

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Tese de Doutorado

**Regularização de Pares de Folheações Contínuas e
Transversais em Variedades Bidimensionais Compactas**

Sebastião Martins Xavier

Orientador: Prof. Alberto Berly Sarmiento Vera

Belo Horizonte, novembro de 2010

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**Regularização de Pares de Folheações Contínuas e
Transversais em Variedades Bidimensionais Compactas**

Sebastião Martins Xavier

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em
Matemática do Departamento de Matemática da Uni-
versidade Federal de Minas Gerais como requisito par-
cial para obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientador: Prof. Alberto Berly Sarmiento Vera

Belo Horizonte, novembro de 2010

“A minha querida mãe que partiu tão cedo sem poder me despedir! Infelizmente não pôde vê esta nossa nova conquista! Sinto muito a sua falta!”

Agradecimentos

Este é um momento sublime na vida de todos nós. Chegar a esta altura sem que seja da vontade divina, e sem a ajuda de muitas pessoas enviadas por Deus para trilhar o nosso caminho, é certamente impossível! Portanto, neste momento gostaria de continuar agradecendo a Deus pela saúde, pela sabedoria para que eu pudesse tomar as decisões corretas e pela divina força que me proporcionou naqueles instantes tão difíceis, permitindo-me permanecer de pé com desejo de vitória.

Gostaria de expressar os meus sinceros agradecimentos ao meu orientador Alberto Sarmiento, sem a ajuda do qual eu jamais teria chegado até aqui. Além de um excelente profissional é um ser humano fantástico! No profissional sempre cobrou o compromisso com o trabalho e forneceu o suporte necessário para o desempenho do mesmo. Compreendeu minhas angústias e divagações e me mostrou o caminho desejável a seguir.

Agradeço aos Professores Américo López Gálvez, Carlos Alberto Maquera Apaza, Fernando Figueiredo de Oliveira Filho e Mário Jorge Dias Carneiro por suas ilustres presenças na banca examinadora.

Também não poderia deixar de agradecer os vários professores do departamento de matemática da UFMG, que souberam dos meus problemas pessoais e me apoiaram.

Agradeço também aos meus colegas de trabalho do departamento de matemática da UFOP que torceram muito por mim!

Agradeço a todos os meus amigos e familiares que muitas vezes compartilharam das minhas dores e angústias e souberam me entender!

Agradeço a minha querida esposa, pela compreensão e paciência durante esta longa jornada!

Que Deus abençoe rica e abundantemente a todos vocês!!

“Não sei porque você se foi, quantas saudades eu senti,
e de tristezas vou viver e aquele adeus não pude dar...
Você marcou na minha vida, viveu, morreu na minha
história, chego a ter medo do futuro e da solidão que
em minha porta bate... E eu! Gostava tanto de você!
Gostava tanto de você..” (*Edson Trindade*)

Resumo

Sejam M uma variedade compacta, bidimensional, diferenciável de classe C^∞ e $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ um par de classe C^0 de folheações orientáveis sobre M . Suponhamos que \mathcal{F} e \mathcal{G} tenha o mesmo subconjunto fechado e totalmente desconexo S como conjunto de singularidades, e que \mathcal{F} e \mathcal{G} sejam transversais em $M - S$. Nestas condições provamos que existe um par $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}})$ de classe classe C^1 que é topologicamente equivalente ao par $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Além disso, provamos que as seguintes condições são equivalentes:

- (A) Os conjuntos minimais de \mathcal{F} e \mathcal{G} são triviais.
- (B) \mathcal{F} e \mathcal{G} são topologicamente equivalentes às folheações $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\tilde{\mathcal{G}}$ de classe C^2 .
- (C) \mathcal{F} e \mathcal{G} são topologicamente equivalentes às folheações $\tilde{\mathcal{F}}$ e $\tilde{\mathcal{G}}$ de classe C^∞ .

1

¹Palavras-Chave: Pares de Folheações, Atlas Bifolheado, Bi-regularização

Abstract

Let M be a compact manifold, two-dimensional, differentiable of class C^∞ and $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ be a pair of class C^0 of orientable foliations on M . Suppose that \mathcal{F} and \mathcal{G} has the same and totally disconnected closed subset S as singularities, and that \mathcal{F} and \mathcal{G} are transversal in $M - S$. Under these conditions we prove that there is a pair $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}})$ of class C^1 that is topologically equivalent to the pair $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Moreover, we prove that the following conditions are equivalent:

- (A) any minimal set of \mathcal{F} and \mathcal{G} are trivial.
- (B) \mathcal{F} and \mathcal{G} are topologically equivalent to C^2 foliations $\tilde{\mathcal{F}}$ and $\tilde{\mathcal{G}}$.
- (C) \mathcal{F} and \mathcal{G} are topologically equivalent to C^∞ foliations $\tilde{\mathcal{F}}$ and $\tilde{\mathcal{G}}$.

2

²Keywords: Pairs of foliations. Bifolheated atlas, Bi-regularization

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iv
Abstract	v
Introdução	1
1 Preliminares	5
1.1 Folheações	5
1.2 Pares de Folheações sobre M	8
2 Transversais Globais Adaptadas	11
2.1 Transversais Adaptadas nas Regiões de Recorrências	11
2.2 As Transversais Globais Para as Folheações	14
2.3 Decomposição de $M - S$ em Caixas Bifolheadas e as Novas Seções Transversais Λ e Γ	17
2.3.1 Caixas para \mathcal{F} e para \mathcal{G}	18
3 Uma Medida Adequada nas Seções Transversais	21
3.1 Medida Distinguida	22
3.2 A Medida na Transversal Global $\tilde{\Gamma}$	25
3.2.1 Intervalos errantes em $\tilde{\Gamma}$	25
3.2.2 Regularização nas partes errantes $\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{B}_k$ de $\tilde{\Gamma}$	29
3.2.3 Regularização no conjunto $\bigcup_{j=1}^{\infty} \text{span}(P_j)$	32
3.2.4 Regularização no conjunto $\bigcup_{j=1}^{\infty} \text{span}(A_j)$	32
3.2.5 Regularização nos Círculos transversais	33

3.2.6	Medida em $\tilde{\Gamma}$	35
3.3	A Medida nas Transversais Adaptadas	35
4	Demonstração do Teorema de birregularização	37
4.1	Demonstração do Teorema de Biregularização	38
4.1.1	Sistemas de Coordenadas para Pontos no Interior das Caixas Bifolheadas	39
4.1.2	Sistema de Coordenadas Para os Pontos no Interior dos Arcos Elementares de \mathcal{F}	42
4.1.3	Sistema de Coordenadas Para os Pontos no Interior dos Arcos Elementares de \mathcal{G}	43
4.1.4	Sistema de Coordenadas Para os Pontos Extremos dos Arcos Elementares	45
4.1.5	Regularização em torno das singularidades	47
5	Regularização do Fluxo de Denjoy com uma Singularidade	49
5.1	Introdução e Preliminares	49
5.1.1	Medida Distinguida em Γ	50
5.2	Decomposição de $T^2 - q$ em caixas suavizáveis	54
5.3	Regularização	56
6	Pares de Folheações Contínuas sem Singularidades	57
6.1	Transversais Globais	57
6.2	Decomposição de T^2 em Caixas Bifolheadas	58
6.3	Medidas nas transversais	59
6.3.1	A folheação \mathcal{F} possui apenas recorrências triviais	59
6.4	Demonstração do teorema 4	61

Introdução

O início do estudo das relações entre as propriedades topológicas e diferenciais de fluxos, se deu com o trabalho de H. Poincaré, em 1928 ([13]). Poincaré mostrou que no toro, existe um fluxo contínuo com um conjunto minimal que tem a estrutura local do produto de um intervalo fechado por um conjunto de Cantor (minimal não trivial), e conjecturou a existência de um fluxo de classe C^∞ no toro com um minimal desse tipo. Denjoy em 1932 ([3]) negou a conjectura de Poincaré mostrando a não existência de fluxo de classe C^2 no toro com minimal não trivial. Schwartz em 1963 ([14]) estende o resultado de Denjoy para variedades M bidimensionais e compactas, provando que se M possui um fluxo de classe C^r , $r \geq 2$, com conjunto minimal não vazio, então este minimal é trivial, ou seja, o fluxo é denso, ou uma órbita periódica ou uma singularidade. Para variedades compactas de dimensão 2, o resultado mais completo referente à regularização se deve a Carlos Gutierrez, que em 1986 ([6]) provou que numa variedade bidimensional compacta, um fluxo contínuo que só admite conjuntos minimais triviais é topologicamente equivalente a um fluxo de classe C^∞ (recíproca do teorema de Denjoy & Schwartz). Neste mesmo artigo Gutierrez mostrou que todo fluxo contínuo em uma variedade bidimensional compacta é topologicamente equivalente a um fluxo de classe C^1 . A Regularização de folheação transversalmente orientável de codimensão 1 sobre variedades compactas (de dimensão n) foi estudada por Jonh Cantwell e Lawrence Conlon em [2].

Neste trabalho estudamos o seguinte problema proposto por Carlos Gutierrez: *Seja M uma variedade diferenciável, bidimensional e compacta. Dadas duas folheações \mathcal{F} e \mathcal{G} contínuas, orientáveis e com singularidades sobre M , sob quais condições podemos regularizar ambas folheações simultaneamente?*

Uma tentativa ingênua de resolver o problema é a seguinte: Consideramos \mathcal{F} e \mathcal{G} como acima e aplicamos o teorema de Gutierrez numa das folheações da terna $(M, \mathcal{F}, \mathcal{G})$, por exemplo, \mathcal{F} e obtemos a terna $(\tilde{M}, \tilde{\mathcal{F}}, \hat{\mathcal{G}})$, onde $\tilde{\mathcal{F}}$ é uma folheação de classe C^1 ou C^∞ topologicamente equivalente à folheação \mathcal{F} e $\hat{\mathcal{G}}$ é a imagem da \mathcal{G} pelo homeomorfismo que faz a equivalência topológica. Ao regularizarmos a folheação $\hat{\mathcal{G}}$ trocamos novamente a estrutura diferenciável de M e obtemos $(\tilde{\tilde{M}}, \tilde{\tilde{\mathcal{F}}}, \tilde{\tilde{\mathcal{G}}})$. Após essas duas etapas, certamente não temos a garantia de que ambas folheações sejam topologicamente equivalentes às folheações de classe C^∞ (ou C^1), pois com

a nova troca da estrutura diferenciável podemos ter "atrapalhado" a suavidade da folheação \mathcal{F} que havia sido construída na primeira etapa. Portanto, necessitamos de uma estrutura diferenciável para M na qual ambas folheações sejam topologicamente equivalentes à folheações de classe C^∞ (ou C^1), simultaneamente.

Para conseguirmos tal estrutura diferenciável, o mínimo que deveríamos ter era uma condição de transversalidade para as folheações contínuas e que também essas folheações deveriam ter o mesmo conjunto singular. A noção de transversalidade para aplicações diferenciáveis é bem conhecida (veja por exemplo, [10], pag. 15); para o caso de aplicações contínuas damos a seguinte definição:

Definição 1. *Sejam $a > 0$ e $\sigma, \gamma : [-a, a) \rightarrow \mathbb{R}^2$ curvas de classe C^0 injetivas tais que $\sigma(0) = \gamma(0) = (0, 0)$. Dizemos que γ é transversal, (respectivamente tangente) a σ em $\gamma(0) = \sigma(0)$, se existem $\epsilon > 0$, vizinhança V de $\gamma(0)$, vizinhança U de $(0, 0)$, em \mathbb{R}^2 e um homeomorfismo $H : V \rightarrow U$ tais que para todo $|t| < \epsilon$, $H \circ \sigma(t) = (t, 0)$ e $H \circ \gamma(t) = (t, t)$ (respectivamente, $H \circ \gamma(t) = (t, \phi(t))$, onde ϕ é uma função contínua satisfazendo $\phi(t) \geq 0$ e $\phi(0) = 0$). Veja figura 1.*

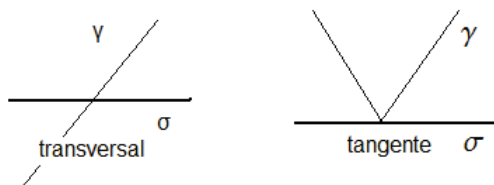


Figura 1:

Observação 1. *Observamos que de acordo com a nossa definição de transversalidade as curvas dadas por $\gamma(t) = (t, t^3)$ e $\sigma(t) = (t, 0)$, por exemplo, são transversais!*

Definição 2. *Seja M uma variedade bidimensional e compacta. Dois fluxos contínuos (respectivamente, duas folheações contínuas orientadas) em M , são ditos topologicamente equivalentes se existe um homeomorfismo em M que leva trajetórias de um em trajetórias do outro (resp. leva folhas de uma em folhas da outra), preservando a orientação delas.*

Definição 3. *Dizemos que o par de folheações $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ em M é topologicamente equivalente ao par $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}})$ se existe um homeomorfismo $h : M \rightarrow M$ tal que \mathcal{F} é topologicamente equivalente a $\tilde{\mathcal{F}}$ e \mathcal{G} é topologicamente equivalente a $\tilde{\mathcal{G}}$, respectivamente, via h .*

Ao longo deste texto M denota uma variedade diferenciável, compacta, bidimensional e de classe C^∞ . \mathcal{F} e \mathcal{G} são folheações orientáveis, contínuas que possuem em comum um conjunto $S \neq \emptyset$, fechado e totalmente desconexo, como conjunto de singularidades. Além disso, as folheações \mathcal{F} e \mathcal{G} são **transversais** em $(M - S)$.

Dados a variedade M e o par $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ de folheações de classe C^0 sobre M temos que o principal resultado deste trabalho é o seguinte teorema:

Teorema 1 (Teorema de Birregularização). *Seja M uma variedade compacta, bidimensional e de classe C^∞ . Dado $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ um par contínuo de folheações transversais em $M - S$, existe um par de folheações $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}})$ transversais em $M - S$, de classe C^1 e topologicamente equivalentes ao par $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Além disso, as seguintes condições são equivalentes:*

- (a) *Os conjuntos minimais de \mathcal{F} e \mathcal{G} são triviais.*
- (b) *O par $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ é topologicamente equivalente ao par de folheações transversais $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}})$ de classe C^2 .*
- (c) *O par $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ é topologicamente equivalente ao par de folheações transversais $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}})$ de classe C^∞ .*

Este trabalho está dividido em seis capítulos. No Capítulo 1 apresentamos as principais definições que são utilizadas em todo o texto. Além disso, mostramos que dadas duas folheações \mathcal{F} e \mathcal{G} orientáveis, sem singularidades contínuas e transversais em M , é possível obter um atlas contínuo para M tal que \mathcal{F} e \mathcal{G} são simultaneamente retificadas de modo que cada carta desse atlas leva placas de \mathcal{F} em segmentos horizontais e placas de \mathcal{G} em segmentos verticais.

Na seção 2.1 do Capítulo 2, aproximamos os círculos transversais a \mathcal{F} ($C_i \subset V_i$) contidos nas regiões de recorrências V_i , por arcos de folhas de \mathcal{G} e aproximamos os círculos transversais a \mathcal{G} contidos nas regiões de recorrências de \mathcal{G} por arcos de folhas de \mathcal{F} ; chamamos essas aproximações de transversais adaptadas. Seja α_i uma transversal adaptada contida numa região de recorrência da folheação \mathcal{G} . Essa transversal adaptada não é um círculo, mas a menos de um número finito de pontos, se projeta biunivocamente sobre o círculo C_i , ao longo das folhas de \mathcal{F} . Essas transversais adaptadas substituíram os círculos transversais no momento em que fizemos a decomposição de $M - S$ em caixas (seção 2.3), ou seja, ao invés de usarmos os círculos, usamos a transversal adaptada para que servissem de lado suporte dos lados das caixas da decomposição. Isso nos permitiu decompor $M - S$ em caixas cujos os lados são arcos de folhas das folheações \mathcal{F} e \mathcal{G} colocados alternadamente (caixas bifolheadas). Para conseguirmos essa decomposição também foi necessário decompor M numa família enumerável $\{M_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ de subvariedades compactas cujos bordos são compostos por arcos de folhas das folheações \mathcal{F} e \mathcal{G} colocados alternadamente, com a propriedade que a interseção dessas subvariedades é exatamente o conjunto

singular S . Em seguida, denotando por $\widehat{\Gamma}_0$ a união das transversais adaptadas para a folheação \mathcal{F} , construímos uma seção transversal global Γ para a folheação \mathcal{F} , composta $\widehat{\Gamma}_0$ união com os arcos de folhas de \mathcal{G} que estão contidos nas fronteiras de M_i e arcos de folhas de \mathcal{G} contidos em vizinhanças de folhas compactas de \mathcal{F} no interior de $M_{i-1} - M_i$. De maneira análoga obtemos uma seção transversal global Λ para a folheação \mathcal{G} . Usando essas transversais globais decomparamos a variedade $M - S$ em caixas cujos bordos transversais a \mathcal{F} estão sobre Γ e os bordos transversais a \mathcal{G} estão sobre Λ . Esta decomposição desempenha um papel importante no processo de regularização.

Pelo teorema de estrutura de Gutierrez temos que na parte recorrente não trivial do tipo densa a aplicação de Poincaré $T : C_i \rightarrow C_i$ é topologicamente conjugada a uma transformação de intercâmbio de intervalos (veja [6]). Dessa forma foi possível, já no capítulo 3, induzir uma medida invariante em C_i e transferir essa medida (via projeção) para a transversal adaptada. Nas componentes da transversal global complementar a parte recorrente do tipo densa procedemos da mesma forma que faz Gutierrez em [6] e assim obtivemos medidas distinguidas μ e η , sobre as transversais Γ e Λ respectivamente. Com essas medidas, as aplicações de Poincaré $T_{\mathcal{F}}$ e $T_{\mathcal{G}}$, induzidas por \mathcal{F} e \mathcal{G} , respectivamente, no interior das caixas da decomposição de $M - S$ obtidas no capítulo 2, tornam-se μ e η - C^1 ou μ e η - C^∞ , dependendo da existência ou não de conjunto minimal não trivial. Neste capítulo construímos praticamente todo o processo de regularização.

O Capítulo 4 traz a demonstração do teorema principal deste trabalho, o teorema de birregularização. Neste capítulo, primeiro construímos um novo sistema de coordenadas para $M - S$. Este sistema de coordenadas foi construído primeiro no interior das caixas da decomposição de $M - S$, depois nos arcos que formam os bordos dessas caixas e por último nos extremos desses arcos. Após a construção dessa nova estrutura diferenciável para $M - S$ procedemos como Gutierrez e estendemos a regularidade para o conjunto singular, obtendo assim uma nova estrutura diferenciável para M .

No capítulo 5, a título de exemplificação apresentamos a regularização do fluxo de Denjoy no toro. Como sabemos o fluxo de Denjoy no toro, cujo o conjunto minimal é excepcional, é apenas de classe C^1 . No entanto, ao inserirmos uma singularidade numa trajetória recorrente não trivial do conjunto minimal, obtemos um fluxo com singularidade que difere do fluxo de Denjoy inicial apenas na singularidade e que possui apenas minimal trivial. Logo, pelo teorema de regularização de Carlos Gutierrez [6], este fluxo é topologicamente equivalente a um fluxo de classe C^∞ . Como podemos ver uma simples inserção de uma singularidade pode mudar completamente a regularidade do fluxo.

No capítulo 6 mostramos que o resultado principal deste trabalho é válido mesmo quando o conjunto de singularidades das folheações for vazio. A demonstração é essencialmente a mesma do teorema principal.

Capítulo 1

Preliminares

O objetivo deste capítulo é apresentar as principais definições que utilizamos no texto. Na seção 1.1 sobre folheação relembramos a definição de folheação bem como outras definições referentes às folheações. Na seção 1.2 definimos atlas bifolheado para uma variedade e apresentamos um resultado (lema 1) sobre a existência desses atlas no caso contínuo. Esse resultado é semelhante ao de teorema de retificação de Whitney ([15]) para curvas contínuas, porém o nosso resultado é para duas famílias de curvas contínuas e transversais.

1.1 Folheações

Como o nosso interesse é exclusivamente variedades de dimensão 2, nos limitaremos a relembrar a definição de folheação apenas neste caso. Informalmente, dizemos que uma família $\{l_\alpha\}_{\alpha \in \Lambda}$ de curvas contínuas e disjuntas sobre uma variedade bidimensional M é uma folheação sobre M se $M = \bigcup_{\alpha \in \Lambda} l_\alpha$.

Formalmente definimos folheação da seguinte maneira:

Definição 4. *Seja M uma variedade de dimensão 2 e classe C^∞ . Uma folheação de M , unidimensional e de classe C^r ($r \geq 0$), é um atlas máximo \mathcal{F} de classe C^r em M com as seguintes propriedades:*

1. Se $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ então $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, onde U_1 e U_2 são abertos da reta.
2. Se (U, φ) e $(V, \psi) \in \mathcal{F}$ são tais que $U \cap V \neq \emptyset$ então a mudança de coordenadas $\psi \circ \varphi^{-1} : \varphi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$ é da seguinte forma:

$$h(x, y) = \psi \circ \varphi^{-1}(x, y) = (h_1(x, y), h_2(y))^*$$

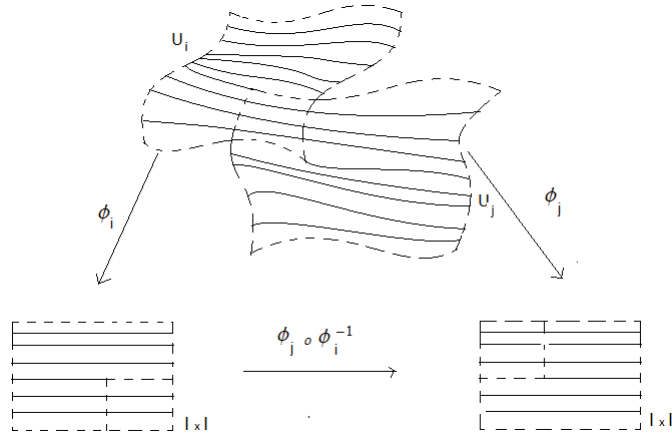
Dizemos também que M é folheada por \mathcal{F} , ou ainda que \mathcal{F} é uma estrutura folheada de dimensão 1 e classe C^r sobre M .

As cartas $(U, \varphi) \in \mathcal{F}$ são chamadas cartas trivializadoras.

Definição 5. Dada \mathcal{F} uma folheação unidimensional em uma variedade M de dimensão 2, consideremos uma carta local (U, φ) de \mathcal{F} tal que $\varphi(U) = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$. Os conjuntos da forma $\varphi^{-1}(U_1 \times \{c\})$, $c \in U_2$ são chamados de placas de U , ou ainda placas de \mathcal{F} . Fixado $c \in U_2$ a aplicação $f = \varphi^{-1}|_{U_1 \times \{c\}} : U_1 \times \{c\} \rightarrow U$ é um mergulho, portanto as placas são subvariedades conexas de dimensão 1 de M . Além disso, se P e Q são placas de U então $P = Q$ ou $P \cap Q = \emptyset$.

Um caminho de placas de \mathcal{F} é uma sequência P_1, P_2, \dots, P_k de placas de \mathcal{F} tal que $P_j \cap P_{j+1} \neq \emptyset$ para todo $j \in \{1, 2, \dots, k-1\}$. Como M é recoberto pelas placas de \mathcal{F} , definimos em M a seguinte relação de equivalência: Sejam p e $q \in M$, dizemos que p é equivalente a q e denotamos por $p \sim q$ se, e somente se existe um caminho de placas $\{P_1, \dots, P_k\}$ com $p \in P_1$ e $q \in P_k$. As classes de equivalência dessa relação são chamadas folhas de \mathcal{F} .

Definição 6. Observamos que para cada ponto $p \in U$ o homeomorfismo $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^2$ leva a placa de U que passa por p no segmento horizontal $y = cte$.



Exemplo 1. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável de classe C^∞ . Para cada constante $c \in \mathbb{R}$, considere $f_c = f + c$. Seja $L_c = \{(x, f_c(x))\}_{x \in \mathbb{R}}$, o gráfico de f_c em \mathbb{R}^2 . Então, $\varphi : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, definido por $\varphi(x, y) = (x, y - f(x))$ é um difeomorfismo com inversa $\varphi^{-1}(x, y) = (x, y + f(x))$. Como $\varphi(L_c) = \{(x, c)\}_{x \in \mathbb{R}}$, para todo $c \in \mathbb{R}$, a única carta (\mathbb{R}^2, φ) é um atlas folheado tendo o gráfico L_c como folhas. Como existe uma única carta, a condição * é satisfeita por vacuidade.

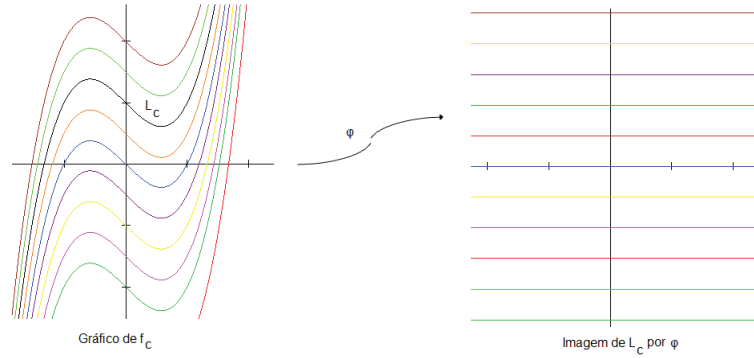


Figura 1.1: Folheação de \mathbb{R}^2 por gráficos de funções diferenciáveis

Dada uma carta trivializadora $\varphi : U \rightarrow U_1 \times U_2$ podemos induzir uma orientação nas placas de U da seguinte forma: Dado $c_0 \in U_2$ fixe em $y = c_0$ a orientação natural induzida da reta e considere em todas as placas $\varphi^{-1}(U_1 \times \{c\})$, $c \in U_2$ a mesma orientação de $\varphi^{-1}(U_1 \times \{c_0\})$.

Definição 7 (Orientação). *Duas cartas trivializadoras (U, φ) e (V, ψ) serão ditas compatíveis se elas forem coerentemente orientadas, ou seja, se a orientação na interseção $U \cap V$ coincidirem. A folheação será dita orientável se ela for dada por um atlas de cartas compatíveis. Caso contrário, a folheação será dita não orientável.*

Observação 2. *Whitney prova em [15] que uma folheação contínua orientável sobre M induz um fluxo contínuo sobre M . Dessa forma, toda vez que falamos de fluxo, a menos que seja dito o contrário, estamos nos referindo ao fluxo induzido pela folheação orientável correspondente.*

Definição 8. *Sejam M uma variedade diferenciável de dimensão 2 e $S \subset M$ um subconjunto fechado de M . Dizemos que \mathcal{F} é uma folheação em M com conjunto de singularidades $\text{sing}(\mathcal{F}) = S$, se \mathcal{F} é uma folheação definida em toda $M - S$.*

Relembramos que neste trabalho M denota uma variedade diferenciável, compacta, bidimensional de classe C^∞ . \mathcal{F} e \mathcal{G} são folheações contínuas, orientáveis, com singularidades, cujo conjunto de singularidades $S \neq \emptyset$ além de fechado é *totalmente desconexo* e o mesmo para ambas folheações. Além disso, as folheações \mathcal{F} e \mathcal{G} são transversais em $(M - S)$. Portanto todo par $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ é formado por folheações com as propriedades descritas acima. Chamaremos apenas de **par de folheações contínuas sobre $M-S$** .

Definição 9. *A folha $L_{\mathcal{F}}$ de \mathcal{F} (respectivamente $L_{\mathcal{G}}$ de \mathcal{G}) homeomorfa a um círculo será chamada de folha compacta. Fixado uma orientação para a folheação \mathcal{F} denotamos por $L^+(p)$ (respec. $L^-(p)$) a semifolha positiva (respec. negativa) começando em*

p . A semifolha $L^+(p)$ (respec. $L^-(p)$) será dita ω -recorrente (respec. α -recorrente) se, estiver contida no seu conjunto ômega limite (respec. alfa limite). Uma folha é dita recorrente se para um ponto nela as semifolhas positiva e negativa determinadas são ω e α -recorrentes respectivamente. Uma folha será dita recorrente trivial se for compacta ou um ponto singular.

Definição 10. Seja $D \subset M$ subconjunto. O saturado de D pela folheação \mathcal{F} , denotado por $Sat(D)$ é definido por

$$Sat(D) = \{q \in M | q \in L_{\mathcal{F}}(p) \text{ com } p \in D\}.$$

D é dito invariante pela folheação se $Sat(D) \subset D$.

Definição 11. Um subconjunto de M é dito minimal, se for um conjunto fechado, não vazio, invariante pela folheação e não contém subconjuntos próprios com estas propriedades. Um subconjunto minimal é dito minimal trivial se for uma singularidade da folheação, uma folha compacta ou a variedade toda (neste caso a variedade é o toro). O conjunto minimal que não é trivial é chamado minimal não-trivial.

Definição 12. Um segmento $\Sigma \subset M$ é chamado seção transversal para a folheação contínua \mathcal{F} ou simplesmente transversal, se for transversal a toda folha de \mathcal{F} que passa Σ .

Definição 13. Sejam Σ_1 e Σ_2 seções transversais à folheação \mathcal{F} tal que exista uma folha de \mathcal{F} cruzando de Σ_1 para Σ_2 em relação à orientação da folheação. A aplicação de Poincaré para frente induzida pela folheação é a aplicação $T : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ que associa a cada $p \in \Sigma_1$ o primeiro ponto $q \in \Sigma_2$ da interseção de $L^+(p)$ com Σ_2 .

Definição 14. Um intervalo I transversal à folheação é dito errante se toda folha da folheação que o intersecta, o faz apenas uma única vez. Caso contrário, diremos que o intervalo I é não errante. Um ponto $p \in M$ distinto de uma singularidade é dito errante se existe um intervalo errante que o contém, caso contrário o ponto p é dito não errante.

1.2 Pares de Folheações sobre M

Seja $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ um par de folheações contínuas sobre $M - S$, mostramos no Lema 1 que é possível obter um atlas para $M - S$ tal que as cartas desse atlas são cartas tanto da \mathcal{F} quanto da \mathcal{G} . Um atlas desse tipo será chamado atlas bifolheado para $(M - S, \mathcal{F}, \mathcal{G})$.

O par de folheações de classe C^∞ será chamado de par suave. Aqui estamos interessados apenas nos pares de folheações contínuas.

Definição 15. *Sejam M uma variedade bidimensional e $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ um par de folheações contínuas em $M - S$. Uma carta bifolheada de classe C^r , $r \geq 0$, sobre $M - S$ é um par $(U_\alpha, \varphi_\alpha)_\alpha$, onde $U_\alpha \subseteq M$ é um aberto e $\varphi_\alpha : U_\alpha \rightarrow \varphi_\alpha(U) \subset \mathbb{R}^2$ é um homeomorfismo, sendo que $\varphi_\alpha(U_\alpha)$ é um retângulo $(a, b) \times (c, d)$ de \mathbb{R}^2 tal que $\varphi_\alpha^{-1}((a, b) \times \{y\})$ e $\varphi_\alpha^{-1}(\{x\} \times (c, d))$ são placas de \mathcal{F} e de \mathcal{G} , respectivamente.*

Veja a figura 1.2 abaixo.

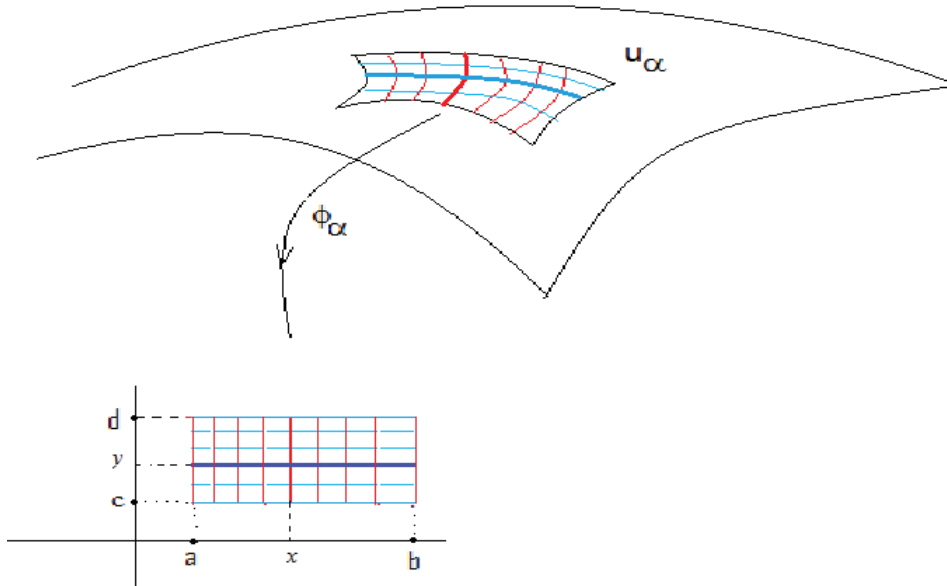


Figura 1.2: Carta Bifolheada

Definição 16. *Um atlas bifolheado de classe C^r , $r \geq 0$, para $(M - S, \mathcal{F}, \mathcal{G})$ é um atlas C^r $\mathcal{U} = \{(U_\alpha, \varphi_\alpha)\}$ de cartas bifolheadas para M , tais que $\{U_\alpha\}_\alpha$ cobre $M - S$ e se $(U_\alpha, \varphi_\alpha)$ e $(U_\beta, \varphi_\beta) \in \mathcal{U}$ são cartas tais que $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$, então a mudança de coordenada é da seguinte forma:*

$$\varphi_\alpha \circ \varphi_\beta^{-1}(x, y) = H_{\alpha\beta}(x, y) = (h_1(x), h_2(y))$$

Dado um par de folheações contínuas $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ sobre $M - S$, seja $V \subset M$ uma região retangular, simplesmente conexa cujo o bordo ∂V é formado por arcos de folhas de \mathcal{F} e de \mathcal{G} dispostos alternadamente. Suponha que a região V não contenha singularidades das folheações e nem se auto-intersecta. Nessas condições temos o seguinte lema:

Lema 1 (birretificação). *Existe um homeomorfismo $h : V \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ tal que (V, h) é uma carta bifolheada.*

Demonstração.

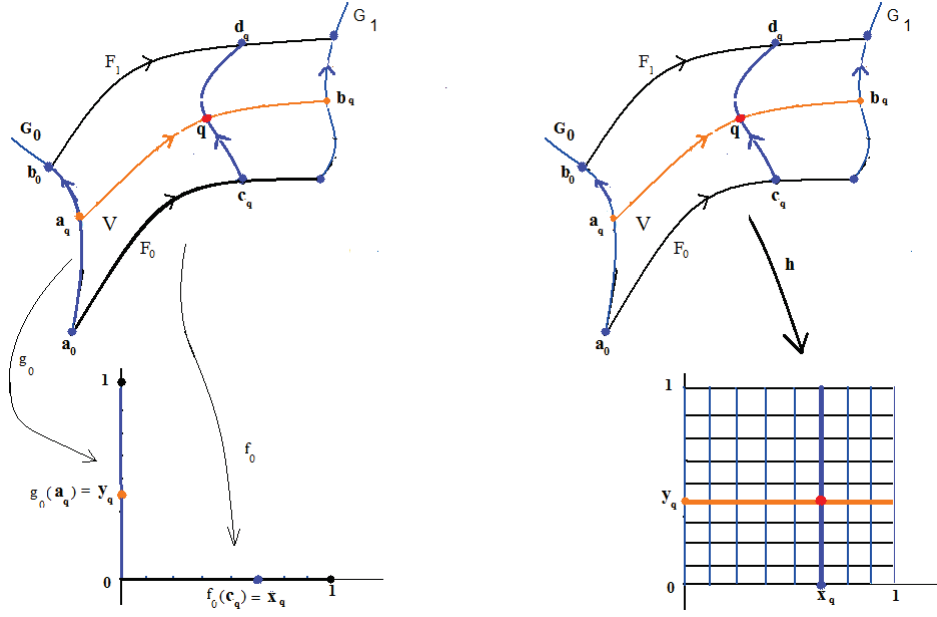


Figura 1.3: Homeomorfismo biretificador

Denotamos por $G_0 := [a_0, b_0]_{\mathcal{G}}$ e $G_1 := [a_1, b_1]_{\mathcal{G}}$ os arcos de folhas de \mathcal{G} que estão contidos no bordo da caixa V . Suponhamos que a folheação $\mathcal{F}|_V$ atravessasse primeiro o arco G_0 antes de G_1 . Da mesma forma denotamos por $F_0 := [a_0, a_1]_{\mathcal{F}}$ e $F_1 := [b_0, b_1]_{\mathcal{F}}$ os arcos de folhas de \mathcal{F} que estão contidos no bordo da caixa V e suponhamos que a folheação $\mathcal{G}|_V$ atravessasse primeiro o arco F_0 antes de F_1 . Veja figura abaixo.

Agora consideramos os homeomorfismos $g_0 : G_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$g_0(a_0) = (0, 0), g_0(b_0) = (0, 1) \quad \text{e} \quad g_0(G_0) = \{0\} \times [0, 1]$$

e $f_0 : F_0 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que

$$f_0(a_0) = (0, 0), f_0(a_1) = (1, 0) \quad \text{e} \quad f_0(F_0) = [0, 1] \times \{0\}.$$

Para todo $q \in V$ sejam $[a_q, b_q]_{\mathcal{F}}$ e $[c_q, d_q]_{\mathcal{G}}$ os únicos arcos de folhas de \mathcal{F} e de \mathcal{G} , respectivamente, passando por q tais que $a_q \in G_0$, $b_q \in G_1$, $c_q \in F_0$ e $d_q \in F_1$. Assim temos que $g_0(a_q) = (0, y_q)$ e $f_0(c_q) = (x_q, 0)$ com $x_q, y_q \in [0, 1]$.

Sejam $\pi_j : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, $j = 1, 2$, as projeções canônicas e $h : V \rightarrow [0, 1] \times [0, 1]$ definida por:

$$h(q) := (\pi_1(f_0(c_q)), \pi_2(g_0(a_q))) \quad \text{para todo} \quad q \in V.$$

Observamos que os arcos de folhas $[c_q, d_q]_{\mathcal{G}}$ e $[a_q, b_q]_{\mathcal{F}}$ contidos em V são levados homeomorficamente por h nos segmentos $x = x_q$ e $y = y_q$, respectivamente, contidos no quadrado $[0, 1] \times [0, 1]$. Portanto (V, h) é uma carta bifolhada em torno de p . \square

Capítulo 2

Transversais Globais Adaptadas

Dado um par de folheações contínuas $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ sobre $M - S$, construímos nas seções 2.2 e 2.3 uma transversal global Γ para a folheação \mathcal{F} nos moldes do teorema de estrutura de Gutierrez [6], porém necessitamos que Γ seja composta por arcos de folhas de \mathcal{G} . Analogamente construímos para a folheação \mathcal{G} uma transversal global Λ composta por arcos de folhas de \mathcal{F} . Na seção 2.3, decompomos $M - S$ em caixas bifolheadas cujos bordos são arcos de folhas de \mathcal{F} e de \mathcal{G} colocados alternadamente. Esses arcos que compõem os bordos estão contidos nas transversais Γ e Λ .

Definição 17 (Transformação de Intercâmbio de Intervalos (T.I.I.)). *Seja \mathbb{Z} o grupo dos inteiros agindo em \mathbb{R} por translação. Temos que o espaço quociente \mathbb{R}/\mathbb{Z} é homeomórfico ao círculo unitário S^1 . Uma aplicação $E : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \rightarrow \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ definida em todos os pontos, exceto para um número finito será chamada Transformação de Intercâmbio de Intervalos (T.I.I.), se for injetiva, diferenciável, e para todo $x \in \text{Dom}(E)$, temos que $|E'(x)| = 1$.*

2.1 Transversais Adaptadas nas Regiões de Recorrências

Consideramos apenas a folheação \mathcal{F} desde que os procedimentos para a folheação \mathcal{G} serão os mesmos.

Definição 18 (Região de Recorrência). *Seja $L_{\mathcal{F}}$ uma folha recorrente não trivial da folheação \mathcal{F} . Um aberto conexo V que contém todas folhas recorrentes não triviais de \mathcal{F} que encontram o fecho $(\overline{L_{\mathcal{F}}})$ é dito região de recorrência associada ao fecho de $L_{\mathcal{F}}$ se:*

1. *Existe um círculo $C \subset V$ transversal a \mathcal{F} , passando por $(L_{\mathcal{F}})$, e tal que a aplicação de Poincaré para frente $T : C \rightarrow C$ induzida pela folheação \mathcal{F} é*

semi-conjugada a uma aplicação de intercâmbio de intervalos $E : \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \rightarrow \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$ que tem todas as órbitas densas e que não pode ser estendida continuamente a um subconjunto maior de $\frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$.

2. O par $(\mathcal{F}|_V, V)$ é topologicamente equivalente a suspensão de (T, E) . Também a fronteira ∂V de V pode apenas conter singularidades, arcos de folhas conectando singularidades e um número finito de segmentos transversais que conectam singularidades. Além disso, não existe arco de folha de \mathcal{F} contido em V e conectando dois pontos da fronteira ∂V .

O teorema de Estrutura de Gutierrez em [6] nos permite controlar a dinâmica das trajetórias recorrentes não triviais da folheação \mathcal{F} . Relembramos esse teorema.

Teorema 2 (Teorema de Estrutura). *Seja \mathcal{F} uma folheação contínua em variedade compacta M . O fecho das folhas recorrentes não triviais de \mathcal{F} determina um número finito de subconjuntos compactos $(\overline{L_{\mathcal{F}}})_1, \dots, (\overline{L_{\mathcal{F}}})_m$ de M , \mathcal{F} -invariantes tais que qualquer folha recorrente não trivial de \mathcal{F} é densa em algum $(\overline{L_{\mathcal{F}}})_i$. Além disso, existem subconjuntos V_1, V_2, \dots, V_m dois a dois disjuntos tais que as seguintes condições são verificadas:*

1. Cada V_i é uma região de recorrência associada a $(\overline{L_{\mathcal{F}}})_i$.
2. Se V'_i é qualquer outra região de recorrência associada a $(\overline{L_{\mathcal{F}}})_i$, então V_i e V'_i são homeomorfas. Além disso, quando \mathcal{F} tiver um número finito de singularidades e nenhuma outra região de recorrência associada a $(\overline{L_{\mathcal{F}}})_i$ contiver menos singularidades do que V_i (respectivamente V'_i), as folheações $(\mathcal{F}|_{V_i}, V_i)$ e $(\mathcal{F}|_{V'_i}, V'_i)$ serão topologicamente equivalentes.
3. O círculo $C_i \subset V_i$ pode ser tomado tal que ou $\overline{(\overline{L_{\mathcal{F}}})_i} \cap C_i = C_i$ (caso em que $L_{\mathcal{F}}$ é uma folha localmente densa) ou $(\overline{L_{\mathcal{F}}})_i \cap C_i$ é um subconjunto de Cantor de C_i (caso em que $L_{\mathcal{F}}$ é uma folha excepcional).

Seja $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ um par contínuo de folheações com singularidades e transversais sobre M . Sejam $\{V_1, V_2, \dots, V_m\}$ as regiões de recorrências associadas as folhas recorrentes não triviais da folheação \mathcal{F} . Nessas condições temos:

Afirmação 1. Para cada $i \in \{1, 2, \dots, m\}$ é possível construir $\alpha_i \subset V_i$, transversal a \mathcal{F} e ϵ -próxima de C_i (na topologia C^0), composta por um número finito de arcos de folhas de \mathcal{G} tal que toda dinâmica de C_i é transferida para α_i via uma aplicação de Poincaré T_{α_i} induzida pela folheação \mathcal{F} .

Demonstração. Para cada $p \in C_i$, e cada $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, tomamos uma vizinhança tubular $N(\epsilon, p)$ de raio ϵ centrada em p , com as seguintes propriedades:

- $N(\epsilon, p)$ está inteiramente contida na região de recorrência V_i .
- $N(\epsilon, p) \cap C_i$ possui uma única componente conexa.
- $N(\epsilon, p)$ fibra sobre $N(\epsilon, p) \cap C_i$ cujas as fibras são arcos de folhas de \mathcal{F} .

Seja $\{N(\epsilon, p)\}_{p \in C_i}$ uma cobertura de C_i por vizinhanças tubulares com as propriedades descritas acima. Pela compacidade de C_i , extraímos dessa cobertura uma subcobertura finita $\{N(\epsilon_1, p_1), N(\epsilon_2, p_2), \dots, N(\epsilon_{s_i}, p_{s_i})\}$. Seja $\epsilon := \text{Min}\{\epsilon_1, \epsilon_2, \dots, \epsilon_{s_i}\}$. Agora consideramos $N(\epsilon)$ vizinhança tubular de C_i de raio ϵ . Temos que $N(\epsilon)$ fibra sobre C_i com as fibras sendo os arcos de folhas de \mathcal{F} contidos em $N(\epsilon)$.

Aproximaremos C_i por arcos de folhas de \mathcal{G} inteiramente contidos em $N(\epsilon)$, exceto possivelmente os extremos, que podem estar contidos na fronteira de $N(\epsilon)$. A união desses arcos será denotada por α_i e será denominada de '**Transversal Adaptada**'. Vejamos:

Caso exista alguma folha compacta de \mathcal{G} contida em $N(\epsilon)$ tomaremos α_i como sendo essa folha compacta. Caso contrário procedemos da seguinte forma: Dado $q_1 \in C_i$ seja F_1 (a fibra) o arco de folha de \mathcal{F} em $N(\epsilon)$ passando por q_1 . Consideramos L_1 a folha de \mathcal{G} que passa por q_1 . Se L_1 intersectar novamente a fibra $F_1 - \{q_1\}$ (para frente ou para trás) antes de sair de $N(\epsilon)$, tomamos q o primeiro ponto dessa interseção (para frente ou para trás), e consideramos o arco $l_1 \subset N(\epsilon)$ da folha L_1 que liga os pontos q_1 e q para ser a transversal α_i . Se L_1 não voltar a intersectar a fibra F_1 , significa que L_1 escapa (para frente e para trás) de $N(\epsilon)$. Seja q'_1 o ponto na fronteira de $N(\epsilon)$ por onde L_1 escapa para frente. Neste caso tomamos l_1 como sendo o arco de folha de \mathcal{G} que liga os pontos q_1 e q'_1 . Agora consideramos F_2 a fibra contida em $N(\epsilon)$ que passa por q'_1 e tomamos $q_2 \in F_2 \cap C_i$. Agora consideramos L_2 a folha de \mathcal{G} que passa por q_2 . Se L_2 intersectar (para frente) a fibra F_1 em q , tomamos o arco l_2 de \mathcal{G} que liga os pontos q_2 e q . Caso, contrário, repetimos o procedimento usado para obter o arco l_1 . Usando a transversalidade das folheações e a compacidade de C_i , obtemos após um número finito de etapas, digamos k_i uma sequência $\{l_1, l_2, \dots, l_j, \dots, l_{k_i}\}$ de arcos de folhas de \mathcal{G} , cuja união forma a transversal adaptada α_i , conforme queríamos. Veja figura abaixo.

Seja $D_i = \{q_1, q_2, \dots, q_{k_i}\}$ o conjunto de pontos em C_i que são extremos dos arcos de folhas l_j que formam α_i .

Observamos que da forma que construímos a transversal adaptada α_i , temos que $\alpha_i - D_i$ está em correspondência biunívoca com C_i projetando-se ao longo das folhas. Além disso, como $N(\epsilon)$ é fibrada sobre C_i , cujas as fibras são arcos de folhas e \mathcal{F} , a aplicação de Poincaré $T_i : C_i \rightarrow \alpha_i - D_i$, induzida pela \mathcal{F} , está definida em todo C_i e é descontínua apenas em D_i .

Dessa forma temos que toda a dinâmica de C_i é transferida para α_i via aplicação de Poincaré.

□

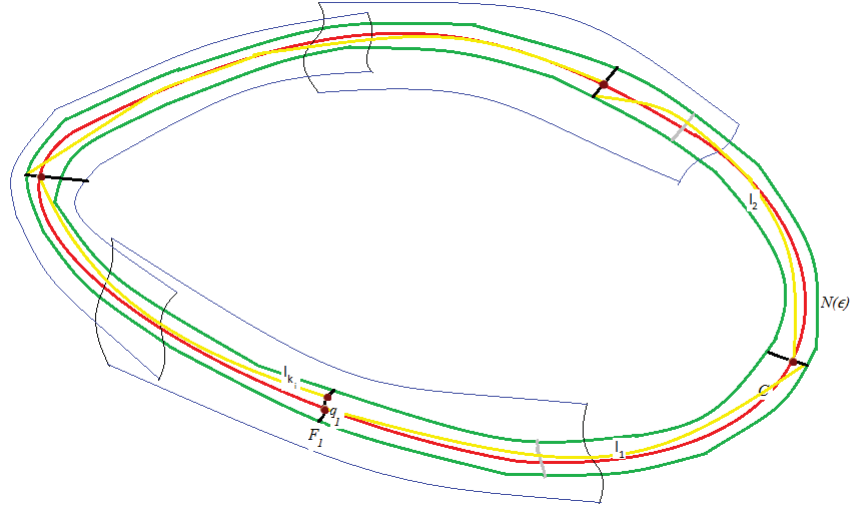


Figura 2.1: Transversal Adaptada. α_i

De maneira análoga constrói-se uma transversal adaptada β_j composta por um número finito de arcos de folhas de \mathcal{F} contida na região de recorrência associada a uma folha recorrente não trivial da folheação \mathcal{G} .

Definição 19. A transversal adaptada α_i será dita do tipo densa se o círculo $L_{\mathcal{F}} \cap C_i = C_i$, ou do tipo excepcional se $L_{\mathcal{F}} \cap C_i$ for um conjunto de Cantor em C_i . (Veja item 3 do teorema 3.2.5).

2.2 As Transversais Globais Para as Folheações

Nesta seção construímos uma filtração para M tal que o bordo de cada subvariedade M_i , componente conexa da filtração, é composta por arcos de folhas de \mathcal{F} e arcos de folhas de \mathcal{G} colocados alternadamente.

Fixado uma métrica riemanniana, sejam $B_{i's}$ bolas convexas abertas, de raio ϵ_1 adequado, com $0 \leq \epsilon_1 \leq \frac{1}{2}$, de modo que cada bola esteja centrada numa singularidade da folheação e para cada i , $(M - \partial B_i)$ seja formada por conjuntos conexos disjuntos. Como o conjunto S das singularidades é compacto, temos que existe um número finito de bolas B_1, B_2, \dots, B_{k_1} como acima, tal que $S \subset \cup_{i=1}^{k_1} B_i$. Denotemos por $V_1 = \cup_{i=1}^{k_1} B_i$. Reduzindo o raio das bolas B_i caso seja necessário podemos supor que o bordo de V_1 ($\partial(V_1) = \overline{V_1} - V_1$) é formado por um número finito de arcos de círculos. As componentes do bordo formada por esses arcos são topologicamente “curvas fechadas” simples e disjuntas. Agora seja $\epsilon_2 = \frac{\epsilon_1}{2}$, procedendo da mesma maneira acima construiremos V_2 . Dessa forma, constrói-se indutivamente a família

$\{V_i \mid i = 1, 2, \dots\}$ tais que:

1. $M \supset \bar{V}_1 \supset V_1 \supset \bar{V}_2 \supset \dots \supset V_n \supset \bar{V}_{n+1} \supset \dots \supset S$
2. $\partial(V_i) = \bar{V}_i - V_i$ é constituído de um número finito de círculos dois a dois disjuntos.

Como $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ é um par contínuo de folheações orientáveis e transversais em M e o conjunto de singularidades S está ϵ_i -distante da fronteira de V_i aplicamos o lema 1 em cada ponto do bordo de V_i para obtermos uma cobertura do bordo ∂V_i de V_i por caixas abertas bifolheadas. Assim podemos aproximar cada curva do bordo de V_i por um círculo composto por um número finito de segmentos de folhas de \mathcal{F} e \mathcal{G} contidos em $V_i - \bar{V}_{i+1}$ e colocados alternadamente. A união de todos esses novos círculos forma a fronteira de uma variedade bi-dimensional compacta M_i satisfazendo $\bar{V}_{i+1} \subset \text{Int}(M_i) \subset \bar{M}_i \subset V_i$. Portanto obtemos uma família $\{M_i \mid i = 1, 2, \dots\}$ satisfazendo:

- $M_{i+1} \subset M_i \forall i \in \mathbb{N}$
- $\bigcap_{i=1}^{\infty} M_i = S$
- A fronteira ∂M_i é formada por uma união de círculos disjuntos, onde cada círculo é composto por um número finito de arcos de folhas de \mathcal{F} conectados a arcos de folhas de \mathcal{G} .

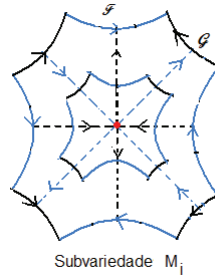


Figura 2.2: Subvariedades $M_{i,s}$

Afirmção 2. Para todo $i \in \mathbb{N}$, a união de todas as folhas compactas de \mathcal{F} (respec. de \mathcal{G}) contidas em $\bar{M}_{i-1} - M_i$ é um conjunto compacto. Isto é, folhas compactas acumulam em folhas compactas.

Demonstração. De fato, seja $\{\gamma_n\}$ uma seqüência de folhas compactas de \mathcal{F} em $(M_{i-1} - M_i)$ acumulando em uma órbita γ . Como \mathcal{F} só possui recorrências triviais em $(M_{i-1} - M_i)$, os conjuntos minimais de $\omega(\gamma)$, estando contidos em $(\overline{M_{i-1}} - \overline{M_i})$, devem ser folhas compactas. Isto implica que $\omega(\gamma)$ é uma folha compacta. Desde que γ é acumulada por folhas compactas, devemos ter $\omega(\gamma) = \gamma$ é uma folha compacta. A prova para as folhas compactas de \mathcal{G} é análoga. \square

Portanto, tal como foi feito por Gutierrez em [6], dado $i \in \mathbb{N}$ temos que para cada γ , folha compacta de \mathcal{F} contida em $\overline{M_{i-1}} - \overline{M_i}$, podemos escolher um par $(V_\gamma, \Sigma_\gamma)$ formado por uma vizinhança aberta V_γ de γ e um segmento compacto Σ_γ (arco de \mathcal{G} contido no interior de $M_{i-1} - M_i$) transversal a \mathcal{F} passando por γ , de modo que para cada $p \in V_\gamma$ a semi-folha $L^+(p)$ ou a semi-folha $L^-(p)$ intersecta Σ_γ . Assim podemos cobrir as folhas compactas de \mathcal{F} contidas em $\overline{M_{i-1}} - \overline{M_i}$ por pares $(V_\gamma, \Sigma_\gamma)$ do tipo acima. Pela compacidade da união das folhas compactas de \mathcal{F} em $\overline{M_{i-1}} - \overline{M_i}$, podemos extrair dessa cobertura uma subcobertura finita:

$$(V_{i1}, \Sigma_{i1_\gamma}), (V_{i2}, \Sigma_{i2_\gamma}), \dots, (V_{in_i}, \Sigma_{in_i_\gamma})$$

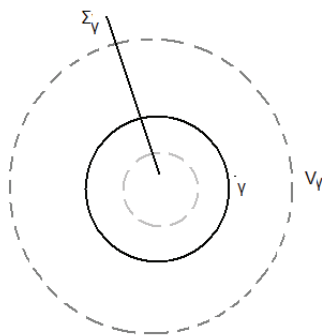


Figura 2.3: Vizinhança de uma folha compacta γ

Seja $\widehat{\Gamma}_0 := \bigcup_{i=1}^m \alpha_i$, ou seja, a união das transversais adaptadas α_i obtidas na seção 2.1.

Para cada $i \geq 1$ seja $\widehat{\Gamma}_i :=$ União finita dos segmentos transversais Σ_{ij_γ} determinados pelas vizinhanças $V_{i1}, V_{i2}, \dots, V_{in_i}$ e o conjunto de segmentos compactos do bordo de M_i que são transversais à folheação \mathcal{F} .

Agora seja $\widehat{\Gamma} := \bigcup_{i=0}^{\infty} \widehat{\Gamma}_i$. Dado $p \in \widehat{\Gamma}$, temos que o conjunto omega-limite de $L(p)$ (respectivamente o conjunto alfa-limite de $L(p)$) contém singularidades ou é uma

folha fechada ou então uma folha recorrente não trivial, veja figura 2.4. Portanto, pela construção de $\widehat{\Gamma}_i$ a aplicação de Poincaré para frente (respectivamente para trás) em $\widehat{\Gamma}$ induzida pela folheação \mathcal{F} está definida em todo $\widehat{\Gamma}$ e restrita a cada componente conexa $\widehat{\Gamma}_i$ de $\widehat{\Gamma}$ é descontínua num número finito de pontos.

Analogamente definimos:

- $\widehat{\Lambda}_0 := \bigcup_{j=1}^n \beta_j$, onde β_j são as transversais adaptadas contidas nas regiões de recorrência associada à folheação \mathcal{G} .
- Para cada $i \geq 1$ seja $\widehat{\Lambda}_i :=$ União finita dos segmentos transversais Σ_{jk_γ} determinados pelas vizinhanças $U_{j1}, U_{j2}, \dots, U_{jl_j}$ de folhas compactas de \mathcal{G} contidas em $\overline{M_{i-1} - M_i}$ e o conjunto de segmentos compactos do bordo de M_i que são transversais à folheação \mathcal{G} .
- Por último definimos $\widehat{\Lambda} := \bigcup_{i=0}^{\infty} \widehat{\Lambda}_i$.

Assim obtemos uma seção transversal para a folheação \mathcal{G} . Tal como tivemos para \mathcal{F} , temos que aplicação de Poincaré para frente (respectivamente para trás) em $\widehat{\Lambda}$ induzida pela folheação \mathcal{G} está definida em todo $\widehat{\Lambda}$ e restrita a cada componente conexa $\widehat{\Lambda}_i$ de $\widehat{\Lambda}$ é descontínua num número finito de pontos.

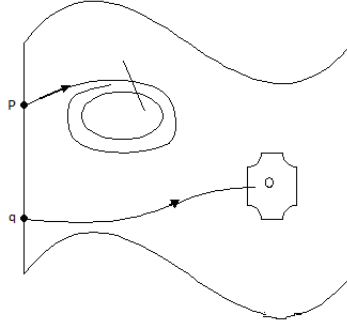


Figura 2.4: $\omega(p)$ é uma folha compacta; $\omega(q)$ é uma singularidade.

2.3 Decomposição de $M - S$ em Caixas Bifolheadas e as Novas Seções Transversais Λ e Γ

Nosso objetivo nesta seção é decompor $M - S$ em caixas bifolheadas especiais, ou seja, caixas retangulares tais que $\widehat{\Gamma}$ é a união dos bordos dessas caixas que são

transversais a \mathcal{F} e $\widehat{\Lambda}$ é a união dos bordos que são transversais a \mathcal{G} . Para conseguirmos esta decomposição será necessário acrescentarmos componentes tanto em $\widehat{\Gamma}$ quanto em $\widehat{\Lambda}$.

2.3.1 Caixas para \mathcal{F} e para \mathcal{G}

Seja $T_{\mathcal{F}} : \widehat{\Gamma} \rightarrow \widehat{\Gamma}$ a aplicação de Poincaré induzida pela folheação \mathcal{F} . Lembramos que $[p, q]_{\mathcal{F}}$ denota o arco de folha de \mathcal{F} que começa em p e termina em q , e denotamos por

$$\Delta_{\mathcal{F}} := \left\{ [p, q]_{\mathcal{F}}; p, q \in \widehat{\Gamma}, T_{\mathcal{F}}(p) = q \text{ e } T_{\mathcal{F}} \text{ é descontínua em } p \text{ ou } T_{\mathcal{F}}^{-1} \text{ é descontínua em } q \right\}.$$

Pela construção de $\widehat{\Gamma}$ e de $\Delta_{\mathcal{F}}$ temos que o fecho das componentes conexas do conjunto $M - (S \cup \Delta_{\mathcal{F}} \cup \widehat{\Gamma})$ são caixas bifolheadas cujos os bordos estão sobre $\widehat{\Gamma}$ e sobre $\Delta_{\mathcal{F}}$. No entanto, podemos ter uma caixa Y nessa decomposição, tal que o fecho \overline{Y} se auto-intersecta nos bordos transversais. Se este for o caso, decomponemos a "caixa" \overline{Y} numa união de duas caixas Y_1 e Y_2 , tendo como único lado comum um arco de folha de \mathcal{G} . Continuamos a denotar por $\widehat{\Gamma}$ a união de $\widehat{\Gamma}$ com todas as arestas transversais de Y_i , com $i \in \{1, 2\}$.

Assim temos que o conjunto $M - (S \cup \Delta_{\mathcal{F}} \cup \widehat{\Gamma})$ é formado por caixas bifolheadas que não se auto-intersecta. Como para cada inteiro i a fronteira de M_i (componente conexa da filtração) é composta por um número finito de componentes, e cada componente transversal a \mathcal{F} é formada por um número finito de seções transversais, temos que existe apenas um número finito de componentes conexas de $\widehat{\Gamma}$ em $M - M_i$. Portanto podemos enumerar o conjunto $M - (S \cup \Delta_{\mathcal{F}} \cup \widehat{\Gamma})$ por:

$$(\theta_1)_{\mathcal{F}}, (\theta_2)_{\mathcal{F}}, \dots, (\theta_j)_{\mathcal{F}}, \dots$$

O fecho de cada duas dessas componentes conexas se intersecta no máximo em um bordo comum.

Observação 3. *Observamos que as caixas bifolheadas $(\theta_j)_{\mathcal{F}}$ tem seus lados transversais sobre $\widehat{\Gamma}$, mas não necessariamente tem os lados tangentes sobre $\widehat{\Lambda}$. Portanto, ainda não são as caixas que necessitamos.*

Além disso, temos que cada caixa $(\theta_j)_{\mathcal{F}}$ está inteiramente contida em $M_{i-1} - M_i$ para algum $i \geq 1$, ou no máximo tem seus bordos transversais a \mathcal{F} contidos na fronteira de $M_{i-1} - M_i$.

Sejam $\Lambda_0 := \widehat{\Lambda}_0$ e $\Lambda_i := \widehat{\Lambda}_i \cup \{\text{Os lados tangentes de } (\theta_j)_{\mathcal{F}} \text{ que estão contidos em } M_{i-1} - M_i\}$.

Como para cada $i \geq 1$ existe apenas um número finito de caixas $(\theta_j)_{\mathcal{F}}$ contidas em $M_{i-1} - M_i$ temos que Λ_i é composto por um número finito de componentes transversais a \mathcal{G} .

Finalmente denotamos por:

$$\Lambda := \bigcup_{i=0}^{\infty} \Lambda_i$$

a transversal à folheação \mathcal{G} .

Observação 4. *Observamos que pela definição de Λ qualquer bordo tangente de uma caixa $(\theta_j)_{\mathcal{F}}$ está contido em Λ , mas nem toda componente de Λ contém bordo de caixa. Portanto, redefinimos a transversal $\widehat{\Gamma}$ e obtemos uma decomposição de $M - S$ em caixas com todas as propriedades desejadas.*

Seja $T_{\mathcal{G}} : \Lambda \rightarrow \Lambda$ a aplicação de Poincaré induzida pela folheação \mathcal{G} . Lembramos que $[p, q]_{\mathcal{G}}$ denota o arco de folha de \mathcal{G} que começa em p e termina em q , e denotamos por

$$\Delta_{\mathcal{G}} := \{[p, q]_{\mathcal{G}}; p, q \in \Lambda, T_{\mathcal{G}}(p) = q \text{ e } T_{\mathcal{G}} \text{ é descontínua em } p \text{ ou } T_{\mathcal{G}}^{-1} \text{ é descontínua em } q\}.$$

Como a restrição de $T_{\mathcal{G}}$ a cada componente conexa Λ_i é descontínua num número finito de pontos, temos que em cada conjunto $M_{i-1} - M_i$ existe apenas um número finito de elementos de $\Delta_{\mathcal{G}}$.

Sejam $\Gamma_0 := \widehat{\Gamma}_0$ e $\Gamma_i := \widehat{\Gamma}_i \cup \{\text{Os elementos de } \Delta_{\mathcal{G}} \text{ que estão contidos em } M_{i-1} - M_i\}$.

Finalmente definimos a nova seção transversal à folheação \mathcal{F} por

$$\Gamma := \bigcup_{i=0}^{\infty} \Gamma_i$$

Observação 5. *Observamos que a restrição da aplicação de Poincaré $T_{\mathcal{F}} : \Gamma_i \rightarrow \Gamma$ induzida pela folheação \mathcal{F} ainda é descontínua em apenas um número finito de pontos.*

É claro que as componentes conexas de $M - (S \cup \Gamma \cup \Lambda)$, são caixas bifolheadas cujos bordos transversais a \mathcal{F} estão sobre componentes de Γ e os bordos transversais a \mathcal{G} estão sobre componentes de Λ , conforme queríamos. Tudo isso que foi feito prova a seguinte proposição:

Proposição 1. *Seja $S \neq \emptyset$, fechado e totalmente desconexo o conjunto das singularidades de \mathcal{F} e de \mathcal{G} . Então $M - S$ pode ser expresso como a união de caixas bifolheadas (θ_i) com $i \in \mathbb{N}$, cujos lados transversais a \mathcal{F} estão contidos em Γ e os lados transversais a \mathcal{G} estão contidos em Λ , tais que:*

- (a) *Cada conjunto compacto de $M - S$ está contido na união de um número finito destas caixas folheadas (θ_i) ;*
- (b) *Se $i \neq j$, então $(\theta_i) \cap (\theta_j) = \partial(\theta_i) \cap \partial(\theta_j)$;*

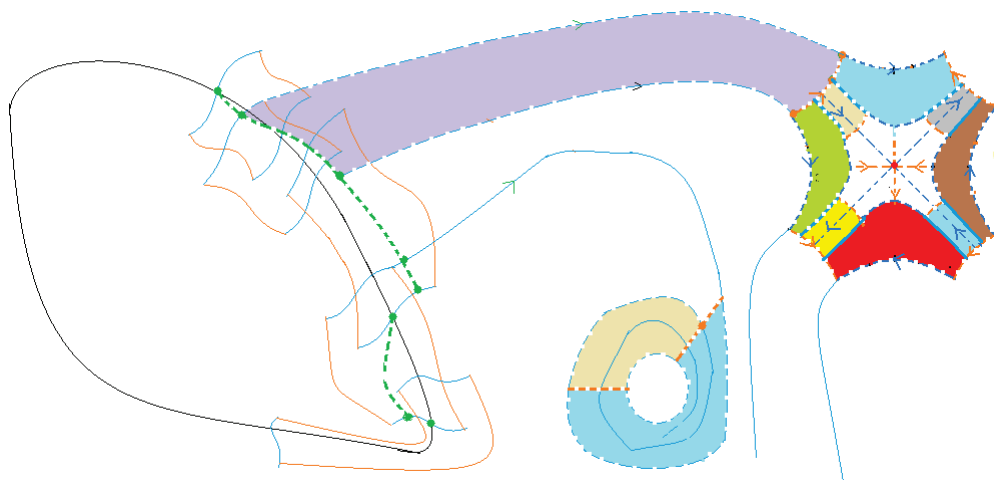


Figura 2.5: Decomposição de M em caixas Folheadas para \mathcal{F} e \mathcal{G}

Capítulo 3

Uma Medida Adequada nas Seções Transversais

Neste capítulo munimos a transversal global Γ (respec. Λ), construída no capítulo 2, de uma medida distinguida μ (respec. de uma medida η). Essa medida é construída de tal forma que a aplicação de Poincaré $T_{\mathcal{F}} : \Gamma \rightarrow \Gamma$ induzida por \mathcal{F} (respec. $T_{\mathcal{G}} : \Lambda \rightarrow \Lambda$, induzida por \mathcal{G}) será de classe C^1 ou de classe C^∞ , dependendo da existência de conjunto minimal não trivial. O processo de construção dessa medida distinguida é independente para cada uma das aplicações de Poincaré e é o mesmo utilizado por Carlos Gutierrez no artigo [6].

No capítulo anterior foi necessário e conveniente utilizarmos as transversais adaptadas α_i no lugar dos círculos transversais C_i para que obtivéssemos uma decomposição de $M - S$ em caixas bifolheadas. Agora o nosso objetivo é o de construir e "espalhar" uma medida por toda Γ . Para isto, vamos trabalhar com a transversal $\tilde{\Gamma} := (\Gamma - \Gamma_0) \cup \Sigma_0$, isto é, substituímos a união das transversais adaptadas Γ_0 pela união dos respectivos círculos transversais Σ_0 . Dessa forma, muniremos $\tilde{\Gamma}$ de uma medida distinguida e posteriormente induzimos a medida em Γ , bastando para isso transferir, pela projeção da aplicação de Poincaré, a medida dos círculos transversais Σ_0 para as transversais adaptadas Γ_0 .

No artigo [6], Gutierrez usa o seguinte resultado para fluxo contínuo: *O interior do conjunto de pontos não errantes para o fluxo contínuo consiste de pontos recorrentes.* Este resultado é falso. Na seção 3.2.1 damos um contra-exemplo. No entanto, é importante dizer que apesar desse resultado não ser verdadeiro, isso em nada prejudica ou compromete os resultados que foram obtidos por Gutierrez naquele artigo, pois é facilmente solucionado. Para isto enunciamos e provamos o lema 6 que serve para resolver esse impasse. O leitor familiarizado com o artigo [6] pode passar diretamente para o próximo capítulo sem nenhum prejuízo, pois salvo pequenas adaptações a construção da medida é a mesma.

3.1 Medida Distinguida

Desde que o processo de construção da medida é independente para cada uma das aplicações de Poincaré, nos restringiremos apenas à transversal global Γ . Construiremos apenas a medida distinguida μ na seção transversal para \mathcal{F} . Uma medida η sobre a transversal Λ é obtida de maneira similar.

Definição 20. *Seja $\sigma = [a, b]$ um segmento orientado fechado começando em a e terminando em b . Uma medida μ sobre a álgebra de Borel de σ será chamada **medida distinguida** sobre σ se :*

1. μ for positiva e finita, isto é, $0 < \mu(\sigma) < \infty$.
2. A aplicação $h : \sigma \rightarrow [0, \mu(\sigma)]$ dada por $h(x) = \mu([a, x]_\sigma)$ for um homeomorfismo, onde $[a, x]_\sigma$ denota um segmento em σ com extremos a e x .

Esta aplicação h será chamada μ -homeomorfismo de σ .

Seja $\{\Sigma_i\}_{i \in I}$ uma família segmentos ou círculos. Dizemos que μ é uma medida distinguida sobre esta família, se, para todo $i \in I$, e para todo segmento orientado fechado $\lambda \subset \Sigma_i$, $\mu|_\lambda$ for uma medida distinguida sobre λ .

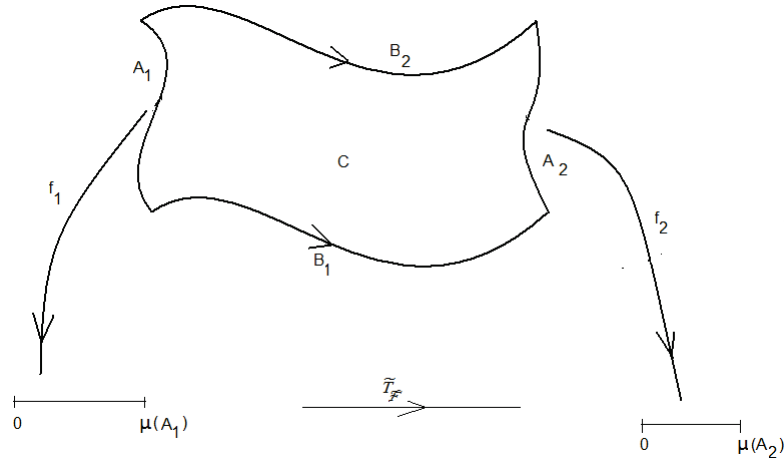


Figura 3.1: μ homeomorfismos

Dada uma folheação contínua e orientável \mathcal{F} , seja C uma caixa folheada tendo arestas A_1 e A_2 transversais a \mathcal{F} . Seja $T_{\mathcal{F}} : A_1 \rightarrow A_2$ a aplicação de Poincaré induzida por $\mathcal{F}|_C$. Fixemos em A_1, A_2 orientações que são preservadas pela aplicação $T_{\mathcal{F}}$. Seja μ uma medida distinguida sobre a família $\{A_1, A_2\}$. Denotamos por f_1 o μ -homeomorfismo de A_1 e por f_2 o μ -homeomorfismo de A_2 . A aplicação $T_{\mathcal{F}}$ **da caixa**

folheada C será μ -suave (respectivamente $\mu - C^1$) se a μ -expressão coordenada de $T_{\mathcal{F}}, \tilde{T}_{\mathcal{F}} : [0, \mu(A_1)] \rightarrow [0, \mu(A_2)]$, definida por:

$$\tilde{T}_{\mathcal{F}} = f_2 \circ T_{\mathcal{F}} \circ f_1^{-1} : [0, \mu(A_1)] \rightarrow [0, \mu(A_2)]$$

for suave (respectivamente C^1).

Para os resultados que enunciaremos abaixo necessitamos das seguintes definições:

Seja I um intervalo compacto de \mathbb{R} . Seja $f, g : I \rightarrow \mathbb{R}$ aplicações suaves. Definimos

$$\|f\|_0 = \sup\{|f(x)|/x \in I\},$$

e para $k \in \mathbb{N}$,

$$\|f\|_k = \max\{\|f\|_0, \|f'\|_0, \dots, \|f^k\|_0\}.$$

Dado $\epsilon > 0$, dizemos que f é ϵ -próxima de g na topologia C^k se $\|f - g\|_k \leq \epsilon$.

Definição 21 (T^δ -Sequências). *Seja $\delta \in \{-1, 1\}$. Uma sequência finita*

$\Sigma = \{\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n\}$ de segmentos abertos de Γ , dois a dois disjuntos, será chamada de uma T^δ -sequência se quaisquer dois de seus termos consecutivos Σ_i e Σ_{i+1} satisfizerem $T^\delta(\Sigma_i) = \Sigma_{i+1}$. Além disso, se $\Sigma = \{\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n\}$ é uma T^δ -sequência tal que :

- (a) $T^{\delta n}(\Sigma_1) \subset \Sigma_1$ e $T^{\delta n}|_{\Sigma_1}$ admite uma extensão contínua a $\bar{\Sigma}_1$ e esta extensão tem um único ponto fixo que é um atrator que está situado em um dos extremos de Σ_1 . Então diremos que Σ é uma T^δ -sequência atratora. Neste caso, o intervalo $\Sigma_1 - T^{\delta n}(\Sigma_1)$ será chamado de domínio fundamental de Σ .
- (b) Se $T^{\delta n}(\Sigma_1) = \Sigma_1$ e todo ponto de Σ_1 é um ponto fixo de $T^{\delta n}$, então diremos que Σ é uma T^δ -sequência periódica.
- (c) Se Σ_1 é um segmento errante, então diremos que Σ é errante.

A união de todos os termos de Σ será denotado por $\text{span}(\Sigma)$.

Os seguintes três lemas estão provados em [6]

Lema 2. *Sejam $\tau \in \{T, T^{-1}\}$ e $\Sigma = \{\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n\}$ uma τ -sequência atratora. Para cada $\epsilon \in (0, 1)$ e $k \in \mathbb{N}$, existe $\rho > 0$ tal que se $\tilde{\mu}$ é uma medida distinguida no domínio fundamental D de Σ com $\tilde{\mu}(D) \leq \rho$, então existe uma medida distinguida μ em Σ , estendendo $\tilde{\mu}$ tal que $\sum_{i=1}^n \mu(\Sigma_i) \leq \epsilon$ e para todo $i \in \{1, \dots, n\}$ a expressão μ -coordenada $\tilde{\tau} : [0, \mu(\Sigma_i)] \rightarrow [0, \mu(\Sigma_{i+1})]$ de $\tau : \bar{\Sigma}_i \rightarrow \bar{\Sigma}_{i+1}$ é suave 2^k -perto (na topologia C^k) da identidade de $[0, \mu(\Sigma_1)]$, e sua derivada $\tilde{\tau}'$ tem infinitas ordens de contato em $x \in \{0, \mu(\Sigma_i)\}$ com a aplicação constante $\equiv 1$.*

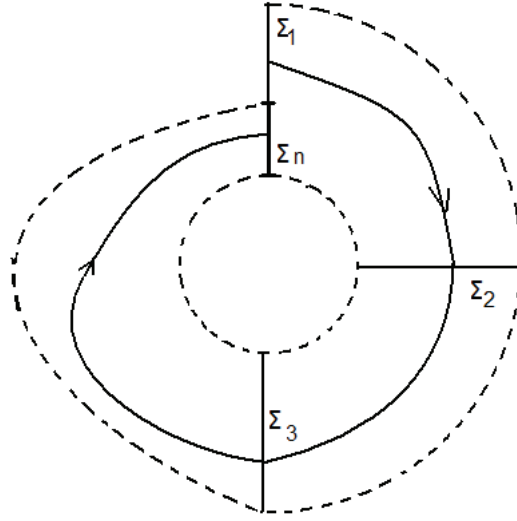


Figura 3.2: Sequência atratora

Lema 3. *Sejam $\tau \in \{T, T^{-1}\}$ e $\Sigma = \{\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n, \Sigma_{n+1}\}$ uma τ -sequência. Seja $\tilde{\mu}$ é uma medida distinguida em Σ_1 . Então para cada $\epsilon > 0$, existe em Σ uma medida distinguida canônica μ estendendo $\tilde{\mu}$ tal que a extensão contínua $\tau_1 : [0, \mu(\Sigma_1)] \rightarrow [0, \mu(\Sigma_2)]$ da expressão μ -coordenada de $\tau|_{\Sigma_1}$ (definida em $(0, \mu(\Sigma_1))$) é suave e sua derivada τ_1' tem contato de ordem infinita com a aplicação constante $\equiv 1$. Além disso, para todo $i = 2, \dots, n$, a expressão μ -coordenada de $\tau|_{\Sigma_i}$ é a aplicação identidade de $(0, \frac{\epsilon}{n})$.*

Lema 4. *Seja $f : [a, b] \rightarrow [c, d]$ um homeomorfismo crescente. Então f é suave (em $[a, b]$) e tem ordem de contato infinita em $x \in \{a, b\}$ com a aplicação $t \rightarrow t - x + f(x)$ se para alguma sequência $\{[a_i, b_i] | i \in \mathbb{N}\}$ de subintervalos fechados de $[a, b]$ dois a dois disjuntos, as seguintes condições são verificadas:*

(A) $[a, b] = \overline{\cup_{i=1}^{\infty} [a_i, b_i]}$, $\sum_{i=1}^{\infty} (b_i - a_i) = b - a$ e $\sum_{i=1}^{\infty} (f(b_i) - f(a_i)) = d - c$.

(B) Para todo $i \in \mathbb{N}$ e para $x \in \{a_i, b_i\}$, $f|_{[a_i, b_i]}$ é suave e tem contato de ordem infinita em x com a aplicação $t \rightarrow t - x + f(x)$ definido sobre $[a_i, b_i]$.

(C) Existe N tal que para todo inteiro positivo $i \geq N$,

$$\|f|_{[a_i, b_i]} - (Id|_{[a_i, b_i]} + f(a_i) - a_i)\|_i \leq 1/i$$

onde Id é a aplicação identidade de \mathbb{R} .

3.2 A Medida na Transversal Global $\tilde{\Gamma}$

Lembrando que $\tilde{\Gamma} := (\Gamma - \Gamma_0) \cup \Sigma_0$, primeiro construímos uma medida distinguida na parte errante de $\tilde{\Gamma}$. Em seguida construímos uma medida distinguida nas T^δ -sequências periódicas e uma medida nas T^δ -sequências atratoras. E por último construímos medidas distinguidas nos círculos transversais C_i . Essas medidas são construídas de tal forma que a aplicação de Poincaré $T_{\mathcal{F}}$ induzida pela folheação \mathcal{F} será μ - C^1 ou μ -suave, dependendo da existência de minimais não triviais.

Seja \mathcal{A}_P (resp. \mathcal{A}_A) o conjunto cujos elementos λ são caracterizados como segue:

- $\lambda_1 \in \lambda$ se, e somente se, λ_1 é uma T^δ -sequência periódica (resp. atratora), onde $\delta \in \{-1, 1\}$
- Se $\lambda_1, \lambda_2 \in \lambda$, então $span(\lambda_1) \cap span(\lambda_2) = \emptyset$.

Se $\mathcal{A}_G \neq \emptyset$, onde \mathcal{A}_G denota \mathcal{A}_P ou \mathcal{A}_A , então a inclusão usual de conjuntos " \subset " induz uma relação de ordem parcial em \mathcal{A}_G . É fácil ver que \mathcal{A}_G é indutivamente ordenado. Seja \mathbb{A}_G o elemento maximal de \mathcal{A}_G segundo a relação de ordem " \subset " garantido pelo lema de Zorn. Então, temos que: $\mathbb{A}_P = \{P_1, P_2, \dots\}$, onde P_i é uma T^δ -sequência periódica com $\delta \in \{-1, 1\}$ e $\mathbb{A}_A = \{A_1, A_2, \dots\}$, onde A_i é uma T^δ -sequência atratora com $\delta \in \{-1, 1\}$. Pela maximalidade dos conjuntos \mathbb{A}_P e \mathbb{A}_A , em relação à inclusão temos que:

(1) O fecho em $\tilde{\Gamma}$ do conjunto $\bigcup_{i,j=1}^{\infty} (span(A_i) \cup span(P_j))$ é uma vizinhança do conjunto de pontos de $\tilde{\Gamma}$ que pertencem às folhas compactas de \mathcal{F} .

3.2.1 Intervalos errantes em $\tilde{\Gamma}$

Como indicado na introdução do capítulo, o lema (4.7) que aparece em Gutierrez [6] é falso. A seguir enunciamos o lema e damos o respectivo contra-exemplo. O argumento da prova do contra-exemplo é devido a A.Lopez.

Lema 5. *O interior do conjunto de pontos não errantes para φ consiste de pontos recorrentes.*

Exemplo 2 (Contra-exemplo). *Seja $\varphi : T^2 \times \mathbb{R} \rightarrow T^2$ um fluxo no toro com todas as órbitas densas. Colocamos duas singularidade p e q do tipo remomível sobre uma das órbitas (Veja a figura).*

Observamos que todos os pontos de T^2 são pontos não errantes. No entanto, qualquer ponto do arco $[p, q]$ não é recorrente, pois sua órbita vai para singularidade.

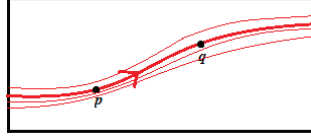


Figura 3.3: Toro com 2 singularidades do tipo remomível

Embora o lema 5 seja falso, isto não prejudica o resultado final de Gutierrez. Para isto, basta considerar o seguinte lema que vem resolver satisfatoriamente o problema da extensão da medida.

Lema 6. *O interior do conjunto dos pontos não errantes para a folheação \mathcal{F} está contido no fecho (topológico) dos pontos recorrentes.*

O argumento da demonstração abaixo é devido a A.Lopez.

Demonstração. Sejam $NW(\mathcal{F})$ e $R(\mathcal{F})$ o conjunto dos pontos não errantes e o conjunto dos pontos recorrentes para \mathcal{F} , respectivamente. Devemos mostrar que:

- $int(NW(\mathcal{F})) \subset \overline{R(\mathcal{F})}$

Suponhamos que $int(NW(\mathcal{F})) \neq \emptyset$. Seja I um intervalo transversal a \mathcal{F} contido em $int(NW(\mathcal{F}))$. Consideramos $\{I_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma base enumerável de I . Aqui cada I_n é um intervalo aberto na topologia induzida de M . Definimos o seguinte conjunto:

$$C_n := \{p \in \bar{I}_n \mid \#\{L(p) \cap I_n\} < n\},$$

onde $L(p)$ denota a folha que intersecta o intervalo I no ponto p e $\#\{L(p) \cap I_n\}$ denota o número de vezes que a folha $L(p)$ intersecta o intervalo I_n . Afirmamos que para cada n o conjunto C_n é fechado e tem interior vazio. De fato, seja $(p_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência de pontos em C_n convergindo para p . Suponhamos por absurdo que $\#\{L(p) \cap I_n\} \geq n$. Pela continuidade das folhas nas partes compactas temos que para um k suficientemente grande, a folha $L(p_k)$ satisfaz $\#\{L(p_k) \cap I_n\} \geq n$, isso contradiz o fato de $p_k \in C_n$. Portanto C_n é fechado. Agora mostraremos que $int(C_n) = \emptyset$. Suponhamos por absurdo que exista um intervalo aberto $J \subset int(C_n)$. Então $J \subset \bar{I}_n$ e $\#\{L(p) \cap I_n\} < n \forall p \in J$. Como J é não errante temos que existe uma folha L que intersecta J em pelo menos dois pontos. Sejam $p \in J \cap L$ e $q \in I \cap L$ tais que $\#\{L(p, q) \cap I_n\} = \#\{L(p) \cap I_n\} < n$, onde $L(p, q)$ é o segmento de folha que une os pontos p e q . Novamente pela continuidade das folhas nas partes compactas temos que existe uma vizinhança $V(L(p, q))$ do segmento de folha $L(p, q)$ disjunto das singularidades da folheação de modo que para todo p_2 suficientemente próximo

do ponto p temos que existem um ponto $q_2 \in I$ e uma folha L_2 contendo esses pontos de modo que $L_2(p_2, q_2)$ está contido na vizinhança $V(L(p, q))$ e;

$$\#\{L_2(p_2, q_2) \cap I_n\} = \#\{L(p, q) \cap I_n\} = \#\{L(p) \cap I_n\} < n$$

Seja A um intervalo centrado em p_2 , suficientemente pequeno de tal forma que $A \subset V(L(p, q)) \cap J$. Como A é não errante temos que existe uma folha L_3 que intersecta A em pelos menos dois pontos. No entanto, um pedaço de segmento compacto da folha L_3 está contido na vizinhança $V(L(p, q))$. Assim $\#\{L_2(p_2, q_2) \cap I_n\} < \#\{L_3 \cap I_n\}$. Repetindo o procedimento anterior com o ponto p agora na interseção $L_3 \cap J$ e a folha $L(p)$ sendo L_3 , temos que é possível encontrar uma folha L_k intersectando o intervalo J no ponto p_k /, para k suficientemente grande, tal que

$$n < \#\{L(p_k) \cap I_n\}.$$

Isso contradiz o fato de que $p_k \in J \subset C_n$. Portanto, $\text{int}(C_n) = \emptyset$. Dessa forma temos que o conjunto $R := I - \bigcup_{n=1}^{\infty} C_n$ é denso em I . Seja $x \in R$, mostraremos que x é recorrente. De fato, se x não fosse recorrente, existiria um elemento I_n da base tal que $\#\{L(x) \cap I_n\} < n$, isto implicaria que $x \in C_n$, o que é um absurdo. Portanto, dado $x \in I \subset \text{int}(NW(\mathcal{F}))$ temos que $x \in \overline{R(\mathcal{F})}$. \square

Definição 22. *Seja C_i um círculo transversal do tipo excepcional, isto é, dado $L_{\mathcal{F}}$ uma folha recorrente tem-se que o fecho $\overline{L_{\mathcal{F}} \cap C_i}$ em C_i é um subconjunto de Cantor de C_i . Consideramos $T_i : C_i \rightarrow C_i$ a aplicação de primeiro retorno induzida por \mathcal{F} . Definimos $\text{Rec}(C_i)$ como sendo o conjunto de segmentos de folhas $L = [p, T_i(p)]_{\mathcal{F}}$ que satisfazem a uma das duas condições:*

$p \in \overline{L \cap C_i}$, ou

p pertence a uma componente conexa I de $C_i - \overline{L \cap C_i}$, que esta contida no domínio de T_i .

Sejam A_i uma T^δ -sequência atratora com domínio fundamental D_i , P_j uma T^δ -sequência periódica e $G_r = G_r^+ \cup G_r^-$ a porta na variedade $\text{Rec}(C_r)$. Definimos $\widetilde{\mathcal{W}}$ como sendo o complementar em $\widetilde{\Gamma}$ da união dos conjuntos:

$$\bigcup_{i,j=1}^{\infty} [(span(A_i) - \overline{D_i}) \cup span(P_j)], \bigcup_{t=1}^l \bigcup_n T^n(C_t), \bigcup_{r=l+1}^m [(Rec(C_r) \cap \widetilde{\Gamma}) - G_r].$$

Onde C_t e C_r são os círculos transversais do tipo denso e do tipo excepcional, respectivamente. Se ξ denota o conjunto das folhas de \mathcal{F} que passam pelo bordo de cada domínio fundamental D_i , definimos por \mathcal{W} o interior dos pontos errantes do conjunto $\widetilde{\mathcal{W}} - \xi$. Como $\xi \cap \widetilde{\Gamma}$ é um subconjunto com interior vazio, afirmamos que:

Afirmção 3. \mathcal{W} é aberto e denso em $\widetilde{\mathcal{W}}$

Pela definição de \mathcal{W} basta mostrar a densidade. Com efeito, se existisse um intervalo aberto I não errante contido em $\widetilde{\mathcal{W}}$, então pela definição de $\widetilde{\mathcal{W}}$ e por (1) não existiria folhas compactas passando por I . Logo, pelo lema 6 deveria existir um círculo transversal do tipo denso ou do tipo excepcional passando por $\widetilde{\mathcal{W}}$, o que é um absurdo, pela própria definição de $\widetilde{\mathcal{W}}$. Portanto está verificada a afirmação.

Seja \mathcal{A}_W o conjunto formado por elementos λ tais que cada elemento de λ é formado por segmentos abertos errantes com respeito à folheação \mathcal{F} contidos em \mathcal{W} e se $\lambda_1, \lambda_2 \in \lambda$, então $\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n(\lambda_1)\right) \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n(\lambda_2)\right) = \emptyset$.

Observamos que se \mathcal{W} contém algum segmento errante, então $\mathcal{A}_W \neq \emptyset$. Assim, considerando a inclusão de conjuntos como uma relação de ordem parcial em \mathcal{A}_W , temos pelo lema de Zorn, que existirá um elemento maximal \mathbb{A}_W no conjunto \mathcal{A}_W . Como vimos, pelo fato de M possuir base enumerável, o conjunto \mathbb{A}_W é no máximo enumerável. Portanto, seja $\mathbb{A}_W = \{W_1, W_2, \dots\}$. Como \mathbb{A}_W é maximal em \mathcal{A}_W pela relação de inclusão de conjuntos, e como cada W_i é um intervalo aberto, temos que:

(2) $\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n(W_k)$ é um aberto e denso em \mathcal{W} e $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n(W_i) \cap \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n(W_j) = \emptyset$, para todo $i \neq j$.

Afirmação 4. Com as notações acima temos que:

1. A união dos conjuntos $\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n(W_k)$, $\bigcup_{i,j=1}^{\infty} [(span(A_i) - \overline{D}_i) \cup span(P_j)]$, $\bigcup_{t=1}^l \bigcup_n T^n(C_t)$, $\bigcup_{r=l+1}^m [(Rec(C_r) \cap \widetilde{\Gamma}) - G_r]$ é um conjunto aberto e denso em $\widetilde{\Gamma}$.
2. Pra cada $j, r \in \mathbb{Z}^+$, $\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n(W_k)$ nunca intersecta os extremos dos intervalos D_j e G_r .

O primeiro ítem segue da construção dos conjuntos. O segundo ítem segue da definição do conjunto \mathcal{W} , do fato de que \mathcal{W} é aberto e denso em $\widetilde{\mathcal{W}}$ e do fato que os bordos das portas de entrada e saída G_r pertencem ao fecho de folhas recorrentes excepcionais.

Para cada inteiro k seja:

$$\mathcal{B}_k = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n(W_k) - \left[\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} [(span(A_i) - \overline{D}_i)] \right) \cup \left(\bigcup_{r=l+1}^m [Rec(C_r) \cap \widetilde{\Gamma} - G_r] \right) \right].$$

3.2.2 Regularização nas partes errantes $\bigcup_{k=1}^{\infty} \mathcal{B}_k$ de $\tilde{\Gamma}$

Dados $(\delta, s) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{N}$ e λ um intervalo contido em $\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_n T^n(W_k)$, define-se o conjunto

$$G(\delta, s, \lambda) := \{\lambda, T^\delta(\lambda), \dots, T^{n\delta}(\lambda), \dots\}$$

como sendo a maior seqüência em relação as seguintes propriedades:

- Cada $T^{n\delta}(\lambda)$ é um intervalo aberto de $\bigcup_{k=1}^{\infty} \bigcup_n T^n(W_k)$, disjunto de:

$$\left(\bigcup_{i=1}^{\infty} (\text{span}(A_i) - \bar{D}_i) \right) \cup \left(\bigcup_{r=l+1}^m [(Rec(C_r) \cap \tilde{\Gamma}) - G_r] \right).$$

- Exceto pra cada λ e $T^\delta(\lambda)$, cada termo da seqüência está contido em $\Sigma_0 \cup \bigcup_{j=1}^s \Gamma_j$.

Afirmção 5. Para cada $(\delta, s) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{N}$, $G(\delta, s, \lambda)$ é uma T^δ -seqüência.

Basta ver que $G(\delta, s, \lambda)$ é finito, mas isto é claro utilizando a definição e a filtração para M .

Seja λ um intervalo aberto de $\tilde{\Gamma}$. Um subintervalo aberto I de λ será dito T^δ -derivado de λ , se e somente se, $T^\delta(I)$ é também um intervalo aberto de $\tilde{\Gamma}$, e não existe outro subintervalo aberto em λ contendo I e tal que sua imagem por T^δ seja um intervalo.

Lembramos que pela observação 5 do capítulo 2, a aplicação de Poincaré $T^\delta|_{\Sigma_0 \cup \Gamma_i} : \Sigma_0 \cup \Gamma_i \rightarrow \Gamma$, para cada $i \in \mathbb{N}$ é descontínua num número finito de pontos. Assim, temos que:

(3) O fecho em $\tilde{\Gamma}$ de cada intervalo λ é formado pela união finita dos fechos de seus intervalos T^δ -derivados.

Para cada $W_k \in \mathbb{A}_W$, definimos por indução em $s \in \mathbb{Z} - \{0\}$, a família finita de T^δ -seqüências errantes $\Sigma_k^s = \{\Sigma_{k_1}^s, \dots, \Sigma_{k_{s_k}}^s\}$ com $\delta = \frac{s}{|s|}$ como segue:

(4) Para $s \in \{-1, 1\}$, definimos; $s_k = 1$ e $\Sigma_k^s = \{\Sigma_{k, s_k}^s\}$, onde $\Sigma_{k, s_k}^s := G(\delta, k, W_k)$.

Pela afirmação 6 $G(\delta, k, W_k)$ é uma T^δ -seqüência.

Para definir Σ_k^2 (define-se Σ_k^{-2} de maneira similar) usamos (3) no último intervalo que forma a T^δ -seqüência $G(\delta, k, W_k)$, ou seja,

(5) Para $s = 2$, denotemos por $s_k := 2_k$ o número de subintervalos T^δ -derivados que formam o último intervalo da T^δ -seqüência $\Sigma_k^1 = \{\Sigma_{k,1}^1\} = G(\delta, k, W_k)$. Por (3) temos que s_k é finito, assim definiremos Σ_k^2 por $\{\Sigma_{k_1}^2, \dots, \Sigma_{k_{2_k}}^2\}$, onde $\Sigma_{k_j}^2 :=$

$G(\delta, 2k, \lambda)$, para cada $j \in \{1, \dots, 2k\}$, sendo λ um subintervalo T^δ -derivado do último intervalo da T^δ -sequência $G(\delta, k, W_k)$. Seguindo este processo de indução, temos que se $\Sigma_k^{s-1} = \{\Sigma_{k1}^{s-1}, \dots, \Sigma_{k(s-1)_k}^{s-1}\}$ está definido, então:

(6) Para o inteiro s , definiremos Σ_k^s como $\{G(\delta, k|s|, \lambda); \lambda \text{ é um intervalo aberto, } T^\delta\text{-derivado do último termo de } \Sigma_{kj}^{s-1}, \text{ para cada } j \in \{1, 2, \dots, (s-1)_k\}\}$

(7) Para cada $r \in \mathbb{Z}^+$ e $\delta \in \{-1, 1\}$, existe um número finito de T^δ -sequências $\{\Sigma_{kj}^s \forall s \in \mathbb{Z} - \{0\}, k \in \mathbb{N}, j \in \{1, \dots, s_k\}\}$ com seu primeiro termo em Γ_r . (pois a aplicação de Poincaré $T^\delta|_{\Gamma_i} : \Gamma_i \rightarrow \tilde{\Gamma}$, para cada $i \in \mathbb{N}$ é descontínua num número finito de pontos).

Pelo lema 2 temos que:

(8) Dado o termo $A_i \in \mathbb{A}_A$, existe um número real positivo $\sigma_i \in (0, 1)$ tal que se $\tilde{\mu}$ é uma medida distinguida no domínio fundamental D_i da T^δ -sequência atratora A_i , com $0 < \tilde{\mu}(D_i) \leq \sigma_i$, então existe μ , uma extensão canônica da medida $\tilde{\mu}$, em toda A_i , tal que $\mu(\text{span}(A_i)) \leq 2^{-i}$.

Agora, dado $k \in \mathbb{N}, s \in \mathbb{Z}^+$, denotemos por:

- $n(1)$ o número de elementos de Σ_k^1 e Σ_k^{-1}
- Para todo $s \geq 2$, $n(s)$ denotará o total de elementos das T^δ -sequências que formam Σ_k^s e Σ_k^{-s} , com $\delta \in \{-1, 1\}$.
- σ a aplicação definida em $\Sigma_k^s = \{\Sigma_{k1}^s, \dots, \Sigma_{ks_k}^s\}$, que associa a cada T^δ -sequência Σ_{ki}^s o valor $\left(\frac{2^{-k-|s|}}{n(s)}\sigma_{i_0}\right)$, se o último termo de Σ_{ki}^s estiver contido em algum domínio fundamental D_{i_0} , $\left(\frac{2^{-k-|s|}}{n(s)}\tilde{\sigma}_{i_0}\right)$ se o último termo de Σ_{ki}^s estiver contido em alguma das portas de G_r ou o valor $\left(\frac{2^{-k-|s|}}{n(s)}\right)$ se o último termo de Σ_{ki}^s for disjunto de $\cup_i D_i$ e $\cup_r G_r$.

Agora para cada inteiro positivo k , definiremos uma medida distinguida μ em W_k e a estenderemos ao conjunto $\cup_{j=1} \cup_{s \in \mathbb{Z} - \{0\}} \text{span}(\Sigma_{kj}^s)$.

PASSO 1. Para cada inteiro positivo k , defina-se μ , medida distinguida em W_k por:

$$\mu(W_k) := \frac{(\sigma(\Sigma_{k1}^1) + \sigma(\Sigma_{k1}^{-1}))}{2}$$

PASSO 2. Se $\delta \in \{-1, 1\}$ e $T^{\delta j}(W_k)$ é um intervalo de Σ_{k1}^δ , então defina-se μ em $T^{\delta j}(W_k)$ por:

$$\mu|_{T^{\delta j}(W_k)} := \mu \circ T^{-\delta j}|_{T^{\delta j}(W_k)}$$

PASSO 3. Sabemos por (3) que o último elemento da T^δ -sequência Σ_{k1}^δ é uma união finita de seus 2_k subintervalos T^δ -derivados, assim, pelo passo 2, a medida μ

de cada um desses subintervalos está bem definida. Segue da afirmação 6 e do lema 3 que para todo $j \in \{1, \dots, 2_k\}$, existe uma medida distinguida (estendendo μ) em $\Sigma_{kj}^{2\delta}$ e de tamanho $\sigma(\Sigma_{kj}^{2\delta})$. Continuando a denotar esta medida por μ , temos que $\mu(\text{span}(\Sigma_{kj}^{2\delta})) = \sigma(\Sigma_{kj}^{2\delta})$, onde $\Sigma_{kj}^{2\delta} := \{\Sigma_{k1}^{2\delta}, \dots, \Sigma_{k2_k}^{2\delta}\}$.

Repetindo o passo 2 em cada uma das T^δ -sequência $\Sigma_{kj}^{2\delta}$ e utilizando indução em s , temos que:

(9) A medida μ , definida no passo 1, é estendida ao conjunto $\Sigma_k^{s\delta} := \{\Sigma_{k1}^{s\delta}, \dots, \Sigma_{ks_k}^{s\delta}\}$, para todo $s \in \mathbb{Z}^+$, de modo que sendo $\delta \in \{-1, 1\}$, tenhamos $\mu(\text{span}(\Sigma_{kj}^{s\delta})) = \sigma(\Sigma_{kj}^{s\delta})$ para todo $j \in \{1, \dots, s_k\}$.

Portanto, para qualquer intervalo aberto λ em Σ_{k1}^δ tal que $T^\delta(\lambda) \in \Sigma_{k1}^\delta$ a expressão da μ -coordenada de $T^\delta : \lambda \rightarrow T(\lambda)$, é a aplicação identidade de $(0, \mu(\lambda))$. Além disso,

$$\mu(\text{span}(\Sigma_{k1}^1) \cup \text{span}(\Sigma_{k1}^{-1})) = \left(\frac{\sigma(\Sigma_{k1}^1) + \sigma(\Sigma_{k1}^{-1})}{2} \right) n(1) = \frac{1}{2^{k+1}}.$$

(10) Do passo 3 e do lema 3 temos que, sendo $\Sigma_{kj}^{s\delta} = \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_n\}$ uma T^δ -sequência pertencente a $\Sigma_k^{s\delta}$ com $n \geq 2$, $s \in \mathbb{Z}$, $|s| > 2$ e $\delta \in \{-1, 1\}$, a expressão da μ -coordenada da aplicação $T^\delta : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ é μ -suave com infinitas ordens de contato com a aplicação constante $\equiv 1$, e a aplicação $T^\delta : \Sigma_i \rightarrow \Sigma_{i+1}$, $i = 2, 3, \dots, n$, é a aplicação identidade de $(0, \mu(\Sigma_i))$.

Como a aplicação $T^\delta|_{\Gamma_i} : \Gamma_i \rightarrow \tilde{\Gamma}$ é descontínua num número finito de pontos, concluímos que o conjunto $\bigcup_{j=1}^{s_k} \bigcup_{s \in \mathbb{Z} - \{0\}} \text{span}(\Sigma_{kj}^s) \subset \mathcal{B}_k$ difere de \mathcal{B}_k por um conjunto enumerável de pontos. Segue que para cada inteiro positivo k , podemos estender a medida μ definida em $\bigcup_{j=1}^{s_k} \bigcup_{s \in \mathbb{Z} - \{0\}} \text{span}(\Sigma_{kj}^s)$, para \mathcal{B}_k , fazendo:

$$\mu(\mathcal{B}_k - \bigcup_{j=1}^{s_k} \bigcup_{s \in \mathbb{Z} - \{0\}} \text{span}(\Sigma_{kj}^s)) = 0.$$

A igualdade acima implica que:

$$\mu(\bigcup_k \mathcal{B}_k) = \sum_k \sum_j \sum_{s \in \mathbb{Z} - \{0\}} \mu(\text{span}(\Sigma_{kj}^s)).$$

Por (7) e (8), temos que :

$$\begin{aligned}
\mu\left(\bigcup_k \mathcal{B}_k\right) &\leq \sum_k \mu(\text{span}(\Sigma_{k1}^1) \cup \text{span}(\Sigma_{k1}^{-1})) + \sum_k \sum_j \sum_{|s|\geq 2}^{s_k} \mu(\text{span}(\Sigma_{kj}^s)) \\
&= \sum_k \frac{1}{2^{k+1}} + \sum_k \sum_{s=2}^{\infty} 2^{-k-s} \\
&= \sum_k \frac{1}{2^k} = 1
\end{aligned}$$

Assim, que:

(11) Existe uma medida μ em $\bigcup_k \mathcal{B}_k$ tal que $\mu\left(\bigcup_k \mathcal{B}_k\right) \leq 1$.

3.2.3 Regularização no conjunto $\bigcup_{j=1}^{\infty} \text{span}(P_j)$.

Seja $P_j = \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_{n_j}\}$ uma T^δ sequência periódica de \mathcal{A}_p com $\delta \in \{-1, 1\}$. Seja μ uma medida definida na σ -álgebra de Borel do segmento Σ_1 , de modo que $\mu(\Sigma_1) = \frac{2^{-j}}{n_j}$. Como P_j é uma T^δ periódica (cada ponto em Σ_1 é fixo para a aplicação T^{n_j}), temos que é possível estender a medida μ a todo elemento da T^δ -sequência, de modo a obter uma medida μ em P_j com $\mu(\Sigma_i) = \frac{2^{-j}}{n_j}$, para todo $i = 1, \dots, n_j$. Logo, $\mu(\text{span}(P_j)) = \frac{1}{2^j}$ e se considerarmos uma orientação adequada em Σ_i e $T^\delta(\Sigma_i)$ temos que a expressão μ -coordenada de $T^\delta : \Sigma_i \rightarrow T^\delta(\Sigma_i) = \Sigma_{i+1}$ é a aplicação identidade de $(0, \frac{2^{-j}}{n_j})$, assim:

(12) Existe uma medida distinguida μ , no conjunto $\bigcup_j \text{span}(P_j)$, com

$\mu\left(\bigcup_j \text{span}(P_j)\right) \leq 1$, de modo que se $I, T(I)$ são intervalos abertos do conjunto

$\bigcup_j \text{span}(P_j)$, então a μ -coordenada de $T|_I : I \rightarrow T(I)$ é a aplicação identidade de $(0, \mu(I))$.

3.2.4 Regularização no conjunto $\bigcup_{j=1}^{\infty} \text{span}(A_j)$.

Sabemos que $\tilde{D}_i = \left(\bigcup_k \mathcal{B}_k\right) \cap D_i$ é um conjunto aberto e denso em D_i , onde D_i é o domínio fundamental da T^δ -sequência atratora A_i . Estenderemos a medida μ

que existe em $\bigcup_k \mathcal{B}_k$ a cada domínio D_i , fazendo $\mu(D_i - \tilde{D}_i) = 0$. Assim temos que $0 < \mu(D_i) < \sigma_i$. de (8) temos que $\mu(\text{span}(A_i)) \leq 2^{-i}$. Portanto:

(13) A medida μ é estendida a $\bigcup_i \text{span}(A_i)$, com $\mu(\bigcup_i \text{span}(A_i)) \leq 1$.

3.2.5 Regularização nos Círculos transversais

Nesta subseção construímos uma medida distinguida μ nos círculos transversais C_i do tipo denso e do tipo excepcional.

A medida no círculo transversal C_i do tipo denso

Seja C_i o círculo transversal do tipo denso. Temos pelo teorema de estrutura de Gutierrez (veja teorema 3.2.5 no capítulo 2 ou [6] para maiores detalhes) que aplicação $T_i : C_i \rightarrow C_i$ de primeiro retorno em C_i induzida pela folheação \mathcal{F} é topologicamente equivalente a uma transformação de intercâmbios de intervalos $E_i : \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}} \rightarrow \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$. Logo, existe uma medida positiva μ em C_i , T_i -invariante. Denotamos por $T : \tilde{\Gamma} \rightarrow \tilde{\Gamma}$ a aplicação de Poincaré induzida por \mathcal{F} . Consideremos um intervalo $I \subset C_i$ tal que $T_i^{n\delta}(I)$ seja um intervalo em $\tilde{\Gamma}$, então definimos $\mu|_{T^{n\delta}(I)} := \mu \circ T^{-n\delta}|_{T^{n\delta}(I)}$. Como a medida $\mu|_{C_i}$ é T_i -invariante, a extensão da medida em $\tilde{\Gamma} \cap \text{Sat}(C_i)$ está bem definida. Da observação 5, temos que a medida μ está definida em $\bigcup_n T^n(C_i)$ salvo

um conjunto enumerável de pontos, onde definimos a medida como sendo zero. Para cada $j \in \mathbb{N}$ seja λ_j como no item (v) da proposição 3.2 de [6]. Assim temos que

$$\mu\left[\bigcup_{t=1}^l \bigcup_n T_i^n(C_t)\right] \cap \Gamma_j \leq l\lambda_j.$$

Agora se I e $T(I)$ são intervalos abertos em $\bigcup_{t=1}^l \bigcup_n T_i^n(C_t)$, então a μ -coordenada da aplicação $T|_I : I \rightarrow T(I)$ é a identidade de $(0, \mu(I))$.

A medida no círculo transversal C_i do tipo excepcional

Sejam C_i um círculo transversal do tipo excepcional e $T_i : C_i \rightarrow C_i$ a aplicação de primeiro retorno induzida por \mathcal{F} . Seja $L_{\mathcal{F}}$ a folha recorrente excepcional que está associada ao círculo transversal C_i . Relembramos que $\text{Rec}(C_i)$ é o conjunto de segmentos de folhas $L = [p, T_i(p)]_{\mathcal{F}}$ que satisfazem uma das duas condições:

$$p \in \overline{L \cap C_i}, \text{ ou}$$

p pertence a uma componente conexa I de $C_i - \overline{L \cap C_i}$, que esta contida no domínio de T_i .

Proposição 2. *O conjunto $Rec(C_i)$ é uma subvariedade de M , compacta e conexa cuja fronteira $\partial(Rec(C_i))$ é feita por círculos compostos por um número finito de arcos de folhas de \mathcal{F} unidos pelo mesmo número de subintervalos de C_i . Além disso, $\bar{L}_{\mathcal{F}} \subset Rec(C_i) \subset V_i$ e não existe arco de folha de \mathcal{F} contido em $Rec(C_i) - \partial(Rec(C_i))$ e conectando dois pontos da fronteira $\partial(Rec(C_i))$.*

Demonstração. Ver corolário (3.1) em [6]. □

Lema 7. *Se G_i^+ (G_i^-), denota a união dos segmentos transversais da fronteira $\partial(Rec(C_i))$ por onde as folhas de \mathcal{F} entram (respectivamente saem) e $\tilde{\mu}$ é uma medida distinguida em $G_i^+ \cup G_i^-$, então existe μ medida distinguida em $Rec(C_i) \cap C_i$ de modo que, para todo $\epsilon > 0$, existe $\tilde{\sigma}_i > 0$ tal que se $\tilde{\mu}(G_i^+ \cup G_i^-) < \tilde{\sigma}_i$, teremos: $\mu(Rec(C_i) \cap C_i) < \epsilon$, e a μ -coordenada de $T_i|_{C_i - G_i^{-1}} : C_i - G_i^{-1} \rightarrow C_i$ é C^1 e tem derivada igual a 1 em todos os pontos extremos da componente conexa de $C_i - G_i^-$.*

Demonstração. Ver lema(4.5) em [6]. □

Da definição do conjunto $\bigcup_k \mathcal{B}_k$ e pelo item (2), temos que para todo $r \in \{l + 1, l + 2, \dots, m\}$ o conjunto $(\bigcup_k \mathcal{B}_k) \cap G_r$ é aberto e denso em G_r . Por (11), existe uma medida μ definida em $\bigcup_k \mathcal{B}_k$. Estendemos essa medida para cada porta G_r fazendo:

$$\mu(G_r - (\bigcup_k \mathcal{B}_k) \cap G_r) = 0$$

Logo, pelo lema 7, a medida μ é estendida aos conjuntos $Rec(C_r) \cap C_r$. Como $C_r - [rec(C_r) \cap C_r]$ é errante, temos pela definição de $\bigcup_k \mathcal{B}_k$ e por (11) que a medida μ também pode ser estendida para $\bigcup_k \mathcal{B}_k$. Dessa forma obtemos uma medida μ distinguida em cada círculo transversal C_r .

Seja I um intervalo de $\bigcup_r Rec(C_r) \cap C_r$ de modo que para algum $n \in \mathbb{N}$ $T^n(I)$ seja um intervalo com $\bigcup_{i=1}^n T^i(I) \cap (\bigcup_{r=l+1}^m C_r) = \emptyset$. Neste caso definimos

$$\mu|_{T^n(I)} = \mu \circ T|_{T^n(I)}^{-n}.$$

Portanto, a medida μ estará definida em $\bigcup_r Rec(C_r) \cap \tilde{\Gamma}$ exceto para um conjunto enumerável de pontos. Como antes, definimos a medida μ neste conjunto enumerável como nula e obtemos que para todo $j \in \mathbb{N}$ a medida $\mu(\bigcup_r Rec(C_r)) \cap \Gamma_j < \infty$.

3.2.6 Medida em $\tilde{\Gamma}$

Seja $\Sigma \subset \tilde{\Gamma}$ um intervalo de modo que Σ e $T_{\mathcal{F}}(\Sigma)$ sejam segmentos em $\tilde{\Gamma}$. Considere $\{\Sigma_s\}_{s \in S}$ a família (enumerável) de intervalos disjuntos em $\tilde{\Gamma}$, formadas pelas componentes conexas da interseção do segmento Σ com os conjuntos $[\bigcup_{t=1}^l \bigcup_n T_{\mathcal{F}}^n(C_t)]$, $[\bigcup_{r=l+1}^m [(Rec(C_r) \cap \tilde{\Gamma}) - G_r]] \bigcup_j^{\infty} (span(A_j) - \tilde{D}_j)$, $\bigcup_j^{\infty} span(P_j)$ e $(\bigcup_k \mathcal{B}_k)$.

Do item 1 da afirmação 4, de (11), (12) e (13) temos que existe uma medida μ definida num subconjunto aberto e denso de $\tilde{\Gamma}$ que podemos estender a $\tilde{\Gamma}$ tomando medida zero no conjunto onde μ não está definida. Dessa forma, concluímos que:

(14) μ é uma medida distinguida em $\tilde{\Gamma}$.

Do item (7) e (10) segue que:

(15) Existe apenas um número finito de componentes $\Sigma_{s'}$ (que são associados ao conjunto $(\bigcup_k \mathcal{B}_k)$) da família $\{\Sigma_s\}_{s \in S}$ nos quais a respectiva μ -coordenada $\tilde{T}_{\mathcal{F}}$ da aplicação $T_{\mathcal{F}}|_{\Sigma_{s'}} : \Sigma_{s'} \rightarrow T_{\mathcal{F}}(\Sigma_{s'})$ é suave (distinta da identidade), com a derivada $\tilde{T}'_{\mathcal{F}}$ tendo infinitas ordem de contato em $x \in \{0, \mu(\Sigma_{s'})\}$, com a aplicação constante $\equiv 1$.

Portanto, juntando esses itens e o lema 4, podemos concluir que se $\Sigma \subset \tilde{\Gamma}$ é um segmento de modo que $T_{\mathcal{F}}(\Sigma)$ também seja segmento em $\tilde{\Gamma}$, então Σ é formado por uma união finita de intervalos Σ_i , tal que para cada i , $T_{\mathcal{F}}|_{\Sigma_i} : \Sigma_i \rightarrow T_{\mathcal{F}}(\Sigma_i)$ é $\mu - C^1$ (respec. μ -suave) quando Σ encontra (respec. não encontra) o conjunto $\bigcup_{r=l+1}^m Rec(C_r)$.

Como $\bigcup_{r=l+1}^m Rec(C_r)$ está longe das singularidades, temos que existe um número $n_0 \geq 0$ tal que para todo $i \geq n_0$,

$$\Gamma_i \cap (\bigcup_{r=l+1}^m Rec(C_r)) = \emptyset.$$

Observação 6. Observamos que o índice r denota o número de regiões de recorrências do tipo excepcional, portanto é finito.

3.3 A Medida nas Transversais Adaptadas

Agora que já obtivemos uma medida em $\tilde{\Gamma}$ para obtemos uma medida em Γ basta induzir em Γ_0 a medida que existe em Σ_0 , desde que $\tilde{\Gamma} = (\Gamma - \Gamma_0) \cup \Sigma_0$.

Sejam α_i uma transversal adaptada e C_i o círculo transversal correspondente a α_i . Seja $J \subset C_i$ um intervalo tal que $T_i^\delta(J)$ é um intervalo em α_i ($\delta \in \{-1, 1\}$), definimos

a medida $\mu|_{T_i^\delta(J)}$ em α_i por $\mu(T_i^\delta(J)) := \mu(J)$. Dessa forma, induzimos uma medida T_i -invariante em α_i que continuaremos a denotar por μ .

Conforme havíamos notado anteriormente, utilizando o mesmo procedimento construimos uma medida distinguida η sobre a transversal Λ .

Com isso e dos itens anteriores podemos concluir a seguinte proposição:

Proposição 3 (Existência de Medida Distinguida). *Existe medida distinguida μ (respec. η) sobre Γ (respec. sobre Λ) e um $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que: Para cada segmento Σ contido em Γ (respec. Λ) cuja imagem é também um segmento temos que:*

- (a) *A aplicação de Poincaré induzida por \mathcal{F} , $T_{\mathcal{F}}|_{\Sigma} \Sigma \rightarrow T_{\mathcal{F}}(\Sigma)$ é $\mu - C^1$. (respec. A aplicação de Poincaré induzida por \mathcal{G} , $T_{\mathcal{G}}|_{\Sigma} \Sigma \rightarrow T_{\mathcal{G}}(\Sigma)$ é $\eta - C^1$).*
- (b) *Se $\Sigma \subset \Gamma_i$ e $i \geq n_0$, então $T_{\mathcal{F}}|_{\Sigma} \Sigma \rightarrow T_{\mathcal{F}}(\Sigma)$ é μ -suave. (respectivamente, se $\Sigma \subset \Lambda_i$ e $i \geq n_0$, $T_{\mathcal{G}}|_{\Sigma} \Sigma \rightarrow T_{\mathcal{G}}(\Sigma)$ é η -suave)*
- (c) *Se os conjuntos minimais de \mathcal{F} (respec. de \mathcal{G}) são todos triviais então $n_0 = 0$.*

Capítulo 4

Demonstração do Teorema de birregularização

Neste capítulo demonstraremos o teorema principal deste trabalho. O roteiro da prova é o seguinte: Seja $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ um par de folheações orientáveis, contínuas, singulares e transversais em M . Para provarmos que o par $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ é topologicamente equivalente ao par diferenciável $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}})$ utilizaremos a decomposição de $M - S$ em caixas bifolheadas dada pela proposição 1. Nesta decomposição cada caixa tem dois bordos que são componentes conexas de Γ e dois bordos que são componentes conexas de Λ , onde Γ e Λ são as seções globais transversais a \mathcal{F} e a \mathcal{G} , respectivamente. Notemos que a união do interior dessas caixas não cobre, mas são densamente distribuídas na variedade $M - S$. A partir dessas caixas e da proposição 3 que regulariza as aplicações de Poincaré de \mathcal{F} e de \mathcal{G} , construímos um atlas diferenciável para o par $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}})$.

Relembremos o enunciado do teorema de biregularização.

Teorema de biregularização

Seja M uma variedade compacta, bidimensional de classe C^∞ . Dado $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ um par contínuo de folheações orientáveis, singulares e transversais em M , existe um par de folheações transversais $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}})$ de classe C^1 topologicamente equivalentes ao par $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$. Além disso, as seguintes condições são equivalentes:

- (a) *Os conjuntos minimais de \mathcal{F} e \mathcal{G} são triviais.*
- (b) *O par $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ é topologicamente equivalente ao par de folheações transversais $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}})$ de classe C^2 .*
- (c) *O par $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ é topologicamente equivalente ao par de folheações transversais $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}})$ de classe C^∞ .*

Para a prova do teorema precisamos da seguinte definição:

Definição 23. *Sejam \mathcal{F} e \mathcal{G} folheações como no enunciado acima. Um arco fechado σ de trajetória de \mathcal{F} (respec. de \mathcal{G}) será chamado **arco elementar de \mathcal{F}** (respec. **arco elementar de \mathcal{G}**) se ele estiver contido na fronteira de algum θ_i e intercepta o con-*

junto formado por todas as quinas das caixas de fluxos $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i, \dots$ exatamente em seus extremos.

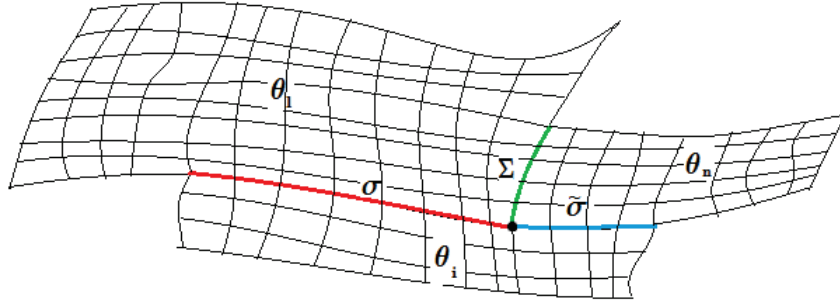


Figura 4.1: Arcos Elementares das Caixas Bifolheadas

4.1 Demonstração do Teorema de Biregularização

A idéia da prova é primeiro construir uma nova estrutura diferenciável sobre $\widehat{M - S}$ que regulariza o par $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ e depois estender essa estrutura para toda variedade M .

Temos que $M - S$ é formada pela união enumerável das caixas bifolheadas θ_i e cada uma dessas caixas tem bordo comum com um número finito de outras caixas. Faremos a construção do novo sistema de coordenadas primeiramente no interior dessas caixas. Depois construiremos cartas para o interior dos arcos elementares que compõem os bordos dessas caixas θ_i , e por último nos pontos extremos desses arcos elementares.

Dado $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ um par contínuo de folheações singulares e transversais em M , sejam $\{\theta_1, \theta_2, \dots\}$ as caixas bifolheadas obtidas pela proposição 1. Da proposição 3 temos que a aplicação de Poincaré $T_{\mathcal{F}}$ (respec. $T_{\mathcal{G}}$) induzida por \mathcal{F} (respec. induzida por \mathcal{G}), no interior da cada caixa θ_i é μ - C^1 ou μ -suave (respec. η - C^1 ou η -suave), ou seja, a μ -expressão coordenada de $T_{\mathcal{F}}$ (respec. η -expressão coordenada de $T_{\mathcal{G}}$),

$$\tilde{T}_{\mathcal{F}} = f_2 \circ T_{\mathcal{F}} \circ f_1^{-1} : [0, \mu(A_1)] \rightarrow [0, \mu(A_2)]$$

(respec. $\tilde{T}_{\mathcal{G}} = g_2 \circ T_{\mathcal{G}} \circ g_1^{-1} : [0, \eta(B_1)] \rightarrow [0, \eta(B_2)]$) é C^1 ou suave. Neste caso dizemos simplesmente que as caixas são μ e η -regularizadas.

Lembramos que $f_{i,j}$ e $g_{i,k}$ com $k, j \in \{1, 2\}$ são os μ e os η -homeomorfismos dos bordos $A_{i,j}$ e $B_{i,k}$, respectivamente.

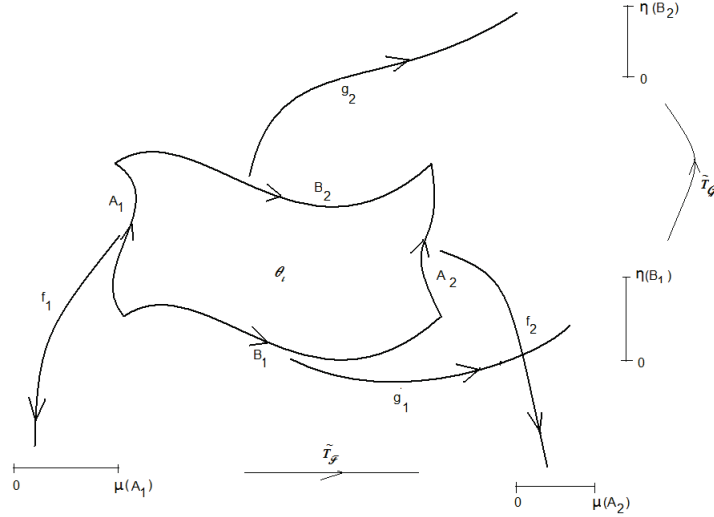


Figura 4.2: Caixa θ_i regularizada

Consideremos $(M - S) \subset M$ como um espaço topológico sem estrutura diferenciável, o qual será denotado por $\widehat{M - S}$. Construiremos uma nova estrutura diferenciável sobre $\widehat{M - S}$ que regulariza o par $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$.

4.1.1 Sistemas de Coordenadas para Pontos no Interior das Caixas Bifolheadas

Fixado θ_i denotemos por A_{i1} e A_{i2} as arestas de θ_i transversais a \mathcal{F} (consequentemente arestas tangentes a \mathcal{G}) e B_{i1} e B_{i2} as arestas de θ_i transversais a \mathcal{G} (consequentemente arestas tangentes a \mathcal{F}). Assumiremos que a orientação induzida de \mathcal{F} vai de A_{i1} para A_{i2} e a orientação induzida de \mathcal{G} vai de B_{i1} para B_{i2} .

Dados $j, k \in \{1, 2\}$, A_{ij} aresta da caixa θ_i transversal a \mathcal{F} e B_{ik} aresta da caixa θ_i transversal a \mathcal{G} , sejam

$$f_{ij} : A_{ij} \rightarrow \{n\} \times [0, \mu(A_{ij})] \quad e \quad g_{ik} : B_{ik} \rightarrow [0, \eta(B_{ik})] \times \{m\}$$

os μ e os η -homeomorfismos dos bordos A_{ij} e B_{ik} , respectivamente. Aqui temos que $n = 0$ se $j = 1$, $n = \eta(B_{ik})$ se $j = 2$, $m = 0$ se $k = 1$ e $m = \mu(A_{ij})$ se $k = 2$.

Cada par f_{ij} e g_{ik} , define para θ_i uma parametrização

$$\alpha_{ik}^{ij} : ([0, \eta(B_{ik})] \times \{m\}) \times (\{n\} \times [0, \mu(A_{ij})]) \rightarrow \theta_i$$

Simplificaremos a notação considerando apenas $[0, \mu(A_{ij})]$ no lugar de $\{n\} \times [0, \mu(A_{ij})]$ e $[0, \eta(B_{ik})]$ no lugar de $[0, \eta(B_{ik})] \times \{m\}$. Os índices j e k deixarão claro

quais são os valores de m e n . Dessa forma, a parametrização fica:

$$\alpha_{ik}^{ij} : [0, \eta(B_{ik})] \times [0, \mu(A_{ij})] \rightarrow \theta_i$$

Essas parametrizações são dadas da seguinte forma:

Dados $(s, t) \in [0, \eta(B_{ik})] \times [0, \mu(A_{ij})]$ sejam $a_j = f_{ij}^{-1}(t) \in A_{ij}$ e $b_k = g_{ik}^{-1}(s) \in B_{ik}$. Consideramos $L_{\mathcal{F}}(a_j)$ arco de folha de \mathcal{F} que passa por a_j e está contido em θ_i e $L_{\mathcal{G}}(b_k)$ arco de folha de \mathcal{G} que passa por B_k e está contido em θ_i . A imagem do ponto (s, t) pela parametrização α_{ik}^{ij} será o único ponto da caixa θ_i pertencente a interseção desses dois arcos, ou seja, se $p_{jk} = L_{\mathcal{F}}(a_j) \cap L_{\mathcal{G}}(b_k)$, então $\alpha_{ik}^{ij}(s, t) = p_{jk}$.

Observação 7. Na notação α_{ik}^{ij} com $i \in \{1, 2, \dots\}$ e $j, k \in \{1, 2\}$ temos que i denota a caixa θ_i fixada, j denota a aresta A_{ij} transversal a \mathcal{F} e k denota a aresta B_{ik} transversal a \mathcal{G} .

Pela definição de α_{ik}^{ij} , temos que

- (1a) Para cada $t \in [0, \mu(A_{ij})]$, $\alpha_{ik}^{ij}([0, \eta(B_{ik})] \times \{t\})$ é um arco de folha de $\mathcal{F}|_{\theta_i}$ e para cada $s \in [0, \eta(B_{ik})]$, $\alpha_{ik}^{ij}(\{s\} \times [0, \mu(A_{ij})])$ é um arco de folha de $\mathcal{G}|_{\theta_i}$.
- (1b) $(\alpha_{ik}^{ij})^{-1}|_{A_{ij}}$ é o μ -homeomorfismo $f_{i1} : A_{i1} \rightarrow \{0\} \times [0, \mu(A_{i1})]$ ou é o μ -homeomorfismo $f_{i2} : A_{i2} \rightarrow \{\eta(B_{ik})\} \times [0, \mu(A_{i2})]$ e $(\alpha_{ik}^{ij})^{-1}|_{B_{ik}}$ é o η -homeomorfismo $g_{i1} : B_{i1} \rightarrow [0, \eta(B_{i1})] \times \{0\}$ ou o η -homeomorfismo $g_{i2} : B_{i2} \rightarrow [0, \eta(B_{i2})] \times \{\mu(A_{ij})\}$.

Nosso objetivo nesta etapa, conforme já dissemos, é construir um sistema de coordenadas para o interior das caixas θ_i . Portanto, restringiremos a parametrização $\alpha_{ik}^{ij} : [0, \eta(B_{ik})] \times [0, \mu(A_{ij})] \rightarrow \theta_i$ ao retângulo aberto $(0, \eta(B_{ik})) \times (0, \mu(A_{ij}))$.

Denotamos por $\tilde{\alpha}_{ik}^{ij} = \alpha_{ik}^{ij}|_{(0, \eta(B_{ik})) \times (0, \mu(A_{ij}))} : (0, \eta(B_{ik})) \times (0, \mu(A_{ij})) \rightarrow \text{int}(\theta_i)$ essa restrição. Mostraremos que se $\tilde{\alpha}_{ik}^{ij}$ e $\tilde{\alpha}_{ik}^{\tilde{j}}$ são duas parametrizações do interior $\text{int}(\theta_i)$ da mesma caixa θ_i , então a mudança de coordenada é de classe C^1 ou C^∞ .

De fato, temos que a mudança de coordenadas para essas parametrizações é da seguinte forma:

$$(\tilde{\alpha}_{ik}^{\tilde{j}})^{-1} \circ (\tilde{\alpha}_{ik}^{ij})(s, t) = (s', t')$$

Exibiremos a expressão que define (s', t') em função de t e de s . É claro que se $j = \tilde{j}$ e $k = \tilde{k}$ então a mudança de coordenadas é a identidade, ou seja, $s' = s$ e $t' = t$, que é de classe C^∞ . Suponhamos que $j < \tilde{j}$, isto é, $j = 1$ e $\tilde{j} = 2$. Isto significa que na parametrização $(\tilde{\alpha}_{ik}^{ij})$ fixamos a aresta A_{i1} da caixa θ_i e na parametrização $(\tilde{\alpha}_{ik}^{\tilde{j}})$ fixamos a aresta A_{i2} dessa mesma caixa. Assim, dado $(s, t) \in (0, \eta(B_{ik})) \times (0, \mu(A_{i1}))$ temos que $(\tilde{\alpha}_{ik}^{i1})(s, t) = p_{1k}$, onde p_{1k} é o único ponto de interseção do arco de folha $L_{\mathcal{F}}$ de \mathcal{F} que passa por $a_1 = f_{i1}^{-1}(t)$ com o arco de folha de \mathcal{G} que passa por $b_{ik} = g_{ik}^{-1}(s)$

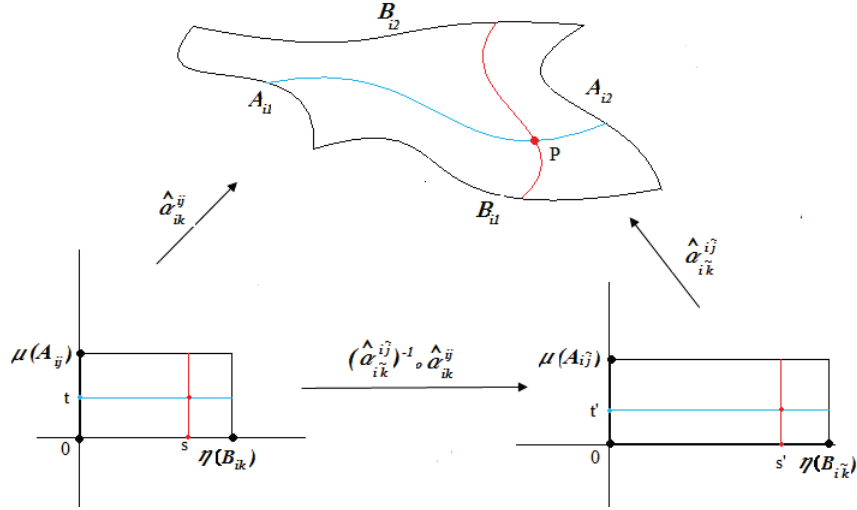


Figura 4.3: Mudança de coordenadas para uma caixa θ_i

contidos em θ_i . Como $(\tilde{\alpha}_{ik}^{i\tilde{j}})^{-1}(p_{1k}) = (s', t')$ temos que o arco de folha de \mathcal{F} que passa por $a_2 = f_{i2}^{-1}(t')$ é o mesmo arco que passa por $a_1 = f_{i1}^{-1}(t)$. Logo, a_2 é a imagem de a_1 pela aplicação de Poincaré $T_{\mathcal{F}}$ na caixa θ_i , ou seja, $a_2 = T_{\mathcal{F}}(a_1)$. Isso significa que $a_2 = f_{i2}^{-1}(t') = T_{\mathcal{F}}(a_1) = T_{\mathcal{F}}(f_{i1}^{-1}(t))$, ou seja,

$$t' = f_{i2} \circ T_{\mathcal{F}} \circ f_{i1}^{-1}(t) \quad \text{ou} \quad t' = f_{i\tilde{j}} \circ T_{\mathcal{F}} \circ f_{i\tilde{j}}^{-1}(t)$$

Se $j > \tilde{j}$, isto é, $j = 2$ e $\tilde{j} = 1$, o que será diferente em relação ao caso anterior é que dado $(s, t) \in (0, \eta(B_{ik})) \times (0, \mu(A_{i1}))$ teremos agora $a_1 = f_{i1}^{-1}(t')$ e $a_2 = f_{i2}^{-1}(t)$. Como $a_2 = T_{\mathcal{F}}(a_1)$, então $a_2 = f_{i2}^{-1}(t) = T_{\mathcal{F}}(a_1) = T_{\mathcal{F}}(f_{i1}^{-1}(t'))$, ou seja,

$$t' = f_{i1} \circ T_{\mathcal{F}}^{-1} \circ f_{i2}^{-1}(t) \quad \text{ou} \quad t' = f_{i\tilde{j}} \circ T_{\mathcal{F}}^{-1} \circ f_{i\tilde{j}}^{-1}(t)$$

A expressão para s' é obtida de maneira análoga. De uma forma geral, fixado uma caixa bifolheada θ_i e considerando nesta caixa $T_{\mathcal{F}} : A_{i1} \rightarrow A_{i2}$ e $T_{\mathcal{G}} : B_{i1} \rightarrow B_{i2}$ as aplicações de Poincaré para frente induzidas por \mathcal{F} e \mathcal{G} , respectivamente, temos as seguintes expressões para as mudanças de coordenadas:

$$s' = \overbrace{g_{i\tilde{k}} \circ T_{\mathcal{G}}^{\delta} \circ g_{ik}^{-1}}^{C^1 \text{ ou } C^{\infty}}(s) \quad e \quad t' = \overbrace{f_{i\tilde{j}} \circ T_{\mathcal{F}}^{\epsilon} \circ f_{ij}^{-1}}^{C^1 \text{ ou } C^{\infty}}(t).$$

onde δ e ϵ são dados por:

$$\delta = \begin{cases} 0 & \text{se } k = \tilde{k} \\ 1 & \text{se } k < \tilde{k} \\ -1 & \text{se } k > \tilde{k} \end{cases} \quad \epsilon = \begin{cases} 0 & \text{se } j = \tilde{j} \\ 1 & \text{se } j < \tilde{j} \\ -1 & \text{se } j > \tilde{j} \end{cases}$$

Assim, para $\{j, k\} \in \{1, 2\}$ consideramos o conjunto

$$\mathcal{A}_1 = \{(int(\theta_i), (\widehat{\alpha}_{ik}^{ij})^{-1})\}_{i \in \mathbb{N}}$$

Este conjunto fará parte do novo atlas que será construído.

Notemos que ainda não temos um atlas para $\widehat{M - S}$ que regulariza as folheações \mathcal{F} e \mathcal{G} em $\widehat{M - S}$. Pois, apesar de todas as mudanças de coordenadas de quaisquer dois elementos do conjunto \mathcal{A}_1 serem de classe C^1 ou C^∞ , os domínios $int(\theta_i)$ não cobrem a variedade $M - S$. Agora construíremos um sistema de coordenadas para os arcos elementares de \mathcal{F} e de \mathcal{G} que formam os bordos das caixas bifolheadas θ_i .

4.1.2 Sistema de Coordenadas Para os Pontos no Interior dos Arcos Elementares de \mathcal{F}

Seja σ uma arco elementar de \mathcal{F} contido em $\partial(\theta_i) \cap \partial(\theta_l)$. Suponhamos que

$$\sigma = \alpha_{i1}^{i1}([\epsilon_{i1}, \epsilon_{i2}] \times \{\mu(A_{i1})\}) = \alpha_{l1}^{l1}([\epsilon_{l1}, \epsilon_{l2}] \times \{0\}),$$

onde $[\epsilon_{i1}, \epsilon_{i2}]$ é subintervalo de $[0, \eta(B_{i1})]$ e $[\epsilon_{l1}, \epsilon_{l2}]$ é subintervalo de $[0, \eta(B_{l1})]$. Seja $\epsilon = \min\{\mu(A_{i1}), \mu(A_{l1})\}$. Definimos

$\beta_\sigma : (\epsilon_{l1}, \epsilon_{l2}) \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \widehat{M - S}$ como segue:

$$(2) \beta_\sigma(s, t) = \begin{cases} \alpha_{l1}^{l1}(s, t) & \text{se } t \geq 0 \\ \alpha_{i1}^{i1}((s - \epsilon_{l1} + \epsilon_{i1}), t + \mu(A_{i1})) & \text{se } t \leq 0 \end{cases}$$

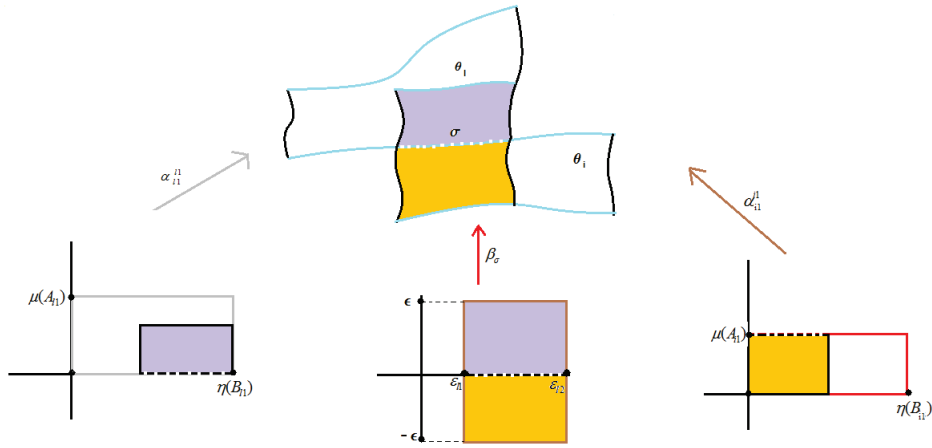


Figura 4.4:

Da mesma forma temos que todas as mudanças de coordenadas possíveis envolvendo β_σ , $\widehat{\alpha}_{ik}^{ij}$, $\widehat{\alpha}_{lk}^{lj}$ são suaves, caso \mathcal{F} e \mathcal{G} possuam apenas minimais triviais, ou de classe C^1 , caso contrário. De fato,

$$\begin{aligned}
(\widehat{\alpha}_{l1}^{l1})^{-1} \circ \beta_\sigma(s, t) &= (s, t) \\
(\widehat{\alpha}_{l2}^{l1})^{-1} \circ \beta_\sigma(s, t) &= (g_{l2} \circ T_{\mathcal{G}} \circ g_{l1}^{-1}(s), t) \\
(\widehat{\alpha}_{l1}^{l2})^{-1} \circ \beta_\sigma(s, t) &= (s, f_{l2} \circ T_{\mathcal{F}} \circ f_{l1}^{-1}(t)) \\
(\widehat{\alpha}_{l2}^{l2})^{-1} \circ \beta_\sigma(s, t) &= (g_{l2} \circ T_{\mathcal{G}} \circ g_{l1}^{-1}(s), f_{l2} \circ T_{\mathcal{F}} \circ f_{l1}^{-1}(t)) \\
(\widehat{\alpha}_{i1}^{i1})^{-1} \circ \beta_\sigma(s, t) &= (s - \epsilon_{l_1} + \epsilon_{i_1}, t + \mu(A_{i1})) \\
(\widehat{\alpha}_{i2}^{i1})^{-1} \circ \beta_\sigma(s, t) &= (g_{i2} \circ T_{\mathcal{G}} \circ g_{i1}^{-1}(s - \epsilon_{l_1} + \epsilon_{i_1}), t + \mu(A_{i1})) \\
(\widehat{\alpha}_{i1}^{i2})^{-1} \circ \beta_\sigma(s, t) &= (s - \epsilon_{l_1} + \epsilon_{i_1}, f_{i2} \circ T_{\mathcal{F}} \circ f_{i1}^{-1}(t + \mu(A_{i1}))) \\
(\widehat{\alpha}_{i2}^{i2})^{-1} \circ \beta_\sigma(s, t) &= (g_{i2} \circ T_{\mathcal{G}} \circ g_{i1}^{-1}(s - \epsilon_{l_1} + \epsilon_{i_1}), f_{i2} \circ T_{\mathcal{F}} \circ f_{i1}^{-1}(t + \mu(A_{i1})))
\end{aligned}$$

Dessa forma temos que as expressões das mudanças de coordenadas envolvendo todas as possíveis parametrizações das caixas θ_i e θ_l são a identidade, translações ou as expressões em coordenadas das aplicações de Poincaré $T_{\mathcal{F}}$ e $T_{\mathcal{G}}$.

Seja $C_\sigma = \beta_\sigma((\epsilon_{l_1}, \epsilon_{l_2}) \times (-\epsilon, \epsilon))$ a caixa bifolheada "centrada" em σ contida em $M - S$.

Definimos $\mathcal{A}_2 = \{(C_\sigma, \beta_\sigma^{-1}) \mid \sigma \text{ é uma arco elementar de } \mathcal{F}\}$.

Isto implica que todas mudanças de coordenadas envolvendo elementos de

$$\mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_1$$

são suaves ou de classe C^1 , conforme \mathcal{F} e \mathcal{G} não possuam ou possuam minimais não triviais.

4.1.3 Sistema de Coordenadas Para os Pontos no Interior dos Arcos Elementares de \mathcal{G}

Agora seja $\Sigma \subset A_{l2} \cap A_{n1}$ um arco elementar orientado de \mathcal{G} , onde A_{l2} e A_{n1} são arestas transversais a \mathcal{F} das caixas θ_l e θ_n respectivamente, e além disso a folheadão \mathcal{F} atravessa Σ de θ_l para θ_n .

Sejam $[\delta_{l_1}, \delta_{l_2}] \subset [0, \mu(A_{l1})]$ e $[\delta_{n_1}, \delta_{n_2}] \subset [0, \mu(A_{n1})]$ tais que:

$$\Sigma = \alpha_{l1}^{l1}(\{\eta(B_{l1})\} \times [\delta_{l_1}, \delta_{l_2}]) = \alpha_{n1}^{n1}(\{0\} \times [\delta_{n_1}, \delta_{n_2}]).$$

Seja $\delta = \min\{\eta(B_{n1}), \eta(B_{l1})\}$ Definimos

(3) $\beta_\Sigma : (-\delta, \delta) \times (\delta_{n_1}, \delta_{n_2}) \rightarrow \widehat{M - S}$ como segue:

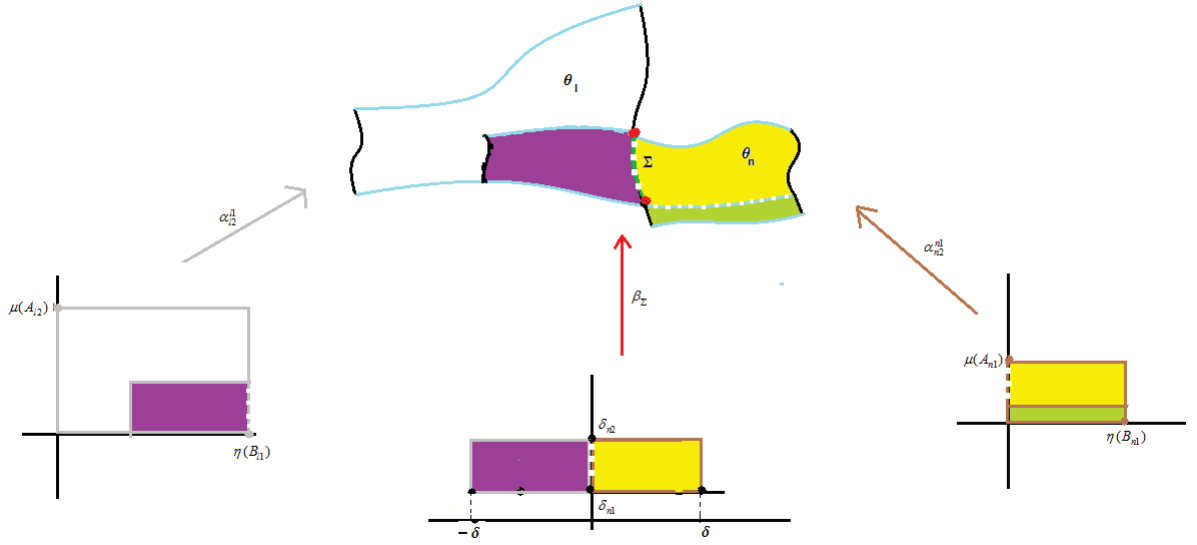


Figura 4.5:

$$\beta_{\Sigma}(s, t) = \begin{cases} \alpha_{n1}^{n1}(s, t - \delta_{n1}) & , \text{ se } s \geq 0 \\ \alpha_{l1}^{l1}(s + \eta(B_{l1}) - \epsilon_{l2}, t - \delta_{n1} + \delta_{l1}), & \text{ se } s \leq 0 \end{cases}$$

Procedendo de maneira análoga ao que fizemos para as mudanças com β_{σ} teremos que as expressões que aparecem em cada componente na mudança de coordenadas envolvendo β_{Σ} são identidade, translações ou as expressões em coordenadas das aplicações de Poincaré $T_{\mathcal{F}}$ e $T_{\mathcal{G}}$.

Seja $C_{\Sigma} = \beta_{\Sigma}((-\delta, \delta) \times (\delta_{n1}, \delta_{n2}))$ a caixa bifolheada "centrada" em Σ contida em $M - S$.

Definimos $\mathcal{A}_3 = \{(C_{\Sigma}, \beta_{\Sigma}^{-1}) \mid \Sigma \text{ é uma arco elementar de } \mathcal{G}\}$.

Como antes, todas as mudanças de coordenadas possíveis envolvendo β_{Σ} , $\tilde{\alpha}_{nk}^{nj}$, $\tilde{\alpha}_{lk}^{lj}$ são suaves, se todos minimais forem triviais ou de classe C^1 se algum minimal for não trivial.

Isto implica que todas as mudanças de coordenadas possíveis envolvendo elementos do conjunto:

$$\mathcal{A}_3 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_1$$

são suaves ou C^1 .

4.1.4 Sistema de Coordenadas Para os Pontos Extremos dos Arcos Elementares

Agora resta apenas construirmos sistemas de coordenadas em torno das quinas das caixas bifolheadas $\{\theta_i\}_{i \in \mathbb{N}}$ para termos uma cobertura suave sobre $\widehat{M - S}$. Seja p uma quina de um θ_i arbitrário. Existem três casos a serem considerados:

(4a) p é uma quina de quatro caixas bifolheadas, a saber $\{\theta_i, \theta_l, \theta_n, \theta_s\}$.

(4b)(respectivamente (4c)). p é uma quina de três caixas bifolheadas, neste caso p é extremo de um arco elementar de \mathcal{G} (respectivamente um arco elementar de \mathcal{F}) e dois arcos elementares de \mathcal{F} (respectivamente, dois arcos elementares de \mathcal{G}).

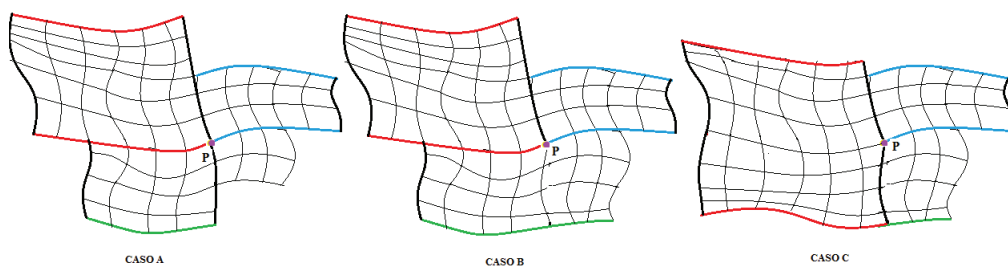


Figura 4.6: Quina das caixas

Mostraremos apenas o caso (4b), quando p é extremo de um único arco de \mathcal{G} e dois arcos elementares de \mathcal{F} . A demonstração dos outros dois casos segue de maneira similar.

Seja σ (respectivamente $\tilde{\sigma}$) o arco elementar de \mathcal{F} contido na fronteira de θ_l e θ_i (respectivamente θ_i e θ_n) tendo p como um extremo. Suponhamos que a folha de \mathcal{F} passa por σ antes de passar por $\tilde{\sigma}$. Consideremos os subintervalos $[\epsilon_{i_1}, \epsilon_{i_2}], [\epsilon_{i_2}, \epsilon_{i_3}] \subset [0, \eta(B_{i_1})]$, $[\epsilon_{l_1}, \epsilon_{l_2}] \subset [0, \eta(B_{l_1})]$ e $[\epsilon_{n_1}, \epsilon_{n_2}] \subset [0, \eta(B_{n_1})]$ tais que:

$$\sigma = \alpha_{l_1}^{i_1}([\epsilon_{l_1}, \epsilon_{l_2}] \times \{0\}) = \alpha_{i_1}^{i_1}([\epsilon_{i_1}, \epsilon_{i_2}] \times \{\mu(A_{i_1})\}).$$

$$\tilde{\sigma} = \alpha_{i_1}^{i_1}([\epsilon_{i_2}, \epsilon_{i_3}] \times \{\mu(A_{i_1})\}) = \alpha_{n_1}^{n_1}([\epsilon_{n_1}, \epsilon_{n_2}] \times \{0\}).$$

Seja Σ o arco elementar de \mathcal{G} contido em A_{l_2} e tendo p como um extremo.

(5) Tomamos $\epsilon, \delta > 0$ suficientemente pequenos tais que $\epsilon < \min\{\mu(\Sigma), \mu(A_{i_1})\}$ e $\delta < \min\{\eta(\sigma), \eta(\tilde{\sigma})\}$ e definimos:

$\beta_p : (-\delta, \delta) \times (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow \widehat{M - S}$ como segue:

$$(6) \beta_p(s, t) = \begin{cases} \alpha_{i_1}^{i_1}(s + \epsilon_{i_2}, t + \mu(A_{i_1})), & \text{se } t \leq 0 \\ \alpha_{l_1}^{l_1}(s + \epsilon_{l_2}, t) & , \text{ se } s \leq 0 \text{ e } t \geq 0 \\ \alpha_{n_1}^{n_1}(s + \epsilon_{n_1}, t) & , \text{ se } s \geq 0 \text{ e } t \geq 0 \end{cases}$$

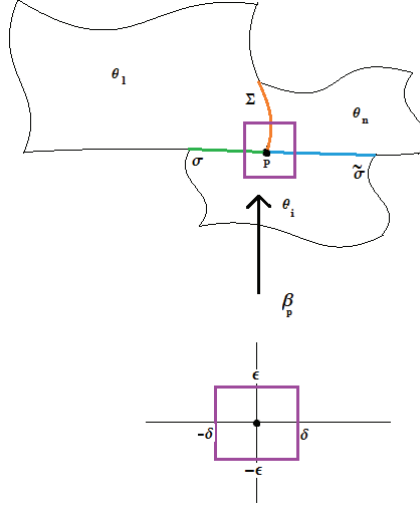


Figura 4.7:

Segue de (1a), (1b) e (5) que β_p não só está bem definida, mas também que todas as mudanças de coordenadas envolvendo $\beta_p, \beta_\sigma, \beta_{\tilde{\sigma}}$ e β_Σ são de classe C^1 ou são suaves, caso todos minimais sejam triviais. De fato:

$$\beta_p^{-1} \circ \beta_\sigma(s, t) = \begin{cases} (s - \epsilon_{l_2}, t) & , \text{ se } t \geq 0 \\ (s - \epsilon_{l_1} + \epsilon_{i_1} - \epsilon_{i_2}, t) & , \text{ se } t \leq 0 \end{cases}$$

$$\beta_p^{-1} \circ \beta_{\tilde{\sigma}}(s, t) = \begin{cases} (s - \epsilon_{n_1}, t) & , \text{ se } t \geq 0 \\ (s - \epsilon_{n_1} + \epsilon_{i_1} - \epsilon_{i_2}, t) & , \text{ se } t \leq 0 \end{cases}$$

e

$$\beta_p^{-1} \circ \beta_\Sigma(s, t) = \begin{cases} (s - \epsilon_{n_1}, t - \delta_{n_1}) & , \text{ se } s \geq 0 \\ (s, t - \delta_{n_1} + \delta_{l_1}) & , \text{ se } s \leq 0 \end{cases}$$

Seja $C_p = \beta_p((-\delta, \delta) \times (-\epsilon, \epsilon))$ a caixa bifolheada "centrada" em p contida em $M - S$.

Definimos $\mathcal{A}_4 = \{(C_p, \beta_p^{-1}) \mid p \text{ é uma quina de uma caixa } \theta_i\}_{i \in \mathbb{N}}$.

Portanto,

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}_4 \cup \mathcal{A}_3 \cup \mathcal{A}_2 \cup \mathcal{A}_1$$

é um atlas bifolheado suave ou de classe C^1 para $\widehat{M - S}$. Logo, $\widehat{M - S}$ munido desta estrutura é uma variedade suave (ou C^1) denotada por $\widehat{M - S}$. Afirmamos que:

- (7) A folheação $\tilde{\mathcal{F}}$ induzida por $\mathcal{F}|_{\widehat{M-S}}$ e a folheação $\tilde{\mathcal{G}}$ induzida por $\mathcal{G}|_{\widehat{M-S}}$ sobre $\widehat{M - S}$ são suaves (ou C^1) e topologicamente equivalentes às folheações contínuas $\mathcal{F}|_{\widehat{M-S}}$ e $\mathcal{G}|_{\widehat{M-S}}$ sobre $M - S$, respectivamente.

De fato, os elementos de \mathcal{A} são também caixas de fluxos bifolheadas de $\mathcal{F}|_{\widetilde{M-S}}$ e de $\mathcal{G}|_{\widetilde{M-S}}$, isto implica que $\mathcal{F}|_{\widetilde{M-S}}$ e $\mathcal{G}|_{\widetilde{M-S}}$ são folheações de classe C^1 ou de classe C^∞ em $M-S$. Desde que cada elemento de \mathcal{A} é uma caixa de fluxo contínua de \mathcal{F} e de \mathcal{G} , a aplicação identidade $Id : M-S \rightarrow \widetilde{M-S}$ é um homeomorfismo que fornece a equivalência topológica desejada. Isto prova(7).

4.1.5 Regularização em torno das singularidades

Agora só nos restam estender essa regularização para as singularidades. Vejamos:

Pelo teorema 6.3 de [9] temos que, dado $Id : (M-S) \rightarrow (\widetilde{M-S})$ e fixado qualquer função de classe C^0 , $\delta : M-S \rightarrow (0, \infty)$, existe $k : M-S \rightarrow \widetilde{M-S}$, C^∞ -difeomorfismo, δ -próximo da identidade, isto é $\|k(x) - x\| \leq \delta(x) \forall x \in M-S$.

Observamos que em particular $k : M-S \rightarrow M-S$ é um homeomorfismo. Sendo δ função arbitrária, a escolhemos de tal forma que $\delta(x) \rightarrow 0$ quando x aproxima-se de qualquer ponto de S . Assim podemos estender k a um homeomorfismo de M em M que fixa cada ponto singular de \mathcal{F} .

Sejam $\tilde{\mathcal{F}}^*$ e $\tilde{\mathcal{G}}^*$ as folheações C^∞ sobre $M-S$, tais que $k(\tilde{\mathcal{F}}^*) = \tilde{\mathcal{F}}|_{\widetilde{M-S}}$ e $k(\tilde{\mathcal{G}}^*) = \tilde{\mathcal{G}}|_{\widetilde{M-S}}$.

Afirmamos que:

- (8) Existem campos de vetores $X, Y \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ cujo conjunto de singularidades é precisamente S , tais que $X|_{M-S}$ e $Y|_{M-S}$ têm o mesmo retrato de fase que $\tilde{\mathcal{F}}^*$ e $\tilde{\mathcal{G}}^*$, respectivamente.

De fato, sejam $X_1, Y_1 \in \mathfrak{X}^\infty(M-S)$ tais que as folheações que eles induzem sejam $\tilde{\mathcal{F}}^*$ e $\tilde{\mathcal{G}}^*$, respectivamente. Pela filtração de M construída no capítulo 2, temos que existe uma família de $\{M_i \mid i = 2, \dots, n, \dots\}$ de subconjuntos compactos de M tal que $\bigcap_{i=1}^\infty M_i = S$ e para todo $i = 1, 2, \dots, n, \dots$, $M_{i+1} \subset \text{Int}(M_i)$. Podemos assumir que $M_1 = M$. Definimos $V_i = \text{Int}(M_i) \setminus M_{i+2}$. Certamente $\{V_i \mid i = 1, 2, \dots, n, \dots\}$ é uma cobertura aberta de M localmente finita. Seja $\{\alpha_i : M \rightarrow [0, 1] \mid i = 1, 2, \dots, n, \dots\}$ uma partição da unidade estritamente subordinada a esta cobertura. Logo, o suporte de α_i está contido em V_i . Para $r = 0, 1, 2, \dots$, damos uma norma $\|\cdot\|_r$ sobre $\mathfrak{X}^\infty(M)$ compatível com sua topologia C^r e tal que, para todo $Z \in \mathfrak{X}^\infty(M)$, $\|Z\|_{r+1} \geq \|Z\|_r$. Estendemos, X_1 e Y_1 aos campos de vetores \widehat{X}_1 e \widehat{Y}_1 , respectivamente definindo $\widehat{X}_1(p) = 0$ e $\widehat{Y}_1(p) = 0$ para todo $p \in S$. Certamente cada $(\alpha_i \cdot \widehat{X}_1), (\alpha_i \cdot \widehat{Y}_1) \in \mathfrak{X}^\infty(M)$. Dado $i = 1, 2, \dots$ sejam c_i e d_i números reais positivos

tais que $\|c_i \alpha_i \widehat{X}_1\|_i \leq \frac{1}{2^i}$ e $\|d_i \alpha_i \widehat{Y}_1\|_i \leq \frac{1}{2^i}$. Desde que, para todo $r = 1, 2, 3, \dots$,

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{\infty} \|c_i \alpha_i \widehat{X}_1\|_r &= \sum_{i=1}^r \|c_i \alpha_i \widehat{X}_1\|_r + \sum_{j>r} \|c_j \alpha_j \widehat{X}_1\|_r \\ &\leq \sum_{i=1}^r \|c_i \alpha_i \widehat{X}_1\|_r + \sum_{j>r} \|c_j \alpha_j \widehat{X}_1\|_j \\ &\leq \sum_{i=1}^r \|c_i \alpha_i \widehat{X}_1\|_r + \sum_{j>r}^{\infty} \frac{1}{2^j} < \infty, \end{aligned}$$

As séries $(\sum_{i=1}^{\infty} c_i \alpha_i) \widehat{X}_1 = \sum_{i=1}^{\infty} c_i \alpha_i \widehat{X}_1$, $(\sum_{i=1}^{\infty} d_i \alpha_i) \widehat{Y}_1 = \sum_{i=1}^{\infty} d_i \alpha_i \widehat{Y}_1$ convergem aos campos de vetores X e Y suaves, provando assim 8.

As folheações $\widetilde{\mathcal{F}}^*$ e $\widetilde{\mathcal{G}}^*$ induzidas pelos campos de vetores X e Y , respectivamente, obtido acima, são suaves e topologicamente equivalente, a \mathcal{F} e \mathcal{G} , respectivamente, via k .

No teorema, é claro que (c) implica (b). Além disso se as folheações \mathcal{F} e \mathcal{G} são topologicamente equivalentes às folheações de classe C^2 , $\widetilde{\mathcal{F}}$ e $\widetilde{\mathcal{G}}$, respectivamente, então todos os minimais de \mathcal{F} e \mathcal{G} são triviais, pelo teorema de Denjoy/Schwartz. Portanto, (b) implica (a). Os itens de (1) a (8) deste capítulo prova que (a) implica (c). Dessa forma acabamos de provar o teorema principal. ■

Capítulo 5

Regularização do Fluxo de Denjoy com uma Singularidade

Um subconjunto $\Lambda \subset S^1$ é dito minimal para um homeomorfismo $f : S^1 \rightarrow S^1$ se Λ é fechado, não vazio, $f(\Lambda) = \Lambda$ e não possui subconjuntos próprios com essas propriedades. Um conjunto minimal é dito excepcional quando é perfeito com interior vazio, isto é, homeomorfo a um conjunto de Cantor de S^1 .

O fluxo de Denjoy no toro é obtido por uma suspensão de um difeomorfismo $f : S^1 \rightarrow S^1$ de classe C^1 e que possui um conjunto minimal excepcional. Denjoy mostrou que este fluxo não podia ser topologicamente equivalente a um fluxo de classe C^2 .

C.Gutierrez em [6], prova que um fluxo contínuo em uma variedade bidimensional compacta que não possui minimal excepcional é topologicamente equivalente a um fluxo de classe C^∞ .

Dado um fluxo de Denjoy no toro, colocamos uma singularidade do tipo removível sobre uma órbita do minimal excepcional. Assim, temos um fluxo C^1 , portanto contínuo, cujo o conjunto minimal agora não é excepcional, e por isso pode ser regularizado. Para ilustrar o processo de regularização numa situação simples, construiremos essa regularização, neste caso.

5.1 Introdução e Preliminares

O nosso objetivo é provar o seguinte teorema:

Teorema 3. *Sejam $\varphi : T^2 \times \mathbb{R} \rightarrow T^2$ o fluxo de Denjoy no toro T^2 e Σ um círculo transversal a φ . Suponha que uma singularidade $\{q\}$ do tipo removível seja colocada sobre a órbita recorrente não trivial de φ . Nesta condição φ é topologicamente equivalente a um fluxo ψ de classe C^∞ .*

Antes de iniciarmos a prova deste teorema precisamos de alguns resultados.

Seja Σ o círculo transversal a φ . Definimos a sequência $\epsilon_n = \frac{d(q, \Sigma)}{2^n}$ com $n \geq 1$, onde $d(q, \Sigma)$ é a distância da singularidade ao círculo transversal Σ . É claro que $\epsilon_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Seja $\{B_1, B_2, \dots, B_n, \dots\}$ uma família de caixas centradas em q com as seguintes propriedades:

- Para cada $i \in \mathbb{N}$, Γ_{i1} e Γ_{i2} denotam os bordos de B_i transversais a φ , e os outros dois bordos são arcos de folhas de φ .
- Exceto para a órbita de φ que vai para a singularidade q , todas as outras órbitas que encontram Γ_{i1} atravessa B_i passando por Γ_{i2} .
- Para cada $i \in \mathbb{N}$, B_i tem comprimento ϵ_i .

Observamos que B_i é praticamente uma caixa de fluxo. Temos que

$$T^2 - \Sigma \supset \overline{B_1} \supset B_1 \supset \overline{B_2} \supset \dots \supset B_n \supset \overline{B_{n+1}} \supset \dots \supset q.$$

De agora em diante denotaremos por $\Gamma_0 := \Sigma$ o círculo transversal a φ , por $\Gamma_i := \Gamma_{i1} \cup \Gamma_{i2}$ (união dos segmentos transversais a φ contidos no bordo de B_i e por $\Gamma := \bigcup_{i=0}^{\infty} \Gamma_i$. Temos que dado $p \in \Gamma$, os conjuntos omega-limite de p ($\omega(p)$) (alfa-limite de p ($\alpha(p)$)) contem q ou é recorrente não trivial. Portanto a trajetória positiva ou negativa passando por p sempre retorna a Γ . Portanto, a aplicação de Poincaré $T : \Gamma \rightarrow \Gamma$ está definida para todo $p \in \Gamma$ e $T|_{\Gamma_i}$ é descontínua em um número finito de pontos. Além disso, se $[a, b]_{\varphi}$ for um arco de trajetória de φ , encontrando Γ_0 exatamente em seus extremos $\{a, b\}$, então a interseção $[a, b]_{\varphi} \cap \Gamma_i$ tem um número finito de pontos. De fato, seja $[a, b]_{\varphi}$ arco de trajetória de φ com $a, b \in \Gamma_0$. Dado U uma região limitando um domínio simplesmente conexo em T^2 contendo o arco $[a, b]_{\varphi}$ e os extremos de Γ_{ij} , observamos que $\Gamma_{ij} \cap \partial(U)$ é finito. Assim $\Gamma_{ij} \cap (U)$ tem um número finito de componentes conexas. Como U é um disco, se $x \in \text{Dom}(T) \cap \Gamma_0$, então o arco $[x, t(x)]_{\varphi}$ pode intersectar cada componente conexa de $\Gamma_{ij} \cap (U)$ no máximo em 1 ponto. Assim, dado B uma componente conexa de $\Gamma_0 - \overline{(U - \Gamma_0)}$, teremos que a cardinalidade de $\{[x, T(x)]_{\varphi} \cap \Gamma_{ij}\}$ é finita e a mesma para todo $x \in B$. Como Γ_i tem um número finito de componentes conexas, segue a afirmação.

5.1.1 Medida Distinguida em Γ

Consideremos φ fluxo em T^2 conforme teorema 3 acima, Γ a seção transversal global e $T : \Gamma \rightarrow \Gamma$ a aplicação de Poincaré. Nessas condições temos a seguinte proposição:

Proposição 4. *Existe uma medida distinguida μ sobre Γ tal que para cada segmento Λ contido em Γ cuja imagem também é um segmento, temos que $T|_{\Lambda} : \Lambda \rightarrow T(\Lambda)$ é μ -suave.*

Demonstração. Seja W contido em Γ um intervalo aberto e errante para o fluxo φ . Seja $B := \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n(W)$. É claro que B é aberto e denso em Γ . Definiremos uma medida distinguida em W e em seguida a estenderemos ao conjunto B . Definindo a medida como sendo zero em $\Gamma - B$ teremos uma medida em Γ .

Dados $(\delta, s) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{N}$ e λ um intervalo contido em B , define-se o conjunto

$$G(\delta, s, \lambda) := \{\lambda, T^\delta(\lambda), \dots, T^{n\delta}(\lambda), \dots\}$$

como sendo a maior seqüência em relação a seguinte propriedade:

- Cada $T^{n\delta}(\lambda)$ é um intervalo aberto de B , e exceto pra cada λ e $T^\delta(\lambda)$, cada termo da seqüência está contido em $\bigcup_{j=0}^s \Gamma_j$.

Lembramos a definição de T^δ -seqüência.

Definição 24 (T^δ -Seqüências). *Seja $\delta \in \{-1, 1\}$. Uma seqüência finita $\Sigma = \{\Sigma_1, \Sigma_2, \dots, \Sigma_n\}$ de segmentos abertos de Γ , dois a dois disjuntos, será chamada de uma T^δ -seqüência se quaisquer dois de seus termos consecutivos Σ_i e Σ_{i+1} satisfizerem $T^\delta(\Sigma_i) = \Sigma_{i+1}$. Se Σ_1 for um segmento errante, então diremos que Σ é uma T^δ -seqüência errante.*

A união de todos os termos de Σ será denotado por $span(\Sigma)$.

Afirmção 6. Para cada $(\delta, s) \in \{-1, 1\} \times \mathbb{N}$, $G(\delta, s, \lambda)$ é uma T^δ -seqüência.

Basta ver que $G(\delta, s, \lambda)$ é finito, mas isto é claro devido a construção de Γ .

Um subintervalo aberto I de Γ_{ij} será dito T^δ -derivado de Γ_{ij} , se e somente se, $T^\delta(I)$ é também um intervalo aberto de Γ , e não existe outro subintervalo aberto em Γ_{ij} contendo I e tal que sua imagem por T^δ seja um intervalo.

Como a aplicação de Poincaré $T^\delta|_{\Gamma_i} : \Gamma_i \rightarrow \Gamma$, para cada $i \in \mathbb{N}$ é descontínua num número finito de pontos temos que:

(1) O fecho em Γ de cada intervalo Γ_{ij} é formado pela união finita dos fechos de seus intervalos T^δ -derivados.

Agora definimos por indução em $s \in \mathbb{Z} - \{0\}$, a família finita de T^δ -seqüências errantes $\Sigma^s = \{\Sigma_1^s, \dots, \Sigma_{k_s}^s\}$ com $\delta = \frac{s}{|s|}$ como segue:

(2) Para $s \in \{-1, 1\}$, definimos $\Sigma^s = \{\Sigma_1^s\}$, onde $\Sigma_1^s := G(\delta, 1, W)$.

Para definir Σ^2 (define-se Σ^{-2} de maneira similar) usamos (1) no último intervalo que forma a T^δ -seqüência $G(\delta, 1, W)$, ou seja,

(3) Para $s = 2$, denotemos por k_2 o número de subintervalos T^δ -derivados que formam o último intervalo da T^δ -seqüência $\Sigma^1 = \{\Sigma_1^1\} = G(\delta, 1, W)$. Por (1) temos

que k_2 é finito, assim definiremos Σ^2 por $\{\Sigma_1^2, \dots, \Sigma_{k_2}^2\}$, onde $\Sigma_j^2 := G(\delta, 2, \lambda)$, para cada $j \in \{1, \dots, k_2\}$, sendo λ um subintervalo T^δ -derivado do último intervalo da T^δ -sequência $G(\delta, 1, W)$. Seguindo este processo de indução, temos que se $\Sigma^{s-1} = \{\Sigma_1^{s-1}, \dots, \Sigma_{k_{(s-1)}}^{s-1}\}$ está definido, então:

(4) Para o inteiro s , definiremos Σ^s como $\{G(\delta, |s|, \lambda); \lambda \text{ é um intervalo aberto, } T^\delta\text{-derivado do último termo de } \Sigma_j^{s-1}\}$, para cada $j \in \{1, 2, \dots, k_{(s-1)}\}$

(5) Para cada $r \in \mathbb{Z}^+$ e $\delta \in \{-1, 1\}$, existe um número finito de T^δ -sequências $\{\Sigma_j^s \mid \forall s \in \mathbb{Z} - \{0\}, j \in \{1, \dots, k_s\}\}$ com seu primeiro termo em Γ_r . (pois a aplicação de Poincaré $T^\delta|_{\Gamma_i} : \Gamma_i \rightarrow \Gamma$, para cada $i \in \mathbb{N}$ é descontínua num número finito de pontos).

Agora, dado $s \in \mathbb{Z}^+$, denotemos por:

- $n(1)$ o número de elementos de Σ^1 e Σ^{-1}
- Para todo $s \geq 2$, $n(s)$ denotará o total de elementos das T^δ -sequências que formam Σ^s e Σ^{-s} , com $\delta \in \{-1, 1\}$.
- σ a aplicação definida em $\Sigma^s = \{\Sigma_1^s, \dots, \Sigma_{k_s}^s\}$, que associa a cada T^δ -sequência Σ_j^s o valor $\left(\frac{2^{-1-|s|}}{n(s)}\right)$.

Agora definiremos uma medida distinguida μ em W e a estenderemos ao conjunto

$$\bigcup_{j=1} \bigcup_{s \in \mathbb{Z} - \{0\}} \text{span}(\Sigma_j^s)$$

PASSO 1. Defina-se μ , medida distinguida em W por:

$$\mu(W) := \frac{(\sigma(\Sigma_1^1) + \sigma(\Sigma_1^{-1}))}{2}$$

PASSO 2. Se $\delta \in \{-1, 1\}$ e $T^{\delta j}(W)$ é um intervalo de Σ_1^δ , então defina-se μ em $T^{\delta j}(W)$ por:

$$\mu|_{T^{\delta j}(W)} := \mu \circ T^{-\delta j}|_{T^{\delta j}(W)}$$

PASSO 3. Sabemos por (1) que o último elemento da T^δ -sequência Σ_1^δ é uma união finita de seus k_2 subintervalos T^δ -derivados, assim, pelo passo 2, a medida μ de cada um desses subintervalos está bem definida. Segue da afirmação 6 e do lema 3 que para todo $j \in \{1, \dots, k_2\}$, existe uma medida distinguida (estendo μ) em $\Sigma_j^{2\delta}$ e de tamanho $\sigma(\Sigma_j^{2\delta})$. Continuando a denotar esta medida por μ , temos que $\mu(\text{span}(\Sigma_j^{2\delta})) = \sigma(\Sigma_j^{2\delta})$, onde $\Sigma^{2\delta} := \{\Sigma_1^{2\delta}, \dots, \Sigma_{k_2}^{2\delta}\}$.

Repetindo o passo 2 em cada uma das T^δ -sequências $\Sigma_j^{2\delta}$ e utilizando indução em s , temos que:

(6) A medida μ , definida no passo 1, é estendida ao conjunto $\Sigma^{s\delta} := \{\Sigma_1^{s\delta}, \dots, \Sigma_{k_s}^{s\delta}\}$, para todo $s \in \mathbb{Z}^+$, de modo que sendo $\delta \in \{-1, 1\}$, tenhamos $\mu(\text{span}(\Sigma_j^{s\delta})) = \sigma(\Sigma_j^{s\delta})$ para todo $j \in \{1, \dots, k_s\}$.

Portanto, para qualquer intervalo aberto λ em Σ_1^δ tal que $T^\delta(\lambda) \in \Sigma_1^\delta$ a expressão da μ -coordenada de $T^\delta : \lambda \rightarrow T(\lambda)$, é a aplicação identidade de $(0, \mu(\lambda))$. Além disso,

$$\mu(\text{span}(\Sigma_1^1) \cup \text{span}(\Sigma_1^{-1})) = \left(\frac{\sigma(\Sigma_1^1) + \sigma(\Sigma_1^{-1})}{2} \right) n(1) = \frac{1}{2^{1+1}}.$$

(7) Do passo 3 e do lema 3 temos que, sendo $\Sigma_j^{s\delta} = \{\Sigma_1, \dots, \Sigma_n\}$ uma T^δ -sequência pertencente a $\Sigma^{s\delta}$ com $n \geq 2$, $s \in \mathbb{Z}$, $|s| > 2$ e $\delta \in \{-1, 1\}$, a expressão da μ -coordenada da aplicação $T^\delta : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$ é μ -suave com infinitas ordens de contato com a aplicação constante $\equiv 1$, e a aplicação $T^\delta : \Sigma_i \rightarrow \Sigma_{i+1}$, $i = 2, 3, \dots, n$, é a aplicação identidade de $(0, \mu(\Sigma_i))$.

Como a aplicação $T^\delta|_{\Gamma_i} : \Gamma_i \rightarrow \Gamma$ é descontínua num número finito de pontos, concluímos que o conjunto $\cup_{j=1}^{k_s} \cup_{s \in \mathbb{Z} - \{0\}} \text{span}(\Sigma_{k_j}^s) \subset B$ difere de B por um conjunto enumerável de pontos. Segue que podemos estender a medida μ definida em $\cup_{j=1}^{k_s} \cup_{s \in \mathbb{Z} - \{0\}} \text{span}(\Sigma_j^s)$, para B , fazendo:

$$\mu(B - \cup_{j=1}^{k_s} \cup_{s \in \mathbb{Z} - \{0\}} \text{span}(\Sigma_j^s)) = 0.$$

A igualdade acima implica que:

$$\mu(B) = \sum_j \sum_{s \in \mathbb{Z} - \{0\}} \mu(\text{span}(\Sigma_j^s)).$$

Por (7) e (8), temos que :

$$\begin{aligned} \mu(B) &\leq \mu(\text{span}(\Sigma_1^1) \cup \text{span}(\Sigma_1^{-1})) + \sum_j \sum_{|s| \geq 2} \mu(\text{span}(\Sigma_j^s)) \\ &= \frac{1}{2^2} + \sum_{s=2}^{\infty} 2^{-1-s} \\ &= \sum_{s=2} \frac{1}{2^s} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Assim, temos que:

(11) Existe uma medida μ em B tal que $\mu(B) \leq 1$.

Como $B \subset \Gamma$ é um subconjunto denso em Γ , basta definir a medida como sendo zero no complementar de B que teremos uma medida distinguida μ definida em Γ .

Do item (5) e (7) segue que existe apenas um número finito de componentes $\Sigma_{s'}$ da família $\{\Sigma_s\}_{s \in S}$ nos quais a respectiva μ -coordenada \tilde{T} da aplicação $T|_{\Sigma_{s'}} : \Sigma_{s'} \rightarrow T(\Sigma_{s'})$ é suave (distinta da identidade), com \tilde{T}' tendo infinitas ordem de contato em $x \in \{0, \mu(\Sigma_{s'})\}$, com a aplicação constante $\equiv 1$.

Portanto, juntando esses itens e o lema 4, podemos concluir que se $\Sigma \subset \Gamma$ é um segmento de modo que $T(\Sigma)$ também seja segmento em Γ , então Σ é formado por uma união finita de intervalos Σ_i , tal que pra cada i , $T|_{\Sigma_i} : \Sigma_i \rightarrow T(\Sigma_i)$ é μ -suave. \square

5.2 Decomposição de $T^2 - q$ em caixas suavizáveis

Agora decomponemos $T^2 - q$ (toro menos a singularidade) em caixas folheadas. Essas caixas abertas farão partes da nova estrutura diferenciável que construímos para o $T^2 - q$. Seja Δ o conjunto dos arcos $[p, q = T(p)]$ de trajetórias de φ tais que a aplicação de Poincaré T é descontínua em p ou T^{-1} é descontínua em q . Seja \mathcal{Y} o conjunto das componentes conexas de $T^2 - (q \cup \Delta \cup \Gamma)$. O fecho \bar{Y} de $Y \in \mathcal{Y}$ deixará de ser uma caixa de fluxo se e somente se, os lados transversais encontra-se sobre o mesmo lado transversal contido em Γ . Se este for o caso, decomponemos a "caixa" \bar{Y} como uma união de duas caixas Y_1 e Y_2 , tendo como único lado comum uma seção transversal. Para este elemento $Y = Y_1 \cup Y_2 \in \mathcal{Y}$ se $\tau : \partial Y_1 \rightarrow \partial Y_2$ denota a aplicação de Poincaré para frente induzida pelo fluxo φ , definimos $\mu|_{Y_1 \cap Y_2} = \mu \circ \tau^{-1}|_{Y_1 \cap Y_2}$. Consideremos a união de todas as arestas transversais de Y_i , com $i \in \{1, 2\}$ e $Y \in \mathcal{Y}$, que denotaremos por \mathcal{C} . Desta construção segue $\mathcal{C} \supset \Gamma$ e μ é uma medida distinguida em \mathcal{C} .

Como para cada $i \in \mathbb{N}$, existia apenas um número finito de componentes conexas de \mathcal{Y} em $T^2 - M_i$ (isto segue do fato que para cada inteiro k , a k -ésima etapa da filtração $\{M_k\}_{k \in \mathbb{N}}$ é formada por um número finito de componentes, sendo cada componente formada por um número finito de seções transversais), o mesmo é verdade se consideramos o conjunto $T^2 - (q \cup \Delta \cup \mathcal{C})$ no lugar de \mathcal{Y} . Logo, podemos enumerar por $(\theta_1)_{\mathcal{G}}, (\theta_2)_{\mathcal{G}}, \dots, (\theta_j)_{\mathcal{G}}, \dots$ as componentes do conjunto $T^2 - (q \cup \Delta \cup \mathcal{C})$.

Um arco de trajetória fechado σ com a orientação positiva induzida por φ será chamado **arco tangente elementar** se ele estiver contido na fronteira de algum θ_i e intercepta o conjunto formado por todas as quinas das caixas de fluxos $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_i, \dots$ exatamente em seus extremos.

Dado θ_i denotemos por A_{i1} e A_{i2} as arestas transversais de θ_i . Assumiremos que o fluxo vai de A_{i1} para A_{i2} .

Um segmento orientado fechado transversal ao fluxo φ será chamado **arco transversal elementar** se ele estiver contido na fronteira de algum θ_i e interceptar o conjunto formado por todas as quinas das caixas de fluxos $\theta_1, \theta_2, \dots, \theta_n, \dots$ exatamente em seus extremos.

O seguinte lema é a regularização de uma curva contínua.

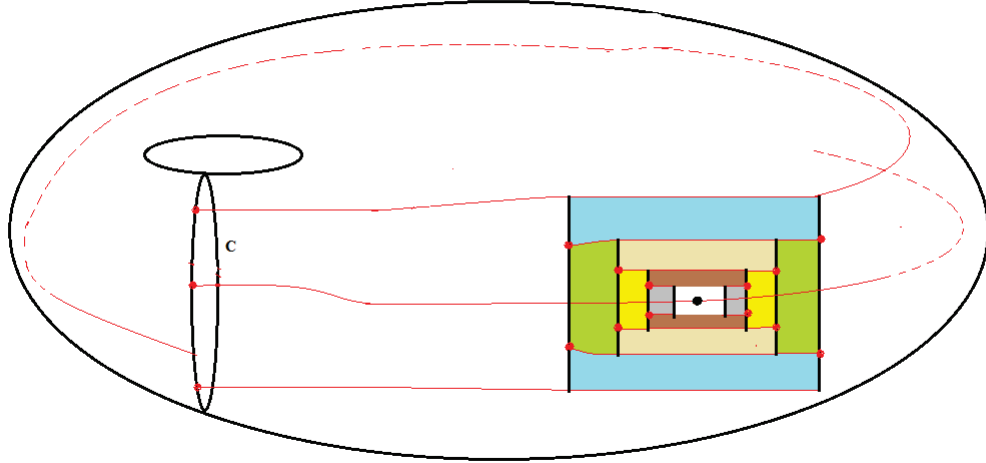


Figura 5.1: Caixas suavizáveis

Lema 8. *Sejam $\alpha : [0, 1] \rightarrow M$ uma curva contínua em M e $\sigma(1), \sigma(2)$ números reais positivos, então existem homeomorfismos $h_1 : [0, \sigma(1)] \rightarrow \alpha([0, 1])$ e $h_2 : [0, \sigma(2)] \rightarrow \alpha([0, 1])$, tais que a mudança de coordenadas $h_{12} : [0, \sigma(1)] \rightarrow [0, \sigma(2)]$ é suave. Além disso, h_{12} tem derivada igual a 1 numa vizinhança de 0 e de $\sigma(1)$.*

Demonstração. Seja $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^∞ , que é identicamente nula numa vizinhança do zero e uma constante k numa vizinhança de $\sigma(1)$. Para maiores detalhes sobre a existência dessa função f veja ([8], §4 pag.434).

Observemos que $f'(0) = f'(\sigma(1)) = 0$. Seja $h_{12} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definida por $h_{12}(x) = f(x) + x$. É claro que h_{12} é de classe C^∞ . Além disso, temos que $h'_{12}(x) = f'(x) + 1$. Logo, $h'_{12}(0) = h'_{12}(\sigma(1)) = 1$. Portanto, falta mostrarmos a existência de h_1 e h_2 .

Com efeito, seja $L : [0, \sigma(1)] \rightarrow [0, 1]$ linear, definida por $L(x) = \frac{x}{\sigma(1)}$. Definamos $h_1(t) = \alpha \circ L(t)$ para todo $t \in [0, \sigma(1)]$ e $h_2(s) = h_1 \circ h_{12}^{-1}(s)$ para todo $s \in [0, \sigma(2)]$. Dessa forma, segue o resultado. □

Sejam $\sigma_1, \sigma_2, \dots, \sigma_n$ todos os arcos tangentes elementares formando uma das arestas de uma caixa de fluxo θ_i . Escolhemos números reais positivos $\sigma_1(i), \sigma_2(i), \dots, \sigma_n(i)$ tais que $\sum_{j=1}^n \sigma_j(i) = 1$.

Seja σ um arco tangente elementar. Desde que σ está na fronteira de duas caixas de fluxos, digamos θ_i e θ_j , nós temos associados a este dois números reais $\sigma(i)$ e $\sigma(j)$. Agora do lema (8), para cada $k \in \{i, j\}$ existe um homeomorfismo $h_{\sigma(k)} : \sigma \rightarrow [0, \sigma(k)]$

que preserve orientação, tal que $h_{\sigma(i)} \circ h_{\sigma(j)}^{-1}$ é um difeomorfismo suave tendo derivada igual a 1 numa vizinhança de 0 e $\sigma(j)$.

5.3 Regularização

Agora que temos todos os elementos necessários para concluirmos a demonstração do teorema, apenas descreveremos o processo de regularização.

Consideremos $T^2 \setminus \{q\}$ subconjunto de M como um espaço topológico sem sua estrutura diferenciável, o qual será denotado por $\widehat{T^2 \setminus \{q\}}$ e construiremos uma nova estrutura diferenciável sobre $\widehat{T^2 \setminus \{q\}}$. Esta nova estrutura é construída exibindo-se as cartas folheadas no interior das caixas de fluxos θ_i , nos arcos tangentes elementares, nos arcos transversais elementares e nas quinas das caixas. Como os minimais são todos triviais temos que essas cartas fornecerão um sistema de coordenadas $\widehat{T^2 \setminus \{q\}}$ suave para $\widehat{T^2 \setminus \{q\}}$ e neste novo sistema de coordenadas a folheação $\varphi|_{\widehat{T^2 \setminus \{q\}}}$ é suave e topologicamente equivalente à folheação $\varphi|_{T^2 \setminus \{q\}}$.

Pelo teorema 6.3 de [9] temos que, dado $Id : T^2 \setminus \{q\} \rightarrow \widehat{T^2 \setminus \{q\}}$ e fixado qualquer função de classe C^0 , $\delta : T^2 \setminus \{q\} \rightarrow (0, \infty)$, existe $k : T^2 \setminus \{q\} \rightarrow \widehat{T^2 \setminus \{q\}}$, difeomorfismo suave, δ -próximo da identidade, isto é $\|k(x) - x\| \leq \delta(x) \forall x \in T^2 \setminus \{q\}$.

Observamos que em particular $k : T^2 \setminus \{q\} \rightarrow \widehat{T^2 \setminus \{q\}}$ é um homeomorfismo. Sendo δ função arbitrária, a escolhemos de tal forma que $\delta(x) \rightarrow 0$ quando x aproxima-se do ponto $\{q\}$. Assim podemos estender k a um homeomorfismo de M em M que fixa o ponto singular $\{q\}$ de φ .

Seja \mathcal{F} folheação suave orientável de $T^2 \setminus \{q\}$ tal que $k(\mathcal{F}) = \varphi|_{\widehat{T^2 \setminus \{q\}}}$. Seja $X \in \mathfrak{X}^\infty(T^2 \setminus \{q\})$ tal que a folheação que ele induz seja \mathcal{F} , agora basta estender X a um campo de vetores $Y \in \mathfrak{X}^\infty(M)$ cujo conjunto de singularidades é precisamente $\{q\}$, tal que $Y|_{T^2 \setminus \{q\}}$ e \mathcal{F} tem o mesmo retrato de fase. (Veja C.Gutierrez em [6]). ■

Capítulo 6

Pares de Folheações Contínuas sem Singularidades

Conforme afirmamos na introdução deste trabalho, a prova do teorema de bi-regularização no caso em que as folheações \mathcal{F} e \mathcal{G} não possuem singularidades, ou seja, o conjunto de singularidades $S = \emptyset$, segue essencialmente o mesmo roteiro quando $S \neq \emptyset$. A diferença consiste no fato de que agora não precisamos construir uma filtração para M . Construimos uma transversal global que munimos de uma medida distinguida tal que a aplicação de Poincaré é de classe C^1 se os minimais forem triviais ou de classe C^∞ no caso contrário.

Teorema 4 (Regularização de Pares contínuos sem singularidades). *Seja M uma variedade compacta, bidimensional, diferenciável de classe C^∞ . Seja $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ um par contínuo de folheações sem singularidades e transversais sobre M . Se \mathcal{F} e \mathcal{G} possui apenas minimais triviais então, o par $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ é topologicamente equivalente ao par $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}})$ de classe C^∞ . No outro caso, o par $(\mathcal{F}, \mathcal{G})$ é topologicamente equivalente ao par $(\tilde{\mathcal{F}}, \tilde{\mathcal{G}})$ de classe C^1 .*

6.1 Transversais Globais

Seja \mathcal{F} uma folheação sem singularidades e com apenas recorrências triviais sobre a variedade M . Como M é orientável e \mathcal{F} não possui singularidades, temos que M é o toro. Seja Σ um círculo transversal a folheação \mathcal{F} . Aproximamos o círculo Σ pela união finita $\tilde{\Gamma} = \bigcup_{i=1}^k \gamma_i$ de arcos de folhas da folheação \mathcal{G} contidos numa pequena vizinhança V de Σ . Tal como fizemos na afirmação 1 da seção 2.1, podemos tomar V de tal forma que seja fibrada sobre Σ com fibra sendo arcos de folhas da folheação \mathcal{F} . Temos que a aplicação de Poincaré $T_{\mathcal{F}} : \gamma_i \rightarrow \tilde{\Gamma}$ é descontínua em um número finito de pontos.

Lembramos que $[p, q]_{\mathcal{F}}$ denota o arco de folha de \mathcal{F} que começa em p e termina em q , e denotamos por

$$\Delta_{\mathcal{F}} := \left\{ [p, q]_{\mathcal{F}}; p, q \in \tilde{\Gamma}, T_{\mathcal{F}}(p) = q \text{ e } T_{\mathcal{F}} \text{ é descontínua em } p \text{ ou } T_{\mathcal{F}}^{-1} \text{ é descontínua em } q \right\}.$$

Observamos que o fecho de uma componente conexa Y do conjunto $T^2 - (\tilde{\Gamma} \cup \Delta_{\mathcal{F}})$ deixará de ser uma caixa de fluxo para \mathcal{F} somente se seus lados transversais a \mathcal{F} se intersectarem numa mesma componente conexa γ_i . Se este for o caso, escrevemos \bar{Y} como a união de duas caixas de fluxos para \mathcal{F} que possuem apenas um lado comum. Este lado comum, certamente pode ser tomado como sendo um arco de folha de \mathcal{G} . Agora consideramos todos esses lados que foram inseridos juntamente com a transversal adaptada $\tilde{\Gamma}$ e obtemos a transversal global que desejávamos. Denotaremos esta transversal por Γ .

No caso em que a folheação \mathcal{F} possuir recorrência não trivial, temos o círculo transversal C obtido por Gutierrez. Neste caso, para efeito da construção das caixas utilizamos as transversais adaptadas que aproximam o círculo C , como na afirmação 1 da seção 2.1.

6.2 Decomposição de T^2 em Caixas Bifolheadas

A decomposição de T^2 em caixas bifolheadas é feita da mesma maneira que fizemos no capítulo 2. De qualquer forma, para melhor ilustrar essa decomposição, a dividiremos nos seguintes três casos:

1. As duas folheações possuem apenas recorrências triviais.
2. Apenas uma das folheações possui recorrência não trivial.
3. As duas folheações possuem recorrências não triviais.

No primeiro caso, decompomos T^2 em caixas folheadas para a folheação \mathcal{F} cujos bordos transversais dessas caixas encontram-se sobre a transversal Γ . Em seguida tomamos como seção transversal para \mathcal{G} a união dos lados tangentes dessas caixas com a transversal original $\tilde{\Lambda}$. Denotamos esta nova transversal por Λ e da mesma forma que foi feito para \mathcal{F} , decompomos T^2 em caixas folheadas para a folheação \mathcal{G} cujos lados transversais estão sobre Λ . Agora juntamos a Γ os lados tangentes das caixas de \mathcal{G} e continuamos a denotar por Γ . Essas serão as caixas bifolheadas $\{\theta_1, \dots, \theta_n\}$ que queremos. Observe que os lados das caixas transversais a \mathcal{F} estão sobre Γ e os lados transversais a \mathcal{G} estão sobre Λ e todas as componentes de Γ e de Λ contém lados de caixas.

No segundo caso, suponhamos que \mathcal{G} possua recorrência não trivial. Neste caso, consideramos a decomposição em caixa feita para a folheação \mathcal{F} e tomamos como

transversal global para \mathcal{G} a união dos lados tangentes dessas caixas com a transversal original $\tilde{\Lambda}$, lembrando que neste caso a transversal $\tilde{\Lambda}$ é a união das transversais adaptadas que aproximam o círculo transversal C . Denotamos esta nova transversal por Λ e fazemos a decomposição de T^2 em caixas folheadas para \mathcal{G} . Novamente, juntamos a Γ os lados tangentes das caixas de \mathcal{G} e continuamos a denotar por Γ . Essas são as caixas bifolheadas que nos interessam.

No último caso o procedimento é mesmo. Lembramos apenas que neste caso tanto Γ quanto Λ iniciais são as transversais adaptadas que aproximam os círculos transversais a cada uma das folheações.

6.3 Medidas nas transversais

Lembramos que o processo de construção da medida é independente para cada folheação. Assim nos restringiremos apenas a uma das folheações.

6.3.1 A folheação \mathcal{F} possui apenas recorrências triviais

Seja \mathcal{F} uma folheação sem singularidades e com apenas recorrências triviais sobre a variedade M . Consideramos $T_{\mathcal{F}} : \Gamma \rightarrow \Gamma$ a aplicação de Poincaré para frente induzida por \mathcal{F} sobre a transversal global Γ .

Seja \mathcal{A}_P (resp. \mathcal{A}_A) o subconjunto de Γ cujos elementos λ são caracterizados como segue:

- $\lambda_1 \in \lambda$ se, e somente se, λ_1 é uma T^δ -sequência periódica (resp. atratora), onde $\delta \in \{-1, 1\}$
- Se $\lambda_1, \lambda_2 \in \lambda$, então $span(\lambda_1) \cap span(\lambda_2) = \emptyset$.

Se $\mathcal{A}_G \neq \emptyset$, onde \mathcal{A}_G denota \mathcal{A}_P ou \mathcal{A}_A , tomamos \mathbb{A}_G o elemento maximal de \mathcal{A}_G segundo a relação de ordem dada pela inclusão. Então, temos que: $\mathbb{A}_P = \{P_1, P_2, \dots\}$, onde P_i é uma T^δ -sequência periódica com $\delta \in \{-1, 1\}$ e $\mathbb{A}_A = \{A_1, A_2, \dots\}$, onde A_i é uma T^δ -sequência atratora com $\delta \in \{-1, 1\}$. Pela maximalidade dos conjuntos \mathbb{A}_P e \mathbb{A}_A , em relação à inclusão temos que o fecho em Γ do conjunto $\bigcup_{i,j=1} (span(A_i) \cup span(P_j))$ é uma vizinhança do conjunto de pontos de Γ que pertencem às folhas compactas.

Seja $\tilde{\mathcal{W}} := \Gamma - [\bigcup_{i,j=1} (span(A_i) - \bar{D}_i) \cup span(P_j)]$, onde D_i é o domínio fundamental da sequência atratora A_i . Denotando por ξ o conjunto das folhas de \mathcal{F} que passam pelo bordo de cada domínio fundamental D_i e definindo por \mathcal{W} o interior dos pontos errantes do conjunto $\tilde{\mathcal{W}} - \xi$, temos como na afirmação 3 da subseção 3.2.1 que \mathcal{W} é aberto é denso em $\tilde{\mathcal{W}}$.

Seja \mathcal{A}_W o conjunto formado por elementos λ tais que cada elemento de λ é formado por segmentos abertos errantes com respeito à folheação \mathcal{F} contidos em W e se $\lambda_1, \lambda_2 \in \lambda$, então $\left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n(\lambda_1)\right) \cap \left(\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n(\lambda_2)\right) = \emptyset$.

Observamos que se W contém algum segmento errante, então $\mathcal{A}_W \neq \emptyset$. Seja $\mathbb{A}_W = \{W_1, W_2, \dots\}$ maximal em \mathcal{A}_W pela relação de inclusão de conjuntos. Como cada W_i é um intervalo aberto, temos que $\bigcup_{k=1} \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n(W_k)$ é um aberto e denso em W e $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n(W_i) \cap \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n(W_j) = \emptyset$, para todo $i \neq j$.

Com as notações acima temos que:

1. A união dos conjuntos $\bigcup_{k=1} \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n(W_k)$ e $\bigcup_{i,j=1} [(span(A_i) - \overline{D}_i) \cup span(P_j)]$, é um conjunto aberto e denso em Γ .
2. Para cada $j \in \mathbb{N}$, $\bigcup_{k=1} \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n(W_k)$ nunca intersecta os extremos dos intervalos D_j .

Para cada inteiro k seja:

$$\mathcal{B}_k = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n(W_k) - \left(\bigcup_{i=1} [(span(A_i) - \overline{D}_i)] \right)$$

Agora o procedimento para a regularização é o mesmo que já fizemos no capítulo 3, ou seja, para cada inteiro positivo k , definimos uma medida μ em W_k e estendemos essa medida para o conjunto $\bigcup_{n \in \mathbb{Z}} T^n(W_k)$. Assim obteremos uma medida no domínio fundamental D_i de cada T^δ -sequência atratora e induzimos essa medida em cada elemento da sequência via lema 2 tal como fizemos na subseção 3.2.4.

Para a parte periódica, procedemos como na subseção 3.2.3. Dessa forma, obtemos mu medida distinguida em Γ tal que para cada segmento I contido em Γ cuja imagem é também um segmento temos que a aplicação de Poincaré $T_{\mathcal{F}}|_I : I \rightarrow T_{\mathcal{F}}(I)$ é $\mu - C^\infty$.

No caso em que a folheação possuir uma recorrência do tipo densa ou uma recorrência do tipo excepcional procedemos como nas subseções 3.2.5, 3.2.5 e 3.2.6 e como na seção 3.3 para obtemos uma medida distinguida nas transversais globais que formam os bordos das caixas. É claro que a aplicação de Poincaré induzida pela folheação no interior da caixa será de classe C^1 se a recorrência for do tipo excepcional ou de classe C^∞ se a recorrência for do tipo densa.

6.4 Demonstração do teorema 4

Demonstração. Até aqui construímos os elementos que são necessários para a demonstração do teorema. Daqui para frente o procedimento é essencialmente o mesmo que desenvolvemos para o caso geral. \square

Referências Bibliográficas

- [1] Alberto Candel and Lawrence Conlon. *Foliation I*. American Mathematical Society.
- [2] John Cantwell and Lawrence Conlon. *Topological Obstructions to Smoothing continuous Proper Foliations*. Contemporary Mathematics vol1 (1994), 1-19.
- [3] A. Denjoy. *Sur les courbes d'Arnolfinies par les equations differentielles la surface du tore*. J. Mathematique 9 (1932), 333-375.
- [4] C. J. Gardiner. *The structure of flows exhibiting non-trivial recurrence on two-dimensional manifolds*. J.Diff.eqn. 57 (1985), 138-158.
- [5] C. Gutierrez. *Smoothability of Cherry flows on two-manifolds*. In Springer Lecture Notes in Mathematics, 1007, geometric Dynamics, Proc.Rio de Janeiro, (1981), 308-331.
- [6] C. Gutierrez. *Smoothing continuous flows on two-manifolds and recurrences*. Ergodic Theory Dynamical Systems 6 (1986), 17-44.
- [7] C. Gutierrez. *Structural stability for flow on the torus with a cross-cap*. Trans.Amer.Math.Soc,241 (1978), 311-320.
- [8] E. L. Lima. *Curso de Análise, vol.2*.
- [9] J. Munkres. *Obstructions to the smoothing piecewise differentiable homeomorphisms*. Ann. Math.Soc. 72 (1960), 521-554.
- [10] C. Camacho and A. L. Neto. *Teoria Geométrica das folheações*.
- [11] D. Neumann. *Smoothing continuous flows on 2-manifolds*. J.Diff.Eq. 28 (3) (1978), 327-344.
- [12] M. Peixoto. *Structural stability on two-dimensional manifolds*. Topology 1 (1962), 101-120.

- [13] H. Poincaré. *Sur les courbes définies par les équations différentielles.* Œuvres, vol. I, Gauthier-Villars, Paris, (1928), pp 3-84, 90-161, 167-221.
- [14] A. J. Schwartz. *A generalization of the Poincaré-Bendixson theorem to closed two-dimensional manifolds.* Amer. J. Math. 85 (1963), 453-548.
- [15] Hassler Whitney. *Regular Families of curves.* American Mathematical Society (1932), 244-270.