Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

Compacidade e estimativas de De Giorgi-Nash-Moser para pontos de mínimo de funcionais sobre espaços de aplicações

Marcio Fialho Chaves

Orientador: Prof. Marcos Montenegro

Belo Horizonte - 30 de março de 2011

Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

Compacidade e estimativas de De Giorgi-Nash-Moser para pontos de mínimo de funcionais sobre espaços de aplicações

Dissertação apresentada ao corpo docente de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Marcio Fialho Chaves

Orientador: Prof. Marcos Montenegro

Belo Horizonte - 30 de março de 2011

Para meus pais Leonardo e Áurea

"Suba o primeiro degrau com fé. Não é necessário que você veja toda a escada. Apenas dê o primeiro passo".
Martin Luther King Jr. 1929-1968

Resumo

Nesta dissertação estudamos a compacidade de minimizadores para o funcional

$$\Phi_{G_\alpha}(U) := \int_\Omega |\nabla U|^p dx - \int_\Omega G_\alpha(x, U) dx$$

contínuo, definido no espaço $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k)$, assim como propriedades de concentração e estimativas do tipo De Giorgi-Nash-Moser para tais minimizadores.

Palavras-chave: Funcional Energia, Minimização, Compacidade de Minimizadores e estimativas do tipo De Giorgi-Nash-Moser.

Abstract

In this work we study the compactness of minimizers for functionals of the form

$$\Phi_{G_\alpha}(U) := \int_\Omega |\nabla U|^p dx - \int_\Omega G_\alpha(x, U) dx$$

continuous, defined on the space $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k)$, as well as properties of concentration and De Giorgi-Nash-Moser type estimates.

Keywords: Energy functional, minimization, compactness, concentration and De Giorgi-Nash-Moser type estimates.

Sumário

Introdução geral

0.1 Um pouco de história

A Teoria de minimização é muito aplicada em todas as áreas científicas. Na Análise-Matemática é muito utilizada para encontrar soluções para algumas equações diferenciais parciais, através do Método Direto do Cálculo das Variações. Este método consiste na obtenção de pontos críticos para um funcional associado de modo natural ao problema diferencial. Essa idéia de tratar equações diferenciais através de um funcional associado, aparece em meados do século XIX de modo explícito com Peter Gustav Lejeune Dirichlet e Riemann.

Até então, as aplicações do Cálculo das Variações eram desenvolvidas sem o necessário rigor. Em muitos casos, a simples interpretação física da qual problemas matemáticos eram elaborados, já garantia a existência de soluções para os mesmos.

Hilbert foi o pioneiro em utilizar esse método de modo rigoroso. O trabalho de Hilbert, foi sem dúvida um dos fatores que influiram no desenvolvimento da Integral de Lebesgue, da Análise Funcional e da moderna teoria das Equações Diferenciais Parciais.

Na moderna teoria das Equações Diferenciais Parciais, a idéia fundamental de associar a existência de soluções à existência de pontos críticos de um funcional permanecia inalterada, mas percebeu-se rapidamente que a dimensão infinita dos espaços de funções tornava esta tarefa bem mais complicada. Em um primeiro momento, concentraram-se os esforços na busca de pontos de mínimo para funcionais limitados inferiormente. No início do século XX, foi consolidado o Método Variacional Direto, que permite provar a existência de pontos de mínimo para funcionais que satisfazem certas condições específicas.

0.2 Panorama geral da dissertação

A importância de se encontrar um mínimo para um funcional torna-se um fator de extremo valor para mostrar a existência de soluções para algumas equações diferenciais parciais.

No artigo [7], Brezis e Nirenberg associou a existência de uma solução u não trivial para o problema

$$\begin{cases} -\triangle u = u^p + f(x,u) \quad em \quad \Omega, \\ u > 0 \quad em \quad \Omega, \\ u = 0 \quad em \quad \partial\Omega. \end{cases}$$

ao fato de encontrar um ponto de mínimo para o funcional

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\int |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p+1}\int |u|^{p+1} dx - \int F(x,u) dx.$$

No artigo [4], Bartsch e Guo ao estabelecer condições para a existência e inexistência de solução não trivial para o sistema

$$\begin{cases} (-\triangle)^m u_i = f_i(u) + \sum_{j=1}^n a_{ij} u_j, \quad em \quad \Omega \qquad i = 1, ..., n, \\ u_i \in H_0^m(\Omega), \quad i = 1, ..., n, \end{cases}$$

verificaram que sujeito a algumas hipóteses, a existência de solução se dava pela minimização do funcional

$$\Phi(u) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \frac{1}{2}\langle Au, u\rangle_{L^2} - \frac{1}{2^*}\int_\Omega F(u),$$

o qual pertencia a $C^1(\mathbb{R}^n)$, neste caso uma restrição deste funcional satisfazia a condição de Palais Smale, e junto com uma sequência de resultados, mostrou a existência de um minimizador para este funcional.

Ezequiel Barbosa e Marcos Montenegro, ao estabelecer hipóteses nos teoremas 1.3 e 1.4 do artigo [2], para existência de solução do sistema

$$\begin{cases} -\triangle_p u = f(u) + g(u), \qquad em \quad \Omega \\ u = 0, \quad em \quad \partial\Omega, \end{cases}$$

considerou a minimização do funcional

$$\Phi_G(u) = \int_\Omega |\nabla u|^p dx + \int_\Omega G(u) dx$$

em um subconjunto fechado. Nesse artigo, o fato deste funcional ser diferenciável, foi fundamental na demonstração da existência de um minimizador.

Nesta dissertação vamos ver a existência e estudar a compacidade de minimizadores para um funcional energia específico, assim como propriedades de concentração e estimativas do tipo De Giorgi-Nash-Moser para tais minimizadores. Parte do desenvolvimento consta na literatura no caso suave, como em [2] e [4], não cobrindo certas situações físicas, nas quais os funcionais associados não são diferenciáveis. Isso torna a nossa dissertação original, já que vamos trabalhar no caso em que o funcional é apenas contínuo.

No capítulo 1 vamos definir o espaço

$$W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^k) := \underbrace{W_0^{1,p}(\Omega)\times\ldots\times W_0^{1,p}(\Omega)}_{k \quad vezes}$$

munido da norma

$$||U||_{W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^k)} = \left(\int_\Omega |\nabla U|^p\, dx\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Em seguida, vamos generalizar a melhor constante L^p-Sobolev Euclideana $A_0(p,n)$, para a desigualdade

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*}\, dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq A_0(p,n)\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p\, dx. \tag{1}$$

Obtendo a constante L^p-Sobolev Euclideana vetorial ótima $\mathcal{A}_0(p,F,n)$ para a desigualdade

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} F(U)\, dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \mathcal{A}_0(p,F,n)\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla U|^p\, dx, \tag{2}$$

onde $F:\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, positiva e p^*-homogênea. Mostraremos na proposição seguinte, o valor exato dessa constante, assim como a forma das funções extremais.

Proposição. Para cada $1 \leq p < n$, temos que $\mathcal{A}_0(p,F,n) = M_F^{p/p^*} A_0(p,n)$, onde $M_F = \max\limits_{\mathbb{S}_p^{k-1}} F$ e $\mathbb{S}_p^{k-1} = \{t \in \mathbb{R}^k : \ \sum_{i=1}^k |t_i|^p = 1\}$. Além disso, $U_0 \in D^{1,p}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)$ é uma aplicação extremal de (2) se, e somente se, $U_0 = t_0 u_0$ para algum $t_0 \in \mathbb{S}_p^{k-1}$ tal que $M_F = F(t_0)$ e alguma função extremal $u_0 \in D^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ de (1).

Finalizamos o capítulo com dois teoremas importantes para demonstração dos resultados centrais desta dissertação. O primeiro deles é uma generalização do lema de Brézis-Lieb, e o segundo uma versão do princípio de concentração e compacidade no sentido vetorial.

Teorema. Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado, e $F:\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva e p-homogênea, onde $p > 0$. Se (U_α) é uma sequência limitada em $L^p(\Omega,\mathbb{R}^k)$ e $U_\alpha \to U$ q.t.p em Ω, onde $U \in L^p(\Omega,\mathbb{R}^k)$, então:

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_\Omega (F(U_\alpha) - F(U_\alpha - U))dx = \int_\Omega F(U)dx.$$

No artigo [4], Bartsch e Guo, demonstraram este teorema assumindo que F pertencia a $C^1(\mathbb{R}^k)$, mas Ezequiel Barbosa e Marcos Montenegro, mostraram no artigo [1, **?**] que o teorema continua verdadeiro com a hipótese de F ser apenas contínua.

Teorema. Sejam Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$, μ e ν duas medidas não negativas, $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva e p^*-homogênea com $1 \leq p < n$ e $(U_\alpha) \subset W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ uma sequência tal que $U_\alpha \rightharpoonup U \ \ em \ \ W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k)$,

$$|\nabla U_\alpha|^p dx \rightharpoonup \mu \ \ e \ \ F(U_\alpha)dx \rightharpoonup \nu.$$

Então existem, um conjunto enumerável τ, uma família de pontos $\{x_j\}_{j\in\tau} \subset \overline{\Omega}$ e uma família de números positivos $\{\mu_j\}_{j\in\tau}$ e $\{\nu_j\}_{j\in\tau}$ tal que

$$\mu \geq |\nabla U|^p dx + \sum_{j\in\tau} \mu_j \delta_{x_j}, \quad \nu = F(U)dx + \sum_{j\in\tau} \nu_j \delta_{x_j},$$

Com $\mathcal{A}_0(p, F, n)\mu_j \geq \nu_j^{\frac{p}{p^*}}, \forall\ j \in \tau.$ onde δ_{x_j} é a medida de Dirac.

A hipótese de F ser apenas contínua nos teoremas acima é extremamente importante para os nossos resultados, já que estamos trabalhando com um funcional apenas contínuo.

No capítulo 2, definimos o funcional

$$\Phi_G(U) := \int_\Omega |\nabla U|^p dx - \int_\Omega G(x, U)dx,$$

onde $G : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ é r-homogênea na segunda variável e contínua. Resultados recentes mostram que assumindo algumas hipóteses, este funcional atinge um mínimo C no conjunto $E_F := \left\{U \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k) : \ \int_\Omega F(U)dx = 1\right\}$, onde $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ é s-homogênea, contínua e positiva. Este resultado é tratado em dois casos, quando $s < p^*$ e $s = p^*$.

Assumindo que U_α é um minimizante para o funcional

$$\Phi_{G_\alpha}(U) := \int_\Omega |\nabla U|^p dx - \int_\Omega G_\alpha(x, U)dx$$

no conjunto $E_{F_\alpha} := \left\{U \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k) : \ \int_\Omega F_\alpha(U)dx = 1\right\}$, onde $G_\alpha : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ é r_α-homogênea na segunda variável e contínua, $F_\alpha : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ é s_α-homogênea, contínua e positiva. Vamos mostrar os seguintes resultados para o comportamento da sequência (U_α). O primeiro considerando o caso $s < p^*$.

Teorema. (Caso subcrítico $s < p^*$). Seja

$$C_\alpha := \inf_{U \in E_{F_\alpha}} \Phi_{G_\alpha}(U),$$

onde $1 \leq r_\alpha \leq s_\alpha < p^*$ e $1 < p < n$. Assuma que $F_\alpha \to F$ em $C^0_{loc}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$ e $G_\alpha \to G$ em $C^0_{loc}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R})$, onde F é s-homogênea com $s < p^*$ e G r-homogênea na segunda variável. Se Φ_{G_α} é um funcional coercivo e $U_\alpha \in E_{F_\alpha}$ é um minimizante para Φ_{G_α}, então $U_\alpha \rightharpoonup U_0$ em $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ e C é atingido em E_F por U_0.

E o próximo caso quando $s = p^*$.

Teorema. (Caso crítico $s = p^*$). Seja

$$C_\alpha := \inf_{U \in E_{F_\alpha}} \Phi_{G_\alpha}(U),$$

onde $1 \leq r_\alpha \leq s_\alpha \leq p^*$ e $1 < p < n$. Assuma que $F_\alpha \to F$ em $C^0_{loc}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$, $G_\alpha \to G$ em $C^0_{loc}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R})$, onde F é p^*-homogênea e G p-homogênea na segunda variável. Se Φ_G é um funcional coercivo, $U_\alpha \in E_{F_\alpha}$ é um minimizante de Φ_{G_α} e $\lim_{\alpha\to\infty} C_\alpha \leq \mathcal{A}_0(p, F, n)^{-1}$, então $U_\alpha \rightharpoonup U_0$ em $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k)$. Além disso, temos que

(i) $U_0 = 0$ e $U_\alpha \nrightarrow 0$ em $L^{p^*}(\Omega, \mathbb{R}^k)$, ou

(ii) $U_0 \neq 0$ e $U_\alpha \to U_0$ em $L^{p^*}(\Omega, \mathbb{R}^k)$, neste caso C é atingido em E_F por U_0.

Uma condição na qual a convergência-L^{p^*} se comporta no sentido forte, é simplesmente acrescentar na hipótese, o fato de $\lim\limits_{\alpha\to\infty} C_\alpha < \mathcal{A}_0(p, F, n)^{-1}$. Neste caso, $U_0 \neq 0$ e $U_\alpha \to U_0$ em $L^{p^*}(\Omega, \mathbb{R}^k)$.

Esta condição junto com o teorema acima, mostra que se $U_\alpha \rightharpoonup 0$ em $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k)$, então $C_\alpha \to \mathcal{A}_0(p, F, n)^{-1}$. Usando essa observação mostramos o seguinte teorema.

Teorema. Se $U_\alpha \rightharpoonup 0$ em $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k)$, então (U_α) tem um único ponto de concentração $x_0 \in \overline{\Omega}$.

E finalmente no capítulo 4, vamos mostrar a seguinte estimativa do tipo De Giorgi-Nash-Moser para minimizadores com $p = 2$,

Teorema. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e suave, $n \geq 3$. Considere funções F_α e G_α convergentes ao caso crítico com $r_\alpha \geq 2$. Seja C_α o nível de energia mínima associado a

F_α e G_α. Se $C_\alpha \to \mathcal{A}_0(2,F,n)^{-1}$, então dadas constantes $q > 2^*$ e $\ell, K > 0$, existe uma constante positiva c_0, dependendo somente de n, q, ℓ, K e Ω, tal que para qualquer $\delta > 0$, qualquer ponto $x_0 \in \Omega$ e qualquer minimizador $U_\alpha \in E_{F_\alpha}$ para C_α satisfazendo

$$||U_\alpha||_{L^q(B(x_0,2\delta)\cap\Omega,\mathbb{R}^k)} \leq K,$$

temos

$$\sup_{B(x_0,\delta)\cap\Omega} |U_\alpha| \leq c_0 \delta^{-n/\ell} \left(\int_{B(x_0,2\delta)\cap\Omega} |U_\alpha|^\ell \, dx \right)^{1/\ell}$$

para α grande.

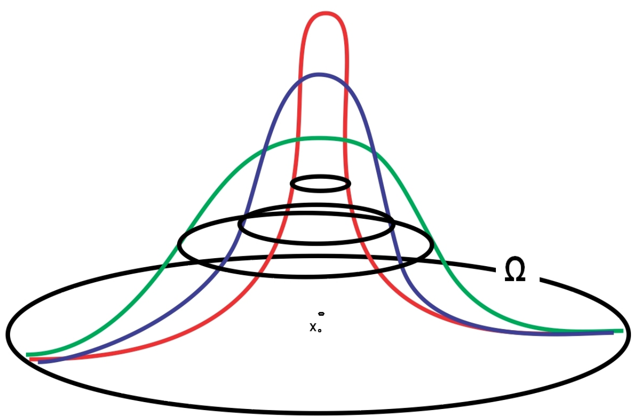
Se $U_\alpha \rightharpoonup 0$ em $W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^k)$, vamos usar a estimativa dada pelo teorema acima e o fato de U_α ter um único ponto de concentração, para mostrar o seguinte teorema.

Teorema. (Estimativa Uniforme). Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e suave, $n \geq 3$. Considere funções F_α e G_α convergentes ao caso crítico com $r_\alpha \geq 2$. Seja C_α o nível de energia mínima associado a F_α e G_α e $U_\alpha \in E_{F_\alpha}$ um minimizante. Se $U_\alpha \rightharpoonup 0$ em $W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^k)$ e $\lim_{\alpha\to\infty} C_\alpha \leq \mathcal{A}_0(2,F_\alpha,n)^{-1}$, então $C_\alpha \to \mathcal{A}_0(2,F,n)^{-1}$ e

$$U_\alpha \to 0 \quad \text{em} \quad L^\infty_{loc}(\Omega \setminus \{x_0\}, \mathbb{R}^k) \ ,$$

onde $x_0 \in \overline{\Omega}$ é o único ponto de concentração de (U_α).

Se $x_0 \in \Omega$, uma ilustração do comportamento de cada U_α, pode ser visualizado na figura abaixo:



CAPÍTULO 1

Preliminares

1.1 O espaço de Sobolev vetorial

Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado , $1 \leq p < +\infty$ e $k \geq 1$ um número inteiro. Denotemos por $W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ o espaço de Sobolev vetorial

$$W^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k) := \underbrace{W^{1,p}(\Omega) \times \ldots \times W^{1,p}(\Omega)}_{k \quad vezes}$$

munido da norma

$$||U||_{W^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^k)} = \left(\int_\Omega |\nabla U|^p \, dx + \int_\Omega |U|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} ,$$

onde

$$U = (u_1, \ldots, u_k) \ ,$$

$$\int_\Omega |\nabla U|^p \, dx = \sum_{i=1}^{k} \int_\Omega |\nabla u_i|^p \, dx \ ,$$

$$\int_\Omega |U|^p \, dx = \sum_{i=1}^{k} \int_\Omega |u_i|^p \, dx \ .$$

Com as mesmas hipóteses de $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado , $1 \leq p < +\infty$ e $k \geq 1$ um número inteiro. Denotemos por $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ o espaço vetorial

$$W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k) := \underbrace{W_0^{1,p}(\Omega) \times \ldots \times W_0^{1,p}(\Omega)}_{k \quad vezes}$$

munido da norma

$$||U||_{W_0^{1,p}(\Omega,\mathbb{R}^k)} = \left(\int_\Omega |\nabla U|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}} ,$$

Agora se $1 \leq p < +\infty$ e $k \geq 1$ um número inteiro. Denotemos por $D^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$ o espaço vetorial

$$D^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k) := \underbrace{D^{1,p}(\mathbb{R}^n) \times \ldots \times D^{1,p}(\mathbb{R}^n)}_{k \quad vezes}$$

munido da norma

$$||U||_{D^{1,p}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla U|^p \; dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Também definimos $L^p(\Omega, \mathbb{R}^k)$ o espaço vetorial

$$L^p(\Omega, \mathbb{R}^k) := \underbrace{L^p(\Omega) \times \ldots \times L^p(\Omega)}_{k \quad vezes}$$

munido da norma

$$||U||_{L^p(\Omega,\mathbb{R}^k)} = \left(\int_{\Omega} |U|^p \; dx \right)^{\frac{1}{p}}.$$

1.2 A constante L^p-Sobolev Euclideana vetorial ótima

Definição 1.1. *Definimos $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva e p-homogênea, se $F(\lambda t) = \lambda^p F(t)$ para todo $\lambda > 0$ e $t \in \mathbb{R}^k$ tal que $t \neq 0$.*

Lema 1.1. *Seja $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva e p^*-homogênea, então a desiguadade*

$$F(t) \leq M_F \left(\sum_{i=1}^{k} |t_i|^p \right)^{\frac{p^*}{p}}$$

é verdadeira para todo $t \in \mathbb{R}^k$, onde $M_F = \max\limits_{\mathbb{S}_p^{k-1}} F$ e $\mathbb{S}_p^{k-1} = \{t \in \mathbb{R}^k : \; \sum_{i=1}^k |t_i|^p = 1\}$.

Demonstração. Dado $t = (t_1, ..., t_k) \in \mathbb{R}^k$, defina em $\mathbb{R}^k$ a norma $\|t\|_k = \left(\sum_{i=1}^k |t_i|^p\right)^{\frac{1}{p}}$, pela continuidade de F temos que é atingido $M_F = \max\limits_{\mathbb{S}_p^{k-1}} F$, logo

$$F\left(\frac{t}{\|t\|_k}\right) \leq M_F \quad \Rightarrow \quad \frac{F(t)}{\|t\|_k^{p^*}} \leq M_F \quad \Rightarrow \quad F(t) \leq \|t\|_k^{p^*} M_F$$

□

Para $1 \leq p < n$, $n \geq 2$, a desigualdade de L^p-Sobolev Euclideana ótima afirma que, para qualquer função $u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^n)$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{p^*}\, dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq A_0(p,n) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p\, dx, \tag{1.1}$$

O número real $A_0(p,n)$ é chamado de melhor constante de L^p-Sobolev Euclideana e é igual a

$$A_0(p,n) = \sup_{\substack{u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^n),\\ ||u||_{p^*}=1}} \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla u|^p\, dx\ .$$

Proposição 1.1. *Seja $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva e p^*-homogênea com $1 \leq p < n$, então existe uma constante $A > 0$ tal que*

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} F(U)\, dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq A \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla U|^p\, dx \tag{1.2}$$

para todo $U \in D^{1,p}\left(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k\right)$.

Demonstração. Pelo lema (1.1) e pela p^*-homogeneidade de F, tem-se

$$F(t) \leq M_F \left(\sum_{i=1}^k |t_i|^p\right)^{\frac{p^*}{p}}$$

para todo $t \in \mathbb{R}^k$. Pela desigualdade de Minkowski (teorema A.11) em $L^{\frac{p^*}{p}}(\mathbb{R}^n)$ vale

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{i=1}^k |u_i|^p\right)^{\frac{p^*}{p}} dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \sum_{i=1}^k \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u_i|^{p^*}\, dx\right)^{\frac{p}{p^*}}.$$

Assim, usando as desigualdades de Minkowski e a desigualdade de L^p-Sobolev Euclideana ótima (1.1), encontramos para qualquer $U \in D^{1,p}(\mathbb{R}^n, \mathbb{R}^k)$,

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} F(U)\, dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq M_F^{p/p^*} \left(\int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{i=1}^k |u_i|^p\right)^{\frac{p^*}{p}} dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq M_F^{p/p^*} \sum_{i=1}^k \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u_i|^{p^*}\, dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \tag{1.3}$$

$$\leq M_F^{p/p^*} A_0(p,n) \int_{\mathbb{R}^n} \sum_{i=1}^k |\nabla u_i|^p\, dx = M_F^{p/p^*} A_0(p,n) \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla U|^p\, dx\ .$$

Daí, segue imediatamente que

$$A = M_F^{p/p^*} A_0(p,n)\ .$$

□

A melhor constante A associada à (1.2) é definida como a constante L^p-Sobolev Euclideana vetorial ótima

$$\mathcal{A}_0(p,F,n) = \inf\{A \in \mathbb{R} : \ (1.2) \ \textit{é válida}\}\,.$$

A desigualdade de L^p-Sobolev Euclideana vetorial ótima afirma que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} F(U)\,dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \mathcal{A}_0(p,F,n)\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla U|^p\,dx \tag{1.4}$$

para todo $U \in D^{1,p}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)$.

Proposição 1.2. *Para cada $1 \leq p < n$, temos*

$$\mathcal{A}_0(p,F,n) = M_F^{p/p^*} A_0(p,n)\,,$$

onde $M_F = \max\limits_{\mathbb{S}_p^{k-1}} F$ e $\mathbb{S}_p^{k-1} = \{t \in \mathbb{R}^k : \ \sum_{i=1}^k |t_i|^p = 1\}$. Além disso, $U_0 \in D^{1,p}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)$ é uma aplicação extremal de (1.4) se, e somente se, $U_0 = t_0 u_0$ para algum $t_0 \in \mathbb{S}_p^{k-1}$ tal que $M_F = F(t_0)$ e alguma função extremal $u_0 \in D^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ de (1.1).

Demonstração. Pela proposição 1.1, segue que

$$\mathcal{A}_0(p,F,n) \leq A = M_F^{p/p^*} A_0(p,n)\ .$$

Por outro lado, escolhendo $U_0 = t_0 u_0$ com $t_0 \in \mathbb{S}_p^{k-1}$ tal que $M_F = F(t_0)$ e $u_0 \in D^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ uma função extremal de (1.1), temos

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\mathbb{R}^n} F(U_0)\,dx\right)^{\frac{p}{p^*}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n} F(t_0u_0)\,dx\right)^{\frac{p}{p^*}} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u_0|^{p^*}F(t_0)\,dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \\
&= M_F^{p/p^*}\left(\int_{\mathbb{R}^n} |u_0|^{p^*}dx\right)^{\frac{p}{p^*}} = M_F^{p/p^*}A_0(p,n)\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u_0|^p dx \\
&= M_F^{p/p^*}A_0(p,n)\sum_{i=1}^k |t_o^i|^p\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u_0|^p dx \\
&= M_F^{p/p^*}A_0(p,n)\sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^n}|t_o^i|^p|\nabla u_0|^p dx \\
&= M_F^{p/p^*}A_0(p,n)\sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^n}|\nabla t_o^i u_0|^p dx \\
&= M_F^{p/p^*}A_0(p,n)\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla (t_0u_0)|^p dx \\
&= M_F^{p/p^*}A_0(p,n)\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla U_0|^p\,dx\ .
\end{aligned}$$

Assim, concluímos que

$$\mathcal{A}_0(p,F,n) = M_F^{p/p^*} A_0(p,n)$$

e que aplicações da forma $U_0 = t_0 u_0$, como construídas acima, são aplicações extremais. Portanto, resta mostrarmos que toda aplicação extremal de (1.4) tem essa forma. De fato, seja $U \in D^{1,p}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)$ uma aplicação extremal de (1.4). Nesse caso, $\|U\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)} = 1$ e U satisfaz (1.3) com igualdades no lugar das três desigualdades.

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} F(U)\, dx\right)^{\frac{p}{p^*}} = M_F^{p/p^*}\left(\int_{\mathbb{R}^n}\left(\sum_{i=1}^k |u_i|^p\right)^{\frac{p^*}{p}} dx\right)^{\frac{p}{p^*}} = M_F^{p/p^*}\sum_{i=1}^k\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u_i|^{p^*}\, dx\right)^{\frac{p}{p^*}}$$

$$= M_F^{p/p^*} A_0(p,n)\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{i=1}^k |\nabla u_i|^p\, dx = M_F^{p/p^*} A_0(p,n)\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla U|^p\, dx\ .$$

Agora, observe que a segunda igualdade corresponde à desigualdade de Minkowski. Isso implica pelo teorema A.11 que existem $t \in \mathbb{R}^k$ e $u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ tal que $U = tu$.
Da terceira igualdade segue que

$$M_F^{p/p^*}\sum_{i=1}^k\left(\int_{\mathbb{R}^n}|t_i u|^{p^*}dx\right)^{\frac{p}{p^*}} = M_F^{p/p^*} A_0(p,n)\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{i=1}^k|\nabla t_i u|^p dx \quad \Rightarrow$$

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^k |t_i|^p\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{p^*}dx\right)^{\frac{p}{p^*}} &= A_0(p,n)\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{i=1}^k|t_i|^p|\nabla u|^p dx\\ &= \sum_{i=1}^k|t_i|^p A_0(p,n)\int_{\mathbb{R}^n}|\nabla u|^p dx\end{aligned}$$

cancelando $\sum_{i=1}^k |t_i|^p$, temos que u é uma função extremal de (1.1) com $\|u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = 1$. Além disso

$$\begin{aligned}\|U\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^n,\mathbb{R}^k)} = 1 \ &\Rightarrow\ \sum_{i=1}^k |t_i|^p\|u\|_{D^{1,p}(\mathbb{R}^n)} = 1\\ &\Rightarrow\ \sum_{i=1}^k|t_i|^p = 1 \Rightarrow\ t\in S_p^{k-1}\end{aligned}$$

finalmente das duas primeiras igualdades, segue que

$$\begin{aligned}F(t)^{p/p^*}\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{p^*}dx\right)^{\frac{p}{p^*}} &= \left(\int_{\mathbb{R}^n}F(tu)dx\right)^{\frac{p}{p^*}} = M_F^{p/p^*}\sum_{i=1}^k\left(\int_{\mathbb{R}^n}|t_i u|^{p^*}dx\right)^{\frac{p}{p^*}}\\ &= M_F^{p/p^*}\sum_{i=1}^k\left(|t_i|^{p^*}\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{p^*}dx\right)^{\frac{p}{p^*}} = M_F^{p/p^*}\sum_{i=1}^k|t_i|^p\left(\int_{\mathbb{R}^n}|u|^{p^*}dx\right)^{\frac{p}{p^*}}\end{aligned}$$

o que implica que $F(t) = M_F$. □

1.3 Lema de Brézis-Lieb generalizado

O próximo teorema é uma versão do lema de Brézis-Lieb (teorema C.1) para o espaço vetorial $L^p(\Omega, \mathbb{R}^k)$.

Teorema 1.1. *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto limitado, e* $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *uma função contínua, positiva e p-homogênea, onde* $p > 0$. *Se* (U_α) *é uma sequência limitada em* $L^p(\Omega, \mathbb{R}^k)$ *e* $U_\alpha \to U$ *q.t.p em* Ω, *onde* $U \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^k)$, *então:*

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_\Omega (F(U_\alpha) - F(U_\alpha - U))dx = \int_\Omega F(U)dx$$

Uma demonstração simples deste teorema pode ser vista no Apêndice.

1.4 Princípio de concentração e compacidade generalizado.

O próximo resultado é uma versão do princípio de concentração e compacidade no sentido vetorial.

Teorema 1.2. *Sejam* Ω *um aberto limitado de* $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$, μ *e* ν *duas medidas não negativas,* $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *uma função contínua, positiva e* p^**-homogênea com* $1 \leq p < n$ *e* $(U_\alpha) \subset W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ *uma sequência tal que*

$$U_\alpha \rightharpoonup U \quad em \quad W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k)$$

$$|\nabla U_\alpha|^p dx \rightharpoonup \mu \quad em \quad M(\Omega)$$

$$F(U_\alpha)dx \rightharpoonup \nu \quad em \quad M(\Omega)$$

Então existem, um conjunto enumerável τ, *uma família de pontos* $\{x_j\}_{j\in\tau} \subset \overline{\Omega}$ *e uma família de números positivos* $\{\mu_j\}_{j\in\tau}$ *e* $\{\nu_j\}_{j\in\tau}$ *tal que*

$$\mu \geq |\nabla U|^p dx + \sum_{j\in\tau} \mu_j \delta_{x_j},$$

$$\nu = F(U)dx + \sum_{j\in\tau} \nu_j \delta_{x_j},$$

$$\mathcal{A}_0(p, F, n)\mu_j \geq \nu_j^{\frac{p}{p^*}}, \forall\ j \in \tau.$$

Onde $\mathcal{A}_0(p, F, n)$ *é a Constante em (1.4), e* δ_{x_j} *é a medida de Dirac definida por*

$$\delta_{x_j}(E) = \begin{cases} 1, & se\ x_j \in E \\ 0, & se\ x_j \notin E \end{cases}$$

para todo $E \subset \Omega$ *mensurável. Também chamamos a medida* δ_{x_j} *de medida atômica e* x_j *de átomos.*

Uma demonstração deste teorema pode ser vista no Apêndice.

CAPÍTULO 2

Teoria de minimização

Neste Capítulo, vamos definir o funcional energia Φ_G. Recentemente, Leandro Leme em sua dissertação de mestrado [20], mostrou a existência de minimizadores para este funcional específico, sujeito a algumas hipóteses, dividindo a demonstração em dois teoremas, abordando o caso sub-crítico e o caso crítico. Enunciamos estes resultados em nosso apêndice (veja os teoremas D.1 e D.2). Vamos aproveitar este desenvolvimento para estudar a compacidade destes minimizadores. Também dividiremos a demonstração em dois teoremas, abordando o caso sub-crítico e o caso crítico. Começaremos com algumas definições importantes.

2.1 Definições

Denotaremos por E_k *o espaço vetorial* $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k)$, *e por* $\Phi_G : E_k \to \mathbb{R}$ *o funcional*

$$\Phi_G(U) := \int_\Omega |\nabla U|^p dx - \int_\Omega G(x, U) dx,$$

onde $G : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *é r-homogênea na segunda variável e contínua. Também definimos o subconjunto fechado* E_F *de* E_k *como*

$$E_F := \left\{ U \in E_k : \int_\Omega F(U) dx = 1 \right\},$$

onde $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ *é s-homogênea, contínua e positiva.*

Definição 2.1. *O funcional* Φ *é dito coercivo se existe uma constante positiva c tal que*

$$\Phi(U) \geq c\|U\|_{E_k}^p$$

para todo $U \in E_k$.

Proposição 2.1. *Se* $1 \leq r < p^*$, $r \leq s \leq p^*$ *e* $1 < p < n$, *então* Φ_G *está bem definida.*

Demonstração. Seja o compacto $\overline{\Omega} \times S_r^{k-1}$, e $\|U\| = \left(\sum_{i=1}^k |u_i|^r\right)^{\frac{1}{r}}$, então

$$|G(x, \frac{U}{\|U\|})| \leq M_G$$

logo

$$|G(x,U)| \leq M_G \sum_{i=1}^k |u_i|^r$$

Usando o teorema de Rellich-Kondrachov, temos que

$$\begin{aligned} |\Phi_G(U)| &\leq \|U\|_{E_k}^p + \int_\Omega |G(x,U)|dx \\ &\leq \|U\|_{E_k}^p + M_G \int_\Omega \sum_{i=1}^k |u_i|^r dx \\ &= \|U\|_{E_k}^p + M_G \|U\|_{L^r(\Omega,\mathbb{R}^k)}^r < \infty. \end{aligned}$$

□

Lema 2.1. *Se* $1 \leq r < p^*$, $r \leq s \leq p^*$ *e* $1 < p < n$, *então* Φ_G *é limitado inferiormente em* E_F.

Demonstração. Com efeito, (teoremas A.4 e A.5) $U \in E_F$ implica que $U \in L^s(\Omega, \mathbb{R}^k)$, além disso, cada $|u_i|^r \in L^{\frac{s}{r}}(\Omega)$ e $1 \in L^q(\Omega)$ onde $\frac{1}{q} + \frac{r}{s} = 1$, pela limitação de Ω e usando a desigualdade de Holder, temos que

$$\int_\Omega \sum_{i=1}^k |u_i|^r dx \leq \sum_{i=1}^k \left(\int_\Omega |u_i|^s dx\right)^{\frac{r}{s}} \underbrace{\left(\int_\Omega dx\right)^{\frac{1}{q}}}_{\widetilde{C}}.$$

Agora, procedendo como no lema 1.1, temos que

$$m_F \sum_{i=1}^k |u_i|^s \leq F(U).$$

Logo

$$m_F^{r/s} \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^k |u_i|^s dx\right)^{\frac{r}{s}} \leq \left(\int_\Omega F(U)dx\right)^{\frac{r}{s}}.$$

Finalmente usando a desigualdade (1.4), temos que

$$\Phi_G(U) \geq -M_G \int_\Omega \sum_{i=1}^k |u_i|^r dx \geq -\widetilde{C} M_G \sum_{i=1}^k \left(\int_\Omega |u_i|^s dx\right)^{\frac{r}{s}}$$

$$\geq -\widetilde{C} M_G k \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^k |u_i|^s dx\right)^{\frac{r}{s}} \geq -\widetilde{C} M_G k m_F^{-r/s} \underbrace{\left(\int_\Omega F(U)dx\right)^{\frac{r}{s}}}_{=1}.$$

□

Proposição 2.2. *Seja*

$$C := \inf_{U \in E_F} \Phi_G(U).$$

Se C é atingido em E_F por U_0, então para toda $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$, U_0 satisfaz

$$\begin{aligned} & p\int_\Omega \varphi|\nabla U_0|^p dx + p\sum_{i=1}^k \int_\Omega |\nabla u_0^i|^{p-2}\nabla u_0^i(u_0^i\nabla\varphi)dx - r\int_\Omega \varphi G(x,U_0)dx \\ & = C_0 \int_\Omega \varphi F(U_0)dx \end{aligned}$$

onde $C_0 = (p\int_\Omega |\nabla U_0|^p dx - r\int_\Omega G(x,U_0)dx)$.

Demonstração. Para toda $\varphi \in C^1(\mathbb{R}^n)$, defina

$$W(t) = \frac{U_0 + t\varphi U_0}{(\int_\Omega F(U_0 + t\varphi U_0)dx)^{\frac{1}{s}}}.$$

Claramente para $|t|$ pequeno, $W(t) \in E_F$ e

$$W'(0) = \varphi U_0 - U_0 \int_\Omega \varphi F(U_0)dx.$$

Por comodidade vamos definir os funcionais $\Phi_G^1 = \int_\Omega |\nabla W(t)|^p dx$ e $\Phi_G^2 = \int_\Omega G(x, W(t))dx$.

Como $\frac{d}{dU}\int_\Omega |\nabla u|^p dx.h = p\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \nabla h dx$ com $h \in C_0^\infty(\Omega)$ temos que

$$\begin{aligned} \frac{d}{dW}\Phi_G^1(W(0)).W'(0) &= p\sum_{i=1}^k \int_\Omega |\nabla u_0^i|^{p-2}\nabla u_0^i \nabla(\varphi u_0^i)dx \\ &\quad -p\sum_{i=1}^k \int_\Omega |\nabla u_0^i|^{p-2}\nabla u_0^i\nabla(u_0^i \int_\Omega \varphi F(U_0)dx)dx \\ &= p\sum_{i=1}^k \int_\Omega \varphi|\nabla u_0^i|^p dx + p\sum_{i=1}^k \int_\Omega |\nabla u_0^i|^{p-2}\nabla u_0^i(u_0^i\nabla\varphi)dx \\ &\quad -p\int_\Omega \varphi F(U_0)dx \sum_{i=1}^k \int_\Omega |\nabla u_0^i|^p dx \\ &= p\int_\Omega \varphi|\nabla U_0|^p dx - p\int_\Omega \varphi F(U_0)dx \int_\Omega |\nabla U_0|^p dx \\ &\quad +p\sum_{i=1}^k \int_\Omega |\nabla u_0^i|^{p-2}\nabla u_0^i(u_0^i\nabla\varphi)dx. \end{aligned}$$

Além disso, calculando

$$\frac{d}{dW}\Phi_G^2(W(t)).W'(t) = \frac{d}{dt}\int_\Omega \frac{(1+t\varphi)^r G(x,U_0)}{(\int_\Omega F(U_0 + t\varphi U_0)dx)^{\frac{r}{s}}}dx$$

no ponto $t = 0$, temos que

$$\frac{d}{dW}\Phi_G^2(W(0)).W'(0) = r\int_\Omega \varphi G(x,U_0)dx - r\int_\Omega \varphi F(U_0)dx \int_\Omega G(x,U_0)dx,$$

ou seja

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}\Phi_G(W(t))|_{t=0} &= p\int_\Omega \varphi|\nabla U_0|^p dx + p\sum_{i=1}^k \int_\Omega |\nabla u_0^i|^{p-2}\nabla u_0^i(u_0^i\nabla\varphi)dx \\ &\quad -r\int_\Omega \varphi G(x,U_0)dx \\ &\quad -\int_\Omega \varphi F(U_0)dx \underbrace{\left(p\int_\Omega |\nabla U_0|^p dx - r\int_\Omega G(x,U_0)dx\right)}_{C_0}.\end{aligned}$$

Como $W(0) = U_0$ é um ponto crítico do funcional Φ_G, temos que se a derivada existe ela é nula nesse ponto ou seja $\frac{d}{dt}\Phi_G(W(t))|_{t=0} = 0$. $\square$

2.2 Compacidade dos minimizadores

Vamos estender um pouco a definição de Φ_G.

Seja $\Phi_{G_\alpha} : E_k \to \mathbb{R}$ o funcional

$$\Phi_{G_\alpha}(U) := \int_\Omega |\nabla U|^p dx - \int_\Omega G_\alpha(x,U)dx,$$

onde $G_\alpha : \overline{\Omega}\times\mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ é r_α-homogênea na segunda variável e contínua. Também definimos o subconjunto fechado E_{F_α} de E_k como

$$E_{F_\alpha} := \left\{U \in E_k :\ \int_\Omega F_\alpha(U)dx = 1\right\},$$

onde $F_\alpha : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ é s_α-homogênea, contínua e positiva.

2.2.1 Caso subcrítico

Para facilitar a leitura dos resultados, sempre que $F_\alpha \to F$ em $C^0_{loc}(\mathbb{R}^k,\mathbb{R})$ e $G_\alpha \to G$ em $C^0_{loc}(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^k,\mathbb{R})$, onde F é s-homogênea e G r-homogênea na segunda variável, considere que $s_\alpha \to s$ e $r_\alpha \to r$.

Teorema 2.1. *Seja*

$$C_\alpha := \inf_{U\in E_{F_\alpha}} \Phi_{G_\alpha}(U),$$

onde $1 \le r_\alpha \le s_\alpha < p^*$ e $1 < p < n$. Assuma que $F_\alpha \to F$ em $C^0_{loc}(\mathbb{R}^k,\mathbb{R})$ e $G_\alpha \to G$ em $C^0_{loc}(\overline{\Omega}\times\mathbb{R}^k,\mathbb{R})$, onde F é s-homogênea com $s < p^*$ e G r-homogênea na segunda variável. Se Φ_{G_α} é um funcional coercivo e $U_\alpha \in E_{F_\alpha}$ é um minimizante para Φ_{G_α}, então $U_\alpha \rightharpoonup U_0$ em E_k e C é atingido em E_F por U_0.

Antes de demonstrar este teorema vamos apresentar alguns lemas para facilitar a demonstração.
Seja (U_α) *uma sequência, tal que para cada* $\alpha > 0$, $U_\alpha \in E_{F_\alpha}$ *seja o minimizante de* Φ_{G_α}. *De maneira análoga a demonstração do lema D.2, temos que as sequências* (m_{F_α}) *e* (M_{G_α}) *são convergentes.*

Lema 2.2. $\Phi_{G_\alpha}(U_\alpha) = C_\alpha \to C$.

Demonstração. Fixe uma aplicação $U \in E_k$ não identicamente nula. Para cada $\alpha > 0$, temos

$$C_\alpha \leq \Psi_\alpha(U) \ ,$$

onde

$$\Psi_\alpha(U) = \frac{\int_\Omega |\nabla U|^p \, dx}{(\int_\Omega F_\alpha(U) \, dx)^{p/s_\alpha}} - \frac{\int_\Omega G_\alpha(x,U) \, dx}{(\int_\Omega F_\alpha(U) \, dx)^{r_\alpha/s_\alpha}} \ .$$

Usando as hipóteses de convergências da F_α e da G_α em C^0_{loc}, é fácil ver pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue que

$$\Psi_\alpha(U) \to \Psi_0(U) = \frac{\int_\Omega |\nabla U|^p \, dx}{(\int_\Omega F(U) \, dx)^{p/s}} - \frac{\int_\Omega G(x,U) \, dx}{(\int_\Omega F(U) \, dx)^{r/s}} \ .$$

quando $\alpha \to \infty$. Portanto,

$$\limsup_{\alpha \to \infty} C_\alpha \leq \lim_{\alpha \to \infty} \Psi_\alpha(U) = \Psi_0(U) \ .$$

Tomando o ínfimo em U no lado direito acima, segue que

$$\limsup_{\alpha \to 0} C_\alpha \leq C \ .$$

Por outro lado, seja

$$\lambda_0 = \left(\int_\Omega F(U) \, dx \right)^{1/s} \quad e \quad \lambda_\alpha = \left(\int_\Omega F_\alpha(U) \, dx \right)^{1/s_\alpha}$$

Observe que

$$\frac{\int_\Omega G_\alpha(x,U) \, dx}{\lambda_\alpha^{r_\alpha}} = \int_\Omega G_\alpha(x, \frac{U}{\lambda_\alpha}) \, dx \leq |\Omega|^{\frac{s_\alpha - r_\alpha}{r_\alpha}} k M_{G_\alpha} m_{F_\alpha}^{-r_\alpha/s_\alpha} \leq K_1$$

e

$$\frac{\int_\Omega G(x,U) \, dx}{\lambda_0^r} \leq K_2.$$

Além disso, pela desigualdade de holder e pelo lema 2.5, dado $\eta > 0$, temos

$$\frac{\lambda_\alpha^p}{\lambda_0^p} = \left(\int_\Omega F_\alpha(\frac{U}{(\int_\Omega F(U)\,dx)^{1/s}})\,dx\right)^{p/s_\alpha} \leq \left(\int_\Omega F_\alpha(\frac{U}{(\int_\Omega F(U)\,dx)^{1/s}})^{s/s_\alpha}\,dx\right)^{p/s} |\Omega|^{p(s-s_\alpha)/ss_\alpha}$$

$$\leq \left(\int_\Omega (1+\eta)F(\frac{U}{(\int_\Omega F(U)\,dx)^{1/s}})\,dx\right)^{p/s} |\Omega|^{p(s-s_\alpha)/ss_\alpha} \leq (1+\eta)^{p/s}|\Omega|^{\frac{p(s-s_\alpha)}{ss_\alpha}}$$

Como η é dado, segue que

$$\frac{\lambda_\alpha^p}{\lambda_0^p} \leq |\Omega|^{\frac{p(s-s_\alpha)}{ss_\alpha}}$$

Usando a hipótese de coercividade obtemos

$$0 \leq \Psi_0(U) = \frac{\int_\Omega |\nabla U|^p\,dx}{\lambda_0^p} - \frac{\int_\Omega G(x,U)\,dx}{\lambda_0^r}$$

$$= \frac{\lambda_\alpha^p}{\lambda_0^p}\left(\frac{\int_\Omega |\nabla U|^p\,dx}{\lambda_\alpha^p} - \frac{\int_\Omega G_\alpha(x,U)\,dx}{\lambda_\alpha^{r_\alpha}}\right) + \frac{\lambda_\alpha^p}{\lambda_0^p}\frac{\int_\Omega G_\alpha(x,U)\,dx}{\lambda_\alpha^{r_\alpha}} - \frac{\int_\Omega G(x,U)\,dx}{\lambda_0^r}$$

$$= \frac{\lambda_\alpha^p}{\lambda_0^p}\Psi_\alpha(U) + \frac{\lambda_\alpha^p}{\lambda_0^p}\frac{\int_\Omega G_\alpha(x,U)\,dx}{\lambda_\alpha^{r_\alpha}} - \frac{\int_\Omega G_\alpha(x,U)\,dx}{\lambda_\alpha^{r_\alpha}} + \frac{\int_\Omega G_\alpha(x,U)\,dx}{\lambda_\alpha^{r_\alpha}} - \frac{\int_\Omega G(x,U)\,dx}{\lambda_0^r}$$

$$\leq |\Omega|^{\frac{p(s-s_\alpha)}{ss_\alpha}}\Psi_\alpha(U) + K_1|\ |\Omega|^{\frac{p(s-s_\alpha)}{ss_\alpha}} - 1| + \left|\frac{\int_\Omega G_\alpha(x,U)\,dx}{\lambda_\alpha^{r_\alpha}} - \frac{\int_\Omega G(x,U)\,dx}{\lambda_0^r}\right|.$$

Pela 0-homogeneidade do último termo, temos que

$$C \leq |\Omega|^{\frac{p(s-s_\alpha)}{ss_\alpha}}\Psi_\alpha(U) + K_1|\ |\Omega|^{\frac{p(s-s_\alpha)}{ss_\alpha}} - 1| + \sup_{\substack{U\in E_k,\\ \|U\|_\infty=1}}\left\{\left|\frac{\int_\Omega G_\alpha(x,U)\,dx}{\lambda_\alpha^{r_\alpha}} - \frac{\int_\Omega G(x,U)\,dx}{\lambda_0^r}\right|\right\}.$$

Como $\inf\limits_{U\in E_k/\{0\}} \Psi_\alpha(U) = C_\alpha$, temos

$$C \leq |\Omega|^{\frac{p(s-s_\alpha)}{ss_\alpha}}C_\alpha + K_1|\ |\Omega|^{\frac{p(s-s_\alpha)}{ss_\alpha}} - 1| + \sup_{\substack{U\in E_k,\\ \|U\|_\infty=1}}\left\{\left|\frac{\int_\Omega G_\alpha(x,U)\,dx}{\lambda_\alpha^{r_\alpha}} - \frac{\int_\Omega G(x,U)\,dx}{\lambda_0^r}\right|\right\}.$$

Finalmente, tomando $\liminf\limits_{\alpha\to\infty}$ de ambos os lados, temos que

$$\liminf_{\alpha\to\infty} C_\alpha \geq C\ .$$

$\square$

Lema 2.3. *(U_α) é limitada em E_K. Consequentemente $U_\alpha \rightharpoonup U_0$ a menos de subsequência.*

Demonstração. A desigualdade

$$\left|\int_\Omega G_\alpha(x,U_\alpha)dx\right| \leq M_{G_\alpha}|\Omega|^{\frac{s_\alpha - r_\alpha}{s_\alpha}} k m_{F_\alpha}^{-r_\alpha/s_\alpha} \underbrace{\left(\int_\Omega F_\alpha(U_\alpha)dx\right)^{\frac{r_\alpha}{s_\alpha}}}_{=1} \leq C_2$$

mostra que a sequência $(\int_\Omega G_\alpha(x,U_\alpha)dx)$ é limitada, além disso a sequência $(\Phi_{G_\alpha}(U_\alpha))$ é limitada pois é convergente, logo $(\int_\Omega |\nabla U_\alpha|^p dx)$ é limitado, ou seja (U_α) é limitada em E_K. Como E_k é reflexivo temos que $U_\alpha \rightharpoonup U_0$ a menos de subsequência. □

Lema 2.4.

$$\int_\Omega G_\alpha(x,U_\alpha)dx \to \int_\Omega G(x,U_0)dx.$$

Demonstração. Pelo teorema de Rellich-Kondrachov, $U_\alpha \to U_0$ em $L^s(\Omega,\mathbb{R}^k)$, consequentemente $u_\alpha^i \to u_0^i$ em $L^s(\Omega)$, além disso o teorema A.6 diz que a menos de subsequência

(i) $u_\alpha^i \to u_0^i$ q.t.p em Ω, ou seja $u_\alpha^i \to u_0^i$ em Ω a menos de um conjunto de medida nula Ω_0.

(ii) $|u_\alpha^i| \leq h_i(x)$ q.t.p em Ω e $h_i \in L^s(\Omega)$.

Fixado $x \in \Omega \backslash \Omega_0$, consideremos o compacto $K = \{U_\alpha(x), U_0(x)\} \subset \mathbb{R}^k$ para todo $\alpha > 0$, por hipótese, dado $\delta > 0$, $|G_\alpha(x,U_\alpha) - G(x,U_\alpha)| \leq \delta$ para todo $\alpha > \alpha_0$, logo

$$\lim_{\alpha\to\infty} G_\alpha(x,U_\alpha) = \lim_{\alpha\to\infty}(G_\alpha(x,U_\alpha) - G(x,U_\alpha)) + \lim_{\alpha\to\infty} G(x,U_\alpha) = G(x,U_0),$$

ou seja, $G_\alpha(x,U_\alpha) \to G(x,U_0)$ q.t.p em Ω. Além disso, pela desigualdade de Young, temos que $|G_\alpha(x,U_\alpha)|$ é dominada por

$$\begin{aligned} |G_\alpha(x,U_\alpha)| &\leq M_{G_\alpha}\sum_{i=1}^k |u_\alpha^i|^{r_\alpha} \\ &\leq M_{G_\alpha}\sum_{i=1}^k \left(\frac{s-r_\alpha}{s} + \frac{r_\alpha}{s}|u_\alpha^i|^s\right) \\ &\leq \widetilde{M}\sum_{i=1}^k \left(1 + |u_\alpha^i|^s\right) \\ &\leq \widetilde{M}\left(k + \sum_{i=1}^k |u_\alpha^i|^s\right) \\ &\leq \widetilde{M}\left(k + \sum_{i=1}^k h_i^s\right) \in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, temos que

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_\Omega G_\alpha(x,U_\alpha)dx = \int_\Omega G(x,U_0)dx.$$

□

***Demonstração do Teorema 2.1**:*

Afirmação:

$$\Phi_G(U_0) \leq \liminf_{\alpha\to\infty} \Phi_{G_\alpha}(U_\alpha).$$

Para mostrar essa afirmação, observamos primeiro que o funcional $f(U) = \int_\Omega |\nabla U|^p dx$ é convexo e contínuo, e os teoremas A.7 e A.8 garantem que também é fracamente sequencialmente semicontínua inferiormente em E_F ou seja $\forall\ (U_\alpha) \subset E_k$ tal que $U_\alpha \rightharpoonup U_0$, tem-se $\int_\Omega |\nabla U_0|^p dx \leq \liminf \int_\Omega |\nabla U_\alpha|^p dx$, então

$$\begin{aligned}
\liminf_{\alpha\to\infty} \Phi_{G_\alpha}(U_\alpha) &= \liminf_{\alpha\to\infty} \left(\int_\Omega \left(|\nabla U_\alpha|^p - G_\alpha(x, U_\alpha) \right) dx \right) \\
&\geq \liminf_{\alpha\to\infty} \int_\Omega |\nabla U_\alpha|^p dx - \lim_{\alpha\to\infty} \int_\Omega G_\alpha(x, U_\alpha) dx \\
&\geq \int_\Omega |\nabla U_0|^p dx - \int_\Omega G(x, U_0) dx = \Phi_G(U_0).
\end{aligned}$$

Para concluírmos a demonstração basta ver que $U_0 \in E_F$. De fato, pelo teorema de Rellich-Kondrachov, $U_\alpha \to U_0$ em $L^s(\Omega, \mathbb{R}^k)$, consequentemente $u_\alpha^i \to u_0^i$ em $L^s(\Omega)$, além disso, o teorema A.6 diz que a menos de subsequência

(i) $u_\alpha^i \to u_0^i$ q.t.p em Ω, ou seja $u_\alpha^i \to u_0^i$ em Ω a menos de um conjunto de medida nula Ω_0.

(ii) $|u_\alpha^i| \leq h_i(x)$ q.t.p em Ω e $h_i \in L^s(\Omega)$.

Fixado $x \in \Omega\backslash\Omega_0$, consideremos o compacto $K = \{U_\alpha(x), U_0(x)\} \subset \mathbb{R}^k$ para todo $\alpha > 0$, por hipótese, dado $\delta > 0$, $|F_\alpha(U_\alpha) - F(U_\alpha)| \leq \delta$ para todo $\alpha > \alpha_0$, logo

$$\lim_{\alpha\to\infty} F_\alpha(U_\alpha) = \lim_{\alpha\to\infty} \left(F_\alpha(U_\alpha) - F(U_\alpha)\right) + \lim_{\alpha\to\infty} F(U_\alpha) = F(U_0),$$

ou seja, $F_\alpha(U_\alpha) \to F(U_0)$ q.t.p em Ω. Além disso, pela desigualdade de Young, temos que $F_\alpha(U_\alpha)$ é dominada por

$$\begin{aligned}
F_\alpha(U_\alpha) &\leq M_{F_\alpha} \sum_{i=1}^k |u_\alpha^i|^{s_\alpha} \\
&\leq M_{F_\alpha} \sum_{i=1}^k \left(\frac{s - s_\alpha}{s} + \frac{s_\alpha}{s} |u_\alpha^i|^s \right) \\
&\leq \overline{M} \left(k + \sum_{i=1}^k h_i^s \right) \in L^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, temos que

$$1 = \lim_{\alpha\to\infty} \int_\Omega F_\alpha(U_\alpha) dx = \int_\Omega F(U_0) dx$$

ou seja $U_0 \in E_F$. Portanto U_0 é um minimizador não trivial para Φ_G.

2.2.2 Caso crítico

Lema 2.5. *Considere $F, F_\alpha : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, p^*-homogêneas, contínuas e positivas, tal que $F_\alpha \to F$ em $C^0_{loc}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$. Então, dado $\eta > 0$, temos que*

$$F_\alpha(t) \leq (1+\eta)F(t).$$

Demonstração. Seja o compacto $S^{k-1}_{p^*}$, para $t \in \mathbb{R}^k$ denotemos $\|t\|_k = \left(\sum_{i=1}^k |t^i|^{p^*}\right)^{1/p^*}$, logo pela hipótese de convergência, dado $\delta > 0$ existe α_0 tal que para todo $\alpha > \alpha_0$

$$\left| F_\alpha\left(\frac{t}{\|t\|_k}\right) - F\left(\frac{t}{\|t\|_k}\right) \right| \leq \delta.$$

como $F\left(\frac{t}{\|t\|_k}\right) \geq M_F$, temos que

$$|F_\alpha(t) - F(t)| \leq \delta \|t\|_k \leq \frac{\delta}{M_F} F(t).$$

Tomando $\eta = \frac{\delta}{M_F}$ temos que

$$F_\alpha(t) \leq (1+\eta)F(t).$$

□

Teorema 2.2. *Seja*

$$C_\alpha := \inf_{U \in E_{F_\alpha}} \Phi_{G_\alpha}(U),$$

onde $1 \leq r_\alpha \leq s_\alpha \leq p^*$ e $1 < p < n$. Assuma que $F_\alpha \to F$ em $C^0_{loc}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$, $G_\alpha \to G$ em $C^0_{loc}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R})$, onde F é p^*-homogênea e G p-homogênea na segunda variável.
Se Φ_G é um funcional coercivo, $U_\alpha \in E_{F_\alpha}$ é um minimizante de Φ_{G_α} e $\lim_{\alpha \to \infty} C_\alpha \leq \mathcal{A}_0(p, F, n)^{-1}$, então $U_\alpha \rightharpoonup U_0$ em E_k. Além disso, temos que

(i) $U_0 = 0$ e $U_\alpha \nrightarrow 0$ em $L^{p^*}(\Omega, \mathbb{R}^k)$, ou

(ii) $U_0 \neq 0$ e $U_\alpha \to U_0$ em $L^{p^*}(\Omega, \mathbb{R}^k)$, neste caso C é atingido em E_F por U_0.

Demonstração. Seja (U_α) uma sequência, tal que para cada $\alpha > 0$, $U_\alpha \in E_{F_\alpha}$ seja o minimizante de Φ_{G_α}. Os lemas 2.2 e 2.3, mostram que $C_\alpha \to C$ e (U_α) é limitada em E_k, logo $U_\alpha \rightharpoonup U_0$ em E_k. Se $U_0 = 0$ e $U_\alpha \to 0$ em $L^{p^*}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$, então $u^i_\alpha \to 0$ em $L^{P^*}(\Omega)$, além disso o teorema A.6 diz que a menos de subsequência

(i) $u^i_\alpha \to 0$ q.t.p em Ω, ou seja $u^i_\alpha \to 0$ em Ω a menos de um conjunto de medida nula Ω_0.

(ii) $|u^i_\alpha| \leq h_i(x)$ q.t.p em Ω e $h_i \in L^{P^*}(\Omega)$.

Fixado $x \in \Omega \backslash \Omega_0$, consideremos o compacto $K = \{U_\alpha(x), 0\} \subset \mathbb{R}^k$ para todo $\alpha > 0$, por hipótese, dado $\delta > 0$, $|F_\alpha(U_\alpha) - F(U_\alpha)| \leq \delta$ para todo $\alpha > \alpha_0$, logo

$$\lim_{\alpha\to\infty} F_\alpha(U_\alpha) = \lim_{\alpha\to\infty} (F_\alpha(U_\alpha) - F(U_\alpha)) + \lim_{\alpha\to\infty} F(U_\alpha) = F(0) = 0,$$

ou seja, $F_\alpha(U_\alpha) \to 0$ q.t.p em Ω. Além disso, pela desigualdade de Young, temos que $F_\alpha(U_\alpha)$ é dominada por

$$\begin{aligned} F_\alpha(U_\alpha) &\leq M_{F_\alpha} \sum_{i=1}^{k} |u_\alpha^i|^{s_\alpha} \\ &\leq M_{F_\alpha} \sum_{i=1}^{k} \left(\frac{p^* - s_\alpha}{p^*} + \frac{s_\alpha}{p^*} |u_\alpha^i|^{p^*} \right) \\ &\leq \overline{M} \left(k + \sum_{i=1}^{k} h_i^{p^*} \right) \in L^1(\Omega). \end{aligned}$$

Pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, temos que

$$1 = \lim_{\alpha\to\infty} \int_\Omega F_\alpha(U_\alpha) dx = \int_\Omega F(0) dx = 0.$$

Absurdo. Agora se $U_0 \neq 0$ o lema D.5 mostra que a menos de subsequência, as medidas $|\nabla U_\alpha|^p dx$ e $F(U_\alpha)dx$ convergem fracamente no sentido de medida em $M(\Omega)$. Então a menos de subsequência temos

$$\begin{aligned} U_\alpha &\rightharpoonup U_0 \quad em \quad E_k, \\ |\nabla U_\alpha|^p dx &\rightharpoonup \mu \quad em \quad M(\Omega), \\ F(U_\alpha)dx &\rightharpoonup \nu \quad em \quad M(\Omega). \end{aligned}$$

Seja a família de pontos $\{x_j\}_{j\in\tau} \subset \overline{\Omega}$ do teorema 1.2. Fixe $k \in \tau$ e defina $\varphi_\delta \in C_0^\infty(\Omega)$, satisfazendo

$$\varphi_\delta(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in B(x_k, \delta) \\ 0, & se\ x \in B(x_k, 2\delta)^c \\ & 0 \leq \varphi_\delta \leq 1 \ \text{ caso contrário} \end{cases}$$

com $|\nabla \varphi_\delta| \leq \frac{c_1}{\delta}$, onde c_1 não depende de δ. Para cada $\alpha > 0$, a proposição 2.2 diz que

$$\begin{aligned} D_\alpha : &= C_0^\alpha \int_\Omega \varphi_\delta F_\alpha(U_\alpha) dx - p \int_\Omega \varphi_\delta |\nabla U_\alpha|^p dx - p \sum_{i=1}^{k} \int_\Omega |\nabla u_\alpha^i|^{p-2} \nabla u_\alpha^i (u_\alpha^i \nabla \varphi_\delta) dx \\ &+ r_\alpha \int_\Omega \varphi_\delta G_\alpha(x, U_\alpha) dx = 0 \end{aligned}$$

onde $C_0^\alpha = p \int_\Omega |\nabla U_\alpha|^p dx - r_\alpha \int_\Omega G_\alpha(x, U_\alpha) dx$. Como $C = \lim_{\alpha\to\infty} \left(\int_\Omega |\nabla U_\alpha|^p dx - \int_\Omega G_\alpha(x, U_\alpha) dx \right)$ temos

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_\Omega |\nabla U_\alpha|^p dx = C + \lim_{\alpha\to\infty} \int_\Omega G_\alpha(x, U_\alpha) dx$$

logo, pelo lema 2.4

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to\infty} C_0^\alpha &= p\lim_{\alpha\to\infty}\int_\Omega |\nabla U_\alpha|^p dx - \lim_{\alpha\to\infty}\int_\Omega r_\alpha G_\alpha(x,U_\alpha)dx\\ &= Cp + (p-p)\int_\Omega G(x,U_0)dx = Cp\end{aligned}$$

Além disso procedendo como no lema 2.4, temos que

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_\Omega \varphi_\delta G_\alpha(x,U_\alpha)dx = \int_\Omega \varphi_\delta G(x,U_0)dx,$$

logo

$$\begin{aligned}\lim_{\alpha\to\infty} D_\alpha &= Cp\lim_{\alpha\to\infty}\int_\Omega \varphi_\delta F_\alpha(U_\alpha)dx - p\int_\Omega \varphi_\delta d\mu\\ &\quad + p\int_\Omega \varphi_\delta G(x,U_0)dx - p\lim_{\alpha\to\infty}\sum_{i=1}^k\int_\Omega |\nabla u_\alpha^i|^{p-2}\nabla u_\alpha^i(u_\alpha^i\nabla\varphi_\delta)dx = 0.\end{aligned}$$

Mas

$$\lim_{\alpha\to\infty}\sum_{i=1}^k\int_\Omega |\nabla u_\alpha^i|^{p-2}\nabla u_\alpha^i(u_\alpha^i\nabla\varphi_\delta)dx \to 0$$

quando $\delta \to 0$. De fato, aplicando a desigualdade de Holder, o teorema 1.2 e fazendo $\delta \to 0$.

$$\lim_{\alpha\to\infty}\sum_{i=1}^k\int_\Omega |\nabla u_\alpha^i|^{p-2}\nabla u_\alpha^i(u_\alpha^i\nabla\varphi_\delta)dx \le \lim_{\alpha\to\infty}\sum_{i=1}^k\int_\Omega |\nabla u_\alpha^i|^{p-1}|u_\alpha^i||\nabla\varphi_\delta|dx$$

$$\le \lim_{\alpha\to\infty}\sum_{i=1}^k\left[\left(\int_\Omega |\nabla u_\alpha^i|^p dx\right)^{(p-1)/p}\left(\int_{B(x_k,2\delta)\setminus B(x_k,\delta)}|\nabla\varphi_\delta|^n dx\right)^{1/n}\left(\int_{B(x_k,2\delta)\setminus B(x_k,\delta)}|u_\alpha^i|^{p^*}dx\right)^{1/p^*}\right]$$

$$\le c_2\left[\frac{c_1^n}{\delta^n}\mathrm{vol}\left(B(x_k,2\delta)\setminus B(x_k,\delta)\right)\right]^{1/n}\lim_{\alpha\to\infty}\sum_{i=1}^k\left(\int_{B(x_k,2\delta)\setminus B(x_k,\delta)}|u_\alpha^i|^{p^*}dx\right)^{1/p^*}$$

$$\le c_3\lim_{\alpha\to\infty}\left(\int_{B(x_k,2\delta)\setminus B(x_k,\delta)}|U_\alpha|^{p^*}dx\right)^{1/p^*} \le c_4\lim_{\alpha\to\infty}\left(\int_{B(x_k,2\delta)\setminus B(x_k,\delta)}F(U_\alpha)dx\right)^{1/p^*}$$

$$\le c_4\left(\int_{B(x_k,2\delta)\setminus B(x_k,\delta)}F(U_0)dx + \sum_{j\in\tau}\nu_j\delta_{x_j}(B(x_k,2\delta)\setminus B(x_k,\delta))\right)^{1/p^*} \to 0$$

quando $\delta \to 0$. Além disso $\lim_{\alpha\to\infty}\int_\Omega \varphi_\delta F_\alpha(U_\alpha)dx \le \int_\Omega \varphi_\delta d\nu$. Com efeito pela desigualdade de Holder, pelo lema 2.5 e pela p^*-homogeneidade de $F_\alpha(U_\alpha)^{\frac{p^*}{s_\alpha}}$ temos dois casos:
Caso 1: $s_\alpha < p^*$.

$$\int_\Omega F_\alpha(U_\alpha)\varphi_\delta\, dx = \int_\Omega F_\alpha(U_\alpha)\varphi_\delta^{s_\alpha/p^*}\varphi_\delta^{1-s_\alpha/p^*}\, dx$$

$$\le \left(\int_\Omega F_\alpha(U_\alpha)^{p^*/s_\alpha}\varphi_\delta\, dx\right)^{s_\alpha/p^*}\left(\int_\Omega \varphi_\delta\, dx\right)^{1-s_\alpha/p^*}$$

$$\leq \left((1+\eta)\int_\Omega F(U_\alpha)\varphi_\delta\, dx\right)^{s_\alpha/p^*}\left(\int_\Omega \varphi_\delta\, dx\right)^{1-s_\alpha/p^*} \to \int_\Omega \varphi_\delta\, d\nu$$

quando $\alpha \to \infty$, uma vez que η é arbitrário.

Caso 2: $s_\alpha = p^*$.

$$\int_\Omega F_\alpha(U_\alpha)\varphi_\delta\, dx \leq (1+\eta)\int_\Omega F(U_\alpha)\varphi_\delta\, dx \to \int_\Omega \varphi_\delta\, d\nu.$$

quando $\alpha \to \infty$, uma vez que η é arbitrário.

Logo $\lim\limits_{\delta\to 0}\lim\limits_{\alpha\to\infty} D_\alpha$ mostra que

$$\mu_k \leq C.\nu_k.$$

Pelo teorema 1.2, e pela coercividade de Φ_G, temos

$$\mu_k \geq \frac{\nu_k^{p/p^*}}{\mathcal{A}_0(p,F,n)} \geq \frac{\mu_k^{p/p^*}}{\mathcal{A}_0(p,F,n).C^{p/p^*}},$$

ou seja,

$$\mu_k^{p/n} \geq \frac{1}{\mathcal{A}_0(p,F,n).C^{p/p^*}}.$$

Portanto

$$\mu_k \geq \frac{1}{\mathcal{A}_0(p,F,n)^{n/p}.C^{n/p^*}}.$$

Como a medida μ é limitada, o conjunto τ é finito. Afirmamos que $\tau = \varnothing$, caso contrário, se $k \in \tau$, então

$$\begin{aligned} C &= \lim_{\alpha\to\infty}\int_\Omega |\nabla U_\alpha|^p dx - \lim_{\alpha\to\infty}\int_\Omega G_\alpha(x,U_\alpha)dx \\ &\geq \int_\Omega |\nabla U_0|^p dx + \sum_{k\in\tau}\mu_k - \int_\Omega G(x,U_0)dx \\ &> \mu_k \geq \frac{1}{\mathcal{A}_0(p,F,n)^{n/p}.C^{n/p^*}}. \end{aligned}$$

Portanto

$$C > \frac{1}{\mathcal{A}_0(p,F,n)}.$$

Mas por hipótese, temos que $C \leq \mathcal{A}_0(p,F,n)^{-1}$. Logo $\mu_k = 0\ \forall k \in \tau$. Então

$$C \geq \int_\Omega |\nabla U_0|^p dx - \int_\Omega G(x,U_0)dx = \Phi_G(U_0)$$

Para finalizarmos a demonstração, basta verificarmos que $U_0 \in E_F$. Pelo teorema da imerssão contínua, segue que (U_α) é limitado em $L^{P^*}(\Omega,\mathbb{R}^k)$ e $U_0 \in L^{P^*}(\Omega,\mathbb{R}^k)$, e os teoremas A.4 e A.6, mostram que a menos de subsequência $U_\alpha \to U_0$ q.t.p em Ω. Além disso, como $\tau = \varnothing$ temos que $\nu_k = 0$ $\forall k \in \tau$, logo

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_\Omega F(U_\alpha)dx = \int_\Omega F(U_0)dx + \sum_{k\in\tau} \nu_k \delta_{x_k} = \int_\Omega F(U_0)dx.$$

Pelo teorema 1.1 temos

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_\Omega \left(F(U_\alpha) - F(U_\alpha - U_0)\right) dx = \int_\Omega F(U_0)dx.$$

Logo

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_\Omega F(U_\alpha - U_0)dx = 0.$$

Mas

$$\int_\Omega F(U_\alpha - U_0)dx \geq m_F \int_\Omega \sum_{i=1}^{k} |u^i_\alpha - u^i_0|^{p^*} dx = m_f \|U_\alpha - U_0\|^{p^*}_{L^{p^*}(\Omega,\mathbb{R}^k)}.$$

Então $U_\alpha \to U_0$ em $L^{P^*}(\Omega, \mathbb{R}^k)$, consequentemente $u^i_\alpha \to u^i_0$ em $L^{P^*}(\Omega)$, além disso o teorema A.6 diz que a menos de subsequência, $u^i_\alpha \to u^i_0$ q.t.p em Ω e $|u^i_\alpha| \leq h_i(x)$ q.t.p em Ω com $h_i \in L^{P^*}(\Omega)$.

Como no início da demonstração, temos que $F_\alpha(U_\alpha) \to F(U_0)$ q.t.p em Ω, e $F_\alpha(U_\alpha)$ é dominada por uma função de $L^1(\Omega)$.

Pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, temos que

$$1 = \lim_{\alpha\to\infty} \int_\Omega F_\alpha(U_\alpha)dx = \int_\Omega F(U_0)dx$$

ou seja $U_0 \in E_F$. Portanto U_0 é um minimizador não trivial para Φ_G. □

O próximo resultado estabelece uma condição na qual a convergência-L^{p^*} do teorema 2.2, se comporta no sentido forte.

Teorema 2.3. *Seja*

$$C_\alpha := \inf_{U\in E_{F_\alpha}} \Phi_{G_\alpha}(U),$$

onde $1 \leq r_\alpha \leq s_\alpha \leq p^*$ *e* $1 < p < n$. *Assuma que* $F_\alpha \to F$ *em* $C^0_{loc}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$, $G_\alpha \to G$ *em* $C^0_{loc}(\overline{\Omega} \times \mathbb{R}^k, \mathbb{R})$, *onde* F *é* p^**-homogênea e* G p*-homogênea na segunda variável.*

Se Φ_G *é um funcional coercivo,* $U_\alpha \in E_{F_\alpha}$ *é um minimizante para* Φ_{G_α} *e* $\lim_{\alpha\to\infty} C_\alpha < \mathcal{A}_0(p, F, n)^{-1}$, *então* $U_\alpha \to U_0$ *em* $L^{p^*}(\Omega, \mathbb{R}^k)$. *Além disso,* C *é atingido em* E_F *por* U_0.

Demonstração. Seja (U_α) uma sequência definida como na prova do teorema 2.2. De forma análoga, segue que $U_\alpha \rightharpoonup U_0$ em E_k e

$$\mu_k \geq \frac{1}{\mathcal{A}_0(p, F, n)^{n/p}.C^{n/p^*}}.$$

Se $\mu_k > 0$, teremos $C \geq \mathcal{A}_0(p, F, n)^{-1}$, contradizendo a hipótese. Pelo teorema 1.1, $U_\alpha \to U_0$ em $L^{p^*}(\Omega, \mathbb{R}^k)$. Consequentemente C é atingido em E_F por U_0. □

Observação 2.1. *Tomando a sequência U_α do teorema 2.2, podemos concluir pelo teorema acima, que se $U_\alpha \rightharpoonup 0$ em E_k, então $C_\alpha := \Phi_{G_\alpha}(U_\alpha) \to \mathcal{A}_0(p,F,n)^{-1}$.*

Teorema 2.4. *Com as mesmas condições do teorema 2.2. Se $U_\alpha \rightharpoonup 0$ em E_k, então U_α tem um único ponto de concentração $x_0 \in \overline{\Omega}$.(ou seja, o cunjunto τ definido no teorema 1.2 tem apenas um elemento).*

Demonstração. O fato de que $\Phi_{G_\alpha}(U_\alpha) \to \mathcal{A}_0(p,F,n)^{-1}$ implica que $\int_\Omega |\nabla U_\alpha|^p dx \to \mathcal{A}_0(p,F,n)^{-1}$, pelo teorema 1.2 e pela desigualdade de Holder temos que

$$1 = \lim_{\alpha\to\infty} \int_\Omega F_\alpha(U_\alpha)dx \leq \int_\Omega F(0)dx + \sum_{j\in\tau} \nu_j = \sum_{j\in\tau} \nu_j$$

e

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_\Omega |\nabla U_\alpha|^p dx \geq \int_\Omega |\nabla 0|^p dx + \sum_{j\in\tau} \mu_j = \sum_{j\in\tau} \mu_j,$$

ou seja,

$$\mathcal{A}_0(p,F,n)^{-1} \geq \sum_{j\in\tau} \mu_j.$$

Usando o fato que $\mathcal{A}_0(p,F,n)\mu_j \geq \nu_j^{\frac{p}{p^*}}, \forall\, j \in \tau$, temos

$$\sum_{j\in\tau} \nu_j^{\frac{p}{p^*}} \leq 1.$$

A última desigualdade mostra que $\nu_j \leq 1, \forall\, j \in \tau$, como $\frac{p}{p^*} < 1$, temos que $\nu_j^{\frac{p}{p^*}} \geq \nu_j, \forall\, j \in \tau$, logo

$$1 \geq \sum_{j\in\tau} \nu_j^{\frac{p}{p^*}} \geq \sum_{j\in\tau} \nu_j \geq 1$$

mostrando que

$$\sum_{j\in\tau} \nu_j = \sum_{j\in\tau} \nu_j^{\frac{p}{p^*}} = 1.$$

Agora se τ tiver mais que um elemento tal que $\nu_j \neq 0$, temos que cada $\nu_j \neq 0$ é estritamente menor que 1, então

$$1 = \sum_{j\in\tau} \nu_j^{\frac{p}{p^*}} > \sum_{j\in\tau} \nu_j = 1.$$

Absurdo, mostrando que τ possui apenas um elemento.

□

CAPÍTULO 3

Estimativa de De Giorgi-Nash-Moser para minimizadores

O teorema 2.2 do capítulo anterior, mostrou que se $U_0 \neq 0$*, a sequência dos minimizadores* (U_α) *convergia em* $L^{p^*}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$*, mas quando* $U_0 = 0$*, vimos que* $U_\alpha \nrightarrow 0$ *em* $L^{p^*}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$*. O próximo resultado apresenta uma estimativa do tipo De Giorgi-Nash-Moser para tais minimizadores. Se supormos que* $U_\alpha \rightharpoonup 0$ *em* E_k*, vamos usar este resultado para apresentar uma estimativa uniforme para estes minimizadores quando* $p = 2$*, e assim verificar o seu comportamento.*

Para os próximos teoremas, vamos considerar que F *é* 2^**-homogênea e* G *2-homogênea na segunda variável.*

Estimativa de De Giorgi-Nash-Moser para minimizadores com $p = 2$***.***

Teorema 3.1. *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um domínio limitado e suave,* $n \geq 3$*. Considere funções* F_α *e* G_α *convergentes ao caso crítico com* $r_\alpha \geq 2$*. Seja* C_α *o nível de energia mínima associado a* F_α *e* G_α*. Se* $C_\alpha \to \mathcal{A}_0(2, F, n)^{-1}$*, então dadas constantes* $q > 2^*$ *e* ℓ*,* $K > 0$*, existe uma constante positiva* c_0*, dependendo somente de* n*,* q*,* ℓ*,* K *e* Ω *tal que para qualquer* $\delta > 0$*, qualquer ponto* $x_0 \in \Omega$ *e qualquer minimizador* $U_\alpha \in E_{F_\alpha}$ *para* C_α *satisfazendo*

$$||U_\alpha||_{L^q(B(x_0,2\delta)\cap\Omega,\mathbb{R}^k)} \leq K\,,$$

temos

$$\sup_{B(x_0,\delta)\cap\Omega} |U_\alpha| \leq c_0 \delta^{-n/\ell} \left(\int_{B(x_0,2\delta)\cap\Omega} |U_\alpha|^\ell \, dx \right)^{1/\ell} \tag{3.1}$$

para α *grande.*

Demonstração. Seja $U_\alpha \in E_{F_\alpha}$ um minimizador para C_α. Fixe ε, α e $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, e defina o funcional

$$h_\varepsilon(t) = \frac{\int_\Omega |\nabla(U_\alpha + tv_\varepsilon^{-1}\varphi U_\alpha)|^2\, dx}{\left(\int_\Omega F_\alpha(U_\alpha + tv_\varepsilon^{-1}\varphi U_\alpha)\, dx\right)^{2/s_\alpha}} - \frac{\int_\Omega G_\alpha(x, U_\alpha + tv_\varepsilon^{-1}\varphi U_\alpha)\, dx}{\left(\int_\Omega F_\alpha(U_\alpha + tv_\varepsilon^{-1}\varphi U_\alpha)\, dx\right)^{r_\alpha/s_\alpha}}$$

para $t \in (-\delta, \delta)$, onde

$$v_\varepsilon := \left(\sum_{i=1}^k (u_i^\alpha)^2 + \varepsilon\right)^{1/2} .$$

Pela homogeneidade de F_α e G_α, $h_\varepsilon(t)$ pode ser escrita

$$h_\varepsilon(t) = \frac{\int_\Omega |\nabla(U_\alpha + tv_\varepsilon^{-1}\varphi U_\alpha)|^2\, dx}{\left(\int_\Omega (1 + tv_\varepsilon^{-1}\varphi)^{s_\alpha} F_\alpha(U_\alpha)\, dx\right)^{2/s_\alpha}} - \frac{\int_\Omega (1 + tv_\varepsilon^{-1}\varphi)^{r_\alpha} G_\alpha(x, U_\alpha)\, dx}{\left(\int_\Omega (1 + tv_\varepsilon^{-1}\varphi)^{s_\alpha} F_\alpha(U_\alpha)\, dx\right)^{r_\alpha/s_\alpha}}.$$

Analogamente a demonstração da proposição 2.2, temos que h_ε é diferenciável em $t = 0$ e, $h'_\varepsilon(0) = 0$, ou seja, $t = 0$ é um ponto de mínimo para h_ε. Então,

$$h'_\varepsilon(0) = 2\int_\Omega \nabla U_\alpha \cdot \nabla(v_\varepsilon^{-1}\varphi U_\alpha)\, dx - r_\alpha \int_\Omega v_\varepsilon^{-1} G_\alpha(x, U_\alpha)\varphi\, dx - C^\alpha \int_\Omega v_\varepsilon^{-1} F_\alpha(U_\alpha)\varphi\, dx = 0\,,$$

onde $C^\alpha = 2\int_\Omega |\nabla U_\alpha|^2\, dx - r_\alpha \int_\Omega G_\alpha(x, U_\alpha)\, dx$. Logo

$$\int_\Omega \nabla U_\alpha \cdot \nabla(v_\varepsilon^{-1}\varphi U_\alpha)\, dx = \frac{C^\alpha}{2}\int_\Omega v_\varepsilon^{-1} F(U_\alpha)\varphi\, dx + \frac{r_\alpha}{2}\int_\Omega v_\varepsilon^{-1} G(x, U_\alpha)\varphi\, dx. \tag{3.2}$$

Por outro lado, para qualquer função não negativa $\varphi \in C^1(\Omega)$, temos

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega \nabla v_\varepsilon \cdot \nabla\varphi \, dx &= \int_\Omega v_\varepsilon^{-1}(\sum_{i=1}^k u_i^\alpha \nabla u_i^\alpha)\cdot\nabla\varphi\, dx \\
&= \int_\Omega \sum_{i=1}^k \Big[(u_i^\alpha\nabla u_i^\alpha)\cdot\Big(\nabla(\varphi v_\varepsilon^{-1}) - \varphi\nabla v_\varepsilon^{-1}\Big)\Big]\, dx \\
&= \int_\Omega \sum_{i=1}^k \Big[\nabla u_i^\alpha\cdot\Big(u_i^\alpha\nabla(\varphi v_\varepsilon^{-1}) - u_i^\alpha\varphi\nabla v_\varepsilon^{-1}\Big)\Big]\, dx \\
&= \int_\Omega \sum_{i=1}^k \Big[\nabla u_i^\alpha\cdot\Big(\nabla(v_\varepsilon^{-1}\varphi u_i^\alpha) - v_\varepsilon^{-1}\varphi\nabla u_i^\alpha - u_i^\alpha\varphi\nabla v_\varepsilon^{-1}\Big)\Big]\, dx \\
&= \int_\Omega \sum_{i=1}^k \Big[\nabla u_i^\alpha\cdot\Big(\nabla(v_\varepsilon^{-1}\varphi u_i^\alpha) - \varphi\nabla(u_i^\alpha v_\varepsilon^{-1})\Big)\Big]\, dx \\
&= \sum_{i=1}^k\int_\Omega \nabla u_i^\alpha\cdot\nabla(v_\varepsilon^{-1}\varphi u_i^\alpha)\, dx - \int_\Omega\sum_{i=1}^k\Big(\varphi\nabla u_i^\alpha\cdot\nabla(u_i^\alpha v_\varepsilon^{-1})\Big)\, dx \\
&= \sum_{i=1}^k\int_\Omega \nabla u_i^\alpha\cdot\nabla(v_\varepsilon^{-1}\varphi u_i^\alpha)\, dx \\
&\quad - \int_\Omega v_\varepsilon^{-3}\varphi\left(v_\varepsilon^2\sum_{i=1}^k|\nabla u_i^\alpha|^2 - |\sum_{i=1}^k u_i^\alpha\nabla u_i^\alpha|^2\right)\, dx\,.
\end{aligned}
$$

uma vez que

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega\sum_{i=1}^k\Big(\varphi\nabla u_i^\alpha\cdot\nabla(u_i^\alpha v_\varepsilon^{-1}\Big)\, dx &= \int_\Omega\varphi\sum_{i=1}^k\Big(v_\varepsilon^{-1}|\nabla u_i^\alpha|^2 + \nabla u_i^\alpha\cdot u_i^\alpha\nabla v_\varepsilon^{-1}\Big)\, dx \\
&= \int_\Omega\varphi v_\varepsilon^{-3}\sum_{i=1}^k\left(v_\varepsilon^2|\nabla u_i^\alpha|^2 - u_i^\alpha\nabla u_i^\alpha\cdot\sum_{i=1}^k u_i^\alpha\nabla u_i^\alpha\right)\, dx \\
&= \int_\Omega\varphi v_\varepsilon^{-3}\left(\sum_{i=1}^k v_\varepsilon^2|\nabla u_i^\alpha|^2 - \sum_{i=1}^k u_i^\alpha\nabla u_i^\alpha\cdot\sum_{i=1}^k u_i^\alpha\nabla u_i^\alpha\right)\, dx \\
&= \int_\Omega v_\varepsilon^{-3}\varphi\left(v_\varepsilon^2\sum_{i=1}^k|\nabla u_i^\alpha|^2 - |\sum_{i=1}^k u_i^\alpha\nabla u_i^\alpha|^2\right)\, dx.
\end{aligned}
$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a definição de v_ε temos

$$
|\sum_{i=1}^k u_i^\alpha\nabla u_i^\alpha|^2 \le \sum_{i=1}^k(u_i^\alpha)^2\sum_{i=1}^k|\nabla u_i^\alpha|^2 \le v_\varepsilon^2\sum_{i=1}^k|\nabla u_i^\alpha|^2.
$$

Usando a expressão (3.2) deduzimos que

$$
\begin{aligned}
\int_\Omega\nabla v_\varepsilon\cdot\nabla\varphi\, dx &\le \sum_{i=1}^k\int_\Omega\nabla u_i^\alpha\cdot\nabla(v_\varepsilon^{-1}\varphi u_i^\alpha)\, dx = \int_\Omega\nabla U_\alpha\cdot\nabla(v_\varepsilon^{-1}\varphi U_\alpha)\, dx \\
&= \frac{C^\alpha}{2}\int_\Omega v_\varepsilon^{-1}F(U_\alpha)\varphi\, dx + \frac{r_\alpha}{2}\int_\Omega v_\varepsilon^{-1}G(x,U_\alpha)\varphi\, dx\,.
\end{aligned}
$$

Fazendo $\varepsilon\to 0$ temos

$$\int_\Omega \nabla|U_\alpha|\cdot\nabla\varphi\,dx \le \frac{C^\alpha}{2}\int_\Omega |U_\alpha|^{-1}F_\alpha(U_\alpha)\varphi\,dx + \frac{r_\alpha}{2}\int_\Omega |U_\alpha|^{-1}G_\alpha(x,U_\alpha)\varphi\,dx\,.$$

Em resumo, temos demonstrado que no sentido fraco

$$-\Delta|U_\alpha| \le \frac{C^\alpha}{2}|U_\alpha|^{-1}F_\alpha(U_\alpha) + \frac{r_\alpha}{2}|U_\alpha|^{-1}G_\alpha(x,U_\alpha)\,. \tag{3.3}$$

Em particular,

$$-\Delta|U_\alpha| \le \frac{C^\alpha}{2}M_{F_\alpha}|U_\alpha|^{s_\alpha-1} + \frac{r_\alpha}{2}M_{G_\alpha}|U_\alpha|^{r_\alpha-1} \quad \text{em} \quad \Omega\,.$$

Logo

$$-\Delta|U_\alpha| \le \left(\frac{C^\alpha}{2}M_{F_\alpha}|U_\alpha|^{s_\alpha-2} + \frac{r_\alpha}{2}M_{G_\alpha}|U_\alpha|^{r_\alpha-2}\right)|U_\alpha| \quad \text{em} \quad \Omega\,.$$

Para mostrar que $c = \frac{C^\alpha}{2}M_{F_\alpha}|U_\alpha|^{s_\alpha-2} + \frac{r_\alpha}{2}M_{G_\alpha}|U_\alpha|^{r_\alpha-2} \in L^{n/2}(\Omega)$, basta verificar que C^α é limitado e $|U_\alpha|^{2^*-2} \in L^{n/2}(\Omega)$, uma vez que podemos usar a desigualdade de Young para a seguinte estimativa

$$c \le \frac{C^\alpha}{2}M_{F_\alpha}\left(\frac{s_\alpha-2}{2^*-2}|U_\alpha|^{2^*-2} + \frac{2^*-s_\alpha}{2^*-2}\right) + \frac{r_\alpha}{2}M_{G_\alpha}\left(\frac{r_\alpha-2}{2^*-2}|U_\alpha|^{2^*-2} + \frac{2^*-r_\alpha}{2^*-2}\right)$$

Com efeito, observe que $C^\alpha - 2C_\alpha = (2-r_\alpha)\int_\Omega G_\alpha(x,U_\alpha)dx$, pela desigualdade de Holder segue que

$$\begin{aligned}
|C^\alpha| &\le |2-r_\alpha|\int_\Omega |G_\alpha(x,U_\alpha)|dx + 2C_\alpha \\
&\le |2-r_\alpha|M_{G_\alpha}|\Omega|^{\frac{s_\alpha}{s_\alpha-r_\alpha}}km_{F_\alpha}^{-r_\alpha/s_\alpha} + (2+\eta)\mathcal{A}_0(2,F,n)^{-1} \\
&\le C_{te}.
\end{aligned}$$

Além disso, o teorema da imerssão contínua mostra que

$$\int_\Omega \left(|U_\alpha|^{2^*-2}\right)^{n/2}dx = \int_\Omega |U_\alpha|^{2^*}dx < \infty$$

A conclusão segue então do problema clássico de estimativas De Giorgi-Nash-Moser ao estudar inequações do tipo

$$-\Delta u + cu \le f \quad \text{em} \quad \Omega$$

com $c = \frac{C^\alpha}{2}M_{F_\alpha}|U_\alpha|^{s_\alpha-2} + \frac{r_\alpha}{2}M_{G_\alpha}|U_\alpha|^{r_\alpha-2}$ e $f = 0$ (Veja Druet [10] e Gilbarg-Trudinger [16]).

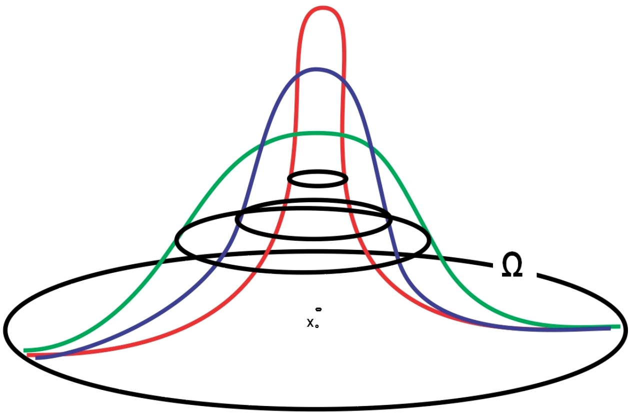
□

Teorema 3.2. ***(Estimativa Uniforme).*** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um domínio limitado e suave, $n \geq 3$. Considere funções F_α e G_α convergentes ao caso crítico com $r_\alpha \geq 2$. Seja C_α o nível de energia mínima associado a F_α e G_α e $U_\alpha \in E_{F_\alpha}$ um minimizante. Se Φ_G é um funcional coercivo, $U_\alpha \rightharpoonup 0$ em E_k e $\lim_{\alpha\to\infty} C_\alpha \leq \mathcal{A}_0(2,F,n)^{-1}$, então $C_\alpha \to \mathcal{A}_0(2,F,n)^{-1}$ e*

$$U_\alpha \to 0 \quad \text{em} \quad L^\infty_{loc}(\Omega \setminus \{x_0\}, \mathbb{R}^k) ,$$

onde $x_0 \in \overline{\Omega}$ é o único ponto de concentração de (U_α).

Se $x_0 \in \Omega$, uma ilustração do comportamento de cada U_α, pode ser visualizado na figura abaixo:



Demonstração. Basta mostrarmos que a hipótese do teorema anterior é satisfeita para algum $q > 2^*$.

Como $U_\alpha \rightharpoonup 0$, seja x_0 o único ponto dado pelo teorema 2.4.
Sejam $x_1 \in \Omega$ e $0 < \delta < |x_1 - x_0|$. Claramente,

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \int_{B(x_1,\delta)\cap\Omega} F_\alpha(U_\alpha)\, dx = 0 .$$

Do teorema anteior, segue que

$$\begin{aligned} C^\alpha &= 2\int_\Omega |\nabla U_\alpha|^2\, dx - r_\alpha \int_\Omega G_\alpha(x,U_\alpha)\, dx \\ &= 2\int_\Omega |\nabla U_\alpha|^2\, dx - 2\int_\Omega G_\alpha(x,U_\alpha)\, dx + (2-r_\alpha)\int_\Omega G_\alpha(x,U_\alpha)\, dx \\ &= 2C_\alpha + (2-r_\alpha)\int_\Omega G_\alpha(x,U_\alpha)\, dx. \end{aligned}$$

Logo

$$C^\alpha \to 2\mathcal{A}_0(2,F,n)^{-1}.$$

Dado $\varepsilon > 0$ é possível tomar α grande tal que $C^\alpha/2 \leq (1+\varepsilon)\mathcal{A}_0(2,F,n)^{-1}$. Da mesma forma, como foi feito em (3.3), podemos concluir que

$$-\Delta|U_\alpha| \leq (1+\varepsilon)\mathcal{A}_0(2,F,n)^{-1}|U_\alpha|^{-1}F_\alpha(U_\alpha) + \frac{r_\alpha}{2}|U_\alpha|^{-1}G_\alpha(x,U_\alpha) \quad \text{em } \Omega\,.$$

Tome agora a seguinte função corte $\varphi \in C_0^\infty(B(x_1,\delta))$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$, $\varphi = 1$ em $B(x_1,\delta/2)$ e $|\nabla\varphi| \leq C_0$ com $C_0 > 0$. Seja $m > 0$ um número a qual escolheremos mais tarde. Quando $\varphi^2|U_\alpha|^{m+1}$ é a função teste na desigualdade anterior, podemos escrever

$$\begin{aligned}\int_\Omega \nabla|U_\alpha|\cdot\nabla(\varphi^2|U_\alpha|^{m+1})\,dx \quad &\leq \quad (1+\varepsilon)\mathcal{A}_0(2,F,n)^{-1}\int_\Omega \varphi^2|U_\alpha|^m F_\alpha(U_\alpha)\,dx \\ &\quad + \frac{r_\alpha}{2}\int_\Omega \varphi^2|U_\alpha|^m G_\alpha(x,U_\alpha)dx\end{aligned} \tag{3.4}$$

Desenvolvendo o lado esquerdo de (3.4), obtemos

$$(m+1)\int_\Omega \varphi^2|U_\alpha|^m|\nabla|U_\alpha||^2\,dx \leq (1+\varepsilon)\mathcal{A}_0(2,F,n)^{-1}\int_\Omega \varphi^2|U_\alpha|^m F_\alpha(U_\alpha)\,dx \tag{3.5}$$

$$+\frac{r_\alpha}{2}\int_\Omega \varphi^2|U_\alpha|^m G_\alpha(x,U_\alpha)dx - \int_\Omega |U_\alpha|^{m+1}\nabla(\varphi^2)\cdot\nabla|U_\alpha|\,dx\,.$$

Por outro lado, dado $\varepsilon > 0$, pelo lema A.2, encontramos uma constante $c_\varepsilon > 0$, independente de α, tal que

$$\int_\Omega |\nabla(\varphi|U_\alpha|^{\frac{m+2}{2}})|^2\,dx \leq (1+\varepsilon)\frac{(m+2)^2}{4}\int_\Omega \varphi^2|U_\alpha|^m|\nabla|U_\alpha||^2\,dx$$

$$+c_\varepsilon||\nabla\varphi||_\infty^2\int_\Omega |U_\alpha|^{m+2}\,dx\,.$$

Substituindo em (3.5) e usando a proposição 1.2 obtemos

$$\int_\Omega |\nabla(\varphi|U_\alpha|^{\frac{m+2}{2}})|^2\,dx \leq (1+\varepsilon)^2\frac{(m+2)^2}{4(m+1)}M_F^{-2/2^*}A_0(2,n)^{-1}\int_\Omega \varphi^2|U_\alpha|^m F_\alpha(U_\alpha)\,dx \tag{3.6}$$

$$+(1+\varepsilon)\frac{(m+2)^2}{4(m+1)}\frac{r_\alpha}{2}\int_\Omega \varphi^2|U_\alpha|^m G_\alpha(x,U_\alpha)\,dx$$

$$-(1+\varepsilon)\frac{(m+2)^2}{4(m+1)}\int_\Omega |U_\alpha|^{m+1}\nabla(\varphi^2)\cdot\nabla|U_\alpha|\,dx + c_\varepsilon||\nabla\varphi||_\infty^2\int_\Omega |U_\alpha|^{m+2}\,dx\,.$$

Usando agora a desigualdade de Holder, obtemos

$$\int_\Omega \varphi^2 |U_\alpha|^m F_\alpha(U_\alpha)\, dx = \int_\Omega \varphi^2 |U_\alpha|^m F_\alpha(U_\alpha)^{2/2^*} F_\alpha(U_\alpha)^{(2^*-2)/2^*}\, dx \tag{3.7}$$

$$\leq M_{F_\alpha}^{2/2^*} \int_\Omega \varphi^2 |U_\alpha|^{m+2} F_\alpha(U_\alpha)^{(2^*-2)/2^*}\, dx$$

$$\leq M_{F_\alpha}^{2/2^*} \left(\int_\Omega (\varphi |U_\alpha|^{\frac{m+2}{2}})^{2^*}\, dx\right)^{2/2^*} \left(\int_{B(x_1,\delta)} F_\alpha(U_\alpha)\, dx\right)^{(2^*-2)/2^*}$$

e

$$\left|\int_\Omega |U_\alpha|^{m+1} \nabla(\varphi^2)\cdot \nabla |U_\alpha|\, dx\right| \leq 2||\nabla\varphi||_\infty \int_\Omega |U_\alpha|^{m+1} |\nabla U_\alpha|\, dx \tag{3.8}$$

$$\leq 2||\nabla\varphi||_\infty \left(\int_\Omega |\nabla U_\alpha|^2\, dx\right)^{1/2} \left(\int_\Omega |U_\alpha|^{2m+2}\, dx\right)^{1/2}$$

$$\leq 2c||\nabla\varphi||_\infty \left(\int_\Omega |U_\alpha|^{2m+2}\, dx\right)^{1/2}.$$

Pela desigualadade ótima L^2-Sobolev (1.1) , temos que

$$\left(\int_\Omega (\varphi |U_\alpha|^{\frac{m+2}{2}})^{2^*}\, dx\right)^{2/2^*} \leq A_0(2,n) \int_\Omega |\nabla(\varphi |U_\alpha|^{\frac{m+2}{2}})|^2\, dx. \tag{3.9}$$

Substituindo (3.7), (3.8) e (3.9) em (3.6), temos que

$$A_0(2,n)^{-1} \left(\int_\Omega (\varphi |U_\alpha|^{\frac{m+2}{2}})^{2^*}\, dx\right)^{2/2^*} \leq (1+\varepsilon)\frac{(m+2)^2}{4(m+1)}\frac{r_\alpha}{2} M_{G_\alpha} \int_\Omega \varphi^2 |U_\alpha|^{m+r_\alpha}\, dx$$

$$+(1+\varepsilon)^2 \frac{(m+2)^2}{4(m+1)} M_F^{-2/2^*} A_0(2,n)^{-1} M_{F_\alpha}^{2/2^*} \left(\int_\Omega (\varphi |U_\alpha|^{\frac{m+2}{2}})^{2^*} dx\right)^{2/2^*} \left(\int_{B(x_1,\delta)} F_\alpha(U_\alpha) dx\right)^{(2^*-2)/2^*}$$

$$-(1+\varepsilon)\frac{(m+2)^2}{4(m+1)} 2c||\nabla\varphi||_\infty \left(\int_\Omega |U_\alpha|^{2m+2} dx\right)^{1/2}$$

$$+c_\varepsilon ||\nabla\varphi||_\infty^2 \int_\Omega |U_\alpha|^{m+2}\, dx\,,$$

ou seja,

$$A_\alpha \left(\int_\Omega (\varphi |U_\alpha|^{\frac{m+2}{2}})^{2^*}\, dx\right)^{2/2^*} \leq B_\alpha \int_\Omega |U_\alpha|^{m+2}\, dx + D_\alpha \int_\Omega \varphi^2 |U_\alpha|^{m+r_\alpha}\, dx \tag{3.10}$$

$$+E_\alpha \left(\int_\Omega |U_\alpha|^{2m+2}\, dx \right)^{1/2}.$$

Onde

$$A_\alpha = A_0(2,n)^{-1} - (1+\varepsilon)^2 \frac{(m+2)^2}{4(m+1)} M_F^{-2/2^*} A_0(2,n)^{-1} M_{F_\alpha}^{2/2^*} \left(\int_{B(x_1,\delta)} F_\alpha(U_\alpha)\, dx \right)^{(2^*-2)/2^*},$$

$$B_\alpha = c_\varepsilon ||\nabla\varphi||_\infty^2,$$

$$D_\alpha = (1+\varepsilon)\frac{(m+2)^2}{4(m+1)} \frac{r_\alpha}{2} M_{G_\alpha},$$

$$E_\alpha = -2c(1+\varepsilon)\frac{(m+2)^2}{4(m+1)} ||\nabla\varphi||_\infty .$$

Tome $\varepsilon > 0$ e $m > 0$ suficientemente pequeno tal que

$$A_\alpha \geq C > 0, \quad 2m+2 \leq 2^* \quad m+2 \leq 2^* \ \text{ e } \ m + r_\alpha \leq 2^*.$$

Com essa escolha, de (3.10) temos

$$\left(\int_\Omega (\varphi |U_\alpha|^{\frac{m+2}{2}})^{2^*}\, dx \right)^{2/2^*} \leq c_1$$

para $\alpha > 0$ grande, onde $c_1 > 0$ não depende de α. Para concluir a demonstração basta tomar $q = 2^* \left(\frac{m+2}{2}\right)$.

$\square$

APÊNDICE A

Definições e resultados importantes

A.1 Espaço de Sobolev

Definição A.1. *Considere* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto não necessariamente limitado e uma função* $u \in \mathbf{L}^p(\Omega)$. *Dizemos que uma função* $v_i \in \mathbf{L}^p(\Omega)$ *é a derivada parcial fraca de* u *em relação a* x_i *se*

$$\int_\Omega u\partial_i\phi = \int_\Omega v_i\phi \quad \forall \quad x \in C_0^\infty(\Omega)$$

Dado $u \in L^p(\Omega)$ *se existe* v_i *satisfazendo a condição acima temos que,* v_i *é única, isto é, qualquer outra função satisfazendo tal condição é igual a* v_i *q.t.p. Então designaremos* v_i *por* $\partial_i u$

Definição A.2. ***Espaço*** $W^{1,p}(\Omega)$
Seja $1 \leq p \leq \infty$ *e* $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, *o espaco* $W^{1,p}(\Omega)$ *é definido por*

$$W^{1,p}(\Omega) = \left\{ u \in L^p(\Omega) : \exists g_i \in L^p(\Omega); \int_\Omega u\frac{\partial\phi}{\partial x_i} = -\int_\Omega g_i\phi \quad \forall\phi \in C_0^\infty(\Omega) \quad \forall \quad i = 1, 2, ..., n \right\}$$

Então uma função pertence a $W^{1,p}(\Omega)$ *quando pertence a* $L^p(\Omega)$ *e possui todas as derivadas parciais fracas de ordem 1 em* $L^p(\Omega)$.
Definimos a seguinte norma em $W^{1,p}(\Omega)$

$$\|u\|_{W^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p(\Omega)} + \sum_{i=1}^{n} \left\| \frac{\partial u}{\partial x_i} \right\|_{L^p(\Omega)}$$

Com essa norma o espaço $W^{1,p}(\Omega)$ *tem as seguintes Propriedades :*

(i) É um espaço de Banach.

(ii) É reflexivo para $1 < p < +\infty$.

(iii) É separável para $1 \leq p < +\infty$.

Definição A.3. ***Espaço*** $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$
Se $N \neq p$ *e* $p^* = \frac{Np}{N-p}$ *definimos o subespaço* $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *de* $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ *como*

$$D^{1,p}(\mathbb{R}^N) := \{u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\mathbb{R}^N)\}$$

Este espaço é munido da norma

$$\|u\| := \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p\right)^{\frac{1}{p}} dx \tag{A.1}$$

Definição A.4. ***(Espaço*** $D_0^{1,p}(\Omega)$***)***
Se Ω *é um subconjunto aberto de* $\mathbb{R}^N$, *definimos o espaço* $D_0^{1,p}(\Omega)$ *como o fecho de* $C_0^\infty(\Omega)$ *em* $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$

Definição A.5. ***(Espaço*** $W_0^{1,p}(\Omega)$***)***
Definimos o espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ *como o fecho de* $C_0^\infty(\Omega)$ *em* $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ *na norma*

$$\|u\| = \left(\int_{\Omega} |\nabla u|^2\right)^{\frac{1}{2}} dx$$

Se Ω *possui medida limitada então:*

$$D_0^{1,p}(\Omega) = W_0^{1,p}(\Omega)$$

Definição A.6. ***(A Constante de Sobolev)***

$$S = \inf_{\substack{u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \\ \|u\|_{p^*}=1}} \|\nabla u\|_p^p > 0$$

A constante de Sobolev pode ser escrita

$$S = \inf_{D^{1,p}(\mathbb{R}^N)\setminus\{0\}} \frac{\|\nabla u\|_p^p}{\|u\|_{p^*}^p}$$

obtemos então a desigualdade de Sobolev

$$\|u\|_{p^*}^p \leq S^{-1}\|\nabla u\|_p^p, \forall u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \tag{A.2}$$

Teorema A.1. *(**Densidade**) O espaço* $C_0^\infty(\Omega)$ *é denso em* $L^p(\Omega)$ *para* $1 \leq p < \infty$.

Demonstração. Veja [6]. □

Teorema A.2. ***(Sobolev, Gagliardo, Nirenberg)*** *Seja $1 \leq p < n$ então $W^{1,p}(\mathbb{R}^n) \subset L^{p*}(\mathbb{R}^n)$ onde $p*$ é dado por $\frac{1}{p*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$ Além disso existe uma constante $C = C(p,n)$ tal que*

$$\|u\|_{L^{p*}} \leq C \|\nabla u\|_{L^p} \quad \forall u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^n).$$

Demonstração. Veja [6]. □

Teorema A.3. *Seja Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$. Suponha que $\partial\Omega$ é C^1 e $1 \leq p < \infty$ e $u \in W^{1,p}(\Omega)$. Então $u \in \mathbf{L^{p*}}(\Omega)$ e vale a desigualdade*

$$\|u\|_{\mathbf{L^{p^*}}(\Omega)} \leq C \|\nabla u\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Demonstração. Veja [11]. □

Teorema A.4. ***(Imersão de Rellich-Kondrachov)***
Seja Ω limitado de classe C^1.Temos

i) se $p < n$ então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ $\forall q \in [1, p^*[$ onde $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$,

(ii) se $p = n$ então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ $\forall q \in [1, +\infty[$,

(iii) se $p > n$ então $W^{1,p}(\Omega) \subset C^1(\Omega)$.

todas as continências são no sentido de imersões compactas

Demonstração. Veja [6]. □

Teorema A.5. *Seja Ω limitado e $1 \leq p \leq \infty$.Temos*

(i) se $1 \leq p < n$ então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$ onde $\frac{1}{p^*} = \frac{1}{p} - \frac{1}{n}$,

(ii) se $p = n$ então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ $\forall q \in [p^*, +\infty[$,

(iii) se $p > n$ então $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$.

todas as continências são no sentido de imersões contínuas.

Demonstração. Veja [6]. □

Teorema A.6. *Sejam $(f_n) \subset L^p(\Omega)$ uma sequência e $f \in L^p(\Omega)$, tais que $\|f_n - f\|_{L^p} \to 0$. Então existe uma subsequência $(f_{n_k}) \subset L^p(\Omega)$ tal que:*
a)$f_{n_k}(x) \to f(x)$ q.t.p em Ω,
b)$|f_{n_k}(x)| \leq h(x)$ q.t.p em Ω $\forall k \in \mathbb{N}$ e $h \in L^p(\Omega)$.

Demonstração. Veja [6]. □

A.2 Resultados de Análise Funcional

Seja X um espaço Topológico e $\Phi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$

Definição A.7. *Φ é dito semicontínuo inferiormente (s.c.i) se o conjunto $\{x \in X : \Phi(x) > a\}$ é aberto ou $\{x \in X : \Phi(x) \leq a\}$ é fechado $\forall\ a \in \mathbb{R}$.*

Definição A.8. *Φ é dito sequencialmente semicontínuo inferiormente se $\forall\ (x_n) \subset X$ tal que $x_n \to x_0$, tem-se*

$$\Phi(x_0) \leq \liminf_{n\to\infty} \Phi(x_n)$$

Teorema A.7. *Em espaços métricos as noções de semicontínuo inferiormente e sequencialmente semicontínuo inferiormente são equivalentes.*

Demonstração. Veja [13]. □

Teorema A.8. *seja X um espaço de Banach, e $\Phi : X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ um funcional convexo. Então as noções de fracamente sequencialmente semicontínuo inferiormente e fortemente sequencialmente semicontínuo inferiormente são equivalentes.*

Demonstração. Veja [13]. □

A.3 Desigualdades

Teorema A.9. *Sejam $a_1, a_2, ..., a_n, b_1, b_2, ..., b_n$ números reais não todos nulos, então a seguinte desigualdade ocorre:*

$$(a_1b_1 + a_2b_2 + ... + a_nb_n)^2 \leq (a_1^2 + a_2^2 + ... + a_n^2)(b_1^2 + b_2^2 + ... + b_n^2).$$

A igualdade ocorre somente se

$$\frac{a_1}{b_1} = ... = \frac{a_n}{b_n}bn$$

Demonstração. Veja [19]. □

Teorema A.10. *(**Desigualdade de Young**) Se p e q são números reais positivos tais que $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então, para todo par de números reais a e b não negativos vale a desigualdade:*

$$a.b \leq \frac{a^p}{p} + \frac{b^q}{q}$$

Dado $\varepsilon > 0$, a desigualdade de Young também pode tomar a seguinte forma:

$$a.b \leq \varepsilon a^p + C(\varepsilon)b^q$$

onde $C(\varepsilon) = \frac{(\varepsilon.p)^{\frac{-q}{p}}}{q}$. Esta última é a desigualdade de Young com ε.

Teorema A.11. *(**Desigualdade de Minkowski**). Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$, $1 \leq p \leq \infty$ e $a_1, a_2, a_3, ..., a_k \in L^p(\Omega)$. Então,*

$$\|a_1 + a_2 + a_3 + ... + a_k\|_{L^p(\Omega)} \leq \|a_1\|_{L^p(\Omega)} + \|a_2\|_{L^p(\Omega)} + ... + \|a_k\|_{L^p(\Omega)}.$$

A igualdade irá acontecer somente no caso de $a_1, a_2, a_3, ..., a_k$ serem proporcionais.

Demonstração. Veja [18] e [21]. □

Teorema A.12. *(**Desigualdade de Holder**). Sejam $f \in L^p$ e $g \in L^q$, onde $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ e $1 \leq p \leq \infty$. Então $f.g \in L^1$ e ,*

$$\int |f.g|dx \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q}.$$

Demonstração. Veja [6]. □

Lema A.1. *Seja $a, b \in \mathbb{R}$ positivos e $1 \leq p < \infty$. Vale a desigualdade:*

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

Demonstração. Basta mostrar que para $1 \leq p < \infty$ e $t \geq 0$ vale que

$$(t+1)^p \leq 2^{p-1}(t^p + 1).$$

Para isso defina

$$h(t) := (t+1)^p - 2^{p-1}(t^p + 1),$$

logo

$$h(1) := 2^p - 2^{p-1}.2 = 0$$

e

$$h'(t) = p(t+1)^{p-1} - 2^{p-1}p.t^{p-1} \Rightarrow h'(t) = p((t+1)^{p-1} - (2t)^{p-1}).$$

Como

$$(t+1) \leq 2t \Leftrightarrow t \geq 1,$$

temos que

$$h'(t) \leq 0 \ \ \forall t \geq 1 \quad \Rightarrow \quad h(t) \leq 0 \ \ \forall t \geq 1 \ \ \textit{pois} \ \ h(1) = 0.$$

Se $0 \leq t \leq 1$ temos que

$$h'(t) \geq 0; \quad 0 \leq t \leq 1 \Rightarrow \quad h(t) \leq h(1) = 0 \ \ \forall 1 \leq t \leq 1.$$

□

Lema A.2. *Seja $a, b \in \mathbb{R}$ positivos e $0 \leq p < \infty$. Vale a desigualdade:*

$$(a+b)^p \leq (1+\varepsilon)a^p + C_\varepsilon b^p.$$

Demonstração. Vamos mostrar que vale

$$\left(\frac{a}{b}+1\right)^p \leq (1+\varepsilon)\left(\frac{a}{b}\right)^p + C_\varepsilon,$$

ou seja, para $t \geq 0$ vale que

$$(t+1)^p \leq (1+\varepsilon)t^p + C_\varepsilon.$$

Para isso observe que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{(t+1)^p}{t^p} = 1,$$

logo $\forall\ \varepsilon > 0\ \exists\ t_0(\varepsilon)$ tal que

$$\frac{(t+1)^p}{t^p} \leq 1+\varepsilon \quad \forall\ t \geq t_0(\varepsilon),$$

ou seja,

$$(t+1)^p \leq (1+\varepsilon)t^p \quad \forall\ t \geq t_0(\varepsilon).$$

Agora tome $C_\varepsilon = \max\limits_{[0,t_0(\varepsilon)]}(t+1)^p$, concluindo que

$$(t+1)^p \leq (1+\varepsilon)t^p + C_\varepsilon \quad \forall\ t \geq 0.$$

□

APÊNDICE B

Teoria da medida

Definição B.1. *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$, definimos*

$$K(\Omega) = \{u \in C(\Omega); supp\ u \subset\subset \Omega\}$$

$$BC(\Omega) = \{u \in C(\Omega); \|u\|_\infty = \sup_{x\in\Omega} |u(x)| < \infty\}$$

Definição B.2. *O espaço $C_0(\Omega)$ é o fecho de $K(\Omega)$ em $BC(\Omega)$, com a norma uniforme.*

Uma medida finita em Ω é um funcional linear contínuo em $C_0(\Omega)$.
A norma de uma medida μ finita é dada por

$$\|\mu\| = \sup_{\substack{u\in C_0(\Omega)\\ \|u\|_\infty=1}} |\langle \mu, u\rangle|$$

Denotamos por $M(\Omega)$ o espaço de medidas finitas em Ω
e por $M^+(\Omega)$ o espaço de medidas finitas positivas, ou seja
$\mu \in M^+(\Omega)$ se $\langle \mu, u\rangle \geq 0$ $\forall u \in C_0(\Omega)$ tal que $u \geq 0$.

Uma sequência (μ_n) converge fraco para μ em $M(\Omega)$, ou seja

$$\mu_n \rightharpoonup \mu$$

se

$$\langle \mu_n, u\rangle \to \langle \mu, u\rangle \quad \forall u \in C_0(\Omega),$$

ou seja

$$\int_\Omega u d\mu_n \to \int_\Omega u d\mu \quad \forall u \in C_0(\Omega).$$

Teorema B.1. *a) Toda sequência limitada de medidas finitas em Ω admite subsequência fracamente convergente.*

b) Se $\mu_n \rightharpoonup \mu$ em $M(\Omega)$, então (μ_n) é limitada e

$$\|\mu\| \leq \liminf_{n\to\infty} \|\mu_n\|$$

c) Se $\mu \in M^+(\Omega)$, então

$$\|\mu\| = \langle \mu, 1\rangle = \sup_{\substack{u\in BC(\Omega)\\ \|u\|_\infty=1}} \langle \mu, u\rangle.$$

Demonstração. Veja [27]. □

Teorema B.2. ***(Lema de Fatou)***
Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $u_n : \Omega \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções mensuráveis não negativas tais que $u_n \to u$ q.t.p em Ω. Então:

$$\int_\Omega u dx \leq \liminf \int_\Omega u_n dx$$

Demonstração. Veja [12]. □

Teorema B.3. ***(Convergência Dominada de Lebesgue)*** *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e $u_n : \Omega \to \mathbb{R}$ uma sequência de funções mensuráveis tais que $u_n \to u$ q.t.p em Ω. Suponha que exista $\nu : \Omega \to \mathbb{R}$ integravel tal que para todo n*

$$|u_n(x)| \leq \nu(x)$$

Então

$$\int_\Omega u dx = \lim_{n\to\infty} \int_\Omega u_n dx$$

Demonstração. Veja [12]. □

Definição B.3. *Seja $(\Omega, \sigma_{\acute{a}lgebra}, \mu)$ um espaço de medida. um conjunto $A \in \sigma_{\acute{a}lgebra}$ é chamado um* ***átomo*** *se $\mu(A) > 0$ e para todo B, $B \subset A$ resulta $\mu(B) = 0$ ou $\mu(B) = \mu(A)$. μ é chamada não atômica se não tem átomos.*

Definição B.4. *Uma medida ν definida sobre a $\sigma_{\acute{a}lgebra}$ de Lebesgue de $\mathbb{R}^1$ é dita puramente atômica se existe um conjunto enumerável A, tal que $\nu(A^c) = 0$.*

Sejam ν e μ duas medidas com sinal sobre $(\Omega, \sigma_{\acute{a}lgebra})$.

Definição B.5. *Dizemos que ν é absolutamente contínua em relação a μ se, para cada $A \in \sigma_{\acute{a}lgebra}$ com $|\mu|(A) = 0$, resulta $|\nu|(A) = 0$. Usaremos a notação $\nu \ll \mu$ para indicar esse fato.*

Definição B.6. *Duas medidas com sinal μ e ν são chamadas singulares (em símbolo $\mu_\perp \nu$), quando existem dois conjuntos A e B, tais que*

$$A \cap B = \varnothing, \ A + B = \Omega \ \ e \ \ |\mu|(B) = |\nu|(A) = 0.$$

Intuitivamente esta identidade indica que μ e ν "moram"em conjuntos disjuntos.

Teorema B.4. ***(Decomposição de Lebesgue)*** *Sejam μ e ν duas medidas com sinal σ_{finita} sobre $(\Omega, \sigma_{\acute{a}lgebra})$. Então existem duas medidas com sinal σ_{finita} ν_0 e ν_1, tal que*

$$\nu = \nu_0 + \nu_1, \ \nu_0 \ll \mu, \ \nu_1 \perp \mu$$

Estas medidas estão univocamente determinadas.

Demonstração. Veja [12]. □

Teorema B.5. ***(Radon-Nikodym)*** *Sejam μ e ν duas medidas positivas, finita sobre $(\Omega, \sigma_{\acute{a}lgebra})$, tais que $\nu \ll \mu$. Então existe uma única função f mensurável e finita, tal que para todo $A \in \sigma_{algebra}$*

$$\nu(A) = \int_A f d\mu.$$

Demonstração. Veja [12]. □

Definição B.7. ***(Medida de Radon)****. Uma medida μ de Borel em $\mathbb{R}^n$ é dita de Radon se ela for finita nos subconjuntos compactos de $\mathbb{R}^n$.*

Teorema B.6. ***(Diferenciação de Lebesgue)*** *Seja μ uma medida de Radon e $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ localmente μ-integrável. Então*

$$\lim_{\rho \to 0} \frac{1}{\mu(B_\rho(x))} \int_{B_\rho(x)} f d\mu = f(x)$$

para quase todo $x \in \mathbb{R}^n$.

Demonstração. Veja [9]. □

APÊNDICE C

Lema de Brézis-Lieb e princípio de concentração e compacidade

C.1 Lema de Brézis-Lieb

Teorema C.1. ***(Lema de Brézis-Lieb 1983)*** *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$, e seja $(u_n) \subset L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Se*

i) $\|u_n\|_p \leq M, \quad M \in \mathbb{R}$

ii) $u_n \to u \;\; q.t.p \;\; em \;\; \Omega$. Então:

$$\lim_{n\to\infty} \left(\|u_n\|_p^p - \|u_n - u\|_p^p \right) = \|u\|_p^p$$

Demonstração. Veja [27].

□

C.2 Demonstração do lema de Brézis-Lieb generalizado

Teorema C.2. *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^n$ um aberto limitado, e $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva e p-homogênea, onde $0 < p < \infty$. Se (U_α) é uma sequência limitada em $L^p(\Omega, \mathbb{R}^k)$ e $U_\alpha \to U$ q.t.p em Ω, onde $U \in L^p(\Omega, \mathbb{R}^k)$, então:*

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_\Omega (F(U_\alpha) - F(U_\alpha - U))dx = \int_\Omega F(U)dx.$$

Demonstração. Afirmamos que fixado $\varepsilon > 0$ existe $C(\varepsilon)$ tal que para todo t, $s \in \mathbb{R}^k$ temos:

$$|F(s+t) - F(s)| \leq \varepsilon |s|^p + C(\varepsilon)|t|^p. \tag{C.1}$$

Com efeito, pela continuidade de F temos: Dado $\varepsilon > 0$ existe $\delta(\varepsilon) > 0$ tal que

$$|F(s+t) - F(s)| \leq \varepsilon, \; \forall |t| < \delta(\varepsilon),$$

onde restringimos F à $B_2(0)$. Sem perda de generalidade podemos supor $\delta(\varepsilon) < 1$.
Definimos $M = \max\limits_{\overline{B_2(0)}} F$ e $C(\varepsilon) = \frac{M}{\delta(\varepsilon)^p}$.

Se $\frac{|s|}{|t|} \leq 1$:

$$\begin{aligned}\left|F\left(\frac{s}{|t|}+\frac{t}{|t|}\right)-F\left(\frac{s}{|t|}\right)\right| &\leq M \\ &\leq \frac{M}{\delta(\varepsilon)^p}+\varepsilon\frac{|s|^p}{|t|^p}.\end{aligned}$$

Se $\delta(\varepsilon) \leq \frac{|t|}{|s|} \leq 1$:

$$\begin{aligned}\left|F\left(\frac{s}{|s|}+\frac{t}{|s|}\right)-F\left(\frac{s}{|s|}\right)\right| &\leq M = \frac{M}{\delta(\varepsilon)^p}\delta(\varepsilon)^p \\ &\leq \frac{M}{\delta(\varepsilon)^p}\frac{|t|^p}{|s|^p}+\varepsilon.\end{aligned}$$

Se $\frac{|t|}{|s|} \leq \delta(\varepsilon)$:

$$\begin{aligned}\left|F\left(\frac{s}{|s|}+\frac{t}{|s|}\right)-F\left(\frac{s}{|s|}\right)\right| &\leq \varepsilon \\ &\leq \varepsilon+\frac{M}{\delta(\varepsilon)^p}\frac{|t|^p}{|s|^p}.\end{aligned}$$

Logo pela p-homogeneidade de F segue (C.1).

Definimos $V_\alpha = U_\alpha - U$ e o funcional

$$H_\varepsilon^\alpha(x) = (|F(U_\alpha(x)) - F(V_\alpha(x)) - F(U(x))| - \varepsilon|V_\alpha(x)|^p)_+,$$

onde $(S)_+ = \max(S, 0)$. Observe que $V_\alpha \to 0$ $q.t.p$ em Ω, e se $\lambda > 0$ e $x \in \mathbb{R}^k$ temos:

$$F(0) = \lim_{\lambda\to 0^+} F(\lambda x) = \lim_{n\to 0} \lambda^p F(x) = 0.$$

Se $\alpha \to \infty$, pela continuidade de F

$$F(V_\alpha(x)) \to F(0) = 0$$

e

$$H_\varepsilon^\alpha \to 0$$

q.t.p em Ω. Por outro lado

$$|F(U_\alpha) - F(V_\alpha) - F(U)| \leq |F(U_\alpha) - F(V_\alpha)| + |F(U)|.$$

Fazendo $s = V_\alpha$ e $t = U$ em (C.1), obtemos

$$|F(U_\alpha) - F(V_\alpha)| = |F(s+t) - F(s)| \leq \varepsilon|V_\alpha|^p + C(\varepsilon)|U|^p.$$

Assim
$$|F(U_\alpha) - F(V_\alpha) - F(U)| \leq \varepsilon|V_\alpha|^p + C(\varepsilon)|U|^p + |F(U)|.$$
e consequentemente
$$H_\varepsilon^\alpha \leq C(\varepsilon)|U|^p + |F(U)|.$$
Afirmação: $(C(\varepsilon)|U|^p + |F(U)|) \in L^1(\Omega)$. Com efeito, por hipótese e pelo lema 1.1, temos que

$$\begin{aligned}\int_\Omega (C(\varepsilon)|U|^p + |F(U)|)dx &= C(\varepsilon)\int_\Omega |U|^p dx + \int_\Omega |F(U)|dx \\ &\leq C(\varepsilon)\int_\Omega |U|^p dx + M_F \int_\Omega |U|^p dx \\ &= [C(\varepsilon) + M_F]\int_\Omega |U|^p dx < \infty.\end{aligned}$$

Como $(C(\varepsilon)|U|^p + |F(U)|) \in L^1(\Omega)$, segue do teorema da convergência dominada de Lebesgue que
$$\int_\Omega H_\varepsilon^\alpha dx \to 0$$
quando $\alpha \to \infty$. Da definição de H_ε^α temos que

$$H_\varepsilon^\alpha(x) \geq |F(U_\alpha(x)) - F(V_\alpha(x)) - F(U(x))| - \varepsilon|V_\alpha(x)|^p,$$

logo
$$|F(U_\alpha) - F(V_\alpha) - F(U)| \leq \varepsilon|V_\alpha|^p + H_\varepsilon^\alpha.$$

Assim,
$$I_\alpha = \int_\Omega |F(U_\alpha) - F(V_\alpha) - F(U)|\, dx \leq \int_\Omega (\varepsilon|V_\alpha|^p + H_\varepsilon^\alpha)dx$$
e
$$\lim_{\alpha\to\infty} I_\alpha \leq \lim_{\alpha\to\infty}\int_\Omega \varepsilon|V_\alpha|^p dx + \lim_{\alpha\to\infty}\int_\Omega H_\varepsilon^\alpha dx = \varepsilon \lim_{\alpha\to\infty}\int_\Omega |V_\alpha|^p dx = \varepsilon\widetilde{C}.$$
A constante $\widetilde{C}$ é devido a limitação da sequência (U_α) em $L_k^p(\Omega)$. Agora fazendo $\varepsilon \to 0$, obtemos o resultado. □

C.3 Princípio de concentração e compacidade

Teorema C.3. ***(Lema da concentração e compacidade)***
Sejam μ, ν duas medidas em $M(\mathbb{R}^N)$ e $(u_n) \subset D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ uma sequência tal que

$$u_n \rightharpoonup u \quad em \quad D^{1,2}(\mathbb{R}^N) \tag{C.2}$$

$$|\nabla(u_n - u)|^2 \rightharpoonup \mu \quad em \quad M(\mathbb{R}^N) \tag{C.3}$$

$$|u_n - u|^{2^*} \rightharpoonup \nu \quad em \quad M(\mathbb{R}^N) \tag{C.4}$$

$$u_n \to u \quad qtp \quad em \quad \mathbb{R}^N \tag{C.5}$$

Defina

$$\mu_\infty := \lim_{R\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \int_{|x|\geq R} |\nabla u_n|^2 dx$$

$$\nu_\infty := \lim_{R\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \int_{|x|\geq R} |u_n|^{2^*} dx$$

Então

$$\|\nu\|^{\frac{2}{2^*}} \leq S^{-1}\|\mu\|, \tag{C.6}$$

$$\nu_\infty^{\frac{2}{2^*}} \leq S^{-1}\mu_\infty, \tag{C.7}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \|\nabla u_n\|_2^2 = \|\nabla u\|_2^2 + \|\mu\| + \mu_\infty \tag{C.8}$$

$$\limsup_{n\to\infty} \|u_n\|_{2^*}^{2^*} = \|u\|_{2^*}^{2^*} + \|\nu\| + \nu_\infty \tag{C.9}$$

Se $u = 0$ e $\|\nu\|^{\frac{2}{2^*}} = S^{-1}\|\mu\|$, então μ e ν estão concentradas em um único ponto.

Demonstração. Veja [27] □

C.4 Princípio de concentração e compacidade generalizado.

Teorema C.4. *Sejam Ω um aberto limitado de $\mathbb{R}^n$ $(n \geq 3)$, μ e ν duas medidas não negativas, $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva e p^*-homogênea com $1 \leq p < n$ e $(U_\alpha) \subset W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ uma sequência tal que*

$$U_\alpha \rightharpoonup U \quad em \quad E_k \tag{C.10}$$

$$|\nabla U_\alpha|^p dx \rightharpoonup \mu \quad em \quad M(\Omega) \tag{C.11}$$

$$F(U_\alpha)dx \rightharpoonup \nu \quad em \quad M(\Omega) \tag{C.12}$$

Então existem, um conjunto enumerável τ, uma família de pontos $\{x_j\}_{j\in\tau} \subset \overline{\Omega}$ e uma família de números positivos $\{\mu_j\}_{j\in\tau}$ e $\{\nu_j\}_{j\in\tau}$ tal que

$$\mu \geq |\nabla U|^p dx + \sum_{j\in\tau} \mu_j \delta_{x_j}, \tag{C.13}$$

$$\nu = F(U)dx + \sum_{j\in\tau} \nu_j \delta_{x_j}, \tag{C.14}$$

$$\mathcal{A}_0(p, F, n)\mu_j \geq \nu_j^{\frac{p}{p^*}}, \forall\ j \in \tau. \tag{C.15}$$

Onde $\mathcal{A}_0(p, F, n)$ *é a constante em (1.4), e* δ_{x_j} *é a medida de Dirac definida por*

$$\delta_{x_j}(E) = \begin{cases} 1, & se\ x_j \in E \\ 0, & se\ x_j \notin E \end{cases}$$

para todo $E \subset \Omega$ *mensurável. Também chamamos a medida* δ_{x_j} *de medida atômica e* x_j *de átomos.*

Demonstração. **Vamos provar (C.15)**.

Como $U_\alpha \rightharpoonup U \quad em \quad W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k)$, esta sequência é limitada na norma de $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k)$, além disso sabendo que $p^* > p$ e Ω é limitado, aplicando o teorema de Rellich-Kondrachov coordenada a coordenada segue que $U_\alpha \to U$ em $L^p(\Omega, \mathbb{R}^k)$. Pelo teorema A.6 temos que $U_\alpha \to U$ q.t.p em Ω a menos de subsequência.

Defina: $W_\alpha = U_\alpha - U$, $\theta = \nu - F(U)dx$ e $\theta_\alpha = F(W_\alpha)dx$.

Logo $W_\alpha \rightharpoonup 0$ em $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ e pelo teorema (1.1) segue que

$$\int_\Omega F(U_\alpha)dx - \int_\Omega F(U_\alpha - U)dx - \int_\Omega F(U)dx = o(1)$$

então $\forall h \in C_o^\infty(\Omega)$ temos

$$\int_\Omega hF(U_\alpha)dx - \int_\Omega hF(U_\alpha - U)dx - \int_\Omega hF(U)dx = o(1)$$

o que implica

$$\theta_\alpha = F(W_\alpha)dx \rightharpoonup \nu - F(U)dx = \theta$$

Agora defina $\lambda_\alpha = |\nabla W_\alpha|^p dx$, como (W_α) é limitada em $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k)$, e pela definição da norma em $W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ segue que (λ_α) é limitada, implicando pelo teorema B.1 que $\lambda_\alpha \rightharpoonup \lambda$ em $M^+(\Omega)$ a menos de subsequência.

Afirmação: θ pode ter no máximo um número enumerável de átomos.

Com efeito seja $\sum \nu_m$ o valor da medida θ sobre o conjunto de átomos, pelo teorema (B.1) a medida θ é finita, o que implica $\sum \nu_m < \infty$. Então fixado $k \in \mathbb{N}$, o conjunto

$$M_k = \left\{ x_j : \nu_j > \frac{1}{k} \right\}$$

é finito, pois $\sum \nu_m$ é finita. Como o conjunto dos átomos é dado por $\bigcup_{k=1}^\infty M_k$, segue que o conjunto de átomos é enumerável. Denotaremos por τ o conjunto dos índices para os quais $\nu_m > 0$. Seja $\{x_j; j \in \tau\}$ os átomos da medida θ, pelo teorema da decomposição de Lebesgue, podemos escrever

$$\theta = \theta_0 + \sum_{j \in \tau} \nu_j \delta_{x_j} \tag{C.16}$$

onde

$$\theta_0(E) = \begin{cases} \theta(E), & \text{se} \quad E \subset \Omega \backslash \{x_j : j \in \tau\}; \\ 0, & \text{cc} \end{cases}$$

De fato esta é a decomposição de Lebesgue de θ com respeito a ela própria, pois θ_0 é nula em $\{x_j : j \in \tau\}$ e a medida $\sum_{j\in\tau} \nu_j \delta_{x_j}$ é nula em $\Omega\backslash\{x_j : j \in \tau\}$. Além disso, $\theta_0 \ll \theta$. Agora vamos fazer uma comparação entre as medidas θ e λ. Dado $0 \leq \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$, é claro que $\varphi.W_\alpha \in W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k)$, logo

$$\begin{aligned}
\left(\int_\Omega |\varphi|^{p^*} F(W_\alpha)dx\right)^{\frac{p}{p^*}} &= \left(\int_\Omega F(\varphi W_\alpha)dx\right)^{\frac{p}{p^*}} \\
&\leq \mathcal{A}_0(p,F,n)\int_\Omega |\nabla(\varphi W_\alpha)|^p dx \\
&= \mathcal{A}_0(p,F,n)\sum_{i=1}^k \int_\Omega |\nabla(\varphi w_\alpha^i)|^p\, dx
\end{aligned}$$

Mas

$$\nabla(\varphi w_\alpha^i) = \varphi\nabla(w_\alpha^i) + w_\alpha^i\nabla(\varphi) \Rightarrow |\|\nabla(\varphi w_\alpha^i)\|_p - \|\varphi\nabla(w_\alpha^i)\|_p| \leq \|w_\alpha^i \nabla\varphi\|_p$$

Podemos aplicar o teorema da imerssão de Rellich-Kondrachov tomando compactos de Ω, logo convergir fraco em $W_0^{1,p}(\Omega)$ implica convergir forte em $L^p_{loc}(\Omega)$, ou seja $w_\alpha^i \to 0$ em $L^p_{loc}(\Omega)$; logo obtemos

$$\|w_\alpha^i\nabla\varphi\|_p^p = \int_{\widetilde{\Omega}} |\nabla\varphi|^p |w_\alpha^i|^p dx \leq \max_{\widetilde{\Omega}}\{|\nabla\varphi|^p\} \int_{\widetilde{\Omega}} |w_\alpha^i|^p dx \to 0$$

onde $\widetilde{\Omega} \subset \Omega$ é o compacto que contém o *supp* φ. Logo

$$|\|\nabla(\varphi w_\alpha^i)\|_p - \|\varphi\nabla(w_\alpha^i)\|_p| \to 0 \quad \Rightarrow$$

$$\lim_{\alpha\to\infty}\int_\Omega |\nabla(\varphi w_\alpha^i)|^p dx = \lim_{\alpha\to\infty}\int_\Omega |\varphi\nabla w_\alpha^i|^p dx$$

fazendo $\alpha \to \infty$ temos que

$$\begin{aligned}
\left(\int_\Omega |\varphi|^{p^*} d\theta\right)^{\frac{p}{p^*}} &\leq \lim_{\alpha\to\infty} \mathcal{A}_0(p,F,n)\sum_{i=1}^k \int_\Omega |\nabla(\varphi w_\alpha^i)|^p\, dx \\
&= \mathcal{A}_0(p,F,n)\sum_{i=1}^k \lim_{\alpha\to\infty}\int_\Omega |\nabla(\varphi w_\alpha^i)|^p\, dx \\
&= \mathcal{A}_0(p,F,n)\sum_{i=1}^k \lim_{\alpha\to\infty}\int_\Omega |\varphi\nabla w_\alpha^i|^p dx \\
&= \mathcal{A}_0(p,F,n)\lim_{\alpha\to\infty}\sum_{i=1}^k \int_\Omega |\varphi\nabla w_\alpha^i|^p dx \\
&= \mathcal{A}_0(p,F,n)\lim_{\alpha\to\infty}\int_\Omega |\varphi\nabla W_\alpha|^p dx \\
&\leq \mathcal{A}_0(p,F,n)\int_\Omega |\varphi|^p d\lambda
\end{aligned}$$

ou seja

$$\left(\int_\Omega |\varphi|^{p^*} d\theta\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \mathcal{A}_0(p,F,n)\int_\Omega |\varphi|^p d\lambda \tag{C.17}$$

para toda $0 \leq \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Sendo x_j um átomo da medida θ, fixe $\varepsilon > 0$ e tome $\varphi_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $0 \leq \varphi_\varepsilon \leq 1$ com $\varphi_\varepsilon(x_j) = 1$ e $\varphi_\varepsilon \equiv 0$ em $B[x_j, \varepsilon]^c$, então temos

$$\left(\int_\Omega |\varphi_\varepsilon|^{p^*} d\theta\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \mathcal{A}_0(p, F, n) \int_\Omega |\varphi_\varepsilon|^p d\lambda$$

fazendo $\varepsilon \to 0$, e aplicando o teorema da convergência dominada de Lebesgue, teremos

$$(\nu_j)^{\frac{p}{p^*}} \leq \mathcal{A}_0(p, F, n)\lambda(\{x_j\}) \tag{C.18}$$

Por outro lado, $\forall \;\; 0 \leq \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ e pelo lema A.2, temos que $\forall\ \xi > 0$ vale

$$\begin{aligned}
\int_\Omega \varphi |\nabla W_\alpha|^p dx &= \sum_{i=1}^k \int_\Omega \varphi |\nabla w_\alpha^i|^p dx \\
&= \sum_{i=1}^k \int_\Omega \varphi |\nabla u_\alpha^i - \nabla u^i|^p dx \\
&\leq \sum_{i=1}^k \int_\Omega \varphi ||\nabla u_\alpha^i| + |\nabla u^i||^p dx \\
&\leq \sum_{i=1}^k \int_\Omega \varphi \left[(1+\xi)|\nabla u_\alpha^i|^p + C_\xi |\nabla u^i|^p\right] dx \\
&= (1+\xi) \int_\Omega \varphi |\nabla U_\alpha|^p dx + C_\xi \int_\Omega \varphi |\nabla U|^p dx
\end{aligned}$$

Fixe um átomo x_j, $\varepsilon > 0$ e considere e tome $\phi_\varepsilon \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $0 \leq \phi_\varepsilon \leq 1$ com $\phi_\varepsilon(x_j) = 1$ e $\phi_\varepsilon \equiv 0$ em $B[x_j, \varepsilon]^c$, como $|\nabla W_\alpha|^p dx \rightharpoonup \lambda$ e $|\nabla U_\alpha|^p dx \rightharpoonup \mu$, fazendo $\alpha \to \infty$ e trocando φ por ϕ_ε na desigualdade acima temos:

$$\int_\Omega \phi_\varepsilon d\lambda \leq (1+\xi) \int_\Omega \phi_\varepsilon d\mu + C_\xi \int_\Omega \phi_\varepsilon |\nabla U|^p dx$$

fazendo $\varepsilon \to 0$, e aplicando o teorema da convergência dominada de Lebesgue, temos

$$\lambda(\{x_j\}) \leq (1+\xi)\mu(\{x_j\})$$

Agora fazendo $\xi \to 0$ temos

$$\lambda(\{x_j\}) \leq \mu(\{x_j\}) := \mu_j$$

junto com (C.18) conclui a demonstração de (C.15).

Agora vamos provar (C.13).

Afirmação: Dado $0 \leq \phi \in C_0^\infty(\Omega)$, o funcional

$$\begin{array}{rccc}
f_\phi : & W_0^{1,p}(\Omega, \mathbb{R}^k) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\
& U & \longmapsto & \int_\Omega |\nabla U|^p \phi dx
\end{array}$$

é fracamente sequencialmente semicontínuo inferiormente.

Primeiro observamos que esse funcional é contínuo, portanto s.c.i. Além disso fixado $\varepsilon > 0$, temos que $(\int_\Omega |\nabla U|^p(\phi+\varepsilon)dx)^p$ é uma norma, ou seja é covexa, logo pela definição de convexidade e fazendo $\varepsilon \to 0$, temos que o funcional f_ϕ é convexo, usando os teoremas A.7 e A.8 segue a afirmação.

Afirmação:

$$\mu \geq |\nabla U|^p dx \tag{C.19}$$

Com efeito, dado $0 \leq \phi \in C_0^\infty(\Omega)$, de (C.11),(C.10) e do fato de que f_ϕ é fracamente sequencialmente semicontínuo inferiormente, temos:

$$\begin{aligned} \int_\Omega \phi d\mu &= \lim_{\alpha\to\infty}\int_\Omega |\nabla U_\alpha|^p \phi dx = \liminf_{\alpha\to\infty}\int_\Omega |\nabla U_\alpha|^p\phi dx \\ &= \liminf_{\alpha\to\infty} f_\phi(U_\alpha) \geq f_\phi(U) = \int_\Omega |\nabla U|^p \phi dx \end{aligned} \tag{C.20}$$

Essa desigualdade mostra que $\mu \geq |\nabla U|^p dx$ para todo $\phi \in C_0^\infty(\Omega)$.

Seja $E \subset \Omega$ um conjunto mensurável qualquer. Como Ω tem medida finita vale que $\chi_E \in L^p(\Omega)$, onde χ_E é a função característica de E. Como χ_E é uma função não negativa limitada, pelos teoremas A.1 e A.6, podemos supor a existência de uma sequência uniformemente limitada $0 \leq (\phi_m) \leq M$ em $C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\phi_m \to \chi_E$ q.t.p em Ω. Então $\forall n$ vale que

$$\int_\Omega \phi_m d\mu \geq \int_\Omega |\nabla U|^p \phi_m dx$$

Aplicando o teorema da convergência dominada de Lebesgue nos dois lados temos:

$$\mu(E) = \int_\Omega \chi_E d\mu \geq \int_\Omega \chi_E |\nabla U|^p dx = \int_E |\nabla U|^p dx$$

Provando a afirmação (C.19).

Afirmação: As medidas $|\nabla U|^p dx$ e δ_{x_j} são relativamente singulares e, dessa forma, tambem são $|\nabla U|^p dx$ e $\sum_{j\in\tau}\mu_j\delta_{x_j}$. Então:

$$\mu \geq |\nabla U|^p dx + \sum_{j\in\tau}\mu_j\delta_{x_j}$$

Com efeito faça $\Omega = \{\Omega\backslash\{x_j : j \in \tau\}\} \cup \{x_j : j \in \tau\}$.

provando (C.13).

Vamos provar (C.14).

Afirmação: $\theta_0 \ll \lambda$, ou seja dado $E \subset \Omega\backslash\{x_j : j \in \tau\}$ tal que $\lambda(E) = 0$, tem-se $\theta_0(E) = 0$.

Com efeito dado um conjunto mensurável $E \subset \Omega\backslash\{x_j : j \in \tau\}$ de maneira que $\int_E d\lambda \leq$

$\mathcal{A}_0(p,F,n)^{-1}$, tome uma sequência $\phi_m \in C_0^\infty(\Omega)$ uniformemente limitada tal que $\phi_m \to \chi_E$ q.t.p em Ω, por (C.17) temos

$$\left(\int_\Omega |\phi_m|^{p^*} d\theta\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \mathcal{A}_0(p,F,n) \int_\Omega |\phi_m|^p d\lambda$$

$\forall m \in \mathbb{N}$. Tomando limite em m. o teorema da convergência dominada de Lbesgue nos dá

$$\left(\int_E d\theta\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \mathcal{A}_0(p,F,n) \int_E d\lambda$$

Como $\int_E d\lambda \leq \mathcal{A}_0(p,F,n)^{-1}$, temos

$$1 \geq \mathcal{A}_0(p,F,n) \int_E d\lambda \geq \left(\int_E d\theta\right)^{\frac{p}{p^*}} \geq \int_E d\theta \tag{C.21}$$

Seja $E \subset \Omega \backslash \{x_j : j \in \tau\}$ tal que $\lambda(E) = \int_E d\lambda = 0$, a desigualdade (C.21) também vale neste conjunto, donde $\theta_0(E) = \int_E d\theta = 0$ ou seja $\theta_0 \ll \lambda$.

Afirmação: $\theta_0 = 0$

Claro que é válido para o conjunto $\{x_j : j \in \tau\}$. Como $\theta_0 \ll \lambda$, aplicamos o teorema de Radon-Nikodym para encontrar uma função f não negativa e λ-integrável tal que

$$\theta_0(E) = \int_E f d\lambda \tag{C.22}$$

$\forall E \subset \Omega \backslash \{x_j : j \in \tau\}$ mensurável. Tomando $y \in \Omega \backslash \{x_j : j \in \tau\}$ temos:

$$0 = \theta_0(\{y\}) = \int_{\{y\}} f(x) d\lambda = f(y)\lambda(\{y\})$$

Como λ eventualmente tem mais átomos que a medida θ, pode ocorrer $\lambda(\{y\}) \neq 0$, neste caso vale $f(y) = 0$. Se $\lambda(\{y\}) = 0$, do teorema da diferenciação de Lebesgue, temos

$$f(y) = \lim_{\rho \to 0} \left[\frac{\int_{B(y,\rho)} d\theta_0}{\int_{B(y,\rho)} d\lambda}\right]$$

Usando a desigualdade (C.17) temos que

$$\frac{f(y)^{\frac{p}{p^*}}}{\mathcal{A}_0(p,F,n)} = \lim_{\rho \to 0} \left[\frac{\left(\int_{B(y,\rho)} d\theta_0\right)^{\frac{p}{p^*}}}{\mathcal{A}_0(p,F,n)\left(\int_{B(y,\rho)} d\lambda\right)^{\frac{p}{p^*}}}\right] \leq \lim_{\rho \to 0} \left[\int_{B(y,\rho)} d\lambda\right]^{\frac{p^*-p}{p^*}} = 0$$

Isso mostra que $f(y) = 0$ para quase todo $y \in \Omega \backslash \{x_j : j \in \tau\}$ com respeito a medida λ. Usando (C.22) temos que $\theta_0 = 0$, logo θ contém apenas átomos.

Como $\theta = \nu - F(U)dx$ e de (C.16) temos

$$\nu - F(U)dx = \theta = \theta_0 + \sum_{j \in \tau} \nu_j \delta_{x_j} = \sum_{j \in \tau} \nu_j \delta_{x_j}$$

demonstrando (C.14). $\square$

APÊNDICE D

Existência de minimizadores

D.0.1 Caso subcrítico

Teorema D.1. *Seja*

$$C := \inf_{U \in E_F} \Phi_G(U).$$

Se $1 \leq r \leq s < p^*$ *e* $1 < p < n$*, então* C *é atingido em* E_F *por* U_0*.*

Demonstração. Seja $(U_\alpha) \subset E_F$ uma sequência minimizante, tal que $\Phi_G(U_\alpha) \to C$.
Afirmação 1: (U_α) é limitada em E_K. Com efeito, a desigualdade

$$\left| \int_\Omega G(x, U_\alpha) dx \right| \leq \widetilde{C} M_G k m_F^{-r/s}$$

mostra que a sequência $(\int_\Omega G(x, U_\alpha) dx)$ é limitada, além disso a sequência $(\Phi_G(U_\alpha))$ é limitada pois é convergente, logo $(\int_\Omega |\nabla U_\alpha|^p dx)$ é limitado, mostrando a afirmação. Como E_k é reflexivo temos que $U_\alpha \rightharpoonup U_0$ a menos de subsequência.
Afirmação 2:

$$\int_\Omega G(x, U_\alpha) dx \to \int_\Omega G(x, U_0) dx.$$

De fato, pelo teorema de Rellich-Kondrachov, $U_\alpha \to U_0$ em $L^r(\Omega, \mathbb{R}^k)$, e pelo teorema A.6, a menos de subsequência temos que $U_\alpha \to U_0$ q.t.p em Ω, e para cada i $|u_\alpha^i| \leq h_i(x) \in L^r(\Omega)$, então pela continuidade de G temos que $G(x, U_\alpha) \to G(x, U_0)$ q.t.p em Ω e vale

$$|G(x, U_\alpha)| \leq M_G \sum_{i=1}^{k} |u_\alpha^i|^r \leq M_G \sum_{i=1}^{k} h_i^r \in L^1(\Omega).$$

Aplicando o teorema da convergência dominada de Lebesgue, concluimos a afirmação 2.
Afirmação 3:

$$\Phi_G(U_0) \leq \liminf_{\alpha \to \infty} \Phi_G(U_\alpha).$$

Para mostrar essa afirmação, observamos primeiro que o funcional $f(U) = \int_\Omega |\nabla U|^p dx$ é convexo e contínuo, e os teoremas A.7 e A.8 garante que também é fracamente sequencialmente semicontínua inferiormente em E_F ou seja $\forall$ $(U_\alpha) \subset E_F$ tal que $U_\alpha \rightharpoonup U_0$, tem-se

$\int_\Omega |\nabla U_0|^p dx \leq \liminf \int_\Omega |\nabla U_\alpha|^p dx$, então

$$\begin{aligned}
\liminf_{\alpha\to\infty} \Phi_G(U_\alpha) &= \liminf_{\alpha\to\infty} \left(\int_\Omega \left(|\nabla U_\alpha|^p - G(x,U_\alpha)\right) dx \right) \\
&= \liminf_{\alpha\to\infty} \int_\Omega |\nabla U_\alpha|^p dx - \lim_{\alpha\to\infty} \int_\Omega G(x,U_\alpha) dx \\
&\geq \int_\Omega |\nabla U_0|^p dx - \int_\Omega G(x,U_0) dx = \Phi_G(U_0).
\end{aligned}$$

Afirmação 4**:**

$$U_0 \in E_F.$$

Com efeito, procedendo como na afirmação 2, temos que $U_\alpha \to U_0$ em $L^s(\Omega, \mathbb{R}^k)$, e a menos de subsequência $U_\alpha \to U_0$ q.t.p em Ω, e para cada i $|u_\alpha^i| \leq h_i(x) \in L^s(\Omega)$ então pela continuidade de F temos que $F(U_\alpha) \to F(U_0)$ q.t.p em Ω e vale

$$F(U_\alpha(x)) \leq M_F \sum_{i=1}^k |u_\alpha^i|^s \leq M_F \sum_{i=1}^k h_i^s \in L^1(\Omega).$$

Pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, temos que

$$\int_\Omega F(U_0)dx = \lim_{\alpha\to\infty} \int_\Omega F(U_\alpha)dx = 1,$$

ou seja, $U_0 \in E_F$. Logo as afirmações 3 e 4 mostram que $\Phi_G(U_0) = C$. □

D.0.2 Caso crítico

Teorema D.2. *Seja*

$$C := \inf_{U\in E_F} \Phi_G(U) < \mathcal{A}_0(p,F,n)^{-1},$$

$F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ p^*-homogênea, contínua e positiva, $G : \overline{\Omega} \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ p-homogênea na segunda variável e contínua com $1 < p < n$. Se Φ_G é um funcional coercivo, então C é atingido em E_F.

Antes de demonstrar este teorema vamos enunciar alguns lemas para facilitar a demonstração, para isso defina $F_\varepsilon : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ da seguinte forma

$$F_\varepsilon(t) := F(t)^{q_\varepsilon/p^*}$$

com $q_\varepsilon = p^* - \varepsilon$.

Claramente F_ε é $(p^* - \varepsilon)$-homogênea, contínua e positiva. Pelo teorema D.1, temos que para cada $\varepsilon > 0$ $\exists$ $U_\varepsilon \in E_{F_\varepsilon}$ minimizante de Φ_G tal que

$$C_\varepsilon = \int_\Omega |\nabla U_\varepsilon|^p dx - \int_\Omega G(x,U_\varepsilon)dx.$$

Lema D.1. *$F_\varepsilon \to F$ em $C^0_{loc}(\mathbb{R}^k, \mathbb{R})$.*

Demonstração. seja $K \subset \mathbb{R}^k$ um compacto e $M = \max\limits_{t \in K} F(t)$, então $0 \leq F(t) \leq M$. Dado $\xi > 0$ existe $\delta_1 > 0$ tal que

$$F(t) < \delta_1 \quad \Rightarrow \quad F(t)^{1/2} < \xi/2.$$

Além disso existe $\delta_2 > 0$ e $\varepsilon_0 > 0$ tal que para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ e $F(t) < \delta_2$

$$F(t)^{q_\varepsilon/p^*} < F(t)^{1/2}.$$

Tome $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2, \xi/2\}$, logo para todo $F(t) < \delta$ e $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$ temos pela desigualdade triângular

$$|F_\varepsilon(t) - F(t)| = \left|F(t)^{q_\varepsilon/p^*} - F(t)\right| < \xi.$$

Agora se $\delta < F(t) < M$ temos que

$$\begin{aligned} |F_\varepsilon(t) - F(t)| &= \left|F(t)^{q_\varepsilon/p^*} - F(t)\right| = F(t)|F(t)^{\varepsilon/p^*} - 1| \\ &\leq M \max\{|M^{\varepsilon/p^*} - 1|, |\delta^{\varepsilon/p^*} - 1|\} \to 0 \end{aligned}$$

quando $\varepsilon \to 0$. Logo existe $\varepsilon_1 > 0$ tal que para todo $\varepsilon < \varepsilon_1$

$$|F_\varepsilon(t) - F(t)| < \xi.$$

Tomando sempre $\varepsilon < \min\{\varepsilon_0, \varepsilon_1\}$, segue o resultado. □

Lema D.2. *Para todo $t \in S^{k-1}_{p^*}$ vale $m_F = m_F \sum_{i=1}^k |t_i|^{p^*} \leq F(t) \leq M_F \sum_{i=1}^k |t_i|^{p^*} = M_F$, e para todo $t \in S^{k-1}_{p^*-\varepsilon}$ vale $m_{F_\varepsilon} = m_{F_\varepsilon} \sum_{i=1}^k |t_i|^{p^*-\varepsilon} \leq F_\varepsilon(t) \leq M_{F_\varepsilon} \sum_{i=1}^k |t_i|^{p^*-\varepsilon} = M_{F_\varepsilon}$. Além disso*

(i) $\lim_{\varepsilon \to 0} m_{F_\varepsilon} = m_F$.

(ii) $\lim_{\varepsilon \to 0} M_{F_\varepsilon} = M_F$.

Demonstração. Defina

$$t_\varepsilon = \frac{t}{\left(\sum_{i=1}^k |t^i|^{q_\varepsilon}\right)^{1/q_\varepsilon}}$$

de modo que a escolha de t satisfaz $F_\varepsilon(t_\varepsilon) = m_{F_\varepsilon}$ para todo $\varepsilon > 0$, claro que $\sum_{i=1}^k |t^i_\varepsilon|^{q_\varepsilon} = 1$, consequentemente $(t_\varepsilon) \subset S^{k-1}_{p^*-\varepsilon}$, pela desigualdade de Young, temos

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^k |t^i_\varepsilon|^{p^*} &\leq \sum_{i=1}^k \left(\frac{q_\varepsilon - p^*}{q_\varepsilon} + \frac{p^*}{q_\varepsilon}|t^i_\varepsilon|^{q_\varepsilon}\right) \\ &\leq \sum_{i=1}^k c_1 \left(1 + |t^i_\varepsilon|^{q_\varepsilon}\right) \\ &\leq c_1 k + c_1 \sum_{i=1}^k |t^i_\varepsilon|^{q_\varepsilon} \\ &\leq c_1 (k+1) = c_2. \end{aligned}$$

Então a menos de subsequência $t_\varepsilon \to t_0$ em $S_{p^*}^{k-1}$, além disso para todo $\delta > 0$ dado, e considerando o compacto $c_2 S_{p^*}^{k-1}$, o lema D.1 nos diz que

$$|F_\varepsilon(t_\varepsilon) - F(t_\varepsilon)| \leq \delta$$

para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, logo

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \left(F_\varepsilon(t_\varepsilon) - F(t_\varepsilon)\right) = 0.$$

Mas

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(t_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(F_\varepsilon(t_\varepsilon) - F(t_\varepsilon)\right) + \lim_{\varepsilon \to 0} F(t_\varepsilon) = 0 + \lim_{\varepsilon \to 0} F(t_\varepsilon) = F(t_0)$$

Logo

$$\lim_{\varepsilon \to 0} m_{F_\varepsilon} = \lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(t_\varepsilon) = F(t_0),$$

ou seja,

$$|F_\varepsilon(t_\varepsilon) - F(t_0)| \leq \delta$$

para todo $0 < \varepsilon < \varepsilon_1$, logo

$$-\delta \leq F_\varepsilon(t_\varepsilon) - F(t_0) \leq \delta.$$

Portanto

$$m_{F_\varepsilon} + \delta = F_\varepsilon(t_\varepsilon) + \delta \geq F(t_0) \geq m_F.$$

Tomando $\liminf_{\varepsilon \to 0}$ de ambos os lados temos

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} m_{F_\varepsilon} + \delta \geq m_F.$$

Como δ é dado, temos que

$$\liminf_{\varepsilon \to 0} m_{F_\varepsilon} \geq m_F. \tag{D.1}$$

Por outro lado considere a desigualdade $F_\varepsilon(t) \geq m_{F_\varepsilon} \sum_{i=1}^k |t^i|^{q_\varepsilon}$ $\forall t \neq 0$, tomando $\limsup_{\varepsilon \to 0}$ de ambos os lados temos

$$F(t) \geq \limsup_{\varepsilon \to 0} m_{F_\varepsilon} \sum_{i=1}^k |t^i|^{p^*}.$$

Logo

$$\frac{F(t)}{\sum_{i=1}^k |t^i|^{p^*}} \geq \limsup_{\varepsilon \to 0} m_{F_\varepsilon}.$$

Tomando $\inf_{t \in S_{p^*}^{k-1}}$ de ambos os lados temos

$$m_F \geq \limsup_{\varepsilon \to 0} m_{F_\varepsilon}. \tag{D.2}$$

Logo (D.2) e (D.1) finaliza a demonstração de i). Repetindo um raciocínio análogo, temos que

$$M_F \leq \liminf_{\varepsilon \to 0} M_{F_\varepsilon} \tag{D.3}$$

e

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} M_{F_\varepsilon} - \delta \leq M_F.$$

Como δ é dado, temos que

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} M_{F_\varepsilon} \leq M_F. \tag{D.4}$$

Logo (D.3) e (D.4) finaliza a demonstração de ii). □

Lema D.3. *$C_\varepsilon \to C$, ou seja*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} C_\varepsilon = \lim_{\varepsilon \to 0} \inf_{E_{F_\varepsilon}} \Phi_G(U) = \inf_{E_F} \Phi_G(U) = C.$$

Demonstração.

Fixemos uma aplicação $U \in E_k$ não identicamente nula. Para cada $\varepsilon > 0$, temos

$$C_\varepsilon \leq \Psi_\varepsilon(U)\ ,$$

onde

$$\Psi_\varepsilon(U) = \frac{\int_\Omega |\nabla U|^p \, dx}{(\int_\Omega F_\varepsilon(U)\, dx)^{p/q_\varepsilon}} - \frac{\int_\Omega G(x,U)\, dx}{(\int_\Omega F_\varepsilon(U)\, dx)^{p/q_\varepsilon}}\ .$$

Como

$$\Psi_\varepsilon(U) \to \Psi_0(U) = \frac{\int_\Omega |\nabla U|^p \, dx}{(\int_\Omega F(U)\, dx)^{p/p^*}} - \frac{\int_\Omega G(x,U)\, dx}{(\int_\Omega F(U)\, dx)^{p/p^*}}\ .$$

quando $\varepsilon \to 0$. Portanto,

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} C_\varepsilon \leq \lim_{\varepsilon \to 0} \Psi_\varepsilon(U) = \Psi_0(U)\ .$$

Tomando o ínfimo em U no lado direito acima, segue que

$$\limsup_{\varepsilon \to 0} C_\varepsilon \leq C\ .$$

Por outro lado, seja

$$\lambda_0 = \left(\int_\Omega F(U)\, dx\right)^{1/p^*} \quad e \quad \lambda_\varepsilon = \left(\int_\Omega F_\varepsilon(U)\, dx\right)^{1/q_\varepsilon}.$$

Usando a definição de F_ε, a p^*-homogeneidade de F e desigualdade de Holder, temos

$$\frac{\lambda_\varepsilon^p}{\lambda_0^p} = \frac{\left(\int_\Omega F(U)^{q_\varepsilon/p^*} dx\right)^{p/q_\varepsilon}}{(\int_\Omega F(U) dx)^{p/p^*}} = \left[\int_\Omega F\left(\frac{U}{(\int_\Omega F(U)dx)^{1/p^*}}\right)^{q_\varepsilon/p^*} dx\right]^{p/q_\varepsilon} \leq |\Omega|^{p\varepsilon/p^* q_\varepsilon}.$$

Usando a hipótese de coercividade obtemos

$$0 \leq \Psi_0(U) = \frac{\int_\Omega |\nabla U|^p \, dx}{\lambda_0^p} - \frac{\int_\Omega G(x,U)\, dx}{\lambda_0^p} = \frac{\lambda_\varepsilon^p}{\lambda_0^p}\left(\frac{\int_\Omega |\nabla U|^p \, dx}{\lambda_\varepsilon^p} - \frac{\int_\Omega G(x,U)\, dx}{\lambda_\varepsilon^p}\right)$$

$$= \frac{\lambda_\varepsilon^p}{\lambda_0^p}\Psi_\varepsilon(U) \leq |\Omega|^{p\varepsilon/p^* q_\varepsilon}\Psi_\varepsilon(U)$$

Logo

$$C \leq |\Omega|^{p\varepsilon/p^* q_\varepsilon}\Psi_\varepsilon(U).$$

Tomando o ínfimo em U, temos

$$C \leq |\Omega|^{p\varepsilon/p^* q_\varepsilon} C_\varepsilon.$$

Finalmente, tomando $\liminf_{\varepsilon\to 0}$ temos que

$$\liminf_{\varepsilon\to 0} C_\varepsilon \geq C.$$

e isto finaliza a demonstração do lema. □

Lema D.4. *(U_ε) é limitada em E_k.*

Demonstração. Pelo lema D.3, $\lim_{\varepsilon\to 0} C_\varepsilon = C$, logo $(\Phi_G(U_\varepsilon))$ é limitada, além disso, o lema D.3 mostra que $\left(m_{F_\varepsilon}^{-p/q_\varepsilon}\right)$ é limitada , logo pela desigualdade de Holder

$$\begin{aligned}
\left|\int_\Omega G(x, U_\varepsilon)dx\right| &\leq M_G \int_\Omega \sum_{i=1}^k |u_\varepsilon^i|^p dx \\
&\leq M_G |\Omega|^{\frac{q_\varepsilon}{q_\varepsilon - p}} \sum_{i=1}^k \left(\int_\Omega |u_\varepsilon^i|^{q_\varepsilon} dx\right)^{\frac{p}{q_\varepsilon}} \\
&\leq M_G |\Omega|^{\frac{q_\varepsilon}{q_\varepsilon - p}} k \left(\int_\Omega \sum_{i=1}^k |u_\varepsilon^i|^{q_\varepsilon} dx\right)^{\frac{p}{q_\varepsilon}} \\
&\leq M_G |\Omega|^{\frac{q_\varepsilon}{q_\varepsilon - p}} k.m_{F_\varepsilon}^{-p/q_\varepsilon} \left(\int_\Omega F_\varepsilon(U_\varepsilon)dx\right)^{\frac{p}{q_\varepsilon}} \\
&\leq M_G |\Omega|^{\frac{q_\varepsilon}{q_\varepsilon - p}} k.m_{F_\varepsilon}^{-p/q_\varepsilon} < c
\end{aligned}$$

$\forall\ \varepsilon > 0$, concluindo que $(\int_\Omega |\nabla U_\varepsilon|^p dx)$ é limitado ou seja (U_ε) é limitado em E_k. □

Lema D.5. *A menos de subsequência, as medidas positivas $|\nabla U_\varepsilon|^p dx$ e $F(U_\varepsilon)dx$ convergem fracamente no sentido de medida em $M(\Omega)$.*

Demonstração. Pela letra c) do teorema B.1, e pelo lema anterior, temos que

$$\||\nabla U_\varepsilon|^p dx\| = \int_\Omega |\nabla U_\varepsilon|^p dx = \|U_\varepsilon\|_{E_k}^p \leq c.$$

Além disso, pela desigualdade vetorial ótima de Sobolev (1.4), segue que

$$\|F(U_\varepsilon)dx\| = \int_\Omega F(U_\varepsilon)dx \leq \mathcal{A}_0(p, F, n)\int_\Omega |\nabla U_\varepsilon|^p dx \leq \mathcal{A}_0(p, F, n).c.$$

Logo as medidas são limitadas, e pela letra a) do teorema B.1, temos que a menos de subsequência, convergem fracamente no sentido de medida em $M(\Omega)$. □

Demonstração do teorema D.2:

Como (U_ε) é limitado em E_k, a menos de subsequência temos

$$\begin{aligned} U_\varepsilon &\rightharpoonup U_0 \quad em \quad E_k, \\ |\nabla U_\varepsilon|^p dx &\rightharpoonup \mu \quad em \quad M(\Omega), \\ F(U_\varepsilon)dx &\rightharpoonup \nu \quad em \quad M(\Omega). \end{aligned}$$

Seja a família de pontos $\{x_j\}_{j\in\tau} \subset \overline{\Omega}$ do teorema 1.2. Fixe $k \in \tau$ e defina $\varphi_\delta \in C_0^\infty(\Omega)$, satisfazendo

$$\varphi_\delta(x) = \begin{cases} 1, & se\ x \in B(x_k,\delta) \\ 0, & se\ x \in B(x_k,2\delta)^c \\ & 0 \leq \varphi_\delta \leq 1 \quad caso\ contrário \end{cases}$$

com $|\nabla\varphi_\delta| \leq \frac{c_1}{\delta}$, onde c_1 não depende de δ. Para cada $\varepsilon > 0$, a proposição 2.2 diz que

$$\begin{aligned} D_\varepsilon : &= C_0^\varepsilon \int_\Omega \varphi_\delta F_\varepsilon(U_\varepsilon)dx - p\int_\Omega \varphi_\delta |\nabla U_\varepsilon|^p dx - p\sum_{i=1}^k \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon^i|^{p-2}\nabla u_\varepsilon^i(u_\varepsilon^i \nabla\varphi_\delta)dx \\ &+p\int_\Omega \varphi_\delta G(x,U_\varepsilon)dx = 0 \end{aligned}$$

onde $C_0^\varepsilon = p\int_\Omega |\nabla U_\varepsilon|^p dx - p\int_\Omega G(x,U_\varepsilon)dx$, logo

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0} C_0^\varepsilon &= p\lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_\Omega |\nabla U_\varepsilon|^p dx - \int_\Omega G(x,U_\varepsilon)dx\right] \\ &= Cp. \end{aligned}$$

Além disso procedendo como na afirmação 2 do teorema D.1, temos que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \varphi_\delta G(x,U_\varepsilon)dx = \int_\Omega \varphi_\delta G(x,U_0)dx.$$

Então

$$\begin{aligned} \lim_{\varepsilon\to 0} D_\varepsilon &= Cp\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \varphi_\delta F_\varepsilon(U_\varepsilon)dx - p\int_\Omega \varphi_\delta d\mu \\ &+p\int_\Omega \varphi_\delta G(x,U_0)dx - p\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=1}^k \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon^i|^{p-2}\nabla u_\varepsilon^i(u_\varepsilon^i\nabla\varphi_\delta)dx = 0. \end{aligned}$$

Mas

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=1}^k \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon^i|^{p-2}\nabla u_\varepsilon^i(u_\varepsilon^i\nabla\varphi_\delta)dx \to 0$$

quando $\delta \to 0$. De fato, aplicando a desigualdade de Holder, o teorema 1.2 e fazendo $\delta \to 0$.

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=1}^k \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon^i|^{p-2}\nabla u_\varepsilon^i(u_\varepsilon^i\nabla\varphi_\delta)dx \leq \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=1}^k \int_\Omega |\nabla u_\varepsilon^i|^{p-1}|u_\varepsilon^i||\nabla\varphi_\delta|dx$$

$$\leq \lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=1}^{k}\left[\left(\int_\Omega |\nabla u_\varepsilon^i|^p dx\right)^{(p-1)/p}\left(\int_{B(x_k,2\delta)\setminus B(x_k,\delta)}|\nabla\varphi_\delta|^n dx\right)^{1/n}\left(\int_{B(x_k,2\delta)\setminus B(x_k,\delta)}|u_\varepsilon^i|^{p^*}dx\right)^{1/p^*}\right]$$

$$\leq c_2\left[\frac{c_1^n}{\delta^n}\mathrm{vol}\left(B(x_k,2\delta)\setminus B(x_k,\delta)\right)\right]^{1/n}\lim_{\varepsilon\to 0}\sum_{i=1}^{k}\left(\int_{B(x_k,2\delta)\setminus B(x_k,\delta)}|u_\varepsilon^i|^{p^*}dx\right)^{1/p^*}$$

$$\leq c_3\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{B(x_k,2\delta)\setminus B(x_k,\delta)}|U_\varepsilon|^{p^*}dx\right)^{1/p^*}\leq c_4\lim_{\varepsilon\to 0}\left(\int_{B(x_k,2\delta)\setminus B(x_k,\delta)}F(U_\varepsilon)dx\right)^{1/p^*}$$

$$\leq c_4\left(\int_{B(x_k,2\delta)\setminus B(x_k,\delta)}F(U_0)dx+\sum_{j\in\tau}\nu_j\delta_{x_j}(B(x_k,2\delta)\setminus B(x_k,\delta))\right)^{1/p^*}\to 0$$

quando $\delta\to 0$. *Além disso* $\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega \varphi_\delta F_\varepsilon(U_\varepsilon)dx \leq \int_\Omega \varphi_\delta d\nu$, *com efeito pela desigualdade de Holder*

$$\int_\Omega F_\varepsilon(U_\varepsilon)\varphi_\delta\, dx = \int_\Omega F(U_\varepsilon)^{q_\varepsilon/p^*}\varphi_\delta^{q_\varepsilon/p^*}\varphi_\delta^{1-q_\varepsilon/p^*}\, dx$$

$$\leq\left(\int_\Omega F(U_\varepsilon)\varphi_\delta\, dx\right)^{q_\varepsilon/p^*}\left(\int_\Omega \varphi_\delta\, dx\right)^{1-q_\varepsilon/p^*}\to\int_\Omega \varphi_\delta\, d\nu$$

quando $\varepsilon\to 0$. *Logo* $\lim_{\delta\to 0}\lim_{\varepsilon\to 0}D_\varepsilon$ *mostra que*

$$\mu_k\leq C.\nu_k.$$

Pelo teorema 1.2, e pela coercividade de Φ_G, *temos*

$$\mu_k\geq\frac{\nu_k^{p/p^*}}{\mathcal{A}_0(p,F,n)}\geq\frac{\mu_k^{p/p^*}}{\mathcal{A}_0(p,F,n).C^{p/p^*}},$$

ou seja,

$$\mu_k^{p/n}\geq\frac{1}{\mathcal{A}_0(p,F,n).C^{p/p^*}}.$$

Portanto

$$\mu_k\geq\frac{1}{\mathcal{A}_0(p,F,n)^{n/p}.C^{n/p^*}}.$$

Como a medida μ *é limitada, o conjunto* τ *é finito. Afirmamos que* $\tau=\emptyset$, *caso contrário, se* $k\in\tau$, *então*

$$\begin{aligned} C &= \lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega|\nabla U_\varepsilon|^p dx-\lim_{\varepsilon\to 0}\int_\Omega G(x,U_\varepsilon)dx\\ &\geq \int_\Omega|\nabla U_0|^p dx+\sum_{k\in\tau}\mu_k-\int_\Omega G(x,U_0)dx\\ &\geq \mu_k\geq\frac{1}{\mathcal{A}_0(p,F,n)^{n/p}.C^{n/p^*}}. \end{aligned}$$

Portanto

$$C\geq\frac{1}{\mathcal{A}_0(p,F,n)}.$$

Contradizendo a hipótese. Logo

$$C \geq \int_\Omega |\nabla U_0|^p dx - \int_\Omega G(x, U_0)dx = \Phi_G(U_0).$$

Para finalizarmos a demonstração, basta verificarmos que $U_0 \in E_F$. *Pelo teorema da imerssão contínua, segue que* (U_ε) *é limitado em* $L^{P^*}(\Omega, \mathbb{R}^k)$ *e* $U_0 \in L^{P^*}(\Omega, \mathbb{R}^k)$, *como* $\tau = \varnothing$, *temos que* $\nu_k = 0 \ \forall k \in \tau$, *logo*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega F(U_\varepsilon)dx = \int_\Omega F(U_0)dx + \sum_{k\in\tau} \nu_k \delta_{x_k} = \int_\Omega F(U_0)dx.$$

Pelo teorema 1.1, temos

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega \left(F(U_\varepsilon) - F(U_\varepsilon - U_0)\right) dx = \int_\Omega F(U_0)dx.$$

Logo

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega F(U_\varepsilon - U_0)dx = 0.$$

Mas

$$\int_\Omega F(U_\varepsilon - U_0)dx \geq m_F \int_\Omega \sum_{i=1}^k |u_\varepsilon^i - u_0^i|^{p^*} dx = m_f \|U_\varepsilon - U_0\|^{p^*}_{L^{p^*}(\Omega, \mathbb{R}^k)}.$$

Então $U_\varepsilon \to U_0$ *em* $L^{P^*}(\Omega, \mathbb{R}^k)$, *consequentemente* $u_\varepsilon^i \to u_0^i$ *em* $L^{P^*}(\Omega)$, *além disso, o teorema A.6, diz que a menos de subsequência*

(i) $u_\varepsilon^i \to u_0^i$ *q.t.p em* Ω,

(ii) $|u_\varepsilon^i| \leq h_i(x)$ *q.t.p em* Ω *e* $h_i \in L^{P^*}(\Omega)$.

Fixado $x \in \Omega \backslash \Omega_0$, *onde* Ω_0 *é o conjunto de medida nula na qual* $u_\varepsilon^i \nrightarrow u_0^i$, *consideremos o compacto* $K = \{U_\varepsilon(x), U_0(x)\} \subset \mathbb{R}^k$ *para todo* $\varepsilon > 0$, *o lema D.1 diz que, dado* $\delta > 0$, $|F_\varepsilon(U_\varepsilon) - F(U_\varepsilon)| \leq \delta$ *para todo* $0 < \varepsilon < \varepsilon_0$, *logo*

$$\lim_{\varepsilon \to 0} F_\varepsilon(U_\varepsilon) = \lim_{\varepsilon \to 0} \left(F_\varepsilon(U_\varepsilon) - F(U_\varepsilon)\right) + \lim_{\varepsilon \to 0} F(U_\varepsilon) = F(U_0),$$

ou seja, $F_\varepsilon(U_\varepsilon) \to F(U_0)$ *q.t.p em* Ω. *Além disso, pela desigualdade de Young e considerando* $\varepsilon < 1$, *temos*

$$\begin{aligned}
F_\varepsilon(U_\varepsilon) &\leq M_{F_\varepsilon} \sum_{i=1}^k |u_\varepsilon^i|^{q_\varepsilon} \\
&\leq M_{F_\varepsilon} \sum_{i=1}^k \left(\frac{p^* - q_\varepsilon}{p^*} + \frac{q_\varepsilon}{p^*} |u_\varepsilon^i|^{p^*} \right) \\
&\leq M_{F_\varepsilon} \sum_{i=1}^k \left(1 + |u_\varepsilon^i|^{p^*}\right) \\
&\leq M_{F_\varepsilon} \left(k + \sum_{i=1}^k |u_\varepsilon^i|^{p^*}\right) \\
&\leq \widetilde{M} \left(k + \sum_{i=1}^k h_i^{p^*}\right) \in L^1(\Omega).
\end{aligned}$$

Pelo teorema da convergência dominada de Lebesgue, temos

$$1 = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_\Omega F_\varepsilon(U_\varepsilon)dx = \int_\Omega F(U_0)dx,$$

ou seja $U_0 \in E_F$*, portanto é um minimizador não trivial para* Φ_G.

Referências Bibliográficas

[1] *E. Barbosa, M. Montenegro,* Extremal maps in best constants vector theory Part I: Duality and Compactness*, impress, 2011.*

[2] *E. Barbosa, M. Montenegro,* Nontrivial solutions for critical elliptic systems in potential form*, a aparecer em JDE, 2011.*

[3] *E. Barbosa,* Teoria de Melhores Constantes em análise geométrica: da escalar à vetorial*, Tese de Doutorado, UFMG, 2008.*

[4] *T. Bartsch, Y. Guo,* Existence and nonexistence results for critical growth polyharmonic elliptic systems*, Journal of Differential Equations, 220, 531-543, 2006.*

[5] *H. Brezis, E. Lieb* A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals*, Proc. Amer. Math. Soc. 48 (1993) 486-499.*

[6] *H. Brezis,* Análisis Funcional.Teoría e Aplicações*, Alianza Universidad Textos, 1983.*

[7] *H. Brezis, L. Nirenberg* Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983) 437-477.*

[8] *J. Ceccon, M. Montenegro,* Compactness results for divergence type nonlinear elliptic equations*, Annali di Matematica Pura ed Applicata, v. 188, p. 653-677, 2009.*

[9] *E. DiBenedetto,* Real analysis,*Birkhauser, 2002.*

[10] *O. Druet,* Generalized scalar curvature type equations on compact Riemannian manifolds*, Proceedings of the Royal Society of Edinburgh, 130A, 767-788, 2000.*

[11] *L. Evans,* Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, 1998.*

[12] *J. Fernandez,* Medida e Integração *, Rio de Janeiro; IMPA, 2007.*

[13] *D. Figueiredo,* Lectures on the Ekeland variational principle with applications and detours,*Tata Institute of Fundamental Research, 81, Springer-Verlag, 1989.*

[14] D. Figueiredo, Métodos Variacionais em Equações Diferenciais*, Revista Matemática Universitária Nº7,21-47, junho de 1988.*

[15] D. Figueiredo, O Princípio de Dirichlet*, Revista Matemática Universitária Nº1, junho de 1985.*

[16] D. Gilbarg, N. Trudinger, Elliptic partial differential equations of second order*, Grundlehren Math.Wiss. 224, pringer-Verlag, Berlin 1983.*

[17] M. Guedda, L. Vèron. Quasilinear elliptic equations involving critical Sobolev exponents*, Nonlinear Analysis TMA 13 (1989), 879-902.*

[18] G. Hardy, J. Littlewood, G. Pólya, Inequalities*, Cambridge Univ. Press 1934; ISBN 0-521-35880-9.*

[19] K. Hoffmann , R. Kunze, Álgebra Linear*, Ed. Polígono, 1971.*

[20] L. Leme, Sobre o nível de energia mínima de funcionais condicionados sobre espaços de aplicações *, Dissertação de Mestrado, UFMG, 2011.*

[21] H. Minkowski, Geometrie der Zahlen*, Chelsea, reprint 1953.*

[22] M. Montenegro, On nontrivial solutions of critical polyharmonic elliptic systems *. Journal of Differential Equations , v. 247, p. 906-916, 2009.*

[23] P. Nápoli, M. C. Mariani, Existence of solutions for elliptic systems with critical Sobolev exponent*. Electronic Journal of Differential Equations, Vol. 2002, No. 49, pp. 1-13.*

[24] J. Moser, A new proof of De Giorgis theorem concerning the regularity problem for elliptic differential equations*, Commun. Pure Appl. Math. 13 (1960), 457-468.*

[25] P. Pucci, J. Serrin, The maximum principle, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications *. 73, Birkhauser Verlag, Basel, 2007.*

[26] M. Struwe, Variational Methods: Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*, Springer Verlag, Berlin, 1990.*

[27] M. Willem, Minimax Theorems *, Boston, MA: Birkhauser, 1996.*