

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**Desigualdades de Sobolev Euclidianas Ótimas Via a  
Desigualdade de Brunn-Minkowski**

Luiz Carlos de Morais Fernandes

Belo Horizonte - MG

2010

**UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS**

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**Desigualdades de Sobolev Euclidianas Ótimas Via a  
Desigualdade de Brunn-Minkowski**

Luiz Carlos de Morais Fernandes

Orientador: Prof. Dr. Marcos da Silva Montenegro

Dissertação apresentada ao Programa  
de Pós-Graduação em Matemática da  
Universidade Federal de Minas Gerais  
para obtenção do título de mestre em  
Matemática

**Belo Horizonte - MG**

**Outubro de 2010**

# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução e Objetivos</b>	<b>3</b>
<b>2</b>	<b>Ferramentas Básicas</b>	<b>7</b>
2.1	Desigualdade de Brunn-Minkowski . . . . .	7
2.2	Teorema de Prékopa-Leindler Generalizado . . . . .	12
2.3	Equação de Hamilton-Jacobi . . . . .	17
<b>3</b>	<b>Demonstração do Resultado Principal</b>	<b>24</b>
3.1	Estimativas para Soluções de Hamilton-Jacobi . . . . .	25
3.2	Argumentos Finais . . . . .	37
<b>A</b>	<b>Desigualdades Elementares</b>	<b>43</b>
A.1	Desigualdade de Young . . . . .	43
A.2	Desigualdade de Jensen . . . . .	44
A.3	Desigualdade Aritmético-Geométrica Generalizada . . . . .	45
A.4	Desigualdade de Hölder Integral . . . . .	49
<b>B</b>	<b>Demonstração da Desigualdade de Sobolev Clássica</b>	<b>50</b>
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>53</b>

# Capítulo 1

## Introdução e Objetivos

As desigualdades de Sobolev Euclidianas desempenham um papel extremamente importante na teoria de Equações Diferenciais Parciais - EDPs. Elas basicamente traduzem uma imersão de espaços de Sobolev em espaços de Lebesgue. Sua forma clássica foi introduzida pela primeira vez por Sobolev em 1936 motivada por estimativas de soluções de EDPs elípticas. Esta afirma que, dada uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  de classe  $C^\infty$  com suporte compacto, isto é,  $f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ , existe uma constante  $C > 0$ , independente de  $n$ ,  $p$  e  $f$ , de forma que

$$\|f\|_q \leq C \|\nabla f\|_p \tag{1.1}$$

em que  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ . Aqui  $\|f\|_q$  denota a norma com respeito ao espaço de Lebesgue  $L^q(\mathbb{R}^n)$  para  $q$  qualquer e  $\|\nabla f\|_p$  é dado por

$$\|\nabla f\|_p = \left\| \frac{\partial f}{\partial x_1} \right\|_p + \cdots + \left\| \frac{\partial f}{\partial x_n} \right\|_p.$$

A saber, dado  $p \geq 1$ , denotamos por  $L^p(\mathbb{R}^n)$ , ou simplesmente  $L^p$ , o espaço das funções  $p$ -integráveis munido da norma

$$\|u\|_p = \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p dx \right)^{1/p}$$

com relação à medida de Lebesgue e a norma euclidiana  $|\cdot|$  em  $\mathbb{R}^n$ .

Um fato importante sobre desigualdades de Sobolev é que existe uma constante ótima que nos dá a igualdade em (1.1), a qual vamos denotar por  $C_n(p)$ . Na maioria das aplicações, não é necessário conhecer seu valor explícito, apenas algumas estimativas,

entretanto, em determinadas circunstâncias, é interessante conhecermos o valor exato  $C_n(p)$  em (1.1). Isto se dá, por exemplo, em estudos de níveis críticos de energia em alguns modelos físicos. Desta maneira temos a desigualdade de Sobolev Euclidiana ótima

$$\|f\|_q \leq C_n(p) \|\nabla f\|_p \quad (1.2)$$

em que

$$C_n(p) = \sup\{\|f\|_q; f \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n) \text{ e } \|\nabla f\|_p = 1\}.$$

Usualmente, para determinar de forma explícita a melhor constante, investigamos a existência de funções extremais, isto é, funções que satisfazem igualdade em (1.1). A determinação de  $C_n(p)$ , de fato, não é tão importante quanto encontrar as funções extremais. O espaço natural para procurar tais funções é o espaço de Sobolev  $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ , definido por

$$\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^n) = \{u \in L^q(\mathbb{R}^n); \nabla u \in L^p(\mathbb{R}^n)\},$$

em que  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$  e o gradiente de  $u$  é tomado no sentido fraco. Dizer que  $\nabla u$  pertence a  $L^p$  é o mesmo que dizer que cada derivada parcial  $\frac{\partial u}{\partial x_i}$  pertence a  $L^p$ . A norma neste espaço é dada exatamente por

$$\|u\|_{\mathcal{D}^{1,p}} = \|\nabla u\|_p \quad .$$

Assim, se existir alguma  $f \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  extremal, podemos explicitar  $C_n(p)$  fazendo  $C_n(p) = \frac{\|f\|_q}{\|\nabla f\|_p}$ . Aubin [1] e Talenti [14] foram os primeiros a contribuir neste estudo, provando independentemente o seguinte teorema.

**Teorema 1.1** *Sejam  $1 \leq p < n$  e  $q = \frac{np}{n-p}$ . Então*

1. *Para todo  $u \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ ,*

$$\|u\|_q \leq C_n(p) \|\nabla u\|_p, \quad (1.3)$$

*na qual*

$$C_n(p) = \pi^{-\frac{1}{2}} n^{-\frac{1}{p}} \left( \frac{p-1}{n-1} \right)^{\frac{p-1}{p}} \left( \frac{\Gamma(1 + \frac{n}{2}) \Gamma(n)}{\Gamma(\frac{n}{p}) \Gamma(1 + n - \frac{n}{p})} \right)^{\frac{1}{n}}$$

*em que a função gama  $\Gamma$  é definida por  $\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt$ , para  $x > 0$ .*

2.  $C_n(p)$  é a melhor constante em (1.3) e tem-se igualdade se, e somente se,  $u$  é da forma

$$u(x) = \left( a + b|x|^{\frac{p}{p-1}} \right)^{\frac{p-n}{p}},$$

em que  $a$  e  $b$  são constantes positivas.

Problemas similares já foram estudados envolvendo inúmeras variantes de (1.1). Uma delas que generaliza uma grande família de desigualdades do tipo de Sobolev é conhecida como desigualdade de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev que é usada no estudo de EDPs elípticas. Esta diz que, dados  $1 < p < n$ ,  $s < r \leq q = \frac{pn}{n-p}$  e  $0 \leq \theta \leq 1$ , existe uma constante  $C_n(p, r, s) > 0$  tal que para toda  $u \in \mathcal{D}^{1,p} \cap L^s$ ,

$$\|u\|_r \leq C_n(p, r, s) \|u\|_s^{1-\theta} \|\nabla u\|_p^\theta. \quad (1.4)$$

É fácil ver que, para  $\theta = 1$  e  $r = q$  temos a própria desigualdade de Sobolev. A desigualdade (1.4) decorre de (1.1) e da desigualdade de Hölder (A.13). Recentemente, Del Pino e Dolbeault [7] encontraram formas ótimas para uma subfamília de (1.4) em que se tem

$$\begin{cases} p(s-1) = r(p-1), & \text{para } r, s > p \\ p(r-1) = s(p-1), & \text{para } r, s < p. \end{cases}$$

A desigualdade de Sobolev tem, ainda, relações com outras áreas da matemática. É um fato conhecido, por exemplo, que quando  $p = 1$ , (1.1) é equivalente à desigualdade isoperimétrica Euclidiana, que diz que dentre os conjuntos de Borel em  $\mathbb{R}^n$  com um volume fixo, a bola Euclidiana é a que tem a menor área de superfície (cf. [11, 13]). Esta desigualdade, por sua vez, deriva também da desigualdade de Brunn-Minkowski, que afirma que, dados  $X$  e  $Y$  dois conjuntos Lebesgue mensuráveis e  $0 < \theta < 1$ , tem-se

$$\lambda((1-\theta)X + \theta Y)^{1/n} \geq (1-\theta)\lambda(X)^{1/n} + \theta\lambda(Y)^{1/n}. \quad (1.5)$$

Em [10] vemos uma demonstração de (1.1) para  $p = 1$  a partir da desigualdade isoperimétrica. Assim temos a relação

$$\boxed{\text{desig. Brunn-Minkowski} \Rightarrow \text{desig. isoperimétrica} \Rightarrow \text{desig. de Sobolev para } p = 1.}$$

Há pouco tempo, Bobkov e Ledoux apresentaram em [4] uma demonstração direta de (1.1) explicitando a constante ótima e as funções extremais a partir de (1.5), estreitando

a relação entre as desigualdades de Brunn-Minkowski e Sobolev ótima, e entre a geometria diferencial e o estudo de EDPs.

Apresentaremos neste trabalho a estratégia proposta em [4] com os detalhes necessários a uma boa compreensão. Esta dissertação está dividida da seguinte maneira: no Capítulo 2, são apresentados três resultados importantes que serão aplicados na demonstração da desigualdade de Sobolev ótima e também suas respectivas demonstrações. Na seção 2.1, provamos a desigualdade de Brunn-Minkowski, na seção 2.2, demonstramos o teorema de Prékopa-Leindler, que deriva diretamente de (1.5) e, na seção 2.3, apresentamos um estudo sucinto da equação de Hamilton-Jacobi. No Capítulo 3, demonstramos o resultado principal deste trabalho, explicitando os pontos em que são utilizadas as ferramentas do capítulo 2. Há ainda um apêndice destinado à prova de algumas desigualdades elementares que serão necessárias na demonstração e outro em que demonstramos a desigualdade de Sobolev clássica (1.1).

# Capítulo 2

## Ferramentas Básicas

Este capítulo é destinado aos resultados relevantes que serão utilizados no decorrer da demonstração principal e que merecem um destaque por sua importância nesta dissertação e em outras áreas da matemática.

### 2.1 Desigualdade de Brunn-Minkowski

Há pouco mais de um século, não muito tempo depois de ser apresentada uma prova da desigualdade isoperimétrica clássica

$$L^2 \geq 4\pi A, \tag{2.1}$$

em que  $A$  é a área da região delimitada pela curva plana fechada de comprimento  $L$ , Minkowski provou a desigualdade

$$\lambda((1 - \theta)X + \theta Y)^{1/n} \geq (1 - \theta)\lambda(X)^{1/n} + \theta\lambda(Y)^{1/n}.$$

Aqui os conjuntos  $X$  e  $Y$  são mensuráveis não-vazios de  $\mathbb{R}^n$ ,  $0 < \theta < 1$ ,  $\lambda(\cdot)$  é a medida de Lebesgue e  $+$  denota a *soma vetorial* de conjuntos, também conhecida como *soma de Minkowski*. Precisamente a soma vetorial é tal que, dados os subconjuntos  $A$  e  $B$  de  $\mathbb{R}^n$ ,  $A+B = \{a+b \in \mathbb{R}^n; a \in A, b \in B\}$ . Essa desigualdade havia sido provada algum tempo antes, para  $n = 3$ , por Brunn e, por isso, hoje é conhecida como *Desigualdade de Brunn-Minkowski*. Ambos mostraram também que a igualdade é satisfeita se, e somente se,  $X$  e  $Y$  são homotéticos, isto é, se um pode ser obtido a partir do outro por meio de translações e dilatações. A princípio, sua primeira prova supunha apenas



que  $X$  e  $Y$  fossem conjuntos compactos convexos de interior não-vazio. Entretanto, no decorrer do século passado, foram estabelecidas generalizações satisfatórias envolvendo conjuntos Lebesgue mensuráveis, fazendo com que ela se consolidasse como uma importante ferramenta em aplicações analíticas.

Nesta dissertação, a desigualdade de Brunn-Minkowski desempenha papel fundamental como uma das principais ferramentas para se chegar à desigualdade de Sobolev Euclidiana ótima e, por esta razão, apresentamos sua prova.

**Proposição 2.1 (Desigualdade de Brunn-Minkowski)** *Sejam  $0 < \theta < 1$  e  $X$  e  $Y$  conjuntos mensuráveis não-vazios e limitados em  $\mathbb{R}^n$  tais que  $(1 - \theta)X + \theta Y$  também é mensurável. Então*

$$\lambda((1 - \theta)X + \theta Y)^{1/n} \geq (1 - \theta)\lambda(X)^{1/n} + \theta\lambda(Y)^{1/n}. \quad (2.2)$$

Antes de apresentarmos a demonstração desta proposição, faremos algumas observações. Como a medida de Lebesgue  $n$ -dimensional é homogênea, isto é  $\lambda(rX) = r^n\lambda(X)$  para  $r \geq 0$ , existe uma formulação equivalente da desigualdade para  $s, t > 0$ :

$$\lambda(sX + tY)^{1/n} \geq s\lambda(X)^{1/n} + t\lambda(Y)^{1/n}. \quad (2.3)$$

Existe outra em que podemos omitir  $s$  e  $t$ :

$$\lambda(X + Y)^{1/n} \geq \lambda(X)^{1/n} + \lambda(Y)^{1/n}. \quad (2.4)$$

Para vermos isto basta aplicarmos (2.2) aos conjuntos  $s_0X$  e  $t_0Y$  nos quais  $s_0, t_0 \geq 0$  são valores arbitrários. Deste modo

$$\begin{aligned} \lambda((1 - \theta)s_0X + \theta t_0Y)^{1/n} &\geq (1 - \theta)\lambda(s_0X)^{1/n} + \theta\lambda(t_0Y)^{1/n} \\ &= (1 - \theta)s_0\lambda(X)^{1/n} + \theta t_0\lambda(Y)^{1/n}. \end{aligned}$$

Daí chamamos  $s = (1 - \theta)s_0$  e  $t = \theta t_0$ . A recíproca decorre diretamente de (2.3) com  $s = 1 - \theta$  e  $t = \theta$ . Podemos proceder de maneira análoga para vermos que (2.2) e (2.4) são equivalentes.

Existe ainda outra versão equivalente, que é

$$\lambda((1 - \theta)X + \theta Y) \geq \min\{\lambda(X), \lambda(Y)\}. \quad (2.5)$$

As vantagens desta é que ela não requer que  $X$  e  $Y$  sejam não-vazios e é independente da dimensão. É claro que (2.2) implica (2.5), já que

$$\begin{aligned} \lambda((1-\theta)X + \theta Y)^{1/n} &\geq (1-\theta)\lambda(X)^{1/n} + \theta\lambda(Y)^{1/n} \\ &\geq (1-\theta)\min\{\lambda(X), \lambda(Y)\}^{1/n} + \theta\min\{\lambda(X), \lambda(Y)\}^{1/n} \\ &= \min\{\lambda(X), \lambda(Y)\}^{1/n}. \end{aligned}$$

Para a recíproca suponha, sem perda de generalidade, que os conjuntos  $X$  e  $Y$  também satisfazem  $\lambda(X)\lambda(Y) \neq 0$ . Vamos trocar  $X$  e  $Y$  em (2.5) por  $\lambda(X)^{-1/n}X$  e  $\lambda(Y)^{-1/n}Y$  respectivamente e tomar

$$\theta = \frac{\lambda(Y)^{1/n}}{\lambda(X)^{1/n} + \lambda(Y)^{1/n}}.$$

Assim o lado direito de (2.5) se torna 1, já que  $\lambda(\lambda(X)^{-1/n}X) = \lambda(X)^{-1}\lambda(X)$ . Como

$$1 - \theta = \frac{\lambda(X)^{1/n}}{\lambda(X)^{1/n} + \lambda(Y)^{1/n}},$$

(2.5) se torna

$$\lambda\left(\frac{X}{\lambda(X)^{1/n} + \lambda(Y)^{1/n}} + \frac{Y}{\lambda(X)^{1/n} + \lambda(Y)^{1/n}}\right) = \frac{\lambda(X+Y)}{\lambda(X)^{1/n} + \lambda(Y)^{1/n}} \geq 1$$

que é justamente

$$\lambda(X+Y)^{1/n} \geq \lambda(X)^{1/n} + \lambda(Y)^{1/n}. \quad (2.4)$$

Com estas informações, vamos à demonstração da desigualdade.

**Demonstração da Proposição 2.1:** Vamos mostrar para a desigualdade na forma (2.4). A ideia é provar o resultado primeiro para caixas, que são definidas como paralelepípedos retangulares  $n$ -dimensionais cujas arestas são paralelas aos eixos coordenados. Se  $X$  e  $Y$  são caixas com arestas de tamanho  $x_i$  e  $y_i$ , respectivamente, na direção da  $i$ -ésima coordenada, então  $X + Y$  é uma caixa de tamanho  $x_i + y_i$  na mesma direção e assim,

$$\lambda(X) = \prod_{i=1}^n x_i, \quad \lambda(Y) = \prod_{i=1}^n y_i \quad \text{e} \quad \lambda(X+Y) = \prod_{i=1}^n (x_i + y_i).$$

Agora, pela a desigualdade entre as médias aritmética e geométrica, a qual demonstramos no apêndice (A.3), que afirma

$$\left(\prod_{i=1}^n a_i\right)^{1/n} \leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n a_i,$$

para  $a_i \geq 0$  e para pesos iguais, obtemos que

$$\begin{aligned} \left( \prod_{i=1}^n \frac{x_i}{x_i + y_i} \right)^{1/n} + \left( \prod_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i + y_i} \right)^{1/n} &\leq \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i}{x_i + y_i} + \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{y_i}{x_i + y_i} \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \frac{x_i + y_i}{x_i + y_i} = 1. \end{aligned}$$

Isto nos dá a desigualdade de Brunn-Minkowski para caixas

$$\left( \prod_{i=1}^n x_i \right)^{1/n} + \left( \prod_{i=1}^n y_i \right)^{1/n} \leq \left( \prod_{i=1}^n (x_i + y_i) \right)^{1/n}.$$

Vamos mostrar que a desigualdade vale para uniões finitas de caixas. Digamos que  $X$  e  $Y$  sejam agora estas uniões. Fazendo uma translação de  $X$ , se necessário, podemos supor que o hiperplano  $\{x_n = 0\}$  separa  $X$  em duas partes. Denotemos  $X_+$  e  $X_-$  a união das caixas formadas pela interseção das caixas de  $X$  com  $\{x_n \geq 0\}$  e  $\{x_n \leq 0\}$  respectivamente. Podemos, então, transladar  $Y$  para que tenhamos

$$\frac{\lambda(X_{\pm})}{\lambda(X)} = \frac{\lambda(Y_{\pm})}{\lambda(Y)} \quad (2.6)$$

no qual  $Y_+$  e  $Y_-$  são definidos de forma análoga. Observe que  $X_+ + Y_+ \subset \{x_n \geq 0\}$  e que  $X_- + Y_- \subset \{x_n \leq 0\}$ . Além disso, os números de caixas de  $X_+ \cup Y_+$  e de  $X_- \cup Y_-$  são ambos menores do que o número de caixas em  $X \cup Y$ . Assim, podemos aplicar o princípio de indução no número de caixas associado a (2.6) para obtermos

$$\begin{aligned} \lambda(X + Y) &\geq \lambda(X_+ + Y_+) + \lambda(X_- + Y_-) \\ &\geq (\lambda(X_+)^{1/n} + \lambda(Y_+)^{1/n})^n + (\lambda(X_-)^{1/n} + \lambda(Y_-)^{1/n})^n \\ &= \lambda(X_+) \left( 1 + \frac{\lambda(Y)^{1/n}}{\lambda(X)^{1/n}} \right)^n + \lambda(X_-) \left( 1 + \frac{\lambda(Y)^{1/n}}{\lambda(X)^{1/n}} \right)^n \\ &= \lambda(X) \left( 1 + \frac{\lambda(Y)^{1/n}}{\lambda(X)^{1/n}} \right)^n \\ &= \left( \lambda(X)^{1/n} + \lambda(X)^{1/n} \frac{\lambda(Y)^{1/n}}{\lambda(X)^{1/n}} \right)^n \\ &= (\lambda(X)^{1/n} + \lambda(Y)^{1/n})^n \end{aligned}$$

Assim, a desigualdade vale para uniões finitas de caixas.

Vamos mostrar, agora, que (2.4) vale para conjuntos compactos, usando estas uniões finitas de caixas para aproximá-los. Sejam  $X$  e  $Y$  dois conjuntos compactos

com medida finita e não-nula. Definimos a distância de Hausdorff entre os conjuntos compactos  $A$  e  $B$  como sendo

$$\rho(A, B) = \{ \inf h; A \subset B^h, B \subset A^h \},$$

em que  $A^h = \{x \in \mathbb{R}^n; d(x, A) \leq h\}$  para todo  $A \subset \mathbb{R}^n$  na qual  $d(., .)$  é a métrica Euclidiana. Não é difícil notar que  $\rho(A, B) = 0 \Leftrightarrow A = B$ .

Dizemos que a sequência de conjuntos compactos  $A_i$  converge para  $A$ , e denotamos  $A_i \rightarrow A$ , se  $\rho(A_i, A) \rightarrow 0$  quando  $i \rightarrow \infty$ . Para tal convergência  $\lambda(A) \geq \limsup_{i \rightarrow \infty} \lambda(A_i)$ . Temos ainda que todo conjunto compacto  $A$  pode ser aproximado por uniões finitas de caixas  $A_i \rightarrow A$  de forma que  $\lambda(A_i) \rightarrow \lambda(A)$  como visto em [9]. Para provarmos, então, (2.4) para  $X$  e  $Y$  compactos, vamos tomar tais aproximações  $X_i \rightarrow X$  e  $Y_i \rightarrow Y$  de modo que  $\lambda(X_i) \rightarrow \lambda(X)$  e  $\lambda(Y_i) \rightarrow \lambda(Y)$ . Daí obtemos que  $X_i + Y_i \rightarrow X + Y$ . Para vermos isto, tomemos  $h > 0$  e  $i \in \mathbb{N}$  tais que  $X_i \subset X^h$ ,  $X \subset X_i^h$ ,  $Y_i \subset Y^h$  e  $Y \subset Y_i^h$ . Consideremos os pontos  $x_i \in X_i$  e  $y_i \in Y_i$ . Temos que

$$x_i \in X_i \quad \Rightarrow \quad x_i \in X^h \quad \Rightarrow \quad d(x_i, X) < h \quad \Rightarrow \quad \inf\{|x_i - x|; x \in X\} < h.$$

Analogamente,  $\inf\{|y_i - y|; y \in Y\} < h$ . Como  $X$  e  $Y$  são compactos, existem  $\bar{x} \in X$  e  $\bar{y} \in Y$  tais que  $|x_i - \bar{x}| = \inf\{|x_i - x|; x \in X\}$  e  $|y_i - \bar{y}| = \inf\{|y_i - y|; y \in Y\}$ . Logo

$$2h > |x_i - \bar{x}| + |y_i - \bar{y}| \geq |(x_i + y_i) - (\bar{x} + \bar{y})| \geq d(x_i + y_i, X + Y).$$

Isto é,  $x_i + y_i \in (X + Y)^{2h}$  e portanto  $X_i + Y_i \subset (X + Y)^{2h}$ . De maneira semelhante chegamos que  $X + Y \subset (X_i + Y_i)^{2h}$ . Assim, temos que  $X_i + Y_i \rightarrow X + Y$ . Daí, podemos aplicar esse fato aliado à validade de (2.4) para uniões finitas de caixas para obtermos

$$\begin{aligned} \lambda(X + Y)^{1/n} &\geq \limsup_{i \rightarrow \infty} \lambda(X_i + Y_i)^{1/n} \\ &\geq \limsup_{i \rightarrow \infty} [\lambda(X_i)^{1/n} + \lambda(Y_i)^{1/n}] = \lambda(X)^{1/n} + \lambda(Y)^{1/n} \end{aligned}$$

como queríamos.

Agora, se  $X$  e  $Y$  são conjuntos mensuráveis não-vazios quaisquer, basta aproximá-los por compactos. Da teoria da medida temos que  $\lambda(X) = \sup \lambda(K)$  para todos os  $K \subset X$  compactos. Portanto podemos tomar compactos não vazios  $X_i \subset X$  e  $Y_i \subset Y$  de modo que tenhamos  $\lambda(X_i) \rightarrow \lambda(X)$  e  $\lambda(Y_i) \rightarrow \lambda(Y)$ . Daí, da inclusão

$X_i + Y_i \subset X + Y$  e do fato de que o resultado vale para compactos, obtemos

$$\begin{aligned} \lambda(X)^{1/n} + \lambda(Y)^{1/n} &= \limsup_{i \rightarrow \infty} [\lambda(X_i)^{1/n} + \lambda(Y_i)^{1/n}] \\ &\leq \limsup_{i \rightarrow \infty} \lambda(X_i + Y_i)^{1/n} \leq \lambda(X + Y)^{1/n} \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar.  $\square$

Uma aplicação direta desta proposição é a *Desigualdade Isoperimétrica Euclidiana  $n$ -dimensional* que afirma que se  $K$  é um subconjunto convexo limitado de  $\mathbb{R}^n$  e  $B$  denota a bola Euclidiana  $n$ -dimensional, tem-se

$$\left( \frac{\lambda(K)}{\lambda(B)} \right)^{1/n} \leq \left( \frac{\lambda(\partial K)}{\lambda(\partial B)} \right)^{1/(n-1)}, \quad (2.7)$$

com igualdade se, e somente se,  $K$  é uma bola. Uma demonstração desse fato pode ser vista em [10].

## 2.2 Teorema de Prékopa-Leindler Generalizado

Nesta seção, apresentamos uma versão generalizada do resultado conhecido como Teorema de Prékopa-Leindler, o qual decorre diretamente da desigualdade de Brunn-Minkowski e que enunciaremos adiante. O seguinte lema nos dá uma estimativa para a integral de uma função  $w : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que se relaciona com as funções  $u$  e  $v$  de acordo com uma média ponderada. Este é o ponto central em que é utilizada a Desigualdade de Brunn-Minkowski (2.2). Depois, no Corolário 2.1, vemos o mesmo resultado para uma média mais geral. A extensão deste resultado para dimensão  $n$  é uma generalização do Teorema de Prékopa-Leindler do qual decorre o Corolário 2.2, que é o resultado mais importante desta seção. Este corolário será uma ferramenta fundamental no próximo capítulo.

**Proposição 2.2** *Sejam  $\theta \in [0, 1]$  e  $u, v$  e  $w$  funções reais mensuráveis não-negativas definidas em  $\mathbb{R}$  tais que, para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ ,*

$$w(\theta x + (1 - \theta)y) \geq \min(u(x), v(y)).$$

Então, se  $\sup_{x \in \mathbb{R}} u(x) = \sup_{x \in \mathbb{R}} v(x) = 1$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} w dx \geq \theta \int_{-\infty}^{\infty} u dx + (1 - \theta) \int_{-\infty}^{\infty} v dx.$$

**Demonstração:** Vamos definir, para  $t > 0$ , o conjunto  $E_u(t) = \{x \in \mathbb{R}; u(x) > t\}$  e do mesmo modo definimos os conjuntos  $E_v(t)$  e  $E_w(t)$ . Em primeiro lugar, podemos notar que  $E_u(t)$  e  $E_v(t)$  são não-vazios para  $0 < t < 1$ , já que  $\sup_{x \in \mathbb{R}} u(x) = \sup_{x \in \mathbb{R}} v(x) = 1$ , e ainda temos que

$$E_w(t) \supset \theta E_u(t) + (1 - \theta)E_v(t).$$

Esta segunda propriedade pode ser provada facilmente. Tomando-se  $x \in E_u(t)$  e  $y \in E_v(t)$ , como  $u(x) > t$  e  $v(y) > t$ , temos, pela hipótese da Proposição, que

$$w(\theta x + (1 - \theta)y) \geq \min(u(x), v(y)) > t$$

e, assim, todo número da forma  $\theta x + (1 - \theta)y$  pertence ao conjunto  $E_w(t)$ .

Da desigualdade de Brunn-Minkowski, para todo  $0 < t < 1$ ,

$$\lambda(E_w(t)) \geq \theta \lambda(E_u(t)) + (1 - \theta) \lambda(E_v(t))$$

em que  $\lambda(\cdot)$  denota a medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}$ . Assim, como  $\sup w$  pode eventualmente ser maior do que 1, temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} w dx &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{E_w(t)} dx dt \geq \int_0^1 \lambda(E_w(t)) dt \\ &\geq \theta \int_0^1 \lambda(E_u(t)) dt + (1 - \theta) \int_0^1 \lambda(E_v(t)) dt \\ &= \theta \int_{-\infty}^{\infty} \int_{E_u(t)} dx dt + (1 - \theta) \int_{-\infty}^{\infty} \int_{E_v(t)} dx dt \\ &= \theta \int_{-\infty}^{\infty} u dx + (1 - \theta) \int_{-\infty}^{\infty} v dx, \end{aligned}$$

como queríamos demonstrar. □

Esta proposição pode ser estendida para uma média mais geral. Vamos denotar, para  $\alpha \in [-\infty, +\infty]$ ,  $M_\alpha^{(\theta)}(a, b)$  como sendo a  $\alpha$ -média de dois números não-negativos  $a$  e  $b$  com pesos  $\theta, 1 - \theta \in [0, 1]$  definida por

$$M_\alpha^{(\theta)}(a, b) = (\theta a^\alpha + (1 - \theta) b^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}}$$

se  $ab > 0$  e  $M_\alpha^{(\theta)}(a, b) = 0$  se  $ab = 0$ . Podemos fazer ainda a seguinte convenção:

$$M_{\alpha}^{(\theta)}(a, b) = \begin{cases} \max(a, b) & \text{se } \alpha = +\infty, \\ \min(a, b) & \text{se } \alpha = -\infty, \\ a^{\theta}b^{1-\theta} & \text{se } \alpha = 0, \end{cases}$$

entretanto vamos precisar aqui apenas do caso finito. Existe ainda uma generalização da desigualdade das médias aritmética e geométrica, demonstrada no apêndice A.3, dada por

$$M_{\alpha_1}^{(\theta)}(a_1, b_1) M_{\alpha_2}^{(\theta)}(a_2, b_2) \geq M_{\alpha}^{(\theta)}(a_1 a_2, b_1 b_2), \quad (2.8)$$

em que  $\frac{1}{\alpha} = \frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2}$  e  $\alpha_1 + \alpha_2 > 0$ . Esta também é conhecida como *Desigualdade de Hölder*. Agora, podemos generalizar o lema anterior com o seguinte corolário.

**Corolário 2.1** *Sejam  $-\infty < \alpha < +\infty$ ,  $\theta \in [0, 1]$  e  $u, v$  e  $w$  funções reais mensuráveis não-negativas definidas em  $\mathbb{R}$  tais que, para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ ,*

$$w(\theta x + (1 - \theta)y) \geq M_{\alpha}^{(\theta)}(u(x), v(y)).$$

Então, se  $a = \sup_{x \in \mathbb{R}} u(x) < \infty$  e  $b = \sup_{x \in \mathbb{R}} v(x) < \infty$ ,

$$\int_{-\infty}^{\infty} w dx \geq M_{\alpha}^{(\theta)}(a, b) M_1^{(\theta)}\left(\frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} u dx, \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{\infty} v dx\right)$$

O resultado também vale para  $a = +\infty$  ou  $b = +\infty$  tomando-se a convenção  $0 \cdot \infty = 0$ .

**Demonstração:** Assumamos primeiro que  $-\infty < \alpha < +\infty$ . Definimos, para  $\rho = M_{\alpha}^{(\theta)}(a, b)$ , as funções

$$U(x) = \frac{1}{a} u\left(\frac{a^{\alpha} x}{\rho^{\alpha}}\right) \quad \text{e} \quad V(y) = \frac{1}{b} v\left(\frac{b^{\alpha} y}{\rho^{\alpha}}\right).$$

Tomemos, então,  $\eta = \frac{\theta a^{\alpha}}{\rho^{\alpha}}$ . Como  $\rho^{\alpha} = \theta a^{\alpha} + (1 - \theta)b^{\alpha} \geq \theta a^{\alpha}$ , temos que  $\eta \in [0, 1]$  e ainda, pela hipótese

$$\begin{aligned} w(\eta x + (1 - \eta)y) &= w\left(\theta \frac{a^{\alpha} x}{\rho^{\alpha}} + (1 - \theta) \frac{b^{\alpha} y}{\rho^{\alpha}}\right) \\ &\geq M_{\alpha}^{(\theta)}\left(u\left(\frac{a^{\alpha} x}{\rho^{\alpha}}\right), v\left(\frac{b^{\alpha} y}{\rho^{\alpha}}\right)\right) \\ &= M_{\alpha}^{(\theta)}(aU(x), bV(y)). \end{aligned}$$

Se substituirmos  $U(x)$  e  $V(y)$  pelo mínimo destas duas funções, temos que

$$M_{\alpha}^{(\theta)}(aU(x), bV(y)) \geq M_{\alpha}^{(\theta)}(a, b) \min(U(x), V(x))$$

pela homogeneidade da média. E assim  $w(\eta x + (1 - \eta)y) \geq M_\alpha^{(\theta)}(a, b) \min(U(x), V(y))$  para todo  $x, y \in \mathbb{R}$ .

Como  $\sup_{x \in \mathbb{R}} U(x) = \sup_{x \in \mathbb{R}} V(x) = 1$ , pela Proposição 2.2 vale que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} w dx &\geq M_\alpha^{(\theta)}(a, b) \left[ \eta \int_{-\infty}^{\infty} U dx + (1 - \eta) \int_{-\infty}^{\infty} V dx \right] \\ &= M_\alpha^{(\theta)}(a, b) \left( \frac{\theta a^\alpha}{\rho^\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{a} u \left( \frac{a^\alpha x}{\rho^\alpha} \right) dx + \frac{(1 - \theta) b^\alpha}{\rho^\alpha} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{b} v \left( \frac{b^\alpha x}{\rho^\alpha} \right) dx \right) \\ &= M_\alpha^{(\theta)}(a, b) \left( \frac{\theta}{a} \int_{-\infty}^{\infty} u dx + \frac{(1 - \theta)}{b} \int_{-\infty}^{\infty} v dx \right) \\ &= M_\alpha^{(\theta)}(a, b) M_1^{(\theta)} \left( \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} u dx, \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{\infty} v dx \right), \end{aligned}$$

o que conclui o resultado.  $\square$

Da desigualdade de Hölder (2.8), este corolário leva ao Teorema de Prékopa-Leindler clássico que é

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} w dx &\geq M_\alpha^{(\theta)}(a, b) M_1^{(\theta)} \left( \frac{1}{a} \int_{-\infty}^{\infty} u dx, \frac{1}{b} \int_{-\infty}^{\infty} v dx \right) \\ &\geq M_\beta^{(\theta)} \left( \int_{-\infty}^{\infty} u dx, \int_{-\infty}^{\infty} v dx \right), \end{aligned}$$

em que  $\beta = \frac{\alpha}{1 + \alpha}$  e  $-1 < \alpha < +\infty$ .

Este teorema é facilmente estendido para  $\mathbb{R}^n$  por indução sobre a dimensão  $n$ . Para tanto, consideremos  $-\frac{1}{n} < \alpha < +\infty$ ,  $\theta \in [0, 1]$  e funções  $u, v, w$  mensuráveis não-negativas definidas em  $\mathbb{R}^n$  tais que

$$w(\theta x + (1 - \theta)y) \geq M_\alpha^{(\theta)}(u(x), v(y))$$

para todo  $x, y \in \mathbb{R}^n$ , então queremos mostrar que

$$\int_{\mathbb{R}^n} w dx \geq M_\beta^{(\theta)} \left( \int_{\mathbb{R}^n} u dx, \int_{\mathbb{R}^n} v dx \right)$$

com  $\beta = \frac{\alpha}{1 + \alpha n}$ . Suponhamos que o resultado vale em dimensão  $n - 1$  para valores reais  $x_1, y_1, z_1 = \theta x_1 + (1 - \theta)y_1$  fixados. Temos então que

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} w(z_1, t) dt \geq M_{\tilde{\alpha}}^{(\theta)} \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} u(x_1, t) dt, \int_{\mathbb{R}^{n-1}} v(y_1, t) dt \right)$$

com  $\tilde{\alpha} = \frac{\alpha}{1 + \alpha(n-1)}$ . Vamos definir  $\tilde{u}(x) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} u(x, t) dt$ ,  $\tilde{v}(y) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} v(y, t) dt$  e  $\tilde{w}(z) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} w(z, t) dt$ . Deste modo  $\tilde{u}$ ,  $\tilde{v}$  e  $\tilde{w}$  são funções definidas de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}_+$  e



têm a propriedade  $\tilde{w}(z_1) \geq M_{\tilde{\alpha}}^{(\theta)}(\tilde{u}(x_1), \tilde{v}(y_1))$ . Além do mais, como  $\alpha \geq -1/n$ , então  $\tilde{\alpha} \geq -1$  e podemos aplicar o Teorema de Prékopa-Leindler unidimensional para obter

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{w} dx \geq M_{\beta}^{(\theta)} \left( \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u} dx, \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{v} dx \right) \quad \text{com} \quad \beta = \frac{\tilde{\alpha}}{1 + \tilde{\alpha}} = \frac{\alpha}{1 + \alpha},$$

que é o resultado procurado.

O resultado acima é uma forma generalizada do Teorema de Prékopa-Leindler. De fato, este é um caso particular daquele quando tomamos  $\alpha = 0$ . Uma consequência deste teorema é a extensão do Corolário 2.1 para dimensão  $n$ . Para mostrar isto, definamos, para uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  e para  $i = 1, \dots, n$  o número

$$m_i(f) := \sup_{x_i \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x) dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n.$$

**Corolário 2.2** *Sejam  $-\frac{1}{n-1} < \alpha < +\infty$ ,  $\theta \in [0, 1]$   $u, v$  e  $w$  funções mensuráveis não-negativas definidas em  $\mathbb{R}^n$  tais que, para todo  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,*

$$w(\theta x + (1 - \theta)y) \geq M_{\alpha}^{(\theta)}(u(x), v(y)).$$

*Se para algum  $i = 1, \dots, n$ ,  $m_i(u) = m_i(v) < \infty$ , então*

$$\int_{\mathbb{R}^n} w dx \geq \theta \int_{\mathbb{R}^n} u dx + (1 - \theta) \int_{\mathbb{R}^n} v dx.$$

**Demonstração:** Vamos aplicar o teorema de Prékopa-Leindler generalizado em  $\mathbb{R}^{n-1}$  para as funções  $u, v, w$  com  $x_i^0, y_i^0, z_i^0 = \theta x_i^0 + (1 - \theta)y_i^0 \in \mathbb{R}$  fixados. Isto é possível, já que  $-\frac{1}{n-1} < \alpha < +\infty$ . Vamos definir  $x_0 \in \mathbb{R}^n$  como sendo um vetor cuja  $i$ -ésima coordenada é o número real  $x_i^0$  e da mesma forma definimos vetores  $y_0$  e  $z_0$  e temos

$$w(z_0) \geq M_{\alpha}^{(\theta)}(u(x_0), v(y_0)).$$

Aplicando o teorema encontramos

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} w(z_0) dS \geq M_{\beta}^{(\theta)} \left( \int_{\mathbb{R}^{n-1}} u(x_0) dS, \int_{\mathbb{R}^{n-1}} v(y_0) dS \right)$$

com  $\beta = \frac{\alpha}{1 + \alpha(n-1)}$  e  $dS = dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n$ . Definimos, portanto, a função  $\tilde{u}(x_i) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} u(x) dS$  e, da mesma forma,  $\tilde{v}(y_i)$  e  $\tilde{w}(z_i)$  e temos

$$\tilde{w}(z_i^0) \geq M_{\beta}^{(\theta)}(u(x_i^0), v(y_i^0)) \geq \min(u(x_i^0), v(y_i^0))$$

para todos  $x_i^0, y_i^0, z_i^0 \in \mathbb{R}$  fixados. Isto e o fato de  $\sup \tilde{u}$  ser igual ao  $\sup \tilde{v}$  satisfazem às hipóteses da proposição 2.2, que nos dá

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{w} dx_i \geq \theta \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{u} dx_i + (1 - \theta) \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{v} dx_i,$$

que é equivalente ao resultado desejado.  $\square$

De modo análogo à prova do Corolário 2.1, a forma completa do Corolário 2.2 diz que, para todo  $i = 1, \dots, n$ , tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^n} w dx \geq M_{\beta}^{(\theta)}(m_i(u), m_i(v)) M_1^{(\theta)} \left( \frac{1}{m_i(u)} \int_{\mathbb{R}^n} u dx, \frac{1}{m_i(v)} \int_{\mathbb{R}^n} v dx \right)$$

com  $\beta = \frac{\alpha}{1+\alpha(n-1)}$ . Este Corolário será um passo fundamental no capítulo seguinte.

## 2.3 Equação de Hamilton-Jacobi

As equações de Hamilton-Jacobi são importantes no estudo do cálculo variacional e aparecem a partir de um problema de minimização. Podemos encontrar uma solução  $u$  desta equação, chamada função valor. Esta solução é outra ferramenta que usaremos no próximo capítulo. Para chegarmos a esta equação, vamos introduzir o problema de cálculo variacional mencionado acima.

Dado  $0 < T \leq +\infty$ , seja  $Q_T = (0, T) \times \mathbb{R}^n$  e suponhamos que sejam dadas as funções contínuas

$$L : \overline{Q}_T \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R} \quad \text{e} \quad u_0 : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}.$$

A função  $L$  é chamada custo corrente ou Lagrangiano e a função  $u_0$  é chamada custo inicial. Considere que ambas são limitadas inferiormente. Para cada  $(t, x) \in \overline{Q}_T$ , definimos o conjunto de caminhos admissíveis

$$\mathcal{A}(t, x) = \{y \in W^{1,1}([0, t], \mathbb{R}^n); y(t) = x\},$$

em que  $W^{1,1}$  denota o espaço das funções integráveis com derivadas parciais também integráveis, e o funcional custo  $J_t$  dado por

$$J_t[y] = \int_0^t L(s, y(s), y'(s)) ds + u_0(y(0)).$$

O problema que consideraremos é o de minimizar  $J_t[y]$  sobre todos os caminhos  $y \in \mathcal{A}(t, x)$ . Problemas deste tipo são clássicos no estudo do cálculo variacional. O primeiro

passo é introduzir a *função valor*  $u : \overline{Q}_T \rightarrow \mathbb{R}$  do problema de minimização definida por

$$u(t, x) = \inf_{y \in \mathcal{A}(t, x)} J_t[y].$$

Observe que, como  $L$  e  $u_0$  são limitadas inferiormente,  $u$  é finita em todo ponto  $(t, x)$ . Além disso,

$$u(0, x) = \inf_{y \in \mathcal{A}(0, x)} u_0(y(0)) = u_0(x).$$

O objetivo desta seção é mostrar que nestas condições  $u$  tem uma caracterização alternativa como solução de uma determinada EDP a qual chamamos de *Equação de Hamilton-Jacobi*. Podemos verificar ainda que  $u$  admite uma fórmula simples. Esta discussão pode ser encontrada em [6].

O resultado adiante é chamado *princípio de otimização de Bellman* ou *princípio de programação dinâmica* e é o ponto de partida no estudo das propriedades de  $u$ .

**Proposição 2.3** *Seja  $(t, x) \in \overline{Q}_T$ . Então, para todo  $t_0 \in [0, t]$ ,*

$$u(t, x) = \inf_{y \in \mathcal{A}(t, x)} \left\{ \int_{t_0}^t L(s, y(s), y'(s)) ds + u(t_0, y(t_0)) \right\}. \quad (2.9)$$

**Demonstração:** Tomemos  $y \in \mathcal{A}(t, x)$  particular. Vamos mostrar primeiro que

$$u(t, x) \leq \int_{t_0}^t L(s, y, y') ds + u(t_0, y(t_0)). \quad (2.10)$$

Para  $t_0$  fixo, seja  $z \in W^{1,1}([0, t_0], \mathbb{R}^n)$  tal que  $z(t_0) = y(t_0)$ . Defina a função  $\xi : [0, t] \rightarrow \mathbb{R}^n$  por

$$\xi(s) = \begin{cases} z(s), & s \in [0, t_0] \\ y(s), & s \in [t_0, t] \end{cases}$$

Temos que  $\xi \in \mathcal{A}(t, x)$ , já que  $\xi(t) = y(t) = x$ . Deste modo,

$$\begin{aligned} u(t, x) &= \inf_y J_t[y] \\ &\leq J_t[\xi] = \int_{t_0}^t L(s, y, y') ds + \int_0^{t_0} L(s, z, z') ds + u_0(z(0)). \end{aligned}$$

Tomando o ínfimo sobre  $z \in \mathcal{A}(t_0, y(t_0))$  temos que

$$\inf_{z \in \mathcal{A}(t_0, y(t_0))} \left\{ \int_0^{t_0} L(s, z, z') ds + u_0(z(0)) \right\} = u(t_0, y(t_0)).$$

Assim,

$$u(t, x) \leq \int_{t_0}^t L(s, y, y') ds + u(t_0, y(t_0)),$$

como queríamos demonstrar. Vamos mostrar agora que  $u(t, x)$  é o ínfimo. Sejam  $\varepsilon > 0$  e  $y \in \mathcal{A}(t, x)$  tais que

$$u(t, x) + \varepsilon \geq \int_0^t L(s, y, y') ds + u_0(y(0)).$$

Tal  $y$  existe pela definição de  $u$ . Assim,

$$\begin{aligned} u(t, x) &\geq \int_{t_0}^t L(s, y, y') ds + \int_0^{t_0} L(s, y, y') ds + u_0(y(0)) - \varepsilon \\ &\geq \int_{t_0}^t L(s, y, y') ds + u(t_0, y(t_0)) - \varepsilon \end{aligned}$$

para valores arbitrários de  $\varepsilon$ . Logo,  $u(t, x)$  é maior que ou igual ao ínfimo em (2.9). A desigualdade contrária já foi obtida em (2.10), logo vale a igualdade.  $\square$

Observe ainda que  $y$  é um minimizante para  $J_t[y]$  se, e somente se,

$$u(t, x) = \int_{t_0}^t L(s, y, y') ds + u(t_0, y(t_0)). \quad (2.11)$$

Se vale a igualdade acima para todo  $t_0 \in [0, t]$ , podemos escolher  $t_0 = 0$  e, desta forma,  $y$  é um minimizante de  $J_t$ . Reciprocamente, se  $y$  é um minimizante, temos, da definição de  $u$  e pela igualdade (2.9), que

$$\int_0^t L(s, y, y') ds + u_0(y(0)) = u(t, x) \leq \int_{t_0}^t L(s, y, y') ds + u(t_0, y(t_0)) \quad (2.12)$$

para todo  $t_0 \in [0, t]$ . Isso implica que

$$\int_0^{t_0} L(s, y, y') ds + \int_{t_0}^t L(s, y, y') ds + u_0(y(0)) \leq \int_{t_0}^t L(s, y, y') ds + u(t_0, y(t_0)).$$

Daí,  $J_{t_0}[y] \leq u_0(y(0))$ . Por outro lado, pela definição de  $u$ ,  $J_{t_0}[y] \geq u(t_0, y(t_0))$  e, assim, temos a igualdade em (2.12) e, desta, temos a igualdade (2.11).

Vamos agora mostrar que  $u(t, x)$  admite um fórmula simples. Consideremos, a partir de agora, o caso particular em que  $L(t, x, q) = L(q)$  e  $T = +\infty$ . Assumamos também as seguintes hipóteses:

$$\begin{cases} (i) & L \text{ é convexa} & \text{e} & \lim_{|q| \rightarrow \infty} \frac{L(q)}{|q|} = +\infty \\ (ii) & u_0 \text{ é de Lipschitz.} \end{cases} \quad (2.13)$$

A proposição a seguir garante, nestas condições, que a função valor  $u$  admite uma representação chamada *Fórmula de Hopf*.

**Proposição 2.4** *Considerando as hipóteses (2.13), a função valor  $u$  é tal que*

$$u(t, x) = \inf_{z \in \mathbb{R}^n} \left[ tL \left( \frac{x - z}{t} \right) + u_0(z) \right] \quad (2.14)$$

para todo  $(t, x) \in Q_T$ .

**Demonstração:** Pelas hipóteses (2.13), vemos que o ínfimo é alcançado, já que  $L \left( \frac{x-z}{t} \right) \rightarrow \infty$  quando  $z \rightarrow \infty$  e  $L$  e  $u$  são contínuas e limitadas inferiormente. Denotemos por  $v(t, x)$  o lado direito de (2.14). Para  $(t, x) \in Q_T$  fixo e  $z \in \mathbb{R}^n$  definamos  $y(s) = z + \frac{s}{t}(x - z)$  para  $0 \leq s \leq t$ . Assim,  $y \in \mathcal{A}(t, x)$ , pois  $y(t) = x$ . E ainda,

$$\begin{aligned} u(t, x) \leq J_t[y] &= \int_0^t L(y'(s)) ds + u_0(y(0)) \\ &= \int_0^t L \left( \frac{x - z}{t} \right) ds + u_0(z) = tL \left( \frac{x - z}{t} \right) + u_0(z). \end{aligned}$$

Podemos, então, tomar o ínfimo sobre todos os valores de  $z$ , e obtemos que  $u(t, x) \leq v(t, x)$ . Para provar a desigualdade contrária, tomemos  $\xi \in \mathcal{A}(t, x)$ . Pela desigualdade de Jensen (A.3)

$$L \left( \frac{x - \xi(0)}{t} \right) = L \left( \frac{1}{t} \int_0^t \xi'(s) ds \right) \leq \frac{1}{t} \int_0^t L(\xi'(s)) ds.$$

E ainda,

$$\begin{aligned} v(t, x) &\leq u_0(\xi(0)) + tL \left( \frac{x - \xi(0)}{t} \right) \\ &\leq u_0(\xi(0)) + \int_0^t L(\xi'(s)) ds = J_t[\xi]. \end{aligned}$$

Tomando o ínfimo sobre todas as funções  $\xi \in \mathcal{A}(t, x)$ , temos que  $v(t, x) \leq u(t, x)$ .  $\square$

Usando a fórmula de Hopf recém-obtida, podemos mostrar que a função valor  $u$  é diferenciável em quase todo ponto.

**Proposição 2.5** *Assumindo as hipóteses (2.13), a função valor  $u$  é Lipschitz contínua em  $\overline{Q}_T$ . Precisamente temos que*

$$|u(t_0, x_0) - u(t, x)| \leq L_0|x - x_0| + L_1|t - t_0|$$

em que  $L_0$  é a constante de Lipschitz associada a  $u_0$  e  $L_1 \geq 0$  é uma certa constante apropriada.

**Demonstração:** Da fórmula de Hopf temos que  $u(t, x) \leq tL(0) + u_0(x)$ , o que implica

$$\frac{u(t, x) - u_0(x)}{t} \leq L(0) \quad (2.15)$$

para todo  $(t, x) \in Q_T$  com  $t > 0$ . Tomemos, então,  $(t, x), (t_0, x_0) \in Q_T$  e  $y \in \mathbb{R}^n$  tais que

$$u(t, x) = tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + u_0(y).$$

Então, de (2.15)

$$\begin{aligned} L\left(\frac{x-y}{t}\right) &= \frac{u(t, x) - u_0(y)}{t} \\ &= \frac{u(t, x) - u_0(x)}{t} + \frac{u_0(x) - u_0(y)}{t} \leq L(0) + L_0 \frac{|x-y|}{t} \end{aligned}$$

Como  $L$  é superlinear, podemos encontrar uma constante  $C_1 > 0$  dependendo de  $L_0$  e  $L(0)$  tal que  $L(q) \geq L(0) + L_0|q|$  sempre que  $|q| > C_1$ . Isto nos leva a concluir que  $\left|\frac{x-y}{t}\right| \leq C_1$ . Consideremos agora  $y_0 = x_0 - t_0 \frac{x-y}{t}$ . Daí temos

$$\frac{x-y}{t} = \frac{x_0-y_0}{t_0} \quad \text{e} \quad y_0 - y = x_0 - x + (t-t_0) \frac{x-y}{t}.$$

Da fórmula de Hopf

$$u(t_0, x_0) \leq t_0 L\left(\frac{x_0-y_0}{t_0}\right) + u_0(y_0) = t_0 L\left(\frac{x-y}{t}\right) + u_0(y_0)$$

e assim,

$$\begin{aligned} u(t_0, x_0) - u(t, x) &\leq (t_0 - t)L\left(\frac{x-y}{t}\right) + u_0(y_0) - u_0(y) \\ &\leq |t-t_0| \sup_{|q| \leq C_1} L(q) + L_0|y_0 - y| \\ &\leq |t-t_0| \sup_{|q| \leq C_1} L(q) + L_0|x-x_0| + L_0|t-t_0| \left|\frac{x-y}{t}\right| \\ &\leq \left(L_0 C_1 + \sup_{|q| \leq C_1} L(q)\right) |t-t_0| + L_0|x-x_0| \\ &= L_1|t-t_0| + L_0|x-x_0|. \end{aligned}$$

Se trocarmos de lugar  $(t, x)$  por  $(t_0, x_0)$  ao longo da demonstração, temos que a desigualdade vale também para  $u(t, x) - u(t_0, x_0)$  e a proposição está provada para  $t, t_0 > 0$ .

Se tivermos  $t_0 = 0$ , podemos fazer

$$\begin{aligned}
 |u(t, x) - u(0, x_0)| &= \left| tL\left(\frac{x-y}{t}\right) + u_0(y) - u_0(x_0) \right| \\
 &\leq t \sup_{|q| \leq C_1} L(q) + L_0|y - x_0| \\
 &= t \sup_{|q| \leq C_1} L(q) + L_0(|y - x| + |x - x_0|) \\
 &\leq t \left( t \sup_{|q| \leq C_1} L(q) + L_0C_1 \right) + L_0|x - x_0| \\
 &= L_1t + L_0|x - x_0|
 \end{aligned}$$

□

A partir desta proposição, podemos aplicar o teorema de Rademacher (veja [8]), que nos garante que uma função Lipschitz contínua é diferenciável em quase todo ponto. Portanto  $u$  é diferenciável em q.t.p. em  $Q_T$ .

Considerando este fato, vamos denotar

$$u_t = \frac{\partial u}{\partial t}, \quad \nabla u = \left( \frac{\partial u}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u}{\partial x_n} \right).$$

Agora vamos mostrar que a função valor  $u$  é solução da *Equação de Hamilton-Jacobi*.

**Proposição 2.6** *Suponha que  $u$  seja diferenciável em um ponto  $(t, x) \in Q_T$ . Então*

$$u_t(t, x) + H(\nabla u(t, x)) = 0 \tag{2.16}$$

na qual

$$H(p) = \sup_{q \in \mathbb{R}^n} [\langle p, q \rangle - L(q)]. \tag{2.17}$$

A equação (2.16)-(2.17) é chamada equação de Hamilton-Jacobi do problema de cálculo variacional. Ela também é conhecida como *Equação de Bellman* ou *Equação de Programação Dinâmica*. A função  $H$  é chamada de *Hamiltoniano*. De modo mais geral, dada uma função  $f(p)$  definida em  $\mathbb{R}^n$ , a função  $\bar{f}(p) = \sup_{q \in \mathbb{R}^n} [\langle p, q \rangle - f(q)]$  é chamada *Transformada de Legendre* de  $f$ .

**Demonstração da proposição 2.6:** Seja  $(t, x)$  um ponto em que  $u$  é diferenciável. Dados  $q \in \mathbb{R}^n$ ,  $s > 0$  vamos definir a função  $y(\tau) = x + (\tau - t)q$ . Assim,  $y(t) = x$  e  $y(t + s) = x + sq$ , isto é,  $y \in \mathcal{A}(t, x)$  e  $y \in \mathcal{A}(t + s, x + sq)$ . De (2.9) temos que

$$u(t + s, x + sq) \leq \int_t^{t+s} L(y'(\tau))d\tau + u(t, x).$$

Como  $y'(\tau) = q$ , isso implica que  $\frac{u(t+s, x+sq) - u(t, x)}{s} \leq L(q)$ . Fazendo  $s \rightarrow 0$  temos  $u_t(t, x) + \langle \nabla u(t, x), q \rangle - L(q) \leq 0$ . Já que esta desigualdade vale para valores arbitrários de  $q$ , podemos tomar o sup em  $q$  e temos que

$$u_t(t, x) + \sup_q [\langle \nabla u(t, x), q \rangle - L(q)] = u_t(t, x) + H(\nabla u(t, x)) \leq 0$$

e, assim, temos a desigualdade em um sentido. Para mostrar a desigualdade no sentido contrário, tomemos  $\hat{x} \in \mathbb{R}^n$  tal que  $u(t, x) = tL\left(\frac{x - \hat{x}}{t}\right) + u_0(\hat{x})$ . Este  $\hat{x}$  existe pela fórmula de Hopf. Vamos definir ainda, para  $s \in [0, t)$ ,

$$x_s = \frac{s}{t}x + \left(1 - \frac{s}{t}\right)\hat{x}, \quad \text{que implica} \quad \frac{x - \hat{x}}{t} = \frac{x_s - \hat{x}}{s}.$$

Da fórmula de Hopf, como  $u(s, x_s) \leq sL\left(\frac{x_s - \hat{x}}{s}\right) + u_0(\hat{x})$ , temos

$$\begin{aligned} u(t, x) - u(s, x_s)v &\geq tL\left(\frac{x - \hat{x}}{t}\right) + u_0(\hat{x}) - \left(sL\left(\frac{x_s - \hat{x}}{s}\right) + u_0(\hat{x})\right) \\ &= (t - s)L\left(\frac{x - \hat{x}}{t}\right). \end{aligned}$$

Dividindo por  $t - s$  e fazendo  $s \rightarrow t$  obtemos

$$u_t(t, x) + \left\langle \nabla u(t, x), \frac{x - \hat{x}}{t} \right\rangle - L\left(\frac{x - \hat{x}}{t}\right) \geq 0,$$

e concluímos que

$$u_t(t, x) + H(\nabla u(t, x)) \geq 0$$

finalizando a demonstração. □

Com isso, mostramos que a função valor  $u$  dada pela fórmula de Hopf

$$u(t, x) = \inf_{z \in \mathbb{R}^n} \left[ tL\left(\frac{x - z}{t}\right) + u_0(z) \right]$$

é solução da equação de Hamilton-Jacobi (2.16)-(2.17).



# Capítulo 3

## Demonstração do Resultado

### Principal

Agora que temos em mãos estes resultados, podemos partir para a demonstração das Desigualdades de Sobolev Ótima. No capítulo 1 enunciamos esta desigualdade para a norma Euclidiana em  $\mathbb{R}^n$ . Entretanto, temos até aqui ferramentas suficientes para demonstrarmos o resultado mais geral, no qual utilizamos uma norma arbitrária  $\|\cdot\|$  em  $\mathbb{R}^n$ . Para enunciarmos a desigualdade de Sobolev neste caso precisamos o conceito de norma dual.

Consideremos em  $\mathbb{R}^n$  a desigualdade de Sobolev

$$\|f\|_q \leq C_n(p) \|\nabla f\|_p \quad (3.1)$$

na classe de todas as funções pertencentes ao espaço de Sobolev  $\mathcal{D}^{1,p}$  com  $p$  e  $q$  satisfazendo  $1 < p < n$  e  $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ . O lado direito de (3.1) pode ser visto com relação a uma norma qualquer em  $\mathbb{R}^n$ . Para ser mais exato

$$\|\nabla f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f(x)\|_*^p dx$$

em que  $\|\cdot\|_*$  é a norma dual de  $\|\cdot\|$ , definida por

$$\|x\|_* = \sup_{\|y\| \leq 1} \langle x, y \rangle \quad \text{para } x \in \mathbb{R}^n,$$

na qual  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  é o produto escalar em  $\mathbb{R}^n$ . Em particular, a norma Euclidiana é a sua própria norma dual. Basta ver que

$$|x|_* = \sup_{|y| \leq 1} \langle x, y \rangle = \sup_{|y| \leq 1} |x||y| \cos \theta = |x|,$$

em que  $\theta$  é o ângulo formado pelos vetores  $x$  e  $y$ . Podemos supor ainda, sem perda de generalidade, que a norma  $x \rightarrow \|x\|$  é continuamente diferenciável na região  $x \neq 0$ . Neste caso, o vetor gradiente da norma em  $x$  é definido como o único vetor satisfazendo

$$\|\nabla\|x\|\|_* = 1 \quad \text{e} \quad \langle x, \nabla\|x\|\rangle = \|x\| = \sup_{\|y\|_* \leq 1} \langle x, y \rangle. \quad (3.2)$$

Nosso propósito é mostrar que a melhor constante  $C_n(p)$  em (3.1) corresponde a uma família de funções extremais do tipo

$$f(x) = (\sigma + \|x\|^{p^*})^{\frac{p-n}{p}}, \quad \text{com } x \in \mathbb{R}^n, \quad \sigma > 0$$

e nas quais  $p^*$  é o conjugado de  $p$ , isto é,  $p^*$  é tal que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$ . Com as afirmações acima, todas as funções extremais pertencem à classe  $C^1(\mathbb{R}^n)$ , já que  $\nabla f$  depende somente de  $\nabla\|x\|$ .

### 3.1 Estimativas para Soluções de Hamilton-Jacobi

Vamos construir agora um operador ínfimo a partir da função custo  $L(x) = V^*(x) = \frac{1}{p^*}\|x\|^{p^*}$  de acordo com o processo descrito na seção 2.3 em que a função custo inicial  $u_0$  é alguma  $g : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  contínua. Devemos supor ainda que  $g$  é limitada inferiormente. Deste modo, a função valor  $u(x, t)$  é o operador ínfimo dado pela fórmula de Hopf (2.14) é

$$Q_t g(x) = \inf_{y \in \mathbb{R}^n} \left\{ g(y) + tV^* \left( \frac{x-y}{t} \right) \right\}, \quad t > 0, \quad x \in \mathbb{R}^n, \quad (3.3)$$

com  $Q_0 g = g$ . Temos ainda que a transformada de Legendre de  $V^*$  é dada por  $V(x) = \sup_{y \in \mathbb{R}^n} [\langle x, y \rangle - V^*(y)] = \frac{1}{p}\|x\|_*$  e vice versa. Com isto, denotando  $\rho = \rho(t, x) = Q_t g(x)$ , o operador (3.3) é solução do problema de Hamilton-Jacobi

$$\partial_t \rho + \frac{\|\nabla \rho\|_*^p}{p} = 0, \quad \text{em } \mathbb{R}^n \times (0, +\infty), \quad (3.4)$$

com  $\rho = g$  em  $\mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$ . De fato, ainda falta-nos mostrar que  $Q_0 g(x) = g(x)$  é solução de (3.4) em  $\mathbb{R}^n \times \{t = 0\}$ . É o que mostramos no lema seguinte.

**Lema 3.1** *Seja  $g$  uma função definida em  $\mathbb{R}^n$  limitada inferiormente e diferenciável no ponto  $x \in \mathbb{R}^n$ , então*

$$\partial_t Q_t g \Big|_{t=0} = \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [Q_t g(x) - g(x)] = -V(\nabla g(x)) = -\frac{\|\nabla g(x)\|_*^p}{p}.$$

**Demonstração:** Fixemos  $x \in \mathbb{R}^n$ . Como  $g$  é diferenciável em  $x$ , da expansão de Taylor temos que  $g(x - h) = g(x) - \langle \nabla g(x), h \rangle + |h|\varepsilon(h)$  com  $\varepsilon(h) \rightarrow 0$  quando  $|h| \rightarrow 0$ . Assim, para vetores  $h_t = th$  com  $h \in \mathbb{R}^n$  fixado,

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [g(x - h_t) - g(x)] = -\langle \nabla g(x), h \rangle. \quad (3.5)$$

Pela definição de  $Q_t g$ , quando tomarmos o valor particular  $y = x - h_t$  no conjunto  $A = \{g(y) + tV^*\left(\frac{x-y}{t}\right); y \in \mathbb{R}^n\}$ , vemos que  $Q_t g(x) = \inf A \leq g(x - h_t) + tV^*(h)$ .

Usando isto, temos de (3.5) que

$$\begin{aligned} \limsup_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [Q_t g(x) - g(x)] &\leq \lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [g(x - h_t) - g(x)] + V^*(h) \\ &= -\langle \nabla g(x), h \rangle + V^*(h). \end{aligned}$$

Como o lado esquerdo desta inequação não depende de  $h$ , podemos tomar o ínfimo do lado direito

$$\inf_h \{-\langle \nabla g(x), h \rangle + V^*(h)\} = -\sup_h \{\langle \nabla g(x), h \rangle - V^*(h)\},$$

que nos dá, pela definição da função  $V$ ,

$$\limsup_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} [Q_t g(x) - g(x)] \leq -V(\nabla g(x)).$$

Agora precisamos de uma desigualdade contrária para o  $\liminf$  e assim teremos o resultado desejado, visto que,  $\liminf \leq \lim \leq \limsup$ . Consideramos, então, já que  $g$  é limitado inferiormente, que  $g \geq 0$ . Daí  $Q_t g(x) \leq g(x)$ . De fato, se tomarmos  $y = x$  no conjunto  $A$  temos  $Q_t g(x) \leq g(x)$ . Logo, para todo  $t > 0$ ,

$$Q_t g(x) = \inf_{tV^*(h) \leq g(x)} \{g(x - h_t) + tV^*(h)\}.$$

Aqui somente trocamos a variável  $y$  por  $x - h_t$  e podemos adicionar a condição  $tV^*(h) \leq g(x)$  ao ínfimo, já que, caso contrário, teríamos  $g(x - h_t) + tV^*(h) > g(x) \geq Q_t g(x)$ , pois  $g$  é não-negativa. Assim, usando novamente a expansão de Taylor,

$$\begin{aligned} Q_t g(x) - g(x) &= \inf_{tV^*(h) \leq g(x)} \{g(x - h_t) - g(x) + tV^*(h)\} \\ &= \inf_{tV^*(h) \leq g(x)} \{-t \langle \nabla g(x), h \rangle + t|h|\varepsilon(th) + tV^*(h)\}. \end{aligned}$$

Logo temos que

$$\frac{1}{t} [Q_t g(x) - g(x)] = \inf_{tV^*(h) \leq g(x)} \{-\langle \nabla g(x), h \rangle + |h|\varepsilon(th) + V^*(h)\}, \quad (3.6)$$

com  $\varepsilon(th) \rightarrow 0$  quando  $|th| \rightarrow 0$ . Observemos em primeiro lugar, que o argumento de  $\varepsilon(\cdot)$  pode ser pequeno quanto se queira para  $h$  suficientemente pequeno, então

$$\sup\{t|h|; tV^*(h) \leq g(x)\} \rightarrow 0 \quad \text{quando } t \rightarrow 0$$

Podemos, agora, remover a condição  $tV^*(h) \leq g(x)$  em (3.6) e teremos que, dado  $\eta > 0$ , para todo  $t$  pequeno o suficiente,

$$\frac{1}{t}[Q_t g(x) - g(x)] = \inf_h \{-\langle \nabla g(x), h \rangle - |h|\eta + V^*(h)\} \quad (3.7)$$

Notemos também que podemos restringir este ínfimo para  $|h| \leq r$  para algum  $r$  grande. De fato, o lado esquerdo de (3.7) é não-positivo, mas para o lado direito, se fixarmos  $\eta$ , podemos tomar uma constante  $C$  grande o suficiente para que  $(C - \eta) > |\nabla g(x)||h| \geq \langle \nabla g(x), h \rangle$ , pela desigualdade de Cauchy-Schwarz. Por outro lado, como as normas em  $\mathbb{R}^n$  são equivalentes, se  $|h|$  também for suficientemente grande,  $V^*(h) = \frac{\|h\|^{p^*}}{p^*} \geq C|h|$  e assim,  $V^*(h) > \langle \nabla g(x), h \rangle + \eta|h|$ , o que torna o lado direito de (3.7) positivo. Portanto, restringindo a  $|h| < r$ ,

$$\frac{1}{t}[Q_t g(x) - g(x)] \geq \inf_{|h| \leq r} \{-\langle \nabla g(x), h \rangle + V^*(h)\} - r\eta.$$

Agora, como o lado direito não depende de  $t$ , basta tomar o  $\liminf$  no lado esquerdo e fazer  $\eta \rightarrow 0$  e a demonstração está concluída.  $\square$

O próximo passo é complementar a convergência acima com uma limitação para  $\frac{1}{t}|Q_t g(x) - g(x)|$  em termos de  $\|\nabla g(y)\|_*$  com vetores  $y$  próximos de  $x$ . Deste modo, dada uma função  $g$  de classe  $C^1$  definida em  $\mathbb{R}^n$ , para todo  $x \in \mathbb{R}^n$  e  $r > 0$  defina  $Dg(x, r) := \sup_{\|x-y\| \leq r} \|\nabla g(y)\|_*$ . Como  $y$  se aproxima de  $x$  quando  $r \rightarrow 0$ , segue que  $Dg(x, r) \rightarrow \|\nabla g(x)\|_*$ . A partir dessa definição temos o seguinte resultado.

**Lema 3.2** *Seja  $g$  uma função definida em  $\mathbb{R}^n$ , diferenciável no ponto  $x$  e limitada inferiormente. Considere  $Q_t g(x)$  definida por (3.3), então*

$$\frac{1}{t}[g(x) - Q_t g(x)] \leq \frac{1}{p} Dg(x, r)^p. \quad (3.8)$$

**Demonstração:** Vamos assumir que  $g \geq 0$  e escrever novamente

$$Q_t g(x) = \inf_{h \in \mathbb{R}^n} \left\{ g(x-h) + \frac{\|h\|^{p^*}}{p^* t^{p^*-1}} \right\}, \quad t > 0. \quad (3.9)$$

Mais uma vez, como  $Q_t g(x) \leq g(x)$ , o ínfimo pode ser restrito à bola

$$tV^* \left( \frac{h}{t} \right) \leq \frac{\|h\|^{p^*}}{p^* t^{p^*-1}} \leq g(x).$$

Trocando  $h$  por  $th$  e denotando  $r = (p^* g(x))^{1/p^*}$  temos, de (3.9),

$$\frac{1}{t}[g(x) - Q_t g(x)] = - \inf \left\{ \frac{1}{t}[g(x - th) - g(x)] + \frac{\|h\|^{p^*}}{p^*}; t^{\frac{1}{p^*}} \|h\| \leq r \right\}.$$

Podemos, ainda, tomar o ínfimo em uma bola menor  $t\|h\| \leq r$  e isto faz com que o valor do ínfimo possivelmente seja maior, o que transforma a igualdade acima na desigualdade

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}[g(x) - Q_t g(x)] &\leq - \inf_{t\|h\| \leq r} \left\{ \frac{1}{t}[g(x - th) - g(x)] - \frac{\|h\|^{p^*}}{p^*} \right\} \\ &= \sup_{t\|h\| \leq r} \left\{ \frac{1}{t}[g(x) - g(x - th)] - \frac{\|h\|^{p^*}}{p^*} \right\}. \end{aligned} \quad (3.10)$$

Pela Desigualdade do Valor Médio temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{t} \|g(x - th) - g(x)\| &\leq \frac{1}{t} \sup_{s \in (0,1)} \|\nabla g(x - s(th))\| \|th\| \\ &\leq \|h\| \sup_{\|x-y\| < t\|h\|} \|\nabla g(y)\| \\ &= \|h\| Dg(x, t\|h\|). \end{aligned}$$

Logo, de (3.10) temos que

$$\begin{aligned} \frac{1}{t}[g(x) - Q_t g(x)] &\leq \sup_{t\|h\| \leq r} \left\{ \frac{1}{t} \|g(x - th) - g(x)\| - \frac{\|h\|^{p^*}}{p^*} \right\} \\ &\leq \sup_{t\|h\| \leq r} \left\{ \|h\| Dg(x, t\|h\|) - \frac{\|h\|^{p^*}}{p^*} \right\} \\ &\leq \sup_h \left\{ \|h\| Dg(x, r) - \frac{\|h\|^{p^*}}{p^*} \right\} \\ &= \frac{1}{p} Dg(x, r)^p \end{aligned} \quad (3.11)$$

pela desigualdade de Young (A.2).  $\square$

Para conseguir uma limitação ainda mais precisa, vamos trabalhar com funções

$$g(x) = O(|x|^{p^*}) \quad \text{quando } |x| \rightarrow \infty, \quad (3.12)$$

isto é, queremos que  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|g(x)|}{|x|^{p^*}} < \infty$ . Para tanto, vamos definir a classe  $\mathcal{F}_{p^*}$ ,  $p^* > 1$  de todas as funções  $g \in C^1$  definidas em  $\mathbb{R}^n$  tais que

$$\limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|\nabla g(x)|}{|x|^{p^*-1}} < \infty.$$

Desta definição, podemos concluir o seguinte resultado.

**Lema 3.3** *Seja  $g$  uma função definida em  $\mathbb{R}^n$ , diferenciável no ponto  $x$  e limitada inferiormente. Consideremos  $Q_t g(x)$  definida por (3.3) e suponhamos que  $g \in \mathcal{F}_{p^*}$ . Então*

1.  $\lim_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|g(x)|}{|x|^{p^*}} < \infty$  e
2.  $\sup \frac{1}{t} [g(x) - Q_t g(x)] \leq C(1 + |x|^{p^*})$ .

**Demonstração:** 1. Definamos, para  $x$  fixado, a função real  $\phi(t) = g(tx)$ . Para os valores  $t_1$  e  $t_2$  aplicamos o Teorema do Valor Médio e obtemos

$$\phi'(t_x) = \frac{\phi(t_2) - \phi(t_1)}{t_2 - t_1}$$

para algum  $t_x \in (t_1, t_2)$ . Tomemos, então,  $t_1 = 1/|x|$  e  $t_2 = 1$ . Podemos supor  $1/|x| < 1$ , já que estamos interessados em valores grandes de  $|x|$ . O que nos dá

$$g(x) = g\left(\frac{x}{|x|}\right) + \langle \nabla g(t_x x), x \rangle \cdot \left(1 - \frac{1}{|x|}\right).$$

Dividindo por  $|x|^{p^*}$ ,

$$\frac{g(x)}{|x|^{p^*}} = \frac{g\left(\frac{x}{|x|}\right)}{|x|^{p^*}} + \left\langle \frac{\nabla g(t_x x)}{|x|^{p^*-1}}, \frac{x}{|x|} \right\rangle \cdot \left(1 - \frac{1}{|x|}\right). \quad (3.13)$$

Quando fazemos  $|x| \rightarrow \infty$ , temos que  $g\left(\frac{x}{|x|}\right)/|x|^{p^*} < \infty$ , já que  $g$  é contínua e  $g(x/|x|)$  está definida na esfera  $S^{n-1}$ . Além disso,

$$\frac{\nabla g(t_x x)}{|x|^{p^*-1}} = \frac{t_x^{p^*-1} \nabla g(t_x x)}{|t_x x|^{p^*-1}} < \infty,$$

pois  $g \in \mathcal{F}_{p^*}$  e ainda  $\left|\frac{x}{|x|}\right| = 1$ . Logo, todo o lado direito de (3.13) permanece limitado e portanto  $g(x)/|x|^{p^*}$  é limitado quando  $|x| \rightarrow \infty$ .

2. Agora, se  $g \in \mathcal{F}_{p^*}$ ,  $p^* > 1$ , existe um determinado valor  $K > 0$  tal que  $|\nabla g(x)| \leq C|x|^{p^*-1}$  e ainda  $|g(x)|^{1/p^*} \leq C'|x|$  quando  $|x| > K$  em que  $C$  e  $C'$  são constantes positivas. Ou seja, quando  $|x|$  é grande o suficiente  $g$  e  $\nabla g$  são limitadas por uma função do módulo de  $x$ . Podemos, assim, encontrar uma limitação para  $Dg(x, r)$ . Temos

$$Dg(x, r) = \sup_{\|x-y\| \leq r} \|\nabla g(y)\| \leq \sup_{\|x-y\| \leq C'|x|} C|y|^{p^*-1} \quad \text{em que} \quad r = (p^* g(x))^{1/p^*},$$

para  $|x| > K$ . Quando  $|x| \leq K$ ,  $g$  está definida na bola de centro na origem e raio  $K$ , isto é, num compacto. Assim, considerando o supremo  $\sup \{\|\nabla g(y)\|; \|x - y\| \leq C'K\}$ , temos que  $c|x - y| \leq \|x - y\| \leq C'K$ . Podemos ver que  $|y| < K + C'K/c$ . Como  $g \in C^1$ ,  $\nabla g$  é contínua e, portanto, atinge um valor de máximo na bola de centro na origem e raio  $K + C'K/c$ . Deste modo, existe  $M > 0$  tal que

$$\sup_{\|x-y\| \leq C'K} \|\nabla g(y)\| < M \quad \text{quando} \quad |x| \leq K.$$

Chamando  $S = \sup \{C|y|^{p^*-1}; \|x - y\| \leq C'|x|\}$ , podemos escrever, então,

$$\sup_{\|x-y\| \leq C'|x|} \|\nabla g(y)\| \leq \max(M, S) \leq M + S \quad \forall x \in \mathbb{R}^n.$$

O supremo  $S$ , por sua vez, é atingido quando  $|y| = |x| + C'|x|/c$ . Assim,

$$S = C \left(1 + \frac{C'}{c}\right)^{p^*-1} |x|^{p^*-1} = C''|x|^{p^*-1},$$

e, portanto,

$$Dg(x, r) = \sup_{\|x-y\| \leq C'|x|} \|\nabla g(y)\| \leq M + C''|x|^{p^*-1} \leq M'(1 + |x|^{p^*-1})$$

na qual  $M' = \max(M, C'')$ .

Agora podemos, a partir de (3.11), conseguir uma limitação melhor para  $\frac{1}{t}[g(x) - Q_t g(x)]$  e ainda, como  $Dg(x, r)$  não depende de  $t$  podemos tomar o supremo. Temos, então, que

$$\begin{aligned} \frac{1}{p} Dg(x, r)^p &\leq \frac{M'^p}{p} (1 + |x|^{p^*-1})^p \\ &= \frac{M'^p}{p} (1 + |x|^{p^*-1} + |x|^{2(p^*-1)} + \dots + |x|^{p(p^*-1)}) \\ &\leq \frac{M'^p}{p} (1 + p|x|^{p(p^*-1)}) \\ &\leq M'^p (1 + |x|^{p^*}), \end{aligned}$$

em que  $p = \frac{p^*}{p^* - 1}$ . Isto nos leva a concluir que existe alguma constante  $C$  tal que

$$\sup \frac{1}{t} [g(x) - Q_t g(x)] \leq C(1 + |x|^{p^*}). \quad (3.14)$$

□

Agora podemos aplicar a generalização do Teorema de Prékopa-Leindler dada pelo Corolário 2.2. Dado  $\sigma > 0$  definamos a função

$$v_\sigma(x) = \sigma + \frac{\|x\|^{p^*}}{p^*}, \quad x \in \mathbb{R}^n.$$

Para uma função  $g$  de classe  $C^1$  definida em  $\mathbb{R}^n$  e  $\theta \in (0, 1)$  definamos as três seguintes funções positivas e contínuas

$$\begin{aligned} u(x) &= g(\theta x)^{1-n} \\ v(y) &= v_\sigma(\theta^{1/p^*} y)^{1-n} \\ w(z) &= [(1-\theta)\sigma + \theta Q_{1-\theta}g(z)]^{1-n}. \end{aligned}$$

Queremos aplicar a essas três funções o corolário 2.2 e, para isto,  $u$ ,  $v$  e  $w$  devem satisfazer as duas hipóteses:

- (i)  $w(\theta x + (1-\theta)y) \geq M_\alpha^{(\theta)}(u(x), v(y))$ , com  $\alpha = -\frac{1}{n-1}$  para todos  $x, y \in \mathbb{R}^n$ ,
- (ii)  $m_i(u) = m_i(v) < \infty$  para algum  $i = 1, \dots, n$ ,

em que definimos para uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  o número

$$m_i(f) := \sup_{x_i \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f(x) dx_1 \cdots dx_{i-1} dx_{i+1} \cdots dx_n.$$

Para mostrar (i), como  $\alpha < 0$ , temos que (i) é equivalente a

$$w(\theta x + (1-\theta)y)^\alpha \leq \theta u(x)^\alpha + (1-\theta)v(y)^\alpha.$$

Tomando  $z = \theta x + (1-\theta)y$ , a expressão acima se torna

$$\begin{aligned} (1-\theta)\sigma + \theta Q_{1-\theta}g(z) &\leq \theta g(\theta x) + (1-\theta)v_\sigma(\theta^{1/p^*} y) \\ &= \theta g(\theta x) + (1-\theta)\sigma + (1-\theta)\theta \frac{\|y\|^{p^*}}{p^*}, \end{aligned}$$

que nos dá

$$Q_{1-\theta}g(z) \leq g(\theta x) + (1-\theta) \frac{\|y\|^{p^*}}{p^*}.$$

Usando a definição de  $Q_t g(z)$  dada em (3.9) na página 27, vamos fixar  $z$  como acima,  $t = 1 - \theta > 0$  e tomar  $h = (1 - \theta)y$ . Como  $Q_{1-\theta}g(z)$  é o ínfimo sobre todos os valores de  $h$ , temos

$$\begin{aligned} Q_{1-\theta}g(\theta x + (1-\theta)y) &\leq g(\underbrace{\theta x + (1-\theta)y}_z - \underbrace{(1-\theta)y}_h) + \frac{\|(1-\theta)y\|^{p^*}}{p^*(1-\theta)^{p^*-1}} \\ &= g(\theta x) + (1-\theta) \frac{\|y\|^{p^*}}{p^*} \end{aligned}$$



como queríamos. Portanto (i) está verificado. Para verificarmos (ii), assumamos que

$$m_1(g^{1-n}) = \sup_{x_1 \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(x_1, x_2, \dots, x_n)^{1-n} dx_2 \dots dx_n < \infty.$$

Precisamos ainda que  $m_1(v_1^{1-n}) < \infty$ . Da equivalência das normas em  $\mathbb{R}^n$ , temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^{p^*})^{1-n} dx < \infty. \quad (3.15)$$

Deste modo, como

$$\int_{\mathbb{R}^{n-1}} \left(1 + \frac{\|x\|^{p^*}}{p^*}\right)^{1-n} dx_2 \dots dx_n \leq \frac{1}{p^*} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} (1 + \|x\|^{p^*})^{1-n} dx_2 \dots dx_n < \infty,$$

temos que  $m_1(v_1^{1-n})$  é finito. Podemos verificar agora que  $m_1(u) = \theta^{1-n} m_1(g^{1-n})$ . De fato, fixando a primeira coordenada, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(\theta x)^{1-n} dx_2 \dots dx_n &= \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(\theta x_1, \theta x_2, \dots, \theta x_n)^{1-n} dx_2 \dots dx_n \\ &= \frac{1}{\theta} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(\theta x_1, x_2, \dots, \theta x_n)^{1-n} dx_2 \dots dx_n. \end{aligned}$$

e, assim, para cada coordenada restante, temos uma constante  $1/\theta$ , o que nos dá

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} u dx_2 \dots dx_n &= \frac{1}{\theta^{n-1}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(\theta x_1, x_2, \dots, x_n)^{1-n} dx_2 \dots dx_n \\ &= \theta^{1-n} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(\theta x_1, x_2, \dots, x_n)^{1-n} dx_2 \dots dx_n. \end{aligned}$$

Portanto, como o supremo em  $m_1(u)$  é tomado sobre todos os valores reais de  $x_1$ , temos

$$\sup_{x_1 \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g(\theta x)^{1-n} dx_2 \dots dx_n = \theta^{1-n} \sup_{x_1 \in \mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}^{n-1}} g^{1-n} dx_2 \dots dx_n.$$

De modo semelhante vamos mostrar que

$$m_1(v) = \theta^{\frac{1-n}{p^*}} \sigma^{\frac{1-n}{p}} m_1(v_1^{1-n}).$$

Pela homogeneidade da integral, temos que  $m_1(v) = \theta^{\frac{1-n}{p^*}} m_1(v_\sigma^{1-n})$ , entretanto podemos fazer a seguinte mudança

$$v_\sigma(y) = \sigma \left(1 + \frac{\|y\|^{p^*}}{\sigma p^*}\right) = \sigma \left(1 + \frac{\|\sigma^{-\frac{1}{p^*}} y\|^{p^*}}{p^*}\right) = \sigma v_1(\sigma^{-\frac{1}{p^*}} y).$$

Novamente pela homogeneidade temos

$$\begin{aligned} m_1(v) &= \theta^{\frac{1-n}{p^*}} \sigma^{1-n} m_1 \left( v_1 \left( \sigma^{-\frac{1}{p^*}} y \right)^{1-n} \right) \\ &= \theta^{\frac{1-n}{p^*}} \sigma^{1-n} \sigma^{\frac{n-1}{p^*}} m_1(v_1^{1-n}) = \theta^{\frac{1-n}{p^*}} \sigma^{\frac{1-n}{p}} m_1(v_1^{1-n}), \end{aligned}$$

lembrando que  $p = \frac{p^*}{p^*-1}$ . Agora basta escolhermos  $\sigma$ , de modo a termos  $m_1(u) = m_1(v)$ . Façamos, então,

$$\sigma = k\theta, \quad \text{com} \quad k = k(n, g) = \left( \frac{m_1(v_1^{1-n})}{m_1(g^{1-n})} \right)^{p/(n-1)}.$$

O valor  $k$  está bem definido, já que  $m_1(g^{1-n})$  e  $m_1(v_1^{1-n})$  são finitos e então  $0 < k < \infty$ . Assim,

$$\begin{aligned} m_1(v) &= \theta^{\frac{1-n}{p^*}} \sigma^{\frac{1-n}{p}} m_1(v_1^{1-n}) = \theta^{\frac{1-n}{p^*}} \left( \frac{m_1(v_1^{1-n})}{m_1(g^{1-n})} \right)^{-1} \theta^{\frac{1-n}{p}} m_1(v_1^{1-n}) \\ &= \theta^{1-n} m_1(g^{1-n}) \\ &= m_1(u). \end{aligned}$$

Assim, temos que as funções  $u$ ,  $v$  e  $w$  satisfazem as hipóteses (i) e (ii), e podemos aplicar o corolário 2.2 com  $\alpha = -\frac{1}{n-1}$  para obtermos  $\int_{\mathbb{R}^n} w dx \geq \theta \int_{\mathbb{R}^n} u dx + (1-\theta) \int_{\mathbb{R}^n} v dx$ , que é

$$\int_{\mathbb{R}^n} [(1-\theta)\sigma + \theta Q_{1-\theta}g(x)]^{1-n} dx \geq \theta \int_{\mathbb{R}^n} g(\theta x)^{1-n} dx + (1-\theta) \int_{\mathbb{R}^n} v_\sigma(\theta^{\frac{1}{p^*}}x)^{1-n} dx.$$

A última integral nesta equação pode ser modificada da seguinte forma

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} v_\sigma(\theta^{\frac{1}{p^*}}x)^{1-n} dx &= \theta^{-\frac{n}{p^*}} \sigma^{1-n} \int_{\mathbb{R}^n} v_1(\sigma^{-\frac{1}{p^*}}x)^{1-n} dx \\ &= \theta^{-\frac{n}{p^*}} \sigma^{1-n} \sigma^{\frac{n}{p^*}} \int_{\mathbb{R}^n} v_1^{1-n} dx \\ &= \theta^{-\frac{n}{p^*}} \sigma^{\frac{p-n}{p}} \int_{\mathbb{R}^n} v_1^{1-n} dx \\ &= \theta^{1-n} k^{\frac{p-n}{p}} \int_{\mathbb{R}^n} v_1^{1-n} dx. \end{aligned}$$

Substituindo  $\sigma = k\theta$ ,

$$\theta^{1-n} \int_{\mathbb{R}^n} [(1-\theta)k + Q_{1-\theta}g(x)]^{1-n} dx \geq \theta^{1-n} \int_{\mathbb{R}^n} g^{1-n} dx + \theta^{1-n} k^{\frac{p-n}{p}} (1-\theta) \int_{\mathbb{R}^n} v_1^{1-n} dx.$$

Podemos agora dividir tudo por  $\theta^{1-n}$  e substituir  $s = 1-\theta$  para obter

$$\int_{\mathbb{R}^n} (ks + Q_s g)^{1-n} dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} g^{1-n} dx + s k^{\frac{p-n}{p}} \int_{\mathbb{R}^n} v_1^{1-n} dx. \quad (3.16)$$

A inequação (3.16) é válida para todo  $0 < s < 1$  e, formalmente, temos igualdade quando  $s = 0$ . O próximo passo é comparar as derivadas com relação a  $s$  de ambos os lados neste ponto. Para fazer isso, vamos utilizar os dois resultados abaixo.

**Lema 3.4** *Assumamos que  $g \in \mathcal{F}_{p^*}$  e satisfaz*

$$g(x) \geq c(1 + \|x\|^{p^*}) \quad (3.17)$$

para alguma constante  $c > 0$ , então a primeira e a segunda integrais em (3.16) são finitas e uniformemente limitadas com relação a  $s \in (0, 1)$ .

**Demonstração:** Observemos, em primeiro lugar, que  $Q_s g(x) \geq c'(1 + \|x\|^{p^*})$  para valores de  $s$  pequenos o bastante graças a (3.17). De fato, de (3.14), pela equivalência das normas, temos

$$\frac{1}{s}[g(x) - Q_s g(x)] \leq C(1 + \|x\|^{p^*}) \leq C'(1 + \|x\|^{p^*}).$$

Assim,

$$\begin{aligned} Q_s g(x) &\geq g(x) - sC'(1 + \|x\|^{p^*}) \\ &\geq c(1 + \|x\|^{p^*}) - sC'(1 + \|x\|^{p^*}) \\ &= (c - sC')(1 + \|x\|^{p^*}). \end{aligned}$$

Existe, então, um valor  $\delta > 0$ , possivelmente menor do que 1 tal que  $c - sC' > 0$  quando  $0 < s < \delta$ . Daí

$$Q_s g(x) \geq (c - \delta C')(1 + \|x\|^{p^*}) = c'(1 + \|x\|^{p^*}) \quad \forall s \in (0, \delta), \quad (3.18)$$

em que  $c' > 0$  independe do valor de  $s$  no intervalo  $(0, \delta)$ . Assim, temos de (3.17)

$$\int_{\mathbb{R}^n} g^{1-n} dx \leq c^{1-n} \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^{p^*})^{1-n} dx$$

que é finito graças a (3.15). Em particular,  $m_1(g^{1-n}) < \infty$ . Do mesmo modo, de (3.18),

$$\int_{\mathbb{R}^n} (ks + Q_s g)^{1-n} dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} [ks + c'(1 + \|x\|^{p^*})]^{1-n} dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} c''(1 + \|x\|^{p^*})^{1-n} dx,$$

que também é finito por (3.15). E, assim, temos a limitação que desejávamos.  $\square$

Com este resultado, podemos reescrever (3.16) como

$$k \frac{p-n}{p} \int_{\mathbb{R}^n} v_1^{1-n} dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{s} [(ks + Q_s g)^{1-n} - g^{1-n}] dx. \quad (3.19)$$

Queremos mostrar, agora, que o integrando do lado direito de (3.19) é limitado por uma função com integral finita. Assim, quando calcularmos o limite  $\lim_{s \rightarrow 0}$ , poderemos usar o Teorema da Convergência Dominada. Para isto, vamos usar a seguinte desigualdade usual:

**Lema 3.5** *Dados  $a, b > 0$ , temos que*

$$|a^{1-n} + b^{1-n}| \leq (n-1)|a-b|(a^{-n} + b^{-n}). \quad (3.20)$$

**Demonstração:** Para ver que esta desigualdade é verdadeira, vamos passar a uma única variável  $t$ , dividindo por  $b^{1-n}$ , para obter

$$\left| \left( \frac{a}{b} \right)^{1-n} - 1 \right| \leq (n-1) \left| \frac{a}{b} - 1 \right| \left( \left( \frac{a}{b} \right)^{-n} + 1 \right)$$

e então chamamos  $t = \frac{a}{b}$  e temos

$$|t^{1-n} - 1| \leq (n-1)|t-1|(t^{-n} + 1),$$

que é equivalente à inequação (3.20). Definindo a função  $\varphi(t) = t^{1-n}$  e podemos supor, sem perda de generalidade, que  $t > 1$  e assim, pelo Teorema do Valor Médio, existe  $1 < \xi < t$  tal que  $|\varphi(t) - \varphi(1)| = |\varphi'(\xi)|(t-1)$ . Daí

$$\begin{aligned} |t^{1-n} - 1| &= (t-1)|(1-n)\xi^{-n}| \\ &= (n-1)(t-1)\xi^{-n} \leq (n-1)(t-1)(t^{-n} + 1) \end{aligned}$$

como queríamos. □

Agora, aplicando (3.20), temos o seguinte corolário.

**Corolário 3.1** *Seja  $g \in \mathcal{F}_{p^*}$  satisfazendo (3.17), então*

$$\frac{1}{s}[(ks + Q_s g)^{1-n} - g^{1-n}] \leq C''(1 + \|x\|^{p^*})^{1-n},$$

para alguma constante  $C'' > 0$ .

**Demonstração:** Aplicando (3.20) ao integrando do lado direito de (3.19), temos

$$\begin{aligned} \frac{1}{s}[(ks + Q_s g)^{1-n} - g^{1-n}] &\leq \frac{1}{s}(n-1)|ks + Q_s g - g|[(ks + Q_s g)^{-n} + g^{-n}] \\ &\leq (n-1) \left| k + \frac{1}{s}(Q_s g - g) \right| [(ks + Q_s g)^{-n} + g^{-n}]. \end{aligned}$$

Por (3.14),

$$\begin{aligned} \left| k + \frac{1}{s}(Q_s g - g) \right| &\leq k + \left| \frac{1}{s}(Q_s g - g) \right| \\ &= k + \frac{1}{s}(g - Q_s g) \\ &\leq k + C(1 + |x|^{p^*}) \\ &\leq C'(1 + \|x\|^{p^*}), \end{aligned}$$

lembrando que  $k < \infty$  e  $Q_s g < g$ . Além do mais, como existe uma limitação inferior para  $Q_s g$  a partir de (3.18), temos que

$$\begin{aligned} (ks + Q_s g)^{-n} + g^{-n} &\leq (Q_s g)^{-n} + g^{-n} \\ &\leq 2(Q_s g)^{-n} \\ &\leq 2c'(1 + \|x\|^{p^*})^{-n}. \end{aligned}$$

Logo

$$\begin{aligned} \frac{1}{s} [(ks + Q_s g)^{1-n} - g^{1-n}] &\leq 2(n-1)C'(1 + \|x\|^{p^*})c'(1 + \|x\|^{p^*})^{-n} \\ &\leq C''(1 + \|x\|^{p^*})^{1-n} \end{aligned}$$

para alguma constante  $C'' > 0$ . □

Agora que temos uma limitação para o integrando do lado direito de (3.19), podemos aplicar o Teorema da Convergência Dominada de Lebesgue. Notemos, primeiro, que  $C''(1 + \|x\|^{p^*})^{1-n}$  tem integral finita satisfazendo às hipóteses do teorema.

Tomando o limite  $\lim_{s \rightarrow 0}$  em (3.19) obtemos

$$\begin{aligned} k^{\frac{p-n}{p}} \int_{\mathbb{R}^n} v_1^{1-n} dx &\leq \lim_{s \rightarrow 0} \int_{\mathbb{R}^n} \frac{1}{s} [(ks + Q_s g)^{1-n} - g^{1-n}] dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \lim_{s \rightarrow 0} \frac{1}{s} [(ks + Q_s g)^{1-n} - g^{1-n}] dx. \end{aligned} \quad (3.21)$$

Observe que o limite em (3.21) é justamente a derivada da função  $\psi(s) = (ks + Q_s g)^{1-n}$  calculada no ponto  $s = 0$ . Derivando temos

$$\psi'(s) = (1-n)(ks + Q_s g)^{-n} (k + \partial_s Q_s g)$$

que em  $s = 0$  é, pelo Lema 3.1 página 25,

$$\begin{aligned} \psi'(0) &= (1-n)g^{-n} \left( k + \partial_s Q_s g \Big|_{s=0} \right) \\ &= (1-n)g^{-n} \left( k - \frac{\|\nabla g\|_*^p}{p} \right). \end{aligned}$$

Portanto (3.21) se torna

$$k^{\frac{p-n}{p}} \int_{\mathbb{R}^n} v_1^{1-n} dx \leq (1-n) \int_{\mathbb{R}^n} g^{-n} \left( k - \frac{\|\nabla g\|_*^p}{p} \right), \quad (3.22)$$

ou equivalentemente

$$\frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^n} g^{-n} \|\nabla g\|_*^p dx \geq k \int_{\mathbb{R}^n} g^{-n} dx + \frac{1}{(n-1)k^{(n-p)/p}} \int_{\mathbb{R}^n} v_1^{1-n} dx. \quad (3.23)$$

A partir desta desigualdade, vamos chegar ao resultado final definindo funções  $g_\varepsilon$  que satisfaçam as hipóteses do lema 3.4. Isto será feito na seção seguinte.

## 3.2 Argumentos Finais

Agora vamos mostrar que a desigualdade de Sobolev vale para  $f$  no espaço das funções de classe  $C^1$  com suporte compacto, que denotamos por  $C_c^1(\mathbb{R}^n)$ .

**Lema 3.6 (Desigualde de Sobolev)** *Sejam  $f \in C_c^1(\mathbb{R}^n)$  não-negativa e  $1 < p < n$ , então existe uma constante  $C = C_n(p)$  tal que*

$$\|f\|_q \leq C_n(p) \|\nabla f\|_p,$$

em que  $q = \frac{np}{n-p}$ .

**Demonstração:** Definamos, para  $\varepsilon > 0$ , a família de funções de classe  $C^1$

$$g_\varepsilon(x) = (f(x) + \varepsilon\varphi(x))^{\frac{p}{p-n}} + \varepsilon(1 + \|x\|^{p^*})$$

na qual  $\varphi(x) = (1 + \|x\|^{p^*})^{\frac{p-n}{p}}$ . Notemos, em primeiro lugar, que as funções  $g_\varepsilon$  satisfazem (3.17) com  $c = \varepsilon$ . Precisamos ver se  $g_\varepsilon \in \mathcal{F}_{p^*}$ . Como  $f$  tem suporte compacto,  $f(x) = 0$  para valores grandes de  $|x|$  e o mesmo acontece com as suas derivadas parciais de primeira ordem. Assim, para  $|x|$  grande o suficiente

$$\begin{aligned} g_\varepsilon(x) &= (\varepsilon\varphi(x))^{\frac{p}{p-n}} + \varepsilon(1 + \|x\|^{p^*}) \\ &= (\varepsilon^{\frac{p}{p-n}} + \varepsilon)(1 + \|x\|^{p^*}) = c_\varepsilon(1 + \|x\|^{p^*}). \end{aligned}$$

Deste modo, usando o fato de que  $\|\nabla\|x\|\|_* = 1$ ,

$$\begin{aligned} \limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{|\nabla g_\varepsilon(x)|}{|x|^{p^*-1}} &= \limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{c_\varepsilon |\nabla(\|x\|^{p^*})|}{|x|^{p^*-1}} \\ &= \limsup_{|x| \rightarrow \infty} \frac{c_\varepsilon p^* \|x\|^{p^*-1} |\nabla\|x\||}{|x|^{p^*-1}} \\ &= \limsup_{|x| \rightarrow \infty} \tilde{c} |\nabla\|x\|| < \infty, \end{aligned}$$

pois  $|\nabla\|x\|| \leq c_0 \|\nabla\|x\|\|_* = c_0$  e chamando  $c_\varepsilon c_0 = \tilde{c}$ . Logo  $g_\varepsilon \in \mathcal{F}_{p^*}$  para todo  $\varepsilon > 0$ .

Com  $g_\varepsilon$  satisfazendo a essas condições, podemos aplicar (3.23) para obter

$$\frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon^{-n} \|\nabla g_\varepsilon\|_*^p dx \geq k \int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon^{-n} dx + \frac{1}{(n-1)k^{(n-p)/p}} \int_{\mathbb{R}^n} v_1^{1-n} dx. \quad (3.24)$$

Observemos que

$$g_\varepsilon^{-n} = [(f + \varepsilon\varphi)^{\frac{p}{p-n}} + \varepsilon(1 + \|x\|^{p^*})]^{-n} \leq (f + \varepsilon\varphi)^{\frac{pn}{n-p}}$$

e ainda, chamando  $q = \frac{pn}{n-p}$ ,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \varphi^q dx = \int_{\mathbb{R}^n} (1 + \|x\|^{p^*})^{-n} dx < \infty,$$

como vimos anteriormente em (3.15). Portanto,  $\int_{\mathbb{R}^n} (f + \varepsilon\varphi)^q dx < \infty$ , já que  $f$  é de classe  $C^1$  com suporte compacto, e  $g_\varepsilon$  é menor que uma função com integral finita para todo  $\varepsilon > 0$ , o que nos permite aplicar outra vez o Teorema da Convergência Dominada. Assim, dado que  $g_\varepsilon \rightarrow f^{\frac{p}{p-n}}$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , temos que  $\int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon^{-n} dx \rightarrow \int_{\mathbb{R}^n} f^q dx$  quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ . Por um argumento similar, vemos ainda que o integrando do lado esquerdo de (3.24) também é limitado por uma função de integral finita, já que  $\|\nabla(\|x\|^{p^*})\|_* = p^*\|x\|^{p^*-1}$ . Calculando o gradiente  $\nabla g_\varepsilon$ , temos

$$\nabla g_\varepsilon = \frac{p}{p-n} (f + \varepsilon\varphi)^{\frac{n}{n-p}} (\nabla f + \varepsilon\nabla\varphi) + \varepsilon p^* \|x\|^{p^*-1} \nabla\|x\|.$$

Daí,

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \nabla g_\varepsilon(x) = \frac{p}{p-n} f(x)^{\frac{n}{n-p}} \nabla f(x).$$

Com isto, quando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , o lado esquerdo de (3.24) se torna

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^n} g_\varepsilon^{-n} \|\nabla g_\varepsilon\|_*^p dx &= \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^n} f^q \left\| \frac{p}{p-n} f^{\frac{n}{p-n}} \nabla f \right\|_*^p dx \\ &= \frac{p^{p-1}}{(n-p)^p} \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\|_*^p dx \end{aligned}$$

E, por fim, de (3.24) concluímos

$$\frac{p^{p-1}}{(n-p)^p} \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\|_*^p dx \geq k \int_{\mathbb{R}^n} f^q dx + \frac{1}{(n-1)k^{(n-p)/p}} \int_{\mathbb{R}^n} v_1^{1-n} dx. \quad (3.25)$$

Observemos que o lado esquerdo não depende de  $k$ , logo podemos tomar o ínfimo para obtermos

$$\frac{p^{p-1}}{(n-p)^p} \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\|_*^p dx \geq \inf_k \left[ k \int_{\mathbb{R}^n} f^q dx + \frac{1}{(n-1)k^{(n-p)/p}} \int_{\mathbb{R}^n} v_1^{1-n} dx \right]. \quad (3.26)$$

Esta é exatamente a desigualdade de Sobolev. Para vermos isto, definamos a função  $\psi(k) = Ak + Bk^{(p-n)/p}$  para  $k > 0$ . No caso acima, os parametros  $A$  e  $B$  são

$$A = \int_{\mathbb{R}^n} f^q dx, \quad B = \frac{1}{n-1} \int_{\mathbb{R}^n} v_1^{1-n} dx,$$

que não dependem de  $k$ . Notemos, em primeiro lugar, que  $\lim_{k \rightarrow 0} \psi(k) = \lim_{k \rightarrow \infty} \psi(k) = \infty$ , já que  $p < n$ . Deste modo, a função  $\psi(k)$  atinge um mínimo absoluto. Vamos encontrar

o valor de  $k$  para o qual este ínfimo é alcançado. A primeira derivada desta função é  $\psi'(k) = A + \frac{p-n}{p} B k^{\frac{-n}{p}}$ . Fazendo  $\psi'(k) = 0$ ,

$$k^{-n/p} = \frac{Ap}{(n-p)B} \quad \Rightarrow \quad k = \left( \frac{Ap}{(n-p)B} \right)^{-p/n} > 0.$$

Portanto,  $\psi$  atinge seu mínimo neste ponto. Logo, o valor mínimo de  $\psi$  é dado por

$$\begin{aligned} \psi \left( \left( \frac{Ap}{(n-p)B} \right)^{-p/n} \right) &= A \left( \frac{Ap}{(n-p)B} \right)^{-p/n} + B \left[ \left( \frac{Ap}{(n-p)B} \right)^{-p/n} \right]^{\frac{p-n}{p}} \\ &= A^{\frac{n-p}{n}} \left[ \left( \frac{(n-p)B}{p} \right)^{-p/n} + B \left( \frac{p}{(n-p)B} \right)^{\frac{n-p}{n}} \right] \\ &= C_0 A^{\frac{n-p}{n}}, \end{aligned}$$

em que  $C_0$  é uma constante positiva dependendo apenas de  $n$  e  $p$ , já que  $B$  é uma constante. Portanto, como  $\frac{n-p}{n} = \frac{p}{q}$ , podemos substituir este resultado em (3.26) e obtemos

$$\frac{p^{p-1}}{(n-p)^p} \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\|_*^p dx \geq C_0 \left( \int_{\mathbb{R}^n} f^q dx \right)^{\frac{p}{q}}.$$

Relembrando que  $\|\nabla f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f\|_*^p dx$ , temos a desigualdade de Sobolev

$$\|f\|_q \leq C_n(p) \|\nabla f\|_p, \quad (3.27)$$

em que  $C_n(p)$  é uma constante positiva dada por

$$C_n(p) = \frac{p^{\frac{p-1}{p}}}{(n-p)C_0^{1/p}} \quad (3.28)$$

com

$$C_0 = \left( \frac{(n-p)B}{p} \right)^{-p/n} + B \left( \frac{p}{(n-p)B} \right)^{\frac{n-p}{n}} \quad \text{e} \quad B = \frac{1}{n-1} \int_{\mathbb{R}^n} v_1^{1-n} dx.$$

□

Podemos estender este resultado para todas as funções  $f \in \mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ . Lembremos que assumimos  $f \in C_c^1$  não-negativa, entretanto, como podemos ver em [8], esta classe de funções é um subconjunto denso de  $\mathcal{D}^{1,p}$ .

Para concluir o argumento, vamos investigar o caso da igualdade para encontrar as funções extremais. Para fazê-lo, vamos retornar ao início do argumento e verificar passo a passo em que momentos a igualdade é verdadeira. Assim podemos mostrar o seguinte lema.



**Lema 3.7** A constante  $C_n(p)$  dada (3.28) é a constante ótima para a desigualdade de Sobolev.

**Demonstração:** Tomemos  $g = v_1$ , e então, pela definição,  $k = k(n, g) = 1$  e  $\sigma = \theta$ . Usando isto, o lado direito de (3.16) se torna automaticamente  $(1 + s) \int v_1^{1-n} dx$ . Para analisarmos o lado esquerdo, vejamos que, de (3.9), temos

$$\begin{aligned} Q_s v_1(x) &= \inf_h \left\{ 1 + \frac{\|x - h\|^{p^*}}{p^*} + \frac{\|h\|^{p^*}}{p^* s^{p^*-1}} \right\} \\ &= 1 + \frac{1}{p^*} \inf_h \left\{ \|x - h\|^{p^*} + \frac{\|h\|^{p^*}}{s^{p^*-1}} \right\}. \end{aligned}$$

Observemos que este ínfimo é atingido quando  $h$  tem a mesma direção de  $x$  e, além disso, como  $\|h\| \leq \|x\|$  (para ver isto basta substituir  $h$  por  $x$  em (3.9)), e assim  $h = \lambda x$ ,  $\lambda \in [0, 1]$ . Deste modo

$$Q_s v_1(x) = 1 + \frac{\|x\|^{p^*}}{p^*} \inf_{\lambda} \left\{ (1 + \lambda)^{p^*} + \frac{\lambda^{p^*}}{s^{p^*-1}} \right\}.$$

Vamos ver que este ínfimo é atingido. Definamos  $\phi(\lambda) = (1 + \lambda)^{p^*} + \frac{\lambda^{p^*}}{s^{p^*-1}}$ . A sua derivada é dada por  $\phi'(\lambda) = p^*(1 + \lambda)^{p^*-1} + \frac{p^* \lambda^{p^*-1}}{s^{p^*-1}}$ . Assim, o ponto  $\lambda = \frac{s}{s+1}$ , é um ponto crítico e, como a derivada segunda é  $\phi''(\lambda) = p^*(p^* - 1) \left[ (1 + \lambda)^{p^*-2} + \frac{\lambda^{p^*-2}}{s^{p^*-1}} \right] > 0$  para todo  $\lambda \in (0, 1)$ ,  $\frac{s}{s+1}$  é um mínimo local. Quando calculamos  $\phi$  neste ponto, temos  $\phi\left(\frac{s}{s+1}\right) = \frac{1}{(s+1)}$ , o que nos dá

$$Q_s v_1(x) = 1 + \frac{\|x\|^{p^*}}{p^*(s+1)^{p^*-1}}.$$

Com isso, usando a mudança de variável, o lado esquerdo de (3.16) se torna

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} (ks + Q_s v_1)^{1-n} dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[ (1 + s) + \frac{\|x\|^{p^*}}{p^*(1 + s)^{p^*-1}} \right]^{1-n} dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \left[ (1 + s) + \frac{(1 + s)\|y\|^{p^*}}{p^*} \right]^{1-n} (1 + s)^n dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} (1 + s) \left[ 1 + \frac{\|y\|^{p^*}}{p^*} \right]^{1-n} dy \\ &= (1 + s) \int_{\mathbb{R}^n} v_1^{1-n} dy. \end{aligned}$$

Assim, para  $g = v_1$  temos igualdade em (3.16) e, seguindo o mesmo caminho, também temos igualdade em (3.23) e (3.25). Para verificarmos a igualdade em (3.26), voltamos à definição  $\psi(k) = Ak + Bk^{(p-n)/p}$  e observamos que  $\psi$  tem um mínimo em  $k = 1$  se, e

somente se,  $\psi'(1) = A + \frac{p-n}{p}B = 0$ , ou seja,  $A = \frac{n-p}{p}B$ . Nessa situação particular em que  $g = v_1$ ,  $f^q = g^{-n} = v_1^{1-n}$ , temos

$$A = \int_{\mathbb{R}^n} v_1^{-n} dx, \quad B = \frac{1}{n-1} \int_{\mathbb{R}^n} v_1^{1-n} dx.$$

Assim o ínfimo em (3.25) é atingido em  $k = 1$  se, e somente se,

$$\int_{\mathbb{R}^n} v_1^{-n} dx = \frac{n-p}{p(n-1)} \int_{\mathbb{R}^n} v_1^{1-n} dx. \quad (3.29)$$

Para vermos isto, vamos aplicar o teorema da divergência à aplicação

$$F(x) = xv_1(x)^{1-n} = x \left(1 + \frac{\|x\|^{p^*}}{p^*}\right)^{1-n}$$

na bola  $B_r = B_r(0)$  de centro na origem e raio  $r$ . Do teorema sabemos que

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} F dx = \int_{\partial\Omega} \langle F, \eta \rangle dS, \quad (3.30)$$

na qual  $\eta$  é o vetor normal unitário a  $\partial\Omega$ . Temos primeiro que o divergente da função  $F$  é dado por

$$\begin{aligned} \operatorname{div} F &= \frac{\partial(x_1 v_1^{1-n})}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial(x_n v_1^{1-n})}{\partial x_n} \\ &= \frac{\partial(v_1^{1-n})}{\partial x_1} x_1 + \dots + \frac{\partial(v_1^{1-n})}{\partial x_n} x_n + n v_1^{1-n} \\ &= \langle \nabla(v_1^{1-n}), x \rangle + n v_1^{1-n}. \end{aligned}$$

Temos ainda que  $\nabla(v_1^{1-n}) = (1-n)v_1^{-n}\nabla v_1 = (1-n)v_1^{-n}\|x\|^{p^*-1}\nabla\|x\|$ . Assim, o lado esquerdo de (3.30) torna-se

$$\begin{aligned} \int_{B_r} \operatorname{div} F dx &= \int_{B_r} (\langle \nabla(v_1^{1-n}), x \rangle + n v_1^{1-n}) dx \\ &= (1-n) \int_{B_r} v_1^{-n} \|x\|^{p^*-1} \langle \nabla\|x\|, x \rangle dx + n \int_{B_r} v_1^{1-n} dx \\ &= (1-n) \int_{B_r} v_1^{-n} \|x\|^{p^*} dx + n \int_{B_r} v_1^{1-n} dx, \end{aligned}$$

já que, de (3.2),  $\langle \nabla\|x\|, x \rangle = \|x\|$ . Do lado direito de (3.30), temos

$$\int_{\partial\Omega} \langle F, \eta \rangle dS = \int_{B_r} \left(1 + \frac{\|x\|^{p^*}}{p^*}\right)^{1-n} \left\langle x, \frac{x}{r} \right\rangle dS.$$

Como estamos considerando a borda de  $B_r$ , temos que  $\langle x, x \rangle = \|x\|^2 = r^2$  e

$$\begin{aligned} \int_{B_r} \left(1 + \frac{\|x\|^{p^*}}{p^*}\right)^{1-n} \left\langle x, \frac{x}{r} \right\rangle dS &= \int_{B_r} \left(1 + \frac{r^{p^*}}{p^*}\right)^{1-n} r dS \\ &= c_n \left(1 + \frac{r^{p^*}}{p^*}\right)^{1-n} r^n \approx c_n r^{p^*(1-n)} r^n, \end{aligned}$$

em que  $c_n > 0$ , para valores grandes de  $r$ . Assim, como  $p^* = \frac{p}{p-1}$  e  $1 < p < n$ , temos  $p^*(1-n) + n = \frac{p-n}{p-1} < 0$ , logo

$$\int_{\partial\Omega} \langle F, \eta \rangle dS \rightarrow 0 \quad \text{quando } r \rightarrow \infty.$$

Se fizermos  $r \rightarrow \infty$  do lado esquerdo também, teremos do teorema da divergência,

$$(1-n) \int_{\mathbb{R}^n} v_1^{-n} \|x\|^{p^*} + n \int_{\mathbb{R}^n} v_1^{1-n} dx = 0,$$

que é equivalente a

$$\int_{\mathbb{R}^n} v_1^{-n} \|x\|^{p^*} = \frac{n}{n-1} \int_{\mathbb{R}^n} v_1^{1-n} dx. \quad (3.31)$$

Desenvolvendo o lado esquerdo de (3.31), temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} v_1^{-n} \|x\|^{p^*} dx &= p^* \int_{\mathbb{R}^n} v_1^{-n} \frac{\|x\|^{p^*}}{p^*} dx \\ &= p^* \int_{\mathbb{R}^n} v_1^{-n} \left( \frac{\|x\|^{p^*}}{p^*} + 1 - 1 \right) dx \\ &= p^* \int_{\mathbb{R}^n} v_1^{-n} (v_1 - 1) dx \\ &= \frac{p}{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} v_1^{1-n} dx - \frac{p}{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} v_1^{-n} dx. \end{aligned}$$

E assim, (3.31) se torna

$$\begin{aligned} \frac{p}{p-1} \int_{\mathbb{R}^n} v_1^{-n} dx &= \left( \frac{p}{p-1} - \frac{n}{n-1} \right) \int_{\mathbb{R}^n} v_1^{1-n} dx \\ &= \frac{n-p}{(p-1)(n-1)} \int_{\mathbb{R}^n} v_1^{1-n} dx, \end{aligned}$$

que é equivalente a (3.29). Deste modo, mostramos que a constante  $C_n(p)$  encontrada em (3.27) é a constante ótima da desigualdade de Sobolev.  $\square$

Portanto, podemos concluir que, na classe de todas as funções  $f$  definidas em  $\mathbb{R}^n$  no espaço de Sobolev  $\mathcal{D}^{1,p}(\mathbb{R}^n)$  e tais que  $0 < \|f\|_q < \infty$ , a razão

$$\frac{\|\nabla f\|_p}{\|f\|_q}, \quad \text{com } 1 < p < n, \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n},$$

é minimizada pelas funções  $f(x) = (\sigma + \|x\|^{p^*})^{(p-n)/p}$  com  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\sigma > 0$ . Aqui  $\frac{1}{p} + \frac{1}{p^*} = 1$  e  $\|\cdot\|$  é uma norma dada em  $\mathbb{R}^n$  e

$$\|\nabla f\|_p^p = \int_{\mathbb{R}^n} \|\nabla f(x)\|_*^p dx$$

em que  $\|\cdot\|_*$  é a norma dual de  $\|\cdot\|$ .

# Apêndice A

## Desigualdades Elementares

Aqui apresentamos algumas desigualdades elementares que tiveram papel importante no decorrer desta dissertação.

### A.1 Desigualdade de Young

Antes de enunciar esta desigualdade, lembremos que uma função  $f$  definida em um conjunto convexo é dita *convexa* se, para todos  $x$  e  $y$  pertencentes ao domínio de  $f$  e para todo  $\theta \in [0, 1]$ , tem-se que

$$f(\theta x + (1 - \theta)y) \leq \theta f(x) + (1 - \theta)f(y).$$

Podemos, então, enunciar a desigualdade de Young. Sejam  $1 < p, q < +\infty$  tais que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Então para todos  $a, b > 0$  tem-se que

$$a \cdot b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}. \quad (\text{A.1})$$

**Demonstração:** Para mostrarmos a desigualdade de Young, notemos que a função  $f(x) = e^x$  é convexa, isto é,  $e^{\theta x + (1-\theta)y} \leq \theta e^x + (1-\theta)e^y$  para todo  $\theta \in [0, 1]$  e para todos  $x, y \in \mathbb{R}$ . Daí temos que

$$\begin{aligned} ab = e^{\ln a + \ln b} &= e^{\frac{1}{p}\ln a^p + \frac{1}{q}\ln b^q} \\ &\leq \frac{1}{p}e^{\ln a^p} + \frac{1}{q}e^{\ln b^q} = \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}, \end{aligned}$$

□como queríamos demonstrar. Além disso podemos encontrar a condição de igualdade. Como  $f(x) = e^x$  é injetiva, temos

que, dados  $x$  e  $y$ ,  $e^{\theta x + (1-\theta)y} = \theta e^x + (1-\theta)e^y$  para todo  $\theta \in [0, 1]$  se, e somente se,  $x = y$ . Na demonstração acima, temos  $x = \ln a^p$  e  $y = \ln b^q$ . Logo, teremos igualdade em (A.1) somente se  $\ln a = \ln b$ , isto é, se  $a^p = b^q$ . Daí sabemos que a igualdade em (A.1) é de fato alcançada. Podemos escrever, então,  $\frac{a^p}{p} \geq ab - \frac{b^q}{q}$  e temos

$$\frac{a^p}{p} = \sup_b \left[ ab - \frac{b^q}{q} \right]. \quad (\text{A.2})$$

Este sup é atingido quando tomamos o valor de  $b = a^{p/q}$  para que a igualdade seja válida.

## A.2 Desigualdade de Jensen

Sejam  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função convexa,  $U \subset \mathbb{R}^m$  um conjunto aberto e  $u : U \rightarrow \mathbb{R}^n$  uma função integrável. Então

$$f \left( \frac{1}{|U|} \int_U u dx \right) \leq \frac{1}{|U|} \int_U f(u) dx, \quad (\text{A.3})$$

em que  $|U| = \lambda(U)$  é a medida de Lebesgue em  $\mathbb{R}^n$  de  $U$ .

**Demonstração:** Como  $f$  é convexa, ela tem um hiperplano suporte, isto é, para cada  $p \in \mathbb{R}^n$  existe  $r = r(p) \in \mathbb{R}^n$  de forma que

$$f(q) \geq f(p) + r(q - p) \quad \text{para todo } q \in \mathbb{R}^n.$$

O Hiperplano suporte é dado exatamente pelo hiperplano tangente à superfície de  $n + 1$  dimensões gerada pelo gráfico de  $f$ . Deste modo, para cada ponto  $(p, f(p))$ , o hiperplano tangente divide o espaço em dois semi-espacos de forma que só um deles contém o gráfico de  $f$ . Tomemos, agora,  $p = \frac{1}{|U|} \int_U u dx$  e  $q = u(x)$ . Assim,

$$f(u(x)) \geq f \left( \frac{1}{|U|} \int_U u dx \right) + r \cdot \left( u(x) - \frac{1}{|U|} \int_U u dx \right).$$

Integrando com relação a  $x$  sobre  $U$  temos

$$\begin{aligned} \int_U f(u) dx &\geq \int_U f \left( \frac{1}{|U|} \int_U u dx \right) dx + r \cdot \left( \int_U u dx - \int_U \frac{1}{|U|} \int_U u dx dx \right) \\ &= |U| f \left( \frac{1}{|U|} \int_U u dx \right) + r \cdot \left( \int_U u dx - \frac{|U|}{|U|} \int_U u dx \right), \end{aligned}$$

e assim

$$\frac{1}{|U|} \int_U f(u) dx \geq f \left( \frac{1}{|U|} \int_U u dx \right)$$

como queríamos demonstrar.  $\square$

### A.3 Desigualdade Aritmético-Geométrica Generalizada

Vamos mostrar agora que a desigualdade (2.8) para as médias

$$M_{\alpha}^{(\theta)}(a, b) = (\theta a^{\alpha} + (1 - \theta)b^{\alpha})^{\frac{1}{\alpha}}$$

do capítulo 3 realmente vale. Para isso, primeiro vejamos alguns tipos de médias que podem ser definidas e a desigualdade aritmético-geométrica clássica. Para mais detalhes sobre médias e provas alternativas para as desigualdades descritas aqui, consulte [12].

Dados os números inteiros positivos  $a_1, a_2, \dots, a_n$  e dado  $r$  real não nulo, podemos definir uma média geral  $\mathcal{M}_r(a_i)$  como

$$\mathcal{M}_r(a_i) = \left( \frac{a_1^r + a_2^r + \dots + a_n^r}{n} \right)^{\frac{1}{r}} = \left( \frac{1}{n} \sum a_i^r \right)^{\frac{1}{r}}, \quad (\text{A.4})$$

em que  $\mathcal{M}_r = 0$  se  $r \leq 0$  e  $a_i = 0$  para algum  $i$ . Omitimos os limites do somatório acima supondo implicitamente que  $\sum = \sum_{i=1}^n$ . Faremos isto no decorrer desta seção, sempre que não houver ambiguidade nesta notação. De (A.4), a média aritmética  $\mathcal{U}(a_i)$  e a média harmônica  $\mathcal{H}(a_i)$  são dados por

$$\mathcal{U}(a_i) = \mathcal{M}_1(a_i) = \frac{1}{n} \sum a_i, \quad \text{e} \quad \mathcal{H}(a_i) = \mathcal{M}_{-1}(a_i) = \left( \frac{1}{n} \sum \frac{1}{a_i} \right)^{-1} = \frac{n}{\sum \frac{1}{a_i}}.$$

Definimos, ainda, a média geométrica  $\mathcal{G}$  como

$$\mathcal{G}(a_i) = \sqrt[n]{a_1 a_2 \dots a_n} = \sqrt[n]{\prod a_i}.$$

Dados  $a_1, a_2, \dots, a_n$  e  $p_1, p_2, \dots, p_n$  todos inteiros positivos e dado  $r$  real não nulo, definimos a média geral ponderada e a média geométrica ponderada dos  $a_i$ 's, com pesos  $p_i$ 's como sendo, respectivamente

$$\mathcal{M}_r(a_i, p_i) = \left( \frac{\sum p_i a_i^r}{\sum p_i} \right)^{\frac{1}{r}} \quad \text{e} \quad \mathcal{G}(a_i, p_i) = \left( \prod a_i^{p_i} \right)^{1/\sum p_i}. \quad (\text{A.5})$$

com  $\mathcal{M}_r = 0$  se  $r < 0$  e  $a_i = 0$  para algum  $i$ . Podemos reescrever as médias (A.5) de maneira equivalente como

$$\mathcal{M}_r(a_i, q_i) = \left( \sum q_i a_i^r \right)^{\frac{1}{r}} \quad \text{e} \quad \mathcal{G}(a_i, q_i) = \prod a_i^{q_i}, \quad (\text{A.6})$$

nas quais a soma dos pesos  $q_i$  é igual a 1. Para vermos isto, basta tomar  $p_i = q_i \sum p_i$  em (A.5), o que nos dá, para a média geral,

$$\begin{aligned} \left( \frac{\sum p_i a_i^r}{\sum p_i} \right)^{\frac{1}{r}} &= \left( \frac{\sum q_i (\sum p_i) a_i^r}{\sum p_i} \right)^{\frac{1}{r}} \\ &= \left( \sum q_i a_i^r \right)^{\frac{1}{r}} = \mathcal{M}_r(a_i, q_i), \end{aligned}$$

com  $\sum q_i = \sum \frac{p_i}{\sum p_i} = 1$ . Para a média geométrica,

$$\left( \prod a_i^{p_i} \right)^{1/\sum p_i} = \left( \prod a_i^{q_i \sum p_i} \right)^{1/\sum p_i} = \prod a_i^{q_i}.$$

Observe que excluímos o caso em que  $r = 0$ , mas podemos, por convenção, interpretar  $\mathcal{M}_0$  como  $\mathcal{G}$ .

O seguinte resultado é a desigualdade aritmético-geométrica clássica.

**Teorema A.1** *Dados os números inteiros positivos  $a_1, a_2, \dots, a_n$  e  $p_1, p_2, \dots, p_n$  tem-se que  $\mathcal{G}(a_i, p_i) \leq \mathcal{U}(a_i, p_i)$ .*

**Demonstração:** Vamos provar para as médias na forma (A.6), ou seja, vamos mostrar que

$$a_1^{q_1} \cdots a_n^{q_n} \leq q_1 a_1 + \cdots + q_n a_n \quad \text{na qual} \quad \sum q_i = 1 \quad (\text{A.7})$$

Observemos, em primeiro lugar que, quando  $n = 2$ , temos a desigualdade de Young (A.1), basta substituir nesta  $a = a_1^{q_1}$ ,  $b = a_2^{q_2}$ ,  $\frac{1}{p} = q_1$  e  $\frac{1}{q} = q_2$  para termos  $a_1^{q_1} a_2^{q_2} \leq q_1 a_1 + q_2 a_2$ . Agora é só fazer a indução em  $n$ . Suponha que (A.7) vale para  $n$ . Para  $n + 1$  temos que

$$a_1^{q_1} \cdots a_n^{q_n} a_{n+1}^{q_{n+1}} = a_1^{q_1} \cdots a_{n-1}^{q_{n-1}} A^{q_n + q_{n+1}} \quad \text{em que} \quad A = \left( a_n^{q_n} a_{n+1}^{q_{n+1}} \right)^{\frac{1}{q_n + q_{n+1}}}.$$

Deste modo conseguimos um produto de  $n$  termos e, pela hipótese de indução,

$$a_1^{q_1} \cdots a_{n-1}^{q_{n-1}} A^{q_n + q_{n+1}} \leq q_1 a_1 + \cdots + (q_n + q_{n+1}) A,$$

mas temos, ainda, da desigualdade de Young que

$$A = a_n^{\frac{q_n}{q_n + q_{n+1}}} a_{n+1}^{\frac{q_{n+1}}{q_n + q_{n+1}}} \leq \frac{q_n a_n + q_{n+1} a_{n+1}}{q_n + q_{n+1}}.$$

Assim, temos

$$a_1^{q_1} \cdots a_n^{q_n} a_{n+1}^{q_{n+1}} \leq q_1 a_1 + \cdots + q_n a_n + q_{n+1} a_{n+1}$$

como queríamos demonstrar.  $\square$

Deste teorema decorre o seguinte resultado, que é conhecido como desigualdade de Hölder.

**Corolário A.1** *Consideremos o conjunto de números inteiros positivos*

$$\{a_{ij}; i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\},$$

então

$$\mathcal{G}(a_{i1}) + \mathcal{G}(a_{i2}) + \cdots + \mathcal{G}(a_{im}) \leq \mathcal{G}(a_{i1} + a_{i2} + \cdots + a_{im}). \quad (\text{A.8})$$

**Demonstração:** Considerando a forma das médias (A.6), o corolário diz que

$$\begin{aligned} a_{11}^{q_1} \cdots a_{n1}^{q_n} + a_{12}^{q_1} \cdots a_{n2}^{q_n} + \cdots + a_{1m}^{q_1} \cdots a_{nm}^{q_n} &\leq \\ &\leq (a_{11} + \cdots + a_{1m})^{q_1} (a_{21} + \cdots + a_{2m})^{q_2} \cdots (a_{n1} + \cdots + a_{nm})^{q_n}. \end{aligned}$$

Vamos reescrevê-lo em notação de somatório como

$$\sum_{j=1}^m a_{1j}^{q_1} \cdots a_{nj}^{q_n} \leq \left( \sum_{j=1}^m a_{1j} \right)^{q_1} \left( \sum_{j=1}^m a_{2j} \right)^{q_2} \cdots \left( \sum_{j=1}^m a_{nj} \right)^{q_n}. \quad (\text{A.9})$$

Esta é uma das formas da desigualdade de Hölder. Vamos usar (A.7). Consideremos aqui que  $\sum = \sum_{j=1}^m$ . Temos então

$$\begin{aligned} \frac{\sum a_{1j}^{q_1} \cdots a_{nj}^{q_n}}{(\sum a_{1j})^{q_1} \cdots (\sum a_{nj})^{q_n}} &= \sum \left( \frac{a_{1j}}{\sum a_{1j}} \right)^{q_1} \cdots \left( \frac{a_{nj}}{\sum a_{nj}} \right)^{q_n} \\ &\leq \sum \left[ q_1 \frac{a_{1j}}{\sum a_{1j}} + \cdots + q_n \frac{a_{nj}}{\sum a_{nj}} \right] \\ &= q_1 \sum \frac{a_{1j}}{\sum a_{1j}} + \cdots + q_n \sum \frac{a_{nj}}{\sum a_{nj}} \\ &= q_1 + \cdots + q_n = 1, \end{aligned}$$

e portanto a desigualdade é verdadeira.  $\square$

Existe uma segunda forma para a desigualdade de Hölder que segue diretamente da primeira. É a seguinte.



**Corolário A.2** Dado o conjunto de números inteiros positivos  $\{a_{ij}; i = 1, \dots, n, j = 1, \dots, m\}$ ,  $r > 0$  e  $q_1, q_2, \dots, q_m$  tais que  $\sum q_i = 1$ , tem-se

$$\mathcal{M}_r(a_{i1}a_{i2} \cdots a_{im}) \leq \mathcal{M}_{r/q_1}(a_{i1})\mathcal{M}_{r/q_2}(a_{i2}) \cdots \mathcal{M}_{r/q_m}(a_{im}). \quad (\text{A.10})$$

**Demonstração:** Para ver esta segunda forma basta substituir os  $a_{ij}$ 's de (A.9) por  $p_i a_{i1}^{r/q_i}$  com  $\sum p_i = 1$ . Assim

$$\sum p_i (a_{i1}a_{i2} \cdots a_{im})^r \leq \left( \sum p_i a_{i1}^{r/q_1} \right)^{q_1} \left( \sum p_i a_{i2}^{r/q_2} \right)^{q_2} \cdots \left( \sum p_i a_{im}^{r/q_m} \right)^{q_m}.$$

Agora basta elevar ambos os lados por  $1/r$  e a desigualdade está demonstrada.  $\square$

Finalmente, de (A.10) decorre imediatamente a desigualdade aritmético-geométrica generalizada (2.8). Na verdade esta é um caso particular daquela quando  $n = m = 2$  que é

$$(p_1(a_{11}a_{12})^r + p_2(a_{21}a_{22})^r)^{\frac{1}{r}} \leq \left( p_1 a_{11}^{\frac{r}{q_1}} + p_2 a_{21}^{\frac{r}{q_1}} \right)^{\frac{q_1}{r}} \left( p_1 a_{12}^{\frac{r}{q_2}} + p_2 a_{22}^{\frac{r}{q_2}} \right)^{\frac{q_2}{r}}.$$

Agora basta chamarmos  $r = \alpha$ ,  $\frac{r}{q_1} = \alpha_1$ ,  $\frac{r}{q_2} = \alpha_2$ ,  $p_1 = \theta$  e  $p_2 = 1 - \theta$ . Chamemos também

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{bmatrix}.$$

Assim

$$(\theta(a_1 a_2)^\alpha + (1 - \theta)(b_1 b_2)^\alpha)^{\frac{1}{\alpha}} \leq (\theta a_1^{\alpha_1} + (1 - \theta)b_1^{\alpha_1})^{\frac{1}{\alpha_1}} (\theta a_2^{\alpha_2} + (1 - \theta)b_2^{\alpha_2})^{\frac{1}{\alpha_2}},$$

que é (2.8). Temos ainda que  $\frac{1}{\alpha_1} + \frac{1}{\alpha_2} = \frac{q_1}{r} + \frac{q_2}{r} = \frac{1}{r} = \frac{1}{\alpha}$  e  $\alpha_1 + \alpha_2 = r \left( \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2} \right) > 0$  como condições necessárias para a desigualdade. Esta é a desigualdade usada no decorrer do capítulo 3.

Existe ainda uma outra formulação mais usual para a desigualdade de Hölder na qual substituímos  $m = 2$ ,  $r = 1$ ,  $a_{i1} = a_i$ ,  $a_{i2} = b_i$ ,  $q_1 = \frac{1}{p}$  e  $q_2 = \frac{1}{q}$  com pesos  $p_i$ 's iguais. Assim, temos

$$\sum a_i b_i \leq \left( \sum a_i^p \right)^{\frac{1}{p}} \left( \sum b_i^q \right)^{\frac{1}{q}}. \quad (\text{A.11})$$

Na seção seguinte, mostramos a desigualdade de Hölder em sua forma integral.

## A.4 Desigualdade de Hölder Integral

Apresentamos agora a forma integral da desigualdade de Hölder que será usada no capítulo 1. Sejam  $1 \leq p, q \leq \infty$  tais que  $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ . Então, se  $u \in L^p(\mathbb{R}^n)$  e  $v \in L^q(\mathbb{R}^n)$ , temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} |uv| dx \leq \|u\|_p \|v\|_q = \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p dx \right)^{1/p} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |v|^q dx \right)^{1/q}. \quad (\text{A.12})$$

**Demonstração:** Vamos supor em primeiro lugar que  $\|u\|_p = \|v\|_q = 1$ . Assim, pela desigualdade de Young (A.1) temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} |uv| dx &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \left( \frac{1}{p} |u|^p + \frac{1}{q} |v|^q \right) dx \\ &= \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^n} |u|^p dx + \frac{1}{q} \int_{\mathbb{R}^n} |v|^q dx = 1 = \|u\|_p \|v\|_q. \end{aligned} \quad (\text{A.13})$$

Assim, temos (A.12) para  $\|u\|_p = \|v\|_q = 1$ . Agora, pela homogeneidade, quando temos  $\|u\|_p = a$  e  $\|v\|_q = b$ , podemos definir as funções  $U = \frac{|u|}{a}$  e  $V = \frac{|v|}{b}$ , que nos dá  $\|U\|_p = \|V\|_q = 1$ . Portanto aplicando (A.13), temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} UV dx = \frac{1}{ab} \int_{\mathbb{R}^n} |u||v| dx \leq 1,$$

como queríamos demonstrar. □

Temos ainda um segunda formulação mais geral para a desigualdade de Hölder. Sejam  $1 \leq p_1, \dots, p_m \leq \infty$  tais que  $\frac{1}{p_1} + \dots + \frac{1}{p_m} = 1$ . Então, se  $u_k \in L^{p_k}(\mathbb{R}^n)$  para  $k = 1, \dots, m$ . Então

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u_1 \cdots u_m| dx \leq \prod_{k=1}^m \|u_k\|_{p_k}. \quad (\text{A.14})$$

**Demonstração:** Basta aplicarmos da mesma forma a generalização da desigualdade de Young dada por (A.7). □

Eis a demonstração da desigualdade de Sobolev que pode ser encontrada em [8]

# Apêndice B

## Demonstração da Desigualdade de Sobolev Clássica

**Teorema B.1 (Desigualdade de Sobolev)** *Sejam  $1 \leq p < n$  e  $q$  tais que  $q = \frac{np}{n-p}$ . Então existe uma constante  $C = C_n(p)$  tal que*

$$\|u\|_q \leq C \|\nabla u\|_p \quad (\text{B.1})$$

para toda função  $u \in C^1(\mathbb{R}^n)$  com suporte compacto.

**Demonstração:** Suponhamos primeiro que  $p = 1$ . Como  $u$  tem suporte compacto, para cada  $i = 1, \dots, n$  e  $x \in \mathbb{R}^n$  temos que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{x_i} u_{x_i}(x_1, \dots, x_{i-1}, y_i, x_{i+1}, \dots, x_n) dy_i &= \\ u(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n) - \lim_{t_i \rightarrow -\infty} u(x_1, \dots, t_i, \dots, x_n) &= u(x) \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} |u(x)| &\leq \int_{-\infty}^{x_i} |u_{x_i}(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)| dy_i \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |u_{x_i}(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)| dy_i \\ &\leq \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)| dy_i. \end{aligned}$$

Daí temos, fazendo o produto das integrais em cada coordenada,

$$|u(x)|^{\frac{n}{n-1}} \leq \prod_{i=1}^n \left( \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u(x_1, \dots, y_i, \dots, x_n)| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Integrando com relação à variável  $x_1$  temos que

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 &\leq \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=1}^n \left( \int_{-\infty}^{\infty} \nabla u dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} \\ &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{i=2}^n \left( \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}} dx_1, \end{aligned}$$

já que  $\left( \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}}$  é uma constante com relação a  $x_1$ . Daí podemos aplicar a desigualdade de Hölder (A.14) para obtermos

$$\int_{-\infty}^{\infty} |u(x)|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 \leq \left( \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dy_1 \right)^{\frac{1}{n-1}} \left( \prod_{i=2}^n \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dx_1 dy_i \right)^{\frac{1}{n-1}}.$$

Vamos integrar novamente, agora com relação a  $x_2$ . Daí,

$$\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 dx_2 \leq \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dx_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \int_{-\infty}^{\infty} \prod_{\substack{i=1 \\ i \neq 2}}^n I_i^{\frac{1}{n-1}} dx_2,$$

com

$$I_1 = \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dy_1, \quad I_i = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dx_1 dy_i, \quad \text{para } i = 3, \dots, n.$$

Notemos mais uma vez que, neste caso,  $\left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dx_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{n-1}}$  não depende de  $x_2$ .

Aplicando novamente a desigualdade de Hölder, temos

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx_1 dx_2 &\leq \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dx_1 dy_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \\ &\quad \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dy_1 dx_2 \right)^{\frac{1}{n-1}} \prod_{i=3}^n J_i^{\frac{1}{n-1}} \\ &= \left( \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dx_1 dx_2 \right)^{\frac{2}{n-1}} \prod_{i=3}^n J_i^{\frac{1}{n-1}}, \end{aligned}$$

em que

$$J_i = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dx_1 dx_2 dy_i.$$

Se prosseguirmos com este processo integrando com respeito a  $x_3, \dots, x_n$  vamos encontrar

$$\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{n}{n-1}} dx \leq \prod_{i=1}^n \left( \int_{-\infty}^{\infty} \dots \int_{-\infty}^{\infty} |\nabla u| dx_1 \dots dy_i \dots dx_n \right)^{\frac{1}{n-1}} = \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u| dx \right)^{\frac{n}{n-1}}, \quad (\text{B.2})$$

que é justamente (B.1) para  $p = 1$ . Consideremos agora o caso em que  $1 < p < n$ . Começamos aplicando (B.2) à função  $v = |u|^\gamma$ , na qual a constante  $\gamma > 1$  será ainda determinada. Assim, pela desigualdade de Hölder novamente,

$$\begin{aligned} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\frac{\gamma n}{n-1}} dx \right)^{\frac{n-1}{n}} &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla (|u|^\gamma)| dx \\ &= \gamma \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{\gamma-1} |\nabla u| dx \\ &\leq \gamma \left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^{(\gamma-1)\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \right)^{\frac{1}{p}}. \end{aligned}$$

Agora basta escolhermos  $\gamma$  de modo que  $\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma-1)\frac{p}{p-1}$ , o que nos dá  $\gamma = \frac{p(n-1)}{n-p} > 1$ . Neste caso,  $\frac{\gamma n}{n-1} = (\gamma-1)\frac{p}{p-1} = \frac{np}{n-p} = q$  e temos portanto, substituindo o valor de  $\gamma$  na desigualdade acima,

$$\left( \int_{\mathbb{R}^n} |u|^q dx \right)^{1/q} \leq \gamma \left( \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p dx \right)^{1/p},$$

que é a desigualdade (B.1). Por densidade concluímos a demonstração para toda  $u \in \mathcal{D}^{1,p}$ . □

# Referências Bibliográficas

- [1] AUBIN, T.: *Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev*, J. Differential Geom. 11 (4) (1976) 573 -598.
- [2] AUBIN, T.: *Equations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire*, J. Math. Pure Appl., 55(1976) 269 -296
- [3] BARBOSA, E. R. : *Estimativa Ótima do Semigrupo do Calor Via Desigualdade de Sobolev Logarítmica*, UFMG, Dissertação de Mestrado, 2005
- [4] BOBKOV, S. G., LEDOUX, M. : *From Brunn-Minkowski to Sharp Sobolev inequalities*, 2007
- [5] BURAGO, Yu. D., ZALGALLER, V. A.: *Geometric Inequalities*, Springer-Verlag, 1980
- [6] CANNARSA, P., SINISTRARI, C.: *Semiconcave Functions, Hamilton-Jacobi Equations, and Optimal Control*, 2003
- [7] DEL PINO, M., DOLBEAULT, J.: *Best constants for Gagliardo-Nirenberg inequalities and application to nonlinear diffusions*, J. Math. Pures Appl. 81 (9) (2002) 847 -875.
- [8] EVANS, L. C.: *Partial Differential Equations*, University of California, Berkeley, 1998.
- [9] FEDERER, H.: *Geometric Measure Theory*, Springer-Verlag, 1969.
- [10] GARDNER, R. J.: *The Brunn-Minkowski Inequality*, Bull. American Mathematical Society, (N.S.) 39 (3) (2002) 355 -405.

- [11] OSSERMAN, R.: *The isoperimetric inequality*, Bull. Amer. Math. Soc. 84 (6) (1978) 1182 -1238.
- [12] PÓLYA, G., HARDY G. H., LITTLEWOOD J. E.: *Inequalities*, Cambridge University Press, 1934.
- [13] SCHNEIDER, R.: *Convex bodies: the Brunn-Minkowski Theory*, Cambridge University Press, Cambridge, 1993.
- [14] TALENTI, G.: *Best constants in Sobolev inequality*, Ann. Mat. Pura Appl. (IV) 110 (1976) 353 -372.

# Índice Remissivo

caixa, 9

desigualdade

aritmético-geométrica, 45

aritmético-geométrica generalizada, 14

de Brunn-Minkowski, 5, 7

de Gagliardo-Nirenberg-Sobolev, 5

de Hölder, 14, 47, 48

de Hölder integral, 49

de Jensen, 44

de Sobolev, 37, 50

de Sobolev ótima, 6

de Young, 43

isoperimétrica, 5, 12

distância de Housdorff, 11

equação

de Bellman, 22

de Hamilton-Jacobi, 22

de programação dinâmica, 22

espaço

de Lebesgue, 3

de Sobolev, 4

fórmula de Hopf, 19

função convexa, 43

hamiltoniano, 22

média

aritmética, 45

geométrica, 45

geométrica ponderada, 45

harmônica, 45

ponderada, 45

soma de Minkowski, 7

soma vetorial, 7

teorema

de Prékopa-Leindler, 15

transformada de Legendre, 22