2]$ do eixo real e, dado τ , encontramos um valor de λ que define um elemento loxodrômico através das matrizes (2.7).

Nas próximas seções serão contruídos domínios fundamentais de Dirichlet para grupos cíclicos gerados por elementos elípticos e loxodrômicos. Para construir tais domínios é necessário escolher um ponto base em \mathbb{H}^3 . O ponto base que será escolhido é $\left(\frac{1}{2}, \frac{t}{2}\right) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}_+$. Neste caso, usando as matrizes (2.5) e (2.7) que representam um elemento elíptico e loxodrômico, respectivamente, e usando a expressão (2.3) de uma isometria em \mathbb{H}^3 temos:

$$\begin{aligned} \gamma^n \left(\frac{1}{2}, \frac{t}{2} \right) &= \left(\frac{\frac{\lambda^n \overline{\left(\frac{\beta_n}{2} + \lambda^{-n}\right)} + \frac{\lambda^n \overline{\beta_n} t^2}{4}}{\left| \frac{\beta_n}{2} + \lambda^{-n} \right|^2 + |\beta_n|^2 \frac{t^2}{4}}, \frac{\frac{t}{2}}{\left| \frac{\beta_n}{2} + \lambda^{-n} \right|^2 + |\beta_n|^2 \frac{t^2}{4}} \right) \\ &= \left(\frac{\lambda^n \overline{(\beta_n + 2\lambda^{-n} + \overline{\beta_n} t^2)}}{|\lambda^n - \lambda^{-n} + 2\lambda^{-n}|^2 + |\beta_n|^2 t^2}, \frac{2t}{|\lambda^n - \lambda^{-n} + 2\lambda^{-n}|^2 + |\beta_n|^2 t^2} \right) \\ &= \left(\frac{\lambda^n \overline{(\tau_n + \beta_n t^2)}}{|\tau_n|^2 + |\beta_n|^2 t^2}, \frac{2t}{|\tau_n|^2 + |\beta_n|^2 t^2} \right) \end{aligned}$$

Assim,

$$\gamma^n \left(\frac{1}{2}, \frac{t}{2} \right) = \left(\frac{\lambda^n \overline{(\tau_n + \beta_n t^2)}}{D_n}, \frac{2t}{D_n} \right) \quad (2.8)$$

onde,

$$D_n = |\tau_n|^2 + |\beta_n|^2 t^2 \quad (2.9)$$

Estas expressões serão utilizadas no cálculo do domínio de Dirichlet que definiremos no próximo capítulo.

Capítulo 3

Poliedros Fundamentais

Neste capítulo vamos definir os conceitos dos domínios de Ford e de Dirichlet para um grupo cíclico Γ de isometrias de \mathbb{H}^3 . Estes são domínios fundamentais limitados por hemisférios em \mathbb{H}^3 .

Também definiremos domínios de Ford e Dirichlet para a ação de Γ em $\partial\mathbb{H}^3 = \widehat{\mathbb{C}}$. Estes são iguais à interseção dos fechos dos domínios correspondentes com $\widehat{\mathbb{C}}$.

No caso em que Γ não fixa o ponto ideal ∞ mostraremos que o domínio de Ford de Γ é o limite do domínio de Dirichlet, quando o centro deste tende ao ∞ .

3.1 Definição

Um hiperplano em \mathbb{H}^3 divide tal espaço em dois semi-espacos. Dizemos que um *poliedro fundamental* D em \mathbb{H}^3 é a interseção de uma quantidade enumerável de semi-espacos abertos, onde somente um número finito de hiperplanos encontram qualquer subconjunto compacto de \mathbb{H}^3 . O fecho \overline{D} de D tem uma decomposição natural em células (faces de dimensão dois, arestas de dimensão um e vértices de dimensão zero) dadas pelas interseções dos hiperplanos.

Seja Γ um subgrupo de isometrias de \mathbb{H}^3 . Um poliedro D é um *poliedro fundamental* de \mathbb{H}^3 se valem as seguintes condições:

1. Para todo $\gamma \in \Gamma - \{Id\}$, $\gamma(D) \cap D = \emptyset$;

2. Para todo $x \in \mathbb{H}^3$, existe $\gamma \in \Gamma$ tal que $\gamma(x) \in \overline{D}$;
3. Os lados do poliedro são identificados por elementos de Γ , isto é, se s é um lado de D , então existe um lado s' , não necessariamente distinto de s , e existe um elemento $\gamma \in \Gamma$, denominado *transformação identificadora de lados*, tal que $\gamma(s) = s'$. Definimos $(s')' = s$ e, a transformação identificadora de lado de s' é γ^{-1} ;
4. Qualquer subconjunto compacto de \mathbb{H}^3 intercepta, no máximo, uma quantidade finita de translações de D por elementos de Γ .

Os domínios de Dirichlet e de Ford, definidos a seguir, são poliedros fundamentais sob a ação de Γ em \mathbb{H}^3 . Veja por exemplo o livro do Maskit [6].

Entretanto, antes de definir estes domínios vamos estudar detalhadamente o conceito de superfície equidistante em \mathbb{H}^3 .

3.2 Superfícies Equidistantes

Sejam x e y dois pontos distintos em \mathbb{H}^3 . A superfície equidistante $E(x, y)$ de x e de y é o conjunto

$$E(x, y) = \{p \in \mathbb{H}^3 \mid \rho(p, x) = \rho(p, y)\}$$

e o semi-espaço limitado por $E(x, y)$ e que contém x é o conjunto

$$S(x, y) = \{p \in \mathbb{H}^3 \mid \rho(p, x) < \rho(p, y)\}.$$

Vamos mostrar agora que $E(x, y)$ é um semiplano em \mathbb{H}^3 ortogonal a $\partial\mathbb{H}^3 = \widehat{\mathbb{C}}$ ou é um hemisfério em \mathbb{H}^3 cujo centro está em $\partial\mathbb{H}^3 = \widehat{\mathbb{C}}$ e que $S(x, y)$ é uma das componentes conexas do conjunto $\mathbb{H}^3 - E(x, y)$.

Para provar isso vamos considerar as seguintes coordenadas para x , y e p :

- $x = (z, t) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$, $z = z_1 + iz_2$
- $y = (w, s) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$, $w = w_1 + iw_2$

- $p = (u, v) \in \mathbb{C} \times \mathbb{R}^+$, $u = u_1 + iu_2$

Nestas coordenadas temos que:

$$\rho(p, x) < \rho(p, y) \Leftrightarrow \cosh \rho(p, x) < \cosh \rho(p, y) \Leftrightarrow 1 + \frac{\|p - x\|^2}{2vt} < 1 + \frac{\|p - y\|^2}{2vs}$$

$$\Leftrightarrow s\|p - x\|^2 < t\|p - y\|^2$$

Se $s = t$ esta desigualdade tem como conjunto solução o semi-espço limitado pelo plano de equação $\|p - x\|^2 = \|p - y\|^2$, que é o plano mediador do segmento em \mathbb{R}^3 que une os pontos x e y . Como estes pontos estão a uma mesma altura em relação ao plano complexo contido em $\partial\mathbb{H}^3$, vemos que este segmento é paralelo a este plano e que o plano $\|p - x\|^2 = \|p - y\|^2$ é perpendicular a fronteira do espaço hiperbólico \mathbb{H}^3 .

Daqui para frente suponhamos que $s \neq t$. Neste caso, $s\|p - x\|^2 < t\|p - y\|^2$ é equivalente a

$$s(u_1 - z_1)^2 + s(u_2 - z_2)^2 + s(v - t)^2 < t(u_1 - w_1)^2 + t(u_2 - w_2)^2 + t(v - s)^2.$$

Completando os quadrados e simplificando obtemos a seguinte desigualdade equivalente.

$$(s - t) \left[\left(u_1 - \frac{tw_1 - sz_1}{t - s} \right)^2 + \left(u_2 - \frac{tw_2 - sz_2}{t - s} \right)^2 + v^2 \right] < ts(s - t) \left(1 + \frac{|z - w|^2}{(s - t)^2} \right)$$

Definindo $x_0 = \frac{tw_1 - sz_1}{t - s}$ e $y_0 = \frac{tw_2 - sz_2}{t - s}$ então temos que

$$z_0 = x_0 + iy_0 = \frac{t(w_1 + iw_2) - s(z_1 + iz_2)}{t - s} = \frac{tw - sz}{t - s}.$$

Se, além disso, definimos $R = \sqrt{ts \left(1 + \frac{|z - w|^2}{(s - t)^2} \right)}$, vemos que a superfície equidistante de x e de y , $E(x, y) = \{p \in \mathbb{H}^3 \mid \rho(p, x) = \rho(p, y)\}$, é dada pela equação $(u_1 - x_0)^2 + (u_2 - y_0)^2 + v^2 = R^2$, que é a equação de uma esfera de centro $(z_0, 0) \in \partial\mathbb{H}^3$ e raio R .

Por outro lado, $\rho(p, x) < \rho(p, y)$ se, e somente se, $(s - t)[(u_1 - x_0)^2 + (u_2 - y_0)^2 + v^2] < (s - t)R^2$. Aqui temos que analisar dois casos: $s - t > 0$ ou $s - t < 0$.

- Suponhamos que $s - t > 0$, ou seja, $t < s$. Aqui temos que $\rho(p, x) < \rho(p, y)$ se, e somente se, $(u_1 - x_0)^2 + (u_2 - y_0)^2 + v^2 < R^2$ que geometricamente corresponde a parte interior (limitada) da esfera de centro $(z_0, 0) \in \mathbb{H}^3$ e de raio R . (veja figura 3.1)

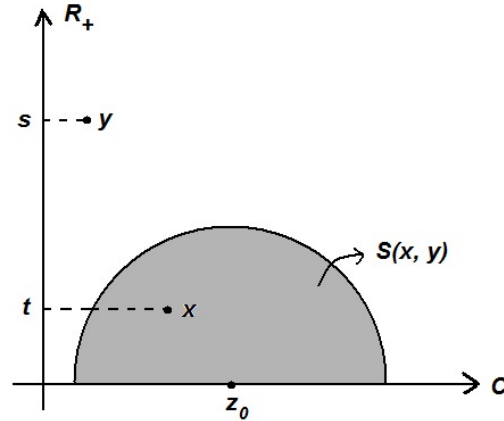


Figura 3.1: Semi-espaço que contém o ponto x limitado por uma superfície equidistante. Neste caso, este semi-espaço é a região interior (limitada) da esfera de centro $(z_0, 0) \in \mathbb{H}^3$ e de raio R .

- Suponhamos agora que $s - t < 0$, ou seja, $s < t$. Neste caso $\rho(p, x) < \rho(p, y)$ se, e somente se, $(u_1 - x_0)^2 + (u_2 - y_0)^2 + v^2 > R^2$ que corresponde geometricamente ao exterior (parte ilimitada) da esfera de centro $(z_0, 0)$ e raio R . (veja figura 3.2)

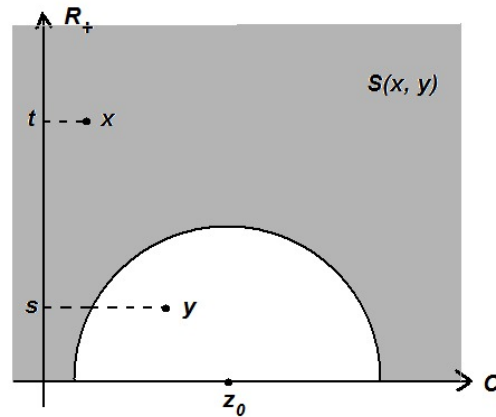


Figura 3.2: Semi-espaço que contém o ponto x limitado por uma superfície equidistante. Neste caso, este semi-espaço é a região exterior (ilimitada) da esfera de centro $(z_0, 0) \in \mathbb{H}^3$ e de raio R .

Em qualquer um destes casos em que $s \neq t$, definimos o centro e raio da superfície equidis-

tante $E(x, y)$ por:

$$C^{eq}((z, t), (w, s)) = \frac{tw - sz}{t - s} \quad (3.1)$$

e

$$R^{eq}((z, t), (w, s)) = \sqrt{ts \left(1 + \frac{|z - w|^2}{(t - s)^2} \right)} \quad (3.2)$$

3.3 Domínio de Dirichlet

Seja Γ um subgrupo de isometrias de $Isom(\mathbb{H}^3)$ e seja $x \in \mathbb{H}^3$. O domínio de Dirichlet Δ_Γ^x com ponto base x para a ação de Γ em \mathbb{H}^3 é o conjunto:

$$\Delta_\Gamma^x = \{y \in \mathbb{H}^3 \mid \rho(y, x) \leq \rho(y, \gamma(x)), \forall \gamma \in \Gamma\} \quad (3.3)$$

Note que a fronteira de Δ_Γ^x é formada por superfícies equidistantes de x e de sua imagem $\gamma(x)$ para todo $\gamma \in \Gamma$ que não fixa x . E, como vimos na seção anterior, cada uma destas superfícies equidistantes é um semi-plano ou um hemisfério ortogonais a $\partial\mathbb{H}^3 = \widehat{\mathbb{C}}$.

Com um certo abuso de notação e terminologia, definimos o domínio de Dirichlet $\widehat{\Delta}_\Gamma^x$ para a ação de Γ em $\widehat{\mathbb{C}}$, com ponto base $x \in \mathbb{H}^3$, como a interseção do fecho de Δ_Γ^x com $\widehat{\mathbb{C}}$, menos qualquer ponto fixo de Γ em $\widehat{\mathbb{C}}$.

Vejamos agora o que acontece com o conjunto Δ_Γ^x quando conjugamos o grupo Γ . Para qualquer $g \in PSL(2, \mathbb{C})$ temos que $y \in g(\Delta_\Gamma^x) \Leftrightarrow g^{-1}(y) \in \Delta_\Gamma^x \Leftrightarrow \rho(g^{-1}(y), x) < \rho(g^{-1}(y), \gamma(x)) \Leftrightarrow \rho(y, g(x)) < \rho(y, g\gamma(x)) \Leftrightarrow \rho(y, g(x)) < \rho(y, g\gamma(x)g^{-1}g(x))$. Isto implica que

$$g(\Delta_\Gamma^x) = \Delta_{g\Gamma g^{-1}}^{g(x)} .$$

Esta igualdade nos mostra que os poliedros Δ_Γ^x e $\Delta_{g\Gamma g^{-1}}^{g(x)}$ possuem a mesma estrutura combinatória. Portanto, para o estudo do domínio fundamental de Dirichlet de um certo grupo Γ , é suficiente discutir sua estrutura combinatória para um grupo conjugado a Γ .

Deste modo, para o estudo do domínio de Dirichlet dos grupos cíclicos $\Gamma = \langle \gamma \rangle$ discutidos nesta dissertação, via uma conjugação, podemos então assumir que γ é de uma das formas apresentadas na seção 2.2, de modo que sempre utilizaremos as fórmulas demonstradas naquela seção. Além disso, conjugando por elementos que fixam 0 e 1 as matrizes apresentadas na seção 2.2 não mudam de forma. Considerando rotações e translações ao redor da geodésica com pontos finais 0 e 1, que são elementos de $PSL(2, \mathbb{C})$, podemos mover qualquer ponto base para qualquer outro que esteja a uma mesma distância da geodésica que passa por 0 e 1. Assim, neste caso, conjugando o grupo cíclico $\Gamma = \langle \gamma \rangle$ por uma tal transformação, as fórmulas apresentadas na seção 2.2 continuam válidas e ainda podemos considerar, sem perda de generalização, o seguinte ponto base para o domínio de Dirichlet do grupo Γ .

$$x = (z, t) = \left(\frac{1}{2}, \frac{e^\rho}{2} \right) \quad (3.4)$$

em que ρ é a distância hiperbólica entre x e a geodésica com pontos finais 0 e 1.

Agora, utilizando a expressão (2.8) para a imagem deste ponto base por γ^n nas expressões (3.1) e (3.2), vemos que o centro e o raio da superfície equidistante de x e de $\gamma^n(x)$ são

$$C_n^{eq} = C^{eq} \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{e^\rho}{2} \right), \left(\frac{\lambda^n(\overline{\tau_n + \beta_n e^{2\rho}})}{D_n}, \frac{2e^\rho}{D_n} \right) \right) = \frac{\lambda^n(\overline{\tau_n + \beta_n e^{2\rho}}) - 2}{D_n - 4} \quad (3.5)$$

$$R_n^{eq} = R^{eq} \left(\left(\frac{1}{2}, \frac{e^\rho}{2} \right), \left(\frac{\lambda^n(\overline{\tau_n + \beta_n e^{2\rho}})}{D_n}, \frac{2e^\rho}{D_n} \right) \right) = \sqrt{\frac{e^{2\rho}}{D_n} \left(1 + \frac{|2\lambda^n(\overline{\tau_n + \beta_n e^{2\rho}}) - D_n|^2}{e^{2\rho}(D_n - 4)^2} \right)}$$

onde

$$D_n = |\tau_n|^2 + |\beta_n|^2 e^{2\rho} .$$

Usaremos a notação \widehat{E}_n para a superfície equidistante E_n em $\widehat{\mathbb{C}}$. Tal círculo E_n em \mathbb{C} também tem centro C_n^{eq} e raio R_n^{eq} .

3.4 Domínio de Ford

Dado um elemento $\gamma \in PSL(2, \mathbb{C})$ que não fixa o ∞ , existe um par de semi-esferas isométricas I_γ e $I_{\gamma^{-1}}$ centradas em $\partial\mathbb{H}^3$ tal que γ atua como uma isometria de $I_{\gamma^{-1}}$ para I_γ . As fronteiras destas semi-esferas são os círculos isométricos de γ , que denotaremos por \widehat{I}_γ e $\widehat{I}_{\gamma^{-1}}$. Como vimos na seção 1.4, para um elemento qualquer γ representado por uma matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ em $SL(2, \mathbb{C})$ temos que o centro e o raio da esfera e do círculo isométrico de γ são dados por

$$C^{iso}(\gamma) = \frac{a}{c} \in \widehat{\mathbb{C}} \quad (3.6)$$

$$R^{iso}(\gamma) = \frac{1}{|c|}. \quad (3.7)$$

Mais especificamente, para um elemento γ dado por uma das formas apresentadas na seção 2.2, os centros e os raios dos círculos isométricos das potências de γ são dados por

$$C_n^{iso} = C^{iso}(\gamma^n) = \frac{\lambda^n}{\beta_n} \quad (3.8)$$

$$R_n^{iso} = R^{iso}(\gamma^n) = \frac{1}{|\beta_n|} \quad (3.9)$$

Se um grupo Γ é tal que todos os seus elementos diferentes da identidade não fixam o ponto ideal ∞ , definimos o domínio de Ford Δ_Γ^∞ para a ação de Γ em \mathbb{H}^3 como o fecho da interseção do exterior das semi-esferas isométricas dos elementos não triviais de Γ , menos qualquer ponto fixo de Γ . Para a ação de Γ em $\widehat{\mathbb{C}}$ definimos o domínio de Ford $\widehat{\Delta}_\Gamma^\infty$ como a interseção do exterior em $\widehat{\mathbb{C}}$ dos círculos isométricos dos elementos não triviais de Γ , menos qualquer ponto fixo de Γ .

Observe que o limite das equações (3.5) quando $\rho \rightarrow \infty$ resultam nas equações (3.8) e (3.9). Assim, o domínio de Ford pode ser visto como “o limite do domínio de Dirichlet” quando o centro do domínio de Dirichlet tende para ∞ . Esta observação motiva a notação Δ_Γ^∞ para domínios de Ford.

Observação: Muitos dos argumentos apresentados nos próximos resultados desta dissertação seguem da análise da variação da estrutura combinatória dos domínios fundamentais

de Dirichlet para grupos cíclicos Γ gerados por γ , quando variamos o traço de γ . Para esta análise é fundamental o fato de que os centros e os raios das hemisferas isométricas e equidistantes definidas por potência de γ serem funções contínuas do traço de γ , quando este se move ao longo do semi-espaco superior \mathcal{U} união com o intervalo $[-2, 2]$. Mas especificamente, este resultado está enunciado na próxima proposição.

Proposição 3.1 *Fixado um número inteiro $n \neq 0$, defina o conjunto*

$$\mathcal{D}_n = \left\{ 2 \cos \left(\frac{k\pi}{n} \right) \mid k \in \mathbb{Z} \right\} \subset [-2, 2] \subset \mathbb{C}.$$

Como funções do traço τ , C_n^{eq} , R_n^{eq} , C_n^{iso} e R_n^{iso} são funções contínuas no conjunto

$$\mathcal{C}_n = \mathcal{U} \cup ([-2, 2] \setminus \mathcal{D}_n).$$

Quando $\tau \in \mathcal{C}_n$ tende para um ponto de \mathcal{D}_n então $\lim R_n^{eq} = \lim R_n^{iso} = \infty$

Prova: Este resultado segue do fato (ver seção 2.2.3) de $\lambda(\tau)$ ser uma função contínua em $\mathcal{U} \cup [-2, 2]$ e do fato dos centros e dos raios C_n^{eq} , R_n^{eq} , C_n^{iso} e R_n^{iso} serem funções racionais, com valores bem definidos para $\tau \in \mathcal{C}_n$, da parte real e da parte imaginária de λ . Os pontos de \mathcal{D}_n são exatamente aqueles onde $\lambda^n = 1$ o que implica $\gamma^n = \text{Id}$ e, assim, os círculos isométricos e equidistantes não estão definidos. E como funções racionais positivas, tais como R_n^{iso} e R_n^{eq} , tem limites infinitos nos pontos onde elas são indefinidas, obtemos o resultado desejado. ■

3.5 A localização dos pontos fixos de um elemento loxodrômico

Nesta seção vamos estudar o poliedro de Dirichlet, centrado num ponto genérico de \mathbb{H}^3 , do grupo cíclico gerado por um elemento loxodrômico γ com pontos fixos 0 e ∞ , e vamos analisar a posição relativa dos seus pontos fixos em relação às superfícies equidistantes definidas por γ^n e γ^{-n} .

Seja γ um elemento loxodrômico representando pela matriz $\gamma = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}$, tal que λ é um número complexo diferente de 0 e 1. Sabemos que γ age em $\widehat{\mathbb{C}}$ como a transformação $\gamma(z) = \lambda^2 z$ e em \mathbb{H}^3 age como a transformação $\gamma(z, t) = (\lambda^2 z, |\lambda|^2 t)$.

Considere a esfera X_1 , equidistante de x e $\gamma(x)$, em que $x = (z_0, t_0)$ é um ponto arbitrário de \mathbb{H}^3 . De acordo com as equações (3.1) e (3.2) temos que esta esfera tem centro C_1 e raio R_1 tais que

$$C_1 = C^{eq}(x, \gamma(x)) = C^{eq}((z_0, t_0), (\lambda^2 z_0, |\lambda|^2 t_0)) = \frac{t_0 \lambda^2 z_0 - |\lambda|^2 t_0 z_0}{t_0 - |\lambda|^2 t_0} \Rightarrow$$

$$C_1 = \lambda z_0 \frac{\lambda - \bar{\lambda}}{1 - |\lambda|^2}$$

e

$$R_1^2 = R^{eq}(x, \gamma(x))^2 = R^{eq}((z_0, t_0), (\lambda^2 z_0, |\lambda|^2 t_0))^2 = t_0 |\lambda|^2 t_0 \left(1 + \frac{|z_0 - \lambda^2 z_0|^2}{(t_0 - |\lambda|^2 t_0)^2} \right)$$

$$= t_0^2 |\lambda|^2 \left(\frac{t_0^2 (1 - |\lambda|^2)^2 + |z_0|^2 |1 - \lambda^2|^2}{t_0^2 (1 - |\lambda|^2)^2} \right) = t_0^2 |\lambda|^2 \left(1 + \frac{|z_0|^2 |1 - \lambda^2|^2}{t_0^2 (1 - |\lambda|^2)^2} \right) \Rightarrow$$

$$R_1^2 = t_0^2 |\lambda|^2 + \frac{|z_0|^2 |\lambda|^2 |1 - \lambda^2|^2}{(1 - |\lambda|^2)^2}$$

Observe que, para qualquer $\lambda \in \mathbb{C}$, temos que $|1 - \lambda^2|^2 = |\lambda - \bar{\lambda}|^2 + (1 - |\lambda|^2)^2$. De fato, se $\lambda = x + iy$ então $\bar{\lambda} = x - iy$ e $\lambda^2 = x^2 - y^2 + 2xyi$. Daí, $|1 - \lambda^2|^2 - |\lambda - \bar{\lambda}|^2 = (1 - x^2 + y^2)^2 + 4x^2 y^2 - 4y^2 = 1 + x^4 + y^4 - 2x^2 + 2y^2 - 2x^2 y^2 + 4x^2 y^2 - 4y^2 = 1 + x^4 + y^4 - 2x^2 - 2y^2 + 2x^2 y^2 = (1 - x^2 - y^2)^2 = (1 - |\lambda|^2)^2$

Utilizando a identidade $|1 - \lambda^2|^2 = |\lambda - \bar{\lambda}|^2 + (1 - |\lambda|^2)^2$, podemos escrever que

$$R_1^2 = t_0^2 |\lambda|^2 + \frac{|z_0|^2 |\lambda|^2 (|\lambda - \bar{\lambda}|^2 + (1 - |\lambda|^2)^2)}{(1 - |\lambda|^2)^2} = t_0^2 |\lambda|^2 + |z_0|^2 |\lambda|^2 + \frac{|z_0|^2 |\lambda|^2 |\lambda - \bar{\lambda}|^2}{(1 - |\lambda|^2)^2}.$$

Agora, usando a expressão $|C_1|^2 = |\lambda|^2 |z_0|^2 \frac{|\lambda - \bar{\lambda}|^2}{(1 - |\lambda|^2)^2}$ obtemos

$$R_1^2 = |\lambda|^2 (|z_0|^2 + t_0^2) + |C_1|^2. \quad (3.10)$$

Esta igualdade implica que $R_1^2 > |C_1|^2$, ou seja, $R_1 > |C_1|$. Isto implica que a origem $(0, 0) \in \partial\mathbb{H}^3$ pertence à parte limitada de $\partial\mathbb{H}^3 - \partial X_1$. (veja figura 3.3)

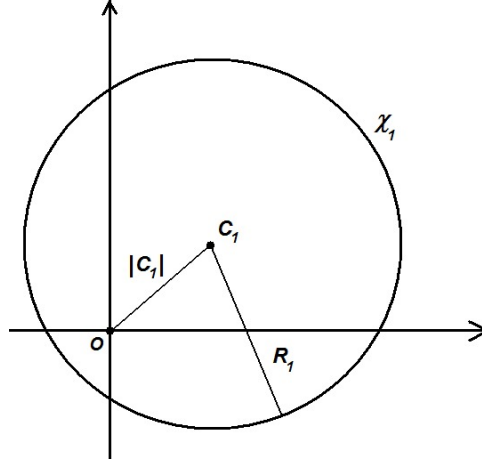


Figura 3.3: Ilustração da equação (3.10).

Estamos interessados em analisar a posição dos pontos fixos 0 e ∞ de γ em relação à circunferência equidistante de x e $\gamma(x)$. Para isso considere o semi-espaço

$$\Delta_1 = \left\{ p \in \mathbb{H}^3 / \rho(p, x) < \rho(p, \gamma(x)) \right\}$$

onde $x = (z_0, t_0)$ e $\gamma(x) = (\lambda^2 z_0, |\lambda|^2 t_0)$.

Pelo estudo desenvolvido na seção 3.2, ver página 21, sabemos que temos dois casos a analisar: $t_0 < |\lambda|^2 t_0$ ou $t_0 > |\lambda|^2 t_0$

Caso 1: Suponhamos que $t_0 < |\lambda|^2 t_0$, ou seja, que $|\lambda| > 1$. Observe que neste caso 0 é ponto fixo repulsor e que ∞ é ponto fixo atrator de γ .

Neste caso, Δ_1 é a parte limitada de $\mathbb{H}^3 - X_1$, o ponto fixo repulsor $(0, 0)$ de γ pertence a Δ_1 e o ponto fixo atrator ∞ de γ não pertence a Δ_1 .

Caso 2: Suponhamos agora que $t_0 > |\lambda|^2 t_0$, ou seja, que $|\lambda| < 1$. Observe que neste caso 0 é ponto fixo atrator e que ∞ é ponto fixo repulsor de γ .

Neste caso, Δ_1 é a parte ilimitada de $\mathbb{H}^3 - X_1$, o ponto fixo repulsor ∞ de γ pertence a Δ_1 e o ponto fixo atrator $(0, 0)$ de γ não pertence a Δ_1 .

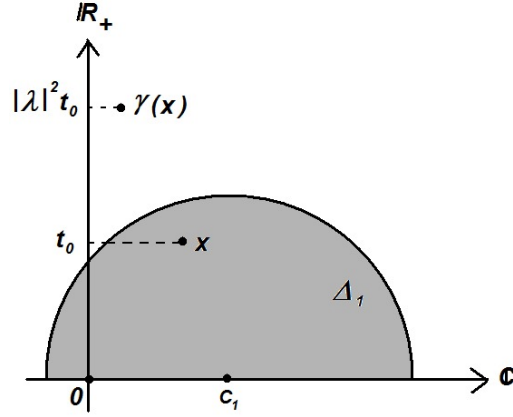


Figura 3.4: O semi-espaço Δ_1 , no primeiro caso: 0 é ponto fixo repulsor e ∞ é ponto fixo atrator.

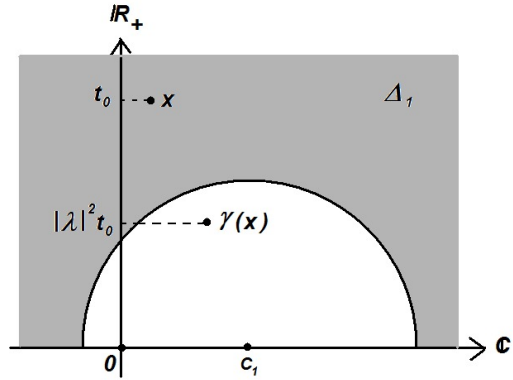


Figura 3.5: O semi-espaço Δ_1 , no segundo caso: ∞ é ponto fixo repulsor e 0 é ponto fixo atrator.

Como o tipo combinatório dos Domínios de Dirichlet e Ford são invariantes por conjugação, as conclusões da análise acima de um elemento loxodrômico com pontos fixos 0 e ∞ podem ser estendidas para elementos loxodrômicos com pontos fixos diferentes de 0 e ∞ . Seja $\gamma \in PSL_2(\mathbb{C})$ um elemento loxodrômico com pontos fixos p e q em $\partial\mathbb{H}^3$, onde p é o ponto fixo atrator e q é o ponto fixo repulsor. Dado $x \in \mathbb{H}^3$ defina

$$X_\gamma^x = \{y \in \mathbb{H}^3 / \rho(y, x) = \rho(y, \gamma(x))\} \quad \text{e} \quad X_{\gamma^{-1}}^x = \{y \in \mathbb{H}^3 / \rho(y, x) < \rho(y, \gamma^{-1}(x))\}.$$

$$\Delta_\gamma^x = \{y \in \mathbb{H}^3 / \rho(y, x) < \rho(y, \gamma(x))\} \quad \text{e} \quad \Delta_{\gamma^{-1}}^x = \{y \in \mathbb{H}^3 / \rho(y, x) < \rho(y, \gamma^{-1}(x))\}.$$

Sabemos que Δ_γ^x e $\Delta_{\gamma^{-1}}^x$ são semi-espaços \mathbb{H}^3 limitados pelas semi-esferas X_γ^x e $X_{\gamma^{-1}}^x$. Os correspondentes elementos no plano complexo estendido $\widehat{\Delta}_\gamma^x$ e $\widehat{\Delta}_{\gamma^{-1}}^x$ são, respectivamente, uma das componentes conexas do complementar dos círculos \widehat{X}_γ^x e $\widehat{X}_{\gamma^{-1}}^x$ em $\widehat{\mathbb{C}}$.

Sendo p ponto fixo atrator e q ponto fixo repulsor, da análise que acabamos de fazer podemos concluir que:

$$\begin{aligned} q &\in \widehat{\Delta}_\gamma^x & p &\notin \widehat{\Delta}_\gamma^x \\ q &\notin \widehat{\Delta}_{\gamma^{-1}}^x & p &\in \widehat{\Delta}_{\gamma^{-1}}^x. \end{aligned}$$

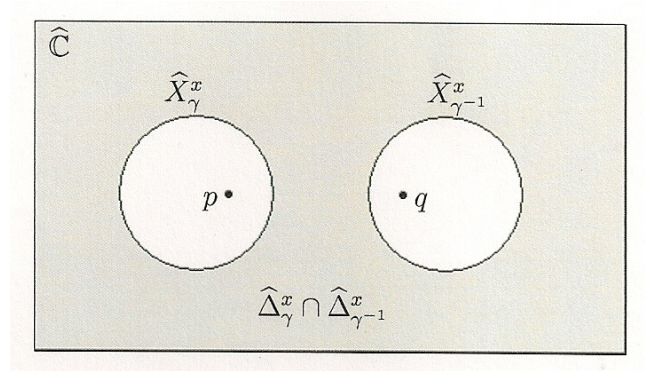


Figura 3.6: Localização dos pontos fixos p atrator e q repulsor em relação aos semi-espaços $\widehat{\Delta}_\gamma^x$ e $\widehat{\Delta}_{\gamma^{-1}}^x$, representados como as componentes ilimitadas definidas pelos círculos \widehat{X}_γ^x e $\widehat{X}_{\gamma^{-1}}^x$ em $\widehat{\mathbb{C}}$.

3.6 Propriedades Combinatoriais

Para o restante do trabalho, utilizaremos as seguintes notações:

- \mathcal{U} é o semi-plano complexo superior;
- $\Gamma = \langle \gamma \rangle$ é o grupo cíclico gerado por γ ;
- Δ é o domínio de Ford ou de Dirichlet para a ação de Γ em \mathbb{H}^3 ;
- X_n é a semi-esfera isométrica ou a semi-esfera equidistante de γ^n em \mathbb{H}^3 , dependendo do tipo de Δ ;
- $\widehat{\Delta}$ e \widehat{X}_n são elementos correspondentes aos anteriores só que em $\widehat{\mathbb{C}}$;
- O interior (respectivamente exterior) de X_n é a componente limitada (respectivamente ilimitada) de $\mathbb{H}^3 \setminus X_n$. Analogamente definimos esses conceitos de interior e exterior para \widehat{X}_n em $\widehat{\mathbb{C}}$;

- $\bar{\Delta} = \Delta \cup \hat{\Delta}$ e $\bar{X}_n = X_n \cup \hat{X}_n$ em $\mathbb{H}^3 \cup \partial\mathbb{H}^3$;
- $X_n^\partial = X_n \cap \partial\Delta$, $\hat{X}_n^\partial = \hat{X}_n \cap \partial\hat{\Delta}$ e $\bar{X}_n^\partial = X_n^\partial \cup \hat{X}_n^\partial$;
- Uma face F_n é um subconjunto conexo maximal bidimensional de X_n^∂ ;
- Uma aresta $E_{i,j}$ é um conjunto unidimensional, obtida pela interseção das faces F_i e F_j ;
- Um lado S_n é um subconjunto conexo maximal unidimensional de \hat{X}_n^∂ ;
- Um vértice V é um ponto obtido como a interseção de três ou mais faces.

Estabelecidas estas notações, vamos começar a analisar algumas propriedades combinatórias dos domínios de Dirichlet e Ford para um grupo cíclico. Aqui é importante notar que γ^n transforma \bar{X}_{-n} em \bar{X}_n , levando o exterior de X_{-n} no interior de X_n . Isto implica que γ^n identifica pontos em $\partial\bar{\Delta}$ se, e somente se, estes pontos estão em $\bar{X}_{\pm n}$.

Proposição 3.2 *Se $\gamma^n p = q$ para $p, q \in \partial\bar{\Delta}$, então $p \in \bar{X}_{-n}$ e $q \in \bar{X}_n$.*

Prova: Se p é externo a \bar{X}_{-n} , então $\gamma^n p$ é interno à \bar{X}_n , o que contradiz a hipótese de que $\gamma^n p = q \in \partial\Delta$. Portanto p está sobre ou no interior de \bar{X}_{-n} , e então q está sobre ou no exterior de \bar{X}_n . Se q estivesse no exterior de \bar{X}_n então $p = \gamma^{-n}(q)$ estaria no interior de \bar{X}_{-n} e isso novamente contradiz o fato que $p, q \in \partial\bar{\Delta}$. Portanto, resta somente a possibilidade $p \in \bar{X}_{-n}$ e $q \in \bar{X}_n$. Observe que, analogamente, podemos demonstrar um resultado parecido a esse, para o poliedro $\hat{\Delta}$, com objetos similares contidos em $\hat{\Delta}$. ■

Proposição 3.3 *Para qualquer $n \neq 0$, $\gamma^{-n}\bar{X}_n^\partial = \bar{X}_{-n}^\partial$.*

Prova: Vamos provar esse resultado apenas para o domínio de Dirichlet contido em \mathbb{H}^3 , pois os outros casos de domínios são análogos.

Seja $x \in \mathbb{H}^3$ o ponto base de Δ . Pela definição do domínio de Dirichlet temos que:

$$X_n^\partial = \{y \in \mathbb{H}^3 \mid \rho(y, x) = \rho(y, \gamma^n x) \leq \rho(y, \gamma^m x) \forall m\}$$

Se $y \in \gamma^{-n}X_n^\partial$, então $\gamma^n(y) \in X_n^\partial$ e

$$\begin{aligned}
\gamma^{-n}X_n^\partial &= \{y \in \mathbb{H}^3 \mid \rho(\gamma^n y, x) = \rho(\gamma^n y, \gamma^n x) \leq \rho(\gamma^n y, \gamma^m x) \forall m\} \\
&= \{y \in \mathbb{H}^3 \mid \rho(y, \gamma^{-n}x) = \rho(y, x) \leq \rho(y, \gamma^{m-n}x) \forall m\} \\
&= \{y \in \mathbb{H}^3 \mid \rho(y, x) = \rho(y, \gamma^{-n}x) \leq \rho(y, \gamma^k x) \forall k\} = X_{-n}^\partial
\end{aligned}$$

■

O nosso objetivo aqui é o estudo dos domínios fundamentais de Dirichlet e de Ford para grupos cíclicos $\Gamma = \langle \gamma \rangle$ gerados por um elemento γ dado por uma das matrizes apresentadas na seção 2.2. Além disso, também estamos considerando como o centro do Domínio de Dirichlet o ponto $\left(\frac{1}{2}, \frac{e^\rho}{2}\right)$ de \mathbb{H}^3 .

Neste caso, quando γ é um elemento loxodrômico com pontos fixos 0 e 1, esses domínios fundamentais de Dirichlet e de Ford possuem uma simetria. De fato, considere a seguinte isometria de \mathbb{H}^3

$$\phi : (z, t) \mapsto (1 - z, t).$$

que é a rotação de ordem 2 ao redor da reta vertical em \mathbb{H}^3 sobre o ponto $z = \frac{1}{2}$ em \mathbb{C} . Evidentemente, ϕ permuta 0 e 1 e ϕ fixa o ponto base $\left(\frac{1}{2}, \frac{e^\rho}{2}\right)$. Mais ainda, fazendo algumas contas com matrizes obtemos o seguinte resultado.

Proposição 3.4 *Se γ é uma isometria de \mathbb{H}^3 com pontos fixos 0 e 1 em \mathbb{C} , então $\phi^{-1} \circ \gamma \circ \phi = \gamma^{-1}$. Portanto se Δ é um domínio de Ford ou Dirichlet para $\Gamma = \langle \gamma \rangle$, então ϕ preserva Δ e permuta faces $F_{\pm n}$, arestas $E_{i,j}$ e $E_{-i,-j}$, etc. O mesmo fato ocorre com os objetos similares em $\widehat{\mathbb{C}}$.*

Vamos agora aplicar estas proposições para o caso em que duas semi-esferas \overline{X}_n e \overline{X}_m interseptom $\partial\overline{\Delta}$ em um único ponto p . Pela proposição 3.3, \overline{X}_{-n} encontra $\partial\overline{\Delta}$ em um ponto $\gamma^{-n}p$ e \overline{X}_{-m} encontra $\partial\overline{\Delta}$ em um ponto $\gamma^{-m}p$ (veja a figura 3.7 para um exemplo em $\widehat{\mathbb{C}}$). E, pela proposição 3.4, temos que $\gamma^{-n}p = \phi(p) = \gamma^{-m}p$. Daí, se $n \neq m$ vemos que $p \in \partial\overline{\Delta}$ é ponto fixo do elemento loxodrômico γ^{n-m} . Isto é um absurdo, pois os pontos fixos do elemento loxodrômico γ não estão em $\partial\overline{\Delta}$. Isto demonstra o seguinte resultado.

Proposição 3.5 Se γ é loxodrômico e $\overline{X}_n^\partial = \overline{X}_m^\partial$ é um conjunto com um único ponto, então $n = m$.

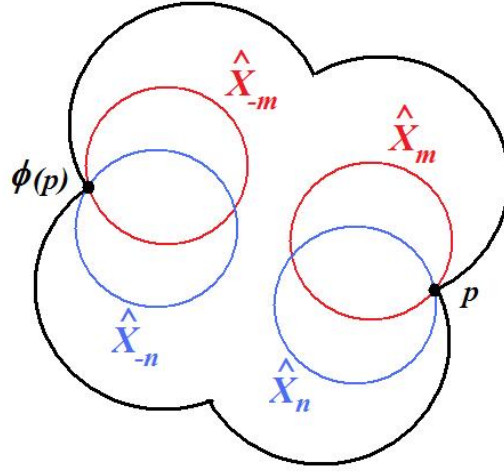


Figura 3.7: $\widehat{X}_n^\partial = \widehat{X}_m^\partial$ é um único ponto

A próxima proposição nos mostra que se \overline{X}_n e \overline{X}_m se intersectam segundo uma aresta ou um vértice, então \overline{X}_{n-m} também tem interseção não vazia com a fronteira do domínio fundamental.

Proposição 3.6 Se $\overline{X} = \overline{X}_n^\partial \cap \overline{X}_m^\partial \neq \emptyset$ para $n \neq m$, então $\emptyset \neq \gamma^{-m}\overline{X} \subset \overline{X}_{(n-m)}^\partial$ e $\emptyset \neq \gamma^{-n}\overline{X} \subset \overline{X}_{(m-n)}^\partial$.

Prova: Pela proposição 3.3 temos que tanto $\gamma^{-n}\overline{X}$ e $\gamma^{-m}\overline{X}$ são subconjuntos de $\partial\overline{\Delta}$. Como $\gamma^{n-m}(\gamma^{-n}\overline{X}) = \gamma^{-m}\overline{X}$, aplicando a proposição 3.2, vemos que $\gamma^{-n}\overline{X} \subset \overline{X}_{m-n}$ e $\gamma^{-m}\overline{X} \subset \overline{X}_{n-m}$. ■

Vamos agora analisar pontos de tangência das hemisferas X_n . Como isto somente terá interesse para o caso de grupos cíclicos gerados por elementos loxodômicos γ , vamos assumir que este é o caso até o final desta seção. Mais ainda, visto que todas as hemisferas \overline{X}_n possuem centros em \widehat{C} , então seus pontos de tangência também estão em \widehat{C} . Por isso, restringiremos nosso estudo para \widehat{X}_n e $\widehat{\Delta}$, que são objetos contidos em \widehat{C} .

Como convencionado na seção 2.2, estamos considerando um elemento loxodrômico γ com ponto fixo atrator 1 e ponto fixo repulsor 0. Isso implica que 1 pertence ao interior e 0 pertence

ao exterior de cada \widehat{X}_n , quando $n > 0$. Assim, se \widehat{X}_n e \widehat{X}_m são externamente tangentes então n e m devem ter sinais opostos. E se \widehat{X}_n é internamente tangente a \widehat{X}_m , então n e m têm o mesmo sinal e $|n| > |m|$.

Proposição 3.7 *Suponhamos que γ é um elemento loxodrômico.*

- (a) *Se \widehat{X}_m é internamente tangente a S_n em um ponto p e $m > n > 0$, então $m = 2n$.*
- (b) *Se S_k é externamente tangente a S_n em um ponto q , então $k = -n$ e $q = \frac{1}{2} \in \widehat{C}$.*

Mais ainda, se um destes casos acontece, então o outro também ocorre e $\gamma^{-n}p = q$.

Prova:

- (a) Suponhamos que $m > n > 0$ e que \widehat{X}_m é internamente tangente ao lado $S_n \subset \widehat{X}_n$ em um ponto p . Pela proposição 3.4, \widehat{X}_{-m} é internamente tangente ao lado $S_{-n} \subset \widehat{X}_{-n}$ em um ponto t que, pela proposição 3.3, é o ponto $\gamma^{-m}p$, ou seja, $\gamma^{-m}p = t$. Também temos que $q = \gamma^{-n}(p)$ deve ser um ponto sobre o lado S_{-n} . (veja figura 3.8)

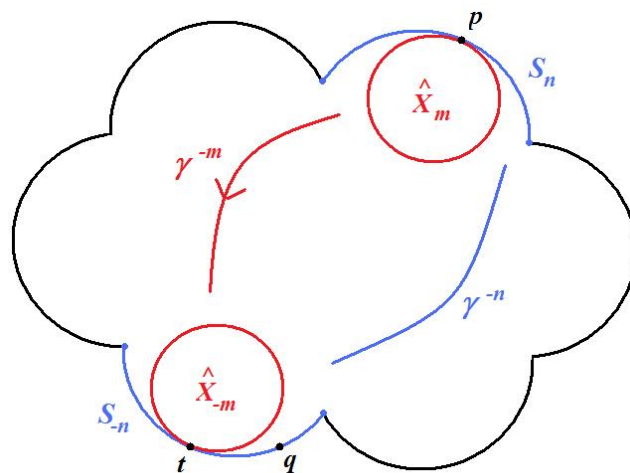


Figura 3.8: Parte (a) da proposição 3.7.

Mais ainda, visto que

$$\gamma^{m-n}(t) = \gamma^{-n}(\gamma^m t) = \gamma^{-n}p = q ,$$

a proposição 3.2 implica que $t \in \widehat{X}_{n-m}$ e $q \in \widehat{X}_{m-n}$. Como $t \in \widehat{X}_{n-m} \cap S_{-n}$ temos dois casos a analisar: ou \widehat{X}_{n-m} contém S_{-n} ou \widehat{X}_{n-m} é internamente tangente à S_{-n} . No primeiro caso, se \widehat{X}_{n-m} é internamente tangente à S_{-n} então \widehat{X}_{-n} , \widehat{X}_{-m} e \widehat{X}_{n-m} são duas a duas tangentes em t (veja figura 3.9). Logo $\widehat{X}_{n-m} \cap \widehat{X}_{-m} = \{t\}$ e, pela proposição 3.5, podemos concluir que $n - m = -m \Rightarrow n = 0$, que é um absurdo pois $n > 0$. Assim deve ocorrer o segundo caso, \widehat{X}_{n-m} contém S_{-n} . Isto implica que $n - m = -n$ e portanto $m = 2n$. Isto demonstra a parte (a) da proposição.

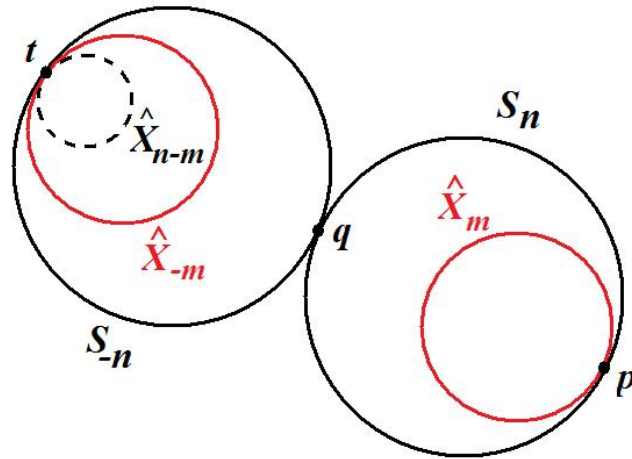


Figura 3.9: Parte (a) da proposição 3.7.

Continuando, temos que q pertence à S_{-n} e à $\widehat{X}_{m-n} = \widehat{X}_n$. Portanto q é um ponto de tangência externa de \widehat{X}_n e \widehat{X}_{-n} . Aplicando a involução ϕ , como q pertence ao lado S_{-n} , podemos concluir que q é um ponto de tangência externa dos lados S_n e S_{-n} (veja figura 3.9). Isto nos coloca na situação descrita pela situação (b) desta proposição.

- (b) Suponha agora que os lados $S_k \subset \widehat{X}_k$ e $S_n \subset \widehat{X}_n$ são externamente tangentes em um ponto q . Sabemos que k e n devem ter sinais opostos. Assim, sem perda de generalidade vamos supor que $k < 0 < n$. Pela proposição 3.4, $q' = \phi(q)$ é o ponto de tangência externa dos lados S_{-k} e S_{-n} . Sejam $p = \gamma^n q'$ e $t = \gamma^k q'$. Estes são pontos pretencentes, respectivamente, aos lados S_n e S_k , e $\gamma^{n-k}(t) = \gamma^{n-k}(\gamma^k q') = \gamma^n(q') = p$. (veja figura 3.10)

De $p = \gamma^{n-k}(t)$, pela proposição 3.2, vemos que $t \in \widehat{X}_{k-n}$ e $p \in \widehat{X}_{n-k}$. Entretanto, já tínhamos que p era um ponto do lado S_n . Assim, de $p \in S_n$ e $p \in \widehat{X}_{n-k}$, vemos que \widehat{X}_{n-k} deve ser internamente tangente a S_n em p . Como $n - k > n > 0$ e \widehat{X}_{n-k} é internamente

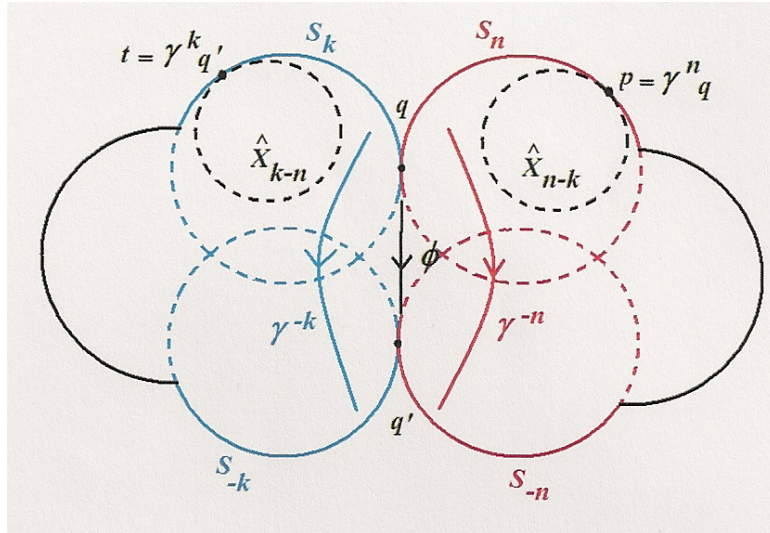


Figura 3.10: Parte (b) da proposição 3.7.

tangente à S_n em p , vemos que estamos exatamente na situação descrita no item (a) desta proposição. Assim, podemos concluir que $n - k = 2n$, ou seja, que $n = -k$. Isto implica que $q = q'$ pois $q = S_n \cap S_k$ e $q' = S_{-n} \cap S_{-k}$. Mais ainda, de $q = q'$ e $q' = \phi(q)$, vemos que $\phi(q) = q$. Portanto $q = \frac{1}{2}$, pois esse é o único ponto fixo finito do elemento loxodrômico ϕ .

■

Capítulo 4

Domínios de Ford e Dirichlet em $\partial\mathbb{H}^3$

Os tipos combinatórios de domínios de Ford em $\widehat{\mathbb{C}}$ de grupos cíclicos foram originalmente classificado por Jorgensen:

Teorema 4.1 (Jorgensen, [5]) *Para um elemento não elíptico $\gamma \in PSL_2(\mathbb{C})$ que não fixa ∞ , o domínio de Ford em $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ de $\Gamma = \langle \gamma \rangle$ tem dois, quatro ou seis lados.*

Neste capítulo, vamos utilizar as propriedades combinatórias demonstradas no capítulo anterior para examinar com mais detalhes o domínio de Ford e o domínio de Dirichlet. Como resultado principal a ser demonstrado, iremos estender o resultado anterior de Jorgensen para domínios de Dirichlet de grupos cíclicos.

Teorema 4.2 *Seja $\gamma \in PSL_2(\mathbb{C})$ um elemento não elíptico de ordem infinita tal que γ não fixa ∞ . Os domínios de Ford e Dirichlet em $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ de $\Gamma = \langle \gamma \rangle$ tem dois, quatro ou seis lados.*

Uma vez que os domínios têm aparências diferentes para geradores parabólicos, elípticos e loxodrômicos, vamos examinar separadamente cada um destes casos.

4.1 Gerador Parabólico

Seja $\gamma \in PSL_2(\mathbb{C})$ um elemento parabólico. Via uma conjugação, podemos supor que γ tem ponto fixo $0 \in \widehat{\mathbb{C}}$ e que γ é representado como a matriz (2.4):

$$\gamma = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \text{ onde } \gamma^n = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ n & 1 \end{pmatrix}.$$

Agora aplicando um elemento de $PSL_2(\mathbb{C})$ que fixa 0, podemos supor também que o ponto base do Domínio de Dirichlet é $(0, t) \in \mathbb{H}^3$. Aplicando a expressão (2.3), temos que

$$\gamma^n(0, t) = \left(\frac{nt^2}{1+n^2t^2}, \frac{t}{1+n^2t^2} \right).$$

Usando as expressões (3.1) e (3.2) obtemos as seguintes expressões para o centro e o raio da superfície equidistante de $(0, t)$ e $\gamma^n(0, t)$.

$$C_n^{eq} = \frac{t \left(\frac{nt^2}{1+n^2t^2} \right)}{t - \frac{t}{1+n^2t^2}} = \frac{nt^3}{n^2t^3} = \frac{1}{n}$$

$$R_n^{eq} = \sqrt{\frac{t^2}{1+n^2t^2} \left(1 + \frac{\left| \frac{nt^2}{1+n^2t^2} \right|^2}{\left(t - \frac{t}{1+n^2t^2} \right)^2} \right)} = \sqrt{\frac{t^2}{1+n^2t^2} \left(1 + \frac{n^2t^4}{n^4t^6} \right)} = \sqrt{\frac{t^2}{n^2t^2}} = \frac{1}{|n|}$$

Por outro lado, considerando o domínio de Ford do grupo cíclico gerado pelo elemento parabólico γ , utilizando as expressões (3.6) e (3.7) vemos que o centro e o raio do círculo isométrico de γ^n são dados por

$$C_n^{iso} = \frac{1}{n}$$

$$R_n^{iso} = \frac{1}{|n|}.$$

Neste caso, vemos que os domínios de Dirichlet e de Ford coincidem, já que a esfera equidistante e a esfera isométrica de γ^n possuem o mesmo centro e o mesmo raio, que iremos representar por

$$C_n = \frac{1}{n} \quad \text{e} \quad R_n = \frac{1}{|n|}.$$

Neste caso é fácil ver que, para todo n , \widehat{X}_n e \widehat{X}_{-n} são exteriormente tangentes na origem e que \widehat{X}_{n+1} está contido no interior de \widehat{X}_n . Portanto os domínios de Dirichlet e de Ford possuem dois lados tangentes \widehat{X}_1 e \widehat{X}_{-1} e nenhum vértice, já que o ponto de tangência destas circunferências é o ponto fixo de γ . (veja figura 4.1)

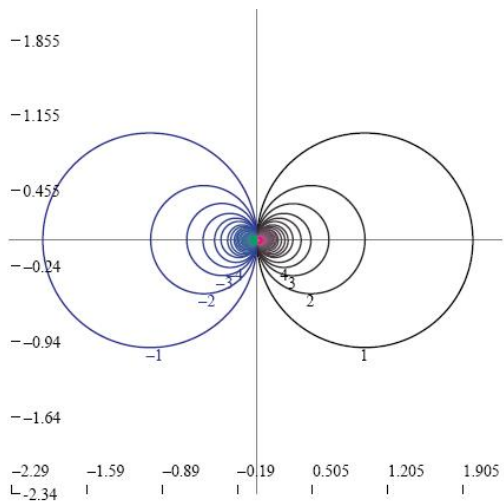


Figura 4.1: Domínios de Ford e Dirichlet para grupos cíclicos gerados por elementos parabólicos.

4.2 Gerador Elíptico

Consideremos agora $\gamma \in PSL_2(\mathbb{C})$ um elemento elíptico de ordem finita. Via uma conjugação podemos supor que γ fixa 0 e 1 em $\widehat{\mathbb{C}}$ e que γ é representada, como na seção 2.2.2, pela seguinte matriz em $SL_2(\mathbb{C})$.

$$\gamma = \begin{pmatrix} e^{i\theta} & 0 \\ e^{i\theta} - e^{-i\theta} & e^{-i\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \beta_1 & \lambda^{-1} \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \gamma^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ \beta_n & \lambda^{-n} \end{pmatrix}$$

onde

$$\lambda^n = e^{ni\theta} \quad \text{e} \quad \beta_n = \lambda^n - \lambda^{-n} = e^{ni\theta} - e^{-ni\theta} = 2i \operatorname{sen}(n\theta) .$$

Neste caso, o traço de γ é $\tau = e^{i\theta} + e^{-i\theta} = 2 \cos(\theta)$ e o traço de γ^n é $\tau_n = 2 \cos(n\theta)$.

Substituindo estas expressões na equação (3.5) do centro C_n^{eq} e do raio R_n^{eq} da esfera equidistante de γ^n e depois substituindo também nas equações (3.8) e (3.9) do centro C_n^{iso} e do raio

R_n^{iso} da esfera isométrica de γ^n , após fazer algumas manipulações algébricas, vemos que essas esferas possuem o mesmo centro e o mesmo raio dados por

$$C_n = \frac{1}{2} - i \frac{\cotg n\theta}{2} \quad \text{e} \quad R_n = \left| \frac{\csc n\theta}{2} \right|. \quad (4.1)$$

Deste modo, como no caso de gerador parabólico, vemos que o domínio de Dirichlet e o domínio de Ford coincidem para geradores elípticos. Vamos então denotar por \widehat{X}_n a circunferência centrada em $C_n \in \widehat{\mathbb{C}}$ e de raio R_n . A interseção dos exteriores destas circunferências é então o domínio de Dirichlet e o domínio de Ford, representado por $\widehat{\Delta}$, para a ação do grupo cíclico gerado por γ em $\widehat{\mathbb{C}}$.

Para caracterizar este domínio, primeiramente vamos observar que todos os círculos \widehat{X}_n passam pelos pontos 0 e 1, pontos fixos de γ em $\widehat{\mathbb{C}}$. De fato:

$$d(0, C_n) = \left\| \left(-\frac{1}{2}, \frac{\cotg n\theta}{2} \right) \right\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\cotg^2 n\theta}{4}} = \sqrt{\frac{\csc^2 n\theta}{4}} = \left| \frac{\csc n\theta}{2} \right| = R_n$$

$$d(1, C_n) = \left\| \left(\frac{1}{2}, \frac{\cotg n\theta}{2} \right) \right\| = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\cotg^2 n\theta}{4}} = \sqrt{\frac{\csc^2 n\theta}{4}} = \left| \frac{\csc n\theta}{2} \right| = R_n$$

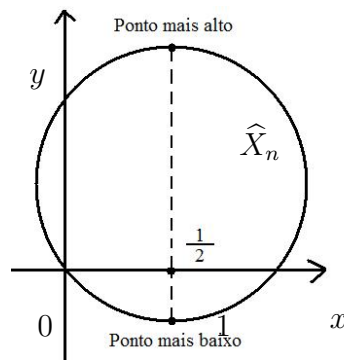


Figura 4.2: Todos os círculos \widehat{X}_n passam pelos pontos 0 e 1, e possuem centro sobre a reta $x = \frac{1}{2}$ em $\widehat{\mathbb{C}}$.

Como γ tem ordem finita, o grupo cíclico Γ possui somente uma quantidade finita de elementos e, portanto, temos apenas uma quantidade finita de círculos \widehat{X}_n para analisar.

Das expressões (4.1) do centro C_n e do raio R_n do círculo \widehat{X}_n é fácil ver que os pontos C_n e C_{-n} são simétricos em relação ao eixo x e que $R_n = R_{-n}$. Logo, os círculos \widehat{X}_n e \widehat{X}_{-n} possuem

o mesmo raio e são simétricos em relação ao eixo x . Assim, neste caso de geradores elípticos, o domínio $\widehat{\Delta}$ é simétrico em relação ao eixo x . Além disso, como todos os círculos \widehat{X}_n estão centrados sobre a reta de equação $x = \frac{1}{2}$ em $\widehat{\mathbb{C}}$, vemos que o domínio $\widehat{\Delta}$ também é simétrico em relação a essa reta.

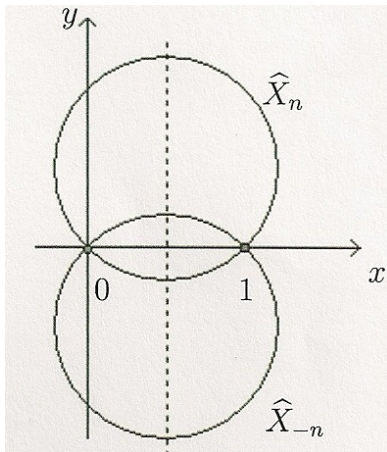


Figura 4.3: O domínio $\widehat{\Delta}$ e os círculos \widehat{X}_n e \widehat{X}_{-n} são simétricos em relação ao eixo x e em relação a reta $x = \frac{1}{2}$.

Agora vamos comparar dois círculos \widehat{X}_n e \widehat{X}_m para valores diferentes de n e m . Como o domínio $\widehat{\Delta}$ é simétrico em relação ao eixo x , vamos analisar os arcos destes círculos contidos no semi-plano superior $y > 0$. (veja figura 4.4)

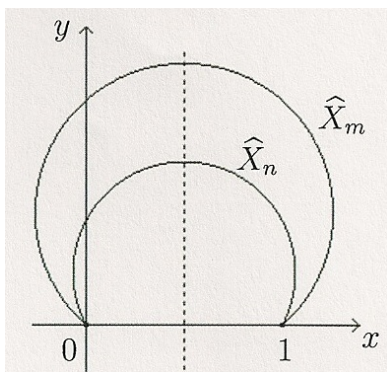


Figura 4.4: Os arcos dos círculos \widehat{X}_n e \widehat{X}_m no semi-plano superior. Um deles está contido na região limitada delimitada pelo outro arco.

Como os círculos \widehat{X}_n e \widehat{X}_m possuem centro sobre a reta $x = \frac{1}{2}$ em $\widehat{\mathbb{C}}$ e como eles se intersectam somente nos pontos 0 e 1, é claro que no semi-plano $y > 0$, um dos arcos destes

círculos está na região limitada delimita pelo outro arco. Isto implica que, como existe somente uma quantidade finita de círculos \widehat{X}_n , existe um índice n_0 tal que, no semi-plano superior todos os arcos dos círculos \widehat{X}_n para $n \neq n_0$ estão contidos no interior do círculo \widehat{X}_{n_0} . Finalmente, utilizando a simetria do domínio $\widehat{\Delta}$ em relação ao eixo x , vemos que esse domínio é limitado pelos círculos \widehat{X}_{n_0} e \widehat{X}_{-n_0} (veja figura 4.5). Portanto podemos concluir que no caso de geradores elípticos, o domínio de Dirichlet e o domínio de Ford $\widehat{\Delta}$ possuem exatamente dois lados contidos em \widehat{X}_{n_0} e \widehat{X}_{-n_0} .

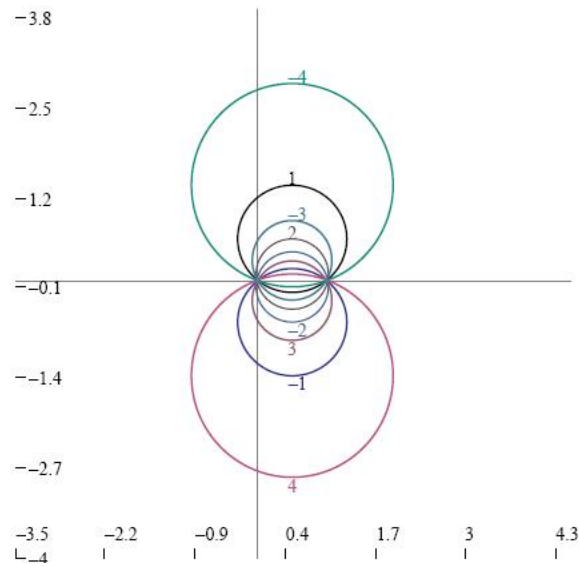


Figura 4.5: Domínios de Ford e Dirichlet para o grupo cíclico gerado por um elemento elíptico cujo o traço é $2 \cos \frac{2\pi}{9}$.

4.3 Gerador Loxodrômico

Seja $\gamma \in PSL_2(\mathbb{C})$ um elemento loxodrômico. Via uma conjugação podemos supor que γ possui ponto fixo atrator 1 e ponto fixo repulsor 0 e que γ é representado, como na seção 2.2.3, pela seguinte matriz em $SL_2(\mathbb{C})$.

$$\gamma = \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ \beta_1 & \lambda^{-1} \end{pmatrix}, \text{ onde } \gamma^n = \begin{pmatrix} \lambda^n & 0 \\ \beta_n & \lambda^{-n} \end{pmatrix}.$$

Além disso, no estudo do domínio de Dirichlet do grupo cíclico $\Gamma = \langle \gamma \rangle$ vamos considerar o nosso preferido ponto base (3.4) dado por

$$x = (z, t) = \left(\frac{1}{2}, \frac{e^\rho}{2} \right)$$

em que ρ é um número real não-negativo. Assumiremos a convenção que se tomamos $\rho = \infty$ então estamos analisando o domínio de Ford do grupo Γ , uma vez que o domínio de Ford pode ser visto como o limite do domínio de Dirichlet quando seu ponto base tende para ∞ .

Durante toda esta seção estaremos considerando esse elemento loxodrômico γ , o grupo cíclico $\Gamma = \langle \gamma \rangle$ e esse ponto base do domínio de Dirichlet.

O método que iremos empregar para o estudo do domínio de Dirichlet e do domínio de Ford do grupo cíclico Γ gerado por um elemento loxodrômico é ver como o tipo combinatório do domínio fundamental $\widehat{\Delta}$ muda pela variação contínua do traço de γ . Nesta análise, iremos utilizar fortemente o fato dos raios e dos centros das esferas isométricas ou equidistantes variarem continuamente em função do traço τ , como vimos na proposição 3.1.

Começaremos analisar o domínio $\widehat{\Delta}$ numa situação bem específica, quando ele é limitado por dois lados.

Proposição 4.3 *Se τ é um número puramente imaginário de módulo maior que dois, então o domínio fundamental $\widehat{\Delta}$ tem dois lados disjuntos limitados por \widehat{X}_1 e \widehat{X}_{-1} . (veja figuras 4.6 e 4.7)*

Prova: Efetuando um desenvolvimento longo com as expressões (3.5) podemos mostrar que no caso em que τ é um número puramente complexo de módulo maior que dois então $|C_1^{eq} - C_{-1}^{eq}| > R_1^{eq} + R_{-1}^{eq}$. Isto demonstra que as circunferências \widehat{X}_1 e \widehat{X}_{-1} são disjuntas, uma contida no exterior da outra. Agora, aplicando o Teorema 12, página 53 de [4], vemos que isto implica que \widehat{X}_2 está contida no interior de \widehat{X}_1 , \widehat{X}_3 está contida no interior de \widehat{X}_2 e assim sucessivamente, do mesmo modo que \widehat{X}_{-2} está contida no interior de \widehat{X}_{-1} , \widehat{X}_{-3} está contida no interior de \widehat{X}_{-2} e assim sucessivamente.

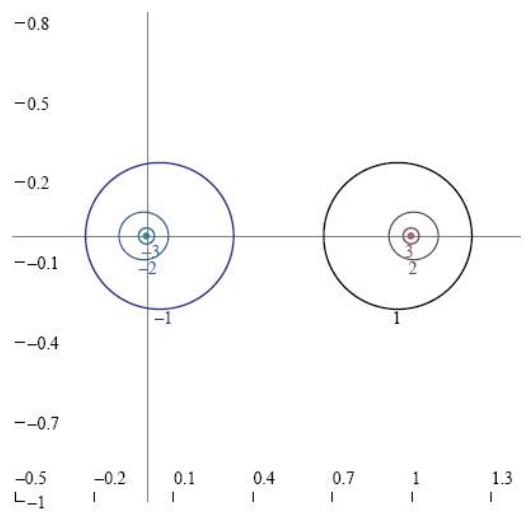


Figura 4.6: Domínio de Dirichlet com $\tau = 3i$ e $\rho = 1$.

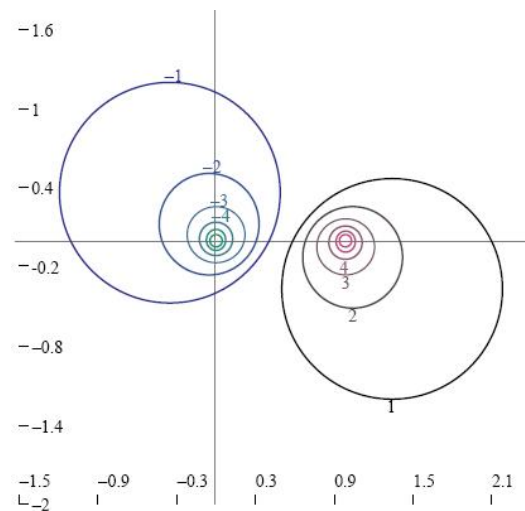


Figura 4.7: Domínio de Ford para um elemento com $|\tau| > 2$.

Iremos agora variar o traço τ , a partir da situação descrita na proposição anterior, e analisar

os tipos combinatoriais de $\widehat{\Delta}$. No caso anterior tínhamos dois círculos disjuntos \widehat{X}_1 e \widehat{X}_{-1} . Variando τ , o próximo caso que acontecerá é: ou algum $\widehat{X}_{\pm m}$ fica internamente tangente a $\widehat{X}_{\pm 1}$, ou \widehat{X}_1 fica externamente tangente a \widehat{X}_{-1} em um ponto q . Mas pela proposição 3.7, vemos que esses dois casos são exatamente o mesmo e ocorrem quando $m = 2$ e $q = \frac{1}{2}$. De fato a proposição 3.4 afirma que \widehat{X}_1 passa pelo ponto $\frac{1}{2}$ se, e somente se, ela é tangente a \widehat{X}_{-1} neste ponto. Assim vamos definir Σ_ρ como o conjunto dos traços τ para os quais isso ocorre, ou seja, quando \widehat{X}_1 ou \widehat{X}_{-1} passam por $q = \frac{1}{2}$. Temos dois casos diferentes para analisar, Σ_∞ e Σ_ρ , para $\rho < \infty$:

- Σ_∞ é o círculo $|\tau| = 2$. De fato, queremos encontrar τ para que $|C_1 - q| = R_1$ onde, de acordo com as equações (3.8) e (3.9), sabemos que $C_1 = \frac{\lambda}{\beta}$ e $R_1 = \frac{1}{\beta}$. Tal igualdade ocorre se, e somente se,

$$\left| \frac{\lambda}{\beta} - \frac{1}{2} \right| = \left| \frac{2\lambda - \beta}{2\beta} \right| = \frac{1}{\beta} \Leftrightarrow |2\lambda - \beta| = 2 \Leftrightarrow \left| \lambda + \frac{1}{\lambda} \right| = 2$$

ou seja se, e somente se, $|\tau| = 2$.

- Para cada $\rho < \infty$, Σ_ρ é uma curva no semi-plano superior contida no interior do círculo Σ_∞ e que passa pelos pontos -2 e 2 do eixo real. Veja na figura 4.8 alguns exemplos destas curvas. Neste caso, cada uma das curvas Σ_ρ divide o semi-plano superior em duas componentes conexas. A componente limitada será chamada do interior de Σ_ρ , e a componente ilimitada será o exterior de Σ_ρ . Observe que se $|\tau| > 2$ então τ está no exterior de Σ_ρ .

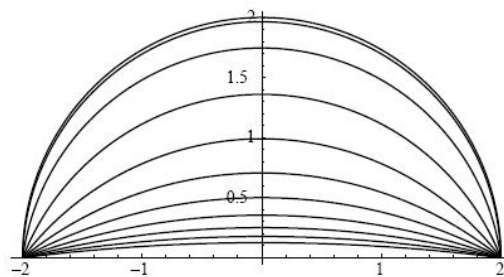


Figura 4.8: Curvas Σ_ρ no semi-plano superior para $\rho = 2^j$, $-8 \leq j \leq 2$, $j \in \mathbb{Z}$.

Nestes dois casos (Σ_∞ e Σ_ρ , para $\rho < \infty$), o domínio fundamental $\widehat{\Delta}$ tem $\widehat{X}_{\pm 1}$ como os seus únicos dois lados (disjuntos) se, e somente se, τ está no exterior de Σ_ρ . Para traços no interior

de Σ_ρ , temos que o ponto $q = \frac{1}{2}$ pertence ao interior de \widehat{X}_1 e ao interior de \widehat{X}_{-1} . Logo os círculos \widehat{X}_1 e \widehat{X}_{-1} são concorrentes.

Quando τ está sobre Σ_ρ , o domínio fundamental $\widehat{\Delta}$ é limitado pelos círculos \widehat{X}_1 e \widehat{X}_{-1} que são externamente tangentes no ponto $q = \frac{1}{2}$. Além disso, \widehat{X}_2 é internamente tangente à \widehat{X}_1 e \widehat{X}_{-2} é internamente tangente à \widehat{X}_{-1} . Logo, sobre cada um dos os círculos \widehat{X}_1 e \widehat{X}_{-1} temos dois pontos de tangência, que dividem cada um destes círculos em dois arcos. Assim iremos dizer que o domínio fundamental $\widehat{\Delta}$ possui quatro lados, formados pelos arcos de \widehat{X}_1 e \widehat{X}_{-1} limitados por esses pontos de tangência. (veja figura 4.9)

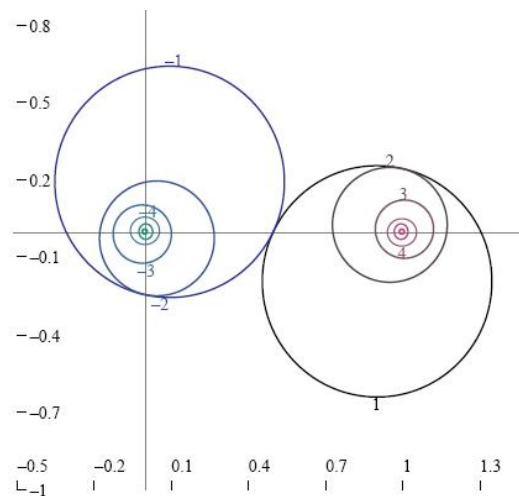


Figura 4.9: Domínio de Ford para um elemento com $|\tau| = 2$.

Vamos denotar agora por B_ρ o interior de Σ_ρ no semi-plano superior menos o eixo real. Já observamos que se $\tau \in B_\rho$ então \widehat{X}_1 e \widehat{X}_{-1} se interceptam. Além disso, como para todo $n \in \mathbb{N}$, o ponto 1 pertence ao interior de \widehat{X}_n e o ponto 0 pertence ao interior de \widehat{X}_{-n} , podemos concluir que neste caso o domínio fundamental $\widehat{\Delta}$ e o seu complementar em $\widehat{\mathbb{C}}$ são conexos. Isto demonstra o seguinte resultado.

Lema 4.4 *Para todo $\tau \in B_\rho$, o domínio fundamental $\widehat{\Delta}$, o seu complementar e sua fronteira são conexos.*

Usando o fato de $\partial\widehat{\Delta}$ ser uma curva conexa, o nosso objetivo agora é descrever $\partial\widehat{\Delta}$, unicamente a menos de permutações cíclicas, por uma sequência de lados

$$S_{n_0}, \dots, S_{n_{k-1}}$$

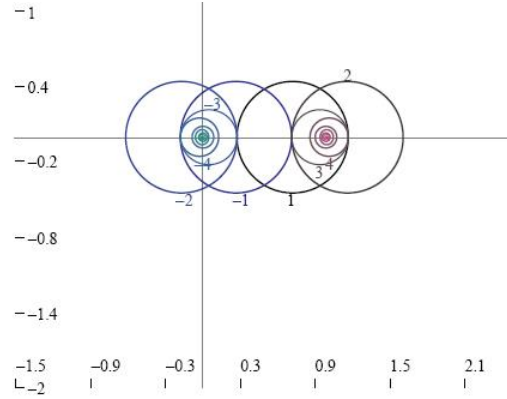


Figura 4.10: Domínio de Ford para um elemento com $\tau = 1$.

ordenados no sentido anti-horário, tal que qualquer par de lados adjacentes nesta sequência seja concorrente num vértice, inclusive $S_{n_{k-1}}$ e S_{n_0} .

Vamos começar analisando o caso em que $\partial\widehat{\Delta}$ possui $k = 6$ lados. Se este é o caso, como veremos no próximo lema, existe uma relação entre os índices dos lados que podem aparecer neste domínio fundamental.

Lema 4.5 *Se $\widehat{\Delta}$ é um domínio fundamental conexo com seis lados, então a sequência de lados para $\widehat{\Delta}$ é*

$$S_n, S_{n+m}, S_m, S_{-n}, S_{-m-n}, S_{-m} \quad (4.2)$$

Prova: Vamos começar escrevendo que os lados de $\widehat{\Delta}$ são

$$S_{n_0}, S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3}, S_{n_4}, S_{n_5}. \quad (4.3)$$

Veja figura 4.11.

A existência do difeomorfismo ϕ da proposição 3.4 implica que os lados do domínio $\widehat{\Delta}$ devem ser dois a dois identificados de modo que $n_i = -n_{i+3}$, onde sempre estaremos considerando os índices módulo 6. Agora defina os vértices de $\widehat{\Delta}$ por

$$c_i = S_{n_i} \cap S_{n_{i+1}}.$$

Pela proposição 3.3 e pelo fato de $\gamma^{-n_i}(\Delta) \cap \Delta = \emptyset$, podemos concluir que $\gamma^{-n_i}c_i = c_{i+2}$. Seguindo agora o ciclo de um vértice do domínio fundamental, obtemos

$$c_i = c_{i+6} = \gamma^{-n_{i+4}}c_{i+4} = \gamma^{n_{i+1}}c_{i+4} = \gamma^{n_{i+1}-n_{i+2}}c_{i+2} = \gamma^{n_{i+1}-n_{i+2}-n_i}c_i.$$

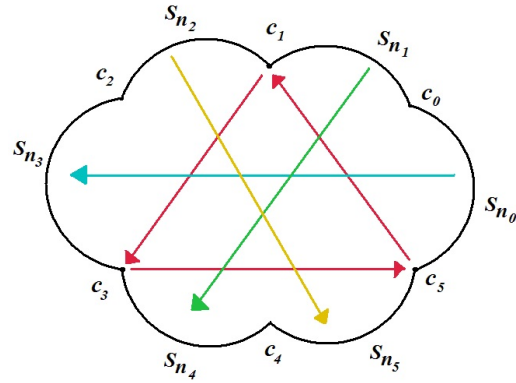


Figura 4.11: Figura esquemática de um domínio fundamental com seis lados.

Como os vértices c_i de $\widehat{\Delta}$ não são pontos fixos de nenhum elemento não-trivial do grupo cíclico Γ , concluímos que

$$n_{i+1} - n_{i+2} - n_i = 0.$$

ou seja

$$n_{i+1} = n_{i+2} + n_i .$$

Desta igualdade podemos reescrever a sequência (4.3) como a sequência (4.2).

■

O próximo lema nos mostra que algo semelhante ocorre quando $\widehat{\Delta}$ possui $k = 4$ lados.

Lema 4.6 *Se $\widehat{\Delta}$ é um domínio fundamental com exatamente quatro lados conectados, então a sequência de lados de $\widehat{\Delta}$ é dada por*

$$S_n, S_m, S_{-n}, S_{-m}. \tag{4.4}$$

Mais ainda, o vértice de interseção de S_i e S_j também está em \widehat{X}_{i+j} .

Prova: Represente, ciclicamente, os lados de $\widehat{\Delta}$ por

$$S_{n_0}, S_{n_1}, S_{n_2}, S_{n_3}.$$

Veja figura 4.12.

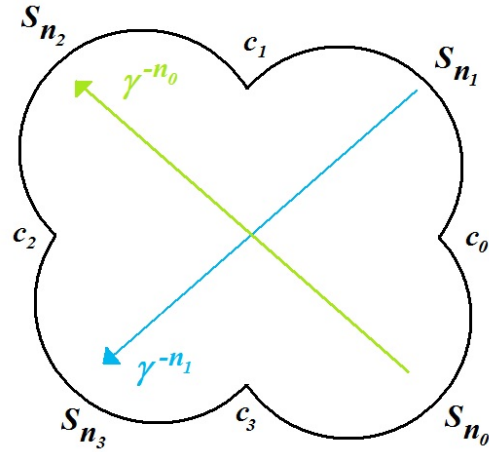


Figura 4.12: Figura esquemática de um domínio fundamental com quatro lados.

Como no lema anterior, a existência do difeomorfismo ϕ da Proposição 3.4 implica que $n_i = -n_{i+2}$, onde os índices estão sendo considerados módulo 4. Se os vértices de $\widehat{\Delta}$ são $c_i = S_{n_i} \cap S_{n_{i+1}}$, temos que $\gamma^{-n_i} c_i = c_{i+1}$ (veja figura 4.12). Daí segue que

$$\gamma^{-n_{i+1}-n_i} c_i = c_{i+2}$$

e, da proposição 3.2 vemos que $\widehat{X}_{n_i+n_{i+1}}$ intersepta $\widehat{\Delta}$ no vértice $c_i = S_{n_i} \cap S_{n_{i+1}}$.

■

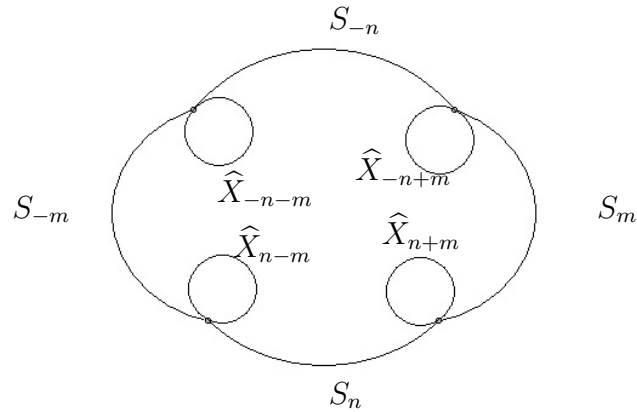


Figura 4.13: Esquema de um domínio fundamental com quatro lados descrito na demonstração do lema anterior.

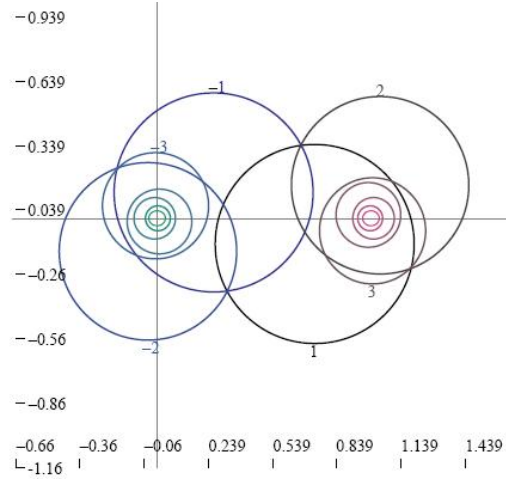


Figura 4.14: Um exemplo de um domínio de Ford com quatro lados cujo traço é $0, \overline{63} + 0, \overline{93}i$.

Agora estamos prontos para demonstrar o teorema principal deste capítulo.

Teorema 4.7 *Para todo $\tau \in B_\rho$, o domínio fundamental $\partial\widehat{\Delta}$ possui quatro ou seis lados.*

Prova: Para concluir a demonstração deste teorema a partir das nossas discussões anteriores, precisamos demonstrar que se $\partial\widehat{\Delta}$ possuir quatro ou seis lados, então variando continuamente o traço τ em B_ρ , então $\partial\widehat{\Delta}$ continua possuindo quatro ou seis lados. Lembre-se que o caso de domínios com dois lados ocorre apenas fora de Σ_ρ .

Caso 1: $\widehat{\Delta}$ tem quatro lados. No Lema 4.6 foram enumerados todos os círculos \widehat{X}_n 's que são incidentes aos vértices de $\partial\widehat{\Delta}$. A proposição 3.5 implica que os círculos numerados naquele lema são os únicos incidentes à vértices de $\partial\widehat{\Delta}$. Por uma pequena variação de τ poderíamos obter então uma das seguintes configurações. (veja figura 4.15)

- continuamos com um domínio fundamental com quatro lados, que devem ser os mesmos lados de $\partial\widehat{\Delta}$.
- duas das quatro curvas $\widehat{X}_{\pm n \pm m}$ ultrapassam os vértices de $\partial\widehat{\Delta}$ para obtermos um domínio fundamental com seis lados.
- todas as quatro curvas $\widehat{X}_{\pm n \pm m}$ ultrapassam os vértices de $\partial\widehat{\Delta}$ para obtermos um domínio fundamental com oito lados.

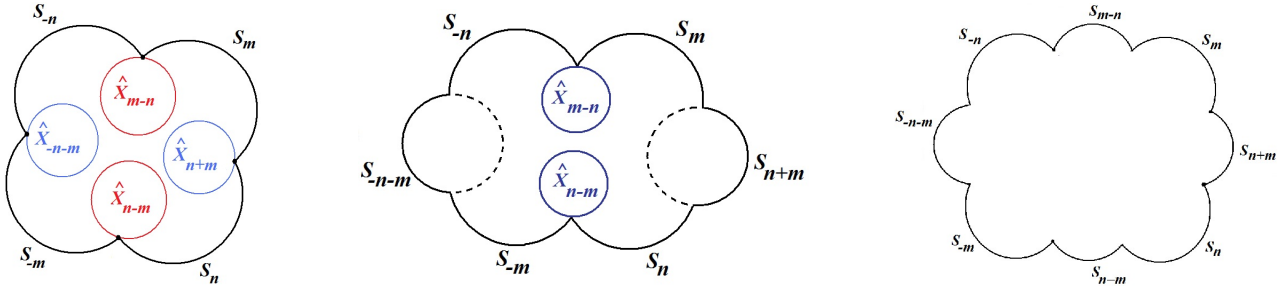


Figura 4.15: Variando o traço, existe a possibilidade de aparecer domínios com quatro, seis ou oito lados.

Vamos mostrar que esta última possibilidade nunca pode ocorrer. De fato suponhamos, por redução ao absurdo, que este último caso tivesse acontecido e que tivesse aparecido um domínio fundamental com oito lados, que são ciclicamente numerados como:

$$S_n, S_{n+m}, S_m, S_{m-n}, S_{-n}, S_{-n-m}, S_{-m}, S_{n-m}.$$

Seja $c_{i,j}$ o vértice formado pelos lados S_i e S_j . Então (veja figura 4.16)

$$c_{n,n+m} = \gamma^m \gamma^{n-m} \gamma^{-n} c_{n,n+m} = \gamma^m \gamma^{n-m} c_{m-n,-n} = \gamma^m c_{-m,n-m} = c_{n+m,m}.$$

Como $c_{n,n+m} \neq c_{n+m,m}$, obtemos a contradição que impede a última possibilidade listada acima.

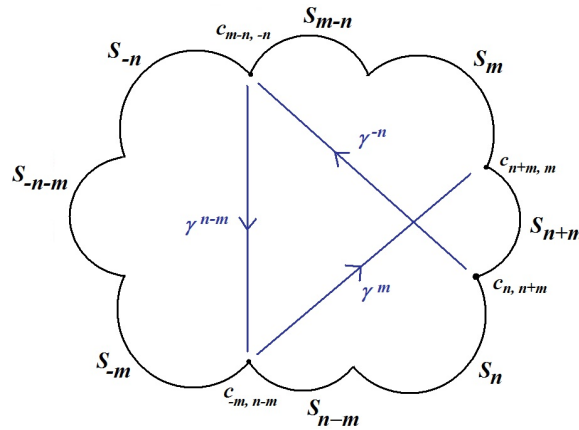


Figura 4.16: Um figura impossível de um domínio fundamental com oito lados.

Caso 2: $\widehat{\Delta}$ tem seis lados conexos. Neste caso iremos mostrar que nenhum outro círculo \widehat{X}_k pode ser incidente a algum vértice de $\widehat{\Delta}$. Deste modo, variações pequenas do traço τ não poderão aumentar o número de lados de $\widehat{\Delta}$.

Por redução ao absurdo, vamos assumir que algum \widehat{X}_k seja incidente no vértice $c_{n,n+m}$, onde os vértices são definidos como no caso anterior. Por simetria, \widehat{X}_{-k} também deve ser incidente no vértice $c_{-n,-n-m}$ e temos que: (veja figura 4.17)

$$\gamma^{n-k}c_{n,n+m} = \gamma^n\gamma^{-k}c_{n,n+m} = \gamma^n c_{-n,-n-m} = c_{-m,n} .$$

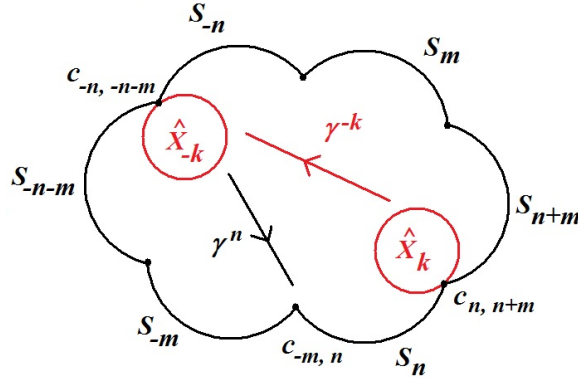


Figura 4.17: Caso 2 do Teorema 4.7.

Desta relação, a proposição 3.2 afirma que \widehat{X}_{k-n} contribui em $\partial\widehat{\Delta}$ com pelo menos o ponto $c_{n,n+m}$ e que \widehat{X}_{n-k} contribui com $\partial\widehat{\Delta}$ com pelo menos o ponto $c_{-m,n}$. Assim, se $\overline{X}_{k-n}^\partial = \{c_{n,n+m}\}$, teremos que $\overline{X}_k^\partial = \overline{X}_{k-n}^\partial = \{c_{n,n+m}\}$ e da proposição 3.5 podemos concluir que $k-n = k$, o que é um absurdo. Daí vemos que \widehat{X}_{k-n} deve contribuir com mais de um ponto para $\widehat{\Delta}$ e isto implica que $k-n$ dever ser igual a n ou $n+m$, que são os índices dos dois lados incidentes no ponto $c_{n,n+m}$. Analisaremos cada um destes casos separadamente.

- Suponhamos que $k-n = n$. Isto implica que $k = 2n$ e, de acordo com a figura 4.18, vemos que

$$\gamma^{m-n}c_{n,n+m} = \gamma^{n+m}\gamma^{-2n}c_{n,n+m} = \gamma^{n+m}c_{-n,-n-m} = c_{n+m,m} .$$

Como na análise anterior, esta igualdade e a proposição 3.2 implicam que $c_{n,n+m} \in \widehat{X}_{n-m}$ e do fato que por esse vértice somente passarem os lados $\widehat{X}_k = \widehat{X}_{2n}$, \widehat{X}_n e \widehat{X}_{n+m} , a proposição 3.5 implica que $n-m$ deve ser igual a $2n$ ou a n ou a $n+m$. Daí vemos que m deve ser igual a $-n$ ou a zero. Como nenhum destes casos é possível, encontramos a nossa desejada contradição.

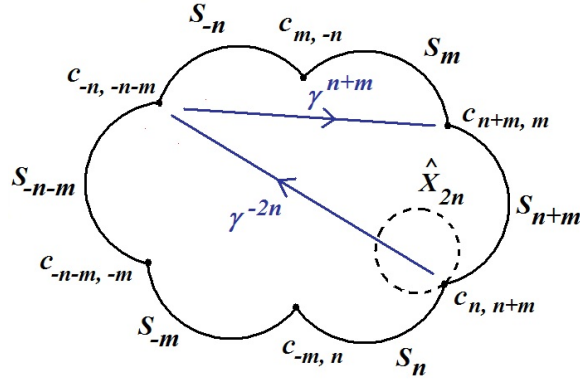


Figura 4.18: O caso em que $k - n$ é igual a n , na demonstração do teorema 4.7.

- Suponhamos que $k - n = n + m$, ou seja que $k = 2n + m$. Analisando a identificação de lados da figura 4.19 vemos que neste caso

$$c_{m,-n} = \gamma^{n+m} \gamma^{-2n-m} \gamma^n c_{m,-n} = \gamma^{n+m} \gamma^{-2n-m} c_{n,n+m} = \gamma^{n+m} c_{-n,-n-m} = c_{n+m,m} .$$

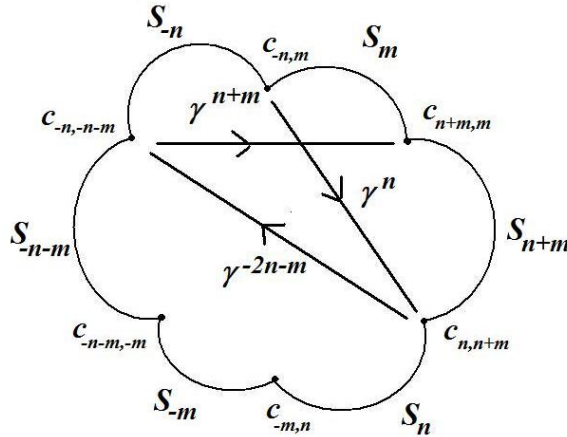


Figura 4.19: O caso em que $k - n$ é igual a $n + m$, na demonstração do teorema 4.7.

Como $c_{m,-n} \neq c_{n+m,m}$ também obtemos uma contradição neste caso.

Isto concluí a demonstração de que o domínio $\hat{\Delta}$ possui quatro ou seis lados.



Referências Bibliográficas

- [1] V. Ahlfors, *Complex Analysis, an introduction to the theory of analytic functions of one complex variable*, McGraw-Hill Book Company, INC. 1953.
- [2] A.F. Beardon, *The Geometry of Discrete Groups*, Springer-Verlag.
- [3] T.A. Drumm and J.A. Poritz, *Ford and Dirichlet Domains for cyclic subgroups of $PSL(2, \mathbb{R})$ action on $\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$ and $\partial\mathbb{H}_{\mathbb{R}}^3$* , *Conformal Geometry and Dynamics*, An Electronic Journal of the American Mathematical Society, Volume 3, pages 116-150 (October 25, 1999).
- [4] L.R. Ford, *Automorphic functions*, Chelsea, New York, 1951, second edition.
- [5] T. Jorgensen, *On cyclic groups of Möbius transformations*, *Math. Scand.* 33 (1973), 250-260.
- [6] B. Maskit, *Kleinian Groups*, Springer-Verlag.
- [7] V.P. Valério, *Assinatura de Grupos Fuchsianos Finitamente Gerados e Aplicações*. Dissertação de Mestrado, 2006.