

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG  
MESTRADO EM MATEMÁTICA

A GRASSMANNIANA E A DIMENSÃO DA VARIEDADE DE  
FANO DE UMA HIPERSUPERFÍCIE

*Allan de Sousa Soares*

Belo Horizonte - MG  
2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG  
MESTRADO EM MATEMÁTICA

Allan de Sousa Soares

Orientador:  
Prof. Dr. Renato Vidal Martins

A GRASSMANNIANA E A DIMENSÃO DA VARIEDADE DE  
FANO DE UMA HIPERSUPERFÍCIE

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito à obtenção do Título de Mestre em Matemática.

Belo Horizonte - MG  
Março - 2011

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus por ter me dado força,  
coragem e entusiasmo para chegar até aqui.

Agradeço aos meus pais e ao meu irmão, Gilberto, Maurina e Gilberto Jr,  
que mesmo estando longe sempre me apoiaram.

Agradeço ao meu orientador Renato Vidal Martins pelas explicações  
e conselhos dados durante a elaboração deste trabalho.

Agradeço ao professor Israel Vainsencher pelos conselhos dados no início  
deste trabalho, bem como a ajuda na escolha do tema.

Agradeço a um professor e velho amigo, Benedito Melo Acioly, que sempre me  
incentivou a prosseguir nos estudos em matemática pura.

Agradeço aos meus colegas da UFMG por dúvidas sanadas em alguns pontos  
deste trabalho, em especial ao meu amigo, Antônio Marcos.

# Sumário

Resumo	IV
Abstract	V
Introdução	1
<b>1 Conceitos Básicos</b>	<b>3</b>
1.1 Espaço Projetivo . . . . .	3
1.2 Grassmannianas . . . . .	4
<b>2 Variedade de Fano</b>	<b>16</b>
2.1 Variedade de Fano . . . . .	16
2.2 Correspondência Incidente . . . . .	20
2.3 Retas em uma Superfície em $\mathbb{P}^3$ . . . . .	24
2.4 O Teorema Principal . . . . .	27
<b>3 As 27 retas de uma superfície cúbica sem pontos singulares</b>	<b>30</b>
3.1 Blowup e Critério de Jacobi . . . . .	30
3.2 As 27 Retas . . . . .	37
<b>4 Demonstração do Teorema Principal</b>	<b>46</b>
Conclusão	57

# Resumo

A Grassmanniana  $\mathbb{G}(k, n)$  corresponde aos subespaços lineares  $k$ -dimensionais de  $\mathbb{P}^n$ . Assim, dada uma variedade  $X \subset \mathbb{P}^n$ , de grau  $d$ , definimos a Variedade de Fano  $F_k(X)$  como sendo uma subvariedade de  $\mathbb{G}(k, n)$  formada pelos espaços lineares  $k$ -dimensionais contidos em  $X$ . No caso em que  $X$  é uma hipersuperfície estudaremos, a partir dos parâmetros  $n, k, d$ , sob que condições esta variedade é vazia ou não. No caso em que esta variedade é não vazia determinaremos a sua dimensão. Além disso, mostraremos que a variedade de Fano de retas de uma superfície cúbica sem pontos singulares  $X \subset \mathbb{P}^3$  é composta de exatamente 27 retas.

Palavras Chave: Grassmanniana, Variedade de Fano, Dimensão.

# Abstract

The Grassmannian  $\mathbb{G}(k, n)$  corresponds to the linear  $k$ -dimensional subspaces of  $\mathbb{P}^n$ . Thus, given a variety  $X \subset \mathbb{P}^n$  of degree  $d$ , we define the Fano variety  $F_k(X)$  as a submanifold of  $\mathbb{G}(k, n)$  formed by the  $k$ -dimensional linear spaces contained in  $X$ . In the case where  $X$  is hypersurface we will study, from the parameters  $n, k, d$ , under what conditions this variety is not empty. In the case that this variety is not empty will determine its dimension. Furthermore, we show that Fano variety of lines of a cubic surface without singular points of  $X \subset \mathbb{P}^3$  is composed of exactly 27 lines.

Keywords: Grassmannian, Fano variety, Dimension.

# Introdução

Gino Fano (1871 – 1952), filho de Ugo Fano e Angelica Fano, foi um matemático italiano de grande destaque no ramo da geometria. Fano estudou na Universidade de Turim, onde entrou em 1888. Seus estudos foram dirigidos por Corrado Segre, que tinha sido nomeado para a cadeira de geometria superior neste mesmo ano. Este foi um lugar muito interessante para a investigação em geometria e não é de se estranhar que Fano foi levado a se especializar nesta área.

Nosso objetivo neste trabalho é o de fazer um estudo a cerca da *Varietade de Fano*. Conforme a Definição 2.1, a variedade de Fano nada mais é que o conjunto dos espaços  $k$ -dimensionais contidos em  $X$ , a qual denotaremos por  $F_k(X)$ . Mais especificamente, buscaremos responder à seguinte questão: Dada uma hipersuperfície  $X \subset \mathbb{P}^n$  de grau  $d \geq 3$ , qual a dimensão da variedade de  $k$ -planos contidos em  $X$ ? Na tentativa de resolver esta questão optamos pela seguinte divisão de capítulos:

No Capítulo 1 abordaremos de forma breve alguns dos resultados a cerca das Grassmannianas. Por que isto? A resposta é bastante simples. A variedade de Fano,  $F_k(X)$  é uma subvariedade da Grassmanniana  $\mathbb{G}(k, n)$ . Neste capítulo, dentre os resultados mais interessantes estão: a prova de que a Grassmanniana  $\mathbb{G}(k, n)$  é uma subvariedade projetiva contida em  $\mathbb{P}^N$ ,  $N = \binom{n+1}{k+1} - 1$ , donde forneceremos uma maneira de calcular as equações que a definem; a prova de que  $\mathbb{G}(k, n)$  é irredutível e que esta pode ser vista localmente como o gráfico de uma aplicação. Tais resultados nos fornecerão uma melhor base para o entendimento dos capítulos posteriores.

No Capítulo 2 é que o nosso trabalho de fato começa. Nele trataremos de descrever a variedade incidente de  $k$ -planos,  $\phi = \{(X, \Lambda) \in \mathbb{P}^N \times \mathbb{G}(k, n); \Lambda \subset X\}$ , uma vez que a variedade de Fano, nada mais é que a fibra sobre um ponto  $X \in \mathbb{P}^N$ , onde estamos considerando o mapa projeção  $\pi_1 : \phi \longrightarrow \mathbb{P}^N$ . Por meio dos Exemplos 2.3 e 2.4, veremos que são necessários muitos cálculos envolvendo polinômios sempre que estivermos interessados

em exibir explicitamente a variedade de Fano. Diante desse fato, nos restringiremos somente ao cálculo da dimensão de  $F_k(X)$ . Depois disso, apresentaremos alguns resultados da geometria algébrica, como por exemplo, o Teorema da Dimensão das Fibras, tendo em vista sua importância para cálculo da dimensão de  $\phi$ . Um exemplo importante, dado neste capítulo, é visto na Seção 2.3. Nele estudamos a dimensão de  $F_1(X)$ , onde  $X$  é uma superfície geral de  $\mathbb{P}^3$ . Por fim, enunciaremos o Teorema 2.15 que responde à nossa questão principal de uma maneira bastante simples. A saber

*Seja  $X \subset \mathbb{P}^n$  uma hipersuperfície geral de grau  $d$  sobre um corpo de característica zero e  $F_k(X)$  a variedade de Fano de  $k$ -planos contidos em  $X$ . Se  $d \geq 3$  e  $\Gamma(n, k, d) = (n - k)(k + 1) - \binom{k+d}{k}$ , então*

*i)  $F_k(X) = \emptyset$  se  $\Gamma(n, k, d) < 0$ ;*

*ii)  $F_k(X)$  é uma variedade suave não vazia de dimensão  $\Gamma(n, k, d)$  se  $\Gamma(n, k, d) \geq 0$ .*

Este resultado nos mostrará que basta observar os parâmetros  $n, k, d$ . Ele pode ser encontrado em [1] ou em [8].

A título de ilustração, no Capítulo 3, discutiremos um dos problemas clássicos da escola de geometria algébrica italiana: Provar que toda superfície cúbica suave,  $X \subset \mathbb{P}^3$  apresenta sua variedade de Fano composta de exatamente 27 retas. Além disso, veremos, de forma parcial, que não somente a quantidade de retas em uma cúbica  $X$  é um invariante, mas também a disposição destas retas, se tratando apenas de uma deformação em um certo conjunto. Para tanto, descreveremos de forma sucinta, o blowup e o critério de Jacobi que serão ferramentas muito utilizadas no resto do nosso trabalho.

Por fim, no Capítulo 4, nos empenharemos em provar o Teorema 2.15. Esta tarefa requer o uso de ferramentas mais avançadas tais como a cohomologia. O grau de dificuldade encontrado nesta etapa é, sem dúvida, maior que o encontrado nos capítulos precedentes e portanto, tentamos demonstrar todos os resultados e passagens, algumas até óbvias. Mas ao fim, por um belo resultado, o esforço é válido.

Ao longo deste trabalho, nota-se, em muitos casos, que tentamos demonstrar praticamente todos os resultados e justificar todas as passagens, mesmo que algumas delas fossem bem triviais. O fizemos desta forma por uma questão didática.

# Capítulo 1

## Conceitos Básicos

Apresentaremos neste capítulo alguns conceitos e exemplos básicos que nos possibilitarão ir mais a fundo na teoria que será apresentada nos capítulos posteriores.

### 1.1 Espaço Projetivo

Dado um espaço vetorial  $V$  sobre um corpo algebricamente fechado  $\mathbf{k}$ , o espaço projetivo  $\mathbb{P}(V)$  é o conjunto dos subespaços vetoriais de  $V$  de dimensão 1. Mais precisamente,  $\mathbb{P}(V) = (V \setminus \{0\}) / \sim$  onde, para  $v, w \in V \setminus \{0\}$ , temos que  $v \sim w$  se, e somente se, existe  $\lambda \in \mathbf{k} \setminus \{0\}$  tal que  $w = \lambda v$ . No caso em que  $V = \mathbf{k}^{n+1}$ , usaremos a notação  $\mathbb{P}^n = \mathbb{P}_{\mathbf{k}}^n := \mathbb{P}(V)$  e denotaremos por  $(x_0 : \dots : x_n)$  a classe de  $(x_0, \dots, x_n)$ . Se o espaço vetorial  $V$  tem dimensão  $n + 1$  então o espaço projetivo associado a  $V$  terá dimensão  $n$ .

Uma *variedade projetiva* é o conjunto dos zeros em  $\mathbb{P}^n$  de uma família de polinômios homogêneos  $\{f_i\}_{i=1}^s$  em  $k[x_0, \dots, x_n]$ . O primeiro caso interessante de variedades projetivas ocorre quando os  $f_i$  são lineares. Mais precisamente, dizemos que  $\Lambda$  é um *espaço linear* em  $\mathbb{P}^n$  se é o conjunto solução de um sistema linear

$$\begin{cases} a_{10}x_0 + \dots + a_{1n}x_n = 0 \\ \vdots \\ a_{s0}x_0 + \dots + a_{sn}x_n = 0 \end{cases}$$

Se estas  $s$  linhas são linearmente independentes, temos que  $\Lambda$  é dito ser um espaço linear  $k$ -dimensional, ou um  $k$ -plano.

Por exemplo o seguinte sistema de equações

$$\begin{cases} x_0 - x_1 + x_2 + x_3 = 0 \\ x_0 + x_1 + x_2 - x_3 = 0 \end{cases}$$

corresponde à reta de  $\mathbb{P}^3$  que une os pontos  $(1 : 1 : -1 : 1)$  e  $(-1 : 1 : 1 : 1)$ .

## 1.2 Grassmannianas

Dá-se o nome de Grassmanniana ao conjunto  $G(k+1, n+1)$  dos subespaços  $(k+1)$ -dimensionais do espaço vetorial  $\mathbf{k}^{n+1}$ . No caso em que estivermos trabalhando em um espaço vetorial abstrato  $V$ , escreveremos  $G(k+1, V)$ . Também usamos a notação  $\mathbb{G}(k, n)$  ou  $\mathbb{G}(k, \mathbb{P}(V))$  para o mesmo conjunto e neste caso os elementos são vistos como  $k$ -planos de  $\mathbb{P}^n$ . Veremos mais adiante que a Grassmanniana  $\mathbb{G}(k, n)$  pode ser imersa num certo espaço projetivo  $\mathbb{P}^N$ . **Convenção:** *Neste trabalho adotaremos sempre a notação  $\mathbb{G}(k, n)$  para as Grassmannianas, mas trataremos seus pontos ora como  $k$ -planos de  $\mathbb{P}^n$ , ora como  $(k+1)$ -subespaços de  $\mathbf{k}^{n+1}$  conforme a conveniência do contexto.*

Considere agora um subespaço linear  $W \subset V$  de dimensão  $k+1$  com base  $\beta_W = \{v_1, \dots, v_{k+1}\}$ . Associe a  $W$  ao multivetor  $\lambda = v_1 \wedge \dots \wedge v_{k+1} \in \wedge^{k+1}(V)$ . Observe que  $\lambda$  é determinado a menos de multiplicação por escalar. De fato, seja  $\beta'_W = \{w_1, \dots, w_{k+1}\}$  outra base de  $W$  e consideremos o multivetor  $\lambda' = w_1 \wedge \dots \wedge w_{k+1}$  associado a  $W$ . Temos a seguinte relação

$$\lambda' = w_1 \wedge \dots \wedge w_{k+1} = \det(A) \cdot \lambda = \det(A) \cdot v_1 \wedge \dots \wedge v_{k+1},$$

onde  $A$  é a matriz de mudança de base.

Ou seja, podemos definir a seguinte aplicação

$$\begin{aligned} \psi : G(k+1, V) &\longrightarrow \mathbb{P}(\wedge^{k+1}V) = \mathbb{P}^N \\ W = \langle v_1, \dots, v_{k+1} \rangle &\longmapsto [v_1 \wedge \dots \wedge v_{k+1}] \end{aligned} \tag{1.1}$$

a qual damos o nome de *imersão de Plucker* de  $G(k+1, V)$ . Note que esta aplicação é de fato injetiva. Mais ainda, para todo  $[w] = \psi(W)$  temos  $\psi^{-1}([w]) = \{v \in V; v \wedge w = 0\}$ . Então, a partir de agora, as vezes identificaremos a Grassmanniana  $\mathbb{G}(k, n)$  com sua imagem em  $\mathbb{P}^N$ . As coordenadas homogêneas de  $\mathbb{P}(\wedge^{k+1}V)$  são chamadas de *coordenadas de Plucker* de  $G(k+1, V)$ .

Agora apresentaremos uma descrição mais detalhada da Grassmanniana  $\mathbb{G}(k, n)$ . Entre os nossos objetivos estão: apresentar uma descrição das coordenadas de Plucker de  $\mathbb{G}(k, n)$ ; mostrar que esta Grassmanniana é de fato uma subvariedade projetiva imersa em um certo espaço projetivo  $\mathbb{P}^N$ ,  $N = \binom{n+1}{k+1} - 1$ ; calcular a dimensão de  $\mathbb{G}(k, n)$  e mostrar

em dois exemplos,  $\mathbb{G}(1, 3)$  e  $\mathbb{G}(1, 4)$ , como as Grassmannianas podem ser vistas localmente como o gráfico de uma função e daí inferir o caso geral.

Considere  $\mathcal{M}$  como sendo o conjunto das matrizes  $(k+1) \times (n+1)$ . Seja  $A = (a_{ij}) \in \mathcal{M}$ ,  $1 \leq i \leq k+1$  e  $1 \leq j \leq n+1$ . Agora associemos a cada sequência de  $k+1$  inteiros  $j_1, \dots, j_{k+1}$ , com  $1 \leq j_l \leq n+1$ , o número  $p(j_1, \dots, j_{k+1}) = \det((a_{ij_l}))$ . É fácil ver que existem exatamente  $\binom{n+1}{k+1} = N+1$  destas sequências.

Consideremos um  $k$ -plano  $\Lambda \in \mathbb{G}(k, n)$ , temos que este é gerado por  $k+1$  vetores linearmente independentes. Fixada uma base para  $\mathbf{k}^{n+1}$  a matriz  $A \in \mathcal{M}$ , que representa  $\Lambda$ , é aquela cujas linhas são as componentes destes vetores. Ela tem um menor não nulo de ordem  $(k+1) \times (k+1)$  pois os vetores não são dependentes. Logo, podemos associar  $\Lambda$  ao ponto  $p = (\dots : p(j_1, \dots, j_{k+1}) : \dots) \in \mathbb{P}^N$ , onde os  $(j_1, \dots, j_{k+1})$  estão em ordem lexicográfica. Na verdade estas são exatamente as coordenadas de Plucker de  $\Lambda$ .

**Exemplo 1.1.** Consideremos a reta  $\Lambda \in \mathbb{P}^3$  que passa pelos pontos  $(1 : 1 : -1 : 1)$  e  $(-1 : 1 : 1 : 1)$ . A matriz que representa esta reta é dada por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Portanto as coordenadas de Plucker desta reta são

$$p_{12} = 2, p_{13} = 0, p_{14} = 2, p_{23} = 2, p_{24} = 0, p_{34} = -2,$$

onde por simplificação estamos considerando  $p(j_1, j_2) = p_{j_1 j_2}$ .

**Exemplo 1.2.** Agora estudemos a Grassmanniana  $\mathbb{G}(1, 3)$ . Temos por definição que  $\mathbb{G}(1, 3)$  é o conjunto dos 1-planos  $\Lambda$  de  $\mathbb{P}^3$ . Neste exemplo trabalharemos com os 1-planos cuja representação matricial apresenta o primeiro menor sendo dado pela matriz identidade (isto pode ser feito sem problemas como veremos mais adiante). Sendo assim,  $\Lambda$  apresenta a seguinte representação matricial:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & b \\ 0 & 1 & c & d \end{pmatrix}.$$

Temos que  $\Lambda$  determina, via imersão de Plucker, um ponto

$$y = (1 : c : d : -a : -b : ad - bc) = (p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{23} : p_{24} : p_{34}) \in \mathbb{P}^5.$$

Uma rápida observação nos mostra que  $p_{34}$  é uma coordenada dependente de  $p_{13}$ ,  $p_{14}$ ,  $p_{23}$ ,  $p_{24}$ , donde podemos obter a seguinte relação algébrica:

$$p_{34} = -p_{14}p_{23} + p_{13}p_{24}.$$

Homogeneizando em relação à variável  $p_{12}$  (que é não nula) obtemos a seguinte relação:

$$S : p_{12}p_{34} - p_{13}p_{24} + p_{14}p_{23} = 0. \quad (1.2)$$

A qual chamaremos de *relação de Plucker*.

A rigor para mostrarmos que  $\mathbb{G}(1,3)$  é de fato uma subvariedade de  $\mathbb{P}^5$  formada pelo conjunto solução da equação (1.2) devemos observar que:

i) As demais cartas afins correspondentes as matrizes em que um outro menor é a identidade produzem a mesma equação de (1.2). De fato, basta repetir o mesmo argumento anterior, com a diferença que agora consideraremos os 1-planos  $\Lambda \in \mathbb{P}^3$  em que um outro menor é dado pela matriz identidade. Este por sua vez determinará um ponto  $p \in \mathbb{P}^5$  em que uma das coordenadas  $p_{rs}$  é igual a 1. Seguindo o mesmo processo acima, onde homogeneizamos em relação à variável  $p_{rs}$ , obteremos as mesmas relações dadas em (1.2). Portanto,  $\mathbb{G}(1,3) \subset S$ .

ii) Dado um ponto  $p \in \mathbb{P}^5$  que satisfaz a equação (1.2) este deve ser imagem pela aplicação  $\psi$  de algum 1-plano  $\Lambda \in \mathbb{P}^3$ . Basta tomar  $p \in \mathbb{P}^5$  que satisfaz (1.2), onde sem perdas podemos assumir que  $p_{12} = 1$ , ou seja,  $p = (1 : p_{13} : p_{14} : p_{23} : p_{24} : p_{34})$  e correspondê-lo com o seguinte 1-plano  $\Lambda$ , cuja representação matricial é dada por

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -p_{23} & -p_{24} \\ 0 & 1 & p_{13} & p_{14} \end{pmatrix}.$$

Isto mostra que  $S \subset \mathbb{G}(1,3)$ .

A escolha da matriz acima esconde um método que será visto logo mais na demonstração da Proposição 1.14.

Por outro lado, podemos definir uma aplicação que mapeia o ponto

$$(1 : c : d : -a : -b : ad - bc) = (1 : x : y : z : w : xw - yz) \in \mathbb{P}^5$$

no ponto

$$(x, y, z, w, u) \in \mathbf{k}^5,$$

onde  $u = xw - yz$ . Temos que  $\mathbb{G}(1, 3)$  pode ser vista (localmente) como o gráfico de uma função, que neste caso é dada por

$$\begin{aligned} \eta : \mathbf{k}^4 &\longrightarrow \mathbf{k}^1 \\ (x, y, z, w) &\longmapsto xw - yz \end{aligned}$$

**Exemplo 1.3.** Estudemos de maneira análoga a Grassmanniana  $\mathbb{G}(1, 4)$ . Faremos neste exemplo um estudo bem semelhante ao apresentado no exemplo anterior. Temos que um 1-plano  $\Lambda \in \mathbb{P}^4$ , no qual o primeiro menor seja não nulo admite a seguinte representação matricial:

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & a & b & c \\ 0 & 1 & d & e & f \end{pmatrix}$$

Temos que as coordenadas Plucker de  $\Lambda$  determinam um ponto em  $\mathbb{P}^9$

$$\begin{aligned} (p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{15} : p_{23} : p_{24} : p_{25} : p_{34} : p_{35} : p_{45}) = \\ = (1 : d : e : f : -a : -b : -c : ae - bd : af - cd : bf - ce), \end{aligned}$$

que por sua vez pode ser identificado com o ponto

$$(1 : u : v : w : x : y : z : uy - xv : uz - xw : vz - yw).$$

Além disso podemos definir uma aplicação de  $\mathbb{P}^9$  em  $\mathbf{k}^9$  que mapeia o ponto

$$(1 : u : v : w : x : y : z : uy - xv : uz - xw : vz - yw) \tag{1.3}$$

no ponto

$$(u, v, w, x, y, z, uy - xv, uz - xw, vz - yw).$$

Da mesma forma que visto para  $\mathbb{G}(1, 3)$ , temos que  $\mathbb{G}(1, 4)$  é localmente o gráfico da aplicação

$$\begin{aligned} \eta : \mathbf{k}^6 &\longrightarrow \mathbf{k}^3 \\ (u, v, w, x, y, z) &\longmapsto (uy - xv, uz - xw, vz - yw) \end{aligned}$$

Agora calculemos as equações que definem  $\mathbb{G}(1, 4)$ . Consideremos um ponto em  $\mathbb{P}^9$  como sendo da forma

$$(p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{15} : p_{23} : p_{24} : p_{25} : p_{34} : p_{35} : p_{45}).$$

De (1.3) obtemos as seguintes relações algébricas:

$$\begin{cases} p_{34} = p_{13}p_{24} - p_{23}p_{14} \\ p_{35} = p_{13}p_{25} - p_{23}p_{15} \\ p_{45} = p_{14}p_{25} - p_{24}p_{15} \end{cases}$$

Homogeneizando em relação à variável  $p_{12}$ , temos as seguintes equações quádricas;

$$\begin{cases} p_{12}p_{34} = p_{13}p_{24} - p_{23}p_{14} \\ p_{12}p_{35} = p_{13}p_{25} - p_{23}p_{15} \\ p_{12}p_{45} = p_{14}p_{25} - p_{24}p_{15} \end{cases}$$

O procedimento para mostrar que  $\mathbb{G}(1,4)$  é uma subvariedade de  $\mathbb{P}^9$  descrita pelas equações dadas acima é exatamente o mesmo do exemplo anterior.

Já foi visto que  $\mathbb{G}(k,n)$  está imerso no espaço projetivo  $\mathbb{P}(\wedge^{k+1}(V))$  via imersão de Plucker  $\psi$ . Como nos exemplos acima, agora mostraremos que esta imagem é um subconjunto fechado de  $\mathbb{P}^N$ ,  $N = \binom{n+1}{k+1} - 1$ , ou seja a Grassmanniana será de fato uma subvariedade projetiva e exibiremos uma forma de calcular as equações que a definem.

**Definição 1.4.** *Seja  $w \in \wedge^{k+1}(V)$  e  $v \in V$ ,  $v \neq 0$ . Dizemos que  $v$  divide  $w$  se existe  $u \in \wedge^k(V)$  tal que  $w = v \wedge u$ .*

**Proposição 1.5.** *Seja  $w \in \wedge^{k+1}(V)$  e  $v \in V$ ,  $v \neq 0$ . Então  $v$  divide  $w$  se, e somente se, o produto vetorial  $w \wedge v = 0$ .*

*Demonstração.* Suponha que  $v$  divide  $w$ , ou seja, existe  $u$  tal que  $w = v \wedge u$  e portanto  $w \wedge v = v \wedge u \wedge v = 0$ . Reciprocamente, seja  $\{v_1, \dots, v_{n+1}\}$  uma base de  $V$  e seja  $v_1 = v$ . Temos que uma base canônica de  $\wedge^{k+1}(V)$  é dada por  $\{v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_{k+1}}; 1 \leq i_1 < \dots < i_{k+1} \leq n+1\}$ . Todo  $w \in \wedge^{k+1}(V)$  pode ser escrito, nesta base, da seguinte forma  $w = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k+1} \leq n+1} a_{i_1 \dots i_{k+1}} v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_{k+1}}$ . Então

$$v \wedge w = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k+1} \leq n+1} a_{i_1 \dots i_{k+1}} v_1 \wedge v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_{k+1}}.$$

Note que se  $v \wedge w = 0$  então  $a_{i_1 \dots i_{k+1}} = 0$  para todo  $i_1, \dots, i_{k+1}$  com  $1 < i_1$ , ou seja, o vetor  $v_1 = v$  divide  $w$ .  $\square$

**Definição 1.6.** *Dizemos que  $w \in \wedge^{k+1}(V)$  é totalmente decomponível se existem  $v_1, \dots, v_{k+1} \in V$  linearmente independentes tais que  $w = v_1 \wedge \dots \wedge v_{k+1}$ .*

**Proposição 1.7.** *Um multivetor  $w \in \wedge^{k+1}(V)$  é totalmente decomponível se, e somente se, o espaço dos vetores  $v$  que dividem  $w$  tem dimensão  $k+1$ .*

*Demonstração.*  $\implies$ ) Suponha que  $w \in \wedge^{k+1}(V)$  seja totalmente decomponível, ou seja, existem  $k+1$  vetores linearmente independentes  $v_1, \dots, v_{k+1} \in V$  tais que  $w = v_1 \wedge \dots \wedge v_{k+1}$ . Pela Proposição 1.5 o conjunto dos vetores que dividem  $w$  é dado por

$$U = \{v \in V; v \wedge w = 0\}.$$

Assim, um vetor  $v \in U$  se, e somente se, é linearmente dependente aos vetores  $v_1, \dots, v_k$ , isto é,  $U$  tem dimensão  $k+1$ .

$\Leftarrow$ ) Suponhamos  $\beta_U = \{v_1, \dots, v_{k+1}\}$  e completemos  $\beta_U$  a uma base de  $V$ ,  $\beta_V = \{v_1, \dots, v_{k+1}, v_{k+2}, \dots, v_{n+1}\}$ . Esta base induz uma base canônica de  $\wedge^{k+1}(V)$  na qual  $w \in \wedge^{k+1}(V)$  se escreve

$$w = \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k+1} \leq n+1} a_{i_1, \dots, i_{k+1}} v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_{k+1}}.$$

Note que para todo  $j = 1, \dots, k+1$  temos que

$$\begin{aligned} v_j \wedge w &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k+1} \leq n+1} a_{i_1, \dots, i_{k+1}} v_j \wedge v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_{k+1}} = \\ &= \sum_{1 \leq i_1 < \dots < i_{k+1} \leq n+1, i_r \neq j} a_{i_1, \dots, i_{k+1}} v_j \wedge v_{i_1} \wedge \dots \wedge v_{i_{k+1}} \end{aligned}$$

é uma equação nula se, e somente se,  $a_{i_1 \dots i_{k+1}} = 0$  exceto para algum  $i_r = j$ . Portanto,

$$v_1 \wedge w = v_2 \wedge w = \dots = v_{k+1} \wedge w = 0$$

se, e somente se,  $a_{i_1 \dots i_{k+1}} = 0$  exceto para

$$\{1, \dots, k+1\} \subset \{i_1, \dots, i_{k+1}\}.$$

Logo,  $w = a_{i_1 \dots i_{k+1}} v_1 \wedge \dots \wedge v_{k+1}$ . □

**Proposição 1.8.**  $G(k, \mathbb{P}(V))$  é uma subvariedade de  $\mathbb{P}^N$ .

*Demonstração.* Observe que  $[w] \in \psi(\mathbb{G}(k, \mathbb{P}(V))) \subset \mathbb{P}(\wedge^{k+1}(V))$  se, e somente se,  $[w]$  é totalmente decomponível em  $\wedge^{k+1}(V)$ . Mas isto ocorre se, e somente se, a transformação linear

$$\begin{aligned} \xi(w) : V &\longrightarrow \wedge^{k+2}(V) \\ v &\longmapsto v \wedge w \end{aligned}$$

tem posto  $n-k$ . De fato, note que  $\ker(\xi(w)) = \{v \in V; \xi(w) = w \wedge v = 0\}$  e por simples álgebra linear temos que  $\dim(\ker(\xi(w))) + \dim(\text{Im}(\xi(w))) = \dim(V) = n+1$ . Logo, pela

Proposição (1.7)  $[w]$  é totalmente decomponível se, e somente se,  $\xi(w)$  tem posto  $n - k$ . Por outro lado, a função  $\xi : \wedge^{k+1}(V) \longrightarrow \text{Hom}(V, \wedge^{k+2}(V))$  é linear e as entradas da matriz  $\xi(w)$  são formas lineares de  $\mathbb{P}^N$ . Logo,  $\mathbb{G}(k, \mathbb{P}(V))$  é uma subvariedade conseguida anulando-se os menores  $(n - k + 1) \times (n - k + 1)$  desta matriz.  $\square$

**Exemplo 1.9.** Neste exemplo exibiremos a matriz  $\xi(w)$  associada à Grassmanniana  $\mathbb{G}(1, 3) \cong \mathbb{G}(1, \mathbb{P}(V))$ . Seja  $\beta_V = \{e_1, e_2, e_3, e_4\}$  uma base de  $V$ . Temos que as bases canônicas de  $\wedge^2(V)$  e  $\wedge^3(V)$  são respectivamente:

i)  $\beta_{\wedge^2(V)} = \{e_1 \wedge e_2, e_1 \wedge e_3, e_1 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3, e_2 \wedge e_4, e_3 \wedge e_4\}$ ;

ii)  $\beta_{\wedge^3(V)} = \{e_1 \wedge e_2 \wedge e_3, e_1 \wedge e_2 \wedge e_4, e_1 \wedge e_3 \wedge e_4, e_2 \wedge e_3 \wedge e_4\}$ .

Se  $w = \sum w_{ij}e_i \wedge e_j$  então

$$\begin{aligned} \xi(w) : V &\longrightarrow \wedge^3(V) \\ v &\longmapsto v \wedge w \end{aligned}$$

é dada pela matriz cujas colunas são as componentes dos vetores

$$\left( \sum w_{ij}e_i \wedge e_j \right) \wedge e_1, \left( \sum w_{ij}e_i \wedge e_j \right) \wedge e_2, \left( \sum w_{ij}e_i \wedge e_j \right) \wedge e_3, \left( \sum w_{ij}e_i \wedge e_j \right) \wedge e_4.$$

Nossa matriz fica então da seguinte forma:

$$\xi(w) = \begin{pmatrix} w_{23} & -w_{13} & w_{12} & 0 \\ w_{24} & -w_{14} & 0 & w_{12} \\ w_{34} & 0 & -w_{14} & w_{13} \\ 0 & w_{34} & -w_{24} & w_{23} \end{pmatrix}$$

Portanto a variedade  $\mathbb{G}(1, 3)$  é definida pelo anulamento dos menores  $3 \times 3$  da matriz acima.

Seja  $V$  um espaço vetorial de dimensão  $n + 1$  e  $V^*$  o espaço dual de  $V$ . Considere a aplicação

$$\begin{aligned} \gamma : \wedge^{k+1}(V) &\longrightarrow \wedge^{n-k}(V^*) \\ e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{k+1}} &\longmapsto \gamma(e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{k+1}}) = f_{e_{j_1}} \wedge \dots \wedge f_{e_{j_{n-k}}} \end{aligned}$$

onde  $\beta_V = \{e_{i_1}, \dots, e_{i_{k+1}}, e_{j_1}, \dots, e_{j_{n-k}}\}$ , com  $i_1 < \dots < i_{k+1}$  e  $j_1 < \dots < j_{n-k}$ .

Desta forma,  $w$  é totalmente decomponível se, e somente se,  $\gamma(w)$  também o é. Por exemplo, se  $w = v_1 \wedge \dots \wedge v_{k+1}$  e  $f_{k+2}, \dots, f_{n+1} \in V^*$ , então  $\gamma(w) = f_{k+2} \wedge \dots \wedge f_{n+1}$ .

Suponha que existam dois espaços vetoriais  $V$  e  $V'$  sobre  $\mathbf{k}$  e uma transformação linear  $T : V \longrightarrow V'$ . Seja  $g$  um funcional linear sobre  $V'$ , defina

$$f_g(v) = g(Tv)$$

para cada  $v \in V$ . Note que  $T$  nos fornece uma função linear

$$\begin{aligned} T^* = T^t : V'^* &\longrightarrow V^* \\ g &\longmapsto f_g \end{aligned}$$

**Definição 1.10.** Dado um subespaço vetorial  $V' \subset V$ , definimos o conjunto

$$\text{Ann}(V') = \{f \in V^*; f(v') = 0, \forall v' \in V'\},$$

o qual dá-se o nome de anulador de  $V'$ .

Abusando um pouco a notação, temos que  $\text{Ann}(V') = (V'^\perp)^*$ , e portanto

$$\dim(V') + \dim(\text{Ann}(V')) = \dim(V).$$

**Proposição 1.11.** Seja  $T : V \longrightarrow V'$  uma transformação linear. Então,

$$\text{Im}(T^*) = \text{Ann}(\ker(T)).$$

*Demonstração.* Seja  $f \in \text{Im}(T^*)$ . Temos que  $f = T^*g$  para algum  $g \in V'^*$ . Se  $v \in \ker(T)$  temos

$$f(v) = (T^*g)(v) = g(Tv) = g(0) = 0.$$

Portanto a imagem de  $T^*$  é um subespaço de  $\text{Ann}(\ker(T))$ . Além disso

$$\dim(\text{Ann}(\ker(T))) = \dim(V) - \dim(\ker(T)) = \text{posto}(T) = \text{posto}(T^*) = \dim(\text{Im}(T^*)).$$

Logo,  $\text{Im}(T^*) = \text{Ann}(\ker(T))$ . □

Usando o isomorfismo entre  $\wedge^{k+1}(V)$  e  $\wedge^{n-k}(V^*)$ , dado  $w \in \wedge^{k+1}(V)$  tome o correspondente  $w^* \in \wedge^{n-k}(V^*)$ , donde faz sentido definir a aplicação

$$\begin{aligned} \psi(w) : V^* &\longrightarrow \wedge^{n-k+1}(V^*) \\ f &\longmapsto \gamma(w) \wedge f \end{aligned}$$

Por argumentos semelhantes aos vistos na prova da Proposição 1.8 temos que  $w \in \wedge^{k+1}(V)$  é totalmente decomponível se, e somente se,  $\psi(w)$  tem posto  $k+1$ . Além disso, usando a relação entre  $w$  e  $\gamma(w)$  temos que  $\ker(\psi(w)) = \text{Ann}(\ker(\xi(w)))$ . De fato, como  $w$  é totalmente decomponível, sem perda de generalidade, suponhamos que  $w = v_1 \wedge \dots \wedge v_{k+1}$  e portanto  $\gamma(w) = f_{k+2} \wedge \dots \wedge f_{n+1}$ . Assim,  $\ker(\psi(w)) = \langle f_{k+2}, \dots, f_{n+1} \rangle$ . Da

mesma forma,  $\ker(\xi(w)) = \langle v_1, \dots, v_{k+1} \rangle$  e portanto  $\text{Ann}(\ker(\xi(w))) = \langle f_{k+2}, \dots, f_{n+1} \rangle$ .  
Equivalentemente, temos que as imagens de suas funções transpostas

$$\xi(w)^* : \wedge^{k+2}(V^*) \longrightarrow V^*, \quad \psi(w)^* : \wedge^{n-k+1}(V) \longrightarrow V$$

são os anuladores uma da outra. De fato,

$$\text{Im}(\xi(w)^*) = \text{Ann}(\ker(\xi(w))) = \ker(\psi(w)) = \text{Ann}(\text{Im}(\psi(w)^*)).$$

Portanto,  $[w] \in \mathbb{G}(k, n)$  se, e somente se, para todo  $\alpha \in \wedge^{k+2}(V^*)$  e  $\beta \in \wedge^{n-k+1}(V)$ , temos

$$\xi(w)^*(\alpha) (\psi(w)^*(\beta)) = 0.$$

**Proposição 1.12.** *Seja  $w = \sum_{i_1 < \dots < i_{k+1}} a_{i_1 \dots i_{k+1}} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{k+1}} \in \wedge^{k+1}(V)$ . Então  $w$  é totalmente decomponível se, e somente se,*

$$w \wedge \left( \sum_{j=1}^{n+1} a_{j_1 \dots j_k j} e_j \right) = 0$$

para todo  $j_1 < \dots < j_k$ . (Para determinar o coeficiente  $a_{j_1 \dots j_k j}$  para  $j_k > j$  assumamos que  $a_{\dots i j \dots} = -a_{\dots j i \dots}$ ).

*Demonstração.* ( $\implies$ ) Suponhamos que  $w$  é totalmente decomponível, onde sem perdas assumimos que  $w = e_1 \wedge \dots \wedge e_{k+1}$ . Sendo assim, temos que

$$a_{i_1 \dots i_{k+1}} = 0 \text{ se } (i_1, \dots, i_{k+1}) \neq (1, \dots, k+1). \quad (1.4)$$

Suponha que

$$w \wedge \sum_j^{n+1} a_{j_1 \dots j_k j} e_j \neq 0,$$

ou seja, existe alguma sequência  $j_1 < \dots < j_k$  tal que

$$\sum_j^{n+1} a_{j_1 \dots j_k j} e_1 \wedge \dots \wedge e_{k+1} \wedge e_j \neq 0. \quad (1.5)$$

Observe que um termo deste somatório é nulo sempre que:

- i)  $j \in \{1, \dots, k+1\}$  pois contém  $e_1 \wedge \dots \wedge e_{k+1} \wedge e_j$ ;
- ii)  $j \in \{j_1, \dots, j_k\}$  pois contém os coeficientes  $a_{j_1 \dots j_k j}$ .

Sendo (1.5) não nulo temos que existe  $j \notin \{1, \dots, k+1\} \cup \{j_1, \dots, j_k\}$ , tal que  $a_{j_1, \dots, j_k j} \neq 0$ .

Mas isto contradiz (1.4).

( $\Leftarrow$ ) Seja  $w = \sum a_{i_1 \dots i_{k+1}} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{k+1}} \neq 0$ , digamos  $a_{1 \dots k+1} \neq 0$ . Suponha que  $w$  não é totalmente decomponível. Assim, o espaço dos vetores que dividem  $w$  tem dimensão no máximo  $k$ . De fato, considerando a aplicação  $\xi(w) : V \rightarrow \wedge^{k+2}(V)$  (Proposição 1.8) temos que  $w$  é totalmente decomponível se, e somente se, o posto de  $\xi(w)$  é no máximo  $n - k$ , ou melhor, o núcleo de  $\xi(w)$  é  $k + 1$ . Portanto, se  $w$  é não decomponível então  $\dim(\ker(\xi(w))) \leq k$ . Note que  $\ker(\xi(w))$  é exatamente o conjunto dos vetores que dividem  $w$ . Por outro lado, como

$$\left( \sum_{i_1 < \dots < i_{k+1}} a_{i_1 \dots i_{k+1}} e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{k+1}} \right) \wedge \left( \sum_j a_{j_1 \dots j_k} e_j \right) = 0$$

para todo  $j_1 < \dots < j_k \in \{1, \dots, \tilde{\alpha}, \dots, k + 1\}$ , o espaço gerado pelos vetores

$$\tilde{\alpha} = 1 \implies v_1 = \sum a_{j_2 \dots j_{k+1} j} e_j = a_{2 \dots k+1 1} e_1 + \dots + a_{2 \dots k+1 k+2} e_{k+2} + \dots + a_{2 \dots k+1 n+1} e_{n+1}$$

$\vdots$

$$\tilde{\alpha} = k + 1 \implies v_{k+1} = \sum a_{j_1 \dots j_k} e_j = 0 + a_{1 \dots k k+1} e_{k+1} + a_{1 \dots k k+2} e_{k+2} + \dots + a_{2 \dots k n+1} e_{n+1}$$

divide  $w$  e tem dimensão  $k + 1$ . De fato, veja que eles são linearmente independentes

$$\begin{aligned} \beta_1 v_1 + \dots + \beta_{k+1} v_{k+1} &= 0 && \iff \\ \iff (\beta_1 a_{2 \dots k+1 1}, \dots, \beta_{k+1} a_{1 \dots k k+1}, f_{k+2}, \dots, f_{n+1}) &= (0, \dots, 0) && \iff \\ \iff \beta_1 = \dots = \beta_{k+1} &= 0. \end{aligned}$$

Mas isto é uma contradição <sup>1</sup>. □

**Exemplo 1.13.** Para o caso em que  $k = 1$  e para todo  $q$  fixo temos a seguinte relação

$$\left( \sum_{i < j} a_{ij} e_i \wedge e_j \right) \wedge \left( \sum_s a_{qs} e_s \right) = 0.$$

Nesta realção o coeficiente de  $e_i \wedge e_j \wedge e_s$  é igual a  $a_{ij} a_{qs} - a_{is} a_{qj} + a_{js} a_{qi}$  e a equação  $a_{ij} a_{qs} - a_{is} a_{qj} + a_{js} a_{qi} = 0$  é não trivial se, e somente se,  $i, j, q, s$  são distintos. Portanto, a equação que define  $\mathbb{G}(1, 3)$ , como já sabemos é igual a

$$a_{12} a_{34} - a_{13} a_{24} + a_{14} a_{23} = 0.$$

De agora em diante nos empenharemos em calcular a dimensão de  $\mathbb{G}(k, n)$ . Seja  $\mathbb{G}(k, n)$  em  $\mathbb{P}^N$  e  $r = (r_1, \dots, r_{k+1})$  uma coleção de índices  $0 \leq r_0 < \dots < r_{k+1} \leq n + 1$ . Definamos os seguintes conjuntos:

<sup>1</sup>Usamos  $\tilde{\alpha}$  para indicar que o inteiro  $\alpha$  foi removido do conjunto  $\{1, \dots, \alpha, \dots, k + 1\}$

- (i)  $U_r = \{p = (\dots : p(j_1, \dots, j_{k+1}) : \dots) \in \mathbb{G}(k, n); p(r_1, \dots, r_{k+1}) \neq 0\}$ ;  
(ii)  $M_r = \{(x_{ij}) \in M_{(k+1) \times (n+1)}; \text{a submatriz } (x_{ir_l}), l = 1, \dots, k+1 \text{ seja a identidade}\}$ .

As matrizes dadas em (ii) são da seguinte forma

$$(x_{ij}) = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & x_{1k+2} & \dots & x_{1n+1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & x_{2k+2} & \dots & x_{2n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & x_{k+1k+2} & \dots & x_{k+1n+1} \end{pmatrix} \quad (1.6)$$

onde, sem perdas, estamos supondo  $r_l = l$ . É fácil ver que  $M_r$  é isomorfo a  $\mathbf{k}^{(k+1)(n-k)}$ .

**Proposição 1.14.** *Existe uma bijeção entre os conjuntos  $U_r$  e  $M_r$ .*

*Demonstração.* Dada uma matriz  $(x_{ij}) \in M_r$  basta associá-la ao ponto  $p \in U_r$  de coordenadas  $p(j_1, \dots, j_{k+1}) = \det(x_{ij_\beta})$ ,  $1 \leq j_1 < \dots < j_{k+1} \leq n+1$  e  $\beta = 1, \dots, k+1$ , que são exatamente as coordenadas de Plucker associadas a  $(x_{ij})$ . Por outro lado, dado  $p = (\dots : p(j_1, \dots, j_{k+1}) : \dots) \in U_r$  basta associá-lo à matriz  $M_r$  cujas entradas são  $x_{ij} = p(r_1, \dots, r_{i-1}, j, r_{i+1}, \dots, r_{k+1})/p(r_1, \dots, r_{k+1})$ .  $\square$

Note que toda matriz, cujo um certo menor tem determinante não nulo, admite uma única representação na qual este menor é a matriz identidade. Portanto, temos que  $\mathbb{G}(k, n)$  pode ser coberto por cópias de  $\mathbf{k}^{(k+1)(n-k)}$ , onde cada cópia está associada a um conjunto  $U_r$  formado pelos pontos  $p \in \mathbb{P}^N$  em que uma certa coordenada fixa é não nula. Temos exatamente  $N+1$  destes conjuntos  $U_r$  e portanto, acabamos de obter o seguinte resultado:

$$\dim(\mathbb{G}(k, n)) = (k+1)(n-k).$$

Além do que foi visto até agora, a Grassmanniana pode ser vista localmente como o gráfico de uma aplicação. Para ver isto observe que as relações de Plucker ocorrem em número de  $N - (k+1)(n-k)$  (este número é a dimensão do espaço de chegada da aplicação) e estas relações dependem de  $(k+1)(n-k)$  variáveis (sendo este número a dimensão do domínio). Portanto,  $\mathbb{G}(k, n)$  admite uma representação gráfica (local). Se estivermos trabalhando com os  $k$ -planos cujo primeiro menor é dado pela matriz identidade (como visto em (1.6)). A aplicação  $\eta$  associada a esta carta afim pode ser dada por:

$$\begin{aligned} \eta : \mathbf{k}^{(k+1)(n-k)} &\longrightarrow \mathbf{k}^{N-(k+1)(n-k)} \\ (x_{1k+2}, \dots, x_{k+1n+1}) &\longmapsto (R_1, \dots, R_{N-(k+1)(n-k)}) \end{aligned},$$

onde os  $R_i$ 's são as relações de Plucker.

Para finalizar esta seção vejamos um último resultado a cerca das Grassmannianas.

**Proposição 1.15.** *A Grassmanniana  $\mathbb{G}(k, n)$  é irredutível.*

*Demonstração.* Consideremos o espaço vetorial  $\wedge^{k+1}(V)$  com  $\beta_V = \{e_1, \dots, e_{n+1}\}$ . Assim temos que  $\beta_{\wedge^{k+1}(V)}$  é formado pelos vetores  $e_H = e_{i_1} \wedge \dots \wedge e_{i_{k+1}}$  para todo subconjunto  $H \subset \{1, \dots, n+1\}$  de  $k+1$  elementos  $i_1 < \dots < i_{k+1}$ . Dessa forma a Grassmanniana  $\mathbb{G}(k, n)$  pode ser coberta por abertos  $U_H = \mathbb{G}(k, n) \cap U'_H$ , onde  $U'_H$  corresponde aos pontos de  $\mathbb{P}^N$  cuja coordenada correspondente a  $e_H$  é não nula. Como visto anteriormente, cada  $U_H$  é isomorfo a  $\mathbf{k}^{(n-k)(k+1)}$  e portanto irredutível. Assim, é suficiente mostrar que  $U_H \cap U_J \neq \emptyset$  para  $H \neq J$ . Seja  $H \cap J = \{\alpha_0, \dots, \alpha_s\}$ . Consideremos os seguintes conjuntos

$$H \setminus H \cap J = \{\beta_{s+1}, \dots, \beta_k\}, \quad J \setminus H \cap J = \{\gamma_{s+1}, \dots, \gamma_k\}.$$

Temos que

$$W = \langle e_{\alpha_0}, \dots, e_{\alpha_s}, e_{\beta_{s+1}} + e_{\gamma_{s+1}}, \dots, e_{\beta_k} + e_{\gamma_k} \rangle$$

é tal que  $\psi(W) \subset U_H \cap U_J$ , onde  $\psi$  é dada em (1.1). □

# Capítulo 2

## Variedade de Fano

Neste capítulo trataremos de fato o tema a que este trabalho se propõe discutir, a *Variedade de Fano*. Inicialmente apresentaremos algumas definições e exemplos. Logo após trataremos da *correspondência incidente* entre as hipersuperfícies  $X$  de grau  $d$  e os  $k$ -planos  $\Lambda$  de  $\mathbb{P}^n$ . A título de ilustração a cerca da correspondência incidente, apresentaremos um estudo sucinto da variedade de retas de uma superfície de  $\mathbb{P}^3$ , onde estaremos interessados no cálculo da sua dimensão. Por fim, enunciaremos o Teorema 2.15, que será central neste trabalho e também um dos mais importantes resultados no que diz respeito ao estudo das variedades de Fano sobre corpos de característica zero. Ele nos permitirá afirmar em que casos a variedade de  $k$ -planos de uma hipersuperfície é não vazia e nos fornecerá a sua dimensão.

### 2.1 Variedade de Fano

Nesta seção definiremos a Variedade de Fano e daremos dois exemplos nos quais calculamos de forma explícita esta variedade.

**Definição 2.1.** *Seja  $X \subset \mathbb{P}^n$  uma variedade projetiva. A Variedade de Fano  $F_k(X)$  associada a  $X$  é a subvariedade da Grassmanniana  $\mathbb{G}(k, n)$  dada por*

$$F_k(X) = \{\Lambda \in \mathbb{G}(k, n); \Lambda \subset X\}.$$

Diante da definição acima surgem algumas questões interessantes:

- i)  $X$  contém algum subespaço de dimensão  $k$ , onde  $k > 0$ ?
- ii) Qual a dimensão da variedade de  $k$ -planos  $F_k(X)$  que está em  $X$ ?

Para o caso em que  $X$  é uma hipersuperfície de grau  $d \geq 3$ , contida em  $\mathbb{P}^n$ , o Teorema 2.15. assegura respostas para estas questões.

**Proposição 2.2.** *A variedade de Fano é uma subvariedade da Grassmanniana.*

*Demonstração.* Considere o aberto  $U = \mathbb{G}(k, n) \cap U_1$ , onde  $U_1$  corresponde a parte afim de  $\mathbb{P}(\wedge^{k+1}(V))$ , cujos pontos têm a primeira coordenada diferente de zero. É suficiente mostrar que  $F_k(X) \cap U$  é uma variedade afim para todo  $U \subset \mathbb{G}(k, n)$ . Podemos, sem perda de generalidade, supor que  $X$  seja uma hipersuperfície. Neste caso, temos que  $X$  é definida por um polinômio homogêneo  $G(x) = G(x_0, \dots, x_n)$  de grau  $d$ . Como  $X$  é uma hipersuperfície temos que  $\Lambda \subset X$  se, e somente se,  $G|_\Lambda$  é identicamente nulo. Seja  $\Lambda \in U$  parametrizado por  $(u_0 : \dots : u_k) \mapsto (\sum u_i \Lambda_i)$ , onde  $\Lambda_i$  é a  $i$ -ésima linha da matriz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & \dots & 0 & a_{1k+2} & \dots & a_{1n+1} \\ 0 & 1 & \dots & 0 & a_{2k+2} & \dots & a_{2n+1} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 & a_{k+1k+2} & \dots & a_{k+1n+1} \end{pmatrix}.$$

Note que esta parametrização é tal que o polinômio homogêneo  $G(\sum u_i \Lambda_i)$  possui o mesmo grau  $d$  quando visto em relação as variáveis  $u_i$  do espaço  $\Lambda$ . Queremos que os coeficientes deste polinômio, que são polinômios em  $a_{ij}$ , se anulem. Esta condição ocorre se, e somente se,  $G|_\Lambda \equiv 0$ . Desta forma acabamos de obter equações polinomiais em  $a_{ij}$  que definem  $F_k(X) \cap U$ . Logo,  $F_k(X)$  é uma subvariedade projetiva fechada de  $\mathbb{G}(k, n)$ . Para finalizar a prova, observe que, quando supomos que  $X$  é uma hipersuperfície não ocorrem perdas, uma vez que, de maneira geral,  $F_k(X)$  é a intersecção em  $\mathbb{G}(k, n)$  das variedades de Fano de todas as hipersuperfícies que a contêm.  $\square$

Agora vejamos dois exemplos nos quais explicitamos as variedades de Fano.

**Exemplo 2.3.** Neste exemplo determinaremos todas as retas contidas na cúbica  $C : x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$  em  $\mathbb{P}^3$  sobre o corpo dos complexos. Isto é o mesmo que determinar a variedade de Fano

$$F_1(C) = \{1 - \text{planos } \Lambda \in \mathbb{G}(1, 3); \Lambda \subset C\}.$$

*Solução.* A menos de uma permutação de coordenadas, toda reta em  $\mathbb{P}^3$  pode ser escrita da seguinte maneira:

$$\begin{cases} x_0 = ax_2 + bx_3 \\ x_1 = cx_2 + dx_3 \end{cases}$$

Substituindo as equações acima em  $C$  temos:

$$(ax_2 + bx_3)^3 + (cx_2 + dx_3)^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$$

$$a^3x_2^3 + 3a^2bx_2^2x_3 + 3ab^2x_2x_3^2 + b^3x_3^3 + c^3x_2^3 + 3c^2dx_2^2x_3 + 3cd^2x_2x_3^2 + d^3x_3^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$$

$$(a^3 + c^3 + 1)x_2^3 + (3a^2b + 3c^2d)x_2^2x_3 + (3ab^2 + 3cd^2)x_2x_3^2 + (b^3 + d^3 + 1)x_3^3 = 0.$$

Por meio de igualdade de polinômios temos que:

$$\left\{ \begin{array}{l} (a^3 + c^3 + 1)x_2^3 = 0x_2^3 \\ (3a^2b + 3c^2d)x_2^2x_3 = 0x_2^2x_3 \\ (3ab^2 + 3cd^2)x_2x_3^2 = 0x_2x_3^2 \\ (b^3 + d^3 + 1)x_3^3 = 0x_3^3 \end{array} \right.$$

$$\left\{ \begin{array}{l} a^3 + c^3 = -1 \quad (L_1) \\ 3a^2b = -3c^2d \quad (L_2) \\ 3ab^2 = -3cd^2 \quad (L_3) \\ b^3 + d^3 = -1 \quad (L_4) \end{array} \right.$$

Agora suponhamos que  $a, b, c, d$  sejam não nulos. Pois bem, consideremos as seguintes operações nas linhas do sistema:  $L_2^2/L_3 \Rightarrow a^3 = -c^3$  Mas isto gera um absurdo em  $L_1$  pois ao considerarmos a relação  $a^3 = -c^3$  obtemos  $0 = -1$ . Da mesma forma considerando a seguinte operação  $L_3^2/L_2 \Rightarrow b^3 = -d^3$  que gera o mesmo absurdo anterior. Sendo assim, suponhamos que  $a = 0 \Rightarrow c = -\omega^i \Rightarrow d = 0 \Rightarrow b = -\omega^j$  onde  $\omega$  é a raiz cúbica da unidade e  $i, j \in \{0, 1, 2\}$ . Portanto,

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = -\omega^i x_3, \quad i \in \{0, 1, 2\} \\ x_1 = -\omega^j x_2, \quad j \in \{0, 1, 2\} \end{array} \right.$$

Note que variando  $i$  e  $j$  obtemos nove retas. Mas ao permutarmos as variáveis  $x_0, x_1, x_2, x_3$  obtemos outros dois sistemas

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = -\omega^i x_1 \\ x_2 = -\omega^j x_3 \end{array} \right.$$

e

$$\left\{ \begin{array}{l} x_0 = -\omega^i x_2 \\ x_1 = -\omega^j x_3 \end{array} \right.$$

Veja que os sistemas acima nos fornecem mais 9 retas cada um. Portanto, encontramos  $9 + 9 + 9 = 27$  retas. Na verdade, ocorre um fato curioso: Toda superfície cúbica sem pontos singulares contém exatamente 27 retas, conforme será visto no próximo capítulo.

**Exemplo 2.4.** Encontremos as duas famílias de retas de uma quádrlica suave  $Q$  de  $\mathbb{P}^3$ . Temos que uma quádrlica de  $\mathbb{P}^3$  tem a seguinte forma

$$ax_0^2 + bx_1^2 + cx_2^2 + dx_3^2 + ex_0x_1 + fx_0x_2 + gx_0x_3 + hx_1x_2 + ix_1x_3 + jx_2x_3 = 0.$$

Podemos tomar a representação matricial de  $Q$ , que neste caso é dada por uma matriz simétrica e portanto existe uma base na qual  $Q$  é dada por uma matriz diagonal. Logo, sendo  $Q$  suave, ela pode ser representada por uma equação da forma

$$Q : a'x_0^2 + b'x_1^2 - c'x_2^2 - d'x_3^2 = 0, \quad (2.1)$$

onde  $a', b', c', d' \neq 0$ . Por meio da seguinte mudança de coordenadas de  $\mathbb{P}^3$

$$x_0 = \frac{y_0 + a'y_1}{a'}, x_2 = \frac{y_0 - a'y_1}{\sqrt{a'c'}}, x_1 = \frac{y_2 - b'y_3}{b'}, x_3 = \frac{y_2 + b'y_3}{\sqrt{b'd'}}$$

podemos escrever (2.1) da seguinte maneira

$$y_0y_1 = y_2y_3 \quad (*)$$

Esta superfície contém duas famílias de retas, a saber:

$$y_0 = ay_2, \quad ay_1 = y_3, \quad y_0 = by_3, \quad by_1 = y_2.$$

De fato, temos que uma reta de  $\mathbb{P}^3$  pode ser escrita da seguinte forma:

$$\begin{cases} y_0 = ay_2 + by_3 \\ y_1 = cy_2 + dy_3 \end{cases}$$

Substituindo estas equações em (\*) temos:

$$(ay_2 + by_3)(cy_2 + dy_3) = y_2y_3.$$

Por meio de igualdade de polinômios obtemos as seguintes relações:

$$\begin{cases} ac = 0 & (L_1) \\ bd = 0 & (L_2) \\ ad + bc - 1 = 0 & (L_3) \end{cases}$$

i) Na linha  $L_1$  temos que  $a = 0$  ou  $c = 0$ . Suponhamos que  $a = 0$ . Substituindo na linha  $L_3$  obtemos  $bc = 1$ . Em particular,  $b \neq 0$  e  $c \neq 0$ . Observando  $L_2$  temos que  $d = 0$ .

ii) Por outro lado, se supormos  $c = 0$  obtemos  $ad = 1$  e  $b = 0$ .

Isto conclui o nosso exemplo.

No exemplo acima vemos que a variedade de Fano  $F_1(Q)$  é composta de duas famílias de retas. Surge então uma questão interessante a cerca da irredutibilidade: *Em que casos  $F_k(X)$  é irredutível, onde  $X$  hipersuperfície de grau  $d$ ?* Neste caso recomenda-se a leitura de [16].

## 2.2 Correspondência Incidente

Nos Exemplos 2.3 e 2.4 descrevemos, de forma explícita, a variedade de Fano de retas da cúbica  $C : x_0^3 + x_1^3 + x_2^3 + x_3^3 = 0$  e a variedade de Fano de retas de uma quádrlica suave de  $\mathbb{P}^3$  sobre os complexos. Agora, no entanto, trataremos de estimar a dimensão de  $F_k(X)$  no caso em  $X$  seja uma hipersuperfície de grau  $d$  em  $\mathbb{P}^n$ . Agora listemos alguns resultados que iremos utilizar nesta tarefa.

**Definição 2.5.** *Uma variedade quase-projetiva é um subconjunto aberto de um conjunto projetivo fechado. Equivalentemente uma variedade é dita quase-projetiva se for isomorfa a um aberto de uma variedade projetiva.*

**Proposição 2.6.** *Se  $Y \subset X$ , então  $\dim(Y) \leq \dim(X)$ . Se  $X$  é irredutível,  $Y$  é fechado em  $X$  e  $\dim(Y) = \dim(X)$ , então  $X = Y$ .*

*Demonstração.* Este é o Teorema 1 de [2] pág. 68. □

**Proposição 2.7.** *Seja  $X$  uma variedade irredutível quase-projetiva e  $f : X \rightarrow \mathbb{P}^n$  uma função regular e seja  $Y = \overline{f(X)}$  o fecho da imagem. Para todo  $x \in X$ , seja  $X_x = f^{-1}(f(x)) \subset X$  a fibra de  $f$  sobre  $x$ . Temos que:*

- (i) *Para todo  $x \in X$ ,  $\dim_x(X_x) \geq \dim_x(X) - \dim_{f(x)}(Y)$ , com igualdade válida em um subconjunto aberto não vazio de  $X$ . A função  $\dim_x(X_x)$  é semicontínua superiormente em  $X$ , isto é, para todo inteiro  $\alpha$  o conjunto dos pontos  $x$  tais que  $\dim_x(X_x) \geq \alpha$  é fechado.*
- (ii) *Se  $X$  é projetivo então para todo  $y \in Y$  temos  $\dim(f^{-1}(y)) \geq \dim(X) - \dim(Y)$ , com igualdade válida em um subconjunto aberto não vazio de  $Y$ . A função  $\dim(f^{-1}(y))$  é semicontínua superiormente para todo  $y \in Y$ .*

*Demonstração.* A parte (i), onde consideramos variedades quase-projetivas, corresponde ao Teorema 11.12 [1], enquanto que a parte (ii) corresponde ao Teorema 7 da Seção 1.6.3 de [2]. Este resultado é o Teorema da Dimensão das Fibras (TDF). □

**Proposição 2.8.** *A imagem de uma variedade projetiva por uma função regular é um conjunto fechado.*

*Demonstração.* Este resultado pode ser encontrado em [2] pág. 57.  $\square$

**Proposição 2.9.** *Se  $f : X \rightarrow Y$  é uma função regular entre variedades projetivas com  $f(X) = Y$ , e se  $Y$  é irredutível e as fibras  $f^{-1}(y)$  são irredutíveis e de mesma dimensão, então  $X$  é irredutível.*

*Demonstração.* Suponha que  $X = \cup X_i$ , onde  $X_i$  é uma subvariedade fechada irredutível de  $X$ . Para todo  $y \in Y$  considere a dimensão  $\dim_i(f^{-1}(y))$  da fibra de  $f_i = f|_{X_i} : X_i \rightarrow Y$ . Agora, para cada  $y$  seja  $\alpha = \max(\dim_i(f^{-1}(y)))$ . Desde de que cada  $\dim_i$  é superiormente semicontínua (Proposição 2.7 (ii)), temos que existe  $j$  tal que  $\dim_j = \alpha$ . Note ainda que  $Y = \cup f(X_i)$ , onde  $f(X_i)$  é fechado (Proposição 2.8) e sendo  $Y$  irredutível temos que  $Y = f(X_{i_0})$ , onde suporemos  $i_0 = j$ . Usando o fato de toda a fibra  $f^{-1}(y)$  ser irredutível e de mesma dimensão  $\alpha$ , temos que  $f^{-1}(y) \subset X_j$ . Logo,  $f^{-1}(y) \subset f_j^{-1}(y)$  onde estamos considerando a função restrição  $f_j = f|_{X_j} : X_j \rightarrow Y$ . Sendo a inclusão  $f_j^{-1}(y) \subset f^{-1}(y)$  óbvia concluímos que  $f_j^{-1}(y) = f^{-1}(y)$  e portanto  $X_j = X$ , isto é  $X$  é irredutível.  $\square$

Seja

$$S = \{x_0^{\alpha_0} \dots x_n^{\alpha_n}; \alpha_0 + \dots + \alpha_n = d\}$$

o conjunto de monômios de grau  $d$  de  $\mathbb{P}^n$ . Este conjunto forma uma base para o espaço  $\mathbb{P}^M$  que parametriza todas as formas de grau  $d$  nas  $n + 1$  variáveis  $x_0, \dots, x_n$ . Em particular,  $M + 1 = \binom{n+d}{d}$ .

É conveniente definirmos neste momento o *mergulho de Veronese* (que será bastante utilizada nos Capítulos 3 e 4). Considere o mapa

$$\begin{aligned} \nu_d : \mathbb{P}^n &\longrightarrow \mathbb{P}^M \\ (x_0 : \dots : x_n) &\longmapsto (\dots : x^l : \dots) \end{aligned}$$

onde cada coordenada  $x^l$  é dada por um monômio de grau  $d$ , isto é,  $x^l = x_0^{\alpha_{0l}} \dots x_n^{\alpha_{nl}}$  com  $|\alpha| = d$ . A aplicação  $\nu_d$  é chamada de  $d$ -ésimo mergulho de Veronese de  $\mathbb{P}^n$ . A imagem  $\nu_d(\mathbb{P}^n) \subset \mathbb{P}^M$  é chamada de variedade de Veronese. De fato, basta observar que

$$x_0^{i_0} \dots x_n^{i_n} \cdot x_0^{j_0} \dots x_n^{j_n} = x_0^{k_0} \dots x_n^{k_n} \cdot x_0^{m_0} \dots x_n^{m_n} \text{ se } i_0 + j_0 = k_0 + m_0, \dots, i_n + j_n = k_n + m_n.$$

**Exemplo 2.10.** Consideremos a aplicação

$$\begin{aligned} \nu_2 : \mathbb{P}^2 &\longrightarrow \mathbb{P}^5 \\ (x_0 : x_1 : x_2) &\longmapsto (x_0^2 : x_1^2 : x_2^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1x_2) = (z_0 : \dots : z_5) \end{aligned}$$

A imagem desta aplicação é chamada de *superfície Veronese*. Para ver que a imagem desta aplicação é de fato uma variedade observe que: A imagem de  $\nu_2$  é descrita pelo local dos pontos  $(z_0 : \dots : z_5) \in \mathbb{P}^5$  tais que a matriz

$$\begin{pmatrix} z_0 & z_3 & z_4 \\ z_3 & z_1 & z_5 \\ z_4 & z_5 & z_2 \end{pmatrix}$$

tem posto 1.

Mostraremos agora a importante *correspondência incidente* entre as hipersuperfícies  $X$  de grau  $d$  em  $\mathbb{P}^n$  e os  $k$ -planos  $\Lambda$  de  $\mathbb{P}^n$ . Considere o conjunto

$$\phi = \{(X, \Lambda); \Lambda \subset X\} \subset \mathbb{P}^M \times \mathbb{G}(k, n).$$

Note que  $\phi$  é formado por duas subvariedades de  $\mathbb{P}^n$ , sendo que uma está contida na outra.

Considere a seguinte aplicação:

$$\sigma : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^m \longrightarrow \mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$$

definida por mandar o par  $((x), (y))$  em um ponto de  $\mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$  cujas coordenadas são os produtos dois a dois das coordenadas de  $(x)$  e  $(y)$ , isto é,

$$\sigma : ((x_0, \dots, x_n), (y_0, \dots, y_m)) \longmapsto (\dots, x_i y_j, \dots).$$

A esta aplicação dá-se o nome de *imersão de Segre*.

Veja que a imagem da imersão de Segre é uma variedade algébrica que recebe o nome de *variedade de Segre*. Se denotarmos o espaço de chegada  $\mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$  com coordenadas  $w_{ij}$  veremos que este será o local dos zeros dos polinômios quadráticos  $w_{ij}w_{kl} - w_{il}w_{kj}$ . Observe que o espaço  $\mathbb{P}^{(n+1)(m+1)-1}$  também pode ser visto como uma matriz de posto 1, conseguida pelo produto das matrizes:  $(x_{i1})$  formada pelas componentes de  $\mathbb{P}^n$  e a matriz  $(y_{1j})$  formada pelas componentes de  $\mathbb{P}^m$ . As equações algébricas que definem a imagem de  $\sigma$  como uma variedade são obtidas pelo anulamento dos menores de ordem  $2 \times 2$  da matriz  $(w_{ij}) = (x_{i1})(y_{1j})$ .

**Proposição 2.11.** *Seja  $\phi = \{(X, \Lambda); \Lambda \subset X\} \subset \mathbb{P}^M \times \mathbb{G}(k, n)$ . Temos que  $\phi$  se trata de uma subvariedade fechada de  $\mathbb{P}^M \times \mathbb{G}(k, n)$ .*

*Demonstração.* Tome o sistema de coordenadas locais  $U = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{P}^M \times \mathbb{G}(k, n)$  onde  $U_1$  tem a forma

$$U_1 = \{(G(x)) \in \mathbb{P}^M; G(x) = x^{\alpha_0} + \sum_{\alpha_l \neq \alpha_0} b_{\alpha_l} x^{\alpha_l}\}$$

e  $U_2$  tem as coordenadas afins  $(a_{ij})$  como em (1.6). Estamos admitindo que  $x^{\alpha_l} = x_1^{\alpha_{l1}} \dots x_n^{\alpha_{ln}}$ , onde  $|\alpha_l| = d$  e  $0 \leq l \leq M$ . Devemos mostrar que  $\phi$  é uma variedade afim nas coordenadas afins de  $U$ . Note que

$$U = U_1 \times U_2 \subset \mathbb{P}^M \times \mathbb{G}(k, n) \hookrightarrow \mathbb{P}^M \times \mathbb{P}^N \hookrightarrow \mathbb{P}^{\binom{n+d}{d} \binom{n+1}{d+1} - 1}.$$

Sendo assim, por meio da imersão de Segre, obtemos coordenadas não homogêneas em  $U$  nas variáveis  $\{b_{\alpha_l}\}, \{a_{ij}\}$ . Seja  $(u_0 : \dots : u_k) \mapsto (\sum u_i \Lambda_i)$  a parametrização de  $\Lambda$  em  $U$ . Desta forma temos que  $G(\Lambda)$  é um polinômio homogêneo nas variáveis  $u_i$  cujos coeficientes são polinômios duplamente não homogêneos nos coeficientes  $b_{\alpha_l}$  e  $a_{ij}$ . Estes polinômios devem ser nulos, mas isto ocorre se, e somente se,  $G(\Lambda) \equiv 0$ . Logo,  $\phi$  é uma variedade nas coordenadas de  $U$  definida pelo anulamento dos polinômios nas variáveis  $b_{\alpha_l}$  e  $a_{ij}$ .  $\square$

Examinemos as fibras de  $\phi$  considerando as suas projeções  $\pi_1, \pi_2$ . Note que a fibra de  $\phi$  sobre um ponto  $X \in \mathbb{P}^M$  é exatamente a variedade de Fano  $F_k(X)$ . Veremos mais adiante que a imagem da primeira projeção  $\pi_1 : \phi \longrightarrow \mathbb{P}^M$  tem dimensão máxima se  $d \neq 2$ . Isto significa que  $\pi_1$  será injetiva quando  $\dim(\phi) \leq M$  e sobrejetiva quando  $\dim(\phi) \geq M$ . Além disso, a segunda projeção  $\pi_2$  é sobrejetiva, ou seja, dado um  $k$ -plano  $\Lambda \in \mathbb{G}(k, n)$  existe uma hipersuperfície  $X \in \mathbb{P}^n$  de grau  $d$  que o contém. De fato, basta escolher um sistema de coordenadas homogêneas  $x_0, \dots, x_n$  em  $\mathbb{P}^n$  tal que  $\Lambda$  é dado por  $x_{k+1} = \dots = x_n = 0$  (\*\*) e considerar um polinômio qualquer

$$G(x_0, \dots, x_n) = f_{k+1}(x_0, \dots, x_n)x_{k+1} + \dots + f_n(x_0, \dots, x_n)x_n,$$

onde os  $f_j$  são monômios de grau  $d - 1$  nas variáveis  $x_0, \dots, x_n$ .

Agora calcularemos a dimensão de  $\phi$ . Considerando a segunda projeção  $\pi_2 : \phi \longrightarrow \mathbb{G}(k, n)$  temos que a fibra sobre  $\Lambda \in \mathbb{G}(k, n)$  é o espaço dos polinômios de grau  $d$  de  $\mathbb{P}^n$  contendo  $\Lambda$ . Considerando o sistema de coordenadas (\*\*) temos o seguinte mapa

Polinômios de grau  $d$  em  $\mathbb{P}^n \longrightarrow$  Polinômios de grau  $d$  em  $\Lambda \cong \mathbb{P}^k$

$$x_{i_1}^{n_1} \dots x_{i_m}^{n_m} \longrightarrow x_{i_1}^{n_1} \dots x_{i_m}^{n_m} \text{ se } \{x_{i_1}, \dots, x_{i_m}\} \cap \{x_{k+1}, \dots, x_n\} = \emptyset$$

$$x_{i_1}^{n_1} \dots x_{i_m}^{n_m} \longrightarrow 0 \text{ se } \{x_{i_1}, \dots, x_{i_m}\} \cap \{x_{k+1}, \dots, x_n\} \neq \emptyset$$

que é linear e sobrejetivo. Além disso o núcleo deste mapa é um subespaço linear de dimensão  $\binom{d+n}{d} - \binom{d+k}{d}$  cuja projetivização é a fibra de  $\pi_2$  sobre  $\Lambda$ . Como as fibras  $\pi_2^{-1}(\Lambda)$  são todas irredutíveis e de mesma dimensão e sendo  $\mathbb{G}(k, n)$  irredutível, temos pela Proposição 2.9 que  $\phi$  é irredutível. Portanto, pelo TDF temos que

$$\dim(\phi) \leq \dim(\mathbb{G}(k, n)) + \dim(\pi_2^{-1}(\Lambda)) =$$

$$(n - k)(k + 1) + \binom{d + n}{d} - \binom{d + k}{d} - 1.$$

Mas, sendo toda fibra  $\pi_2^{-1}(\Lambda)$  de mesma dimensão temos a igualdade, isto é

$$\dim(\phi) = \dim(\mathbb{G}(k, n)) + \dim(\pi_2^{-1}(\Lambda)).$$

Por outro lado, analisando a projeção  $\pi_1 : \phi \longrightarrow \mathbb{P}^M$ , temos:

i) Para o caso em que  $\dim(\phi) \geq M$  o TDF assegura que

$$\dim(F_k(X)) \geq \dim(\phi) - \dim(\mathbb{P}^M) = \Gamma(n, k, d),$$

que se trata de uma igualdade em um aberto denso, isto é

$$\dim(F_k(X)) = \Gamma(n, k, d)$$

para uma hipersuperfície geral  $X$ .

ii) É fácil ver que se  $\dim(\phi) < M$ , então  $F_k(X) = \emptyset$  para uma hipersuperfície geral  $X$ , pois a imagem de  $\phi$  será um fechado próprio de  $\mathbb{P}^M$ .

## 2.3 Retas em uma Superfície em $\mathbb{P}^3$

Nesta seção apresentaremos um caso particular do Teorema 2.15 que será visto logo mais. Estudaremos a dimensão da variedade de Fano de retas,  $F_1(X)$ , de uma superfície  $X \subset \mathbb{P}^3$  de grau  $d$ .

Seja  $\phi_3$  o conjunto dos pares  $(X, \Lambda) \in \mathbb{P}^M \times \mathbb{G}(1, 3)$ , onde  $X$  é uma superfície de grau  $d$  de  $\mathbb{P}^3$  e  $\mathbb{P}^M$  o espaço que parametriza estas superfícies. Temos que  $\phi_3$  é uma variedade

projetiva (Proposição 2.11). Da correspondência incidente vista na Seção 2.2 temos:

i)  $\pi_2(\phi_3) = \mathbb{G}(1, 3)$ ;

ii)  $\dim(\pi_2^{-1}(\Lambda)) = \binom{d+3}{d} - \binom{d+1}{d} - 1 = \frac{d(d+1)(d+5)}{6} - 1$ ;

iii)  $\phi_3$  é irredutível e  $\dim(\phi_3) = \dim(\pi_2(\phi_3)) + \dim(\pi_2^{-1}(\Lambda)) = \frac{d(d+1)(d+5)}{6} + 3$ .

Além disso a função  $\pi_1 : \phi_3 \rightarrow \mathbb{P}^M$  possui imagem fechada (Proposição 2.8) e portanto temos que  $\dim(\pi_1(\phi_3)) \leq \dim(\phi_3)$ . Portanto, se  $\dim(\phi_3) < M$  então  $\pi_1(\phi_3) \neq \mathbb{P}^M$ . Conclui-se daí que, nem toda superfície de grau  $d$  contém retas. Substituindo os devidos valores na desigualdade  $\dim(\phi_3) < M$  obtemos,

$$\frac{d(d+1)(d+5)}{6} + 3 < \frac{(d+1)(d+2)(d+3)}{6} - 1$$

que é uma inequação verdadeira para  $d > 3$ . Portanto, acabamos de obter o seguinte resultado.

**Proposição 2.12.** *Para todo  $d > 3$  existe uma superfície  $X$  de grau  $d$  que não contém nenhuma reta. O conjunto destas superfícies forma um aberto de  $\mathbb{P}^M$ .*

Assim, dada uma superfície  $X \subset \mathbb{P}^3$ , de grau  $d > 3$ , podemos recorrer ao resultado seguinte que utiliza coordenadas de Plucker, para estudar sua variedade de Fano  $F_1(X)$ .

**Proposição 2.13.** *As condições para uma reta  $l$ , em coordenadas de Plucker  $p_{ij}$ , pertencer a uma superfície  $X$ , dada pela equação  $F = 0$ , são relações algébricas entre os  $p_{ij}$  e os coeficientes de  $F$  que são homogêneos ambos em  $p_{ij}$  e nos coeficientes de  $F$ .*

*Demonstração.* Consideremos a reta  $l$  parametrizada em coordenadas de Plucker. Tome  $u, v$  dois vetores formando uma base para o plano  $\Lambda \subset V$ , tal que  $\dim(\Lambda) = 2$  e  $\dim(V) = 4$ . Assim, o conjunto dos vetores da forma  $uf(v) - vf(u)$  (\*), onde  $f$  percorre o espaço de todas as formas lineares em  $V$ , coincidem com  $\Lambda$ . Supondo que  $f$  tenha coordenadas  $(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ , ou melhor, se  $f(u) = \sum \alpha_i u_i$ , então os vetores (\*) tem coordenadas  $z_i = \sum_{j=0}^3 \alpha_j p_{ij}$ , onde  $p_{ij} = u_i v_j - u_j v_i$ . Desta forma, se  $l$  é uma reta em coordenadas de Plucker  $p_{ij}$ , os pontos de  $l$  têm coordenadas  $\sum_{j=0}^3 \alpha_j p_{ij}$  para  $j = 0, 1, 2, 3$ . Substituindo estas expressões na equação  $F(m_0, m_1, m_2, m_3) = 0$  e igualando a zero os coeficientes de todos os monômios em  $\alpha_i$ , acabamos de obter condições para que  $l \subset X$ . Estas condições estão sob a forma de relações algébricas entre os coeficientes de  $F$  e as coordenadas de Plucker  $p_{ij}$ . □

Assim, obtemos relações algébricas entre os coeficientes de uma forma  $F(m_0, m_1, m_2, m_3)$  de grau  $d > 3$ , que serão condições necessárias e suficientes para que uma superfície dada por  $F = 0$  contenha uma reta.

Ainda não terminamos o nosso trabalho. Vejamos os casos em que  $X$  é uma superfície de grau  $d = 1, 2, 3$ , onde asseguramos que a variedade de Fano  $F_1(X)$  é não vazia.

i)  $d = 1$ ;

Este caso é trivial, pois  $F = 0$  se trata de uma equação linear, que obviamente, deve conter retas.

ii)  $d = 2$ ;

No caso em que  $d = 2$  temos que  $M = 9$ ,  $\dim(\phi_3) = 10$  e portanto  $\dim(\pi_1^{-1}(X)) \geq 1$ . Logo, podemos dizer que toda quádrlica suave contém aos menos uma reta. Para ilustrar este caso temos o Exemplo 2.4 mostrando que toda quádrlica de  $\mathbb{P}^3$  contém infinitas retas, isto é,  $F_1(Q) \neq \emptyset$  em um aberto denso.

iii)  $d = 3$ .

Para  $d = 3$  temos  $M = 19$  e  $\dim(\phi_3) = 19$  e portanto  $\dim(\pi_1^{-1}(X)) \geq 0$ . O que dizer neste caso? Lembre-se de que no Exemplo 2.3 foi exibida uma superfície cúbica que contém somente um número finito de retas. A partir deste exemplo temos que existe um ponto  $X' \in \mathbb{P}^{19}$  cuja fibra é não vazia e além disso  $\dim(\pi_1^{-1}(X')) = 0$ . Mas pelo TDF temos que isso é possível somente se  $\dim(\pi_1(\phi_3)) = 19$ . De fato,

$$0 = \dim(\pi_1^{-1}(X')) \geq \dim(\phi_3) - \dim(\pi_1(\phi_3)) \iff \dim(\pi_1(\phi_3)) \geq \dim(\phi_3).$$

Usando o fato de que  $\dim(\phi_3) \geq \dim(\pi_1(\phi_3))$  temos a igualdade desejada. Como  $\pi_1(\phi_3)$  é fechado em  $\mathbb{P}^{19}$  segue que  $\pi_1(\phi_3) = \mathbb{P}^{19}$  (Proposição 2.6).

Diante das informações de *iii*) acabamos de obter a seguinte proposição.

**Proposição 2.14.** *Toda superfície cúbica contém ao menos uma reta. Existe um subconjunto aberto  $U$  do espaço  $\mathbb{P}^{19}$  parametrizando todas as superfícies cúbicas tal que uma superfície correspondente a um ponto de  $U$  contém somente um número finito de retas.*

Superfícies cúbicas que contém infinitas retas existem, como é o caso dos cones cúbicos, muito embora estaremos considerando, no próximo capítulo, superfícies cúbicas suaves de  $\mathbb{P}^3$ . Neste caso, teremos que toda cúbica possuirá um número fixo de retas.

## 2.4 O Teorema Principal

Veremos agora que, dada uma hipersuperfície geral  $X \subset \mathbb{P}^n$  de grau  $d \geq 3$ , o número  $\Gamma(n, k, d)$  nos possibilitará responder se  $F_k(X)$  é ou não uma variedade vazia, e sendo não vazia, qual a sua dimensão. O resultado que segue é um dos mais importantes no que diz respeito a esta questão e ele estabelece uma relação entre os parâmetros  $n, k, d$ .

**Teorema 2.15.** *Seja  $X \subset \mathbb{P}^n$  uma hipersuperfície geral de grau  $d$  sobre um corpo de característica zero e  $F_k(X)$  a variedade de Fano de  $k$ -planos contidos em  $X$ . Se  $d \geq 3$  e  $\Gamma(n, k, d) = (n - k)(k + 1) - \binom{k+d}{k}$ , então*

*i)  $F_k(X) = \emptyset$  se  $\Gamma(n, k, d) < 0$ ;*

*ii)  $F_k(X)$  é uma variedade suave não vazia de dimensão  $\Gamma(n, k, d)$  se  $\Gamma(n, k, d) \geq 0$ .*

*Demonstração.* Apresentaremos a demonstração deste resultado no capítulo 4. □

Para o caso em que  $n = 3$  e  $k = 1$  temos  $\Gamma(3, 1, d) = (1 + 1) \cdot (3 - 1) - \binom{d+1}{1} = 3 - d$ . Como concluímos na seção anterior uma superfície geral  $X \subset \mathbb{P}^3$ , de grau  $d > 3$  não deve conter nenhuma reta. Além disso temos que o número  $3 - d$  é exatamente a dimensão da variedade de Fano de retas de uma superfície  $X \subset \mathbb{P}^3$  de grau  $d$ .

Note que o Teorema 2.15 é válido para uma hipersuperfície geral  $X$ , e não para toda hipersuperfície. Tomemos por exemplo a seguinte quártica  $Q \subset \mathbb{P}^3$

$$Q : x_0^4 + x_1^4 - x_2^4 - x_3^4 = 0.$$

Temos neste caso

$$n = 3, k = 1, d = 4 \implies \Gamma(n, k, d) = (3 - 1)(1 + 1) - \binom{1 + 4}{1} = 4 - 5 = -1.$$

No entanto,  $F_1(Q) \neq \emptyset$ . Em particular a reta  $x_0 = x_2, x_1 = x_3$  pertence a  $F_1(Q)$ .

**Exemplo 2.16.** Mostremos agora que a hipótese do Teorema 2.15 de que  $d \geq 3$  é necessária. De fato, considere o caso em que  $n = 4, d = 2$  e  $k = 2$  que são os 2-planos em uma quádrlica suave  $Q$  de  $\mathbb{P}^4$ , ou seja  $F_2(Q)$ . Temos que  $\Gamma = (2+1)(4-2) - \binom{2+2}{2} = 0$ . Tome a quádrlica  $Q = ax_0^2 + bx_1^2 + cx_2^2 + dx_3^2 + ex_4^2$ . Note que a condição de esta quádrlica não conter pontos singulares equivale a dizer que  $a, b, c, d, e \neq 0$ . Por outro lado temos que um 2-plano de  $\mathbb{P}^4$  pode ser escrito da seguinte forma:

$$\begin{cases} x_0 = Ax_2 + Bx_3 + Cx_4 \\ x_1 = Dx_2 + Ex_3 + Fx_4 \end{cases}$$

Substituindo estas equações em  $Q$  e por meio de igualdade de polinômios temos as seguintes relações:

$$\left\{ \begin{array}{l} aA^2 + bD^2 + c = 0 \\ aB^2 + bE^2 + d = 0 \\ aC^2 + bF^2 + e = 0 \\ aAB + bDE = 0 \\ aAC + bDF = 0 \\ aBC + bEF = 0 \end{array} \right.$$

Queremos mostrar que este sistema não admite solução. Note que se  $A = B = C = D = E = F = 0$  teríamos o um absurdo, pois  $c, d, e$  são não-nulos. Então suponhamos que

$$F \neq 0 \implies E = -\frac{aBC}{bF}, D = -\frac{aAC}{bF}.$$

Substituindo estas valores na quarta linha do nosso sistema e cancelando os denominadores temos a seguinte equação:

$$aAB(bF^2 + aC^2) = 0.$$

Note que não podemos ter  $bF^2 + aC^2 = 0$  pois isto geraria um absurdo na terceira linha. Pois bem suponhamos que

$$aAB = 0 \implies A = 0 \text{ ou } B = 0.$$

- i)  $A = 0 \implies bDF = 0 \implies D = 0$  o que gera um absurdo na primeira linha do nosso sistema;
- ii)  $B = 0 \implies bEF = 0 \implies E = 0$  o que gera um absurdo na segunda linha do nosso sistema.

Os primeiros exemplos interessantes de variedades de Fano ocorrem no caso em que  $\Gamma(n, k, d) = 0$ . Dentre eles dois se destacam:

- i) a variedade de Fano de retas de uma superfície cúbica suave  $C \subset \mathbb{P}^3$ , onde temos que  $\Gamma(3, 1, 3) = (3 - 1)(1 + 1) - \binom{3+1}{3} = 0$ . Neste caso, mostra-se que  $F_1(C)$  é composta de exatamente 27 retas.
- ii) a variedade de Fano de uma quintica  $Q$  sem pontos singulares qualquer de  $\mathbb{P}^4$ , onde  $\Gamma(4, 1, 5) = (4 - 1)(1 + 1) - \binom{5+1}{4} = 0$ . É possível mostrar que  $F_1(Q)$  é composta de exatamente 2875 retas conforme [1], pág. 154.

**Proposição 2.17.** *Seja  $X \subset \mathbb{P}^n$  uma hipersuperfície de grau  $d > 1$  e seja  $k$  um inteiro tal que  $2k \geq n$ . Então todo  $k$ -plano  $\Lambda \subset X$  intersecta um local singular de  $X$ . Em particular, se  $X$  é suave então  $F_k(X)$  é vazia.*

*Demonstração.* Escolha um sistema de coordenadas homogêneas  $x_0, \dots, x_n$  em  $\mathbb{P}^n$  tal que  $\Lambda$  é dado por  $x_{k+1} = \dots = x_n = 0$ . Seja  $F$  definindo a equação de  $X$ . Como  $\Lambda \subset X$ ,  $F(x_0, \dots, x_k, 0, \dots, 0) = 0$ . Além disso

$$\frac{\partial F}{\partial x_i}(x_0, \dots, x_k, 0, \dots, 0) = 0,$$

para todo  $i = 0, \dots, k$ . De fato, como  $\Lambda \subset X$  temos que  $F = f_{k+1}x_{k+1} + \dots + f_n x_n$ , onde cada  $f_i$  é uma forma de grau  $d - 1$ . Como  $d > 1$ , para  $i = 1, \dots, n - k$ , os polinômios homogêneos em  $\Lambda$ ,

$$\frac{\partial F}{\partial x_{k+i}}(x_0, \dots, x_k, 0, \dots, 0) = f_{k+i}(x_0, \dots, x_k, 0, \dots, 0)$$

são não constantes. Desde que  $n - k \leq k$ , estes  $n - k$  polinômios não constantes tem um zero comum em  $\Lambda$ . Pelo critério de Jacobi (Seção 3.1) este é um ponto singular de  $X$ .  $\square$

# Capítulo 3

## As 27 retas de uma superfície cúbica sem pontos singulares

Neste capítulo trataremos de discutir um dos problemas clássicos da escola italiana de Geometria Algébrica: *Toda superfície cúbica sem pontos singulares de  $\mathbb{P}^3$  contém exatamente 27 retas.* Até o presente momento sabemos apenas que a variedade de Fano de retas de tais cúbicas é não vazia conforme visto na Proposição 2.14. Além disso, apresentaremos uma descrição parcial acerca da disposição destas retas. Sendo assim, na Seção 3.1 apresentaremos alguns resultados acerca da teoria necessária para esta tarefa a qual finalizaremos na Seção 3.2.

### 3.1 Blowup e Critério de Jacobi

É fato conhecido da Geometria Algébrica que o cálculo da dimensão de uma variedade tem um caráter local. É sabido que se duas variedades irredutíveis têm subconjuntos abertos isomorfos então estas variedades têm a mesma dimensão. Nosso papel agora será estudar estas relações mais a fundo, o que nos possibilitará a construção de uma importante classe de variedades que, embora não sejam isomorfas, contenham abertos que o são.

**Definição 3.1.** *Sejam  $\Sigma_1 \subset \mathbf{k}^{n_1}$  e  $\Sigma_2 \subset \mathbf{k}^{n_2}$  dois conjuntos algébricos irredutíveis. Um mapa  $\alpha : \Sigma_1 \rightarrow \Sigma_2$  será chamado um morfismo se existem  $n_2$  polinômios  $f_1, \dots, f_{n_2}$  nas variáveis  $x_1, \dots, x_{n_1}$  tais que  $\alpha(x) = (f_1(x_1, \dots, x_{n_1}), \dots, f_{n_2}(x_1, \dots, x_{n_1}))$  para todo ponto  $x = (x_1, \dots, x_{n_1}) \in \Sigma_1$ .*

Consideremos duas variedades  $X$  e  $Y$ . Dizemos que um mapa  $f : X \rightarrow Y$  é racional

se é uma classe de equivalência entre os pares  $(f|_U, U)$ , onde  $f|_U$  é um morfismo de variedades de um aberto  $U \subset X$  em  $Y$ . Neste contexto dois pares  $(f|_U, U)$  e  $(f|_{U'}, U')$  são ditos equivalentes se  $f|_U$  e  $f|_{U'}$  coincidem na interseção  $U \cap U'$ .

Uma função racional  $f : X \rightarrow Y$  é chamada *dominante* se sua imagem é densa em  $Y$ , ou seja, se  $f$  é dada por um morfismo  $f : U \rightarrow Y$  tal que  $f(U)$  contém um subconjunto aberto não vazio de  $Y$ . Dois mapas racionais arbitrários  $f : X \rightarrow Y$ ,  $g : Y \rightarrow Z$  podem não admitir a composição, mas se  $f$  for dominante então existe a composta. Para ver isto, tome  $U$  tal que  $f(U)$  contém um aberto  $V \subset Y$ . Assim, temos que  $g \circ f : X \rightarrow Z$  é racional definida pela classe de equivalência contendo os pares  $(g|_V \circ f|_U, f|_U^{-1}(V))$ .

Um mapa *birrational* de  $X$  em  $Y$  é um mapa dominante racional  $f : X \rightarrow Y$ , juntamente com um mapa racional também dominante  $g : Y \rightarrow X$ , onde  $g \circ f = id_X$  e  $f \circ g = id_Y$  são mapas racionais. Duas variedades  $X$  e  $Y$  são chamadas birracionais se existe um mapa birrational entre elas, ou melhor,  $X$  e  $Y$  são birracionais se elas contêm subconjuntos abertos não vazios isomorfos.

Seja  $X \subset \mathbf{k}^n$  uma variedade afim, e  $f_0, \dots, f_r \in \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]$  funções polinomiais que não se anulam identicamente em  $X$ . Seja  $U = X - Z(f_0, \dots, f_r)$  um conjunto aberto não vazio de  $X$ , onde  $Z(f_0, \dots, f_r)$  indica o local dos zeros destes polinômios. Assim, existe um morfismo bem definido  $f : U \rightarrow \mathbb{P}^r$  que leva  $P$  no ponto  $(f_0(P) : \dots : f_r(P))$ . Podemos olhar o gráfico associado a este morfismo

$$\Omega = \{(P, f(P)); P \in U\} \subset X \times \mathbb{P}^r,$$

que é isomorfo a  $U$ , cujo morfismo inverso é naturalmente o que mapeia  $(P, Q)$  no ponto  $P$ . Note que, em geral,  $\Omega$  não é fechado em  $X \times \mathbb{P}^r$ . Isso se deve ao fato de que os pontos em  $X \setminus U$  onde  $(f_0 : \dots : f_r)$  não está bem definida como um ponto de  $\mathbb{P}^r$  estão faltando.

Dá-se o nome de *blowup* de  $X$  em  $(f_0, \dots, f_r)$  ao conjunto  $\tilde{X}$  correspondente ao fecho de  $\Omega$  em  $X \times \mathbb{P}^r$ . Observe que  $\tilde{X}$  é um subconjunto fechado de  $X \times \mathbb{P}^r$  e irredutível de  $X \times \mathbb{P}^r$ . Assim,  $\tilde{X}$  é uma subvariedade fechada de  $X \times \mathbb{P}^r$ . Definimos naturalmente os morfismos projeção  $\pi_1 : \tilde{X} \rightarrow X$  e  $\pi_2 : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^r$ . Um fato determinante é que tanto  $X$  quanto  $\tilde{X}$  contém um subconjunto aberto denso  $U$  isomorfo, e portanto  $\dim(X) = \dim(\tilde{X})$ . Na verdade temos que o blowup  $\tilde{X}$  é o local dos zeros das equações  $x_i y_j = x_j y_i$  para todo  $i, j$  no espaço  $X \times \mathbb{P}^r$  onde estamos considerando que  $Z$  é o local dos zeros das equações  $x_0 = \dots = x_r = 0$  e os  $y_0, \dots, y_r$  são coordenadas homogêneas em  $\mathbb{P}^r$ .

**Exemplo 3.2.** Seja  $X = \mathbf{k}^2$  onde adotamos as coordenadas  $x_0, x_1$ . Seja  $f_0 = x_0, f_1 = x_1$ . O blowup de  $X$  em  $(f_0, f_1)$  é uma subvariedade fechada irredutível de  $\mathbf{k}^2 \times \mathbb{P}^1$ . Observe que o morfismo que mapeia o ponto  $(x_0, x_1)$  em suas coordenadas homogêneas  $(y_0, y_1)$  é bem definido no aberto  $U = X \setminus \{(0, 0)\}$ . Associado a este morfismo temos o seguinte gráfico

$$\Omega = \{((x_0, x_1), (y_0 : y_1)); x_0 y_1 = x_1 y_0\} \subset U \times \mathbb{P}^1.$$

Se tomarmos o fecho de  $\Omega$ , iremos obter um conjunto dado pela mesma equação, mas agora considerado como um subconjunto de  $\mathbf{k}^2 \times \mathbb{P}^1$ :

$$\tilde{X} = \{((x_0, x_1), (y_0 : y_1)); x_0 y_1 = x_1 y_0\} \subset \mathbf{k}^2 \times \mathbb{P}^1.$$

Veja que a imagem inversa do ponto  $P = (x_0, x_1) \in X \setminus \{(0, 0)\}$  sobre  $\pi_1$  corresponde a um único ponto  $((x_0, x_1), (x_0 : x_1))$  porém a imagem inversa de  $(0, 0) \in X$  é todo o  $\mathbb{P}^1$ . De fato, fazendo  $x_0 = x_1 = 0$  não temos qualquer condição imposta a  $y_0, y_1$  na equação  $x_0 y_1 = x_1 y_0$ . A interpretação geométrica da imagem inversa  $\pi_1^{-1}(0, 0)$  é a seguinte: este ponto corresponde as direções tangentes em  $X$  no ponto  $(0, 0)$ .

**Proposição 3.3.** *Seja  $X \subset \mathbf{k}^n$  uma variedade afim, e seja  $f \in \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]$  um polinômio não constante que não se anule identicamente em  $X$ . Então toda componente irredutível de  $X \cap Z(f)$  tem dimensão  $\dim(X) - 1$ . Neste caso dizemos que  $X$  é pura de dimensão  $\dim(X) - 1$ .*

**Proposição 3.4.** *Seja  $X \subset \mathbf{k}^n$  uma variedade afim, e  $\tilde{X}$  o blowup de  $X$  em  $I = (f_0, \dots, f_r)$ . Então o blowup  $\tilde{X}$  está contido no conjunto*

$$\{(P, (y_0 : \dots : y_r)); y_i f_j(P) = y_j f_i(P), i, j = 0, \dots, r\} \subset X \times \mathbb{P}^r.$$

*Demonstração.* Por definição, devemos ter que  $(y_0 : \dots : y_r) = (f_0(P) : \dots : f_r(P))$  no subconjunto aberto não vazio  $X \setminus Z(I) \subset \tilde{X}$ . Logo estas equações estão bem definidas no fecho deste aberto, que é o próprio  $\tilde{X}$ .  $\square$

**Proposição 3.5.** *O blowup de uma variedade afim  $X$  em  $(f_0, \dots, f_r)$  depende somente do ideal  $I \subset A(X)$  gerado pelos  $f_i, i = 0, \dots, r$ .*

*Demonstração.* Seja  $(f_0, \dots, f_r)$  e  $(f'_0, \dots, f'_s)$  dois geradores de  $I$ , onde consideramos  $\tilde{X}$  e  $\tilde{X}'$  os respectivos blowups de  $X$  nestes conjunto de geradores. Note que

$$f_i = \sum_{j=0}^s g_{ij} f'_j \text{ e } f'_j = \sum_{k=0}^r g'_{jk} f_k.$$

Defina então o morfismo  $\tilde{X} \longrightarrow \tilde{X}'$  que mapeia o ponto  $(P, (y_0 : \dots : y_r))$  no ponto  $(P, (y'_0 : \dots : y'_s))$ , onde escrevemos  $y'_j = \sum_k g'_{jk}(P)y_k$ . Veja que temos um morfismo de  $X \times \mathbb{P}^s$ , e portanto não podemos ter todos os  $y'_j$  simultaneamente nulos. Da relação  $f_i = \sum_{jk} g_{ij}g'_{jk}f_k$  e pela Proposição 3.4 temos que  $y_i = \sum_{jk} g_{ij}g'_{jk}y_k$  em  $X$ . Portanto, se tivéssemos que  $y'_j = \sum_k g'_{jk}y_k = 0$ , então também teríamos que  $y_i = \sum_j g_{ij}y'_j = 0$  o que seria uma contradição. Assim, temos um morfismo bem definido  $\tilde{X} \longrightarrow X \times \mathbb{P}^s$ . Veja que esta construção faz com que este morfismo mapeie o subconjunto aberto  $X \setminus Z(f_0, \dots, f_r) \subset \tilde{X}$  em  $X \setminus Z(f'_0, \dots, f'_s) \subset \tilde{X}'$ , e portanto mapeia o fecho  $\tilde{X}$  em  $\tilde{X}'$ . Para finalizar a prova basta repetir o mesmo argumento para o morfismo inverso  $\tilde{X}' \longrightarrow \tilde{X}$  e portanto teremos concluído que  $\tilde{X}$  e  $\tilde{X}'$  são isomorfos.  $\square$

Com base no resultado acima podemos dizer que estamos fazendo um blowup de  $X$  no ideal  $I$ . Se  $I = I(Y)$  for um subconjunto fechado  $Y \subset X$ , iremos dizer que este é o blowup de  $X$  em  $Y$ .

**Definição 3.6.** Chamaremos o conjunto  $\pi_1^{-1}(Z(f_0, \dots, f_r))$  de variedade excepcional.

Em particular, no Exemplo 3.2 a variedade excepcional é isomorfa a  $\mathbb{P}^1$ . O próximo resultado nos permitirá calcular a dimensão de  $\pi_1^{-1}(Z(f_0 : \dots : f_r))$ .

**Proposição 3.7.** Seja  $X \subset \mathbf{k}^n$  uma variedade afim, e  $\tilde{X}$  o blowup de  $X$  em  $I = (f_0, \dots, f_r)$ . Então a imagem inversa  $\pi_1^{-1}(Z(f_0, \dots, f_r))$  é de dimensão pura  $\dim(X) - 1$ .

*Demonstração.* Provaremos esta afirmação no aberto em que  $y_i \neq 0$ , uma vez que estes conjuntos abertos formam uma cobertura de  $\tilde{X}$ . Note que nestes subconjuntos abertos a condição  $f_i(P) = 0$  implica que  $f_j(P) = 0$  para todo  $j$  (isso decorre da Proposição 3.4). Logo, a imagem inversa  $\pi_1^{-1}(Z(f_0, \dots, f_r))$  é dada por uma equação  $f_j = 0$ , ou seja, é pura de dimensão  $\dim(\tilde{X}) - 1 = \dim(X) - 1$ , que é uma consequência da Proposição 3.3.  $\square$

Para todo  $f \in \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]$  seja  $f = \sum_i f^{(i)}$  uma decomposição de  $f$  em formas  $f^{(i)}$  de grau  $i$ . Ao menor dos graus  $j$ , consideremos a forma  $f^{(j)}$  a qual dá-se o nome de *forma inicial de  $f$* . Dado um ideal  $I$  podemos considerar ideal homogêneo gerado por todas suas formas iniciais  $\mathcal{I}(f) = \langle f^{(i)}, f \in I \rangle$ . Temos que o local afim dos zeros  $Z_a(\mathcal{I}(I)) \subset \mathbf{k}^n$  é um cone e, portanto, é bem definido o local pojetivo dos zeros  $Z_p(\mathcal{I}(I))$ .

**Proposição 3.8.** *A hipersuperfície excepcional do blowup de uma variedade afim  $X \subset \mathbf{k}^n$  na origem é igual a  $Z_p(\mathcal{I}(I(X)))$ , onde  $I(X)$  é o ideal correspondente a variedade  $X$ .*

Assim, pelas Proposição 3.7 e 3.8 temos que

$$\begin{aligned} \dim(\pi_1^{-1}(Z(f_0, \dots, f_r))) &= \dim(X) - 1 = \dim(Z_p(\mathcal{I}(I(X)))) = \dim(Z_a(\mathcal{I}(I(X)))) - 1 \\ &\Rightarrow \dim(X) = \dim(Z_a(\mathcal{I}(I(X)))). \end{aligned}$$

**Definição 3.9.** *Chamaremos o conjunto  $Z_a(\mathcal{I}(I(X))) \subset \mathbf{k}^n$  de cone tangente de  $X$  no ponto  $P$ . Denotaremos este conjunto por  $C_P(X)$ .*

Veja que o local excepcional do blowup  $\tilde{X}$  de  $X$  em  $P$  corresponde a projetivização do cone tangente, ou seja, corresponde às direções tangentes como já foi mencionado no Exemplo 3.2.

**Proposição 3.10.**  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  é isomorfo a uma superfície quádrlica de  $\mathbb{P}^3$ .

*Demonstração.* Consideremos o espaço projetivo  $\mathbb{P}^3$  com coordenadas  $w_{ij}$ ,  $i, j = 0, 1$ . Se  $x = (x_0 : x_1) \in \mathbb{P}^1$  e  $y = (y_0 : y_1) \in \mathbb{P}^1$  podemos definir a aplicação

$$\begin{aligned} \psi : \quad \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 &\longrightarrow \mathbb{P}^3 \\ ((x_0 : x_1), (y_0 : y_1)) &\longmapsto w_{ij} = x_i x_j, \quad i, j = 0, 1. \end{aligned} \tag{3.1}$$

Note que  $\psi(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1)$  é um subconjunto fechado de  $\mathbb{P}^3$  descrito pelas equações

$$w_{ij}w_{kl} = w_{kj}w_{il}, \quad 0 \leq i, j, k, l \leq 1. \tag{3.2}$$

Veja que os  $w_{ij}$  dados em (3.1) satisfazem as relações (3.2). Podemos supor que  $w_{00} \neq 0$  e fazendo  $k = l = 0$  em (3.2) temos  $w_{ij}w_{00} = w_{0j}w_{i0}$  e

$$\begin{aligned} \psi(x, y) &= (x_0 y_0 : x_0 y_1 : x_1 y_0 : x_1 y_1) = \\ &= (x_0 y_0 x_0 y_0 : x_0 y_0 x_0 y_1 : x_0 y_0 x_1 y_0 : x_0 y_0 x_1 y_1) = \\ &= (w_{00}^2 : w_{00} w_{01} : w_{00} w_{10} : w_{00} w_{11}) \end{aligned}$$

Como  $w_{00} \neq 0$  temos que  $x_0 \neq 0$ ,  $y_0 \neq 0$  e portanto

$$\begin{aligned} x &= (x_0 : x_1) = (x_0 y_0 : x_1 y_0) = (w_{00} : w_{10}) \\ y &= (y_0 : y_1) = (x_0 y_0 : x_0 y_1) = (w_{00} : w_{01}) \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}\psi(x, y) &= \psi((w_{00} : w_{10}), (w_{00} : w_{01})) = \\ &= (w_{00}w_{00} : w_{00}w_{01} : w_{00}w_{10} : w_{10}w_{01}) = \\ &= (w_{00}^2 : w_{00}w_{01} : w_{00}w_{10} : w_{00}w_{11}).\end{aligned}$$

As contas acima mostram que  $x$  e  $y$  são determinados de maneira única, ou seja, que  $\psi(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \hookrightarrow \mathbb{P}^3$  é uma imersão com imagem sendo uma subvariedade  $Q \in \mathbb{P}^3$  descrita pelas equações em (3.2). Para finalizar, veja que a equação  $w_{11}w_{00} = w_{10}w_{01}$  mostra que  $\psi(\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1) \hookrightarrow \mathbb{P}^3$  é uma quádrlica não degenerada  $Q \subset \mathbb{P}^3$ .  $\square$

**Proposição 3.11.** *O blowup de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  em um ponto é isomorfo ao blowup de  $\mathbb{P}^2$  em dois pontos.*

*Demonstração.* Pela Proposição 3.10 temos que  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  é isomorfo à superfície quádrlica descrita pelo conjunto  $Q = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3); x_0x_3 = x_1x_2\} \subset \mathbb{P}^3$ . Consideremos o blowup  $\tilde{Q} \subset \mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^2$  em  $I(P) = (x_0, x_1, x_2)$  onde  $P = (0 : 0 : 0 : 1)$ . Sejam  $R = (0 : 1 : 0)$  e  $S = (0 : 0 : 1)$ , onde obviamente  $I(R \cup S) = (y_0, y_1y_2)$ . Consideremos  $\tilde{\mathbb{P}}^2 \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^3$  como sendo o blowup de  $\mathbb{P}^2$  no ideal  $I = (y_0^2, y_0y_1, y_0y_2, y_1y_2)$ . É possível tomar uma vizinhança aberta  $U_R \subset X$  em torno de  $R$  na qual  $y_1 \neq 0$ , e portanto neste aberto temos que  $I = I_{U_R} = (y_0, y_2)$ . Da mesma forma existe  $U_S$ , com  $y_2 \neq 0$  e portanto  $I = I_{U_S} = (y_0, y_1)$  nesta vizinhança. Temos que o blowup de  $\mathbb{P}^2$  em  $I$  é o blowup de  $\mathbb{P}^2$  nos pontos  $R$  e  $S$ . Devemos agora, mostrar que temos um isomorfismo  $f$  dado por  $f : \tilde{Q} \longrightarrow \tilde{\mathbb{P}}^2$  que mapeia o ponto  $((x_0 : x_1 : x_2 : x_3), (y_0 : y_1 : y_2))$  no ponto  $((y_0 : y_1 : y_2), (x_0, x_1, x_2, x_3))$  cujo isomorfismo inverso  $f^{-1} : \tilde{\mathbb{P}}^2 \longrightarrow \tilde{Q}$  é definido de maneira óbvia. Pois bem, devemos mostrar que  $f$  mapeia  $\tilde{Q}$  em  $\tilde{\mathbb{P}}^2$  e que  $f^{-1}$  mapeia  $\tilde{\mathbb{P}}^2$  em  $\tilde{Q}$ . Primeiro observe que  $f^{-1}(\tilde{\mathbb{P}}^2)$  é fechado em  $\mathbb{P}^3 \times \mathbb{P}^2$ , e portanto se contém um aberto não vazio  $U \subset Q$ , então deve conter todos os outros abertos de  $Q$ . Note que em  $\tilde{Q}$  temos as mesmas equações que em  $Q$ , ou seja  $x_0x_3 = x_1x_2$  e  $(y_0 : y_1 : y_2) = (x_0 : x_1 : x_2)$ . Desta forma na imagem de  $f$  temos as seguintes equações

$$\begin{aligned}(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) &= (x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_0x_3) = \\ &= (x_0^2 : x_0x_1 : x_0x_2 : x_1x_2) = (y_0^2 : y_0y_1 : y_0y_2 : y_1y_2)\end{aligned}$$

para um ponto imagem que está em  $\tilde{\mathbb{P}}^2$ . Reciprocamente, em  $\tilde{\mathbb{P}}^2$  temos que  $(x_0 : x_1 : x_2 : x_3) = (y_0^2 : y_0y_1 : y_0y_2 : y_1y_2)$ . Desta última igualdade decorrem as seguintes relações:  $(x_0 : x_1 : x_2) = (y_0 : y_1 : y_2)$  e  $x_0x_3 = y_1y_2 = x_1x_2$ .  $\square$

Seja  $f \in \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]$  denotemos por  $f^{(1)}$  o termo linear de  $f$ . Dado um ideal  $I \subset \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]$ , consideremos o ideal  $\mathcal{L}(I) = \{f^{(1)}; f \in I\}$ . Podemos tratar  $\mathcal{L}(I)$  como um espaço vetorial formado por todas as partes lineares de elementos de  $I$ , ou ainda como um subespaço vetorial do espaço  $\mathcal{L}(\mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]) = \{\alpha_1 x_1 + \dots + \alpha_n x_n; \alpha_i \in \mathbf{k}\}$  e portanto  $Z(\mathcal{L}(I))$  é um subespaço linear de  $\mathbf{k}$ .

**Definição 3.12.** *Seja  $X \subset \mathbf{k}^n$  uma variedade afim e  $P \in X$ , o qual por meio de uma mudança de coordenadas podemos supor igual a  $(0, \dots, 0)$ . Ao espaço linear  $Z(\mathcal{L}(I))$  damos o nome de espaço tangente a  $X$  no ponto  $P$  que será denotado por  $T_P(X)$ <sup>2</sup>. Na verdade, o espaço tangente a  $X$  em  $P$  é o subespaço de  $\mathbf{k}^n$  formado pelos vetores ortogonais ao gradiente em  $P$  de cada  $f \in I(X)$ . Em símbolos*

$$T_P(X) = \left\{ v = (v_1, \dots, v_n) \in \mathbf{k}^n; \frac{\partial f}{\partial x_1}(P)v_1 + \dots + \frac{\partial f}{\partial x_n}(P)v_n = 0, \forall f \in I(X) \right\}.$$

Dada uma variedade  $X \subset \mathbf{k}^n$  observe que  $\mathcal{L}(I(X)) \subset \mathcal{I}(I(X))$  e portanto  $C_P(X) \subset T_P(X) \subset \mathbf{k}^n$ . Na verdade temos que  $\dim(T_P(X)) \geq \dim(C_P(X)) = \dim(X)$ .

**Definição 3.13.** *Uma variedade  $X$  será dita suave no ponto  $P \in X$  se  $T_P(X) = C_P(X)$ , ou seja, se  $T_P(X)$  tem dimensão (no máximo)  $\dim(X)$ . Caso contrário diremos que  $X$  é singular em  $P$ . Uma variedade  $X$  será dita suave se for suave em todo ponto  $P \in X$ , do contrário  $X$  será dita singular.*

Seja  $X \subset \mathbf{k}^n$  uma variedade afim, e seja  $f_1, \dots, f_r \in \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]$  um conjunto de geradores do ideal  $I(X)$ . Chamaremos de *matriz Jacobiana* de  $X$  no ponto  $P$  a matriz  $(x_{ij}) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P) \right)$  que denotaremos por  $Jf(P)$ .

**Proposição 3.14.** *Seja  $X \subset \mathbf{k}^n$  uma variedade afim onde  $I(X) = (f_1, \dots, f_r)$ . Então  $X$  é suave em  $P \in X$  se, e somente se, o posto de  $Jf(P)$  é pelo menos  $n - \dim(X)$ .*

*Demonstração.* Consideremos a linearização das funções  $f_i$  no ponto  $P = (a_1, \dots, a_n)$  dada por  $\sum_j \frac{\partial f_i}{\partial x_j}(P)(x_j - a_j)$ . Por definição,  $X$  é suave em  $P$  se estas funções definem um subespaço linear de  $\mathbf{k}$  de dimensão (no máximo)  $\dim(X)$ . Mas isto ocorre se, e somente se, o subespaço linear de  $\mathcal{L}(\mathbf{k}[x_1, \dots, x_n])$  gerado por esta linearização tem dimensão (no

---

<sup>2</sup>Se considerarmos  $P = (a_1, \dots, a_n)$  como sendo um ponto qualquer a mudança de coordenadas que manda  $x_i$  em  $x_i - a_i$  não traz perdas. Neste caso, por meio de expansão de Taylor de primeira ordem, é fácil ver que dado  $f \in \mathbf{k}[x_1, \dots, x_n]$  então  $T_P(X)$  pode ser escrito da seguinte forma  $\sum_i \frac{\partial f}{\partial x_i}(P)(x_i - a_i) = 0$  para todo  $f \in I(X)$ .

mínimo)  $n - \dim(X)$ . Mas a dimensão deste espaço linear é exatamente o posto da matriz cujas entradas são os coeficientes destas funções lineares.  $\square$

O resultado que acabamos de provar é conhecido como *critério de Jacobi para o caso afim*, para ver que este critério também vale para o caso projetivo (mesmas hipóteses e consequências), basta lembrar que o espaço projetivo  $\mathbb{P}^n$  pode ser coberto por  $n+1$  espaços afins isomorfos a  $\mathbf{k}^n$ , onde fazemos cada coordenada  $x_i \neq 0$ . Desta forma podemos aplicar o critério de Jacobi a cada um deste espaços. Portanto ganhamos o mesmo critério no caso projetivo.

## 3.2 As 27 Retas

Agora já estamos preparados para provar um dos mais famosos problemas da escola de geometria algébrica italiana. Ele consiste em mostrar que a variedade de Fano  $F_1(C)$  de uma cúbica suave,  $C$  de  $\mathbb{P}^3$ , é composta de exatamente 27 retas. Veremos que não somente a quantidade de retas de uma cúbica suave é um invariante mas também a disposição destas retas.

Começaremos esta seção dando uma descrição do espaço das formas cúbicas. Alguns dos detalhes que por ventura venham a ser omitidos aqui podem ser vistos nos Capítulos 1 e 2. Como já vimos na Seção 2.2 as formas cúbicas  $\sum_{|\alpha|=3} c_\alpha x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}$  têm exatamente  $\binom{3+3}{3} = 20$  coeficientes, os quais, formam um espaço cuja projetivização chamaremos de  $\mathbb{P}_w^{19} \equiv \mathbb{P}^{19}$ , que é o espaço projetivo com coordenadas homogêneas  $w_\alpha$ , onde  $\alpha = (\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$  e  $|\alpha| = 3$ . Denotemos por  $C_c \equiv C$  a superfície cúbica  $Z(\sum c_\alpha x^\alpha)$  em  $\mathbb{P}^3$ , onde  $c = (c_\alpha) \in \mathbb{P}^{19}$  e  $x^\alpha = x_0^{\alpha_0} x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} x_3^{\alpha_3}$ . Consideremos então o conjunto

$$\mathcal{C} = \bigcup_{c \in \mathbb{P}^{19}} \{c\} \times C \subset \mathbb{P}^{19} \times \mathbb{P}^3,$$

onde  $\mathcal{C}$  é definido pela equação  $\sum w_\alpha x^\alpha = 0$ . Portanto, o conjunto  $\mathcal{C}$  é um conjunto algébrico fechado. Veja ainda que

$$\dim(\mathcal{C}) + \text{codim}(\mathcal{C}) = \dim(\mathbb{P}^{19} \times \mathbb{P}^3) \implies \dim(\mathcal{C}) = 19 + 3 - 1 = 21,$$

onde a codimensão é dada em relação a  $\mathbb{P}^{19} \times \mathbb{P}^3$ . Seja  $S \subset \mathcal{C}$  o conjunto dos pontos onde  $\pi_1 : \mathcal{C} \rightarrow \mathbb{P}^{19}$  não é suave, ou seja, onde a fibra  $C$  não é suave e denotemos por  $\mathcal{A} = \mathbb{P}^{19} \setminus \pi_1(S)$  o conjunto que parametriza todas as cúbicas suaves de  $\mathbb{P}^3$ . Consideremos

também o conjunto  $\phi_{1,3} \subset \mathbb{P}^{19} \times \mathbb{G}(1,3)$ , onde  $\phi_{1,3} = \{(C, \Lambda); \Lambda \subset C\}$ , ou equivalentemente  $\phi_{1,3} = \{(c, p); l_p \subset C\}$ .

**Teorema 3.15.**  $\phi_{1,3}$  é uma variedade suave de dimensão 19.

*Demonstração.* Como  $\mathbb{G}(1,3) \subset \mathbb{P}^5$ , onde  $\mathbb{P}^5$  tem coordenadas  $x_{01}, x_{02}, x_{03}, x_{12}, x_{13}, x_{23}$ , podemos sem perda, trabalhar no aberto afim

$$U_{01} = \mathbb{G}(1,3) - \mathbb{G}(1,3) \cap Z(x_{01}).$$

Nessa vizinhança uma reta  $l$  pode ser representada pelas linhas da matriz

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a_2 & a_3 \\ 0 & 1 & b_2 & b_3 \end{pmatrix}.$$

Denotemos esta reta por

$$l(a_2, a_3, b_2, b_3) = \overline{(1, 0, a_2, a_3)(0, 1, b_2, b_3)}.$$

Temos que

$$l(a_2, a_3, b_2, b_3) \subset C \Leftrightarrow \sum c_\alpha x^\alpha = 0$$

se, e somente se, para toda combinação  $s(1, 0, a_2, a_3) + t(0, 1, b_2, b_3)$  tivermos

$$\begin{aligned} \sum c_\alpha s^{\alpha_0} t^{\alpha_1} (sa_2 + tb_2)^{\alpha_2} (sa_3 + tb_3)^{\alpha_3} &= \\ = s^3 f_0(a, b, c) + s^2 t f_1(a, b, c) + s t^2 f_2(a, b, c) + t^3 f_3(a, b, c) &= 0, \end{aligned}$$

onde  $(a, b, c) = (a_2, a_3, b_2, b_3, c_\alpha)$ . Desta forma temos que

$$l(a_2, a_3, b_2, b_3) \subset C \Leftrightarrow f_i(a, b, c) = 0, 0 \leq i \leq 3.$$

Portanto,  $\phi_{1,3}$  é um conjunto algébrico fechado cujas componentes têm codimensão no máximo 4 em  $\mathbb{P}^{19} \times \mathbb{G}(1,3)$ , ou seja tem dimensão no mínimo 19. Vejamos a projeção  $\pi_2 : \phi_{1,3} \rightarrow \mathbb{G}(1,3)$ . Para toda reta  $l \subset \mathbb{P}^3$ , o conjunto de todas as formas cúbicas  $F$  que se anulam identicamente em  $l$  formam um subespaço linear do espaço vetorial de todas as formas cúbicas. Desde que toda reta é projetivamente equivalente, a dimensão deste espaço independe de  $l$ . Se  $l = Z(x_2, x_3)$  então,  $F|_l = 0 \Leftrightarrow F = \sum_{\alpha=(\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)} c_\alpha x^\alpha$ , onde  $\alpha_2 + \alpha_3 \geq 1$  é um subespaço linear de dimensão 16. Portanto para todo ponto  $p \in \mathbb{G}(1,3)$ ,  $\pi_2^{-1}(p)$  é um subespaço linear de dimensão 15 de  $\mathbb{P}^{19}$ . Em particular, note

que, para todo  $p \in \mathbb{G}(1, 3)$ , a fibra  $\pi_2^{-1}(p)$  é irredutível e de mesma dimensão (ver Seção 2.2). Desde que  $\mathbb{G}(1, 3)$  é irredutível temos que  $\phi_{1,3}$  é irredutível (Proposição 2.9) e, além disso, as quatro equações  $f_0, f_1, f_2, f_3$  que definem  $\phi_{1,3}$  são lineares na variável  $c$ . Desde que para todos  $a, b$  estas equações definem um subespaço linear do espaço dos  $c$ 's, elas são linearmente independentes. Isto mostra que suas diferenciais na  $c$ -direção são independentes e portanto  $\phi_{1,3}$  é suave e de codimensão exatamente 4 em  $\mathbb{P}^{19} \times \mathbb{G}(1, 3)$ .  $\square$

**Teorema 3.16.** *O mapa  $\pi_1 : \phi_{1,3} \longrightarrow \mathbb{P}^{19}$  é suave sobre  $\mathcal{A}$ .*

*Demonstração.* Usaremos a mesma notação do teorema anterior. Consideremos a primeira projeção  $\pi_1 : \phi_{1,3} \longrightarrow \mathbb{P}^{19}$ . Devemos mostrar que as diferenciais dos  $f_i$ 's na  $(a, b)$ -direção (isto é em  $T_{p, \mathbb{G}(1,3)}$ ) são independentes se a cúbica  $C$  é suave. Fixemos o ponto  $(p, c) \in \phi_{1,3}$  com  $C$  suave e escolha um sistema de coordenadas em  $\mathbb{P}^3$  no qual  $l_p = Z(x_2, x_3)$ . Então nas coordenadas afins  $(a_2, a_3, b_2, b_3)$  em  $\mathbb{G}(1, 3)$  podemos supor que  $p = (a_2, b_2, a_3, b_3) = (0 : 0 : 0 : 0)$ . Seja  $F(x) = \sum c_\alpha x^\alpha$  a equação que representa  $C$ . Computando as derivadas parciais em relação  $a_2, a_3, b_2, b_3$ . Note que

$$\frac{\partial F}{\partial a_i} = \frac{\partial F}{\partial x_0} \frac{\partial x_0}{\partial a_i} + \frac{\partial F}{\partial x_1} \frac{\partial x_1}{\partial a_i} + \frac{\partial F}{\partial x_2} \frac{\partial x_2}{\partial a_i} + \frac{\partial F}{\partial x_3} \frac{\partial x_3}{\partial a_i}$$

e portanto temos:

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial a_2} \left( \sum s^{3-i} t^i f_i(a, b, c) \right) |_{a=b=0} &= \frac{\partial}{\partial a_2} F(s, t, sa_2 + tb_2, sa_3 + tb_3) |_{a=b=0} = s \frac{\partial F}{\partial x_2}(s, t, 0, 0); \\ \frac{\partial}{\partial b_2} \left( \sum s^{3-i} t^i f_i(a, b, c) \right) |_{a=b=0} &= \frac{\partial}{\partial b_2} F(s, t, sa_2 + tb_2, sa_3 + tb_3) |_{a=b=0} = t \frac{\partial F}{\partial x_2}(s, t, 0, 0); \\ \frac{\partial}{\partial a_3} \left( \sum s^{3-i} t^i f_i(a, b, c) \right) |_{a=b=0} &= \frac{\partial}{\partial a_3} F(s, t, sa_2 + tb_2, sa_3 + tb_3) |_{a=b=0} = s \frac{\partial F}{\partial x_3}(s, t, 0, 0); \\ \frac{\partial}{\partial b_3} \left( \sum s^{3-i} t^i f_i(a, b, c) \right) |_{a=b=0} &= \frac{\partial}{\partial b_3} F(s, t, sa_2 + tb_2, sa_3 + tb_3) |_{a=b=0} = t \frac{\partial F}{\partial x_3}(s, t, 0, 0). \end{aligned}$$

Suponhamos por absurdo que a diferencial das 4 funções  $f_i$ 's com respeito a variáveis  $a_2, a_3, b_2, b_3$  sejam linearmente dependentes para todo  $i$ . Isto é o mesmo que dizer que as 4 derivadas parciais  $\frac{\partial}{\partial a_2}, \frac{\partial}{\partial a_3}, \frac{\partial}{\partial b_2}, \frac{\partial}{\partial b_3}$  de  $\sum s^{3-i} t^i f_i(a, b, c)$  em  $a = b = 0$  são polinômios dependentes. Mas isto ocorre se, e somente se, existem  $\lambda_2, \lambda_3, \mu_2, \mu_3$  tais que

$$\left( \lambda_2 \frac{\partial F_l}{\partial a_2} + \mu_2 \frac{\partial F_l}{\partial b_2} + \lambda_3 \frac{\partial F_l}{\partial a_3} + \mu_3 \frac{\partial F_l}{\partial b_3} \right) |_{a=b=0} = 0,$$

onde  $F_l = \sum s^{3-i} t^i f_i(a, b, c)$ . Assim,

$$(\lambda_2 s + \mu_2 t) \frac{\partial F}{\partial x_2}(s, t, 0, 0) + (\lambda_3 s + \mu_3 t) \frac{\partial F}{\partial x_3}(s, t, 0, 0) = 0.$$

Sendo estas duas derivadas parciais polinômios quadráticos homogêneos, a existência de tais polinômios  $\lambda_2 s + \mu_2 t$ ,  $\lambda_3 s + \mu_3 t$  é equivalente a dizer que  $\frac{\partial F}{\partial x_2}(s, t, 0, 0)$  e  $\frac{\partial F}{\partial x_3}(s, t, 0, 0)$  tem uma raiz comum  $(\alpha, \beta, 0, 0)$ . De fato, consideremos a seguintes fatorações de  $\frac{\partial F}{\partial x_2}(s, t, 0, 0) = MN$  e  $\frac{\partial F}{\partial x_3}(s, t, 0, 0) = RS$ , onde  $M, N, R, S$  são formas de grau 1. Assim,

$$\begin{aligned} (\lambda_2 s + \mu_2 t)MN + (\lambda_3 s + \mu_3 t)RS &= 0 \\ s(\lambda_2 MN + \lambda_3 RS) + t(\mu_2 MN + \mu_3 RS) &= 0. \end{aligned}$$

Note que ao menos um dos  $\lambda_2, \lambda_3, \mu_2, \mu_3$  é não nulo, digamos  $\lambda_2 \neq 0$ . Neste caso temos que a igualdade  $MN = -\frac{\lambda_3}{\lambda_2}RS$  é verdadeira caso  $\frac{\partial F}{\partial x_2}(s, t, 0, 0)$  e  $\frac{\partial F}{\partial x_3}(s, t, 0, 0)$  tenham uma raiz comum. Como  $l_p \subset C$  podemos escrever  $F = x_2 A + x_3 B$  e portanto os polinômios

$$\frac{\partial F}{\partial x_0} = x_2 \frac{\partial A}{\partial x_0} + x_3 \frac{\partial B}{\partial x_0}, \quad \frac{\partial F}{\partial x_1} = x_2 \frac{\partial A}{\partial x_1} + x_3 \frac{\partial B}{\partial x_1}$$

também tem um zero  $(\alpha, \beta, 0, 0)$ . Portanto,  $(\alpha, \beta, 0, 0)$  deve ser um ponto singular de  $C = Z(F)$  o que é uma contradição. Logo o mapa  $\pi_1 : \phi_{1,3} \rightarrow \mathbb{P}^{19}$  é suave sobre  $\mathcal{A}$ .  $\square$

Se pensarmos o teorema acima do ponto de vista da *topologia clássica*, este nos diz que o mapa  $\pi_1 : \phi_{1,3} \rightarrow \mathbb{P}^{19}$  se trata de um *isomorfismo local*, isto é, numa vizinhança em torno de um ponto  $(a, b, c)$  de uma cúbica suave, as coordenadas  $a_i$  e  $b_i$  são determinadas de maneira única em  $\phi_{1,3}$  pelos  $c_\alpha$ 's. Usando o fato de que o número de retas é determinado pela imagem inversa de pontos  $c \in \mathbb{P}^{19}$ , temos que este número não depende da cúbica em questão. Assim se exibirmos uma cúbica suave, a qual conhecemos todas as suas retas, todas as demais cúbicas conterão o mesmo número de retas. Mas isto já foi feito no Exemplo 2.3.

Na verdade, tanto o número de retas, quanto a sua disposição independem de  $C$ . Note que dadas duas retas  $l_1, l_2 \subset C$ , ou  $l_1 \cap l_2 = \emptyset$ , ou elas se intersectam transversalmente em um ponto. Vejamos para o caso do Exemplo 2.3 como ocorre essa disposição, uma vez que esta independe da cúbica  $C$ . Denotemos por  $\zeta$  o gráfico que representa esta situação a qual estudaremos de forma parcial <sup>3</sup>. Assim,

- i) vértices de  $\zeta =$  retas de  $C$ ;
- ii) 2 vértices são ligados por uma borda se, e somente se, as retas correspondentes se

---

<sup>3</sup>Uma descrição mais completa a cerca da disposição destas 27 retas pode ser encontrada em [7] cap. V, seção 4; [5] cap. 8, seção D; [2] cap. IV, seção 2.2.

intersectam.

Agora vejamos que  $\zeta$  independe de  $c$ . De fato, seja

$$\phi' = \{(p_1, p_2, c); l_{p_1} \subset C, l_{p_2} \subset C\} \subset \mathbb{G}(1, 3) \times \mathbb{G}(1, 3) \times \mathcal{A}$$

que, pelo Teorema 3.16, é uma superfície suave sobre  $\mathcal{A}$ . Portanto é uma união disjunta de componentes suaves  $\phi_i'$  de dimensão 19. Uma destas componentes, digamos,  $\phi_0'$  é o conjunto dos pontos  $(p, p, c)$  tais que  $(p, c) \in \phi_{1,3}$  e para os demais  $i$ 's,  $l_{p_1}$  nunca é igual a  $l_{p_2}$ . Analisemos os seguintes conjuntos:

- i)  $\mathcal{C}_i' = \{(x, p_1, p_2, c); (p_1, p_2, c) \in \phi_i', x \in C\}$ ;
- ii)  $L_{ij} = \{(x, p_1, p_2, c); (p_1, p_2, c) \in \phi_i', x \in l_{p_j}\}$ .

Veja que  $\mathcal{C}_i'$  é uma variedade suave cuja fibra sobre  $\phi_i'$  são cúbicas associadas a  $C_c$ 's, além disso possui dimensão igual a 21. Também  $L_{i1}, L_{i2} \subset \mathcal{C}_i'$  são subvariedades suaves de dimensão 20, cujas fibras sobre  $\phi_i'$  são retas. Considerando a projeção  $\pi : L_{i1} \cap L_{i2} \longrightarrow \phi_i'$  e considerando o fato de que duas retas se intersectam em no máximo um ponto temos que esta é uma aplicação injetiva e além disso toda componente irredutível de  $L_{i1} \cap L_{i2}$  têm dimensão 19 ( pelo Teorema 7.2 de [7]). Conclui-se daí que, ou  $L_{i1} \cap L_{i2} = \emptyset$ , e portanto  $l_{p_1}$  e  $l_{p_2}$  nunca se intersectam, ou  $L_{i1} \cap L_{i2} \longrightarrow \phi_i'$  é um isomorfismo, portanto essas retas sempre se intersectam.

No Exemplo 2.3 foram encontradas as seguintes retas:

$$x_0 + \omega^i x_1 = x_2 + \omega^j x_3 = 0$$

$$x_0 + \omega^i x_2 = x_1 + \omega^j x_3 = 0$$

$$x_0 + \omega^i x_3 = x_1 + \omega^j x_2 = 0$$

onde  $i, j \in \{0, 1, 2\}$ .

Agora estudemos a configuração das retas nesta cúbica, vejamos quais destas retas se intersectam. Consideremos  $l_1 = \{x_0 + x_1 = x_2 + x_3 = 0\}$  em  $C$ . Afirmamos que  $l_1$  intersecta outras 10 retas e que existe uma outra reta disjunta  $l_2$  tal que exatamente cinco destas 10 retas intersectam ambas. Quanto a primeira afirmação as 10 retas que intersectam a reta  $l_1$  são dadas por:

- 1)  $x_0 + \omega x_1 = x_2 + x_3 = 0$ ;
- 2)  $x_0 + \omega^2 x_1 = x_2 + x_3 = 0$ ;
- 3)  $x_0 + x_1 = x_2 + \omega x_3 = 0$ ;
- 4)  $x_0 + x_1 = x_2 + \omega^2 x_3 = 0$ ;
- 5)  $x_0 + x_3 = x_1 + x_2 = 0$ ;
- 6)  $x_0 + \omega x_3 = x_1 + \omega x_2 = 0$ ;
- 7)  $x_0 + \omega^2 x_3 = x_1 + \omega^2 x_2 = 0$ ;
- 8)  $x_0 + x_2 = x_1 + x_3 = 0$ ;
- 9)  $x_0 + \omega x_2 = x_1 + \omega x_3 = 0$ ;
- 10)  $x_0 + \omega^2 x_2 = x_1 + \omega^2 x_3 = 0$ .

Para a segunda afirmação observe que as retas  $l_1$  e  $l_2$  não se intersectam

$$l_1 : x_0 + x_1 = x_2 + x_3 = 0;$$

$$l_2 : x_0 + \omega x_1 = x_2 + \omega x_3 = 0;$$

mas são, simultaneamente, intersectadas pelas 5 retas

$$l_1' : x_0 + x_1 = x_2 + \omega x_3 = 0;$$

$$l_2' : x_0 + \omega x_1 = x_2 + x_3 = 0;$$

$$l_3' : x_0 + x_2 = x_1 + x_3 = 0;$$

$$l_4' : x_0 + \omega x_2 = x_1 + \omega x_3 = 0;$$

$$l_5' : x_0 + \omega^2 x_2 = x_1 + \omega^2 x_3 = 0;$$

O mesmo é verdade para toda outra reta em  $C$ . Ou seja, temos que  $l_1 \cap l_2 = \emptyset$  e que nenhuma outra reta, que não uma das 5 dadas acima, intersecta ambas  $l_1$  e  $l_2$ . Além disso temos  $l_i' \cap l_j' = \emptyset$  para todo  $i, j$ , com  $i \neq j$ . Na verdade, o mesmo ocorre em toda cúbica suave de  $\mathbb{P}^3$ , isto é temos apenas uma deformação do conjunto  $(l_1, l_2, l_1', l_2', l_3', l_4', l_5')$  conforme é visto em [5] cap. 8.

De agora até o final desta seção exporemos, de forma sucinta, os principais resultados a cerca do estudo das 27 retas de uma cúbica não singular de  $\mathbb{P}^3$ .

**Proposição 3.17.** *Sejam  $l_1$  e  $l_2$  duas retas disjuntas em  $\mathbb{P}^3$ , e seja  $p \in \mathbb{P}^3 \setminus (l_1 \cup l_2)$ . Então existe uma única reta ligando  $l_1, l_2$  e  $p$ .*

*Demonstração.* Seja uma reta  $l \in \mathbb{P}^3$  e um ponto  $p \notin l$ . Tome dois pontos  $x, y \in l$  e obtenha a equação do plano  $\Lambda$  que passa por  $x, y, p$ . Note que se tomarmos outros dois pontos  $x', y' \in l$  o plano que contém  $x', y', p$  é exatamente  $\Lambda$ , ou seja, temos um único

plano contendo a reta  $l$  e o ponto  $p$ . Observe que duas retas quaisquer em  $\mathbb{P}^2$  sempre se intersectam. De fato, basta observar que uma reta em  $\mathbb{P}^2$  é formada por um sistema de uma linha e três variáveis. Se acrescentarmos uma outra reta, isto é, uma outra linha a este sistema será composto de duas equações compostas por três incógnitas cada uma, admitindo, portanto solução não trivial. Logo, dados  $l_1$  e  $p$  temos que existe um único plano  $\Lambda_1$  que os contém. Da mesma forma, dados  $l_2$  e  $p$  obtemos  $\Lambda_2$ . Note que  $\Lambda_1 \neq \Lambda_2$ , pois se fossem iguais, teríamos que  $l_1 \cap l_2 \neq \emptyset$ , uma vez que  $\Lambda_i \cong \mathbb{P}^2$ . Pela contagem da dimensão temos que estes dois planos se intersectam em uma subvariedade de dimensão ao menos  $2 + 2 - 3 = 1$ . Como  $\Lambda_1 \neq \Lambda_2$ , temos que esta intersecção deve ter dimensão exatamente 1, isto é, estes planos se intesectam em uma única reta, que é exatamente a reta que liga  $l_1, l_2$  e  $p$ .  $\square$

**Proposição 3.18.** *Toda superfície cúbica em  $\mathbb{P}^3$  é birracional a  $\mathbb{P}^2$ .*

*Demonstração.* Como vimos, existem duas retas disjuntas  $l_1, l_2 \subset X$ . Exibiremos dois mapas racionais onde um é o inverso do outro:

$$\vartheta : X \longrightarrow l_1 \times l_2 \quad \vartheta^{-1} : l_1 \times l_2 \longrightarrow X.$$

Devemos mostrar que  $X$  é birracional a  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ , e pela Proposição 3.11, teremos que é birracional a  $\mathbb{P}^2$ . Vejamos:

i)  $\vartheta : X \longrightarrow l_1 \times l_2$

Pela Proposição 3.17, temos que para todo ponto  $p$  que não está em  $l_1 \cup l_2$  existe uma única reta  $l_p$  em  $\mathbb{P}^3$  passando por  $l_1, l_2$  e  $p$ . Basta tomar o mapa racional:

$$\begin{aligned} \vartheta : X &\longrightarrow l_1 \times l_2 \\ p &\longmapsto (l_1 \cap l_p, l_2 \cap l_p) \end{aligned}$$

que é bem definido fora de  $l_1 \cup l_2$ .

ii)  $\vartheta^{-1} : l_1 \times l_2 \longrightarrow X$

Basta definir o mapa que manda  $(r, s) \in l_1 \times l_2$  para o terceiro ponto de intersecção de  $X$  com a reta  $\overline{rs}$ . Este mapa é bem definido sempre que  $\overline{rs}$  não esteja contida em  $X$ .  $\square$

**Teorema 3.19.** *Toda superfície cúbica suave de  $\mathbb{P}^3$  é isomorfa a um blowup de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  em 5 pontos (devidamente escolhidos), ou equivalentemente, a um blowup de  $\mathbb{P}^2$  em 6 pontos (adequadamente escolhidos).*

*Demonstração.* Seja uma superfície cúbica suave  $X \subset \mathbb{P}^3$ . Podemos definir um mapa racional  $\vartheta : X \longrightarrow l_1 \times l_2 \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  (Proposição 3.18). Vejamos que  $\vartheta$  é um morfismo:

i) para um ponto  $p \in X \setminus l_2$ , tome o único plano  $\Lambda \in \mathbb{P}^3$  que contém  $l_2$  e  $p$  e faça  $\vartheta_1(p) = \Lambda \cap l_1$ . Defina  $\vartheta_2(p) = \Lambda \cap l_2$  de maneira análoga. Desta forma podemos definir  $\vartheta(p) = (\vartheta_1(p), \vartheta_2(p))$ ;

ii) para um ponto  $p \in l_2$ , seja  $\Lambda = T_p(X)$  e faça  $\vartheta_1(p) = \Lambda \cap l_1$  e, de maneira análoga, para  $p \in l_1$  faça  $\vartheta_2(p) = \Lambda \cap l_2$ . A forma como definimos  $\vartheta$  estende  $\vartheta = (\vartheta_1, \vartheta_2)$  a um morfismo bem definido  $X \longrightarrow \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  em todo o  $X$ . Veja que o mapa inverso  $\vartheta^{-1} : \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1 \longrightarrow X$  não é bem definido em todo ponto de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$ . Voltando a Proposição 3.18 temos que estes pontos são exatamente os pontos  $(r, s)$  tais que  $\overline{rs} \subset X$ . Neste caso, toda reta  $\overline{rs} \cong \mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  é mapeada no ponto  $(r, s)$ . Sendo assim, veja que  $\vartheta$  é localmente a explosão destes pontos. Já sabemos que existem exatamente 5 pontos. Assim, acabamos de obter que  $X$  é o blowup de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  nestes 5 pontos. Como o blowup de  $\mathbb{P}^1 \times \mathbb{P}^1$  em um ponto é isomorfo ao blowup de  $\mathbb{P}^2$  em dois pontos (Proposição 3.11) segue que  $X$  é o blowup de  $\mathbb{P}^2$  em 6 pontos adequadamente escolhidos.

*Esta é apenas uma prova parcial deste resultado. Uma prova completa pode ser obtida em [7] V.4.10 ou nas Proposições 8.21 e 8.22 em [5].* □

Seja  $Y \subset X$  uma subvariedade fechada que tem uma intersecção não vazia com  $U = X - Z(f_1, \dots, f_r)$ . Como  $U$  é também um subconjunto de  $\tilde{X}$ , podemos considerar o fecho de  $Y \cap X$  em  $\tilde{X}$ . Chamaremos isso de *transformação estrita* de  $Y$ . A transformação estrita de  $Y$  é justamente o blowup de  $Y$  em  $(f_1, \dots, f_r)$ , que denotaremos por  $\tilde{Y}$ .

**Teorema 3.20.** *Seja  $C$  uma cúbica suave e*

$$\pi : C \longrightarrow B_{P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6}(\mathbb{P}^2)$$

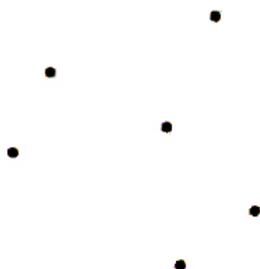
*a correspondência birracional dada no Teorema 3.19. Se  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$  são os pontos excepcionais de  $\pi^{-1}$ , então nenhum dos 3  $P_i$  são colineares e  $\pi^{-1}$  é definido por um sistema linear de todas as cúbicas passando por  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5, P_6$ .*

*Demonstração.* Ver [5] Proposição 8.23. □

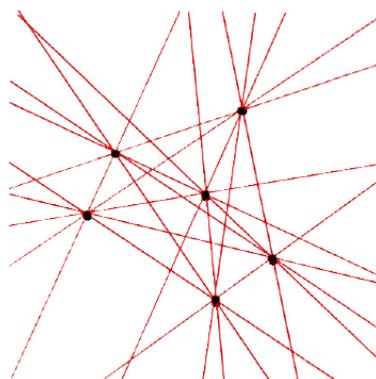
Podemos olhar as 27 retas de uma superfície cúbica  $X$  como uma figura onde pensamos  $X$  como um blowup de  $\mathbb{P}^2$  em 6 pontos. Conforme [5] e com algumas das informações obtidas a partir da cúbica de Fermat (Exemplo 2.3) temos que as 27 retas correspondem

às seguintes curvas:

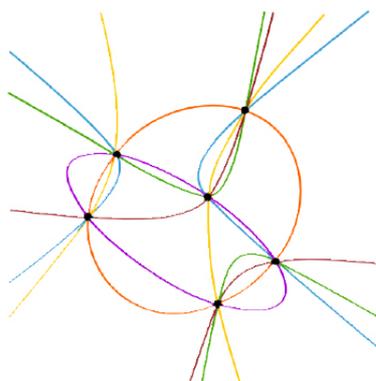
i) 6 retas excepcionais;



ii) a transformação estrita de  $\binom{6}{2} = 15$  retas passando por 2 dos pontos de blowup;



iii) a transformação estrita de  $\binom{6}{5} = 6$  cônicas passando por 5 dos pontos de blowup.



# Capítulo 4

## Demonstração do Teorema Principal

Neste capítulo nos empenharemos em demonstrar o Teorema 2.15. Para tanto seguiremos a linha descrita em [8], e demonstraremos a maioria dos resultados.

No Capítulo 2, foi definida a variedade incidente de  $k$ -planos de  $\mathbb{P}^n$   $\phi = \{(X, \Lambda), \Lambda \subset X\} \subset \mathbb{P}^M \times \mathbb{G}(k, n)$ . Consideremos as projeções canônicas  $\pi_1$  e  $\pi_2$  de  $\phi$  em  $\mathbb{P}^M$  e  $\mathbb{G}(k, n)$  respectivamente. A projeção  $\pi_2$  é tal que suas fibras correspondem à projetivização do núcleo do morfismo sobrejetivo

$$H^0(\mathbb{P}^n, \mathcal{O}(d)) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^k, \mathcal{O}(d)),$$

onde  $H^0(\mathbb{P}^r, \mathcal{O}(s))$  representam os polinômios homogêneos de grau  $s$  em  $r + 1$  variáveis. Além disso  $\phi$  é uma subvariedade irredutível de  $\mathbb{P}^M \times \mathbb{G}(k, n)$  e de codimensão  $\binom{k+d}{k}$ . De fato, basta notar que

$$\text{codim}(\phi) = \text{dim}(\mathbb{P}^M \times \mathbb{G}(k, n)) - \text{dim}(\phi),$$

onde

$$\begin{aligned} \text{dim}(\mathbb{P}^M \times \mathbb{G}(k, n)) &= \binom{n+d}{d} - 1 + (n - k)(k + 1), \\ \text{dim}(\phi) &= (n - k)(k + 1) + \binom{n+d}{d} - \binom{k+d}{k} - 1. \end{aligned}$$

Seja  $\Lambda \subset \mathbb{P}^n$  um  $k$ -plano, escolha um sistema de coordenadas  $(x_i) \in \mathbb{P}^n$  tal que  $\Lambda$  é dado por equações

$$x_{k+1} = \dots = x_n = 0. \quad (4.1)$$

Se  $X$  é uma hipersuperfície de grau  $d$  que contenha  $\Lambda$ , então podemos escrever sua equação da seguinte forma:

$$F = \sum_{k+1}^n x_i f_i, \quad (4.2)$$

onde os  $f_i$ 's são formas de grau  $d - 1$ .

**Proposição 4.1.** *Seja  $X \subset \mathbb{P}^n$  uma hipersuperfície descrita pela equação (4.2).  $X$  é singular no ponto  $p \in \Lambda$  se, e somente se,  $f_i(p) = 0$  para  $i = k + 1, \dots, n$ .*

*Demonstração.*  $X$  é singular em  $p$  se, e somente se,  $\nabla(F_p) = 0$ , ou seja

$$\left( \frac{\partial}{\partial x_1} \left( \sum_{k+1}^n x_i f_i \right), \dots, \frac{\partial}{\partial x_k} \left( \sum_{k+1}^n x_i f_i \right), \frac{\partial}{\partial x_{k+1}} \left( \sum_{k+1}^n x_i f_i \right), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n} \left( \sum_{k+1}^n x_i f_i \right) \right) \Big|_p = 0.$$

$$\left( \sum_{k+1}^n x_i \frac{\partial f_i}{\partial x_1}, \dots, \sum_{k+1}^n x_i \frac{\partial f_i}{\partial x_k}, f_{k+1} + \sum_{k+1}^n x_i \frac{\partial f_i}{\partial x_{k+1}}, \dots, f_n + \sum_{k+1}^n x_i \frac{\partial f_i}{\partial x_n} \right) \Big|_p = 0.$$

Como  $x_{k+1} = \dots = x_n = 0$  temos que

$$(0, \dots, 0, f_{k+1}(p), \dots, f_n(p)) = (0, \dots, 0)$$

se, e somente se,  $f_i(p) = 0$  para todo  $i = k + 1, \dots, n$ . □

Descreveremos agora o espaço tangente a variedade de Fano de uma hipersuperfície  $X$  dada pela equação polinomial homogênea  $G(x) = G(x_0 : \dots : x_n)$ . Seja  $\Lambda(t)$  um caminho na variedade de Fano  $F_k(X)$  (que é uma família de  $k$ -planos de  $X$ ). Para cada ponto  $p \in \Lambda_0$  podemos tomar um caminho  $p(t) = (x_0(t) : \dots : x_n(t))$  onde  $p(t) \in \Lambda(t)$  para todo  $t$ . Desde que  $\Lambda(t) \subset X$  temos que  $G(p(t)) = 0$  para todo  $t$ , derivando  $G(p(t))$  em relação a  $t$  temos

$$\sum \frac{\partial G}{\partial x_i}(p_0) x'_i(0) = \left( \frac{\partial G}{\partial x_0}(p_0), \dots, \frac{\partial G}{\partial x_n}(p_0) \right) \cdot (x'_0(0), \dots, x'_n(0)) = 0$$

o que significa dizer que o vetor tangente ao caminho  $p(t)$  está no plano tangente a  $X$  em  $p_0$ . Logo, para  $\Lambda = \Lambda_0$ , temos  $T_\Lambda(F_k(X)) \subset \mathfrak{H}$  onde  $\mathfrak{H}$  é o espaço dos homomorfismos

$$\mu : \Lambda \longrightarrow \mathbf{k}^{n+1}/\Lambda$$

definidos por

$$\mathfrak{H} = \{ \mu; \mu(p) \in T_p(X)/\Lambda \forall p \in \Lambda \}.$$

Note que se  $\mathfrak{H} \subset \text{Hom}(\Lambda, \mathbf{k}^{n+1}/\Lambda)$  é tal que  $\dim(\mathfrak{H}) = \dim(F_k(X))$ , podemos, conforme será feito na Proposição 4.2, deduzir que  $F_k(X)$  é suave em  $\Lambda$  com  $T_\Lambda(F_k(X)) = \mathfrak{H}$ . Como estamos considerando somente o caso das hipersuperfícies, a dimensão de  $\mathfrak{H}$  coincidirá com a dimensão esperada  $\Gamma(n, k, d)$  da variedade de Fano. Dada  $X(G = 0)$  e  $\Lambda \subset X$ , para todo homomorfismo  $\mu : \Lambda \longrightarrow \mathbf{k}^{n+1}/\Lambda$  podemos associar o polinômio

$$G_\mu(p) = \left( \frac{\partial G}{\partial x_0}(p), \dots, \frac{\partial G}{\partial x_n}(p) \right) \cdot \mu(p)$$

que é bem definido, donde podemos definir a seguinte aplicação linear

$$\begin{aligned} v : \text{Hom}(\Lambda, \mathbf{k}^{n+1}/\Lambda) &\longrightarrow H^0(\Lambda, \mathcal{O}(d)) \\ \mu &\longmapsto G_\mu \end{aligned}$$

cujo núcleo é precisamente  $\mathfrak{H}$ . De fato,

$$\begin{aligned} G_\mu(p) = 0 \quad \forall p \in \Lambda &\iff \left( \frac{\partial G}{\partial x_0}(p), \dots, \frac{\partial G}{\partial x_n}(p) \right) \mu(p) = 0 \quad \forall p \in \Lambda \iff \\ &\iff \mu(p) \in T_p(X)/\Lambda \quad \forall p \in \Lambda \iff \mu \in \mathfrak{H}. \end{aligned}$$

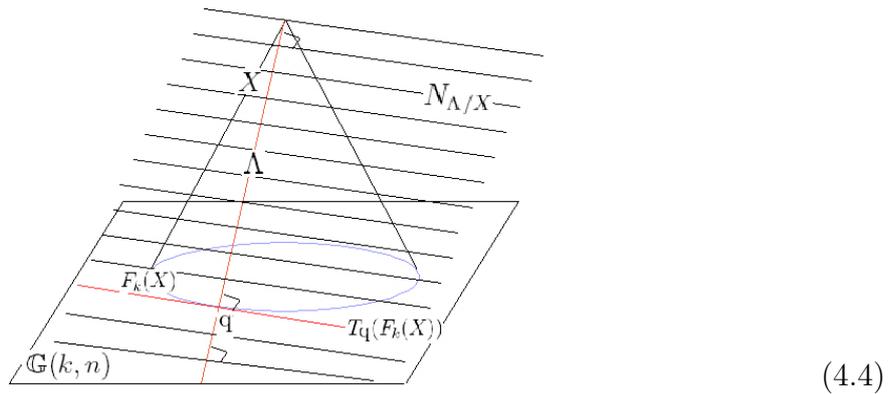
Daí segue que

$$\begin{aligned} \dim(\mathfrak{H}) &= \dim(\ker(v)) = \dim(\text{Hom}(\Lambda, \mathbf{k}^{n+1}/\Lambda)) - \dim(\text{Im}(v)) \\ &= (k+1)(n-k) - \binom{k+d}{k} = \Gamma(n, k, d). \end{aligned} \tag{4.3}$$

Dada uma variedade  $X \subset \mathbb{P}^n$  o *espaço normal* a  $X$  no ponto  $p$ ,  $N_p(X/\mathbb{P}^n) = N_p(X)$  é definido pelo quociente

$$N_p(X) = T_p(\mathbb{P}^n)/T_p(X).$$

Note que  $N_p(X)$  pode ser realizado pelo espaço quociente  $\mathbf{k}^{n+1}/\Lambda$ , onde  $\Lambda \subset \mathbf{k}^{n+1}$  é o subespaço correspondente ao espaço projetivo tangente  $T_p(X)$ . Da construção acima resulta que  $T_\Lambda(F_k(X)) = H^0(\Lambda, N_{\Lambda/X})$ , onde  $N_{\Lambda/X}$  é o fibrado normal de  $\Lambda$  em  $X$ . Veja a figura 4.4.



**Proposição 4.2.** *Se uma hipersuperfície  $X \subset \mathbb{P}^n$  de grau  $d$  é suave ao longo de  $\Lambda$  então as condições são equivalentes:*

- i)  $\pi_1$  é suave em  $(X, \Lambda)$ ;
- ii)  $h^0(\Lambda, N_{\Lambda/X}) = \Gamma(n, k, d)$ ;
- iii)  $H^0(\Lambda, \mathcal{O}(d)) = \sum_{i=k+1}^n f_i H^0(\Lambda, \mathcal{O}(1))$ , onde os  $f_i$ s são formas de grau  $d-1$ .

*Demonstração.* Mostremos que  $i) \iff ii)$  e que  $ii) \iff iii)$ .

$i) \iff ii)$

Assuma que  $X$  é suave ao longo de  $\Lambda$ . Suponha que  $\pi_1 : \phi \longrightarrow \mathbb{P}^M$  é suave em  $(X, \Lambda)$  o que ocorre se, e somente se, o núcleo de  $d\pi_1(X, \Lambda)$  tem dimensão  $\Gamma(n, k, d)$  (\*).

Como  $\pi_1^{-1}(X) = F_k(X)$  temos que  $T_\Lambda(F_k(X)) = \ker(d\pi_1(X, \Lambda))$  e juntamente com o fato de  $H^0(\Lambda, N_{\Lambda/X}) = T_\Lambda(F_k(X))$ , veja que (\*) ocorre se, e somente se,  $h^0(\Lambda, N_{\Lambda/X}) = \dim(\phi) - \dim(\mathbb{P}^M) = \Gamma(n, k, d)$ .

$ii) \iff iii)$

Assuma que  $X$  é suave ao longo  $\Lambda$  e considere a seguinte sequência exata

$$0 \longrightarrow N_{\Lambda/X} \longrightarrow (\mathcal{O}_\Lambda(1))^{n-k} \xrightarrow{(f_{k+1}, \dots, f_n)} \mathcal{O}_\Lambda(d) \longrightarrow 0$$

e suponhamos que  $h^0(\Lambda, N_{\Lambda/X}) = \Gamma(n, k, d)$  que é equivalente a dizer que  $H^1(\Lambda, N_{\Lambda/X}) = 0$  que ocorre se, e somente se, a sequência

$$0 \longrightarrow H^0(\Lambda, N_{\Lambda/X}) \longrightarrow H^0(\Lambda, (\mathcal{O}(1))^{n-k}) \longrightarrow H^0(\Lambda, \mathcal{O}(d)) \longrightarrow 0$$

é exata, que ocorre se, e somente se,

$$\sum_{i=k+1}^n f_i H^0(\Lambda, \mathcal{O}(1)) = H^0(\Lambda, \mathcal{O}(d)).$$

□

Consideremos os seguintes conjuntos:

$i)\phi = \{(X, \Lambda) \in \phi; X \text{ é suave ao longo de } \Lambda\}$ .

$ii)Z = \{(X, \Lambda) \in \phi'; \pi_1 \text{ não é suave em } (X, \Lambda)\}$ .

Então, temos a seguinte estimativa da codimensão de  $Z$  em  $\phi'$ :

**Proposição 4.3.**  $\text{codim}(Z, \phi') \geq \min_{i=1, \dots, k} ((n - 2k + i)(i + 1) - \binom{d+i}{i} + 1)$ .

*Demonstração.* Como as fibras de  $\pi_2$  são todas irredutíveis e de mesma dimensão temos que é suficiente mostrar que

$$\text{codim}(Z \cap \pi_2^{-1}(\Lambda), \phi' \cap \pi_2^{-1}(\Lambda)) \geq \min_{i=1, \dots, k} ((n - 2k + i)(i + 1) - \binom{d+i}{i} + 1)$$

para  $\Lambda \in \mathbb{G}(k, n)$ . Tomemos o sistema de coordenadas descrito em (4.1). De acordo com as Proposições 4.1 e 4.2 temos que

$$\phi' \cap \pi_2^{-1}(\Lambda) = \{(f_{k+1}, \dots, f_n); f_i \in H^0(\Lambda, \mathcal{O}(d-1)) \text{ não tem zeros comuns}\}.$$

$$Z \cap \pi_2^{-1}(\Lambda) = \{(f_{k+1}, \dots, f_n); \sum f_i H^0(\Lambda, \mathcal{O}(1)) \neq H^0(\Lambda, \mathcal{O}(d))\}$$

onde estamos identificando uma hipersuperfície  $X$  dada pela equação (4.2) com a  $(n - k)$ -upla  $(f_{k+1}, \dots, f_n)$ .

Identificando o  $k$ -plano  $\Lambda$  com  $\mathbb{P}^k$  podemos definir o seguinte mapa multiplicativo:

$$m : H^0(\mathbb{P}^k, \mathcal{O}(1)) \times H^0(\mathbb{P}^k, \mathcal{O}(d-1)) \longrightarrow H^0(\mathbb{P}^k, \mathcal{O}(d)).$$

Para todo hiperplano  $V \subset H^0(\mathbb{P}^k, \mathcal{O}(d))$  consideremos os seguintes conjuntos:

$$i) A_V = \{f \in H^0(\mathbb{P}^k, \mathcal{O}(d-1)); m(H^0(\mathbb{P}^k, \mathcal{O}(1)) \times \{f\}) \subset V\};$$

$$ii) Z_V = \{(f_{k+1}, \dots, f_n); \sum f_i H^0(\Lambda, \mathcal{O}(1)) \subset V\}.$$

Denotemos por

$$D_i = \{V \subset H^0(\mathbb{P}^k, \mathcal{O}(d)); \text{codim}(A_V, H^0(\mathbb{P}^k, \mathcal{O}(d-1))) = i\}. \quad (4.5)$$

A conclusão da prova desta proposição depende dos próximos dois lemas.  $\square$

**Lema 4.4.** *Seja  $V$  um hiperplano em  $H^0(\mathbb{P}^k, \mathcal{O}(d))$ , pertencente a  $D_1$ . Então  $V = H^0(\mathbb{P}^k, \mathcal{O}(d)(-p))$  para algum ponto  $p$  de  $\mathbb{P}^k$  e  $A_V = H^0(\mathbb{P}^k, \mathcal{O}(d-1)(-p))$ .*

*Demonstração.* Temos que um hiperplano  $V$  em  $H^0(\mathbb{P}^k, \mathcal{O}(d))$  pode ser dado por uma equação linear

$$\sum_{|\alpha|=d} c_\alpha u_\alpha = 0,$$

onde nos fazemos a soma de todos os multi-índices  $\alpha = (\alpha_0, \dots, \alpha_k)$  tais que  $|\alpha| = \alpha_0 + \dots + \alpha_k = d$  e os  $u_\alpha$  são os coeficientes de um polinômio em  $H^0(\mathbb{P}^k, \mathcal{O}(d))$ . Note que  $f = \sum_{|\beta|=d-1} v_\beta x^\beta \in H^0(\mathbb{P}^k, \mathcal{O}(d-1))$  está em  $A_V$  se, e somente se,  $f x_i \in V$ , onde podemos representar por um sistema de  $k+1$  equações lineares:

$$\sum_{|\alpha|=d-1} c_{\alpha_0, \dots, \alpha_i+1, \dots, \alpha_k} v_{\alpha_0, \dots, \alpha_k} = 0,$$

para  $i = 0, \dots, k$ . Se  $V \in D_1$  então o posto da matriz associada a este sistema é igual a 1. Isto significa que o determinante de todos os menores  $2 \times 2$  desta matriz são nulos. Mas estes menores definem um ideal na imagem de  $\mathbb{P}^k$  via imersão Veronese

$$\nu_d : \mathbb{P}^k \hookrightarrow \mathbb{P}^{\binom{d+k}{k}-1} = \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^k, \mathcal{O}(d))).$$

Portanto, existe um ponto  $p \in \mathbb{P}^k$  tal que  $(c_\alpha)_{|\alpha|=d} = \nu_d(p)$ , isto é,  $V = H^0(\mathbb{P}^k, \mathcal{O}(d)(-p))$  para algum  $p \in \mathbb{P}^k$  e  $A_V = H^0(\mathbb{P}^k, \mathcal{O}(d-1)(-p))$ .  $\square$

Seja  $(f_{k+1}, \dots, f_n) \in Z \cap \pi_2^{-1}(\Lambda)$  e  $V \subset H^0(\mathbb{P}^k, \mathcal{O}(d))$  tal que  $\sum f_i H^0(\mathbb{P}^k, \mathcal{O}(1)) \subset V$ . Portanto, temos que  $(f_{k+1}, \dots, f_n) \in Z_V$ , onde  $V$  deve pertencer a algum  $D_i$ . Mas, pelo Lema 4.4 temos que  $V \notin D_1$ . De fato, suponhamos que  $V \in D_1$ , assim existe  $p \in \mathbb{P}^k$  tal que  $V = H^0(\mathbb{P}^k, \mathcal{O}(d)(-p))$  o que é uma contradição com o fato de  $(f_{k+1}, \dots, f_n)$  pertencer a  $Z \cap \pi_2^{-1}(\Lambda)$ . Desta forma,  $V$  deve pertencer a algum dos  $D_i$ 's para  $i \geq 2$ . Portanto,

$$\begin{aligned} Z \cap \pi_2^{-1}(\Lambda) &= \{(f_{k+1}, \dots, f_n); \sum f_i H^0(\Lambda, \mathcal{O}(1)) \neq H^0(\Lambda, \mathcal{O}(d))\} = \\ &= \left\{ \bigcup_{V \in D_2} Z_V \right\} \cup \left\{ \bigcup_{V \in D_3} Z_V \right\} \cup \dots \cup \left\{ \bigcup_{V \in D_{k+1}} Z_V \right\} = \bigcup_{i=2}^{k+1} \left( \bigcup_{V \in D_i} Z_V \right). \end{aligned}$$

Veja que  $D_i$  é uma variedade determinante da matriz

$$C = [c_{\alpha_0, \dots, \alpha_j+1, \dots, \alpha_k}], \quad j = 0, \dots, k, \quad |\alpha| = d - 1$$

que corresponde ao local dos pontos  $(c_\beta)_{|\beta|=d} \in \mathbb{P}(H^0(\mathbb{P}^k, \mathcal{O}(d)))$ , onde a matriz correspondente tem posto no máximo  $i$ . Assim, temos a seguinte estimativa:

$$\text{codim}(Z \cap \pi_2^{-1}(\Lambda), \phi' \cap \pi_2^{-1}(\Lambda)) \geq \min_{i=2, \dots, k+1} ((n-k)i - \dim(D_i)).$$

Portanto, para provarmos a Proposição 4.3 devemos estimar a dimensão de  $D_i$ .

**Lema 4.5.**  $\dim(D_i) \leq \binom{d+i-1}{i-1} + (k+1-i)i - 1$ ,  $i = 1, \dots, k+1$ .

*Demonstração.* Consideremos a função  $\tau_i : D_i \setminus D_{i-1} \rightarrow \mathbb{G}(k-i, k)$  que manda  $(c_\alpha)_{|\alpha|=d}$  para o subespaço projetivo  $\Lambda$  de dimensão  $k-i$  de  $\mathbb{P}^k$  correspondendo as soluções do seguinte sistema linear

$$\sum_{l=0}^k c_{\alpha_0, \dots, \alpha_l+1, \dots, \alpha_k} x_l = 0$$

onde  $|\alpha| = d - 1$ . Provaremos que as fibras de  $\tau_i$  têm dimensão no máximo  $\binom{d+i-1}{i-1} - 1$ . Pois bem, fixemos a fibra de  $\tau_i$  correspondente aos  $k-i+1$  vetores  $v_s = (x_{s0}, \dots, x_{sk})$ ,  $s = 0, \dots, k-i$  onde  $\Lambda = \langle v_0, \dots, v_{k-i} \rangle$ . Podemos escolher as coordenadas destes vetores tais que  $x_{sj} = 0$  para  $j < s$  e  $x_{sj} \neq 0$  para  $j = s$ . Neste caso a matriz que representa  $\Lambda$  será dada por:

$$A = \begin{pmatrix} x_{00} & x_{01} & \dots & x_{0(k-i)} & \dots & x_{0k} \\ 0 & x_{22} & & \vdots & & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & x_{(k-i)(k-i)} & \dots & x_{(k-i)k} \end{pmatrix}$$



Usando a relação de Stifel

$$\binom{a-1}{b-1} + \binom{a-1}{b} = \binom{a}{b},$$

obtemos que  $\dim(\tau_i^{-1}(\Lambda)) \leq \binom{d+i-1}{i-1} - 1$ . Juntamente com o fato de que

$$\dim(\mathbb{G}(k-i, k)) = (k - (k-i))(k-i+1) = i(k-i+1)$$

temos que

$$\dim(D_i) \leq \dim(G(k-i, k)) + \dim(\tau_i^{-1}(\Lambda)) \leq (k-i+1)i + \binom{d+i-1}{i-1} - 1.$$

□

Para concluir a prova da Proposição 4.3 basta observar que

$$\begin{aligned} \text{codim}(Z \cap \pi_2^{-1}(\Lambda), \phi' \cap \pi_2^{-1}(\Lambda)) &\geq \min_{i=1, \dots, k} ((n-k)(i+1) - \dim(D_{i+1})) \geq \\ &\geq \min_{i=1, \dots, k} \left\{ (n-k)(i+1) - \left( (i+1)(k-i) + \binom{d+i}{i} - 1 \right) \right\} = \\ &= \min_{i=1, \dots, k} \left\{ (i+1)(n-2k+i) - \binom{d+i}{i} + 1 \right\}. \end{aligned}$$

Isto é o bastante para provar a Proposição 4.3.

**Corolário 4.6.** *Se  $\Gamma(n, d, k) \geq 0$  (com  $d \geq 3$ ), então  $\text{codim}(Z, \phi') \geq 1$ .*

*Demonstração.* Pela Proposição 4.3 temos que

$$\text{codim}(Z, \phi') \geq \min_{i=1, \dots, k} \left\{ (n-2k+i)(i+1) - \binom{d+i}{i} + 1 \right\}.$$

Suponhamos por absurdo que  $\text{codim}(Z, \phi') < 1$ , então

$$\min_{i=1, \dots, k} \left\{ (n-2k+i)(i+1) - \binom{d+i}{i} + 1 \right\} < 1,$$

ou seja, existe  $j \in \{1, \dots, k\}$  tal que

$$\begin{aligned} (n-2k+j)(j+1) - \binom{d+j}{j} + 1 &< 1 \Rightarrow \\ n-2k &< \binom{d+j}{j} \frac{1}{j+1} - j. \end{aligned}$$

Por outro lado temos que

$$\Gamma(n, k, d) \geq 0 \Rightarrow$$

$$(n - k)(k + 1) - \binom{k + d}{k} \geq 0 \Rightarrow$$

$$n \geq \binom{k + d}{k} \frac{1}{k + 1} + k.$$

Portanto,

$$\binom{k + d}{k} \frac{1}{k + 1} + k - 2k \leq n - 2k < \binom{d + j}{j} \frac{1}{j + 1} - j \Rightarrow$$

$$\binom{k + d}{k} \frac{1}{k + 1} - k < \binom{d + j}{j} \frac{1}{j + 1} - j. (*)$$

Mostraremos que a desigualdade (\*) nos conduz a um absurdo. Para tanto, consideremos

$A_t = \binom{d+t}{t} \frac{1}{t+1} - t$  e analisemos o sinal de  $A_{t+1} - A_t$ .

$$\begin{aligned} A_{t+1} - A_t &= \binom{d+t+1}{t+1} \frac{1}{t+2} - (t+1) - \left( \binom{d+t}{t} \frac{1}{t+1} - t \right) = \\ &= \binom{d+t}{t+1} \frac{1}{t+2} + \binom{d+t}{t} \frac{1}{t+2} - t - 1 - \binom{d+t}{t} \frac{1}{t+1} + t = \\ &= \binom{d+t}{t+1} \frac{1}{t+2} + \binom{d+t}{t} \cdot \left( \frac{1}{t+2} - \frac{1}{t+1} \right) - 1 = \\ &= \binom{d+t}{t+1} \frac{1}{t+2} - \binom{d+t}{t} \frac{1}{(t+2)(t+1)} - 1 = \\ &= \frac{d}{d} \frac{(d+t)!}{(d-1)!(t+1)!} \frac{1}{t+2} - \frac{(d+t)!}{d!t!} \frac{1}{(t+2)(t+1)} - 1 = \\ &= d \frac{(d+t)!}{d!(t+2)!} - \frac{(d+t)!}{d!(t+2)!} - 1 = \\ &= \frac{(d+t)!}{d!(t+2)!} (d-1) - 1 = \\ &= \frac{(d+t)!}{d(d-1)(d-2)!(t+2)!} (d-1) - 1 = \\ &= \frac{1}{d} \binom{d+t}{t+2} - 1. \end{aligned}$$

Para concluir devemos mostrar que esta última equação é sempre maior ou igual a zero.

Seja  $B_t = \binom{d+t}{t+2} - d$ . Analisemos o sinal de  $B_{t+1} - B_t$ .

$$\begin{aligned} B_{t+1} - B_t &= \binom{d+t+1}{t+3} - d - \left( \binom{d+t}{t+2} - d \right) = \\ &= \binom{d+t+1}{t+3} - d - \binom{d+t}{t+2} + d = \\ &= \binom{d+t}{t+3} + \binom{d+t}{t+2} - \binom{d+t}{t+2} = \end{aligned}$$

$$= \binom{d+t}{t+3} \geq 0$$

sempre que  $d \geq 3$ .

Portanto,  $A_t$  é crescente, ou seja,  $A_{t+1} - A_t \geq 0$  para todo  $t \geq 1$ . Por outro lado, de (\*) temos que  $A_k < A_j$  com  $k > j$  o que é uma contradição. No caso em que  $j = k$  temos

$$1 > (n - 2k + k)(k + 1) - \binom{d+k}{k} + 1 \Rightarrow$$

$$0 > (n - k)(k + 1) - \binom{d+k}{k} = \Gamma(n, k, d),$$

que seria uma contradição com a hipótese. □

**Conclusão do Teorema 2.15**

Se  $\Gamma(n, k, d) = \dim(\phi) - \dim(\mathbb{P}^M) < 0$ , temos obviamente que  $\pi_1$  não é sobrejetiva e portanto para uma hipersuperfície geral  $X$  temos que  $F_k(X) = \emptyset$ , donde obtemos 2.15 item *i*). Por outro lado, se  $\Gamma(n, k, d) \geq 0$  temos que  $\pi_1$  é sobrejetiva e também suave num ponto geral, isto é, suave em um aberto. De fato, seja  $\mathcal{A} \subset \mathbb{P}^M$  o conjunto que parametriza todas as hipersuperfícies suaves. Se  $X \in \mathcal{A}$ , então  $\pi_1^{-1}(X)$  é suave se, e somente se,  $X \notin \pi_1(Z)$  (Proposição 4.2 parte referente a *i*)  $\iff ii$ ). Mas usando o Corolário 4.6 temos que  $F_k(X)$  é suave para uma hipersuperfície geral  $X$ . De fato, se  $\text{codim}(Z, \phi') \geq 1$  temos que  $\pi_1^{-1}(X)$  é não suave em um fechado, e portanto  $F_k(X)$  é suave em um aberto denso. Diante do fato de assumirmos a característica zero obtemos 2.15 item *ii*).

# Conclusão

Embora sucinto, este trabalho tratou de um importante resultado, o Teorema 2.15. Ele nos possibilita, de um modo extremamente simples, calcular a dimensão da variedade de Fano de uma hipersuperfície geral de grau  $d \geq 3$ ,  $X \subset \mathbb{P}^n$ . Embora, de enunciado simples, a prova deste resultado nos conduziu por um belo passeio onde fizemos uso de importantes ferramentas da álgebra comutativa e geometria algébrica, como por exemplo, o Teorema da Dimensão das Fibras e algumas noções de cohomologia.

Apesar de tudo, fica a sensação de que o exposto neste trabalho é apenas a ponta de um imenso iceberg. Um possível caminho, embora não abordado aqui, por mais resultados a cerca das variedades de Fano é o estudo das Classes de Chern. Esta afirmação reside no fato de que durante a confecção deste trabalho, outros resultados na mesma linha dos expostos aqui, quase sempre, envolviam as Classes de Chern.

Assim, chegamos ao fim deste trabalho satisfeitos, porém com a ambição por algo mais, o que talvez seja feito em estudos posteriores.

# Referências Bibliográficas

- [1] HARRIS, Joe. Algebraic Geometry: A First Course. Graduate texts in mathematics; 133. Springer-Verlag New York, 1992.
- [2] SHAFAREVICH, Igor R. Basic Algebraic Geomtry 1. 2nd ed. Springer-Verlag, 1994.
- [3] KLEIMAN, S. L.; LAKSOV, D. Schubert Calculus. Amer. Math. Mont. 1972.
- [4] MUMFORD, David. The Red Book of Varieties and Schemes. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 1988.
- [5] MUMFORD, David. Algebraic Geometry I: Complex Projective Varieties. Springer-Verlag Berlin Heidelberg New York, 1976.
- [6] MACHADO, Paulo A. F. Geometria da Grassmanniana de Retas de  $\mathbb{P}^3$ . Dissertação de Mestrado, UFMG, 1989.
- [7] HARTSHORNE, Robin, Algebraic Geometry. Springer-Verlag, 1977.
- [8] LANGER, Adrian. Fano Schemes of Linear Spaces on Hypersurfaces. Instytut Matematyki UW, 1996.
- [9] LIU, Qing. Algebraic Geometry and Arithmetic Curves. Oxford Graduate Texts in Mathematics, Oxford University Press Inc., New York, 2002.
- [10] KOLHATKAR, Ratnadh. Grassmann Varieties. Dissertação de Mestrado. Department of Mathematics and Statistics. McGill University, Montréal, 2004.
- [11] HASSETT, Brendan. Introduction to Algebraic Geometry. Cambridge University Press, New York, 2007.
- [12] POTTMANN, Helmut; JOHANNES, Wallner. Computational Line Geometry. Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2001.

- [13] BELTRAMETTI, Mauro C.; CARLETTI, Ettore; GALLARATI, Dionisio; BRAGADIN, Giacomo M. Lectures on Curves, Surfaces and Projective Varieties: A Classical View of Algebraic Geometry. European Mathematical Society, Germany, 2009.
- [14] LIMA, Elon Lages. Álgebra Exterior. Coleção Matemática Unversitária. Rio de Janeiro, IMPA, 2005.
- [15] HOFFMAN, Kenneth. Álgebra Linear. Livros Técnicos e Científicos, Rio de Janeiro, 1976.
- [16] HARRIS J.; MAZUR B.; PANDHARIPANDE R.. Hypersurfaces of Low Degree, Duke Math. J. 95, No. 1 (1998), 125-160.