Universidade Federal de Minas Gerais

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

Teoria C^0 Vetorial em Geometria Riemanniana e Decomposição em Bolhas para Aplicações de Palais-Smale

Gil Fidelix de Souza

Orientador: Prof. Marcos da Silva Montenegro

Belo Horizonte - 20/12/2010

Aos meus pais, Hélia e Jesus.
Aos meus irmãos, Gerson, Gilberto,
Gilmar, Gilda, Gilson e Giovania.
E à minha esposa, Cristiane.

Agradecimentos

Agradeço a Deus por me dar paciência, saúde, capacidade e força.

Ao meu orientador Marcos Montenegro pelo incentivo e apoio, pelo belo tema proposto e discussões sempre tão esclarecedoras e instrutivas.

Aos membros da banca avaliadora que gentilmente aceitaram participar da conclusão desse trabalho, professores Ezequiel Rodrigues Barbosa, Gastão Almeida Braga, Severino Toscano do Rego Melo e Xia Changyu. Agradeço especialmente ao prof. Gastão de Almeida Braga que mesmo em férias participou da minha defesa.

Aos meus pais, irmãos e irmãs pelo apoio e incentivo, em especial à minha mãe Hélia, ao Gerson (Dé), à Gilda (Dinha) e à Giovania (Géo) pelos meus primeiros "passos" acadêmicos.

À minha querida esposa Cristiane que de certo modo me ajudou a carregar o fardo dessa empreitada.

Ao Rafael (Paraná) pela proposta de seminários aos sábados e "papos" aleatórios sempre tão interessantes.

Ao professor Paulo César Carrião pelos cursos sempre tão agradáveis e esclarecedores e também pela coleção de arquivos digitais. À Susana C. Fornari pela paciência e dedicação durante toda a minha iniciação científica e todo o mestrado.

Aos professores Maria Suzana Balparda de Carvalho e Itamar Inácio de Santana que em meus tempos de engenharia no CEFET me incentivaram a cursar Matemática. Ao amigo Lázaro que indiretamente me ajudou a compreender que essa seria a melhor escolha.

Aos colegas da PUCMINAS e da (falecida?) FIT - Faculdade Inforium de Tecnologia.

Aos colegas do IFMG de Formiga, Lélis Pedro, Ana Flávia Camargos, Xico, Márcio Pironel, André Roger e Ricardo C. Carpio.

Aos colegas e amigos da UFOP, em especial ao Luiz Gustavo de Oliveira Carneiro (Cabelo) pelo esforço colossal empreendido na organização dos horários do DEMAT e na redução de carga horária para os doutorandos, tal organização ajudou-me muito no desenvolvimento do meu trabalho. À PROPP-UFOP pelo apoio financeiro.

Aos demais colegas, amigos e professores que deveriam constar aqui e que no momento a minha memória me trai, impossibilitando a citação dos mesmos.

Mais uma vez, a todos, os meus mais sinceros agradecimentos.

Nós geralmente descobrimos o que fazer percebendo aquilo que não devemos fazer. E provavelmente aquele que nunca cometeu um erro nunca fez uma descoberta.

Samuel Smiles

Resumo

Estudamos sistemas elípticos sob a forma potencial envolvendo o p-Laplaciano com a presença de não-linearidades críticas. Na primeira parte apresentamos condições para a existência de soluções regulares de sistemas potenciais em Geometria Riemanniana, uma decomposição em bolhas diagonais para aplicações de Palais-Smale e aplicações teóricas dessa decomposição. Na segunda parte, no espaço Euclideano, apresentamos uma segunda decomposição em bolhas e aplicamos-a a um resultado de compacidade.

Abstract

We approach potential elliptic systems involving p-Laplace operators and critical nonlinearities. In the first part, we present conditions for the existence of regular solutions of potential systems in Riemannian Geometry, a decomposition in diagonal bubbles to applications of Palais-Smale and theoretical applications of this decomposition. In the second part, in the Euclidean space, we present another decomposition in bubbles and apply it to a result of compactness.

Sumário

Introdução Geral

0.1 Panorama histórico

Na década de 80, Struwe [Sw2], mostrou que uma sequência de Palais-Smale (u_m) em $H^{1,p}(\Omega)$, $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio, para o funcional energia associado a

$$-\Delta u + \lambda u = |u|^{2^*-2}u \text{ em } \Omega, \tag{1}$$

sendo $2^* = \frac{2n}{n-2}$, possui uma decomposição em funções elementares $B_{j,m}$, como segue

$$u_m = u^0 + \sum_{j=1}^{l} B_{j,m} + R_m,$$

sendo u^0 limite fraco de u_m em $H_0^{1,2}(\mathbb{R}^n)$, as funções $B_{j,m}$ são reescalonamentos de soluções da equação

$$-\Delta u = |u|^{2^*-2}u \text{ em } \mathbb{R}^n \tag{2}$$

e $R_m \to 0$ em $D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ quando $m \to +\infty$. Struwe mostrou também que valia a decomposição do funcional energia associado a (1), E_λ . Essa decomposição é dada por

$$E_\lambda(u_m) = E_\lambda(u^0) + \sum_{j=1}^{l} E_0(u^j) + o(1),$$

em que E_0 é o funcional energia associado a (2), $u^j \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ são soluções de (2) e $o(1) \to 0$ quando $m \to +\infty$.

Em 2004 Druet, Hebey e Robert [DHR] estudaram o comportamento das soluções das equações

$$-\Delta_g u + h_\alpha u = |u|^{2^*-2}u \text{ em } M, \tag{3}$$

sendo (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão $n \geq 3$, Δ_g o operador de Laplace-Beltrami em M, h_α uma sequência de funções suaves convergindo para uma função suave h em C^θ, $0 < \theta < 1$. Nesse caso, estudando uma sequência de Palais-Smale para o funcional energia associado a (3), para cada α, temos a decomposição em funções $B_{j,\alpha}$, estudada por Struwe. Dadas sequências $(\mu_{j,\alpha})_\alpha$ sequência em $\mathbb{R}_+$ convergindo a zero e $(x_{j,\alpha})_\alpha$ em M, localmente, as funções $B_{j,\alpha} \in H^{1,2}(M)$ podem ser escritas como $\mu_{j,\alpha}^{-\frac{n-2}{2}} u(\mu_{j,\alpha}^{-1} \exp_{x_{j,\alpha}}(x))$, sendo $\exp_x$ a aplicação exponencial em x e $u \in D^{1,2}(\mathbb{R}^n)$ uma solução não trivial de (2). A sequência $(B_{j,\alpha})_\alpha$ é o que chamamos de bolhas (escalares) e fornece uma decomposição para sequências de Palais-Smale do funcional energia associado a (3) como segue

$$u_\alpha = u^0 + \sum_{j=1}^{l} B_{j,\alpha} + R_\alpha,$$

sendo u^0 limite fraco de u_α em $H^{1,2}(M)$, as funções $B_{j,\alpha}$ são bolhas escalares e $R_\alpha \to 0$ em $H^{1,2}(M)$ quando $\alpha \to +\infty$. No caso em que a sequência de soluções $(u_\alpha)_\alpha$ é positiva, temos ainda que as bolhas são reescalonamentos de

$$u(x) = \left(1 + \frac{|x|^2}{n(n-2)}\right)^{-\frac{n-2}{2}}.$$

Em 2005, no artigo [Sa1], Saintier estudou as mesmas questões para as equações

$$-\Delta_{p,g} u + h_\alpha u^{p-1} = |u|^{p^*-2} u \text{ em } M, \tag{4}$$

com $p^* = \frac{np}{n-p}$ e h_α uma sequência de funções suaves convergindo em C^θ, $0 < \theta < 1$, para uma função h, obtendo resultados análogos aos encontrados por Druet, Hebey e Robert. Graças aos resultados obtidos por Ghoussoub e Yuan em [GhYn], no caso das soluções radiais positivas, as bolhas são reescalonamentos de

$$u_a(x) = \left(an\left(\frac{n-p}{p-1}\right)^{p-1}\right)^{\frac{n-p}{p^2}} (a + |x - x_0|^{\frac{p}{p-1}})^{1-\frac{n}{p}}$$

para algum $a > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$.

Em 2006, no artigo [He1], Hebey encontrou resultados análogos para o sistema fracamente acoplado, $k \geq 2$ e $n \geq 3$ dado por

$$-\Delta_g u_i + \sum_{j=1}^{k} a_{ij}(x) u_j = |u_i|^{2^*-1} u_i \text{ em } M,\ i = 1, \ldots, k \tag{5}$$

sendo $A(x) = (a_{ij})$ uma aplicação matricial suave que associa cada ponto de M a uma matriz simétrica com entradas reais. Um sistema como (5) é dito fracamente acoplado se a quantidade no segundo membro de (5) não envolve as outras funções coordenadas u_j, $j \neq i$, caso contrário dizemos que o sistema é fortemente acoplado. O problema correspondente com $(A_\alpha)_\alpha$, convergindo para A, nos dá o análogo de (3) no contexto vetorial

$$-\Delta_g u_i + \sum_{j=1}^{k} a_{ij}^\alpha(x) u_i = |u_i|^{2^*-1} u_i \text{ em } M,\ i = 1, \ldots, k. \tag{6}$$

Analisando uma sequência de Palais-Smale $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$, $u_\alpha^i \geq 0$, $i = 1, \ldots, k$, Hebey mostrou a decomposição

$$\mathcal{U}_\alpha = \mathcal{U}^0 + \sum_{j=1}^{m} \mathcal{B}_{j,\alpha}(x) + \mathcal{R}_\alpha,$$

sendo $\mathcal{U}^0$ o limite fraco de $\mathcal{U}_\alpha$ em

$$H^{1,2}(M,\mathbb{R}^k) = \underbrace{H^{1,2}(M) \times \ldots \times H^{1,2}(M)}_{k \text{ vezes}},$$

$\mathcal{R}_\alpha \to 0$ em $H^{1,2}(M,\mathbb{R}^k)$ quando $\alpha \to +\infty$ e $\mathcal{B}_{j,\alpha}(x)$ uma sequência de funções tal que uma de suas coordenadas é formada por bolhas escalares e as demais coordenadas são todas nulas, ou seja, as bolhas da decomposição estudada por Hebey são da forma $e_i B_{j,\alpha}$ em que e_i é um vetor da base canônica de $\mathbb{R}^k$ e $B_{j,\alpha}$ é um reescalonamento de

$$u(x) = \left(1 + \frac{|x|^2}{n(n-2)}\right)^{-\frac{n-2}{2}}.$$

Em 2010 Druet, Hebey e Vétois [DHV] levantam diversas questões para o sistema fortemente acoplado

$$-\Delta_g u_i + \sum_{j=1}^{k} a_{ij}^\alpha(x) u_i = |\mathcal{U}|^{2^*-2} u_i \text{ em } M,\ i = 1,\ldots,k, \tag{7}$$

sendo $|\mathcal{U}|^2 = \sum_{i=1}^k u_i^2$ e $A_\alpha = (a_{ij}^\alpha)$ como em (6). Dentre as questões levantadas por Druet, Hebey e Vétois temos uma versão da decomposição em bolhas associadas a (7), estimativas pontuais e comportamento assintótico em relação à uma das bolhas da decomposição em bolhas apresentada pelos autores. Algo que destacamos na teoria de blow-up desenvolvida em [DHV], é a discussão de soluções do sistema crítico Euclideano

$$-\Delta u_i = |\mathcal{U}|^{2^*-2} u_i \text{ em } M,\ i = 1,\ldots,k. \tag{8}$$

Essencialmente, a discussão de suas soluções não-negativas, pois isso permite exibir a expressão local das bolhas da decomposição de uma sequência de soluções não-negativas $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$ de (7), além de fornecer novas estimativas para a sequência. Utilizando o método das esferas móveis como método de simetrização, [DHV] dá uma classificação completa das soluções não-negativas de (8). O formato de tais soluções é dado por

$$\mathcal{U}(x) = t_0 u(x),$$

sendo t_0 um vetor de coordenadas não-negativas em $\mathbb{S}^{k-1} = \{t \in \mathbb{R}^k;\ \sum_{i=1}^k |t_i|^2 = 1\}$ e u é uma solução positiva de (2). Permitindo escrever localmente as bolhas como

$$\mathcal{B}_{j,\alpha}(x) = t_{j,\alpha} \mu_{j,\alpha}^{-\frac{n-2}{2}} u(\mu_{j,\alpha}^{-1} \exp_{x_{j,\alpha}}(x)),$$

em que $t_{j,\alpha} \in \mathbb{S}^{k-1}$ são vetores de coordenadas não-negativas, u é uma solução da equação Euclideana (2), $\mu_{j,\alpha}$ e $x_{j,\alpha}$ são os pesos e os centros das bolhas, respectivamente.

A teoria de blow-up desenvolvida até então é bastante extensa. Com o intuito de situar o leitor sobre a relevância de nossas contribuições, nesta tese apresentamos um panorama detalhado dessa teoria.

0.2 Proposta e relevância

Um dos objetivos dessa tese é contribuir para a teoria C^0 vetorial em geometria Riemanniana, desenvolvendo uma teoria de blow-up no contexto Riemanniano para os sistemas

$$-\Delta_{p,g}\mathcal{U} + \frac{1}{p}\nabla_{\mathcal{U}} G_\alpha(x,\mathcal{U}) = \frac{1}{p^*}\nabla F_\alpha(\mathcal{U}) \text{ em } M. \tag{$S_{p,\alpha}$}$$

sendo $F_\alpha : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1, p^*-homogêneas, ou seja, tais que

$$F_\alpha(\lambda t_0) = \lambda^{p^*} F_\alpha(t_0)$$

para todo $\lambda > 0$ e $t_0 \in \mathbb{R}^k$, admitimos que as funções F_α são positivas em $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$. As funções $G_\alpha : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ são p-homogêneas, contínuas e de classe C^1 na segunda variável. Chamamos a atenção para a generalidade do problema $(S_{p,\alpha})$. Temos que os problemas escalares estudados em [DHR], [Sa1] e os problemas vetorias com sistemas fracamente e fortemente acoplados [He1] e [DHV] são casos particulares de $(S_{p,\alpha})$. Tal generalidade, irá, no decorrer da tese, criar dificuldades que serão contornadas.

Considerando os problemas (1), (3), (4) e (6), temos bolhas escalares (B_α) são formadas por uma família a um parâmetro obtida por reescalonamentos de uma solução da equação $-\Delta_p u = |u|^{p^*-2}u$ em $\mathbb{R}^n$. No contexto Riemanniano podemos escrever localmente

$$B_\alpha(x) = \mu_\alpha^{-\frac{n-p}{p}} u(\mu_\alpha^{-1} \exp_{x_\alpha}^{-1}(x)),$$

sendo u uma solução de $-\Delta_p u = |u|^{p^*-2}u$ em $\mathbb{R}^n$, $(\mu_\alpha)_\alpha$ uma sequência de números reais positivos convergindo a 0 e $\exp_{x_\alpha}$ é a aplicação exponencial em x_α. Os pontos x_α são ditos os centros das bolhas e μ_α os pesos. Desde que k-bolhas são formadas por uma sequência de aplicações

$$\mathcal{B}_{j,\alpha} = (B^1_{j,\alpha}(x), \ldots, B^k_{j,\alpha}(x))$$

tais que uma das coordenadas é formada por bolhas escalares e as demais coordenadas são todas nulas.

Como destacamos anteriormente, nossa proposta é contribuir para a teoria C^0 vetorial em geometria Riemanniana obtendo extensões dos resultados estudados por [He1].

Trabalhamos a existência de solução minimizante para

$$-\Delta_{p,g}\mathcal{U} + \frac{1}{p}\nabla_{\mathcal{U}} G(x,\mathcal{U}) = \frac{1}{p^*}\nabla F(\mathcal{U}) \text{ em } M, \tag{S_p}$$

ou seja, soluções de (S_p) que minimizam o funcional

$$\Psi_G(\mathcal{U}) = \sum_{i=1}^{k} \int_M |\nabla u_i|^p \, dv_g + \int_M G(x,\mathcal{U}) \, dv_g = \int_M |\nabla \mathcal{U}|^p \, dv_g + \int_M G(x,\mathcal{U}) \, dv_g$$

restrito à variedade

$$\Lambda_p = \{\mathcal{U} \in H^{1,p}(M,\mathbb{R}^k) : \int_M F(\mathcal{U}) \, dv_g = 1\}.$$

Nessa parte concluímos que se

$$\inf \left\{ \Psi_G(\mathcal{U}) : \mathcal{U} \in H^{1,p}(M,\mathbb{R}^k), \int_M F(\mathcal{U}) \, dv_g = 1 \right\} < K_F(n,p)^{-p},$$

então $(S_{p,\alpha})$ possui solução de classe C^1. A constante $K_F(n,p)^p$ é dada por

$$\inf \left\{ \int_M |\nabla \mathcal{U}|^p \, dv_g : \mathcal{U} \in H^{1,p}(M,\mathbb{R}^k), \int_M F(\mathcal{U}) \, dv_g = 1 \right\}.$$

Em seguida apresentamos a decomposição em bolhas diagonais para $(S_{p,\alpha})$, nos moldes apresentados por Hebey em [He1], isto é, as k-bolhas da decomposição são aplicações vetoriais $\mathcal{B}_{j,\alpha} = (B^1_{j,\alpha}(x), \ldots, B^k_{j,\alpha}(x))$ tais que $B^i_{j,\alpha}$ é não-nula para um determinado i e 0 para os demais valores de i.

Com a decomposição em bolhas em mãos, naturalmente surgem questões sobre o comportamento das sequências limitadas de soluções do problema estudado. Isto é, qual seria o comportamento da sequência quando retiramos do domínio dessas funções o conjunto $\mathfrak{S}$ dos pontos limites dos centros das bolhas da decomposição. Como resposta à esta questão temos as estimativas pontuais das sequências de soluções $\mathcal{U}_\alpha$ do problema que esteja sendo considerado. Por exemplo, para $n \geq 3$, $k = 1$ e $p = 2$, em [DHR], considerando a decomposição em bolhas de uma sequência de soluções de (3), os autores mostram que uma sequência de Palais-Smale do funcional energia associado a (3) é limitada em $L^\infty(M \setminus \mathfrak{S})$ e segue da teoria elíptica que u_α converge em C^2_{loc} para uma função u^0. Em [Sa1], analisando uma sequência limitada de soluções de (4) que possuam limite fraco igual a 0, no caso $k = 1$, $1 < p < n$, o autor complementa a teoria mostrando que u_α é limitada em qualquer compacto de $M \setminus \mathfrak{S}$ e conclui que u_α converge a 0 em $C^0_{loc}(M \setminus \mathfrak{S})$. No contexto vetorial, $k \geq 1$ e $p = 2$, em [He1] (e [DHV]) os autores trazem estimativas pontuais para sequência $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$ de Palais-Smale para a sequência de funcionais $(I_{p,\alpha})$ associada a (6) (a (7)) chegando a conclusões análogas às obtidas no caso escalar em [DHR].

Outra questão levantada é o comportamento de uma sequência de Palais-Smale na vizinhança de pontos de $\mathfrak{S}$. Para sequências u_α, tais que $\| u_\alpha \|_p \to 0$, dizemos que um ponto x é um ponto de concentração de uma sequência de u_α, se

$$\limsup_{\alpha \to +\infty} \int_V |u_\alpha|^{p^*} \, dv_g > 0,$$

para toda vizinhança de V de x. O estudo dos pontos de concentração, em teoria de blow-up, é tratado no caso $k = 1$ e $p = 2$ em [DHR] e em [He1] no caso $k \geq 1$ e $p = 2$. Na ótica de extremais a concentração aparece nos trabalhos [DjDr] para $k = 1$ e p qualquer e em [He2] para $k \geq 1$ e $p = 2$. Para o estudo dos pontos de concentração desenvolvemos uma versão vetorial das estimativas de De Giorgi-Nash-Moser e, com essas estimativas, obtemos que os pontos de $\mathfrak{S}$ carregam uma boa parte da informação da sequência $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$, no sentido que

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{\int_V |\mathcal{U}_\alpha|^p \, dv_g}{\int_M |\mathcal{U}_\alpha|^p \, dv_g} = 1,$$

para toda vizinhança V de $\mathfrak{S}$, fato que denominamos concentração L^p da sequência $\mathcal{U}_\alpha$.

Considerando renormalizações ou reescalonamentos das funções coordenadas de $\mathcal{U}_\alpha$ em relação a pesos e centros, previamente eleitos, das bolhas da decomposição diagonal, obteremos novas estimativas para $\mathcal{U}_\alpha$. Estas novas estimativas são, de certo modo, um estudo de concentração para sequências de soluções $\| \mathcal{U}_\alpha \|_p \not\to 0$.

Restringindo-nos ao caso $p = 2$, utilizando as ferramentas teóricas desenvolvidas à uma sequência limitada de soluções não-negativas $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$ de $(S_{p,\alpha})$, isto é, tal que as coordenadas são funções não-negativas, levantamos questões sob o comportamento da sequência $\mathcal{U}_\alpha$ ao estarmos próximos de uma da bolhas da decomposição diagonal, donde concluimos que o comportamento da sequência $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$, para α suficientemente grande, se assemelha ao de soluções fundamentais da equação de Laplace. Esse estudo nos fornece um refinamento das estimativas pontuais da sequência $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$.

Já para a parte Euclideana, a nossa proposta é redefinir o conceito de k-bolhas, criando o conceito de bolhas vetoriais no caso em que M é um aberto limitado Ω em $\mathbb{R}^n$. Nesse caso estudamos o comportamento de uma sequência de soluções de $(S_{p,\alpha})$ em função dos comportamentos de funções F_α e G_α, com graus de homogeneidade iguais a p^* e p, respectivamente. Temos como hipóteses a positividade das funções F_α em $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ e as convergências

$$F_\alpha \to F \text{ em } C^1_{loc}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$$

$$G_\alpha \to G \text{ em } C^1_{loc}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R}).$$

Com essas hipóteses, mostramos que a sequência $\mathcal{U}_\alpha$ admite uma decomposição em k-bolhas como segue

$$\mathcal{U}_\alpha = \mathcal{U}^0 + \sum_{j=1}^{k} \mathcal{B}_{j,\alpha} + \mathcal{R}_\alpha,$$

sendo $\mathcal{U}^0$ limite fraco de $\mathcal{U}_\alpha$ e $\mathcal{B}_{j,\alpha}$ reescalonamentos de soluções da equação

$$-\Delta_p \mathcal{U} = \frac{1}{p^*} \nabla F(\mathcal{U}) \text{ em } \mathbb{R}^n \tag{9}$$

e $\Delta_p \mathcal{U} = (\Delta_p u_1, \ldots, \Delta_p u_k)$. Provamos ainda que para o caso das soluções radiais positivas, $\mathcal{B}_{j,\alpha}$ é dada por

$$t_\alpha^j F_\alpha(t_{j,\alpha})^{-\frac{n-p}{p^2}} B_{j,\alpha},$$

sendo $B_{j,\alpha}$ bolhas escalares e $t_{j,\alpha}$ vetor de $\mathbb{S}_p^{k-1}$ com coordenadas não-negativas.

0.3 Organização e ideias

Esta tese é composta de quatro capítulos. Para melhor organização, apresentamos nos primeiros capítulos os enunciados de nossas contribuições e as demonstrações dos resultados propostos estão nos capítulos finais da tese. No que concerne ao assunto, podemos dizer que a tese é formada por duas partes, uma com contribuições Riemannianas e outra com contribuições Euclideanas.

No Capítulo 1, apresentamos um panorama detalhado da teoria de blow-up em variedades Riemannianas e destacamos nossas contribuições a essa teoria. Inspirados em algumas ideias devidas a Struwe [Sw2], Druet, Hebey e Robert [DHR], Saintier [Sa1] e Hebey [He1], desenvolvemos um estudo do comportamento das soluções dos sitemas

$$-\Delta_{p,g} \mathcal{U} + \frac{1}{p} \nabla_{\mathcal{U}} G_\alpha(x, \mathcal{U}) = \frac{1}{p^*} \nabla F_\alpha(\mathcal{U}) \text{ em } M. \tag{$S_{p,\alpha}$}$$

Utilizamos a forma diagonal para as aplicações $\mathcal{B}_{j,\alpha}$.

No Capítulo 2, propomos um retorno à teoria de blow-up em abertos de $\mathbb{R}^n$. Enunciamos nossas principais contribuições e fornecemos uma aplicação. Precisamente, como aplicação temos um resultado de compacidade de soluções para sistemas críticos do tipo potencial.

O capítulo 3 é dedicado às demonstrações das contribuições Riemannianas. Primeiramente, observamos que a equação

$$-\Delta_{p,g} \mathcal{U} + \frac{1}{p} \nabla_{\mathcal{U}} G(x, \mathcal{U}) = \frac{1}{p^*} \nabla F(\mathcal{U}) \text{ em } M, \tag{10}$$

possui estrutura variacional, então impomos condições para a existência de soluções de energia mínima as quais são de classe C^1. Em seguida estudamos o comportamento da sequência $\mathcal{U}_\alpha$ dada pelas soluções dos sistemas $(S_{p,\alpha})$ em função dos comportamentos de F_α e G_α. Acrescentando a hipótese de que a sequência $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$ é limitada, obtemos que essa sequência é de Palais-Smale para a sequência de funcionais $I_{p,\alpha}$ associados a $(S_{p,\alpha})$, ou seja, a sequência $\mathcal{U}_\alpha$ é tal que

$$(I_{p,\alpha}(\mathcal{U}_\alpha))_\alpha \text{ é limitada e } DI_{p,\alpha}(\mathcal{U}_\alpha) \to 0 \text{ em } (H^{1,p}(M,\mathbb{R}^k))'.$$

Da limitação de $\mathcal{U}_\alpha$ obtemos a existência de um limite fraco $\mathcal{U}^0$ em $H^{1,p}(M,\mathbb{R}^k)$. As hipóteses sobre F_α e G_α permitem-nos decompor o funcional $I_{p,\alpha}$ em termos de outros funcionais L_k^i de tal modo que as componentes de $\mathcal{U}_\alpha$ formam sequências de Palais-Smale para os funcionais L_k^i. Essa decomposição em funcionais L_k^i nos permite utilizar os resultados obtidos por Saintier [Sa1], para a obtenção de decomposições em bolhas para as componentes de $\mathcal{U}_\alpha$, o que chamamos de decomposição em bolhas diagonais, concluindo essa parte. Utilizando a decomposição em bolhas diagonais, teremos as estimativas pontuais para uma sequência de soluções de $(S_{p,\alpha})$. Dizemos que $x \in M$ é um ponto de concentração da sequência $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$, $\| \mathcal{U}_\alpha \|_p \to 0$, se

$$\limsup_{\alpha\to+\infty} \int_V |\mathcal{U}_\alpha|^{p^*} \, dv_g > 0$$

para toda vizinhança V de x em M. Para o estudo de fenômenos de concentração da sequência $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$, introduzimos uma versão das estimativas de De Giorgi-Nash-Moser ao contexto vetorial, inicialmente para $p = 2$ e depois para $p \neq 2$. Nossa contribuição ao estudo dos fenômenos de concentração dá extensões de questões levantadas por Druet, Hebey e Robert [DHR], Hebey [He1] e E. R. Barbosa e M. Montenegro [BbMn1] para o caso $p = 2$ e E.R. Barbosa e M. Montenegro [BbMn2] para o caso $p \neq 2$, sendo os dois últimos trabalhos estudados no contexto de aplicações extremais para a desigualdade de Sobolev. Acrescentamos novas estimativas para a sequência $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$ via o reescalonamento de suas funções coordenadas, tomando os raios e o pesos de uma das bolhas previamente eleita. Concluímos que as funções coordenadas da sequência $(\hat{\mathcal{U}}_\alpha)_\alpha$, formada pelos reescalonamentos de $\mathcal{U}_\alpha$, para α suficientemente grande, possuem comportamento semelhante ao de soluções não-negativas de

$$-\Delta_p \mathcal{U} = \frac{1}{p^*} \nabla F(\mathcal{U}) \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Observamos que esse estudo nos fornece um refinamento do estudo do comportamento da sequência $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$ em uma vizinhança de suas singularidades, ou seja, podemos dizer que, de certo modo, isso nos fornece um estudo de fenômenos de concentração para o caso em que $\mathcal{U}^0 \not\equiv 0$.

Finalizamos a primeira parte, com o estudo do comportamento da sequência $\mathcal{U}_\alpha$ estando próximos de uma das bolhas de sua decomposição diagonal, fato que denominamos o comportamento assintótico da sequência. Novamente a falta de regularidade das funções F_α e G_α apresentam-nos dificuldades. No cálculo de estimativas para a sequência $\mathcal{U}_\alpha$ obtivemos a dependência da norma de ∇G_α. Obstáculo que é contornado graças à convergência de G_α a G em C^1_{loc}, o que nos permite controlar a norma da derivada de G_α.

Aqui cabe outra observação, pois o comportamento assintótico nos dá um refinamento das estimativas pontuais.

O capítulo 4 é dedicado às demonstrações das contribuições Euclideanas. Nessa parte redefinimos levemente o conceito de k-bolhas, conceituando bolhas vetoriais. A variedade M, em que $(S_{p,\alpha})$ está definida, é um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$. Justificamos esse retorno à abertos de $\mathbb{R}^n$ pelo resumo abaixo.

Observamos que para $p = 2$, no caso das soluções positivas, as bolhas escalares são reescalonamentos de funções extremais para a desigualdade de Sobolev

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2^*}\ dx\right)^{\frac{2}{2^*}} \leq C\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^2\ dx. \tag{11}$$

É conhecido da literatura que as soluções positivas da equação de expoente crítico

$$-\Delta u = |u|^{2^*-2}u \text{ em } \mathbb{R}^n$$

e as funções extremais associadas a (11) são reescalonamentos de

$$u(x) = \left(1 + \frac{|x|^2}{n(n-2)}\right)^{-\frac{n-2}{2}}.$$

Para $p \neq 2$, Ghoussoub e Yuan mostram em [GhYn] que as soluções radiais positivas da equação de expoente crítico

$$-\Delta u = |u|^{p^*-2}u \text{ em } \mathbb{R}^n \tag{12}$$

são funções extremais da desigualdade de Sobolev

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*}\ dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq C\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p\ dx. \tag{13}$$

No trabalho [Sa1], Saintier mostrou que, no caso das soluções radiais positivas, as bolhas escalares são reescalonamentos de soluções radiais positivas de (12). Recentemente, no artigo [BbMn2], Barbosa e Montenegro verificaram que as aplicações extremais do problema Riemanniano, com $k \geq 1$ é igual ao produto de um vetor $t_0 \in \mathbb{S}_p^{k-1} = \{t \in \mathbb{R}^k; \sum_{i=1}^k |t_i|^p = 1\}$ e uma função extremal. Fato que nos conduziu a uma nova abordagem do problema: "Bolhas vetoriais seriam da forma $t_0 v$, com v uma função extremal Euclideana?" A falta de uma caracterização para as soluções positivas de (12) para $p \neq 2$ restringiu o nosso estudo às soluções radiais positivas de (9). Utilizando esta restrição, daremos a forma das funções $\mathcal{B}_{j,\alpha}$ no caso das soluções radiais não-negativas de $(S_{p,\alpha})$.

No capítulo 4, mostramos a decomposição de uma sequência de Palais-Smale $\mathcal{U}_\alpha$ da sequência de funcionais $I_{p,\alpha}$. Do fato que $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$ ser de Palais-Smale, obtemos sua limitação e consequentemente um limite fraco em $H_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k) \subset D^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$, para contornar a dificuldade imposta pela falta de regularidade de F_α e G_α, acrescentamos a hipótese $G_\alpha \to G$ em C^1_{loc}, o que nos permite trabalhar com $\mathcal{U}^0$ qualquer. Para a obtenção de uma decomposição em bolhas vetoriais para $(S_{p,\alpha})$, introduzimos o sistema limite

$$-\Delta_p \mathcal{U} + \frac{1}{p}\nabla_{\mathcal{U}} G(x,\mathcal{U}) = \frac{1}{p^*}\nabla F(\mathcal{U}) \text{ em } \Omega \qquad (S_{p,\Omega,\infty})$$

e seu funcional energia I_p. Primeiramente, concluímos que o limite fraco $\mathcal{U}^0$ acima, é uma solução fraca $(S_{p,\Omega,\infty})$. O próximo passo é verificar que a sequência $(\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0)_\alpha$ é uma sequência de Palais-Smale para o funcional energia I associado ao sistema

$$\Delta_p \mathcal{U} = \frac{1}{p^*}\nabla F(\mathcal{U}) \text{ em } \Omega, \qquad (14)$$

o que é feito mostrando a decomposição dos funcionais $I_{p,\alpha}$, I_p e I, como segue

$$I_{p,\alpha}(\mathcal{U}_\alpha) = I(\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}) + I_p(\mathcal{U}^0) + o(1),$$

em que $o(1) \to 0$ quando $\alpha \to +\infty$. Para obtermos esta decomposição, fazemos uso das hipóteses das convergências de F_α e G_α no lema de Brézis-Lieb generalizado ([BrLb]). A sequência $\mathcal{V}_\alpha = \mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U} \rightharpoonup 0$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ e $I(\mathcal{V}_\alpha) \to \beta$, estudando o valor de β, chegamos à seguinte conclusão em função do valor de β:

(i) Se $\beta < \beta^* = n^{-1}K_F(n,p) - n$, então $\beta = 0$ e $\mathcal{V}_\alpha \to 0$ a menos de subsequência.

Utilizamos essa conclusão para obter que se $\mathcal{V} \in H^{1,p}_0(\Omega, \mathbb{R}^k) \subset D^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é solução não-trivial de (14), então $I(\mathcal{V}) \geq \beta^*$. Então utilizaremos um lema para verificar que se $\mathcal{V}_\alpha \rightharpoonup 0$, mas não fortemente, então existem bolhas vetoriais $\hat{\mathcal{B}}_\alpha$ tais que, a menos de subsequência, $\mathcal{W}_\alpha = \mathcal{V}_\alpha - \hat{\mathcal{B}}_\alpha + o(1)$ é uma sequência de Palais-Smale do funcional I. Então recorremos a uma iteração sobre a sequência $\mathcal{V}^k_\alpha$, construídas pelo lema, tal que cada $\mathcal{V}^k_\alpha \in D^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ é solução não-trivial de (14) para obter um absurdo, concluindo que a sequência $\mathcal{V}^k_\alpha \in D^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ termina para algum $k \geq 1$. O absurdo é consequência da decomposição dos funcionais, pois obtemos para a $(k+1)$-ésima iteração que

$$I(\mathcal{V}^{k+1}_\alpha) = I_{p,\alpha}(\mathcal{U}_\alpha) - I_p(\mathcal{U}^0) - \sum_{j=1}^{k} I(\mathcal{V}^j_\alpha) \leq I_{p,\alpha}(\mathcal{U}_\alpha) - k\beta^*,$$

se o processo não termina, em algum momento o membro à direita da desisgualdade torna-se negativo, contrariando $\mathcal{V}^{k+1}_\alpha$ ser solução não-trivial de (14).

Em teoria de blow-up sempre há o interesse de classificar as soluções não-triviais de (14). Utilizando métodos de simetrização, classificamos as soluções radiais positivas de (9). Verificamos que as soluções radiais positivas de (9) são formadas pelo produto de um vetor $t_0 \in \mathbb{S}^{k-1}_p = \{t \in \mathbb{R}^k; \sum_{i=1}^k |t_i|^p = 1\}$ com coordenadas não-negativas, um fator de correção $(F(t_0)^{-(n-p)/p^2})$ e uma solução radial positiva da equação (12)

$$-\Delta_p u = |u|^{p^*-2}u \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Relembrando que para $p = 2$, as soluções positivas de (12) são funções extremais da desigualdade de Sobolev teremos que o resultado análogo obtido por Druet, Hebey e Vetóis em [DHV] é um caso particular do problema que estudamos.

Capítulo 1

Teoria C^0 para Sistemas Elípticos sob a Forma Potencial

Neste capítulo levantaremos questões sobre o sistema

$$-\Delta_{p,g}\mathcal{U} + \frac{1}{p}\nabla_{\mathcal{U}}G(x,\mathcal{U}) = \frac{1}{p^*}\nabla F(\mathcal{U}) \text{ em } M, \tag{1.1}$$

com equações definidas em uma variedade Riemanniana (M,g) suave e compacta de dimensão $n \geq 2$, sendo $k \geq 1$ um número inteiro, $1 < p < n$ é um número real, $\Delta_{p,g}u = div(|\nabla_g u|^{p-2}\nabla_g u)$ é o operador de Laplace-Beltrami generalizado, $\nabla_g u$ é o gradiente da função $u : M \to \mathbb{R}$, $\mathcal{U} = (u_1, \ldots, u_k)$, $\Delta_{p,g}\mathcal{U} = (\Delta_{p,g}u_1, \ldots, \Delta_{p,g}u_k)$ e p^* é o expoente crítico da imersão de Sobolev de $H^{1,p}(M)$ no espaço de Lebesgue $L^q(M)$. As funções F e G são homogêneas na variável $\mathcal{U}$, sendo p e p^* os respectivos expoentes de homogeneidade. Observamos que o sistema possui estrutura variacional e que no caso particular em que tomamos $n \geq 3,\ k = 1,\ p = 2$,

$$G(x,u) = \frac{n-2}{4(n-1)}Scal_g(x)u^2 \text{ e } F(u) = \frac{n-2}{4(n-1)}\lambda|u|^{2^*},$$

sendo $Scal_g$ a curvatura escalar de g, o sistema (1.1) se transforma na equação de Yamabe

$$-\frac{4(n-1)}{n-2}\Delta u + Scal_g(x)u = \lambda|u|^{2^*-2}u.$$

Essa equação surge do problema de determinação de métricas $\tilde{g}$ conformes à métrica g de uma variedade Riemanniana compacta (M,g) tal que a curvatura escalar de $\tilde{g}$ é constante, que é conhecido na literatura como o Problema de Yamabe (veja, por exemplo [Ym] ou [Au]).

Sistemas do tipo (1.1) generalizam diversos problemas. Os problemas escalares para $p = 2$ estudados por M. Struwe [Sw2], Druet, Hebey e Robert em [He1], para $p \neq 2$ e $1 < p < n$ por [Sa1] e no contexto vetorial com $p = 2$ e $n \geq 3$ Hebey [He1] e Druet, Hebey e Vetóis [DHV] são tidos como casos particulares de (1.1).

Estudaremos diversas questões para (1.1), visando obter extensões completas de alguns resultados obtidos por Hebey em [He1]. Investigaremos a teoria de blow-up tomando soluções associadas a uma família de sistemas, ou seja, correspondentes a uma família de funções F_α e G_α. Precisamente, trabalharemos com a sequência $\mathcal{U}_\alpha = (u_1^\alpha, \ldots, u_k^\alpha)$ dada pelas soluções dos sistemas

$$-\Delta_{p,g}\nabla\mathcal{U} + \frac{1}{p}\nabla_{\mathcal{U}} G_\alpha(x,\mathcal{U}) = \frac{1}{p^*}\nabla F_\alpha(\mathcal{U}) \text{ em } M. \qquad (S_{p,\alpha})$$

Obteremos uma decomposição em bolhas diagonais para $(S_{p,\alpha})$ e como uma consequência teremos estimativas pontuais para a sequência $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$. Estudaremos fenômenos de concentração e para o caso $p = 2$, analisaremos o comportamento assintótico de $\mathcal{U}_\alpha$ quando $\alpha \to +\infty$ no espaço de Sobolev $H^{1,2}(M,\mathbb{R}^k) = \{\mathcal{U} = (u_1, \ldots, u_k) : u_i \in H^{1,2}(M), i = 1, \ldots, k\}$.

1.1 Soluções minimizantes e estrutura variacional

Para $1 \leq p < n,\ n \geq 2$, denotemos por $D^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ o espaço de Sobolev Euclideano vetorial $D^{1,p}(\mathbb{R}^n) \times \ldots \times D^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ munido da norma

$$\| \mathcal{U} \|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\mathcal{U}|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}},$$

sendo

$$\mathcal{U} = (u_1, \ldots, u_k)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\mathcal{U}|^p \, dx = \sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u_i|^p \, dx.$$

Seja $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva e p^*-homogênea. Nesse caso, para $1 \leq p < n$, segue de [BbMn3], a existência de uma constante $A > 0$ tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} F(\mathcal{U}) \, dx \right)^{\frac{p}{p^*}} \leq A \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\mathcal{U}|^p \, dx, \qquad (1.2)$$

para todo $\mathcal{U} \in D^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$.

A melhor constante de L^p-Sobolev Euclideana associada à (1.2) é

$$A_0 = \inf\{A \in \mathbb{R} : \text{ tal que (1.2) é válida}\}.$$

O valor de $A_0 = K_F(n,p)^p$ é calculado em [BbMn2] e o seu valor é igual a

$$K_F(n,p) = M_F^{\frac{1}{p^*}} K(n,p),$$

sendo M_F o máximo de F restrita a $\mathbb{S}_p^{k-1} := \{t \in \mathbb{R}^k;\ |t|^p = \sum_{i=1}^k |t_i|^p = 1\}$ e $K(n,p)$ a melhor constante da desigualdade de Sobolev Euclideana

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} \, dx \right)^{\frac{p}{p^*}} \leq K(n,p) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \, dx.$$

O valor de $K(n,p)$ é conhecido na literatura como

$$K(n,p) = \frac{1}{n} \left(\frac{n(p-1)}{n-p} \right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\frac{\Gamma(n+1)}{\Gamma\left(\frac{n}{p}\right) \Gamma\left(n+1-\frac{n}{p}\right) \omega_{n-1}} \right)^{\frac{1}{n}},$$

em que Γ é a função gama usual e ω_{n-1} é o volume da esfera unitária de dimensão $(n-1)$.

Para $G : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ contínua, de classe C^1 e p-homogênea na segunda variável, definamos o funcional $\Psi_G : H^{1,p}(M, \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}$ por

$$\Psi_G(\mathcal{U}) = \int_M |\nabla \mathcal{U}|^p \, dv_g + \int_M G(x, \mathcal{U}) \, dv_g,$$

com $\mathcal{U} = (u_1, \ldots, u_k) \in H^{1,p}(M, \mathbb{R}^k)$ e $|t|^p = \sum_{i=1}^k |t_i|^p$. Para $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, p^*-homogênea, C^1, definamos ainda

$$\Phi(\mathcal{U}) = \int_M F(\mathcal{U}) \, dv_g.$$

Pela homogeneidade de F e G, obtemos existência de constantes M_G e M_F tais que $|G(x,\mathcal{U})| \leq M_G |\mathcal{U}|^p$ e $F(\mathcal{U}) \leq M_F |\mathcal{U}|^{p^*}$, sendo M_G o máximo de G restrito à $M \times \mathbb{S}_p^{k-1}$ e M_F o máximo de F restrito à $\mathbb{S}_p^{k-1}$. Segue das imersões de Sobolev de $H^{1,p}(M, \mathbb{R}^k)$ em $L^p(M, \mathbb{R}^k)$ e $L^{p^*}(M, \mathbb{R}^k)$ que os funcionais Ψ_G e Φ estão bem definidos. Seja Λ_p definido por

$$\Lambda_p = \left\{ \mathcal{U} \in H^{1,p}(M, \mathbb{R}^k) : \; \Phi(\mathcal{U}) = 1 \right\}$$

e λ_p dado por

$$\lambda_p = \inf_{\mathcal{U} \in \Lambda_p} \Psi_G(\mathcal{U}).$$

Nesse ponto, podemos afirmar que se $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$ é uma sequência minimizante para λ_p, então $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$ é uma sequência limitada em $H^{1,p}(M, \mathbb{R}^k)$. De fato, a afirmação é consequência imediata do fato que $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha \subset \Lambda_p$ e da existência de uma constante m_F tal que $m_F |\mathcal{U}|^{p^*} \leq F(\mathcal{U})$.

Na Proposição a seguir imporemos condições para que (1.1) possua solução de energia mínima.

Proposição 1.1. *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 2$, $1 < p < n$, $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1, positiva e p^*-homogênea e $G : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função contínua, de classe C^1 e p-homogênea na segunda variável. Se $\lambda_p < K_F(n,p)^{-p}$, então (1.1) possui uma solução fraca $\mathcal{U}_0 \in \Lambda_p$ de classe C^1 tal que $\Psi_G(\mathcal{U}_0) = \lambda_p$.*

1.2 Decomposição $H^{1,p}$

Trabalharemos a teoria de blow-up tomando soluções associadas a uma sequência de sistemas críticos formados pela família de funções F_α e G_α. Precisamente, trabalharemos com a sequência $\mathcal{U}_\alpha = (u_1^\alpha, \ldots, u_k^\alpha)$ de soluções dos sistemas

$$-\Delta_{p,g}\mathcal{U} + \frac{1}{p}\nabla_{\mathcal{U}} G_\alpha(x,\mathcal{U}) = \frac{1}{p^*}\nabla F_\alpha(\mathcal{U}) \text{ em } M. \qquad (S_{p,\alpha})$$

Observamos que $(S_{p,\alpha})$ possui funcional energia dado por

$$I_{p,\alpha}(\mathcal{U}) = \frac{1}{p}\int_M |\nabla\mathcal{U}|^p \, dv_g + \frac{1}{p}\int_M G_\alpha(x,\mathcal{U}) \, dv_g - \frac{1}{p^*}\int_M F_\alpha(\mathcal{U}) \, dv_g.$$

Uma sequência $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$ em $H^{1,p}(M,\mathbb{R}^k)$ é dita de Palais-Smale (ou PS) para $I_{p,\alpha}$ se

$$(I_{p,\alpha}(\mathcal{U}_\alpha))_\alpha \text{ é limitada,}$$
$$DI_{p,\alpha}(\mathcal{U}_\alpha) \to 0 \text{ em } (H^{1,p}(M,\mathbb{R}^k))'.$$

Dados uma sequência de pontos convergentes (x_α) em M e uma sequência de números reais positivos $(\mu_\alpha)_\alpha$ tendendo a 0, bolhas escalares são formadas por uma família de funções dadas por

$$B_\alpha(x) = \eta_{\delta,x_\alpha}(x)\mu_\alpha^{-\frac{n-p}{p}} u(\mu_\alpha^{-1}\exp_{x_\alpha}^{-1}(x)),$$

em que $\exp_y$ é a aplicação exponencial em y e u é uma solução da equação Euclideana

$$-\Delta_p u = |u|^{p^*-2}u \text{ em } \mathbb{R}^n,$$

$0 < \delta < i_g(M)$= raio de injetividade de (M,g), $\eta_{\delta,x_\alpha} = \eta_\delta(\exp_{x_\alpha}^{-1})$, sendo η_δ uma função suave em $\mathbb{R}^n$ tal que $\eta_\delta = 1$ em $B_\delta(0)$ e $\eta_\delta = 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus B_{2\delta}(0)$. Neste caso, dizemos que os pontos x_α são os centros e que os números μ_α são os pesos de $(B_\alpha)_\alpha$. Bolhas diagonais são sequências de aplicações $\mathcal{B}_{j,\alpha} = (B_{j,\alpha}^1, \ldots, B_{j,\alpha}^k)$ tal que uma das coordenadas é formada por bolhas escalares e as demais nulas. Denotaremos por $x_{j,\alpha}^i$ os centros das bolhas escalares $B_{j,\alpha}^i$ e $\mu_{j,\alpha}^i$ denotarão os respectivos pesos.

Teorema 1.1. *Sejam (M,g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 2$, $1 < p < n$, $F_\alpha, F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1, positivas e p^*-homogêneas e $G_\alpha, G : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ funções contínuas, G_α de classe C^1 e p-homogêneas na segunda variável, $\alpha > 0$, tal que*

$$F_\alpha \to F \text{ em } C^1_{loc}(\mathbb{R}^k),$$

$$G_\alpha \to G \text{ em } C^1_{loc}(M \times \mathbb{R}^k).$$

Seja $\mathcal{U}_\alpha \in H^{1,p}(M,\mathbb{R}^k)$ solução fraca de $(S_{p,\alpha})$. Se a sequência $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$ é limitada em

$H^{1,p}(M,\mathbb{R}^k)$, então, a menos de subsequência, temos

$$\mathcal{U}_\alpha = \mathcal{U}^0 + \sum_{j=1}^{l} B_{j,\alpha} + R_\alpha$$

para todo $\alpha > 0$, sendo $\mathcal{U}^0$ limite fraco de $\mathcal{U}_\alpha$ em $H^{1,p}(M,\mathbb{R}^k)$, $(B_{j,\alpha})_\alpha, j = 1,\dots,l$, bolhas diagonais e $(R_\alpha)_\alpha \subset H^{1,p}(M,\mathbb{R}^k)$ é tal que $R_\alpha \to 0$ em $H^{1,p}(M,\mathbb{R}^k)$ quando $\alpha \to +\infty$.

Observamos que se $\mathcal{U}^0 \equiv 0$, podemos enfraquecer as hipóteses sobre a convergência dos G_α's, exigindo apenas

$$G_\alpha \to G \text{ em } C^0_{loc}(M \times \mathbb{R}^k)$$

e obtendo a decomposição em bolhas diagonais

$$\mathcal{U}_\alpha = \sum_{j=1}^{l} B_{j,\alpha} + R_\alpha.$$

O Teorema 1.1 nos dá condições de adicionar mais propriedades às sequências de soluções limitadas em $H^{1,p}(M,\mathbb{R}^k)$. O referido teorema permiti-nos acrescentar estimativas pontuais ou C^0 para $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$.

Teorema 1.2 (Estimativas Pontuais)**.** *Sejam (M,g), G_α, F_α como no Teorema 1.1 e $\mathcal{U}_\alpha$ uma sequência limitada de soluções de $(S_{p,\alpha})$ em $H^{1,p}(M,\mathbb{R}^k)$. Considerando a decomposição em bolhas diagonais dada pelo Teorema 1.1, então existe, a menos de subsequência, uma constante $C > 0$, independente de α, tal que*

$$\left(\min_{i,j} d_g(x^i_{j,\alpha}, x)\right)^{\frac{n-p}{p}} |\mathcal{U}_\alpha(x) - \mathcal{U}^0|_p \le C, \tag{1.3}$$

Sendo $x^i_{j,\alpha}$ os centros das bolhas escalares $\mathcal{B}^i_{j,\alpha}$ e $|t|_p = \left(\sum_{i=1}^k |t_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$ para $t \in \mathbb{R}^k$.

Definimos o conjunto dos pontos limites de $x^i_{j,\alpha}$'s, $\mathfrak{S} = \{x_{j,0}\}_{j=1}^l$. Como consequências do Teorema 1.2 temos:

1. os $|\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0|^p$'s são uniformemente limitados em qualquer subconjunto compacto de $M \setminus \mathfrak{S}$;

2. $\mathfrak{S} \neq \varnothing$ se, e só se as sequências $(u^i_\alpha)_\alpha$ não forem todas limitadas em $L^\infty_{loc}(M)$;

3. em uma vizinhança de $\mathfrak{S}$, os $|\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0|^p$'s são controlados por termos da ordem de $\left(\min_{i,j} d_g(x^i_{j,\alpha}, x)\right)^{-\frac{n-p}{p}}$;

4. se $\mathcal{U}^0$, segue do esquema de Moser que $u^i_\alpha \to 0$ em $C^0_{loc}(M \setminus \mathfrak{S})$ para $i = 1,\dots,k$.

Os pontos em $\mathfrak{S}$ são ditos pontos de blow-up da sequência $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$. Dizemos que uma sequência explode se $\mathfrak{S} \neq \varnothing$.

1.3 Concentração L^p

O teorema a seguir nos dá uma análise qualitativa das soluções nos pontos de $\mathfrak{S}$, mostrando que os pontos de blow-up ou concentração da sequência $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$ retêm grande parte da informação da sequência. Essa propriedade é denominada concentração L^p. Nossa contribuição à teoria dá extensões dos fenômenos de concentração que foram anteriormente estudados para o caso $k = 1$ $p = 2$ por Druet, Hebey e Robert em [DHR](2004), Hebey em [He1] (2006) estudou o caso $k \geq 2$ e $p = 2$. Na ótica das funções extremais, fenômenos de concentração são estudados por Z. Djadli e O. Druet [DjDr] para $k = 1$ e p qualquer , já o caso $k \geq 2$ e $p = 2$ foi tratado por [He2].

Teorema 1.3 (Concentração L^p). *Seja (M, g) é uma variedade Riemanniana n-dimensional compacta e suave, $n \geq 4,\ k \geq 1,\ 1 < p \leq \min\{2, \sqrt{n}\}$, $F_\alpha, F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1, positivas e p^*-homogêneas e $G_\alpha, G : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ funções contínuas, G_α p-homogênea e de classe C^1 na segunda variável, $\alpha > 0$, tal que*

$$F_\alpha \to F \text{ em } C^1_{loc}(\mathbb{R}^k),$$

$$G_\alpha \to G \text{ em } C^0_{loc}(M \times \mathbb{R}^k).$$

Seja $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$, $\mathcal{U}_\alpha \not\equiv 0$, uma sequência limitada em $H^{1,p}(M, \mathbb{R}^k)$ de soluções não-negativas de $(S_{p,\alpha})$ tais que $\| \mathcal{U}_\alpha \|_p \to 0$ quando $\alpha \to +\infty$. Então, a menos de subsequência, $\mathfrak{S} \neq \emptyset$ e

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{\int_{B_\delta} |\mathcal{U}_\alpha|^p \, dv_g}{\int_M |\mathcal{U}_\alpha|^p \, dv_g} = 1 \ .$$

para todo $\delta > 0$, sendo $B_\delta = \bigcup_{i=1}^m B_{x_i}(\delta)$ e $\mathfrak{S} = \{x_1, \ldots, x_m\}$ os pontos de blow-up da sequência $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$.

1.4 Renormalização

Seja $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$ uma sequência não-negativa e limitada de soluções de $(S_{p,\alpha})$, $\mathcal{U}_\alpha \not\equiv 0$, tal que $\mathcal{U}_\alpha$ explode. Como visto anteriormente, $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$ possui uma decomposição em bolhas diagonais dada pelo Teorema 1.1. Sejam $x^i_{j,\alpha}$ e $\mu^i_{j,\alpha}$ os centros e os pesos das bolhas escalares $(B^i_{j,\alpha})_\alpha$, respectivamente, sendo $i = 1, \ldots, k$ e $j = 1, \ldots, k_i$, $\sum k_i = l$. Para $x_0 \in \mathbb{R}^n$ definimos $\hat{x}_\alpha \in M$ e $\hat{\mu}_\alpha > 0$ por

$$\hat{x}_\alpha = \exp_{x^{i_0}_{j_0,\alpha}}(\hat{\mu}_\alpha x_0) \text{ e } \hat{\mu}_\alpha = \mu^{i_0}_{j_0,\alpha}. \tag{1.4}$$

Definimos a renormalização de u^i_α, em relação a $\hat{x}_\alpha$ e $\hat{\mu}_\alpha$, $i = 1, \ldots, k$, como

$$\hat{u}^i_\alpha(x) = \hat{\mu}_\alpha^{\frac{n-p}{p}} u^i_\alpha(\exp_{\hat{x}_\alpha}(\hat{\mu}_\alpha x)), \tag{1.5}$$

sendo $x \in B_0(1)$ e $\hat{x}_\alpha$, $\hat{\mu}_\alpha$ como em (C_α) e (P_α). Afirmamos que a seguinte convergência vale.

Teorema 1.4 (Renormalização). *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana compacta e suave de dimensão $n \geq 3$, $k \geq 1$. $G_\alpha \to G$ e $F_\alpha \to F$ em $C^1_{loc}(\mathbb{R}^k)$. Seja $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$ uma sequência limitada de soluções não-negativas de $(S_{p,\alpha})$ que explodem. Então existem $\delta > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tais que, a menos de subsequência, para todo i,*

$$\hat{u}^i_\alpha \to u_i \text{ em } C^1(B_0(\delta)), \text{ quando } \alpha \to +\infty,$$

sendo $\mathcal{U} = (u_1, \ldots, u_k) \not\equiv 0$ solução não-negativa do sistema crítico Euclideano

$$-\Delta\mathcal{U} = \frac{1}{p^*}\nabla F(\mathcal{U}) \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

No caso $p = 2$ e $F(t) = |t|^{2^*}$ teremos $\hat{u}^i_\alpha \to u_i$, com $u_i(x)$ da forma

$$\left(\frac{\lambda_i}{\lambda_i^2 + \frac{|x-x_i|^2}{n(n-2)}}\right)^{\frac{n-2}{2}},$$

sendo $x \in \mathbb{R}^n$, $\lambda_i \geq 0$, $x_i \in \mathbb{R}^n$. Nesse caso, afirmar que $\mathcal{U} \not\equiv 0$ é equivalente a afirmar que pelo menos um dos λ_i's é positivo. Para $1 < p < n$ e $F(t) = |t|^{p^*}$, no caso das soluções radiais positivas, teremos um resultado análogo.

1.5 Comportamento assintótico

Consideremos o sistema $(S_{2,\alpha})$

$$-\Delta_g\mathcal{U} + \frac{1}{2}\nabla_{\mathcal{U}} G_\alpha(x,\mathcal{U}) = \frac{1}{2^*}\nabla F_\alpha(\mathcal{U}) \text{ em } M,$$

definido em uma variedade Riemanniana suave compacta de dimensão $n \geq 3$, com $G_\alpha \to G$ em C^1_{loc} e $F_\alpha \to F$ em C^1_{loc} quando $\alpha \to +\infty$. Nosso objetivo aqui é estudar o comportamento assintótico das sequências de soluções de $(S_{2,\alpha})$, isto é, o comportamento da sequência $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$ estando os $\mathcal{U}_\alpha$'s próximos de uma das bolhas diagonais de sua decomposição.

Dizemos que uma solução $\mathcal{U} = (u_1, \ldots, u_k)$ é não-negativa se todas as suas componentes forem funções não-negativas.

Seja $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$ sequência limitada de soluções não-negativas de $(S_{2,\alpha})$, então, a menos de subseqüência, temos decomposição em bolhas diagonais do Teorema 1.1. Suponhamos que a sequência explode e sejam $x^i_{j,\alpha}$ e $\mu^i_{j,\alpha}$ os centros e os pesos das bolhas escalares $(B^i_{j,\alpha})_\alpha$ das quais as bolhas diagonais $(B_{j,\alpha})_\alpha$ são definidas, sendo $i = 1, \ldots, k$, $j = 1, \ldots, l_i$ e

$\sum_i l_i = l$. A menos de reordenação e subsequência, podemos escrever

$$\mu_\alpha = \mu^1_{1,\alpha} = \max_{i,j} \mu^i_{j,\alpha};$$

e escrevemos ainda

$$x_\alpha = x^1_{1,\alpha},$$

para todo α. Definimos ainda, em $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, a função $\tilde{\mathcal{U}}_\alpha = (\tilde{u}^1_\alpha, \ldots, \tilde{u}^k_\alpha)$ em que

$$\tilde{u}^i_\alpha = u^i_\alpha(\exp_{x_\alpha}(\sqrt{\mu_\alpha} x)),$$

sendo $\exp_{x_\alpha}$ a aplicação exponencial em x_α e $\mathcal{U}_\alpha = (u^1_\alpha, \ldots, u^k_\alpha)$.

Teorema 1.5 (Comportamento assintótico). *Seja (M, g) variedade Riemanniana compacta suave de dimensão $n \geq 3$, $k \geq 1$ um inteiro,*

$$G_\alpha \to G \text{ em } C^1_{loc}(M \times \mathbb{R}^k) \text{ e } F_\alpha \to F \text{ em } C^1_{loc}(\mathbb{R}^k)$$

quando $\alpha \to +\infty$. Seja $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$ sequência limitada de soluções não-negativas de $(S_{2,\alpha})$ em $H^{1,2}(M, \mathbb{R}^k)$ que explodem. Então existem números reais A_i e $\delta > 0$ e funções harmônicas $\varphi_i : B_0(\delta) \to \mathbb{R}$, $i = 1, \ldots, k$, tais que, a menos de subsequência, para todo i,

$$\tilde{u}^i_\alpha \to \frac{A_i}{|x|^{n-2}} + \varphi_i(x) \tag{1.6}$$

em $C^1_{loc}(B_0(\delta) \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ quando $\alpha \to +\infty$.

Capítulo 2

Decomposição em Bolhas Vetoriais e um Resultado de Compacidade

Neste capítulo, apresentaremos o resultado que fornece uma decomposição de soluções do sistema $(S_{p,\alpha})$

$$-\Delta_{p,g}\mathcal{U} + \frac{1}{p}\nabla_{\mathcal{U}} G_\alpha(x,\mathcal{U}) = \frac{1}{p^*}\nabla F_\alpha(\mathcal{U}) \text{ em } M,$$

com $M = \Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado, em aplicações elementares denominadas de bolhas vetoriais. Utilizaremos o Teorema 2.1 e resultados obtidos por M.M Montenegro [Mn] e E.R Barbosa e M. Montenegro ([BbMn3]) no estudo de compacidade de problemas do tipo Brézis-Nirenberg, obtendo extensões de questões levantadas por M. Struwe em [Sw2].

2.1 A decomposição vetorial Euclideana

Procurando extensões para os problemas estudados anteriormente por Hebey em [He1], desenvolveremos uma decomposição em bolhas vetoriais para sequências de soluções limitadas do sistema $(S_{p,\alpha})$.

Seja $M = \Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio suave, $n \geq 2$, $F_\alpha, F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1, positivas e p^*-homogêneas e $G_\alpha, G : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ funções contínuas, G_α de classe C^1 na segunda variável e p-homogêneas, $\alpha > 0$, tal que

$$F_\alpha \to F \text{ em } C^1_{loc}(\mathbb{R}^k),$$

$$G_\alpha \to G \text{ em } C^1_{loc}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^k).$$

Bolhas vetoriais para $(S_{p,\alpha})$ são formadas por uma sequência de aplicações $\mathcal{B}_{j,\alpha}$ tal que

$$\mathcal{B}_{j,\alpha}(x) = \mu_{j,\alpha}^{-\frac{n-p}{p}}\mathcal{U}(\mu_{j,\alpha}^{-1}(x - x_{j,\alpha})),$$

sendo $\mu_{j,\alpha}$ uma sequência de números reais positivos convergindo a zero, $(x_{j,\alpha})_\alpha$ uma sequência convergente de pontos em Ω e $\mathcal{U}$ uma solução não trivial do sistema crítico

$$-\Delta_p \mathcal{U} = \frac{1}{p^*} \nabla F(\mathcal{U}) \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Abaixo enunciamos a decomposição em bolhas vetoriais.

Teorema 2.1. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio suave e limitado, $n \geq 2$, $1 \leq p < n$, $F_\alpha, F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1, positivas e p^*-homogêneas e $G_\alpha, G : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ funções contínuas, G_α de classe C^1 na segunda variável e p-homogêneas, $\alpha > 0$, tal que*

$$F_\alpha \to F \text{ em } C^1_{loc}(\mathbb{R}^k),$$

$$G_\alpha \to G \text{ em } C^1_{loc}(\mathbb{R}^k).$$

Sejam $H^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k) = H^{1,p}(\Omega) \times \ldots \times H^{1,p}(\Omega)$, $\mathcal{U}_\alpha \in H^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ uma sequência de Palais-Smale do funcional energia associado a $(S_{p,\alpha})$, então existem $\mathcal{U}^0 \in H^{1,p}_0(\Omega, \mathbb{R}^k) \subset D^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ e bolhas vetoriais $\mathcal{B}_{j,\alpha}$ tais que

$$\mathcal{U}_\alpha = \mathcal{U}^0 + \sum_{j=1}^{l} \mathcal{B}_{j,\alpha} + R_\alpha$$

Além disso, no caso das soluções radiais não-negativas, a menos de subsequência, temos

$$\mathcal{U}_\alpha = \mathcal{U}^0 + \sum_{j=1}^{l} t^j_\alpha F(t^j_\alpha)^{-\frac{n-p}{p^2}} B_{j,\alpha} + R_\alpha$$

para todo $\alpha > 0$, sendo $(B_{j,\alpha})_\alpha$, $j = 1, \ldots, l$, bolhas escalares, $t^j_\alpha \in \mathbb{R}^k$ vetores não-negativos tais que $|t^j_\alpha|^p = 1$ e $(R_\alpha)_\alpha \subset H^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ é tal que $R_\alpha \to 0$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ quando $\alpha \to +\infty$.

2.2 Compacidade para problemas do tipo Brézis-Nirenberg

Nesta seção, apresentamos um resultado de compacidade para as soluções de um sistema elíptico crítico sob a forma potencial utilizando o Teorema 2.1. A nossa ferramenta teórica é complementada por condições de existência de soluções para problemas do tipo Brézis-Nirenberg na forma de sistema do tipo potencial.

Seja

$$\lambda_1 = \inf_{H^{1,p}_0(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}} \left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx}{\int_\Omega |u|^p \, dx} \right\}$$

o primeiro autovalor não linear correspondente ao operador p-laplaciano sobre Ω com condições de Dirichlet na fronteira e

$$\lambda_{1,G} = \inf_{H_0^{1,p}(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}} \left\{ \frac{\int_\Omega |\nabla u|^p \, dx}{\int_\Omega G(\mathcal{U}) \, dx} \right\} = \frac{\lambda_1}{m_G}$$

a igualdade acima é provada em [BbMn3], sendo m_G o mínimo de G restrita ao conjunto $\mathbb{S}_p^{k-1} = \{t \in \mathbb{R}^k : \sum_{i=1}^k |t_i|^p = 1\}$. Nos artigos [Mn] e [BbMn3], os autores apresentam uma versão vetorial das condições de Brézis-Nirenberg para existência de soluções do sistema

$$\begin{cases} -\Delta_p \mathcal{U} = f(\mathcal{U}) + g(\mathcal{U}) \text{ em } \Omega \\ \\ \mathcal{U} = 0 \text{ em } \partial\Omega, \end{cases}$$

no caso em que $f(\mathcal{U}) = \frac{1}{p^*}\nabla F(\mathcal{U})$ e $g(\mathcal{U}) = -\frac{1}{p}\nabla G(\mathcal{U})$, com F p^*-homogênea, positiva e de classe C^1, G p-homogênea e de classe C^1.

Recordemos que o funcional energia associado ao sistema

$$-\Delta_p \mathcal{U} + \frac{1}{p}\nabla_{\mathcal{U}} G(\mathcal{U}) = \frac{1}{p^*}\nabla F(\mathcal{U}) \text{ em } \Omega, , \tag{2.1}$$

é

$$I_p(\mathcal{U}) = \frac{1}{p}\int_\Omega (|\nabla \mathcal{U}|^p + G(\mathcal{U})) \, dx - \frac{1}{p^*}\int_\Omega F(\mathcal{U}) \, dx.$$

Os resultados obtidos em [Mn] e [BbMn3] para (2.1) podem ser resumidos abaixo.

Teorema 2.2. *Sejam $F, G : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1, p^* e p-homogêneas, respectivamente. Sendo F positiva.*

(i) Se G é positiva em $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$, então (2.1) não possui solução não-trivial.

(ii) Se G é ímpar e $\partial_i F$ é positiva em $\{t \in \mathbb{R}^k;\ t_j > 0,\ j = 1, 2, \dots, k\}$ e $\partial_i G$ é não-crescente em $\mathbb{R}^k$. Se $m_G \le -\lambda_1$, então (2.1) não possui solução fraca não-negativa, isto é, solução fraca cujas coordenadas são funções não-negativas.

(iii) Seja $p > 1$, $n \ge p^2$. Se $m_G > -\lambda_1$ e $G(t_0) < 0$ para algum t_0, ponto de máximo de F em $\mathbb{S}_p^{k-1} = \{t \in \mathbb{R}^k; \sum_{i=1}^k |t_i|^p\}$, então (2.1) possui solução não-trivial.

(iv) Seja $1 < p < n$, $n < p^2$. Seja $\varphi_1 \in H_0^{1,p}(\Omega)$ uma autofunção positiva de $-\Delta_p$ normalizada por $\| \varphi_1 \|_{L^{p^*}} = 1$, e defina

$$\overline{\lambda} := \lambda_1 - \left(K(n,p)^p \int_\Omega \varphi_1^p \, dx \right)^{-1}.$$

Se $m_G > -\lambda_1$ e $G(t_0) < -\overline{\lambda}$ para algum ponto t_0 de máximo de F em $\mathbb{S}_p^{k-1}$, então (2.1) tem solução não trivial.

Observamos que o item (iii) fornece uma extensão completa para $n \geq 4$ do problema de existência estudado por Brézis e Nirenberg (veja [Sw1], página 158) para o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{2^*-2}u \text{ em } \Omega \\ u = 0 \text{ em } \partial\Omega \end{cases}$$

Considerando soluções $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$ de (2.1) no nível do passo da montanha do funcional I_p, as condições impostas pelos itens (iii) e (iv) acima nos dão a limitação da sequência $(\mathcal{U}_\alpha)$ de soluções de (2.1). Logo, a sequência $(\mathcal{U}_\alpha)$ é uma sequência de Palais-Smale para o funcional I_p. Seja $\mathcal{U}^0$ o limite fraco de $\mathcal{U}_\alpha$ em $H^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k)$, aplicando o Teorema 2.1 a $\mathcal{U}_\alpha$ com $F_\alpha = F$ e $G_\alpha = G$, obtemos a seguinte versão dos problemas de compacidade estudado por Struwe em [Sw2] para o sistema (2.1),

Teorema 2.3. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio suave e limitado, $n \geq 2$, sejam $F, G : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1, p^* e p-homogêneas, respectivamente, sendo F positiva em $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$. Seja $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$ uma sequência limitada de soluções de (2.1). Então existem $l \in \mathbb{N}$, sequências $(r_\alpha^j)_\alpha$, $(x_\alpha^j)_\alpha$, $1 \leq j \leq l$, de raios $r_\alpha^j \to +\infty$ quando $\alpha \to +\infty$ e pontos $x_\alpha^j \in \Omega$, uma solução $\mathcal{U}^0 \in H_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k) \subset D^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ de (2.1) e soluções não-triviais $\mathcal{U}^j \in D^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ de*

$$-\Delta_p \mathcal{U} = \frac{1}{p^*} \nabla F(\mathcal{U}) \text{ em } \mathbb{R}^n,$$

tal que uma subsequência de $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$ satisfaz

$$\| \mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0 - \sum_{j=1}^{l} (\mathcal{U}^j)_{r_\alpha^j, x_\alpha^j} \|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)} \to 0.$$

Dito de outro modo,

$$\mathcal{U}_\alpha = \mathcal{U}^0 + \sum_{j=1}^{l} (\mathcal{U}^j)_{r_\alpha^j, x_\alpha^j} + \mathcal{R}_\alpha,$$

sendo $(\mathcal{U}^j)_{r_\alpha^j, x_\alpha^j}$ reescalonamentos de $\mathcal{U}^j$ dados por $(\mathcal{U}^j)_{r_\alpha^j, x_\alpha^j}(x) = (r_\alpha^j)^{\frac{n-p}{p}} \mathcal{U}^j(r_\alpha^j(x - x_\alpha^j))$ e $\mathcal{R}_\alpha \in D^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ tal que $\mathcal{R}_\alpha \to 0$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ quando $\alpha \to +\infty$.

Capítulo 3

Demonstrações das contribuições Riemannianas

Neste capítulo justificaremos nossas contribuições à teoria C^0 em Geometria Riemanniana. Apresentaremos as demonstrações da Proposição 1.1 e da Proposição 3.1 que fornece a regularidade das soluções de

$$-\Delta_{p,g}\mathcal{U} + \frac{1}{p}\nabla_{\mathcal{U}}G(x,\mathcal{U}) = \frac{1}{p^*}\nabla F(\mathcal{U}) \text{ em } M.$$

Temos ainda as demonstrações dos Teoremas 1.1, 1.2, 1.3, 1.4 e 1.5. A demonstração do Teorema 1.5 foi dividida em seis passos e por questões didáticas e para a comodidade do leitor apresentamos no início da demonstração do Teorema 1.5 os enunciados dos referidos passos e suas justificativas ao final da demonstração.

3.1 Demonstração da Proposição 1.1

Seja $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$ uma sequência minimizante para λ_p. Usando a sua limitação obtemos que existe $\mathcal{U}_0 \in H^{1,p}(M,\mathbb{R}^k)$ tal que $\mathcal{U}_\alpha \rightharpoonup \mathcal{U}_0$ em $H^{1,p}(M,\mathbb{R}^k)$ e $\mathcal{U}_\alpha \to \mathcal{U}_0$ no espaço de Lebesgue Riemanniano $L^q(M,\mathbb{R}^k) = L^q(M) \times \ldots \times L^q(M)$, $q < p^*$. Pela convergência fraca

$$\int_M |\nabla_g \mathcal{U}_\alpha|^p \, dv_g = \int_M |\nabla_g(\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}_0)|^p \, dv_g + \int_M |\nabla_g \mathcal{U}_0|^p \, dv_g + o(1),$$

quando $\alpha \to +\infty$. Por Brézis-Lieb generalizado

$$\int_M F(\mathcal{U}_\alpha) \, dv_g = \int_M F(\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}_0) \, dv_g + \int_M F(\mathcal{U}_0) \, dv_g + o(1).$$

Pela desigualdade de Sobolev para a função F estudada em [BbMn2]

$$\left(\int_M F(\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}_0) \, dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq (A_0 + \varepsilon) \int_M |\nabla_g(\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}_0)|^p \, dv_g + B_\varepsilon \int_M G(x,\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}_0) \, dv_g,$$

para cada $\varepsilon > 0$. Assim

$$\begin{aligned}
\left(1 - \int_M F(\mathcal{U}_0)\ dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} &= \left(\int_M F(\mathcal{U}_\alpha) - F(\mathcal{U}_0)\ dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \\
&= \left(\int_M F(\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}_0)\ dv_g + o(1)\right)^{\frac{p}{p^*}} \\
&= \left(\int_M F(\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}_0)\ dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} + o(1) \\
&\leq (A_0 + \varepsilon) \int_M |\nabla_g(\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}_0)|^p\ dv_g + B_\varepsilon \int_M G(x, \mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}_0)\ dv_g + o(1) \\
&\leq (A_0 + \varepsilon) \int_M |\nabla_g(\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}_0)|^p\ dv_g + C_\varepsilon \int_M |\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}_0|^p\ dv_g + o(1) \\
&\leq (A_0 + \varepsilon) \int_M (|\nabla_g \mathcal{U}_\alpha|^p - |\nabla_g \mathcal{U}_0|^p)\ dv_g + o(1).
\end{aligned}$$

Como ε é qualquer

$$\left(1 - \int_M F(\mathcal{U}_0)\ dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq A_0 \int_M (|\nabla_g \mathcal{U}_\alpha|^p - |\nabla_g \mathcal{U}_0|^p)\ dv_g + o(1).$$

Recordando que

$$\int_M G(x, \mathcal{U}_\alpha)\ dv_g = \int_M G(x, \mathcal{U}_0)\ dv_g + o(1),$$

teremos

$$A_0 \int_M (|\nabla_g \mathcal{U}_\alpha|^p - |\nabla_g \mathcal{U}_0|^p)\ dv_g = A_0(\Psi_G(\mathcal{U}_\alpha) - \Psi_G(\mathcal{U}_0)) + o(1) = A_0 + \lambda_p - A_0 \Psi_G(\mathcal{U}_0) + o(1).$$

Assim,

$$\left(1 - \int_M F(\mathcal{U}_0)\ dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq A_0 \lambda_p - A_0 \Psi_G(\mathcal{U}_0) + o(1).$$

Por outro lado

$$\lambda_p \left(\int_M F(\mathcal{U}_0)\ dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \Psi_G(\mathcal{U}_0).$$

Fazendo uso dessa última informação, obtemos

$$\begin{aligned}\left(1-\int_M F(\mathcal{U}_0)\ dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} &= A_0\lambda_p - A_0\Psi_G(\mathcal{U}_0)+o(1)\\ &= A_0\lambda_p\left(1-\left(\int_M F(\mathcal{U}_0)\ dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}}\right)+o(1)\end{aligned}$$

Temos ainda pelo Lema de Fatou que

$$\int_M F(\mathcal{U}_0)\ dv_g \le \liminf_{\alpha\to+\infty}\int_M F(\mathcal{U}_\alpha)\ dv_g = 1$$

Se $\int_M F(\mathcal{U}_0)\ dv_g < 1$, de $\lambda_p < A_0^{-1}$, obtemos

$$\left(1-\int_M F(\mathcal{U}_0)\ dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} < 1-\left(\int_M F(\mathcal{U}_0)\ dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}}+o(1),$$

contrariando a desigualdade

$$\begin{aligned}1 &\le \left(1-\int_M F(\mathcal{U}_0)\ dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}}+\left(\int_M F(\mathcal{U}_0)\ dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}}\\ &< 1-\left(\int_M F(\mathcal{U}_0)\ dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}}+\left(\int_M F(\mathcal{U}_0)\ dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}}=1.\end{aligned}$$

Portanto

$$\int_M F(\mathcal{U}_0)\ dv_g = 1$$

e

$$\begin{aligned}\int_M (|\nabla_g\mathcal{U}_\alpha|^p-|\nabla_g\mathcal{U}_0|^p)\ dv_g &= \lambda_p-\Psi_G(\mathcal{U}_0)+o(1)\\ &\le \lambda_p\left(1-\left(\int_M F(\mathcal{U}_0)\ dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}}\right)+o(1)=o(1),\end{aligned}$$

então

$$\int_M |\nabla_g\mathcal{U}_\alpha|^p\ dv_g = \int_M |\nabla_g(\mathcal{U}_\alpha-\mathcal{U}_0)|^p\ dv_g+\int_M |\nabla_g\mathcal{U}_0|^p\ dv_g+o(1)=\int_M |\nabla_g\mathcal{U}_0|^p\ dv_g+o(1).$$

Ou seja, $\mathcal{U}_\alpha\to\mathcal{U}_0$ em $H^{1,p}(M,\mathbb{R}^k)$ e $\Psi_G(\mathcal{U}_0)=\lambda_p$. A regularidade decorre da proposição a seguir.

Proposição 3.1. *Sejam (M,g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n\ge$*

2, $1 < p < n$, $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1, positiva e p^*-homogênea e $G : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função contínua, de classe C^1 na segunda variável, positiva e p-homogênea. Se $\mathcal{U} = (u_1, \ldots, u_k) \in H^{1,p}(M, \mathbb{R}^k)$ é uma solução fraca de

$$-\Delta_{p,g}\mathcal{U} + \frac{1}{p}\nabla_{\mathcal{U}} G(x, \mathcal{U}) = \frac{1}{p^*}\nabla F(\mathcal{U}), \tag{S}$$

então $\mathcal{U} \in C^1(M, \mathbb{R}^k)$.

Demonstração. Para ℓ, $\beta > 1$, definimos as funções $\varphi, \psi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(s) = \begin{cases} s^\beta, \text{ se } 0 \leq s \leq \ell, \\ \\ \beta\ell^{\beta-1}(s-\ell) + \ell^\beta, \text{ se } s > \ell \end{cases},$$

$$\psi(s) = \begin{cases} s^{\beta(p-1)+1}, \text{ se } 0 \leq s \leq \ell, \\ \\ (\beta(p-1)+1)\ell^{\beta(p-1)}(s-\ell) + \ell^{\beta(p-1)+1}, \text{ se } s > \ell \end{cases},$$

Seja $\mathcal{U} = (u_1, \ldots, u_k)$. No que segue assumimos que $u_i \geq 0$, caso contrário, repetimos o mesmo argumento com as partes positiva e negativa de u_i. Desde que as funções φ e ψ são Lipschitz, $\varphi(u), \psi(u) \in H^{1,p}(M, \mathbb{R})$ para toda função $u \in H^{1,p}(M, \mathbb{R})$. Note também que existe uma constante $c > 0$, independente de ℓ, tal que

$$c\varphi'(s)^p \leq \psi'(s) \tag{3.1}$$

para todo s.
É conveniente escolher $\beta > 1$ tal que $\beta p \leq p^*$ e reescrever o sistema (S) como

$$-\Delta_{p,g}\mathcal{U} = F(x, \mathcal{U}), \text{ em } M, \tag{3.2}$$

sendo $F = (F_1, \ldots, F_k)$. Observe, das condições de regularidade e homogeneidade sobre F e G, que existe uma constante $C_0 > 0$ tal que

$$|F_i(x,t)| \leq C_0(|t|^{p^*-1} + 1). \tag{3.3}$$

para todo $x \in M$ e $t \in \mathbb{R}^k$. Tomando $\psi(u_i)$ como uma função teste na i-ésima equação de (3.2), temos

$$\int_M |\nabla_g u_i|^{p-2}\langle\nabla_g u_i, \nabla_g \psi(u_i)\rangle \, dv_g = \int_M F_i(x, \mathcal{U})\psi(u_i) \, dv_g.$$

Daí, de (3.1) e (3.3), existe uma constante $C_1 > 0$, independente de ℓ, tal que

$$\begin{aligned}\int_M |\nabla_g \varphi(u_i)|^p \, dv_g &= \int_M |\nabla_g u_i|^p \varphi'(u_i)^p \, dv_g \le C_1 \int_M |\mathcal{U}|^{p^*-1} \psi(u_i) \, dv_g + C_1 \\ &\le C_1 \int_M |\mathcal{U}|^{p^*-1} \psi(|\mathcal{U}|) \, dv_g + C_1\end{aligned}$$

Observe que existe uma constante $C > 0$, independente de ℓ, tal que

$$s^{p-1}\psi(s) \le C\varphi(s)^p$$

para todo $s > 0$. Assim, obtemos

$$\int_M |\nabla_g \varphi(u_i)|^p \, dv_g \le CC_1 \int_M |\mathcal{U}|^{p^*-p} \varphi(|\mathcal{U}|)^p \, dv_g + C_1.$$

Aplicando a desigualdade de Sobolev escalar clássica, encontramos uma constante $C_2 > 0$, independente de ℓ, tal que

$$\begin{aligned}\left(\int_M \varphi(u_i)^{p^*} \, dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} &= C_2 \int_M \varphi(u_i)^p \, dv_g + C_2 \int_M |\mathcal{U}|^{p^*-p} \varphi(|\mathcal{U}|)^p \, dv_g + C_2 \\ &\le C_2 \int_M \varphi(|\mathcal{U}|)^p \psi(|\mathcal{U}|) \, dv_g + C_2 \int_M |\mathcal{U}|^{p^*-p} \varphi(|\mathcal{U}|)^p \, dv_g + C_2.\end{aligned}$$

Por outro lado, conclui-se facilmente da definição de φ que existe uma constante $C_3 > 0$, independente de ℓ, tal que

$$\varphi(|\mathcal{U}|) \le C_3 \sum_{i=1}^k \varphi(u_i).$$

Daí, utilizando desigualdades de Hölder e Young, encontramos uma constante $C_4 > 0$, independente de ℓ, tal que

$$\left(\int_M \varphi(|\mathcal{U}|)^{p^*} \, dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \le C_4 \int_M \varphi(|\mathcal{U}|)^p \, dv_g + C_4.$$

Tomando então o limite $\ell \to +\infty$ na desigualdade acima, encontramos

$$\left(\int_M |\mathcal{U}|^{\beta p^*} \, dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \le C_4 \int_M |\mathcal{U}|^{\beta p} \, dv_g + C_4.$$

Portanto, obtemos $|\mathcal{U}| \in L^q(M)$ com $q = \beta p^* > p^*$, e a conclusão segue da teoria clássica de EDPs elípticas quasilineares ([Tk]). $\square$

3.2 Demonstração do Teorema 1.1

Demonstraremos o Teorema 1.1 em passos descritos a seguir.

Passo 1: *$\mathcal{U}_\alpha \rightharpoonup \mathcal{U}^0$ e $\mathcal{U}^0$ é solução fraca de*

$$-\Delta_{p,g}\mathcal{U} + \frac{1}{p}\nabla_{\mathcal{U}}G(x,\mathcal{U}) = \frac{1}{p^*}\nabla F(\mathcal{U}) \text{ em } M.$$

Antes de enunciarmos o passo 2, recordemos brevemente as definições de sequência de Palais-Smale de um funcional e sequência de Palais-Smale para uma sequência de funcionais. Uma sequência $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha \subset H^{1,p}(M,\mathbb{R}^k)$ é uma sequência de Palais-Smale de $I : H^{1,p}(M,\mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}$ se

1. $I(\mathcal{U}_\alpha)$ é limitada;
2. $DI(\mathcal{U}_\alpha) \to 0$ em $\left(H^{1,p}(M,\mathbb{R}^k)\right)'$ quando $\alpha \to +\infty$.

Por outro lado, dizemos que uma sequência $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha \subset H^{1,p}(M,\mathbb{R}^k)$ é uma sequência de Palais-Smale para uma sequência de funcionais $I_{p,\alpha} : H^{1,p}(M,\mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}$ se

(i) $I_{p,\alpha}(\mathcal{U}_\alpha)$ é limitada;

(ii) $DI_{p,\alpha}(\mathcal{U}_\alpha) \to 0$ em $\left(H^{1,p}(M,\mathbb{R}^k)\right)'$ quando $\alpha \to +\infty$.

Passo 2: *A coordenadas de $(\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0)_\alpha$ são sequências de Palais-Smale para o funcional*

$$L(u) = \frac{1}{p}\int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g - \frac{1}{p^*}\int_M |u|^{p^*} \, dv_g.$$

Demonstraremos agora o Teorema 1.1, postergando as demonstrações dos passos 1 e 2.

Demonstração do Teorema 1.1. Pelo Passo 2, as sequências $(u_\alpha^i - u_0^i)_\alpha$, $i = 1, \ldots, k$ são sequências de Palais-Smale para o funcional

$$L(u) = \frac{1}{p}\int_M |\nabla_g u|^p \, dv_g - \frac{1}{p^*}\int_M |u|^{p^*} \, dv_g.$$

Desta forma, segue de [Sa1], que para cada i existe um k_i e bolhas escalares $(B_{j,\alpha}^i)_\alpha$, $j = 1, \ldots, k_i$, tal que, a menos de subsequência,

$$u_\alpha^i = u_0^i + B_{j,\alpha}^i + R_\alpha$$

e

$$L(u_\alpha^i - u_0^i) = \sum_{i=1}^{k_i} E(u_j^i) + o(1),$$

sendo u_j^i solução não trivial de

$$-\Delta_p u = |u|^{p^*-2}u \text{ em } \mathbb{R}^n,$$

e

$$E(u_j^i) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla_g u_j^i|^p \, dx - \frac{1}{p^*}\int_{\mathbb{R}^n} |u_j^i|^{p^*} \, dx.$$

Para finalizar, coloque $l = \sum_{i=1}^k k_i$. □

Agora apresentaremos as demonstrações dos passos.

Demonstração do Passo 1. Da limitação de $\mathcal{U}_\alpha$, existe, a menos de subsequência, $\mathcal{U}^0 \in H^{1,p}(M, \mathbb{R}^k)$ tal que

$$\mathcal{U}_\alpha \rightharpoonup \mathcal{U}^0.$$

Além disso, $\mathcal{U}_\alpha \to \mathcal{U}^0$ em $L^q(M, \mathbb{R}^k)$ para todo $q < p^*$. Da definição de sequência de Palais-Smale, temos

$$\begin{aligned} \int_M |\nabla_g \mathcal{U}_\alpha|^{p-2}\langle \nabla_g \mathcal{U}_\alpha, \nabla\Theta\rangle \, dv_g \quad &+ \quad \int_M \nabla_{\mathcal{U}} G_\alpha(x, \mathcal{U}_\alpha)\cdot\Theta \, dv_g \\ &- \quad \int_M \nabla F(\mathcal{U}_\alpha)\cdot\Theta \, dv_g = o(1), \end{aligned} \tag{3.4}$$

para qualquer $\Theta \in C_0^\infty(M, \mathbb{R}^k)$, sendo

$$\int_M |\nabla_g \mathcal{U}_\alpha|^{p-2}\langle \nabla_g \mathcal{U}_\alpha, \nabla_g\Theta\rangle \, dv_g = \sum_{i=1}^k \int_M |\nabla_g u_\alpha^i|^{p-2}\langle \nabla_g u_\alpha^i, \nabla_g \theta_i\rangle \, dv_g.$$

As hipóteses sobre G_α e F_α permitem-nos, simplesmente, tomar o limite na segunda e terceira parcelas da igualdade (3.4) acima, restando-nos apenas mostrar que

$$\int_M |\nabla_g \mathcal{U}_\alpha|^{p-2}\langle \nabla_g \mathcal{U}_\alpha, \nabla_g\Theta\rangle \, dv_g \to \int_M |\nabla_g \mathcal{U}^0|^{p-2}\langle \nabla_g \mathcal{U}^0, \nabla_g\Theta\rangle \, dv_g$$

Seja

$$X_\alpha = |\nabla_g \mathcal{U}_\alpha|^{p-2}\nabla_g \mathcal{U}_\alpha = \sum_{i=1}^k |\nabla_g u_\alpha^i|^{p-2}\nabla_g u_\alpha^i$$

e

$$\Phi = |\nabla \mathcal{U}^0|^{p-2}\nabla \mathcal{U}^0 = \sum_{i=1}^k |\nabla u_0^i|^{p-2}\nabla u_0^i.$$

Então $(X_\alpha)_\alpha$ é limitada em $L^{\frac{p}{p-1}}(M, \mathbb{R}^k)$, pois

$$\int_M |X_\alpha|^{\frac{p}{p-1}} \, dv_g = \sum_{i=1}^k \int_M \left(|\nabla_g u_\alpha^i|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}} \, dv_g = \int_M |\nabla_g \mathcal{U}_\alpha|^p \, dv_g,$$

e, a menos de subsequência, $(X_\alpha)_\alpha$ converge fracamente em $L^{\frac{p}{p-1}}(M,\mathbb{R}^k)$ para algum $X \in L^{\frac{p}{p-1}}(M,\mathbb{R}^k)$. Dado $\delta > 0$, segue do Teorema de Egorov que existe $E_\delta \subset M$ tal que

$$\int_{M\backslash E_\delta} dv_g < \delta$$

e $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$ converge uniformemente para $\mathcal{U}^0$ em E_δ. Consequentemente, dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar α, suficientemente grande, tal que $|\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0| < \varepsilon/2$ em E_δ. Agora, definimos a função $\beta_\varepsilon = (\beta_\varepsilon^1, \ldots, \beta_\varepsilon^k)$ por

$$\beta_\varepsilon(t) = t$$

se $|t| < \varepsilon$, e

$$\beta_\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon t}{|t|}$$

se $|t| \geq \varepsilon$. Daí, encontramos que

$$\int_M \langle X_\alpha - \Phi, \nabla_g(\beta_\varepsilon \circ (\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0))\rangle \, dv_g =$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^k \displaystyle\int_M \langle |\nabla u_\alpha^i|^{p-2}\nabla u_\alpha^i - |\nabla u_0^i|^{p-2}\nabla u_0^i, \nabla\left(\beta_\varepsilon \circ (\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0)\right)_i\rangle \, dv_g \geq 0$$

Para ver isso, basta observar que a função $\kappa : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\kappa(z) = |z|^p$, satisfaz

$$\langle |z|^{p-2}z - |w|^{p-2}w, z - w\rangle \geq 0,$$

pois $p > 1$. Segue então que para todo α suficientemente grande,

$$\int_{E_\delta} \langle X_\alpha - \Phi, \nabla_g(\beta_\varepsilon \circ (\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0))\rangle \, dv_g \leq \int_M \langle X_\alpha - \Phi, \nabla_g(\beta_\varepsilon \circ (\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0))\rangle \, dv_g.$$

Note que $\beta_\varepsilon \circ (\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0)$ converge fracamente para zero em $H^{1,p}(M,\mathbb{R}^k)$, portanto

$$\int_M \langle \Phi, \nabla_g(\beta_\varepsilon \circ (\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0))\rangle \, dv_g \to 0.$$

Temos também que, para α suficientemente grande,

$$\int_M \langle X_\alpha, \nabla_g(\beta_\varepsilon \circ (\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0))\rangle \, dv_g < \varepsilon,$$

pois $(\beta_\varepsilon \circ (\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0))$ é limitada em $H^{1,p}(M,\mathbb{R}^k)$, em quase todo ponto em M.

$$DI_{p,\alpha}(\mathcal{U}_\alpha)\left(\beta_\varepsilon^i \circ (\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0)\right) = o(1),$$

em que $o(1) \to 0$ quando $\alpha \to +\infty$. Portanto,

$$\int_M \langle X_\alpha, \nabla(\beta_\varepsilon \circ (\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0))\rangle \, dv_g = o(1) + I_1 + I_2,$$

sendo

$$|I_1| = \left| \int_M \nabla F_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \cdot \left(\beta_\varepsilon \circ (\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0)\right) \, dv_g \right| \leq C\varepsilon$$

com C independente de α e, para α grande o suficiente,

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \left| \int_M \nabla_{\mathcal{U}} G_\alpha(x, \mathcal{U}_\alpha) \cdot \beta_\varepsilon \circ (\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0) \, dv_g \right| \\ &\leq k\varepsilon(\max \| \partial_i G \|_\infty + 1) \int_M |\mathcal{U}_\alpha|^{p-1} dv_g \leq C\varepsilon \end{aligned}$$

sendo C independente de α. Consequentemente, obtemos

$$\limsup_{\alpha \to +\infty} \int_{E_\delta} (X_\alpha - \Phi) \cdot \nabla(\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0) \, dv_g \leq C\varepsilon$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue que $\langle X_\alpha - \Phi, \nabla(\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0)\rangle \to 0$ em $L^1(E_\delta, \mathbb{R}^k)$ e, a menos de subsequência, converge para zero em quase todo ponto em E_δ. Agora, para obtermos que $\nabla \mathcal{U}_\alpha \to \nabla \mathcal{U}^0$ em quase todo ponto em E_δ, usaremos que, se uma sequência $(z_\alpha)_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ é tal que

$$\langle |z_\alpha|^{p-2} z_\alpha - |z|^{p-2} z, z_\alpha - z\rangle \to 0,$$

então $z_\alpha \to z$. Como $\delta > 0$ é arbitrário, isso implica que $\nabla \mathcal{U}_\alpha \to \nabla \mathcal{U}^0$ em quase todo ponto em M e, consequentemente, $X_\alpha \to \Phi$ em quase todo ponto em M. Como $(X_\alpha)_\alpha$ é limitada em $L^{\frac{p}{p-1}}(M, \mathbb{R}^k)$, obtemos que

$$X_\alpha \rightharpoonup \Phi$$

em $L^{\frac{p}{p-1}}(M, \mathbb{R}^k)$. Assim, $X = \Phi$. Portanto,

$$\int_M |\nabla_g \mathcal{U}_\alpha|^{p-2} \langle \nabla_g \mathcal{U}_\alpha, \nabla_g \Theta\rangle \, dv_g \to \int_M |\nabla_g \mathcal{U}^0|^{p-2} \langle \nabla_g \mathcal{U}^0, \nabla_g \Theta\rangle \, dv_g.$$

Como consequência teremos,

$$\int_M |\nabla_g \mathcal{U}^0|^{p-2} \langle \nabla_g \mathcal{U}^0, \nabla_g \Theta\rangle \, dv_g + \int_M \nabla_{\mathcal{U}} G(x, \mathcal{U}^0) \cdot \Theta \, dv_g = \int_M \nabla F(\mathcal{U}^0) \Theta \, dv_g$$

para toda $\Phi \in C_0^\infty(M, \mathbb{R}^k)$, provando que $\mathcal{U}^0$ é solução fraca de

$$-\Delta_{p,g} \mathcal{U} + \frac{1}{p} \nabla_{\mathcal{U}} G(x, \mathcal{U}) = \frac{1}{p^*} \nabla F(\mathcal{U}) \text{ em } M.$$

□

Para demonstrarmos o Passo 2 iremos precisar do lema enunciado a seguir.

Lema 3.1.1. *Seja u_α uma sequência limitada em $H^{1,p}(M)$ tal que $u_\alpha \rightharpoonup u^0$, então*

$$\int_M |u_\alpha|^{p^*-2}u_\alpha\varphi\, dv_g = \int_M |u_\alpha - u^0|^{p^*-2}(u_\alpha - u^0)\varphi\, dv_g + \int_M |u^0|^{p^*-2}u^0\varphi\, dv_g + o(1) \parallel \varphi \parallel_{H^{1,p}(M)},$$

para toda $\varphi \in C^\infty(M)$, sendo que $o(1) \to 0$ quando $\alpha \to +\infty$.

Demonstração. A demonstração do Lema 3.1.1 utiliza o fato que em um espaço vetorial normado $(E, \|\cdot\|)$, para $p > 1$, $\theta > 0$ suficientemente pequeno, a desigualdade

$$\left\| \| x+y \|^{p-2}(x+y) - \| x \|^{p-2} x - \| y \|^{p-2} y \right\| \leq C \left(\| x \|^{p-1-\theta} \| y \|^{\theta} \| x \|^{\theta} \| y \|^{p-1-\theta} \right),$$

vale para quaisquer x e $y \in E$, sendo θ dependente apenas de p e $C > 0$ é independente de x e y.

Escrevendo $u_\alpha = v_\alpha + u^0$ e aplicando a desigualdade acima a

$$\psi_\alpha = |v_\alpha + u^0|^{p-2}(v_\alpha + u^0) - |v_\alpha|^{p-2}v_\alpha - |u^0|^{p-2}u^0,$$

teremos

$$|\psi_\alpha| \leq C \left(|v_\alpha|^{p-1-\theta}|u^0|^{\theta} + |v_\alpha|^{\theta}|u^0|^{p-1-\theta} \right).$$

Utilizando a desigualdade de Hölder e a convexidade, obtemos

$$\left| \int_M \psi_\alpha \varphi\, dv_g \right| \leq C \parallel \varphi \parallel_{p^*} \left(\left\| |v_\alpha|^{p-1-\theta}|u^0|^{\theta} \right\|_{\frac{p^*}{p^*-1}} + \left\| |v_\alpha|^{\theta}|u^0|^{p-1-\theta} \right\|_{\frac{p^*}{p^*-1}} \right).$$

Portanto

$$\int_M \psi_\alpha \varphi\, dv_g = o(1) \parallel \varphi \parallel_{p^*} = o(1) \parallel \varphi \parallel_{H^{1,p}(M)},$$

concluindo o lema. □

Demonstração do Passo 2. Seja $\mathcal{V}_\alpha = \mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0$, pelo teorema da convergência dominada, encontramos

$$\int_M \nabla F_\alpha(\mathcal{V}_\alpha)\Theta\, dv_g = \int_M \nabla F(\mathcal{V})\Theta\, dv_g + o(1)$$

e

$$\int_M G_\alpha(x, \mathcal{V}_\alpha)\, dv_g = o(1)$$

Como $u^i_\alpha - u^i_0 \rightharpoonup 0$ em $H^{1,p}(M)$, segue que

$$\int |\nabla_g(u^i_\alpha - u^i_0)|^p\, dv_g = o(1),$$

para todo $i = 1, \ldots, k$. Assim,

$$\int_M |\nabla_g \mathcal{V}_\alpha|^p \, dv_g + \int_M G_\alpha(x, \mathcal{V}_\alpha) \, dv_g = o(1).$$

Logo,

$$I_{p,\alpha}(\mathcal{V}_\alpha) = \frac{1}{p} \int_M |\nabla_g \mathcal{V}_\alpha|^p \, dv_g - \frac{1}{p^*} \int_M F_\alpha(\mathcal{V}_\alpha) \, dv_g + o(1) = L_k(\mathcal{V}_\alpha) + o(1),$$

sendo

$$L_k(\mathcal{V}_\alpha) = \frac{1}{p} \int_M |\nabla_g \mathcal{V}_\alpha|^p \, dv_g - \frac{1}{p^*} \int_M F_\alpha(\mathcal{V}_\alpha) \, dv_g.$$

Por outro lado, temos que

$$\begin{aligned} DI_{p,\alpha}(\mathcal{V}_\alpha) \cdot \Theta &= \int_M \langle |\nabla_g \mathcal{V}_\alpha|^{p-2} \nabla_g \mathcal{V}_\alpha, \nabla_g \Theta \rangle \, dv_g + \frac{1}{p} \int_M \nabla_{\mathcal{U}} G_\alpha(x, \mathcal{V}_\alpha) \cdot \Theta \, dv_g \\ & -\frac{1}{p^*} \int_M \nabla F_\alpha(\mathcal{V}_\alpha) \cdot \Theta \, dv_g. \end{aligned}$$

Como

$$\begin{aligned} \int_M \langle |\nabla_g \mathcal{V}_\alpha|^{p-2} \nabla_g \mathcal{V}_\alpha, \nabla_g \Theta \rangle \, dv_g &+ \frac{1}{p} \int_M \nabla_{\mathcal{U}} G_\alpha(x, \mathcal{V}_\alpha) \cdot \Theta \, dv_g \\ &= \int_M \nabla F_\alpha(\mathcal{V}_\alpha) \cdot \Theta \, dv_g = o(1) \end{aligned}$$

e

$$\int_M |\nabla_g \mathcal{V}_\alpha|^{p-2} \langle \nabla_g \mathcal{V}_\alpha, \nabla_g \Theta \rangle \, dv_g = o(1),$$

Encontramos que

$$\begin{aligned} DI_{p,\alpha}(\mathcal{V}_\alpha)\Theta = \int_M \langle |\nabla_g \mathcal{V}_\alpha|^{p-2} \nabla_g \mathcal{V}_\alpha, \nabla_g \Theta \rangle \, dv_g &- \frac{1}{p^*} \int_M \nabla F_\alpha(\mathcal{V}_\alpha) \cdot \Theta \, dv_g + o(1) \\ &= DL_k(\mathcal{V}_\alpha) \cdot \Theta + o(1). \end{aligned}$$

Assim, se $(\mathcal{V}_\alpha)_\alpha$ é uma sequência de Palais-Smale para $I_{p,\alpha}$, então $(\mathcal{V}_\alpha)_\alpha$ também é uma sequência de Palais-Smale para L_k. Note que

$$DL_k(\mathcal{V}_\alpha) \cdot \Theta = \int_M \langle |\nabla_g \mathcal{V}_\alpha|^{p-2} \nabla_g \mathcal{V}_\alpha, \nabla_g \Theta \rangle \, dv_g - \frac{1}{p^*} \int_M \nabla F_\alpha(\mathcal{V}_\alpha) \cdot \Theta \, dv_g.$$

Como

$$\frac{1}{p^*} \int_M \nabla F_\alpha(\mathcal{V}_\alpha) \cdot \Theta \, dv_g = o(1)$$

e pelo lema 3.1.1

$$\frac{1}{p^*}\int_M |u_\alpha^i - u_0^i|^{p^*-2}(u_\alpha^i - u_0^i)\Theta^i \; dv_g = o(1), \; i = 1, \ldots, k,$$

obtemos que se $(\mathcal{V}_\alpha)_\alpha$ é uma sequência de Palais-Smale para $I_{p,\alpha}$, então $(u_\alpha^i - u_0^i)_\alpha$ também é uma sequência de Palais-Smale para L_k^i, $i = 1, \ldots, k$, sendo

$$L_k^i(u_\alpha^i) = \frac{1}{p}\int_M |\nabla_g u_\alpha^i|^p \; dv_g - \frac{1}{p^*}\int_M |u_\alpha^i|^{p^*} \; dv_g.$$

$\square$

3.3 Demonstração do Teorema 1.2

Definidas

$$\Phi_\alpha(x) = \min_{i,j} d_g(x^i_{j,\alpha}, x) \text{ e } \Psi_\alpha(x) = \left(\sum_{i=1}^k |u^i_\alpha(x)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \Phi_\alpha(x)^{\frac{n}{p}-1},$$

para provar o teorema, será suficiente provar que $\Psi_\alpha \in L^\infty(M)$, o que faremos por redução ao absurdo.

Comecemos com uma sequência y_α formada por de pontos de máximo dos Ψ_α's e tal que

$$\Psi_\alpha(y_\alpha) = \max_M \Psi_\alpha(x) \text{ e } \Psi_\alpha(y_\alpha) \to +\infty.$$

A menos de subsequência, podemos supor que

$$|u^{i_0}_\alpha(y_\alpha)| \geq |u^i_\alpha(y_\alpha)|$$

para algum $i_0 = 1, \ldots, k$ e para todo i, pondo

$$\mu_\alpha = |u^{i_0}_\alpha(y_\alpha)|^{-\frac{p}{n-p}},$$

então $\mu_\alpha \to 0$ quando $\alpha \to +\infty$ e afirmamos que

$$\frac{d_g(x^i_{j,\alpha}, x)}{\mu_\alpha} \to +\infty \tag{3.5}$$

Para provar (3.5) desenvolvemos a expressão de Ψ_α, como abaixo

$$\begin{aligned}
\Psi_\alpha(y_\alpha) &= \left(\sum_{i=1}^k |u^i_\alpha(y_\alpha)|^p\right)^{\frac{1}{p}} \Phi_\alpha(y_\alpha)^{\frac{n}{p}-1} \\
&\leq (k|u^{i_0}_\alpha(y_\alpha)|^p)^{\frac{1}{p}} d_g(x^i_{j,\alpha}, y_\alpha)^{\frac{n}{p}-1} \\
&\leq \sqrt[p]{k}|u^{i_0}_\alpha(y_\alpha)| d_g(x^i_{j,\alpha}, y_\alpha)^{\frac{n}{p}-1} \\
&\leq \sqrt[p]{k}\left(\frac{d_g(x^i_{j,\alpha}, y_\alpha)}{\mu_\alpha}\right)^{\frac{n}{p}-1}
\end{aligned}$$

aliado ao fato que $\Psi_\alpha(y_\alpha) \to +\infty$ quando $\alpha \to +\infty$ obtemos (3.5). Seja $0 < \delta < i_g(M)$, em que i_g é o raio de injetividade de (M, g). Para $i = 1, \ldots, k$, na bola Euclideana de raio μ_α^{-1} centrada em 0, $B_0(\delta\mu_\alpha^{-1})$, definamos a função

$$v_\alpha^i(x) = \mu_\alpha^{\frac{n-p}{p}} u_\alpha^i(\exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x)) \tag{3.6}$$

Dado $R > 0$ e $x \in B_0(R)$, a bola Euclideana de raio R e centro em 0, das equações (3.5) e (3.6), podemos escrever que

$$\begin{aligned} |v_\alpha^i(x)| &\leq \mu_\alpha^{\frac{n-p}{p}} \left(\sum_{j=1}^k |u_\alpha^j(\exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x))|^p \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq \mu_\alpha^{\frac{n-p}{p}} \frac{\Psi_\alpha(\exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x))}{\Phi_\alpha(\exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x))^{\frac{n-p}{p}}}. \end{aligned}$$

Portanto,

$$|v_\alpha^i(x)| \leq \mu_\alpha^{\frac{n-p}{p}} \frac{\Psi_\alpha(\exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x))}{\Phi_\alpha(\exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x))^{\frac{n-p}{p}}}, \tag{3.7}$$

para todo i e todo α suficientemente grande. Para todo i, j e x na bola Euclideana de centro 0 e raio $R > 0$, $B_0(R)$, obtemos as desigualdades

$$\begin{aligned} d_g(x_{j,\alpha}^i, \exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x)) &\geq d_g(x_{j,\alpha}^i, y_\alpha) - d_g(y_\alpha, \exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x))) \\ &\geq d_g(x_{j,\alpha}^i, y_\alpha) - R\mu_\alpha = \left(\frac{d_g(x_{j,\alpha}^i, y_\alpha)}{\Phi_\alpha(y_\alpha)} - \frac{R\mu_\alpha}{\Phi_\alpha(y_\alpha)} \right) \Phi_\alpha(y_\alpha) \\ &\geq \left(1 - \frac{R\mu_\alpha}{\Phi_\alpha(y_\alpha)} \right) \Phi_\alpha(y_\alpha). \end{aligned}$$

Pela última desigualdade, a desigualdade (3.7) e a definição de y_α, obtemos

$$\begin{aligned} |v_\alpha^i(x)| &\leq \mu_\alpha^{\frac{n-p}{p}} \frac{\Psi_\alpha(\exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x))}{\Phi_\alpha(\exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x))^{\frac{n-p}{p}}} \\ &\leq \mu^{\frac{n-p}{p}} \frac{\Psi_\alpha(y_\alpha)}{\Phi_\alpha(\exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x))^{\frac{n-p}{p}}} \\ &\leq \mu_\alpha^{\frac{n-p}{p}} k^{\frac{1}{p}} |u_\alpha^{i_0}(y_\alpha)| \frac{\Phi(y_\alpha)^{\frac{n-p}{p}}}{\Phi(\exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x))^{\frac{n-p}{p}}} \\ &\leq k^{\frac{1}{p}} \left(1 - \frac{R\mu_\alpha}{\Phi_\alpha(y_\alpha)} \right)^{-\frac{n-p}{p}}. \end{aligned}$$

Assim, graças a definição de y_α, obtemos que para qualquer i, e qualquer $x \in B_0(R)$,

$$|v_\alpha^i(x)| \leq k^{\frac{1}{p}} \left(1 - \frac{R\mu_\alpha}{\Phi_\alpha(y_\alpha)}\right)^{-\frac{n-p}{p}} \tag{3.8}$$

quando α é suficientemente grande. Em particular, de (3.5) e (3.8), a menos de subseqüência, obtemos a limitação uniforme dos v_α^i's em qualquer subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ para todo i. Seja $\mathcal{V}_\alpha = (v_\alpha^1, \ldots, v_\alpha^k)$. Os $\mathcal{V}_\alpha$'s são soluções de

$$-\Delta_{p,g_\alpha}\mathcal{V}_\alpha + \frac{1}{p}\mu_\alpha^p \nabla_{\mathcal{U}}\tilde{G}(x, \mathcal{V}_\alpha) = \frac{1}{p^*}\nabla F(\mathcal{V}_\alpha) \tag{3.9}$$

sendo

$$\tilde{G}(x, \cdot) = G(\exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x), \cdot) \text{ e } g_\alpha(\cdot) = (\exp_{y_\alpha}^* g)(\mu_\alpha \cdot).$$

Seja ξ a métrica Euclideana. Para cada compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, como $\mu_\alpha \to 0$ segue que $g_\alpha \to \xi$ em $C^1(K)$. Então, da Teoria Elíptica, segue de (3.8) que os v_α^i's são uniformemente limitados em $C_{loc}^\theta(\mathbb{R}^n)$, $0 < \theta < 1$, para todo i. Em particular, podemos supor que, a menos de subseqüência, $v_\alpha^i \to v_i$ em $C_{loc}^0(\mathbb{R}^n)$. Segue que os v_i's são limitados em $\mathbb{R}^n$ por (3.7), e tais que $v_{i_0}(0) = 1$ por construção. Podemos ainda considerar os v_i's pertencentes ao espaço $D^{1,p}(\mathbb{R}^n)$. Seja $\mathcal{V} = (v_1, \ldots, v_k) \not\equiv 0$, para todo i e $R > 0$, temos

$$\int_{B_{y_\alpha}(R\mu_\alpha)} |u_\alpha^i|^{p^*} \, dv_g = \int_{B_0(R)} |v_\alpha^i|^{p^*} \, dv_{g_\alpha}.$$

Segue da convergência dominada que, para todo $R > 0$

$$\int_{B_{y_\alpha}(R\mu_\alpha)} |u_\alpha^i|^{p^*} \, dv_g = \int_{\mathbb{R}^n} |v^i|^{p^*} \, dx + \varepsilon_R(\alpha). \tag{3.10}$$

em que $\varepsilon_R(\alpha) \to 0$ quando $R \to +\infty$ e $\alpha \to +\infty$. Graças a decomposição em bolhas diagonais, temos

$$\int_{B_{y_\alpha}(R\mu_\alpha)} |u_\alpha^i|^{p^*} \, dv_g = \int_{B_{y_\alpha}(R\mu_\alpha)} \left| u_0^i + \sum_{i=1}^{m_i} B_{j,\alpha}^i + R_\alpha^i \right|^{p^*} \, dv_g.$$

Em particular, desde que $\mathcal{U}^0$ é uma aplicação contínua

$$\int_{B_{y_\alpha}(R\mu_\alpha)} |u_\alpha^i|^{p^*} \, dv_g \leq C \sum_{i=1}^{m_i} \int_{B_{y_\alpha}(R\mu_\alpha)} |B_{j,\alpha}^i|^{p^*} \, dv_g + o(1), \tag{3.11}$$

sendo $C > 0$ independente de α, e $o(1) \to 0$ quando $\alpha \to +\infty$. Relembremos que bolhas diagonais são sequências de aplicações tais que uma das funções coordenadas é formada por bolhas escalares e as demais são nulas, segue de [Sa2] que

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_{B_{y\alpha}(R\mu_\alpha)} |B^i_{j,\alpha}|^{p^*} \, dv_g = 0 \tag{3.12}$$

Segue de (3.10) que $\int_{\mathbb{R}^n} |v^i|^{p^*} \, dx = \varepsilon_R(\alpha)$, que quando $R \to +\infty$ e $\alpha \to +\infty$ dá o resultado nulo, levando-nos a uma contradição, uma vez que $\mathcal{V} \not\equiv 0$.

3.4 Demonstração do Teorema 1.3

Para a demonstração do Teorema 1.3, precisaremos desenvolver as estimativas de De Giorgi-Nash-Moser no contexto vetorial.

Para o caso $p = 2$, $(S_{p,\alpha})$ é dado por

$$-\Delta_g \mathcal{U} + \frac{1}{2}\nabla_{\mathcal{U}} G_\alpha(x, \mathcal{U}) = \frac{1}{2^*}\nabla F_\alpha(\mathcal{U}) \text{ em } M. \tag{$S_{2,\alpha}$}$$

Para simplificarmos a notação, consideremos $|t|_\mu^\nu = \left(\sum_{i=1}^k |t_i|^\mu\right)^{\frac{\nu}{\mu}}$, para $t \in \mathbb{R}^k$ e números reais μ, ν. A seguir, apresentaremos algumas extensões de estimativas de De Giorgi-Nash-Moser de soluções de equações elípticas à soluções $\mathcal{U}_\alpha = (u_\alpha^1, \ldots, u_\alpha^k)$ do sistema $(S_{2,\alpha})$.

Proposição 3.2. *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 3$, $F_\alpha, F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ funções contínuas, F_α de classe C^1, positivas e 2^*-homogêneas e $G_\alpha, G : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ funções contínuas, G_α de classe C^1 na segunda variável, positivas e 2-homogêneas, $\alpha > 0$, tal que*

$$F_\alpha \to F \text{ em } C^0_{loc}(\mathbb{R}^k),$$

$$G_\alpha \to G \text{ em } C^0_{loc}(M \times \mathbb{R}^k).$$

Neste caso, existe uma constante $C > 0$, independente de α, tal que para qualquer solução fraca $\mathcal{U}_\alpha \in H^{1,2}(M, \mathbb{R}^k)$ de $(S_{2,\alpha})$,

$$\int_M |\mathcal{U}|_2^2 \, dv_g \leq C \int_M |\mathcal{U}|_2^{2^*} \, dv_g,$$

para todo $\alpha > 0$.

Demonstração. Para qualquer função positiva $\varphi \in C^1(M)$, temos

$$\int_M \langle \nabla |\mathcal{U}|_2^2, \nabla \varphi \rangle \, dv_g = \int_M 2\sum_{i=1}^k u_\alpha^i \langle \nabla u_\alpha^i, \nabla \varphi \rangle \, dv_g$$

$$= \int_M 2\sum_{i=1}^k \langle \nabla u_\alpha^i, (\nabla(u_\alpha^i \varphi) - \varphi \nabla u_\alpha^i) \rangle \, dv_g$$

$$= \int_M 2\sum_{i=1}^k \langle \nabla u_\alpha^i, \nabla(u_\alpha^i \varphi) \rangle \, dv_g - \int_M 2\sum_{i=1}^k |\nabla u_\alpha^i|^2 \varphi \, dv_g$$

$$\leq \int_M 2\langle \frac{1}{2^*}\nabla F_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) - \frac{1}{2}\nabla G_\alpha(x,\mathcal{U}_\alpha), \mathcal{U}_\alpha\rangle \varphi \, dv_g$$

$$= 2\int_M F_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)\varphi \, dv_g - 2\int_M G_\alpha(x,\mathcal{U}_\alpha)\varphi \, dv_g$$

$$\leq C\int_M |\mathcal{U}_\alpha|_2^{2^*}\varphi \, dv_g - 2m\int_M |\mathcal{U}_\alpha|_2^2\varphi \, dv_g,$$

sendo $C > 0$ é uma constante independente de α e $m > 0$ uma constante independente de α tal que

$$G_\alpha(x,t) \geq m|t|_2^2,$$

para todo $x \in M$ e $t \in \mathbb{R}^k$.
Agora escolhemos $\varphi \in C^1(M)$ como a solução positiva da equação

$$-\Delta_g\varphi + 2m\varphi = 1 \text{ em } M.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\int_M |\mathcal{U}_\alpha|_2^2 \, dv_g &= \int_M |\mathcal{U}_\alpha|_2^2(-\Delta_g\varphi + 2m\varphi) \, dv_g \\
&= \int_M \langle \nabla|\mathcal{U}_\alpha|_2^2, \nabla\varphi\rangle \, dv_g + 2m\int_M |\mathcal{U}_\alpha|_2^2\varphi \, dv_g \\
&\leq C\int_M |\mathcal{U}_\alpha|_2^{2^*}\varphi \, dv_g \leq C\int_M |\mathcal{U}_\alpha|_2^{2^*} \, dv_g.
\end{aligned}$$

□

Proposição 3.3. *Sejam (M,g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 3$, $F_\alpha, F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ funções contínuas, F_α de classe C^1, positivas e 2^*-homogêneas e $G_\alpha, G : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ funções contínuas, G_α de classe C^1 na segunda variável, positivas e 2-homogêneas, $\alpha > 0$, tal que*

$$F_\alpha \to F \text{ em } C^0_{loc}(\mathbb{R}^k),$$

$$G_\alpha \to G \text{ em } C^0_{loc}(M \times \mathbb{R}^k).$$

Então, dado $\delta > 0$, existe uma constante $C_\delta > 0$, dependente de $\delta > 0$ e independente de α, tal que para qualquer solução fraca $\mathcal{U}_\alpha \in H^{1,2}(M,\mathbb{R}^k)$ de $(S_{2,\alpha})$,

$$\sup_{M\setminus B_\delta(x_0)} |\mathcal{U}_\alpha|_2^2 \leq C_\delta \int_M |\mathcal{U}_\alpha|_2^2 \, dv_g$$

para todo $\alpha > 0$.

Demonstração. De acordo com a demonstração acima, temos que $|\mathcal{U}_\alpha|_2^2$ satisfaz, no sentido fraco,

$$-\Delta_g|\mathcal{U}_\alpha|_2^2 + 2m|\mathcal{U}_\alpha|_2^2 \leq |\mathcal{U}_\alpha|_2^{2^*}.$$

Então, a conclusão segue diretamente de estimativas de De Giorgi-Nash-Moser para equações elípticas. Isso finaliza a demonstração. □

O resultado principal para $p \neq 2$ é:

Proposição 3.4. *Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 3$, $F_\alpha, F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ funções contínuas, F_α de classe C^1, positivas e p^*-homogêneas e $G_\alpha, G : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ funções contínuas, G_α de classe C^1 na segunda variável, positivas e p-homogêneas, $\alpha > 0$, tal que*

$$F_\alpha \to F \text{ em } C^1_{loc}(\mathbb{R}^k),$$

$$G_\alpha \to G \text{ em } C^0(M, C^1_{loc}(\mathbb{R}^k)).$$

Neste caso, existe uma constante $C > 0$, independente de α, tal que para qualquer solução fraca $\mathcal{U}_\alpha \in H^{1,p}(M, \mathbb{R}^k)$ de $(S_{p,\alpha})$,

$$\sup_M |\mathcal{U}_\alpha|_1 \leq C \left(\int_M |\mathcal{U}_\alpha|_p^p \, dv_g \right)^{\frac{1}{p}}$$

para todo $\alpha > 0$.

Demonstração. Temos que

$$-\Delta_p u_\alpha^i = F_i(x, \mathcal{U}_\alpha),$$

sendo

$$F_i(x, \mathcal{U}_\alpha) = \frac{1}{p^*}\partial_i F_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) - \frac{1}{p}\partial_i G_\alpha(x, \mathcal{U}_\alpha).$$

Para $k > 1$, coloque $t = k + p - 1$. Veja que

$$\| \, |u_\alpha^i|^{\frac{t}{p}-1} \nabla u_\alpha^i \, \|_p^p = \int_M |u_\alpha^i|^{t-p} |\nabla u_\alpha^i|^p \, dv_g,$$

em que $\| \cdot \|_p$ é a norma do espaço $L^p(M)$. Usando $|u_\alpha^i|^k$ como função teste teremos

$$k \int_M |u_\alpha^i|^{t-p} |\nabla u_\alpha^i|^p \, dv_g = -\int_M \Delta_p u_\alpha^i |u_\alpha^i|^k \, dv_g = \int_M F_i(x, \mathcal{U}_\alpha) |u_\alpha^i|^k \, dv_g.$$

Da desigualdade de Sobolev, segue que

$$\| u_\alpha^i \|_{t\frac{p^*}{p}}^t = \| \, |u_\alpha^i|^{\frac{t}{p}} \, \|_{p^*}^p \leq A_0(p, g) \left(\frac{t}{p} \right)^p \| \, |u_\alpha^i|^{\frac{t}{p}-1} \nabla u_\alpha^i \, \|_p^p + B \| u_\alpha^i \|_t^t,$$

sendo $A_0(p,g) = K_F(n,p)^p$. Assim

$$
\begin{aligned}
k \parallel |u_\alpha^i|^{\frac{t}{p}-1}\nabla u_\alpha^i \parallel_p^p &= k\int_M |u_\alpha^i|^{t-p}|\nabla u_\alpha^i|^p \, dv_g \\
&= \left|\int_M \Delta_p u_\alpha^i |u_\alpha^i|^k \, dv_g\right| \\
&= \left|\int_M F_i(x,\mathcal{U}_\alpha)|u_\alpha^i|^k\right| \\
&\leq \left(\int_M |F_i(x,\mathcal{U}_\alpha)|^r\right)^{\frac{1}{k}} \parallel u_\alpha^i \parallel_{kr}^k,
\end{aligned}
$$

onde $r, s > 1$ e $\frac{1}{s} + \frac{1}{r} = 1$. Segue da desigualdade de Sobolev acima que

$$\parallel u_\alpha^i \parallel_{t\frac{p^*}{p}}^t \leq A_0(p,g)\left(\frac{t}{p}\right)^p \frac{1}{k} \parallel F_i(\cdot,\mathcal{U}_\alpha) \parallel_s \parallel u_\alpha^i \parallel_{kr}^k + B \parallel u_\alpha^i \parallel_t^t .$$

e, da desigualdade de Hölder, segue que

$$\parallel u_\alpha^i \parallel_{t\frac{p^*}{p}}^t \leq A_0(p,g)\left(\frac{t}{p}\right)^p \frac{1}{k} \parallel F_i(\cdot,\mathcal{U}_\alpha) \parallel_s \parallel u_\alpha^i \parallel_{rt}^t \, v_g(M)^{\frac{p-1}{rt}} + B \parallel u_\alpha^i \parallel_{rt}^t \, V_g(M)^{1-\frac{1}{r}}.$$

Portanto,

$$\parallel u_\alpha^i \parallel_{t\frac{p^*}{p}} \leq \frac{\max\{A_0(p,g), B\}\left(\frac{t}{p}\right)^{\frac{p}{t}} V_g(M)^{\frac{p-1}{rt}}}{\left(\parallel F_i(\cdot,\mathcal{U}_\alpha) \parallel_s + V_g(M)^{\frac{(r-1)t+1-p}{rt}}\right)^{-\frac{1}{t}}} \max\left\{\frac{1}{k^t}, \parallel u_\alpha^i \parallel_{rt}\right\},$$

ou seja,

$$\parallel u_\alpha^i \parallel_{t\frac{p^*}{p}} \leq \left(\frac{t}{p}\right)^{\frac{p}{t}} C^{\frac{1}{t}} \max\left\{\frac{1}{k^t}, \parallel u_\alpha^i \parallel_{rt}\right\} \tag{3.13}$$

sendo, sem perda de generalidade, C uma constante que independe de t. Do resultado de regularidade, podemos escolher $s > \frac{n}{p}$ e $r < \frac{p^*}{p}$. Seja $a > 0$ tal que $r(1+a) = \frac{p^*}{p}$ e coloque $\gamma = 1 + a$ e $t = \gamma^j$, sendo j um número inteiro não-negativo. De (3.13), obtemos que

$$\parallel u_\alpha^i \parallel_{t\gamma^{j+1}} \leq \left(\frac{\gamma^j}{p}\right)^{\frac{p}{\gamma^j}} C^{\frac{1}{\gamma^j}} \max\left\{\frac{1}{k^{\gamma^j}}, \parallel u_\alpha^i \parallel_{r\gamma^j}\right\}.$$

Fazendo então iterações, encontramos

$$\| u_\alpha^i \|_{t\gamma^{j+1}} \leq C^{\sum_{l=1}^{j} \frac{l}{\gamma^l}} \frac{\gamma^{p\left(\sum_{l=1}^{j} \frac{1}{\gamma^l}\right)}}{p^{\sum_{l=1}^{j} \frac{1}{\gamma^l}}} \| u_\alpha^i \|_r$$

Como as séries $\sum_{l=1}^{+\infty} \frac{1}{\gamma^l}$ e $\sum_{l=1}^{+\infty} \frac{l}{\gamma^l}$ são convergentes, o resultado segue. □

Demonstração do Teorema 1.3. Demonstraremos o Teorema 1.3 em duas partes. Primeiro para $p^2 < n$ e depois para $p = 2$.

O caso $p^2 < n$**:** Do sistema $(S_{p,\alpha})$, segue que

$$\begin{aligned} \int_{M\backslash B_\delta} |\mathcal{U}_\alpha|_p^p \, dv_g &\leq C \int_M \sum_{i=1}^{k} \partial_i F(\mathcal{U}_\alpha) \cdot u_\alpha^i \, dv_g \\ &\leq \sup_M |\mathcal{U}_\alpha|_1 \int_M |\mathcal{U}_\alpha|_{p^*-1}^{p^*-1} \, dv_g \end{aligned}$$

sendo C independente de α. Desta desigualdade e das estimativas de De Giorgi-Nash-Moser, encontramos que

$$\int_{M\backslash B_\delta} |\mathcal{U}_\alpha|_p^p \, dv_g \leq C \int_M |\mathcal{U}_\alpha|_{p^*-1}^{p^*-1} \, dv_g \sum_{i=1}^{k} \left(\int_M |u_\alpha^i|^p \, dv_g \right)^{\frac{1}{p}} .$$

Usando desigualdade de interpolação, segue que

$$\begin{aligned} \int_{M\backslash B_\delta} |\mathcal{U}_\alpha|_p^p \, dv_g &\leq C \int_M |\mathcal{U}_\alpha|_{p^*-1}^{p^*-1} \, dv_g \sum_{i=1}^{k} \left(\int_M |u_\alpha^i|^p \, dv_g \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \int_M |\mathcal{U}_\alpha|_1^{p^*-1} \, dv_g \left(\int_M |\mathcal{U}_\alpha|_1^p \, dv_g \right)^{\frac{1}{p}} \\ &\leq C \left(\int_M |\mathcal{U}_\alpha|_1^p \, dv_g \right)^{\frac{n}{p^2}} . \end{aligned}$$

Assim,

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{\int_{M\backslash B_\delta} |\mathcal{U}_\alpha|_p^p \, dv_g}{\int_M |\mathcal{U}_\alpha|_1^p \, dv_g} = 0,$$

pois $p^2 < n$. Utilizando a equivalência de normas em $\mathbb{R}^k$ teremos

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{\int_{B_\delta} |\mathcal{U}_\alpha|_p^p \, dv_g}{\int_M |\mathcal{U}_\alpha|_p^p \, dv_g} = 1 .$$

O caso $p = 2$: Temos, das estimativas de De Giorgi-Nash-Moser, que existe uma constante $C > 0$, independente de α, tal que

$$\int_{M \setminus B_\delta} |\mathcal{U}_\alpha|_2^2 \, dv_g \leq \int_M |\mathcal{U}_\alpha|_2^2 \, dv_g \leq C \int_M |\mathcal{U}_\alpha|_2^{2^*} \, dv_g$$

$$\leq C \sup_M |\mathcal{U}_\alpha|_2^2 \int_M |\mathcal{U}_\alpha|_2^{2^*-2} \, dv_g \leq C \int_M |\mathcal{U}_\alpha|_2^2 \, dv_g \int_M |\mathcal{U}_\alpha|_2^{2^*-2} \, dv_g.$$

Assim,

$$\frac{\int_{B_\delta} |\mathcal{U}_\alpha|_2^2 \, dv_g}{\int_M |\mathcal{U}_\alpha|_2^2 \, dv_g} \leq C \int_M |\mathcal{U}_\alpha|_2^{2^*-2} \, dv_g.$$

Portanto, basta agora mostrarmos que

$$\int_M |\mathcal{U}_\alpha|_2^{2^*-2} \, dv_g \to 0.$$

Para ver isso, devemos analisar dois casos. Se $n \geq 5$, a condição $p^2 < n$ está satisfeita e nada há que ser feito. Se $n = 4$, teremos $2^* - 2 = \frac{2 \cdot 4}{4-2} - 2 = 2$ e portanto

$$\int_M |\mathcal{U}_\alpha|_2^{2^*-2} \, dv_g = \int_M |\mathcal{U}_\alpha|_2^2 \, dv_g \to 0.$$

O que conclui a demonstração do Teorema 1.3. $\square$

3.5 Demonstração do Teorema 1.4

Recordemos que estamos utilizando bolhas diagonais dadas pela decomposição obtida no Teorema 1.1. Isto é as bolhas diagonais $(B_{j,\alpha})$ da decomposição, são funções vetoriais tais que uma das coordenadas é é formada por bolhas escalares e as demais coordenadas são nulas. Considerando uma sequência limitada $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$ de soluções não-negativas de $(S_{p,\alpha})$

$$-\Delta_g \mathcal{U} + \frac{1}{p}\nabla_{\mathcal{U}} G_\alpha(x,\mathcal{U}) = \frac{1}{p^*}\nabla F_\alpha(\mathcal{U}) \text{ em } M,$$

o resultado que iremos demonstrar, nos diz que a função

$$\hat{\mathcal{U}}_\alpha(\cdot) = \hat{\mu}_\alpha^{\frac{n-p}{p}}\mathcal{U}(\exp_{\hat{x}_\alpha}(\hat{\mu}_\alpha \cdot)) \to \mathcal{U}(\cdot) \text{ em } C^1(B_0(\delta), \mathbb{R}^k), \text{ quando } \alpha \to +\infty,$$

sendo $\mathcal{U} \not\equiv 0$ solução de

$$-\Delta\mathcal{U} = \frac{1}{p^*}\nabla F(\mathcal{U}) \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Começamos as demonstração do Teorema 1.4 com a afirmação abaixo.

Afirmação 1: *Podemos escolher $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que, a menos de subsequência,*

$$d_g(\hat{x}_\alpha, x^i_{j,\alpha}) \geq R\hat{\mu}_\alpha \tag{3.14}$$

para quaisquer α, i e j, sendo $R > 0$ pequeno e independente de α, i e j.

Demonstração da afirmação 1: Seja $\tilde{x}_\alpha = x^{i_0}_{j_0,\alpha}$, a menos de subsequência, podemos assumir que os limites

$$\lambda^i_j = \lim_{\alpha\to+\infty} \frac{d_g(\tilde{x}_\alpha, x^i_{j,\alpha})}{\hat{\mu}_\alpha},$$

existem (e são possivelmente infinitos). Seja $\mathcal{H}$ o conjunto dos pares i, j tais que $\lambda^i_j > 0$. Agora seja $\lambda > 0$ tal que $0 < \lambda < \lambda^i_j$ para todo i, $j \in \mathcal{H}$. Tomamos $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tal que $|x_0| > \frac{\lambda}{2}$. Se i, $j \in \mathcal{H}$, então

$$\begin{aligned} \frac{d_g(\hat{x}_\alpha, x^i_{j,\alpha})}{\hat{\mu}_\alpha} &\geq \frac{d_g(\tilde{x}_\alpha, x^i_{j,\alpha})}{\hat{\mu}_\alpha} - \frac{d_g(\hat{x}_\alpha, \tilde{x}_\alpha)}{\hat{\mu}_\alpha} \\ &= \frac{d_g(\tilde{x}_\alpha, x^i_{j,\alpha})}{\hat{\mu}_\alpha} - \frac{\hat{\mu}_\alpha|x_0|}{\hat{\mu}_\alpha} = \frac{d_g(\tilde{x}_\alpha, x^i_{j,\alpha})}{\hat{\mu}_\alpha} - |x_0| \geq |x_0| \end{aligned}$$

para α suficientemente grande, e assim obtemos validade de (3.14) para todo i e j. Caso contrário, isto é, $i,\ j \notin \mathcal{H}$, teremos $\lambda^i_j = 0$ e

$$\begin{aligned} \frac{d_g(\hat{x}_\alpha, x^i_{j,\alpha})}{\hat{\mu}_\alpha} &\geq \frac{d_g(\tilde{x}_\alpha, \hat{x}_\alpha)}{\hat{\mu}_\alpha} - \frac{d_g(x^i_{j,\alpha}, \tilde{x}_\alpha)}{\hat{\mu}_\alpha} \\ &= |x_0| - \frac{d_g(x^i_{j,\alpha}, \tilde{x}_\alpha)}{\hat{\mu}_\alpha} \geq \frac{|x_0|}{2} \end{aligned}$$

para α suficientemente grande, e assim, novamente, obtemos que (3.14) vale para todo i e j. Então podemos escolher $x_0 \in \mathbb{R}^n$, $|x_0| > 0$, tal que, a menos de subsequência, (3.14) é válida.

Seja $\hat{u}^i_\alpha$ a renormalização de u^i_α em relação a $\hat{x}_\alpha$ e $\hat{\mu}_\alpha$, dada por (1.5),

$$\hat{u}^i_\alpha(x) = \hat{\mu}_\alpha^{\frac{n-p}{p}} u^i_\alpha(\exp_{\hat{x}_\alpha}(\hat{\mu}_\alpha x)).$$

Afirmação 2: *Seja $\delta_0 > 0$ tal que $2\delta_0 < R$, sendo $R > 0$ como em (3.14), então*

$$\hat{u}^i_\alpha \to u_i \text{ em } C^1(B_0(\delta_0)),$$

quando $\alpha \to +\infty$.

Demonstração da afirmação 2: Por (3.14), para cada $x \in B_0(\delta_0)$, teremos

$$\begin{aligned} d_g(x^i_{j,\alpha}, \exp_{\hat{x}_\alpha}(\hat{\mu}_\alpha x)) &\geq d_g(x^i_{j,\alpha}, \hat{x}_\alpha) - d_g(\hat{x}_\alpha, \exp_{\hat{x}_\alpha}(\hat{\mu}_\alpha x)) \\ &\geq R\hat{\mu}_\alpha - \delta_0\hat{\mu}_\alpha \geq \frac{R}{2}\hat{\mu}_\alpha. \end{aligned} \tag{3.15}$$

Seja $\hat{\mathcal{U}}_\alpha = (\hat{u}^1_\alpha, \ldots, \hat{u}^k_\alpha)$, pelo Teorema 1.2, segue de (3.15) que os $\hat{u}^i_\alpha$'s são uniformemente limitados em $B_0(\delta_0)$ e $\hat{\mathcal{U}}_\alpha$ é solução sistema

$$-\Delta_{g_\alpha}\hat{\mathcal{U}}^i_\alpha - \frac{\hat{\mu}^p_\alpha}{p}\nabla_{\mathcal{U}}\tilde{G}_\alpha(y, \tilde{\mathcal{U}}_\alpha) = \frac{1}{p^*}\nabla F_\alpha(\tilde{\mathcal{U}}_\alpha) \tag{3.16}$$

sendo $g_\alpha(x) = (\exp^*_{\hat{x}_\alpha} g)(\hat{\mu}_\alpha x)$, $\hat{G}_\alpha(y, \cdot) = G_\alpha(\exp_{\hat{x}_\alpha}(\hat{\mu}_\alpha x), \cdot)$ e $\hat{\mathcal{U}}_\alpha = (\hat{u}^1_\alpha, \ldots, \hat{u}^k_\alpha)$. Temos ainda, que $g_\alpha \to \xi$ em $C^1(K)$ para qualquer compacto $K \subset\subset \mathbb{R}^n$, sendo ξ a métrica Euclideana. Utilizando a limitação uniforme dos $\hat{u}^i_\alpha$'s, as convergências de G_α e F_α e o fato que os $\hat{u}^i_\alpha$'s são soluções da equação acima, segue da Teoria Elíptica, que os $\hat{u}^i_\alpha$'s são uniformemente limitados em $C^{1,\theta}(B_0(\delta_1))$, $\delta_1 < \delta_0$, sendo $0 < \theta < 1$. A menos de subsequência, podemos assumir que $\hat{u}^i_\alpha \to u_i$ em $C^1(B_0(\delta))$ quando $\alpha \to +\infty$ para todo i e algum $\delta > 0$ pequeno. Segue da invariância por reescalonamento que os $\hat{u}^i_\alpha$'s são limitados em $H^{1,p}(B_0(R'))$, para todo $R' > 0$. A menos de passagem à outra subsequência, podemos assumir que

$$\hat{u}^i_\alpha \rightharpoonup v_i \text{ em } H^{1,p}_{loc}(\mathbb{R}^n)$$

$$\hat{u}_\alpha^i \to v_i \text{ em } L^p_{loc}(\mathbb{R}^n)$$

$$\hat{u}_\alpha^i \to v_i \text{ q.t.p .}$$

Além disso,

$$(\hat{u}_\alpha^i)^{p^*-1} \rightharpoonup u_i^{p^*-1} \text{ em } L_{loc}^{\frac{p^*}{p^*-1}}(\mathbb{R}^n),$$

para todo i. Então, das hipóteses sobre as convergências de F_α e G_α e de (3.16), concluímos que os v_i's são soluções não-negativas do sistema Euclideano

$$-\Delta \mathcal{U} = \frac{1}{p^*}\nabla F(\mathcal{U}) \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Observado que $u_i = v_i$ em $B_0(\delta)$, para todo i, teremos $\delta > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ tais que, a menos de subsequência, para todo i

$$\hat{u}_\alpha^i \to u_i \text{ em } C^1(B_0(\delta))$$

quando $\alpha \to +\infty$, sendo u_i solução de

$$-\Delta \mathcal{U} = \frac{1}{p^*}\nabla F(\mathcal{U}) \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Restou-nos apenas provar que pelo menos um dos u_i's é não-nulo. Utilizando a decomposição em bolhas diagonais para i_0 teremos

$$\int_{B_{\hat{x}_\alpha}(r\hat{\mu}_\alpha)} (u_\alpha^{i_0})^{p^*}\, dv_g \geq \int_{B_{\hat{x}_\alpha}(r\hat{\mu}_\alpha)} (B_{j,\alpha}^{i_0})^{p^*}\, dv_g + o(1) \tag{3.17}$$

e

$$\int_{B_{\hat{x}_\alpha}(r\hat{\mu}_\alpha)} (u_\alpha^{i_0})^{p^*}\, dv_g = \int_{B_0(r)} (u_\alpha^{i_0})^{p^*}\, dv_{g_\alpha} = \int_{B_0(r)} u_{i_0}^{p^*}\, dx + o(1) \tag{3.18}$$

sendo que $o(1) \to 0$ e $g_\alpha \to \xi$ quando $\alpha \to +\infty$. Além disso,

$$\int_{B_{\hat{x}_\alpha}(r\hat{\mu}_\alpha)} (B_{j,\alpha}^{i_0})^{p^*}\, dv_g = \int_{\Omega_\alpha} u^{p^*}\, dv_{\hat{g}_\alpha} \tag{3.19}$$

sendo u solução não-negativa e não trivial de

$$-\Delta u = |u|^{p^*-2}u \text{ em } \mathbb{R}^n,$$

$\hat{g}_\alpha(x) = \exp_{\tilde{x}_\alpha} g(\hat{\mu}_\alpha x)$ e $\Omega_\alpha = \frac{1}{\mu_\alpha}\exp_{\tilde{x}_\alpha}^{-1}(B_{\hat{x}_\alpha}(r\hat{\mu}_\alpha))$. Usando o fato que existe $t_0 > 0$ tal que $B_{x_0}(t_0) \subset \Omega_\alpha$ para todo α, obtemos

$$\int_{\Omega_\alpha} u^{p^*}\, dv_{\tilde{g}_\alpha} \geq \int_{B_{x_0}(t_0)} u^{p^*}\, dv_{\tilde{g}_\alpha} \geq \int_{B_{x_0}(t_0)} u^{p^*}\, dx + o(1). \tag{3.20}$$

Combinando as equações, (3.17) a (3.20), quando $\alpha \to +\infty$, obtemos

$$\int_{B_0(r)} u_{i_0}^{p^*} \, dx \geq \int_{B_{x_0}(t_0)} u^{p^*} \, dx > 0$$

provando que os u_i's não são todos nulos. O que acabamos de demonstrar, aliado à convergência em C^1 de $\hat{u}_\alpha^i$ nos dá a conclusão do Teorema 1.4.

3.6 Demonstração do Teorema 1.5

Para uma variedade Riemanniana compacta (M, g) de dimensão $n \geq 3$, $k \geq 1$ um número natural, $(G_\alpha)_\alpha$ uma sequência de funções contínuas $G_\alpha : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, 2-homogêneas e de classe C^1 segunda variável, tal que $G_\alpha \to G$ em C^1_{loc}, $(F_\alpha)_\alpha$ uma sequência de funções $F_\alpha : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, 2^*-homogêneas e positivas de classe C^1, tal que $F_\alpha \to F$ em C^1_{loc}. Consideremos os sistemas do tipo $(S_{2,\alpha})$ dados por

$$-\Delta_g u_i + \frac{1}{2}\partial_i G_\alpha(x, \mathcal{U}) = \frac{1}{2^*}\partial_i F_\alpha(\mathcal{U}) \text{ em } M,\ i = 1, 2, \dots k.$$

Estudaremos o comportamento das sequências de soluções de $(S_{2,\alpha})$ estando próximos de uma das bolhas diagonais de sua decomposição $H^{1,2}$.

Seja $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$ sequência limitada de soluções não-negativas de $(S_{2,\alpha})$, o Teorema 1.1 nos dá a decomposição da sequência em bolhas diagonais. Suponhamos que a sequência explode e sejam $x^i_{j,\alpha}$ e $\mu^i_{j,\alpha}$ os centros e os pesos das bolhas escalares $(B^i_{j,\alpha})_\alpha$ das quais as bolhas diagonais $(B_{j,\alpha})_\alpha$ são definidas, sendo $i = 1, \dots, k$, $j = 1, \dots, l_i$ e $\sum_i l_i = l$. A menos de reordenação e subsequência, podemos escrever

$$\mu_\alpha = \mu^1_{1,\alpha} = \max_{i,j} \mu^i_{j,\alpha}; \tag{P_α}$$

e

$$x_\alpha = x^1_{1,\alpha}, \tag{C_α}$$

para todo α. Definimos ainda, em $B_1(0) \subset \mathbb{R}^n$, a função $\tilde{\mathcal{U}}_\alpha = (\tilde{u}^1_\alpha, \dots, \tilde{u}^k_\alpha)$ em que

$$\tilde{u}^i_\alpha = u^i_\alpha(\exp_{x_\alpha}(\sqrt{\mu_\alpha} x)), \tag{3.21}$$

sendo $\exp_{x_\alpha}$ a aplicação exponencial em x_α e $\mathcal{U}_\alpha = (u^1_\alpha, \dots, u^k_\alpha)$.

Graças à $(S_{2,\alpha})$ e as condições sobre F_α, G_α obtemos o sistema limite

$$-\Delta_g u_i + \frac{1}{2}\partial_i G(x, \mathcal{U}) = \frac{1}{2^*}\partial_i F(\mathcal{U}) \quad i = 1, 2, \dots k \tag{$S_{2,\infty}$}$$

em M, para todo $i = 1, \dots, k$.

Para p_1 and p_2 tal que $2^*/2 < p_2 < 2^* < p_1$ e $\sigma > 0$, definimos a norma $\| \cdot \|_{p_1,p_2,\sigma}$ em $L^\infty(M)$, por

$$\| u \|_{p_1,p_2,\sigma} = \inf \left\{ C > 0 \text{ tal que } \left(I^\sigma_{p_1,p_2}\right) \text{ é válida } \right\},$$

em que $\left(I^\sigma_{p_1,p_2}\right)$ vale para uma função u se, existem funções não-negativas u^1 e u^2 em $L^\infty(M)$ tais que:

(i) $u \leq u^1 + u^2$;

(ii) $\| u^1 \|_{p_1} \leq C$ e

(iii) $\| u^2 \|_{p_2} \leq C\sigma^{\frac{n}{2^*}-\frac{n}{p_2}}$,

sendo $\| \cdot \|_q$ a norma em L^q.

A demonstração do Teorema 1.5 será feita em vários passos enunciados abaixo.

Passo 1: *Seja $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$ uma sequência não-negativa e limitada em $H^{1,2}(M,\mathbb{R}^k)$ de soluções de $(S_{2,\alpha})$ que explodem. Então existe $p(n) > 2^*$ com a propriedade que para quaisquer p_1, p_2 tais que*

$$p_0(n) < p_2 < 2^* < p_1 < p(n),$$

sendo $p_0(n) = \max\left(\frac{2n}{n+2}, \frac{n}{n-2}\right)$, existe $C > 0$ tal que, a menos de subsequência, para todo i e todo α,

$$\| u^i_\alpha \|_{p_1,p_2,\mu_\alpha^{-1}} \leq C,$$

sendo μ_α dado por (P_α).

Passo 2: *Sejam u e $v \in H^{1,2}(M) \cap L^\infty(M)$ e $K \in L^\infty(M)$ funções não-negativas tais que*

$$-\Delta_g u + \lambda u \leq Kv \text{ em } M,$$

sendo $\lambda > 0$. Sejam p_1 e p_2 tais que $\frac{2^*}{2} < p_2 < 2^* < p_1$, então

$$\| u \|_{p_1,p_2,\sigma} \leq C \| K \|_{\frac{n}{2}} \| v \|_{p_1,p_2,\sigma}$$

para todo $\sigma > 0$, sendo $C > 0$ independente de u, v e σ.

No passo 3 adotamos $\theta(n) = \frac{n(n+2)}{2(n-2)}$.

Passo 3: *Sejam u, v e $w \in H^{1,2}(M) \cap L^\infty(M)$, u e v funções não-negativas, tais que*

$$-\Delta_g u + \lambda u = v^{2^*-1} + w$$

em M, sendo $\lambda > 0$. Sejam p_1 e p_2 tais que

$$2^* - 1 < p_2 < 2^* < p_1 < \theta(n),$$

e q_1 e q_2 tais que $\frac{1}{q_i} = \frac{2^*-1}{p_i} - \frac{2}{n}$, para $i = 1, 2$. Então

$$\| u \|_{q_1,q_2,\sigma} \leq C \left(1 + \max\left(\| v \|_{p_1,p_2,\sigma}, \| w \|_{p_1,p_2,\sigma}\right)^{2^*-1}\right)$$

para todo $\sigma > 0$, em que $C > 0$ é independente de σ, u, v e w.

Passo 4: *Seja* $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$ *uma sequência limitada em* $H^{1,2}(M,\mathbb{R}^k)$ *de soluções de* $(S_{2,\alpha})$ *que explodem. Sejam* p_1, p_2 *tais que* $2^*/2 < p_2 < 2^* < p_1$. *Então existe* $C > 0$ *e sequências* $(v^i_{1,\alpha})_\alpha$, $(v^i_{2,\alpha})_\alpha$ *de funções não negativas em* $L^\infty(M)$ *tais que, a menos de subsequência,*

$$|u^i_\alpha| \leq v^i_{1,\alpha} + v^i_{2,\alpha}, \| v^i_{1,\alpha} \|_{p_1} \leq C,$$

e

$$\| v^i_{2,\alpha} \|_{p_2} \leq C\mu_\alpha^{\frac{n}{p_2}-\frac{n}{2^*}}$$

para todo i *e* α, *sendo* μ_α *como em* (P_α).

O passo 5 dá estimativas integrais para sequências de soluções de $(S_{2,\alpha})$.

Passo 5: *Seja* $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$ *uma sequência limitada em* $H^{1,2}(M,\mathbb{R}^k)$ *de soluções não-negativas de* $(S_{2,\alpha})$ *que explodem. Então existem* C_1, $C_2 > 0$ *tais que, a menos de subsequência,*

$$\frac{1}{r^{n-1}}\int_{\partial B_{x_\alpha}(r)} u^i_\alpha \; d\sigma_g \leq C_1 + C_2\frac{\mu_\alpha^{\frac{n-2}{2}}}{r^{n-2}} \tag{3.22}$$

para todo i, *todo* α, *todo* $r > 0$, *sendo* x_α *e* μ_α *como em* (C_α) *e* (P_α) *e* $d\sigma_g$ *a medida induzida por* g *em* $\partial B_{x_\alpha}(r)$.

E o último passo que dá a conclusão do Teorema 1.5.

Passo 6: *Seja* $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$ *sequência limitada de soluções não-negativas de* $(S_{2,\alpha})$*em* $H^{1,2}(M,\mathbb{R}^k)$ *que explodem. Então existem números reais* $\delta > 0$ *e* A_i, *e funções harmônicas* $\varphi_i : B_0(\delta) \to \mathbb{R}$, $i = 1,\ldots,k$, *tais que, a menos de subsequência, para todo* i,

$$\tilde{u}^i_\alpha \to \frac{A_i}{|x|^{n-2}} + \varphi_i(x)$$

em $C^1_{loc}(B_0(\delta)\setminus\{0\})$ *quando* $\alpha \to +\infty$, *sendo* $\tilde{u}^i_\alpha$ *definidas por* (3.21).

Demonstração do Passo 1. Fixemos $\lambda > 0$ e seja H a função de Green do operador $-\Delta_g+\lambda$, por $(S_{2,\alpha})$ temos

$$\begin{aligned} u^i_\alpha(x) &= -\int_M \Delta H(x,y)u^i_\alpha(y)\; dv_g(y) + \lambda\int_M H(x,y)u^i_\alpha(y)dv_g(y) \\ &= -\int_M H(x,y)\Delta u^i_\alpha(y)\; dv_g(y) + \lambda\int_M H(x,y)u^i_\alpha(y)dv_g(y) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \int_M H(x,y)\left(\frac{1}{2^*}\partial_i F_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) - \frac{1}{2}\partial_i G_\alpha(y,\mathcal{U}_\alpha)\right)\, dv_g(y)\\
&\quad +\lambda \int_M H(x,y) u_\alpha^i(y) dv_g(y)\\
&= \int_M H(x,y)\frac{1}{2^*}\partial_i F_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)\, dv_g(y)\\
&\quad + \int_M H(x,y)\left(\lambda u_\alpha^i(y) - \frac{1}{2}\partial_i G_\alpha(y,\mathcal{U}_\alpha)\right)\, dv_g(y)
\end{aligned}
$$

fazendo uso do fato que $\partial_i G_\alpha$ e $\partial_i F_\alpha$ são 1-homogênea e (2^*-1)-homogênea, respectivamente, teremos a existência de constantes m_α e M_α tais que

$$
m u_\alpha^i \leq m_\alpha |\mathcal{U}_\alpha| \leq |\partial_i G_\alpha(y,\mathcal{U}_\alpha)|
$$

e

$$
|\partial_i F_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)| \leq \mathcal{M}_\alpha |\mathcal{U}_\alpha|^{2^*-1} \leq \mathcal{M}|\mathcal{U}_\alpha|^{2^*-1}.
$$

Fazendo uso dessa informação e da convergência dos F_α's e G_α's e da decomposição em bolhas, obtemos

$$
\begin{aligned}
u_\alpha^i(x) &\leq C_1 \int_M H(x,y) M_\alpha |\mathcal{U}_\alpha|^{2^*-1}\, dv_g(y) + C_2 \int_M H(x,y) u_\alpha^i(y)\, dv_g(y)\\
&\leq C_1 \int_M H(x,y) M_\alpha \left|\sum_j \mathcal{B}_{j,\alpha}(y) + \mathcal{R}_\alpha(y)\right|^{2^*-2} |\mathcal{U}_\alpha(y)|\, dv_g(y)\\
&\quad +C_2 \int_M H(x,y) u_\alpha^i(y)\, dv_g(y)\\
&\quad \leq\ k_1 \textstyle\sum_{i,j} \displaystyle\int_M H(x,y)|B_{j,\alpha}^i(y)|^{2^*-2} |\mathcal{U}_\alpha(y)|\, dv_g(y)\\
&\quad\quad +k_2 \int_M H(x,y)|\mathcal{R}_\alpha(y)|^{2^*-2}|\mathcal{U}_\alpha(y)|\, dv_g(y)\\
&\quad\quad +k_3 \int_M H(x,y) u_\alpha^i(y)\, dv_g(y).
\end{aligned}
$$

Seja

$$
w_\alpha(x) = \int_M H(x,y) u_\alpha^i(y)\, dv_g(y) \text{ em } M,
$$

então

$$-\Delta_g w_\alpha + \lambda w_\alpha = u^i_\alpha(x) \text{ em } M,$$

e desde que o segundo membro da equação é limitado em $L^{2^*}(M)$, independentemente de α, segue da teoria elíptica que os w_α's são limitados em $H^{2,2^*}(M)$. E da imersão de Sobolev, existe $p(n) > 2^*$ tal que

$$\| w_\alpha \|_{p_1} \leq C$$

para todo $2^* \leq p_1 \leq p(n)$, sendo $C > 0$ independente de α. De modo análogo, se definimos

$$w^i_{j,\alpha}(x) = \int_M H(x,y)|B^i_{j,\alpha}(y)|^{2^*-2}|\mathcal{U}_\alpha| \; dv_g(y),$$

teremos

$$-\Delta_g w^i_{j,\alpha} + \lambda w^i_{j,\alpha} = |B^i_{j,\alpha}(x)|^{2^*-2}|\mathcal{U}_\alpha| \text{ em } M.$$

Seja $1 < q < r$ tal que $\frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2^*}$. Pelas desigualdades de interpolação, segue que

$$\| (B^i_{j,\alpha})^{2^*-2} u^i_\alpha \|_q \leq \| (B^i_{j,\alpha})^{2^*-2} \|_r \left(\sum_{j=1}^k \| u^j_\alpha \|_{L^{2^*}(M)} \right) \leq C \| (B^i_{j,\alpha})^{2^*-2} \|_r$$

sendo $C > 0$ independente de α, i e j. Além disso, fazendo uso da expressão das bolhas escalares, podemos escrever para $\delta > 0$ suficientemente pequeno que

$$\int_M (B^i_{j,\alpha})^{(2^*-2)r} \; dv_g = \int_{B_\delta} (B^i_{j,\alpha})^{(2^*-2)r} \; dv_g + O(\left(\mu^i_{j,\alpha}\right)^{2r}),$$

sendo $B_\delta = B_\delta(x^i_{j,\alpha})$ e os $x^i_{j,\alpha}$'s e $\mu^i_{j,\alpha}$ os centros e os pesos das bolhas escalares $(B^i_{j,\alpha})$, além disso,

$$\int_M (B^i_{j,\alpha})^{(2^*-2)r} \; dv_g \leq C \left(\mu^i_{j,\alpha}\right)^{n-2r},$$

se $r > \frac{n}{4}$, sendo $C > 0$ independente de α, i e j. No caso particular em que $\frac{n}{4} < r < \frac{n}{2}$, temos

$$\int_M (B^i_{j,\alpha})^{(2^*-2)r} \; dv_g \leq C \left(\mu^i_{j,\alpha}\right)^{n-2r} \leq C \left(\mu_\alpha\right)^{n-2r}$$

em que $C > 0$ é independente de α, i e j. Segue novamente da teoria elíptica que os $w^i_{j,\alpha}$'s são limitados em $H^{2,q}(M)$ para $\frac{1}{q} = \frac{1}{r} + \frac{1}{2^*}$. Fazendo uso do Teorema da Imersão de Sobolev e da arbitrariedade de r em $\left(\frac{n}{4}, \frac{n}{2}\right)$ segue que

$$\| w^i_{j,\alpha} \|_{p_2} \leq C(\mu_\alpha^{-1})^{\frac{n}{2^*} - \frac{n}{p_2}},$$

para todo $p_2 \in \left(\frac{2n}{n+2}, 2^*\right)$, α, i e j, sendo $C > 0$ independente de α, i e j. Agora seja w^R_α a função definida por

$$w^R_\alpha(x) = \int_M H(x,y)|R^i_\alpha(y)|^{2^*-2}|\mathcal{U}_\alpha| \; dv_g(y).$$

Da definição dos w_α^R segue que

$$-\Delta_g w_\alpha^R + \lambda w_\alpha^R = |\mathcal{R}_\alpha(x)|^{2^*-2} |\mathcal{U}_\alpha| \text{ em } M,$$

aplicando o **Passo 2** a seguir à função

$$|\mathcal{U}_\alpha| = \sum_{j=1}^{k} |u_\alpha^j|$$

e do fato que $R_\alpha \to 0$ em $H^{1,2}(M)$ quando $\alpha \to +\infty$, para $\frac{2^*}{2} < p_2 < 2^* < p_1$ podemos escrever

$$\| w_\alpha^R \|_{p_1,p_2,\mu_\alpha^{-1}} \leq C \sum_{i=1}^{k} \| (R_\alpha^i)^{2^*-2} \|_{\frac{n}{2}} \| |\mathcal{U}_\alpha| \|_{p_1,p_2,\mu_\alpha^{-1}} = o(\| |\mathcal{U}_\alpha| \|_{p_1,p_2,\mu_\alpha^{-1}})$$

para todo α, i e todo p_1, p_2 tais que $p_0(n) < p_2 < 2^* < p_1 < p(n)$, sendo $p_0(n)$ e $p(n)$ como definidos acima e $C > 0$ independente de α e i. $\square$

Demonstração do Passo 2. Sejam $\Lambda > 0$ e v tais que $\| v \|_{p_1,p_2,\sigma} < \Lambda$, então existem $v_1, v_2 \in L^\infty(M)$ tais que,

$$v \leq v_1 + v_2, \ \| v_1 \|_{p_1} \leq \Lambda \text{ e } \ \| v_2 \|_{p_2} \leq \Lambda \sigma^{\frac{n}{2^*} - \frac{n}{p_2}}.$$

Sejam u_1 e u_2 funções tais que

$$-\Delta_g u_i + \lambda u_i = K v_i \text{ em } M, \ i = 1, 2.$$

Então u_1 e u_2 são funções não-negativas em $H^{2,p}(M)$, $\ p > 1$, em particular, $u_1, u_2 \in L^\infty(M)$, daí

$$-\Delta_g(u - u_1 - u_2) + \lambda((u - u_1 - u_2)) = K(v - v_1 - v_2) \leq 0 \text{ em } M,$$

e resulta do princípio do máximo que $u \leq u_1 + u_2$. Agora, sejam q_1 e q_2 tais que $\frac{1}{q_i} = \frac{1}{p_i} + \frac{2}{n}$, $i = 1, 2$. Desde que $p_i > \frac{2^*}{2}$, obtemos $q_i > 1$ e

$$\| K v_i \|_{q_i} \leq \| K \|_{\frac{n}{2}} \| v_i \|_{p_i} .$$

Da definição dos u_i's, da teoria elíptica e da imersão de Sobolev segue que

$$\| u_i \|_{p_i} \leq C \| u_i \|_{H^{2,q_i}} \leq C \| K v_i \|_{q_i} \leq C \| K \|_{\frac{n}{2}} \| v_i \|_{p_i}, \ \ i = 1, 2,$$

sendo $C > 0$ dependente apenas da variedade, λ, p_1 e p_2. De $u \leq u_1 + u_2$, teremos $\| u \|_{p_1,p_2,\sigma} \leq C \| K \|_{\frac{n}{2}} \Lambda$ e como $\Lambda > \| v \|_{p_1,p_2,\sigma}$ é qualquer, o resultado está provado. $\square$

Demonstração do Passo 3. Para $\Lambda > \max(\| v \|_{p_1,p_2,\sigma}, \| w \|_{p_1,p_2,\sigma})$ existem funções não-negativas $f_i,\ f_i' \in L^\infty(M),\ i = 1,2$ tais que

$$v \leq f_1 + f_2,\ \| f_1 \|_{p_1} \leq \Lambda,\ \| f_2 \|_{p_2} \leq \Lambda\sigma^{\frac{n}{2^*}-\frac{n}{p_2}}, \qquad \text{e}$$

$$|w| \leq f_1' + f_2',\ \| f_1' \|_{p_1} \leq \Lambda,\ \| f_2' \|_{p_2} \leq \Lambda\sigma^{\frac{n}{2^*}-\frac{n}{p_2}}.$$

Tomamos $D = D(n) > 0$ tal que

$$v^{2^*-1} + w \leq v^{2^*-1} + |w| \leq \underbrace{D\left((f_1 + f_1')^{2^*-1} + 1\right)}_{H_1} + \underbrace{D(f_2 + f_2')^{2^*-1}}_{H_2},$$

e então definimos u_1 e u_2 por

$$-\Delta_g u_i + \lambda u_i = H_i \text{ em } M,\ i = 1,2.$$

Temos como consequência que u_1 e u_2 são funções não-negativas em $H^{2,p}(M)$, $p > 1$ e em particular $u_1, u_2 \in L^\infty(M)$. Novamente pela teoria elíptica e a imersão de Sobolev, obtemos

$$\| u_i \|_{q_i} \leq C \| u_i \|_{H^{2,\tilde{p}_i}} \leq C \| H_i \|_{\tilde{p}_i},\ \ i = 1,2,$$

sendo $\frac{1}{q_i} = \frac{1}{\tilde{p}_i} - \frac{2}{n}$, $\tilde{p}_i = \frac{p_i}{2^*-1}$ e $C > 0$ dependente apenas da variedade, λ, p_1 e p_2. Da hipótese sobre u e das desigualdades obtidas acima para v e w, obtemos

$$-\Delta u + \lambda u \leq H_1 + H_2 \text{ em } M,$$

das definições dos u_i's e do Princípio do Máximo obtemos $u \leq u_1 + u_2$. Além disso,

$$\begin{aligned}
(2^*-1)\left(\frac{n}{2^*} - \frac{n}{p_2}\right) &= \left(\frac{n}{2^*/(2^*-1)} - \frac{n}{p_2/(2^*-1)}\right) \\
&= \frac{n+2}{2} - \frac{n}{\tilde{p}_2} \\
&= \frac{n+2}{2} - n\left(\frac{1}{q_2} + \frac{2}{n}\right) \\
&= \frac{n-2}{2} - \frac{n}{q_2} \\
&= \frac{n}{2^*} - \frac{n}{q_2}.
\end{aligned}$$

Resultando em

$$\begin{aligned}
\| H_1 \|_{\tilde{p}_1} &= \| D\left((f_1+f_1')^{2^*-1}+1\right) \|_{\tilde{p}_1} \\
&\leq D \| (f_1+f_1')^{2^*-1} \|_{\tilde{p}_1} + D \| 1 \|_{\tilde{p}_1} \\
&\leq D \| 2^{2^*-2}(f_1)^{2^*-1} + 2^{2^*-2}(f_1')^{2^*-1} \|_{\tilde{p}_1} + D \| 1 \|_{\tilde{p}_1} \\
&\leq 2^{2^*-2} D \| (f_1)^{2^*-1} \|_{\tilde{p}_1} + 2^{2^*-2} D \| (f_1')^{2^*-1} \|_{\tilde{p}_1} + D\,(V_g(M))^{1/\tilde{p}_1} \\
&\leq \underbrace{2^{2^*-1} D\,(V_g(M))^{1/\tilde{p}_1}}_{C} \left(\Lambda^{2^*-1}+1\right)
\end{aligned}$$

e

$$\| H_2 \|_{\tilde{p}_2} = \| D(f_2+f_2')^{2^*-1} \|_{\tilde{p}_2} \leq \underbrace{2^{2^*-1} D\,(V_g(M))^{1/\tilde{p}_2}}_{C} \Lambda^{2^*-1}\sigma^{\frac{n}{2^*}-\frac{n}{q_2}},$$

ou seja, $\| H_1 \|_{\tilde{p}_1} \leq C\left(\Lambda^{2^*-1}+1\right)$ e $\| H_2 \|_{\tilde{p}_2} \leq C\Lambda^{2^*-1}\sigma^{\frac{n}{2^*}-\frac{n}{q_2}}$, sendo $C>0$ independente de u, v, w e σ. Como $\Lambda > \max\left(\| v \|_{p_1,p_2,\sigma}, \| w \|_{p_1,p_2,\sigma}\right)$ é arbitrário, as duas últimas desigualdades em conjunto com $u \leq u_1 + u_2$ aplicadas em

$$\| u_i \|_{q_i} \leq C \| u_i \|_{H^{2,\tilde{p}_i}} \leq C \| H_i \|_{\tilde{p}_i}, \quad i = 1, 2,$$

finalizam a demonstração do Passo 3. □

Demonstração do Passo 4. Provaremos por indução. Utilizando os passos 1 ao 3. Entretanto nos é útil a observação que se $\tilde{p}_1 \leq p_1$ então

$$\| u \|_{\tilde{p_1},p_2,\sigma} \leq \| u \|_{p_1,p_2,\sigma},$$

sendo $C>0$ uma constante que depende apenas da variedade. Comecemos fixando p_1 e p_2 tais que $\frac{2^*}{2} < p_2 < 2^* < p_1$, em seguida tomamos $p_0^1 > 2^*$ próximo de 2^*, e $l_0 \geq 1$, então definimos uma sequência crescente $(p_1^l)_l$ por

$$\frac{1}{p_1^{l+1}} = \frac{2^*-1}{p_1^l} - \frac{2}{n}$$

tal que $p_1^l < \theta(n)$, sendo $\theta(n)$ o mesmo o Passo 3, e para todo $l \leq l_0$ e $p_1^{l_0+1} \geq \theta(n)$. Analogamente, para $p_0^2 < 2^*$ próximo de 2^*, definimos uma sequência decrescente $(p_2^l)_l$ por

$$\frac{1}{p_2^{l+1}} = \frac{2^*-1}{p_2^l} - \frac{2}{n}.$$

Escolhemos p_2^0 tal que $p_2^{l_0+1} = p_2$. Como $p_2 > \frac{2^*}{2}$, obtemos $p_2^l > 2^*-1$ para todo $l \leq l_0+1$.

Quão próximo for $p_0^1 > 2^*$ de 2^*, maior será o valor de l_0 e por consequência, mais próximo deverá ser $p_0^2 < 2^*$ de 2^*. Em particular, podemos assumir que $p_0^2 < \frac{2^*}{2^*-1}$. Fixamos $\lambda > 0$ e, como no Passo 1, escrevemos

$$-\Delta_g u_\alpha^i + \lambda u_\alpha^i = \frac{1}{2^*}\partial_i F_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) + w^i,$$

para todo i e todo α, sendo $w^i = \lambda u_\alpha^i - \frac{1}{2}\partial_i G_\alpha(x,\mathcal{U}_\alpha)$. Das hipóteses de convergência dos G_α's, existe $C > 0$ tal que $\| w \|_{C^0} \leq C$, para todo i, j e α. E dos passos 1 ao 3, a menos de subsequência, existe $C > 0$ tal que

$$\| u_\alpha^i \|_{p_1^{l_0+1}, p_2^{l_0+1}, \mu_\alpha^{-1}} \leq C,$$

para todo i e α. Em particular, $\| u_\alpha^i \|_{\tilde{p}_1, p_2^{l_0+1}, \mu_\alpha^{-1}} \leq C$, para todo $\tilde{p}_1 < \theta(n)$ tão próximo quanto queiramos de $\theta(n)$. Utilizando o Passo 3 mais uma vez, obtemos

$$\| u_\alpha^i \|_{\hat{p}_1, p_2^{l_0+1}, \mu_\alpha^{-1}} \leq C,$$

em que $\hat{p}_1 \to +\infty$ quando $\tilde{p}_1 \to \theta(n)$. Escolhendo $\hat{p}_1$ suficientemente próximo de $\theta(n)$, podemos supor,a menos de subsequência, que $\hat{p}_1 \geq p_1$, e graças à desigualdade $\| u \|_{\tilde{p_1}, p_2, \mu_\alpha^{-1}} \leq \| u \|_{p_1, p_2, \mu_\alpha^{-1}}$, obtemos funções não-negativas $(v_{1,\alpha}^i)_\alpha$ e $(v_{2,\alpha}^i)_\alpha$ em $L^\infty(M)$ tais que

$$u_\alpha^i \leq v_{1,\alpha}^i + v_{2,\alpha}^i,\ \| v_{1,\alpha}^i \|_{p_1} \leq C \text{ e } \| v_{2,\alpha}^i \|_{p_2} \leq C\mu_\alpha^{\frac{n}{p_2} - \frac{n}{2^*}}.$$

O que conclui o Passo 4. □

Demonstração do Passo 5. Pelo Teorema de Comparação de Bishop-Gromov (veja [Ch], página 133) existe uma constante $C > 0$ tal que $V_g(B_{x_\alpha}(r)) \leq Cr^n$ para todo α e $r > 0$, sendo B_{x_α} a bola geodésica de centro x_α e raio r em M. Por $(S_{2,\alpha})$

$$\begin{aligned}
\int_{B_{x_\alpha}(r)} (-\Delta u_\alpha^i)\, dv_g &= \frac{1}{2^*}\int_{B_{x_\alpha}(r)} \partial_i F(\mathcal{U}_\alpha)\, dv_g - \frac{1}{2}\int_{B_{x_\alpha}(r)} \partial_i G(x,\mathcal{U}_\alpha)\, dv_g \\
&\leq C\sum_{i=1}^{k}\int_{B_{x_\alpha}(r)} \left(|u_\alpha^i|^{2^*-1} + C'\right)\, dv_g \\
&\leq Cr^n + C\sum_{i=1}^{k}\int_{B_{x_\alpha}(r)} |u_\alpha^i|^{2^*-1}\, dv_g
\end{aligned}$$

O Passo 4 aplicado a $\mathcal{U}_\alpha$, com $p_1 = n(2^*-1)$ e $p_2 = 2^*-1$, nos dá

$$\begin{aligned}\int_{B_{x_\alpha}(r)} |u_\alpha^i|^{2^*-1}\, dv_g &\leq \int_{B_{x_\alpha}(r)} |v_{1,\alpha}^i + v_{2,\alpha}^i|^{2^*-1}\, dv_g \\ &\leq 2^{2^*-2}\left(\int_{B_{x_\alpha}(r)} (v_{1,\alpha}^i)^{2^*-1}\, dv_g + \int_{B_{x_\alpha}(r)} (v_{1,\alpha}^i)^{2^*-1}\, dv_g\right)\end{aligned}$$

fazendo uso da desigualdade de Hölder nesta última desigualdade, obtemos

$$\begin{aligned}\int_{B_{x_\alpha}(r)} (-\Delta u_\alpha^i)\, dv_g &\leq 2^{2^*-2} \parallel v_{1,\alpha}^i \parallel_{p_1}^{2^*-1} (V_g(B_{x_\alpha}(r)))^{\frac{n-1}{n}} + 2^{2^*-2} \parallel v_{2,\alpha}^i \parallel_{p_2}^{2^*-1} \\ &\leq 2^{2^*-2} \parallel v_{1,\alpha}^i \parallel_{p_1}^{2^*-1} (V_g(B_{x_\alpha}(r)))^{\frac{n-1}{n}} + 2^{2^*-2} C \left(\mu_\alpha^{\frac{n}{p_2}-\frac{n}{2^*}}\right)^{2^*-1} \\ &\leq C\,(r^n)^{\frac{n-1}{n}} + C'\mu_\alpha^{\frac{n-2}{2}}\end{aligned}$$

Ou seja, existem constantes C_1, C_2 tais que

$$\int_{B_{x_\alpha}(r)} (-\Delta u_\alpha^i)\, dv_g \leq C_1 r^{n-1} + C_2 \mu_\alpha^{\frac{n-2}{2}},$$

para todo α, i, e $r > 0$ pequeno. Dado $x_0 \in M$, existe uma função suave β_{x_0} em M, tal que

$$\frac{d}{dr}\left(\frac{1}{r^{n-1}}\int_{\partial B_{x_0(r)}} u\, d\sigma_g\right) = \frac{1}{r^{n-1}}\int_{\partial B_{x_0(r)}} \frac{\partial u}{\partial \nu}\, d\sigma_g + \frac{1}{r^{n-1}}\int_{\partial B_{x_0(r)}} \beta_{x_0} u\, d\sigma_g$$

sendo ∂B_{x_0} o bordo da bola geodésica B_{x_0}, $d\sigma_g$ a medida em ∂B_{x_0} induzida por g, $\frac{\partial}{\partial\nu}$ a derivada normal em relação ao vetor normal unitário exterior ν. Sendo β_{x_0} da ordem de $O(d_g(x, x_0))$ ([Ch]) e o segundo termo da última igualdade válido para funções C^1 em M tais que suas derivadas de ordem l são limitadas por $Cd_g(x, x_0)^{1-l}$, $l = 0, 1$, e sendo C independente de x e x_0. Para $i = 1, 2, \ldots, k$, $\delta > 0$ suficientemente pequeno, definimos $\Phi_\alpha^i : (0, \delta) \to \mathbb{R}$ por

$$\Phi_\alpha^i(r) = \frac{1}{r^{n-1}}\int_{\partial B_{x_0(r)}} u_\alpha^i\, dv_g$$

e pelos cálculos acima, teremos

$$\frac{d}{dr}\Phi_\alpha^i(r) = \frac{1}{r^{n-1}}\int_{\partial B_{x_0(r)}} (\Delta u_\alpha^i)\, dv_g + H_\alpha^i(r)\Phi_\alpha^i(r),$$

para todo α, i e $r > 0$ suficientemente pequeno, sendo os H_α^i's uniformemente limitados em relação à α e r. Usando o fato que $u_\alpha^i \to 0$ em $C_{loc}^0(M/\mathfrak{S})$, obtemos $\delta > 0$ com a propriedade de que os $\Phi_\alpha^i(\delta)$'s são uniformemente limitados em relação à α. Integrando a última equação entre r e δ, $0 < r < \delta$, obtemos

$$- \Phi_\alpha^i(s)\mathrm{e}^{\int_0^s H_\alpha^i(t)\ dt}\Big|_r^\delta = \int_r^\delta \left(\frac{\mathrm{e}^{\int_0^s H_\alpha^i(t)\ dt}}{s^{n-1}} \int_{\partial B_{x_0}(s)} (-\Delta u_\alpha^i)\ dv_g \right) ds,$$

ou

$$\Phi_\alpha^i(s)\mathrm{e}^{\int_0^s H_\alpha^i(t)\ dt}\Big|_\delta^r = \int_r^\delta \frac{\mathrm{e}^{\int_0^s H_\alpha^i(t)\ dt}}{s^{n-1}} \underbrace{\int_{\partial B_{x_0}(s)} (-\Delta u_\alpha^i)\ dv_g}_{\leq C_1 s^{n-1} + C_2 \mu_\alpha^{\frac{n-2}{2}}} ds,$$

então

$$\Phi_\alpha^i(r)\mathrm{e}^{\int_0^r H_\alpha^i(t)\ dt} \leq \Phi_\alpha^i(\delta)\mathrm{e}^{\int_0^\delta H_\alpha^i(t)\ dt} + \int_r^\delta \frac{\mathrm{e}^{\int_0^s H_\alpha^i(t)\ dt}}{s^{n-1}} \left(C_1 s^{n-1} + C_2 \mu_\alpha^{\frac{n-2}{2}} \right) ds,$$

$$\Phi_\alpha^i(r) \leq C_3 + \frac{C_4 \mu_\alpha^{\frac{n-2}{2}}}{r^{n-2}},$$

o que prova o **Passo 5**. □

O próximo passo dá a conclusão do Teorema 1.5.

Demonstração do Passo 6. Seja $g_\alpha(x) = (\exp_{x_\alpha}^* g)(\sqrt{\mu_\alpha} x)$, sendo $x \in \mathbb{R}^n$ e x_α, μ_α dados por (C_α) e (P_α), respectivamente. Observemos ainda que os $\tilde{u}_\alpha^i$'s são soluções dos sistemas

$$-\Delta_{g_\alpha} \tilde{u}_\alpha^i + \frac{\mu_\alpha}{2} \partial_i \tilde{G}_\alpha(x, \tilde{\mathcal{U}}_\alpha) = \frac{\mu_\alpha}{2^*} \partial_i F_\alpha(\tilde{\mathcal{U}}_\alpha) \text{ em } M, \tag{3.23}$$

em que $\tilde{G}_\alpha(x, \cdot) = G(\exp_{x_\alpha}(\sqrt{\mu_\alpha} x), \cdot)$. De acordo com (3.5), novamente a menos de passagem a uma subsequência, podemos assumir que para todo i e j que, ou existe $C > 0$ tal que $d_g(x_{j,\alpha}^i, x_\alpha) \leq C\sqrt{\mu_\alpha}$, ou $\dfrac{d_g(x_{j,\alpha}^i, x_\alpha)}{\mu_\alpha} \to +\infty$, quando $\alpha \to +\infty$. Seja

$$\mathcal{A} = \{i, j :\ d_g(x_{j,\alpha}^i, x_\alpha) \leq C\sqrt{\mu_\alpha},\ \forall \alpha\}$$

e

$$\hat{\mathcal{S}} = \left\{ \lim_{\alpha \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{\mu_\alpha}} \exp_{x_\alpha}^{-1}(x_{j,\alpha}^i),\ i, j \in \mathcal{A} \right\},$$

a menos de subsequência, podemos assumir que os limites em $\hat{\mathcal{S}}$ existem. Tomando x_α no limite, vemos que $0 \in \hat{\mathcal{S}}$. Dado $0 < \delta < R$, tomamos $K = \overline{B}_0(R) \setminus \cup_{x \in \hat{\mathcal{S}}} B_x(\delta)$, sendo $\overline{B}_0(R)$ a bola Euclideana fechada de centro 0 e raio R. Observado que existe $M > 0$ tal que

$$\mu_\alpha \partial_i F_\alpha(\tilde{\mathcal{U}}_\alpha) \leq M \mu_\alpha |\tilde{u}_\alpha^i|^{2^*-1} = M \underbrace{\mu_\alpha |\tilde{u}_\alpha^i|^{2^*-2}}_{h_\alpha^i} \tilde{u}_\alpha^i$$

para todo α. Aplicamos o Teorema 1.2 a $\tilde{x}_\alpha$ e obtemos $C > 0$ tal que, para todo i e todo

$x \in K$, $|h^i_\alpha(x)| \leq C$ e essas estimativas nos dão que

$$h^i_\alpha \to 0 \text{ em } L^\infty(K). \tag{3.24}$$

Provemos (3.24): existe $C = C(K) > 0$, tal que $d_g(x^i_{j,\alpha}, \tilde{x}_\alpha) \geq C\sqrt{\mu_\alpha}$ para todo α, i e j, lembrando que μ_α é o maior dentre os pesos das bolhas, teremos

$$\frac{d_g(x^i_{j,\alpha}, \tilde{x}_\alpha)}{\mu^i_{j,\alpha}} \geq C\frac{\sqrt{\mu_\alpha}}{\mu^i_{j,\alpha}} \geq C\frac{\sqrt{\mu_\alpha}}{\mu_\alpha} = \frac{C}{\sqrt{\mu_\alpha}},$$

lembrando que $\mu_\alpha \downarrow 0$, quando $\alpha \to +\infty$ obtemos que

$$\frac{d_g(x^i_{j,\alpha}, \tilde{x}_\alpha)}{\mu^i_{j,\alpha}} \to +\infty \text{ em } L^\infty(K).$$

Por outro lado, pelo Teorema 1.2, existe $C > 0$ tal que

$$\left(\min_{i,j} d_g(x^i_{j,\alpha}, \tilde{x}_\alpha)\right)^{\frac{n-2}{2}} \sqrt{\sum_{i=1}^{k}(u^i_\alpha)^2} \leq C,$$

que nos dá a seguinte estimativa para u^i_α, $i = 1, \ldots, k$,

$$\left(\min_{i,j} d_g(x^i_{j,\alpha}, \tilde{x}_\alpha)\right)^{\frac{n-2}{2}} u^i_\alpha \leq C,$$

ou

$$\left(\min_{i,j} d_g(x^i_{j,\alpha}, \tilde{x}_\alpha)\right) \left(u^i_\alpha\right)^{\frac{2}{n-2}} \leq C,$$

assim,

$$\frac{\min_{i,j} d_g(x^i_{j,\alpha}, \tilde{x}_\alpha)}{\mu_\alpha}\mu_\alpha \left(u^i_\alpha\right)^{\frac{2}{n-2}} \leq C,$$

e segue da definição de μ_α que

$$\min_{i,j} \frac{d_g(x^i_{j,\alpha}, \tilde{x}_\alpha)}{\mu_\alpha}\sqrt{h^i_\alpha} \leq C,$$

que passando ao limite, vemos que $h^i_\alpha \to 0$ em $L^\infty(K)$.

Afirmação: *Para quaisquer $0 < \delta_1 < \delta_2$ e $p \in (1, \frac{n}{n-2})$, existe $C = C(\delta_1, \delta_2, p) > 0$ tal que*

$$\int_{R(\delta_1,\delta_2)} (\tilde{u}^i_\alpha)^p \, dv_{g_\alpha} \leq C \tag{3.25}$$

Sendo $R(\delta_1, \delta_2)$ o anel Euclideano de centro na origem e raios δ_1 e δ_2.

Demonstração da Afirmação. Fixados $0 < \delta_1 < \delta_2$ e $p \in (1, \frac{n}{n-2})$, seja $A(\alpha, \delta_1, \delta_2)$ o anel em M de centro x_α e raios $\delta_1\sqrt{\mu_\alpha}$ e $\delta_2\sqrt{\mu_\alpha}$. Pela estimativa integral (3.22) dada no **Passo 5** podemos escrever

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}_g(A(\alpha, \delta_1, \delta_2))} \int_{A(\alpha,\delta_1,\delta_2)} u_\alpha^i \, dv_g \leq C \tag{3.26}$$

para todo α e todo i e C é uma constante independente de α e i. Recordando que

$$-\Delta_g u_\alpha^i + \frac{1}{2}\partial_i G(x, \mathcal{U}_\alpha) = \frac{1}{2^*}\partial_i F(\mathcal{U}_\alpha) \text{ em } M, i = 1, \dots, k,$$

das hipóteses sobre F_α e G_α aliadas às estimativas integrais da demonstração de (3.22), obtemos

$$\int_{A(\alpha,\delta_1,\delta_2)} (-\Delta_g u_\alpha^i) \, dv_g \leq C\mathrm{Vol}_g(A(\alpha, \delta_1, \delta_2)) + C\sum_{l=1}^{k} \int_{A(\alpha,\delta_1,\delta_2)} (u_\alpha^l)^{2^*-1} \, dv_g.$$

O **Passo 4** aplicado aos $\mathcal{U}_\alpha$'s com $p_1 = (2^* - 1)n$ e $p_2 = 2^* - 1$ nos dá $C > 0$ e sequências de funções não negativas $(v_{1,\alpha}^j)$ e $(v_{2,\alpha}^j)$ satisfazendo

$$\| v_{1,\alpha}^j \|_{p_1} \leq C \text{ e } \| v_{2,\alpha}^j \|_{p_2} \leq C\mu_\alpha^{\frac{n}{p_2} - \frac{n}{2^*}},$$

para todo α e todo i. Pelas desigualdades de Young e Hölder,

$$\begin{aligned}
\int_{A(\alpha,\delta_1,\delta_2)} (u_\alpha^i)^{2^*-1} \, dv_g &\leq C\int_{A(\alpha,\delta_1,\delta_2)} (v_{1,\alpha}^i)^{2^*-1} \, dv_g + C\int_{A(\alpha,\delta_1,\delta_2)} (v_{2,\alpha}^i)^{2^*-1} \, dv_g \\
&\leq C \| v_{1,\alpha}^i \|_{p_1}^{2^*-1} \mathrm{Vol}_g(A(\alpha, \delta_1, \delta_2)^{\frac{n-1}{n}} + C\left(\mu_\alpha^{\frac{n}{p_2} - \frac{n}{2^*}}\right)^{2^*-1} \\
&\leq C\mathrm{Vol}_g(A(\alpha, \delta_1, \delta_2))^{\frac{n-1}{n}} + C\mu_\alpha^{\frac{n-2}{2}}
\end{aligned}$$

Sendo as constantes positivas acima independentes de α e i. Juntando o último resultado à (3.26), obtemos

$$\int_{A(\alpha,\delta_1,\delta_2)} (-\Delta_g u_\alpha^i) \, dv_g \leq C\mathrm{Vol}_g(A(\alpha, \delta_1, \delta_2)) + C\mathrm{Vol}_g(A(\alpha, \delta_1, \delta_2))^{\frac{n-1}{n}} + C\mu_\alpha^{\frac{n-2}{2}},$$

ou seja

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}_g(A(\alpha,\delta_1,\delta_2))}\int_{A(\alpha,\delta_1,\delta_2)}(-\Delta_g u_\alpha^i)\ dv_g \ \leq\ C + C\mathrm{Vol}_g(A(\alpha,\delta_1,\delta_2))^{\frac{1}{n}}$$

$$+C\frac{\mu_\alpha^{\frac{n-2}{2}}}{\mathrm{Vol}_g(A(\alpha,\delta_1,\delta_2))}$$

Fazendo uso do Teorema de Bishop-Gromov, teremos que $A(\alpha,\delta_1,\delta_2)$ é da ordem de $\mu_\alpha^{\frac{n}{2}}$ e daí que

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}_g(A(\alpha,\delta_1,\delta_2))}\int_{A(\alpha,\delta_1,\delta_2)}(-\Delta_g u_\alpha^i)\ dv_g \leq C + C(\delta_1,\delta_2)\mu_\alpha^{-\frac{1}{2}} + C(\delta_1,\delta_2)\mu_\alpha^{-1}.$$

Como $\mu_\alpha \to 0$, podemos escrever

$$\frac{1}{\mathrm{Vol}_g(A(\alpha,\delta_1,\delta_2))}\int_{A(\alpha,\delta_1,\delta_2)}(-\Delta_g u_\alpha^i)\ dv_g \leq C + C(\delta_1,\delta_2)\mu_\alpha^{-1},$$

obtendo

$$\int_{R(\delta_1,\delta_2)}(-\Delta_{\tilde g_\alpha}\tilde u_\alpha^i)\ dv_{\tilde g_\alpha} \leq C\mu_\alpha + C(\delta_1,\delta_2)$$

e

$$\int_{R(\delta_1,\delta_2)}\tilde u_\alpha^i\ dv_{\tilde g_\alpha} \leq C\mu_\alpha + C(\delta_1,\delta_2),$$

mais uma vez recordando que $\mu_\alpha \to 0$ conseguimos uma constante independente de α tal que

$$\int_{R(\delta_1,\delta_2)}(-\Delta_{\tilde g_\alpha}\tilde u_\alpha^i)\ dv_{\tilde g_\alpha} \leq C(\delta_1,\delta_2) \text{ e } \int_{R(\delta_1,\delta_2)}\tilde u_\alpha^i\ dv_{\tilde g_\alpha} \leq C(\delta_1,\delta_2), \tag{3.27}$$

para todo α e i, sendo $C(\delta_1,\delta_2) > 0$ é independente de α e i. Seja F_α^i a função tal que

$$F_\alpha^i = -\Delta_{\tilde g_\alpha} u \text{ em } R(\delta_1,\delta_2) \text{ e } F_\alpha^i = 0 \text{ fora de } R(\delta_1,\delta_2).$$

Dado $\delta > \delta_2$, seja H_α a função de Green de $-\Delta_{\tilde g_\alpha}$ em $B_0(\delta)$ com condição nula na fronteira. Daí escrevemos

$$v_i^\alpha(x) = \int_{B_0(\delta)} F_\alpha^i(y)H_\alpha(x,y)\ dv_{\tilde g_\alpha}(y)$$

Temos que existe $C > 0$ tal que

$$|H_\alpha(x,y)| \leq \frac{C}{|x-y|^{n-2}}$$

para todo $x \in R(\delta_1, \delta_2)$, todo $y \in B_0(\delta)$ e todo α. Dado $p \in \left(1, \frac{n}{n-2}\right)$, para q tal que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e para $\varphi \in L^q(R(\delta_1, \delta_2))$, então

$$
\begin{aligned}
\left|\int_{R(\delta_1,\delta_2)} v_i^\alpha \varphi \, dx\right| &\leq \int_{R(\delta_1,\delta_2)} |v_i^\alpha \varphi| \, dx \\
&\leq \int_{R(\delta_1,\delta_2)} \left|\left(\int_{B_0(\delta)} F_\alpha^i(y) H_\alpha(x,y) \, dv_{\tilde{g}_\alpha(y)}\right) \varphi\right| \, dx \\
&\leq \int_{R(\delta_1,\delta_2)} \left(\int_{R(\delta_1,\delta_2)} \frac{\varphi(x)}{|y-x|^{n-2}} \, dx\right) |F_\alpha^i(y)| \, dv_{\tilde{g}_\alpha(y)} \\
&\leq \int_{R(\delta_1,\delta_2)} \left(\int_{R(\delta_1,\delta_2)} \frac{\varphi(x)}{|y-x|^{n-2}} \, dx\right) |F_\alpha^i(y)| \, dy
\end{aligned}
$$

Por outro lado, $p < \frac{n}{n-2}$, o que nos dá pela desigualdade de Hölder que

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{R(\delta_1,\delta_2)} v_i^\alpha \varphi \, dx\right| \\
&\leq \| \varphi \|_{L^q} \left(\int_{R(\delta_1,\delta_2)} |v_i^\alpha|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq C \| \varphi \|_{L^q(R(\delta_1,\delta_2))} \int_{R(\delta_1,\delta_2)} \left(\int_{R(\delta_1,\delta_2)} \frac{dx}{|y-x|^{p(n-2)}}\right)^{\frac{1}{p}} |F_\alpha^i(y)| \, dy \\
&\leq C \| \varphi \|_{L^q(R(\delta_1,\delta_2))} \| F_\alpha^i \|_{L^1(R(\delta_1,\delta_2))} \\
&\leq C \| \varphi \|_{L^q(R(\delta_1,\delta_2))}
\end{aligned}
$$

sendo $C > 0$ independente de i, α e φ. A última desigualdade acima é uma consequência de (3.27). Então, escolhendo $\varphi = (v_\alpha^i)^{p-1}$, obtemos

$$\int_{R(\delta_1,\delta_2)} (v_\alpha^i)^p \, dx \leq C, \tag{3.28}$$

sendo $C > 0$ independente de i, α. Como $-\Delta_{g_\alpha}(v_\alpha^i - \tilde{u}_\alpha^i) = 0$ em $R(\delta_1, \delta_2)$, segue de De Giorgi-Nash-Moser que para $\Omega \subset\subset R(\delta_1, \delta_2)$,

$$\sup_\Omega |v_\alpha^i - \tilde{u}_\alpha^i| \leq C \| v_\alpha^i - \tilde{u}_\alpha^i \|_{L^1(R(\delta_1,\delta_2))} .$$

Combinando (3.27) e (3.28) acima, concluímos a afirmação. $\square$

Segue da Teoria Elíptica, que os $\tilde{u}^i_\alpha$'s são uniformemente limitados em $H^{2,p}(\Omega)$, para todo $p > 1$, para todo i e todo $\Omega \subset\subset \mathbb{R}^n \setminus \hat{\mathcal{S}}$ sendo

$$\hat{\mathcal{S}} = \left\{ \lim_{\alpha \to +\infty} \frac{1}{\sqrt{\mu_\alpha}} \exp^{-1}_{x_\alpha}(x^i_{j,\alpha}),\ i, j \in \mathcal{A} \right\}$$

e

$$\mathcal{A} = \{i, j :\ d_g(x^i_{j,\alpha}, x_\alpha) \leq C\sqrt{\mu_\alpha},\ \forall \alpha\}.$$

Pela imersão de Sobolev, podemos assumir, a menos de subsequência, que os $\tilde{u}^i_\alpha$'s convergem em $C^1_{loc}(\mathbb{R}^n \setminus \hat{\mathcal{S}})$ para alguma função não negativa $\tilde{u}_i$. Por (3.23), (3.24) e as hipóteses sobre F_α e G_α, os $\tilde{u}^i_\alpha$'s são funções harmônicas não-negativas em $\mathbb{R}^n \setminus \hat{\mathcal{S}}$. Escrevendo $\hat{\mathcal{S}} = \{x_1, \ldots, x_m\}$, com $x_1 = 0$, teremos pelo Teorema de Bôcher ([Ve], página 15) que, desde que os $\tilde{u}^i_\alpha$'s são funções harmônicas não-negativas em $\mathbb{R}^n \setminus \hat{\mathcal{S}}$, para cada i teremos uma função harmônica $\psi_i : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ e números A^i_j tais que

$$\tilde{u}_i(x) = \sum_{j=1}^{m} \frac{A^i_j}{|x - x_j|^{n-2}} + \psi_i(x) \tag{3.29}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n \setminus \hat{\mathcal{S}}$. Como $\tilde{u}_i \geq 0$, teremos que as funções ψ_i são limitadas por baixo e pelo Teorema de Liouville ([GbTd], pág. 29) que as funções ψ_i são constantes, teremos ainda que os números A^i_j são não-negativos. Reescrevendo

$$\sum_{j=1}^{m} \frac{A^i_j}{|x - x_j|^{n-2}} + \psi_i(x) = \frac{A_i}{|x|^{n-2}} + \underbrace{\sum_{j=2}^{m} \frac{A^i_j}{|x - x_j|^{n-2}} + \psi_i(x)}_{\varphi_i(x)},$$

teremos que

$$\tilde{u}^i_\alpha(x) \to \frac{A_i}{|x|^{n-2}} + \varphi_i(x)$$

em $C^1_{loc}(B_0(\delta) \setminus \{0\})$, para todo i, sendo $A_i = A^i_1 \geq 0$. □

Corolário 3.0.1. *Com as mesmas hipóteses do Teorema 1.4, para qualquer $\delta > 0$ existe $C > 0$ tal que, a menos de subsequência,*

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{B_{x_\alpha}(\delta\sqrt{\mu_\alpha})} (u^\alpha_i)^2\, dv_g \geq C\mu^2_\alpha,$$

Sendo $\mathcal{U}_\alpha = (u^\alpha_1, \ldots, u^\alpha_k)$, para todo α e x_α's e μ_α's dados por (C_α) e (P_α) definidos no Teorema1.5.

Demonstração. Sejam x_α e μ_α dados por (C_α) e (P_α). Pelo Teorema 1.4 existe $x_0 \in \mathbb{R}^n$ e $\delta_0 > 0$ tal que, a menos de subsequência, para todo i, $\hat{u}^i_\alpha \to u_i$ em $C^1(B_0(\delta_0))$ quando

$\alpha \to +\infty$, sendo $\hat{u}^i_\alpha$ dado por

$$\hat{u}^i_\alpha(x) = \mu_\alpha^{\frac{n-2}{2}} u(\exp_{\hat{x}_\alpha}(\mu_\alpha x)) \text{ e } \hat{x}_\alpha = \exp_{x_\alpha}(\mu_\alpha x_0),$$

além disso, cada um dos u_i's é não-negativo (não todos nulos) e são soluções da equação Euclideana $-\Delta u = u^{2^*-1}$ em $\mathbb{R}^n$. Para $\delta > 0$ dado e $\delta_1 = \frac{\delta_0}{2}$. Para α suficientemente grande, teremos $B_{x_\alpha}(\delta_1\sqrt{\mu_\alpha}) \subset B_{x_\alpha}(\delta\sqrt{\mu_\alpha})$. O que nos permite escrever

$$\sum_{i=1}^k \int_{B_{x_\alpha}(\delta\sqrt{\mu_\alpha})} (u_i^\alpha)^2 \, dv_g \geq \sum_{i=1}^k \int_{B_{x_\alpha}(\delta_1\sqrt{\mu_\alpha})} (u_i^\alpha)^2 \, dv_g = \mu_\alpha^2 \sum_{i=1}^k \int_{B_0(\delta_1)} (u_i^\alpha)^2 \, dv_{g_\alpha},$$

sendo $g_\alpha(x) = (\exp^*_{x_\alpha} g)(\mu_\alpha x)$. Relembremos que $g_\alpha \to \xi$ em $C^1(K)$ para qualquer $K \subset\subset \mathbb{R}^n$ quando $\alpha \to +\infty$. Temos ainda que $\hat{u}_i^\alpha \to u_i$ em $C^1(B_0(\delta_0))$, quando $\alpha \to +\infty$, como pelo menos um dos u_i's é uma função positiva, a menos de subsequência, podemos escrever

$$\sum_{i=1}^k \int_{B_0(\delta_1)} (u_i^\alpha)^2 \, dv_{g_\alpha} \geq \frac{1}{2} \sum_{i=1}^k \int_{B_0(\delta_1)} u_i^2 \, dx > 0.$$

Combinando as duas últimas equações, obtemos o resultado enunciado pelo corolário. $\square$

Trocando os x_α's nas estimativas (1.6) do Teorema 1.5 por $\hat{x}_\alpha = \exp_{x^{i_0}_{j_0,\alpha}}(\hat{\mu}_\alpha x_0)$ e $\hat{\mu}_\alpha = \mu^{i_0}_{j_0,\alpha}$, teremos tanto as estimativas dadas pelo Teorema 1.4, quanto as estimativas (1.6) do Teorema 1.5. Para vermos isso, assumiremos a hipótese da convergência C^1_{loc} das funções F_α e G_α. Necessitaremos ainda que μ_α seja o maior peso dentre todos os possíveis pesos $\mu^i_{j,\alpha}$ e x_α igual ao $x^i_{j,\alpha}$ correspondente. A menos de reordenação e subsequência, podemos assumir que $i = j = 1$. Então teremos a validade de (P_α) e (C_α). Para $x_0 \in \mathbb{R}^n$, definimos $\hat{x}_\alpha$ pela primeira equação em (1.4) quando $i_0 = j_0 = 1$. Escrevendo,

$$\hat{x}_\alpha = \exp_{x_\alpha}(\mu_\alpha x_0)$$

e definimos o reescalonamento padrão de u^i_α por

$$\hat{u}^i_\alpha(x) = \mu_\alpha^{\frac{n-2}{2}} u^i_\alpha(\exp_{\hat{x}_\alpha}(\mu_\alpha x_0))$$

como em (1.5), em que $x \in B_0(1)$, $i = 1, \ldots, k$, $\mathcal{U}_\alpha = (u^k_\alpha, \ldots, u^k_\alpha)$ e $\hat{x}_\alpha$ é como acima. Dado $R > 0$, seja $B_0(R)$ a bola Euclideana de centro 0 e raio R e sejam $\varphi_\alpha : B_0(R) \to \mathbb{R}^n$ as funções definidas por

$$f_\alpha(x) = \frac{1}{\sqrt{\mu_\alpha}} \exp^{-1}_{x_\alpha}(\exp_{\hat{x}_\alpha}(\sqrt{\mu_\alpha} x)).$$

Recordando que $\hat{x_\alpha} = \exp_{x_\alpha}(\mu_\alpha x_0)$, obtemos que

$$|f_\alpha(x) - x| \leq \frac{C}{\sqrt{\mu_\alpha}} \mathrm{d}_g(x_\alpha, \hat{x}_\alpha)$$

para todo $x \in B_0(R)$ e todo α. Em particular

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \left(\sup_{B_0(R)} |f_\alpha(x) - x| \right) = 0. \tag{3.30}$$

Escolhendo $R \gg 1$, obteremos do Teorema 1.5 e (3.30) que existe $\delta > 0$ e funções $\varphi_i : B_0(\delta) \to \mathbb{R},\ i = 1, \ldots, k$ tais que, a menos de subsequência, para cada i

$$\tilde{u}^i_\alpha(x) \to \frac{A_i}{|x|^{n-2}} + \varphi_i(x)$$

em $C^1_{loc}(B_0(\delta) \setminus \{0\})$ quando $\alpha \to +\infty$ e $\tilde{u}^i_\alpha$ são as funções reescalonadas por

$$\tilde{u}^i_\alpha(x) = u^i_\alpha(\exp_{\hat{x}_\alpha}(\sqrt{\mu_\alpha} x)),$$

$\hat{x_\alpha} = \exp_{x_\alpha}(\mu_\alpha x_0)$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ é qualquer. De modo independente, temos pelo Teorema 1.4, que após a escolha de x_0 apropriado e $\delta > 0$ pequeno, que $\hat{u}^i_\alpha \to u_i$ em $C^1(B_0(\delta))$ quando $\alpha \to +\infty$, sendo os $\hat{u}^i_\alpha$'s dados por (1.5) e os u_i's são soluções não-negativas (não todas triviais) de

$$-\Delta u = \frac{1}{2^*} \partial_i F(\mathcal{U}) \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Em particular, por uma pequena mudança dos x_α nas estimativas do Teorema 1.5, colocando-os como $\hat{x_\alpha} = \exp_{x_\alpha}(\mu_\alpha x_0)$, teremos ambas as estimativas $\hat{u}^i_\alpha \to u_i$ em $C^1(B_0(\delta))$ como no Teorema 1.4 e $\tilde{u}^i_\alpha(x) \to \frac{A_i}{|x|^{n-2}} + \varphi_i(x)$ em $C^1_{loc}(B_0(\delta) \setminus \{0\})$ quando $\alpha \to +\infty$ como no Teorema 1.5.

Capítulo 4

Demonstrações das contribuições Euclideanas

Neste capítulo justificaremos nossas contribuições à teoria de blow-up no contexto Euclideano. Apresentaremos as demonstrações do Teorema 2.1 e do Teorema 4.1 que classifica as soluções radiais positivas de

$$-\Delta_p \mathcal{U} = \frac{1}{p^*} \nabla F(\mathcal{U}) \text{ em } \mathbb{R}^n, \; i = 1, \dots, k.$$

sendo F uma função de classe C^1, p^*-homogênea e positiva em $\mathbb{R}^k \setminus \{0\}$. Algo de grande importância na teoria de blow-up é a determinação de soluções do sistema crítico do tipo potencial acima. O resultado que provamos, fornece uma classificação das soluções radiais positivas do sistema acima, o que fornece extensões de alguns resultados estudados em [Sw2], [DHR], [He1] e [DHV].

4.1 Demonstração do Teorema 2.1

Consideremos o problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta_p \mathcal{U} + \dfrac{1}{p} \nabla_{\mathcal{U}} G_\alpha(x, \mathcal{U}) = \dfrac{1}{p^*} \nabla F_\alpha(\mathcal{U}) \text{ em } \Omega \\ \\ \mathcal{U} = 0 \text{ em } \partial\Omega \end{cases} \tag{$S_{\Omega,p,\alpha}$}$$

e o problema "limite"

$$\begin{cases} -\Delta_p \mathcal{U} + \dfrac{1}{p} \nabla_{\mathcal{U}} G(x, \mathcal{U}) = \dfrac{1}{p^*} \nabla F(\mathcal{U}) \text{ em } \Omega \\ \\ \mathcal{U} = 0 \text{ em } \partial\Omega. \end{cases} \tag{$S_{\Omega,p,\infty}$}$$

Seja $I_{p,\alpha} : H^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}$ o funcional energia associado a $(S_{\Omega,p,\alpha})$

$$I_{p,\alpha}(\mathcal{U}) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla \mathcal{U}|^p \, dx + \frac{1}{p}\int_\Omega G_\alpha(x, \mathcal{U}) \, dx - \frac{1}{p^*}\int_\Omega F_\alpha(\mathcal{U}) \, dx$$

para todo $\mathcal{U} \in H^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k)$.

Uma sequência $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$ em $H^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ é dita de Palais-Smale para a sequência de funcionais $(I_{p,\alpha})_\alpha$, se

$$(I_{p,\alpha}(\mathcal{U}_\alpha))_\alpha \text{ é limitada,}$$

$$DI_{p,\alpha}(\mathcal{U}_\alpha) \to 0 \text{ em } H^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k)'.$$

O funcional energia $I_p : H^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}$ associado a $(S_{\Omega,p,\infty})$ é dado por

$$I_p(\mathcal{U}) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla \mathcal{U}|^p \, dx + \frac{1}{p}\int_\Omega G(x, \mathcal{U}) \, dx - \frac{1}{p^*}\int_\Omega F(\mathcal{U}) \, dx$$

para todo $\mathcal{U} \in H^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k)$. Denote por $L^q(\Omega, \mathbb{R}^k)$ o espaço de Lebesgue vetorial $L^q(\Omega) \times \ldots \times L^q(\Omega)$ munido da norma

$$\| \mathcal{U} \|_{L^q(\Omega,\mathbb{R}^k)} = \left(\int_\Omega |\mathcal{U}|^q \, dx\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Dada uma sequência de Palais-Smale para o funcional $I_{p,\alpha}$, afirmamos que, no caso especial das soluções radiais não-negativas, existem $l \in \mathbb{N}$, sequências $(\mu_{j_\alpha})_\alpha$ de números reais tais que $\mu^i_\alpha \to +\infty$ quando $\alpha \to +\infty$, sequências de pontos $(x^i_\alpha)_\alpha$ em Ω, $i = 1, \ldots, l$, uma solução $\mathcal{U}^0 \in H^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ do sistema,

$$-\Delta_p \mathcal{U} + \frac{1}{p}\nabla_{\mathcal{U}} G(x, \mathcal{U}) = \frac{1}{p^*}\nabla F(\mathcal{U}) \text{ em } \Omega$$

e l soluções não-triviais de $\mathcal{U}^j = (u^1_j, \ldots, u^k_j) \in D^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$, $j = 1, \ldots, l$, de

$$-\Delta_p \mathcal{U} = \frac{1}{p^*}\nabla F(\mathcal{U}) \text{ em } \mathbb{R}^n$$

tais que

$$\mathcal{U}_\alpha = \mathcal{U}^0 + \sum_{j=1}^{l} t^j_\alpha F(t^j_\alpha)^{-\frac{n-p}{p^2}} B_{j,\alpha} + o(1), \text{ e}$$

$$I_{p,\alpha}(\mathcal{U}_\alpha) = I_p(\mathcal{U}^0) + \sum_{i=1}^{l} I(\mathcal{U}^j) + o(1),$$

sendo

$$B_{j,\alpha}(x) = \mu_{j,\alpha}^{\frac{n-p}{p}} u(\mu_{j,\alpha}(x - x_\alpha)),$$

u solução radial positiva de

$$-\Delta_p u = |u|^{p^*-1}u \text{ em } \mathbb{R}^n,$$

$$I(\mathcal{U}) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\mathcal{U}|^p \, dx - \frac{1}{p^*}\int_{\mathbb{R}^n} F(\mathcal{U}) \, dx$$

e $t_\alpha^j \in \mathbb{S}_p^{k-1}$.

Dividiremos a demonstração do Teorema 2.1 em cinco passos e um Lema descritos abaixo.

Passo 1: *Sequências de Palais-Smale para a sequência de funcionais $I_{p,\alpha}$ são limitadas em $H^{1,p}(M, \mathbb{R}^k)$.*

Passo 2: *Seja $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$ sequência de Palais-Smale para $I_{p,\alpha}$ tal que $\mathcal{U}_\alpha \rightharpoonup \mathcal{U}^0$ em $H_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k) \subset D^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$, então $\mathcal{U}^0$ é solução fraca de $(S_{\Omega,p,\infty})$.*

Passo 3: *Dado $I : H^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k) \to \mathbb{R}$ o funcional energia*

$$I(\mathcal{U}) = \frac{1}{p}\int_{\Omega} |\nabla\mathcal{U}|^p \, dx - \frac{1}{p^*}\int_{\Omega} F(\mathcal{U}) \, dx$$

associado ao sistema

$$-\Delta_p\mathcal{U} = \frac{1}{p^*}\partial_i F(\mathcal{U}) \text{ em } \mathbb{R}^n.$$

Seja $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$ sequência de Palais-Smale para $I_{p,\alpha}$ tal que $\mathcal{U}_\alpha \rightharpoonup \mathcal{U}^0$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$. Então

$$I_{p,\alpha}(\mathcal{U}_\alpha) = I(\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0) + I_p(\mathcal{U}^0) + o(1)$$

e $(\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0)_\alpha$ é sequência de Palais-Smale para I.

No próximo passo $K_F(n,p)$ é a constante ótima de Sobolev da desigualdade

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} F(\mathcal{U}) \, dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \leq K \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\mathcal{U}|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}},$$

ou seja

$$K_F(n,p) = \sup\left\{\left(\int_{\mathbb{R}^n} F(\mathcal{U}) \, dx\right)^{\frac{1}{p^*}}, \, \mathcal{U} \in D^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k), \; \| \, \mathcal{U} \, \|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)} = 1, \right\}.$$

No artigo [BbMn3], E. Barbosa e M. Montenegro provam que $K_F(n,p) = M_F^{\frac{1}{p^*}} K(n,p)$, sendo M_F o máximo de F em $\mathbb{S}_p^{k-1}$ e $K(n,p)$ a constante ótima de Sobolev da desigualdade

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*} \, dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \leq K \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p \, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Passo 4: *Seja* $(\mathcal{V}_\alpha)_\alpha$ *uma sequência de Palais-Smale para* I *tal que* $\mathcal{V}_\alpha \rightharpoonup 0$ *em* $D^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ *e* $I_p(\mathcal{V}_\alpha) \to \beta$ *quando* $\alpha \to +\infty$. *Se*

$$\beta < \beta^* = n^{-1} K_F(n,p)^{-n}$$

então $\beta = 0$ *e* $\mathcal{V}_\alpha \to 0$ *em* $D^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ *quando* $\alpha \to +\infty$.

Passo 5. *Seja* $\mathcal{U} \in D^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ *solução não trivial do sistema crítico*

$$-\Delta_p \mathcal{U} = \frac{1}{p^*} \nabla F(\mathcal{U}), \ \ em \ \mathbb{R}^n.$$

Então o funcional energia, $I(\mathcal{U})$, *associado ao sistema acima acima satisfaz* $I(\mathcal{U}) \geq \beta^*$.

Dada uma sequência de pontos $(x_\alpha)_\alpha$ em Ω, uma sequência de números positivos $(R_\alpha)_\alpha$, tais que $R_\alpha \to +\infty$ quando $\alpha \to +\infty$, definimos bolhas vetoriais como uma sequência de aplicações em Ω, $(\hat{B}_\alpha)_\alpha$ definidas por

$$\hat{B}_\alpha(x) = R_\alpha^{\frac{n-p}{p}} \mathcal{V}(R_\alpha(x - x_\alpha)), \tag{4.1}$$

sendo $\mathcal{V}$ uma solução do sistema crítico Euclideano

$$-\Delta_p \mathcal{U} = \frac{1}{p^*} \nabla F(\mathcal{U}) \text{ em } \mathbb{R}^n. \tag{4.2}$$

Lema 4.0.1. *Seja* $(\mathcal{V}_\alpha)_\alpha$ *uma sequência de Palais-Smale para* I *tal que* $\mathcal{V}_\alpha \rightharpoonup 0$ *em* $D^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$, *mas não fortemente. Então existem bolhas vetoriais* $(\hat{\mathcal{B}}_\alpha)_\alpha$ *tais que, a menos de subsequência,* $\mathcal{W}_\alpha$, *com*

$$\mathcal{W}_\alpha = \mathcal{V}_\alpha - \hat{\mathcal{B}}_\alpha$$

é uma sequência de Palais-Smale para I , $\mathcal{V}_\alpha \rightharpoonup 0$ *em* $D^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$, *e*

$$I(\mathcal{W}_\alpha) = I(\mathcal{V}_\alpha) - I(\mathcal{V}) + o(1)$$

sendo $\mathcal{V} \in D^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ *uma solução do sistema*

$$-\Delta_p \mathcal{U} = \frac{1}{p^*} \nabla F(\mathcal{U}) \ \ em \ \mathbb{R}^n.$$

Iremos postergar as demonstrações dos Passos 1 a 5 e do Lema 4.0.1 para apresentar a

Demonstração do Teorema 2.1. Aplicando o Lema 4.0.1 às sequências

$$\mathcal{V}_\alpha^1 = \mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0 \text{ e } \mathcal{V}_\alpha^j = \mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0 - \sum_{l=1}^{j-1} (\mathcal{U}_\alpha^l)_{x_\alpha, R_\alpha} = \mathcal{V}_\alpha^{j-1} - \mathcal{U}_\alpha^{j-1},$$

sendo $(\mathcal{U}_\alpha^l)_{x_\alpha,R_\alpha} = R_\alpha^{\frac{n-p}{p}} \mathcal{U}^l(R_\alpha(\cdot - x_\alpha))$. Por indução e pelo Passo 4, teremos

$$I(\mathcal{V}_\alpha^j) = I_{p,\alpha}(\mathcal{U}_\alpha) - I_{p,\alpha}(\mathcal{U}^0) - \sum_{l=1}^{j-1} I(\mathcal{U}^l) \leq I_{p,\alpha}(\mathcal{U}_\alpha) - (j-1)\beta^*.$$

Prosseguindo a iteração, a quantidade no último membro da desigualdade anterior tornar-se-ia negativo para algum índice $m \geq 0$, pelo Lema 4.0.1 o processo termina para algum índice. Além disso, para esse índice, temos

$$\mathcal{V}_\alpha^{k+1} = \mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0 - \sum_{l=1}^{k} (\mathcal{U}_\alpha^l)_{x_\alpha,R_\alpha} \to 0$$

fortemente em $D^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ e

$$I_{p,\alpha}(\mathcal{U}_\alpha) - I_{p,\alpha}(\mathcal{U}^0) - \sum_{l=1}^{k} I(\mathcal{U}^l) \to 0.$$

A afirmação do Teorema 2.1 sobre o caso das soluções radiais positivas segue do Teorema 4.1. $\square$

É conhecido da literatura que as soluções radiais positivas da equação crítica

$$-\Delta_p u = u^{p^*-1} \text{ em } \mathbb{R}^n,$$

são da forma

$$u_a(x) = \left(n \cdot a \left(\frac{n-p}{p-1} \right)^{p-1} \right)^{\frac{n-p}{p^2}} (a + |x|^{\frac{p}{p-1}})^{-\frac{n-p}{p}},$$

para algum $a > 0$. A demonstração desse resultado pode ser encontrada em [GhYn].

Teorema 4.1. *Uma solução radial não-negativa de classe C^2 do sistema*

$$-\Delta_p \mathcal{U} = \frac{1}{p^*} \nabla F(\mathcal{U}) \text{ em } \mathbb{R}^n, \tag{S_p}$$

é da forma

$$\mathcal{U}(x) = t_0 \left(F(t_0)\right)^{-\frac{n-p}{p^2}} u(x),$$

sendo $t_0 \in S_p^{k-1} = \{t \in \mathbb{R}^k : \sum_{i=1}^k |t_i|^p = 1\}$ e u uma solução radial positiva da equação $-\Delta_p u = u^{p^*-1}$ em $\mathbb{R}^n$.

Demonstração. De acordo com [GhYn], as funções u_a são soluções de $-\Delta_p u = u^{p^*-1}$ em $\mathbb{R}^n$, ou seja, considerando o problema de maximização do funcional $I(g) = \int_0^\infty |g(r)|r^{n-1}\, dr$ quando $J(g) = \int_0^\infty r^{n-1}|g'(r)|^p\, dr = C$ sendo C uma constante dada; as funções u_a verificam a equação de Euler-Lagrange

$$r^{n-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r))_r + kr^{n-1}|u|^{p^*-1} = 0.$$

Nossa estratégia será verificar que as aplicações $\mathcal{U}$ propostas pelo Teorema 4.1 são soluções da equação de Euler-Lagrange de funções radiais positivas do sistema (S_p). Faremos isso reduzindo a equação de Euler-Lagrange correspondente à equação de Euler-Lagrange cujas soluções são as funções u_a estudadas em [GhYn].

Observemos que para quaisquer f e g, seja g^* a simetrização de Schwarz de g. Então temos,

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla g^*|^p\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla g|^p\, dx \text{ e } \int_{\mathbb{R}^n} f(g^*)\, dx \geq \int_{\mathbb{R}^n} f(g)\, dx.$$

Dessas inequações, podemos restringir o nosso estudo às funções radiais simétricas. Então podemos considerar o problema variacional:

Maximizar $I(g) = \int_0^\infty F(g(r))r^{n-1}\, dr$ quando $J(g) = \sum_{i=1}^k \int_0^\infty r^{n-1}|g_i'(r)|^p\, dr = C$, sendo C uma constante dada. A equação de *Euler-Lagrange* é dada por

$$\sum_{i=1}^k \big((r^{n-1}|u_i'(r)|^{p-2}u_i'(r))_r + k_i r^{n-1}\partial_i F(\mathcal{U}(r))\big) = 0,$$

a aplicação das soluções radiais propostas pelo Teorema reduz o problema acima a

$$r^{n-1}|u'(r)|^{p-2}u'(r))_r + kr^{n-1}|u|^{p^*-1} = 0,$$

cujas soluções radiais positivas ([GhYn]) são da forma u_a acima. $\square$

Observamos que há uma "semelhança" entre as soluções radiais positivas do sistema crítico (S_p) e as aplicações extremais da desigualdade

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} F(\mathcal{U})\, dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq C \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \mathcal{U}|^p\, dx.$$

E. Barbosa e M. Montenegro encontraram em [BbMn2] que as aplicações extremais dessa desigualdade são dadas por aplicações do tipo

$$t_0 u,$$

em que $t_0 \in \mathbb{S}_p^{k-1}$ é um ponto de máximo de F e u é uma função extremal da desigualdade

de Sobolev
$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*}\ dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p\ dx.$$

Dedicaremos o resto do capítulo para a demonstração dos Passos 1 a 4 e do Lema 4.0.1 do Teorema 4.1.

Demonstração do Passo 1. Seja $\mathcal{U}_\alpha$ uma sequência de Palais-Smale para o funcional I_p, então existe uma constante c tal que $I_p(\mathcal{U}_\alpha) \leq c$, além disso

$$DI_p(\mathcal{U}_\alpha) \cdot \mathcal{U}_\alpha = o(1),$$

sendo que $o(1) \to 0$ quando $\alpha \to +\infty$. Escrevendo

$$\begin{aligned} c + o(1) &\geq I_p(\mathcal{U}_\alpha) - \frac{1}{p} DI_p(\mathcal{U}_\alpha) \cdot \mathcal{U}_\alpha \\ &= \frac{1}{n} \int_\Omega F_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)\ dx \\ &\geq C \left(\int_\Omega |\mathcal{U}_\alpha|^p\ dx\right)^{\frac{p^*}{p}}. \end{aligned}$$

O que conclui a demonstração do passo 1. $\square$

Demonstração do Passo 2. A menos de subsequência, temos que $\mathcal{U}_\alpha \rightharpoonup \mathcal{U}^0$ em $H_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ e $\mathcal{U}_\alpha \to \mathcal{U}^0$ em $L^q(\Omega, \mathbb{R}^k)$ para todo $q < p^*$. Da definição de sequência de Palais-Smale, temos

$$\int_\Omega |\nabla \mathcal{U}_\alpha|^{p-2} \langle \nabla \mathcal{U}_\alpha, \nabla \Phi \rangle\ dx + \int_\Omega \nabla_{\mathcal{U}} G_\alpha(x, \mathcal{U}_\alpha) \cdot \Phi\ dx - \int_\Omega \nabla F(\mathcal{U}_\alpha) \cdot \Phi\ dx = o(1), \quad (4.3)$$

para qualquer $\Phi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^k)$, sendo

$$\int_\Omega |\nabla \mathcal{U}_\alpha|^{p-2} \langle \nabla \mathcal{U}_\alpha, \nabla \Phi \rangle\ dx = \sum_{i=1}^k \int_\Omega |\nabla u_\alpha^i|^{p-2} \langle \nabla u_\alpha^i, \nabla \phi_i \rangle\ dx.$$

As hipóteses sobre G_α e F_α permitem-nos, simplesmente, tomar o limite na segunda e terceira parcelas da igualdade (4.3) acima, restando-nos apenas mostrar que

$$\int_\Omega |\nabla \mathcal{U}_\alpha|^{p-2} \langle \nabla \mathcal{U}_\alpha, \nabla \Phi \rangle\ dx \to \int_\Omega |\nabla \mathcal{U}^0|^{p-2} \langle \nabla \mathcal{U}^0, \nabla \Phi \rangle\ dx$$

Seja

$$X_\alpha = |\nabla \mathcal{U}_\alpha|^{p-2} \nabla \mathcal{U}_\alpha = \sum_{i=1}^k |\nabla u_\alpha^i|^{p-2} \nabla u_\alpha^i$$

e

$$\Theta = |\nabla \mathcal{U}^0|^{p-2}\nabla \mathcal{U}^0 = \sum_{i=1}^{k} |\nabla u_0^i|^{p-2}\nabla u_0^i.$$

Então $(X_\alpha)_\alpha$ é limitada em $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega, \mathbb{R}^k)$, pois

$$\int_\Omega |X_\alpha|^{\frac{p}{p-1}}\ dx = \sum_{i=1}^{k} \int_\Omega \left(|\nabla u_\alpha^i|^{p-1}\right)^{\frac{p}{p-1}}\ dx = \int_\Omega |\nabla \mathcal{U}_\alpha|^p\ dx,$$

e, a menos de subsequência, $(X_\alpha)_\alpha$ converge fracamente em $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ para algum $X \in L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega, \mathbb{R}^k)$. Dado $\delta > 0$, segue do Teorema de Egorov que existe $E_\delta \subset \Omega$ tal que

$$\int_{\Omega \setminus E_\delta} dx < \delta$$

e $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$ converge uniformemente para $\mathcal{U}^0$ em E_δ. Consequentemente, dado $\varepsilon > 0$, podemos tomar α, suficientemente grande, tal que $|\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0| < \varepsilon/2$ em E_δ. Agora, defina a função $\beta_\varepsilon = (\beta_\varepsilon^1, \ldots, \beta_\varepsilon^k)$ por

$$\beta_\varepsilon(t) = t$$

se $|t| < \varepsilon$, e

$$\beta_\varepsilon(t) = \frac{\varepsilon t}{|t|}$$

se $|t| \geq \varepsilon$. Daí, encontramos que

$$\int_\Omega \langle X_\alpha - \Theta, \nabla(\beta_\varepsilon \circ (\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0))\rangle\ dx =$$

$$\textstyle\sum_{i=1}^{k} \displaystyle\int_\Omega \langle |\nabla u_\alpha^i|^{p-2}\nabla u_\alpha^i - |\nabla u_0^i|^{p-2}\nabla u_0^i, \nabla\left(\beta_\varepsilon \circ (\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0)\right)_i\rangle\ dx \geq 0$$

em quase todo ponto em Ω. Como na demonstração do Teorema 1.1, basta observar que a função $\kappa : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $\kappa(z) = |z|^p$, satisfaz

$$\langle |z|^{p-2}z - |w|^{p-2}w, z - w\rangle \geq 0,$$

pois $p > 1$. Segue então que para todo α suficientemente grande,

$$\int_{E_\delta} \langle X_\alpha - \Theta, \nabla(\beta_\varepsilon \circ (\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0))\rangle\ dx \leq \int_\Omega \langle X_\alpha - \Theta, \nabla(\beta_\varepsilon \circ (\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0))\rangle\ dx.$$

Note que $\beta_\varepsilon \circ (\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0)$ converge fracamente para zero em $H^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k)$, portanto

$$\int_\Omega \langle \Theta, \nabla(\beta_\varepsilon \circ (\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0))\rangle\ dx \to 0.$$

Temos também que, para α suficientemente grande,

$$\int_\Omega \langle X_\alpha, \nabla(\beta_\varepsilon \circ (\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0))\rangle \; dx < \varepsilon,$$

pois $(\beta_\varepsilon \circ (\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0))$ é limitada em $H^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k)$,

$$DI_{p,\alpha}(\mathcal{U}_\alpha)\left(\beta^i_\varepsilon \circ (\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0)\right) = o(1),$$

em que $o(1) \to 0$ quando $\alpha \to +\infty$. Portanto,

$$\int_\Omega \langle X_\alpha, \nabla(\beta_\varepsilon \circ (\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0))\rangle \; dx = o(1) + I_1 + I_2,$$

sendo

$$|I_1| = \left| \int_\Omega \nabla F_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) \cdot \left(\beta_\varepsilon \circ (\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0)\right) \; dx \right| \leq C\varepsilon$$

com C independente de α e, para α grande o suficiente,

$$\begin{aligned} |I_2| &\leq \left| \int_\Omega \nabla_{\mathcal{U}} G_\alpha(x, \mathcal{U}_\alpha) \cdot \beta_\varepsilon \circ (\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0) \; dx \right| \\ &\leq k\varepsilon(\max \parallel \partial_i G \parallel_\infty + 1) \int_\Omega |\mathcal{U}_\alpha|^{p-1} dx \leq C\varepsilon \end{aligned}$$

sendo C independente de α. Consequentemente, obtemos

$$\limsup_{\alpha \to +\infty} \int_{E_\delta} (X_\alpha - \Theta) \cdot \nabla(\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0) \; dx \leq C\varepsilon$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, segue que $\langle X_\alpha - \Theta, \nabla(\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0)\rangle \to 0$ em $L^1(E_\delta, \mathbb{R}^k)$ e, a menos de subsequência, converge para zero em quase todo ponto em E_δ. Agora, para obtermos que $\nabla\mathcal{U}_\alpha \to \nabla\mathcal{U}^0$ em quase todo ponto em E_δ, vamos usar que, se uma sequência $(z_\alpha)_\alpha \subset \mathbb{R}^n$ é tal que

$$\langle |z_\alpha|^{p-2} z_\alpha - |z|^{p-2} z, z_\alpha - z\rangle \to 0,$$

então $z_\alpha \to z$. Como $\delta > 0$ é arbitrário, isso implica que $\nabla\mathcal{U}_\alpha \to \nabla\mathcal{U}^0$ em quase todo ponto em Ω e, consequentemente, $X_\alpha \to \Theta$ em quase todo ponto em Ω. Como $(X_\alpha)_\alpha$ é limitada em $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega, \mathbb{R}^k)$, obtemos que

$$X_\alpha \rightharpoonup \Theta$$

em $L^{\frac{p}{p-1}}(\Omega, \mathbb{R}^k)$. Assim, $X = \Theta$. Portanto,

$$\int_\Omega |\nabla\mathcal{U}_\alpha|^{p-2} \langle \nabla\mathcal{U}_\alpha, \nabla\Theta\rangle \; dx \to \int_\Omega |\nabla\mathcal{U}^0|^{p-2} \langle \nabla\mathcal{U}^0, \nabla\Phi\rangle \; dx.$$

Por consequência teremos,

$$\int_\Omega |\nabla \mathcal{U}^0|^{p-2}\langle \nabla \mathcal{U}^0, \nabla \Phi\rangle \; dx + \int_\Omega \nabla_{\mathcal{U}} G(x, \mathcal{U}^0)\cdot \Phi \; dx = \int_\Omega \nabla F(\mathcal{U}^0)\Phi \; dx$$

para toda $\Phi \in C_0^\infty(\Omega, \mathbb{R}^k)$, provando que $\mathcal{U}^0$ é solução fraca de $(S_{\Omega,p,\infty})$. □

Demonstração do Passo 3. Por Brézis-Lieb generalizado, [BrLb],

$$|\nabla \mathcal{U}_\alpha|^p = |\nabla(\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0)|^p + |\nabla \mathcal{U}^0|^p + o(1)$$

e

$$F(\mathcal{U}_\alpha) = F(\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0) + F(\mathcal{U}^0) + o(1).$$

Então, começamos escrevendo,

$$\begin{aligned}
I_{p,\alpha}(\mathcal{U}_\alpha) &= I(\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0) + I_{p,\alpha}(\mathcal{U}^0) + \tfrac{1}{p}\underbrace{\int_\Omega (G_\alpha(x,\mathcal{U}_\alpha) - G_\alpha(x,\mathcal{U}^0)) \; dx}_{o(1)} \\
&\quad + \tfrac{1}{p^*}\textstyle\int_\Omega (F(\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0) - F_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) + F(\mathcal{U}^0)) \; dx + o(1) \\
&= I(\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0) + I_{p,\alpha}(\mathcal{U}^0) - \tfrac{1}{p^*}\underbrace{\int_\Omega (F_\alpha(\mathcal{U}_\alpha) - F(\mathcal{U}_\alpha)) \; dx}_{o(1)} + o(1) \\
&= I(\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0) + I_{p,\alpha}(\mathcal{U}^0) + o(1) \\
&= I(\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0) + I_p(\mathcal{U}^0) + o(1);
\end{aligned}$$

portanto, obtemos o resultado esperado. Quanto à afirmação de $(\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0)_\alpha$ ser uma sequência de Palais-Smale para I, com base no que acabou de ser mostrado,

$$I(\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0) = I_{p,\alpha}(\mathcal{U}_\alpha) - I_p(\mathcal{U}^0) + o(1) = O(1) + o(1),$$

provando a limitação de $(I(\mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0))_\alpha$. Para a afirmação relativa à convergência da derivada, recordemos que pelo Teorema da convergência dominada temos,

$$\int_\Omega \nabla F_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)\cdot \Phi \; dx = \int_\Omega \nabla F(\mathcal{U}^0)\cdot \Phi \; dx + o(1)$$

e

$$\int_\Omega \nabla_{\mathcal{U}} G_\alpha(x,\mathcal{U}_\alpha)\cdot \Phi \; dx = \int_\Omega \nabla_{\mathcal{U}} G(x,\mathcal{U}^0)\cdot \Phi \; dx + o(1).$$

Essas informações, além da decomposição de $|\nabla \mathcal{U}_\alpha|^q$ dada pelo lema de Brézis-Lieb generalizado, o fato que $\mathcal{U}^0$ é solução de $(S_{\Omega,p,\infty})$ e a convergência $\mathcal{U}_\alpha \rightharpoonup \mathcal{U}^0$, serão úteis no desenvolvimento a seguir. Pondo $\mathcal{V}_\alpha = \mathcal{U}_\alpha - \mathcal{U}^0$, calculemos

$$
\begin{aligned}
DI_{p,\alpha}(\mathcal{U}_\alpha)\cdot\Phi - DI(\mathcal{V}_\alpha)\cdot\Phi \;=\;& \int_\Omega \big(|\nabla\mathcal{U}_\alpha|^{p-2}\langle\nabla\mathcal{U}_\alpha,\nabla\Phi\rangle + \nabla_{\mathcal{U}}G_\alpha(x,\mathcal{U}_\alpha)\cdot\Phi\big)\ dx\\
& - \int_\Omega \nabla F_\alpha(\mathcal{U}_\alpha)\cdot\Phi\ dx - \int_\Omega |\nabla\mathcal{V}_\alpha|^{p-2}\langle\nabla\mathcal{V}_\alpha,\nabla\Phi\rangle\ dx\\
& - \int_\Omega \nabla F(\mathcal{V}_\alpha)\cdot\Phi\ dx\\
=\;& \int_\Omega \langle|\nabla\mathcal{V}_\alpha|^{p-2}\nabla\mathcal{U}^0 + |\nabla\mathcal{U}^0|^{p-2}\nabla\mathcal{V}_\alpha,\nabla\Phi\rangle\ dx\\
& + \int_\Omega \big(|\nabla\mathcal{U}^0|^{p-2}\langle\nabla\mathcal{U}^0,\nabla\Phi\rangle + \nabla_{\mathcal{U}}G(x,\mathcal{U}^0)\cdot\Phi\big)\ dx\\
& - \int_\Omega \nabla F(\mathcal{U}^0)\cdot\Phi\ dx + o(1)\parallel\Phi\parallel_{H^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^k)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
=\;& \int_\Omega \langle|\nabla\mathcal{V}_\alpha|^{p-2}\nabla\mathcal{U}^0 + |\nabla\mathcal{U}^0|^{p-2}\nabla\mathcal{V}_\alpha,\nabla\Phi\rangle\ dx\\
& + o(1)\parallel\Phi\parallel_{H^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^k)}\\
=\;& o(1)\parallel\Phi\parallel_{H^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^k)}\ .
\end{aligned}
$$

Concluindo que $(\mathcal{V}_\alpha)_\alpha$ é uma sequência de Palais-Smale para I. □

Demonstração do Passo 4. Escrevemos

$$DI(\mathcal{V}_\alpha)\mathcal{V}_\alpha = \int_\Omega |\nabla\mathcal{V}_\alpha|^p\ dx - \int_\Omega F(\mathcal{V}_\alpha)\ dx = o(1)$$

e

$$I(\mathcal{V}_\alpha) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla\mathcal{V}_\alpha|^p\ dx - \frac{1}{p^*}\int_\Omega F(\mathcal{V}_\alpha)\ dx = \beta + o(1).$$

Daí, calculando $I(\mathcal{V}_\alpha) - \frac{1}{p}DI(\mathcal{V}_\alpha)\mathcal{V}_\alpha$ e $I(\mathcal{V}_\alpha) - \frac{1}{p^*}DI(\mathcal{V}_\alpha)\mathcal{V}_\alpha$, obtemos

$$\int_\Omega F(\mathcal{V}_\alpha)\ dx = n\beta + o(1)$$

e

$$\int_\Omega |\nabla\mathcal{V}_\alpha|^p\ dx = n\beta + o(1).$$

Donde obtemos que $\beta \geq 0$. Pela compacidade da imersão $H^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^k) \hookrightarrow L^p(\Omega,\mathbb{R}^k)$

podemos assumir $\mathcal{V}_\alpha \to 0$ em $L^p(\Omega, \mathbb{R}^k)$. Temos a desigualdade

$$\left(\int_\Omega F(\mathcal{V}_\alpha)\, dx \right)^{\frac{p}{p^*}} \leq K_F(n,p)^p \int_\Omega |\nabla \mathcal{V}_\alpha|^p \, dx.$$

E então, passando o limite, obtemos

$$(n\beta)^{\frac{p}{p^*}} \leq K_F(n,p)^p n\beta.$$

Se supomos $\beta > 0$, teremos

$$(n\beta)^{\frac{p}{p^*}-1} = (n\beta)^{-\frac{p}{n}} \leq K_F(n,p)^p.$$

Então obtemos,

$$K_F(n,p)^p = (n\beta^*)^{-\frac{p}{n}} < (n\beta)^{-\frac{p}{n}} \leq K_F(n,p)^p,$$

que é um absurdo. Portanto $\beta = 0$ e a equação

$$\int_\Omega |\nabla \mathcal{V}_\alpha|^p \, dx = n\beta + o(1),$$

nos mostra que

$$\int_\Omega |\nabla \mathcal{V}_\alpha|^p \, dx = o(1).$$

Logo $\mathcal{V}_\alpha \to 0$ em $L^p(\Omega, \mathbb{R}^k)$ e a última expressão mostra que $\mathcal{V}_\alpha \to 0$ em $H^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k)$, concluindo a demonstração do Passo 4. $\square$

Demonstração do Passo 5. Seja $(\mathcal{U}_n)_n$ uma sequência de funções cujas entradas são funções de suporte compacto e tais que $\| \mathcal{U}_n - \mathcal{U} \|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)} \to 0$ quando $n \to +\infty$. Então

$$\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \mathcal{U}|^{p-2} \langle \nabla \mathcal{U}, \nabla \mathcal{U}_n \rangle \, dx = \frac{1}{p^*} \int_{\mathbb{R}^n} \nabla F(\mathcal{U}) \mathcal{U}_n \, dx$$

e

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \mathcal{U}|^{p-2} \langle \nabla \mathcal{U}, \nabla \mathcal{U}_n \rangle \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \mathcal{U}|^p \, dx \right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \mathcal{U}|^{p-1} |\nabla(\mathcal{U}_n - \mathcal{U})| \, dx \\ &\leq \| \mathcal{U}_n - \mathcal{U} \|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)} \cdot \| \mathcal{U} \|^{p-1}_{D^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)}, \end{aligned}$$

que vai a 0 quando $n \to +\infty$. Ainda pela imersão de Sobolev $D^{1,p}(\mathbb{R}^n) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^n)$

$$\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^n} \nabla F(\mathcal{U}) \cdot \mathcal{U}_n \; dx - \int_{\mathbb{R}^n} F(\mathcal{U}) \; dx \right| &= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \nabla F(\mathcal{U}) \cdot \mathcal{U} \; dx - \int_{\mathbb{R}^n} \nabla F(\mathcal{U}) \cdot (\mathcal{U} - \mathcal{U}_n) \; dx \right. \\
&\quad \left. - \int_{\mathbb{R}^n} F(\mathcal{U}) \; dx \right| \\
&= \left| \int_{\mathbb{R}^n} \nabla F(\mathcal{U}) \cdot (\mathcal{U} - \mathcal{U}_n) \; dx \right| \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla F(\mathcal{U})| |(\mathcal{U}_n - \mathcal{U})| \; dx \\
&\leq M \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{U}|^{p^*-1} |(\mathcal{U}_n - \mathcal{U})| \; dx \\
&\leq M \parallel \mathcal{U}_n - \mathcal{U} \parallel_{p^*} \cdot \parallel \mathcal{U} \parallel_{p^*}^{p^*-1},
\end{aligned}$$

que vai a 0 quando $n \to +\infty$, a quantidade M acima é consequência do fato que cada $\partial_i F$ é uma função $(p^* - 1)$-homogênea, possibilitando a existência de uma constante M tal que $|\nabla F(t)| \leq M|t|^{p^*-1}$. A desigualdade de Sobolev nos dá

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \mathcal{U}|^p \; dx &= \int_{\mathbb{R}^n} F(\mathcal{U}) \; dx \\
&\leq K_F(n,p)^{p^*} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \mathcal{U}|^p \; dx \right)^{\frac{p^*}{p}}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$\begin{aligned}
I(\mathcal{U}) &= \frac{1}{p} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \mathcal{U}|^p \; dx - \frac{1}{p^*} \int_{\mathbb{R}^n} F(\mathcal{U}) \; dx \\
&= \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p^*} \right) \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \mathcal{U}|^p \; dx \right) \\
&\geq \frac{1}{n} K_F(n,p)^{-n} = \beta^*.
\end{aligned}$$

Provando o Passo 5.

$\square$

Demonstração do Lema 4.0.1. Se $I(\mathcal{V}_\alpha) \to \beta < \beta^*$, teremos que $\mathcal{V}_\alpha \to 0$ fortemente, portanto, podemos assumir que $\beta > \beta^* = n^{-1} K_F(n,p)$. Além disso, como $DI(\mathcal{V}_\alpha) \to 0$, temos ainda que

$$\frac{1}{n}\int_{\Omega}|\nabla\mathcal{V}_\alpha|^p\ dx = I(\mathcal{V}_\alpha)-\frac{1}{p^*}DI(\mathcal{V}_\alpha)\cdot\mathcal{V}_\alpha \to \beta \geq n^{-1}K_F(n,p)^{-n},$$

e portanto,

$$\liminf_{\alpha\to+\infty}\int_{\Omega}|\nabla\mathcal{V}_\alpha|^p\ dx = n\beta \geq K_F(n,p)^{-n}. \tag{4.4}$$

Para $t>0$ seja

$$\mu_\alpha(t)=\sup_{x\in\Omega}\left(\int_{B_x(t)}|\nabla\mathcal{V}_\alpha|^p\ dx\right).$$

Dado $t_0>0$ pequeno, existe $\lambda_0>0$ tal que, a menos de subsequência,

$$\int_{B_x(t_0)}|\nabla\mathcal{V}_\alpha|^p\ dx \geq \lambda_0$$

para todo α. Desde que a aplicação $t\to\mu_\alpha(t)$ é contínua, obtemos que para qualquer $\lambda\in(0,\lambda_0)$ existe $t_\alpha\in(0,t_0)$ tal que $\mu_\alpha(t_\alpha)=\lambda$. Portanto, também existe um $x_\alpha\in\overline{\Omega}$ tal que

$$\mu_\alpha(t_\alpha)=\int_{B_{x_\alpha}(t)}|\nabla\mathcal{V}_\alpha|^p\ dx.$$

Para esse x_α, escolhemos R_α de modo que o reescalonamento,

$$\tilde{\mathcal{V}}_\alpha(x)=R_\alpha^{-\frac{n-p}{p}}\mathcal{V}_\alpha\left(\frac{x}{R_\alpha}+x_\alpha\right),$$

seja tal que

$$\tilde{\mu_\alpha}(1)=\sup_{\substack{x\,\in\,\mathbb{R}^n\\ \frac{x}{R_\alpha}+x_\alpha\,\in\,\Omega}}\int_{B_x(t_0)}|\nabla\tilde{\mathcal{V}}_\alpha|^p\ dx=\int_{B_0(1)}|\nabla\tilde{\mathcal{V}}_\alpha|^p\ dx=\frac{1}{2L}K_F(n,p)^{-n},$$

sendo L o número de bolas de raio 1 que cobrem $B_0(2)$. E, de acordo com (4.4), temos $R_\alpha\geq R_0>0$, uniformemente em α.

Considerando

$$\tilde{\Omega}_\alpha=\{x\in\mathbb{R}^n:\ \frac{x}{R_\alpha}+x_\alpha\in\Omega\},$$

reforçamos que $H_0^{1,p}(\tilde{\Omega}_\alpha,\mathbb{R}^k)\subset D^{1,p}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)$. Além disso,

$$\|\ \tilde{\mathcal{V}}_\alpha\ \|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)}=\|\ \mathcal{V}_\alpha\ \|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)}\to n\beta<\infty,$$

portanto, $\tilde{\mathcal{V}}_\alpha\rightharpoonup\tilde{\mathcal{V}}_0$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)$. Afirmamos que $\tilde{\mathcal{V}}_\alpha\to\mathcal{V}_0$ em $H^{1,p}_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^k)$, para ver isso, basta provar a sua validade para $B_{x_0}(r)\subset\Omega$ para qualquer $x_0\in\Omega$. De fato, pelo teorema de Fubinni e de

$$\int_1^2 \left(\int_{\partial B_\rho(x_0)} |\nabla \tilde{\mathcal{V}}_\alpha|^p \; d\sigma \right) \; dr \leq \int_{B_2(x_0)} |\nabla \tilde{\mathcal{V}}_\alpha|^p \; dx \leq n\beta + o(1),$$

temos a existência de uma raio $\rho \in [1,2]$ tal que

$$\int_{\partial B_r(x_0)} |\nabla \tilde{\mathcal{V}}_\alpha|^p \; d\sigma \leq 2n\beta,$$

para infinitos α's. Graças à compacidade da imersão $H^{1,p}(\partial B_\rho(x_0), \mathbb{R}^k) \hookrightarrow H^{\frac{p-1}{p},p}(\partial B_\rho(x_0), \mathbb{R}^k)$, deduzimos que uma subsequência de $\tilde{\mathcal{V}}_\alpha$ converge fortemente a $\mathcal{V}_0$ em $H^{\frac{p-1}{p},p}(\partial B_\rho(x_0), \mathbb{R}^k)$ e pela compacidade do operador traço, teremos que $\tilde{\mathcal{V}_0} = \mathcal{V}_0$. Definamos

$$\Phi_\alpha = \begin{cases} \tilde{\mathcal{V}_\alpha} - \mathcal{V}_0, \text{ em } B_\rho(x_0) \\ \\ \tilde{\mathcal{W}}_\alpha, \text{ em } B_3(x_0) \setminus B_\rho(x_0) \end{cases}$$

Sendo $\tilde{\mathcal{W}}_\alpha$ solução do problema de Dirichlet

$$\begin{cases} \Delta_p \tilde{\mathcal{W}}_\alpha = 0, \text{ em } B_\rho(x_0) \\ \tilde{\mathcal{V}_\alpha} - \mathcal{V}_0, \text{ em } \partial B_\rho(x_0) \\ \tilde{\mathcal{W}}_\alpha, = 0 \text{ em } \partial B_3(x_0). \end{cases}$$

A existência de $\tilde{\mathcal{W}}_\alpha$ é garantida pelo passo 2.2 do Lema 1.1 de [Sa1]. O mesmo passo 2.2 garante a existência de $C > 0$, independente de $\tilde{\mathcal{W}}_\alpha$ e $\tilde{\mathcal{V}_\alpha} - \mathcal{V}_0$ tal que

$$\| \tilde{\mathcal{W}}_\alpha \|_{H^{1,p}(B_3(x_0) \setminus B_\rho(x_0), \mathbb{R}^k)} \leq C \| \tilde{\mathcal{V}_\alpha} - \mathcal{V}_0 \|_{H^{\frac{p-1}{p},p}(\partial B_\rho(x_0), \mathbb{R}^k)}$$

o que nos dá

$$\| \tilde{\mathcal{W}}_\alpha \|_{H^{1,p}(B_3(x_0) \setminus B_\rho(x_0), \mathbb{R}^k)} \to 0$$

já que pela compacidade do operador traço,

$$\| \tilde{\mathcal{V}_\alpha} - \mathcal{V}_0 \|_{H^{\frac{p-1}{p},p}(\partial B_\rho(x_0), \mathbb{R}^k)} \to 0.$$

Portanto $\Phi_\alpha = \tilde{\Phi}_\alpha + \mathcal{R}_\alpha$, sendo $\tilde{\Phi}_\alpha \in H_0^{1,p}(\tilde{\Omega}_\alpha)$ e $\mathcal{R}_\alpha \in D^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ tal que $\mathcal{R}_\alpha \to 0$ quando $\alpha \to +\infty$. Assim

$$DI(\tilde{\mathcal{V}}_\alpha) \cdot \Phi_\alpha = DI(\tilde{\mathcal{V}}_\alpha) \cdot \tilde{\Phi}_\alpha + o(1) \to 0.$$

Entretanto

$$
\begin{aligned}
o(1) &= DI(\tilde{\mathcal{V}}_\alpha)\cdot \Phi_\alpha \\
&= \textstyle\sum_{i=1}^k \displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} \Big(|\nabla \tilde{v}_\alpha^i|^{p-2}\langle \nabla \tilde{v}_\alpha^i, \nabla \psi_\alpha^i\rangle - \partial_i F(\tilde{\mathcal{V}}_\alpha)\cdot \psi_\alpha^i \Big)\ dx \\
&= \int_{B_\rho(x_0)} \Big(|\nabla (\tilde{\mathcal{V}}_\alpha - \mathcal{V}_0)|^p - F(\tilde{\mathcal{V}}_\alpha - \mathcal{V}_0) \Big)\ dx + o(1) \\
&= \int_{\mathbb{R}^n} \left(|\nabla \Psi_\alpha|^p - F(\Psi_\alpha) \right)\ dx + o(1) \\
&\geq \parallel \Psi \parallel^p_{D^{1,p}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)} \Big(1 - K_F(n,p)^{p^*} \parallel \Psi \parallel^{p^*-p}_{D^{1,p}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)} \Big),
\end{aligned}
$$

sendo que $o(1) \to 0$ quando $\alpha \to \infty$. Além disso, temos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \Psi|^p\ dx &= \int_{B_\rho(x_0)} |\nabla (\tilde{\mathcal{V}}_\alpha - \mathcal{V}_0)|^p\ dx + o(1) \\
&\leq \int_{B_2(x_0)} |\nabla \tilde{\mathcal{V}}_\alpha|^p\ dx + o(1) \\
&\leq L\tilde{\mu}_\alpha(1) = \frac{K_F(n,p)^{-n}}{2},
\end{aligned}
$$

portanto teremos a convergência $\Psi_\alpha \to 0$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)$, ou seja $\tilde{\mathcal{V}}_\alpha \to \mathcal{V}_0$ em $H^{1,p}_{loc}(\Omega,\mathbb{R}^k)$.

Em particular

$$
\int_{B_0(1)} |\nabla \mathcal{V}_0|^p\ dx = \frac{K_F(n,p)^{-n}}{2} > 0,
$$

mostrando que $\mathcal{V}_0 \not\equiv 0$. Entretanto, a sequência original $\tilde{\mathcal{V}}_\alpha \rightharpoonup 0$, o que indica que $R_\alpha \to +\infty$ quando $\alpha \to +\infty$, o que nos leva a duas possibilidades

1. $R_\alpha \mathrm{dist}(x_\alpha, \partial\Omega) \leq c < +\infty$, uniformemente. Nessa opção, após mudança de coordenadas podemos supor que $\tilde{\Omega}_\alpha$ preenche o espaço

$$
\tilde{\Omega}_\infty = \{x \in \mathbb{R}^n :\ x_1 > 0\},
$$

   ou

2. $R_\alpha \mathrm{dist}(x_\alpha, \partial\Omega) \to +\infty$. Nesse caso $\tilde{\Omega}_\infty = \mathbb{R}^n$.

Em cada caso, teremos para α suficientemente grande que se $\Psi \in C_0^\infty(\tilde{\Omega}_\infty, \mathbb{R}^k)$, então $\Psi \in C_0^\infty(\tilde{\Omega}_\alpha, \mathbb{R}^k)$. Assim

$$
DI(\mathcal{V}_0)\cdot \Psi = \lim_{\alpha\to+\infty} DI(\tilde{\mathcal{V}}_\alpha)\cdot \Psi = 0,
$$

mostrando que $\mathcal{V}_0 \in H_0^{1,p}(\tilde{\Omega}_\infty)$ é solução fraca de (4.2) em $\tilde{\Omega}_\infty$. Se $\tilde{\Omega}_\infty = \{x \in \mathbb{R}^n : \ x_1 > 0\}$, segue da Identidade de Pohozaev (veja, por exemplo, [PcSr]) que $\mathcal{V}_0$ é identicamente nula, portanto $\tilde{\Omega}_\infty = \mathbb{R}^n$.

Agora tomamos

$$\eta \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n), \ 0 \leq \eta \leq 1, \ \eta \equiv 1 \text{ em } B_0(1) \text{ e } \eta = 0 \text{ fora de } B_0(2)$$

e seja

$$\mathcal{W}_\alpha(x) = \mathcal{V}_\alpha(x) - R_\alpha^{\frac{n-p}{p}} \mathcal{V}_0(R_\alpha^{-1}(x - x_\alpha)) \cdot \eta(\overline{R}_\alpha(x - x_\alpha)) \in H_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k),$$

com a sequência $(\overline{R}_\alpha)_\alpha$ escolhida de tal modo que

$$\tilde{R}_\alpha := R_\alpha(\overline{R}_\alpha)^{-1} \to +\infty \text{ e } \overline{R}_\alpha \text{dist}(x_\alpha, \partial\Omega) \to +\infty \text{ quando } \alpha \to +\infty.$$

Ou seja

$$\tilde{\mathcal{W}}_\alpha(x) = R_\alpha^{-\frac{n-p}{p}} \mathcal{W}\left(\frac{x}{R_\alpha} + x_\alpha\right) = \tilde{\mathcal{V}}_\alpha(x) + \tilde{\mathcal{V}}_0(x)\eta\left(\frac{x}{\tilde{R}_\alpha}\right),$$

definindo $\eta_\alpha(x) = \eta\left(\frac{x}{\tilde{R}_\alpha}\right)$, teremos

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla((\eta_\alpha - 1)\mathcal{V}_0)|^p \ dx| \ &\leq \ C \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla \mathcal{V}_0|^p |(\eta_\alpha - 1)|^p \ dx + C \int_{\mathbb{R}^n} |\mathcal{V}_0|^p |\nabla(\eta_\alpha - 1)|^p \ dx \\
&\leq \ C \int_{\mathbb{R}^n \setminus B_0(\tilde{R}_\alpha)} |\nabla \mathcal{V}_0|^p \ dx + C(\tilde{R}_\alpha)^{-p} \int_{B_0(2\tilde{R}_\alpha) \setminus B_0(\tilde{R}_\alpha)} |\mathcal{V}_0|^p \ dx.
\end{aligned}$$

Como $|\nabla \mathcal{V}_0|^p$ é integrável, a primeira parcela da desigualdade acima tende a 0 quando $\tilde{R}_\alpha \to +\infty$. Trabalhando a segunda parcela, teremos

$$(\tilde{R}_\alpha)^{-p} \int_{B_0(2\tilde{R}_\alpha) \setminus B_0(\tilde{R}_\alpha)} |\mathcal{V}_0|^p \ dx \leq C \sum_{i=1}^k \left(\int_{B_0(2\tilde{R}_\alpha) \setminus B_0(\tilde{R}_\alpha)} |v_0^i|^{p^*} \ dx \right)^{\frac{p}{p^*}} \to 0.$$

Portanto teremos que

$$\mathcal{W}_\alpha = \mathcal{V}_\alpha - \mathcal{V}_0 + \mathcal{R}_\alpha,$$

sendo $\mathcal{R}_\alpha$ tal que $\mathcal{R}_\alpha \to 0$ em $D^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$.

Quanto à afirmação da decomposição dos funcionais energia, basta utilizar as convergências dadas no lema de Brézis-Lieb generalizado.

□

Referências Bibliográficas

[Ad] A R. Adams - *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1978.

[Au] T. Aubin - Equations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire, J. Math. Pure Appl. 55 (1976) 269-296.

[BbMn1] E. R. Barbosa, M. Montenegro - *Extremal maps in best constants vector theory - Part I: Duality and compactness*. Preprint.

[BbMn2] E. R. Barbosa, M. Montenegro - *Extremal maps in best constants vector theory - Part II: Extended L^p-theory*. Preprint.

[BbMn3] E. R. Barbosa, M. Montenegro - *Nontrivial solutions for critical potential elliptic systems*. Journal of Differential Equations. À aparecer em 2011.

[BrLb] H. Brezis, E. Lieb - *A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc. Amer. Math. Soc., 88, (1983), no. 3, 486-490.

[Ch] I. Chavel - *Riemannian geometry - a modern introduction*. Cambridge Tracts in Mathematics, 98, Cambridge University Press, Cambridge, (1994).

[DjDr] Z. Djadli, O. Druet - *Extremal functions for optimal Sobolev inequalities on compact manifolds,* Calc. Var. 12 (2001) 59-84.

[Dr] O. Druet - *From One to Several Bubbles*. J.Diff. Geom., vol. 63, (2003).

[DrHe] O. Druet, E. Hebey - Stability for strongly coupled critical elliptic systems in a fully inhomogeneous medium. Analysis and PDE, Vol. 2 (2009), No. 3. 305-359.

[DHR] O. Druet, E. Hebey, F. Róbert - *Blow-up Theory for Elliptic PDEs in Riemannian Geometry,* Mathematical Notes,Princeton University, vol. 45 (2004).

[DHV] O. Druet, E. Hebey, J. Vétois - *Bounded stability for strongly coupled critical elliptic systems below the geometric threshold of the conformal Laplacian,* Journal of Functional Analysis Volume 258, Issue 3, 1 February 2010, Pages 999-1059 .

[Ev] L. C. Evans - *Partial Differential Equations*, AMS, 1998.

[GbTd] D. Gilbarg, N.S. Trudinger - *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag (1983).

[GhYn] N. Ghoussoub, C. Yuan - *Multiple solutions for quasi-linear PDEs involving the critical Sobolev and Hardy exponents*, Trans. Amer. Math. Soc., 352, (2000), no. 12, 5703-5743.

[LiZh] Y. Y. Li, L. Zhang - *Liouville type theorems and Harnack type inequalities or semilinear elliptic equations*, J. Anal. Math. 90(2003), 27-87.

[He1] E. Hebey - *Critical Elliptic Systems in Potential Form,* Adv. Differential Equations 11 (2006), no. 5, 511-600.

[He2] E. Hebey - Sharp Sobolev inequalities for vector valued maps, Math. Z. 253, no. 4 (2006), 681-708.

[Mn] M. Montenegro - *On nontrivial solutions of critical polyharmonic elliptic systems.* Journal of Differential Equations, v. 247, p. 906-916, 2009.

[Po1] A. C. Ponce - *Topics on Calculus of Variations,* School on Nonlinear Differential Equations (2006).

[Po2] A. C. Ponce - *Métodos Clássicos em Teoria do Potencial,* (2005).

[PcSr] P.Pucci, J. Serrin - *A general variational identity.* Indiana Univ. Math. J., 35(3):681-703(1986).

[Sa1] N. Saintier - *Asymptotic Estimates and Blow-up Theory for Critical Equations involving the p-Laplacian,* Calculus of Variations and PDE, 25 (3), (2006), no. 1, 299-331.

[Sa2] N. Saintier - *Sur quelques problèmes non-linéaires en analyse géométrique,* These de Doctorat, Universite de Paris (2005).

[Sw1] M. Struwe - *Variational methods. Applications to nonlinear partial differential equations and Hamiltonian systems.* Third edition., Springer-Verlag, (2000).

[Sw2] M. Struwe - *A Global Compactness Result for Elliptic Boundary Value Problems Involving Limiting Nonlinearities.* Math. Z., 187, (1984), 511-517.

[Tk] P. Tolksdorf - *Regularity for a more general class of quasilinear elliptic equations*, J. Differential Equations 51 (1984), 126-150.

[Ve] L. Veron - *Singularities of solutions of second order quasilinear equations*, Pitman Research Notes in Mathematical Series, Addison Wesley Longman Lim., Harlow, 1996.

[Wi] M. Willem - *Minimax Theorems*, Birkhäuser, 1996.

[Ym] H. Yamabe - On a deformation of Riemannian structures on compact manifolds, Osaka Math. J. 12 (1960) 21-37.