REGINALDO DEMARQUE DA ROCHA

EXISTÊNCIA E NÃO EXISTÊNCIA DE SOLUÇÕES PARA UMA CLASSE DE PROBLEMAS ELÍPTICOS COM POTENCIAL SINGULAR

Tese apresentada por **Reginaldo Demarque da Rocha** ao Curso de Doutorado em Matemática - Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do Grau de Doutor. Linha de Pesquisa: Equações Diferenciais Parciais.

Orientador: Olímpio Hiroshi Miyagaki
Co-orientador: Paulo César Carrião

Belo Horizonte
2011

À minha esposa Cássia,
que soube tão bem compreender
os meus momentos de ausência
em função deste trabalho,
dedico.

Agradecimentos

Aos meus orientadores Prof. Paulo César Carrião e Prof. Olímpio Hiroshi Miyagaki por terem me aceito como pupilo na árdua tarefa de transformar um estudante em um pesquisador. Agradeço por todos os ensinamentos e sábios conselhos que levarei por toda a vida.

Aos professores José Valdo, Marco Aurélio, Grey, Emerson, Hamilton e Fábio por terem aceito avaliar este trabalho. Agradeço a todos os elogios e críticas que muito enriqueceram o meu trabalho.

Aos professores e funcionários do Departamento de Matemática da UFMG em especial ao professores Remy, Rogério e Suzana pelos excelentes cursos ministrados que tive o privilégio de participar.

Aos irmãos em orientação Patrícia e Narciso pela amizade e pelas contribuições contidas neste trabalho oriundas dos saudosos seminários como o Prof. Carrião.

A todos os colegas do Departamento de Matemática da UFMG em especial Luis Guilhermo, Heleno, Reginaldo Braz, Luciano, Alexandre, Justino e Rafael pelas produtivas conversas sobre matemática e também pelas “improdutivas” conversas de corredor.

Aos tutores, funcionários e alunos do EAD pelas visões de ensino compartilhada, parte importante na formação de um pesquisador, em especial aos tutores Luciano, Kelly, Juliano, Aldo e Eliane e ao Prof. Dan.

À minha mãe Heloísa e meus irmãos Suellen e Esmael que sempre confiam e torcem por mim.

À minha esposa Cássia Regina pelo incansável e inabalável companheirismo frente as diversas adversidades e pelos não-enumeráveis momentos de alegria em sua presença.

Aos meus sogros D. Cida e S. José e à minha cunhada Gislene e seu esposo Rosevelt por torcerem por mim e estarem sempre presentes em todos os momentos.

Não podendo mencionar a todos, gostaria ainda de agradecer a todos que de alguma forma contribuiram para a produção deste trabalho.

Enfim, à UFMG e à coordenação do Programa de Pós-graduação em Matemática por terem me aceito como aluno fornecendo toda a estrutura necessária para a realização deste trabalho. À Coordenação de Aperfeiçoamento de Pessoal de Nível Superior (CAPES) e ao Conselho Nacional de Desenvolvimento Científico e Tecnológico (CNPq) pelo apoio financeiro.

Resumo

Neste trabalho estudamos a existência e não existência de soluções não triviais para uma classe de problemas elípticos não lineares com potencial singular do tipo

$$\mathcal{L}(u) + V(x)|u|^{q-2}u = f(u), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

onde $\mathcal{L}$ é o operador p-Laplaciano ou o operador biharmônico, $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável com simetria radial ou cilíndrica, podendo apresentar também singularidades em um subespaço de $\mathbb{R}^N$, e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua.

Abstract

In this work we study the existence and non existence of non trivial solutions for a class of nonlinear elliptic problems with singular potential of type

$$\mathcal{L}(u) + V(x)|u|^{q-2}u = f(u), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

where $\mathcal{L}$ is the p-Laplaciano or the biharmônic operator, $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ is a measurable function with radial or cylindrical simmetry, also which have singularities in a subspace of $\mathbb{R}^N$, and $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ is a continuous function.

Notações

$p^* := \frac{Np}{N-p}$	expoente crítico da imersão de Sobolev
$p_*(s) = p_* := \frac{p(N-s)}{N-p}$	expoente crítico de Hardy-Sobolev
$p_\alpha := \frac{Np}{N-\alpha}$	
$p_\alpha^* := p + \frac{p\alpha}{N-p}$	
$m_\alpha := 2 + \frac{4\alpha}{2N-4-\alpha}$	
$2^{**} := \frac{2N}{N-4}$	expoente crítico da imersão de Sobolev
$B_r(x_0)$	bola aberta $N-$dimensional de centro em x_0 e raio r
B_r	bola aberta de centro $N-$dimensional na origem e raio r
$B_r^k(x_0)$	bola aberta $k-$dimensional de centro em x_0 e raio r
$O(k)$	é o grupo ortogonal de $\mathbb{R}^k$
X'	espaço dual do espaço X
$\|\cdot\|_*$	norma do espaço X'
$C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$	espaço das funcões de classe C^∞ com suporte compacto em $\mathbb{R}^N$
$C_{0,r}^\infty(\mathbb{R}^N)$	espaço das funcões radiais em $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$
$L^p(\mathbb{R}^N; V)$	espaço L^p com peso $V(x)$
$D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$	fecho de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ na norma $\|\nabla u\|_p$

$D_r^{1,p}(\mathbb{R}^N)$	espaço das funções radiais em $D_r^{1,p}(\mathbb{R}^N)$
$D^{2,2}(\mathbb{R}^N)$	fecho de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ na norma $\|\Delta u\|_2$
$W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V)$	$D^{1,p}(\mathbb{R}^N)\cap L^p(\mathbb{R}^N;V)$
$W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N)$	$W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V)$ com $V\equiv 1$
$W_k^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V)$	$\left\{u\in W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V); u(y,z)=u(gy,z),\ \ \forall g\in O(k)\right\}$
$W_r^{1,p_*}(\mathbb{R}^N)$	é o espaço $W_N^{1,p_*}(\mathbb{R}^N)$
$W^{2,2}(\mathbb{R}^N;V)$	$D^{2,2}(\mathbb{R}^N)\cap L^2(\mathbb{R}^N;V)$
$W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N;V)$	espaço das funções radiais em $W^{2,2}(\mathbb{R}^N;V)$
$\|u\|_p:=\left(\int_{\mathbb{R}^N}\|u\|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$	norma do espaço $L^p(\mathbb{R}^N)$
$\|u\|_{p,V}:=\left(\int_{\mathbb{R}^N}\|u\|^p V(x)dx\right)^{\frac{1}{p}}$	norma do espaço $L^p(\mathbb{R}^N;V)$
$\|u\|_{1,p}:=\left(\int_{\mathbb{R}^N}\|\nabla u\|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$	norma do espaço $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$
$\|u\|:=\left(\|u\|_{1,p}^p+\|u\|_{p_*,V}^p\right)^{\frac{1}{p}}$	norma do espaço $W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V)$
$\rightarrow$	convergência *forte* em um espaço de Banach X
$\rightharpoonup$	convergência *fraca* em um espaço de Banach X
$\hookrightarrow$	imersão contínua entre espaços de Banach
$\hookrightarrow\!\!\!\!\rightarrow$	imersão compacta entre espaços de Banach
C	uma constante positiva qualquer que pode mudar a cada linha
$\Delta_p u:=\operatorname{div}(\|\nabla u\|^{p-2}\nabla u)$	o operador p-Lapalaciano
$\Delta^2 u:=\Delta(\Delta u)$	o operador biharmônico
ω_N	o volume da bola unitária $N-$dimensional

Sumário

Introdução

Existência, não existência e propriedades qualitativas de soluções não triviais para equações elípticos não lineares envolvendo potenciais singulares foram recentemente estudadas por diversos autores, principalmente envolvendo o operador Laplaciano e motivados, em sua maioria, pela obtenção de ondas solitárias para equação de Schrödinger e Klein-Gordon ou por extremo de desigualdades de Hardy-Sobolev, veja por exemplo os trabalhos [1, 8, 9, 10, 11, 13, 31, 38, 43, 46, 47, 48, 50, 52, 53] e suas referências. Neste trabalho consideramos problemas de existência e não existência de soluções não triviais para umas classe de equações diferenciais elípticas não lineares em $\mathbb{R}^N$ do tipo

$$\mathcal{L}(u) + V(x)|u|^{q-2}u = f(u), \quad x \in \mathbb{R}^N,$$

onde $\mathcal{L}$ é um operador diferencial, $V : \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$ é uma função mensurável com simetria radial ou cilíndrica, podendo apresentar também singularidades em um subespaço de $\mathbb{R}^N$ e $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é uma função contínua. Mais especificamente trabalhamos com os operadores p-Laplaciano e biharmônico, com o potencial V da forma $V(x) := V(|y|)$, onde $x = (y, z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{N-k}$ e f verificando certas propriedades, que serão estabelecidas mais adiante, para garantir existência ou não existência de solução.

No Capítulo 1 estudamos o problema envolvendo o operador p-Laplaciano

$$\begin{cases} -\Delta_p u + V(|y|)|u|^{p_*(s)-2}u = f(u) \\ u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}), \quad 1 < p < N \end{cases} \tag{1}$$

onde $(y, z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{N-k}$, $p_*(s) = \frac{p(N-s)}{N-p}$ é o expoente de Hardy-Sobolev, o potencial $V : [0, +\infty) \to (0, +\infty]$ é mensurável e f é uma função contínua. O p-Laplaciano é um operador que aparece em alguns problemas de mecânica dos fluidos (no estudo dos fluidos não newtonianos), de extração de petróleo, de elasticidade não linear, de glaceologia e em algumas reações de difusão, veja [28].

O caso radial, quando $k = N$, foi estudado por Badiale e Rolando em [11] para $s = p = 2$. Su, Wang e Willem em [46] estudam o caso quando $s = p$, mais especificamente a equação

$$-\Delta_p u + V(|x|)|u|^{p-2}u = Q(|x|)|u|^{s-2}u,$$

onde V e Q são funções contínuas não negativas, obtendo soluções ground state, isto é, uma solução fraca não trivial u que tende a zero quando $|x| \to +\infty$. Eles generalizam e melhoram os resultados de Badiale e Rolando para $p = 2$. Su e Tian em [45] estendem os resultados de Su, Wang and Willem para o caso

$$-\Delta_p u + V(|x|)|u|^{q-2}u = Q(|x|)|u|^{s-2}u,$$

ou seja, o lado esquerdo da igualdade não é homogêneo em u. Eles estabelecem diversas imersões de Sobolev de $D_r^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N; V)$ em $L^s(\mathbb{R}^N; Q)$ para intervalos de s dependendo de p, q e N e das hipóteses sobre V e Q. Resultados envolvendo singularidades também no operador podem ser vistos em [6, 27, 54] e suas referências.

O caso cilíndrico, quando $k < N$, foi inicialmente estudado por Badiale e Tarantello em [13]. Neste artigo, eles obtiveram a seguinte desigualdade de Hardy-Sobolev

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{p_*}}{|y|^s} dx \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \right)^{\frac{p_*}{p}} \tag{2}$$

para toda $u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, onde C é um constante positiva independente de u. Esta desigualdade generaliza a desigualdade análoga obtida por Caffarelli, Kohn e Nirenberg em [24] para o caso $k = N$, como uma interpolação entre a desigualdade de Hardy, onde $s = p$, e a desigualdade de Sobolev correspondente a $s = 0$. Como aplicação deste resultado eles estudam o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = V(|y|)|u|^{p-2}u \\ u > 0, \text{ em } \mathbb{R}^N, \end{cases} \tag{3}$$

proposto a eles pelos astrofísicos G. Bertin e L. Ciotti, para $N = 3$, como um modelo de dinâmica de galáxias. Existem muitos trabalhos envolvendo o operador Laplaciano. Badiale, Benci e Rolando em [9] estudam o problema (1) no caso em que $p = s = 2$ e $V(|y|) = |y|^{-2}$ usando um teorema de compacidade devido a Solimini [42]. Eles também aplicam seus resultados na obtenção de ondas solitárias para equações de Schrödinger e de Klein-Gordon. Badiale, Guida e Rolando em [10] estendem esses resultados para o caso em que $V(|y|) = |y|^{-\alpha}$. Badiale e Rolando em [12] fazem um estudo no caso em que o potencial V é subhomogêno e tem uma simetria do tipo $V(x) = V(|y_1|, \ldots, |y_k|)$, onde $x = (y_1, \ldots, y_k, z) \in \mathbb{R}^{N_1} \times \cdots \times \mathbb{R}^{N_k} \times \mathbb{R}^{N_0}$. Outros trabalhos envolvendo o operador Laplaciano com simetria cilíndrica podem ser vistos em [14, 18, 25, 36] e suas referências. Casos envolvendo o operador p-Laplaciano são menos frequentes na literatura. Em 2003, Xuan em [53] estuda a existência e multiplicidade de soluções do seguinte problema de Dirichlet em domínios limitados contendo a origem

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \lambda |u|^{r-2}u + \dfrac{|u|^{q-2}u}{|y|^s} \text{ em } \Omega \\ u = 0, \text{ em } \partial\Omega, \end{cases} \tag{4}$$

onde $1 < r < p < q \leq p_*(s)$ e $\lambda > 0$. Mais recentemente em 2010, Bhakta e Biswas em $[17]$ mostram resultados de existência, não-existência e regularidade para o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u = \dfrac{|u|^{p_*(s)-1}}{|y|^t} \text{ em } \Omega \\ u > 0, \text{ em } \Omega, \end{cases} \tag{5}$$

onde Ω é um domínio limitado. Em 2009, Assunção, Carrião e Miyagaki em [7] estudam um problema envolvendo potencial singular em um subespaço de $\mathbb{R}^N$ porém para um operador e uma não linearidade também envolvendo tal singularidade. Eles estudam a seguinte equação

$$-\operatorname{div}\left(|x_N|^{-ap}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\right) + \lambda |x_N|^{(-a+1)p}|u|^{p-2}u = \alpha |x_N|^{-bq}|u|^{q-2}u + \beta k(x)|x_N|^{-cr}|u|^{r-2}u \text{ em } \mathbb{R}^N_+,$$

onde $\mathbb{R}^N_+$ é o semi-espaço de $\mathbb{R}^N$ tal que $x_N > 0$. Em 2011, Bouchekif e Mokhtar em [20] também estudam um problema envolvendo potencial singular no operador.

A principal dificuldade em se passar do caso $p = 2$ para o caso geral está no fato de que o espaço $D^{1,p}(\mathbb{R}^n)$ não é um espaço de Hilbert e o operador p-Laplaciano é um exemplo de uma aplicação dualidade (veja [29]), sendo necessário técnicas mais sofisticadas para se obter o Princípio da Criticalidade Simétrica. Assim, afim de introduzir estas técnicas rapidamente, na Seção 1.2 estudamos a existência e não existência de soluções para o caso radial aplicando as mesmas ideias apresentadas por Badiale e Rolando em [11] obtendo resultados análogos aos deles. Apesar dos nossos resultados de existência serem casos particulares dos resultados de existência de Su, Wang e Willem em [46] e Su e Tian em [45], eles não trabalharam resultados de não existência. Mais precisamente, trabalhamos o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u + V(|x|)|u|^{p-2}u = f(u) \\ u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}), \ \ 1 < p < N, \end{cases} \tag{6}$$

onde o potencial $V : [0, \infty) \to (0, \infty]$ é uma função mensurável, a não linearidade $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e satisfazem:

(V_α) Existem $A, \alpha > 0$ tais que $V(s) \geq \frac{A}{s^\alpha}$ para quase todo $s > 0$.

(V_1) $V \in L^1(a, b)$ para algum intervalo (a, b) com $b > a > 0$.

$(f_{m,p})$ Existem $M > 0$ e $m > p$ tais que $|f(s)| \leq M|s|^{m-1}$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

Podemos ver que a propriedade (V_α) implica que V tem uma singularidade na origem, enquanto que (V_1) permite outras singularidades.

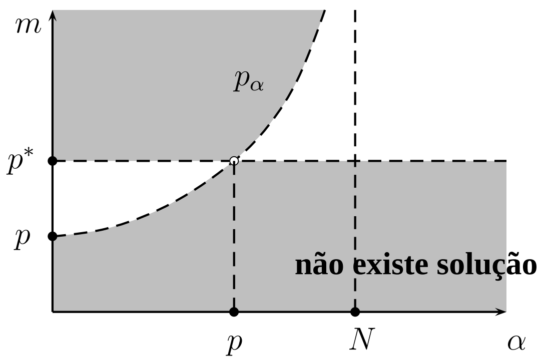
O caso mais simples no qual nossos resultados são válidos é dado pelo problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u + \dfrac{A}{|x|^\alpha}|u|^{p-2}u = |u|^{m-2}u \\ u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}), \ \ 1 < p < N. \end{cases} \tag{7}$$

Neste caso é natural estudar a não existência de solução clássica para este problema. Assim, sendo $p^* = \frac{pN}{N-p}$ o expoente crítico de Sobolev e $p_\alpha := \frac{Np}{N-\alpha}$, obtivemos o seguinte resultado

Teorema 0.1 *Se $\alpha \in (0,p)$ e $m \notin (p_\alpha, p^*)$, ou $\alpha = p$ e $m \neq p^*$, ou $\alpha \in (p,N)$ e $m \notin (p^*, p_\alpha)$, ou $\alpha \geq N$ e $m \in (0,p^*)$, então a equação do problema (7) não tem solução clássica $u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N, V) \cap L^m(\mathbb{R}^N)$.*

Note que o conjunto $(\alpha, m) \in \mathbb{R}^2$ onde não existe solução clássica do problema (7) é representado pela seguinte região



Em seguida estudamos a existência de soluções fracas não negativas para o problema (6). Para enunciarmos nossos resultados de existência denotaremos $p_\alpha^* = p + \frac{p\alpha}{N-p}$ e consideraremos algumas propriedades adicionais sobre f e V. Defina $F(s) := \int_0^s f(t)dt$ e considere as seguintes propriedades

(V_2) Existem $B, \beta, \mu_0 > 0$ tais que $V(\mu s) \leq \mu^{-\beta} BV(s)$ para quase todo $\mu > \mu_0$ e $s > 0$;

(f_1) existe $\gamma > p$ tal que $\gamma F(s) \leq f(s)s, \forall s \in \mathbb{R}$;

(f_2) $F(s_*) > 0$ para algum $s_* \in (0, \infty)$;

(f_3) $F(s) > 0, \forall s \in (0, \infty)$;

(f_4) f é ímpar;

$(f_{m,p})$ Existem $M > 0$ e $m > p$ tais que $|f(s)| \leq M|s|^{m-1}$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

(F_m) existe $\eta > 0$ tal que $F(s) \geq \eta |s|^m, \forall s \in \mathbb{R}$.

Exemplo 0.2 *Exemplos de funções que satisfazem (V_α) e (V_2) são:*

$i)$ $V : [0, +\infty) \to (0, +\infty]$ *satisfazendo* $As^{-\alpha} \leq V(s) \leq Cs^{-\alpha}$*, onde* $C \geq A$*,* $\beta = \alpha$ *e* $B \geq C/A$*.*

$ii)$ *Se* $\alpha \geq \beta > 0$ *e* $B = \mu_0 = 1$*, então*

$$V(s) := \begin{cases} +\infty, & s = 0; \\ As^{-\alpha}, & s \in (0, 1]; \\ As^{-\beta}, & s \in [1, +\infty). \end{cases}$$

$iii)$ *Dados* $s_0 > 0$*,* $A > 0$*,* $\mu_0 = 1$ *e* $\alpha \geq \beta > 0$ *seja*

$$V(s) := \begin{cases} +\infty, & s \in [0, s_0]; \\ B(s - s_0)^{-\beta} & s \in (s_0, +\infty), \end{cases}$$

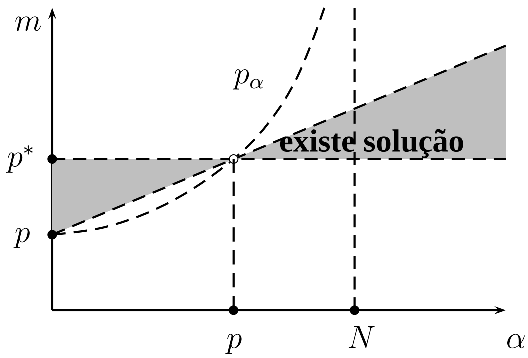
onde $B = B(s_0, A, \alpha, \beta)$ *é suficientemente grande.*

Teorema 0.3 *Sejam* $V : [0, \infty) \to (0, \infty]$ *uma função mensurável satisfazendo* (V_1) *e* $f \in C^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ *satisfazendo* (f_1)*. Suponha válidas* $(f_{m,p})$ *e* (V_α) *com* $\alpha \in (0, p)$ *e* $m \in (p_\alpha^*, p^*)$*, ou* $\alpha \in (p, \infty)$ *e* $m \in (p^*, p_\alpha^*)$*. Suponha ainda que ou* V *satisfaz* (V_2) *e* f *satisfaz* (f_2)*, ou* f *satisfaz* (f_3)*. Então o problema (6) tem uma solução radial não negativa* $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N; V)$ *no seguinte sentido*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla h + V(|x|)|u|^{p-2} u h dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(u) h dx, \ \ \forall h \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N; V). \tag{8}$$

Teorema 0.4 *Sejam* $V : [0, \infty) \to (0, \infty]$ *uma função mensurável satisfazendo* (V_1) *e* $f \in C^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ *satisfazendo* (f_1) *e* (f_4)*. Suponha válidas* $(f_{m,p})$*,* (V_α) *e* (F_m) *com* $\alpha \in (0, p)$ *e* $m \in (p_\alpha^*, p^*)$*, ou* $\alpha \in (p, \infty)$ *e* $m \in (p^*, p_\alpha^*)$*. Então o problema (6) admite infinitas soluções radiais* $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N; V)$ *no sentido da equação (8).*

Novamente note que o conjunto $(\alpha, m) \in \mathbb{R}^2$ onde existe solução fraca do problema (6) é representado pela seguinte região



Na Seção 1.3 trabalhamos o problema (1) no caso em que $V(|y|) = |y|^{-s}$ e, utilizando a identidade de Pohožaev, obtivemos o seguinte resultados de não existência

Teorema 0.5 *Sejam* $2 \leq k < N$, $1 < p < N$, $0 < s < N - \frac{N-p}{p}$ *e* $s > \frac{N(k-p^*(k-1))}{N-p^*(k-1)}$, *quando* $N > kp$ *e* $1 < p < \frac{kN}{k+N(k-1)}$. *Seja ainda* $f \in C^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *satisfazendo* (f_1) *e* (f_3) *tal que* $f(u)u \in L^1(\mathbb{R}^N)$. *Se* $\gamma > p^*$ *em* (f_1), *então a equação*

$$-\Delta_p u + \frac{|u|^{p_*-2}}{|y|^s}u = f(u), \text{ em } (\mathbb{R}^k \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^{N-k}. \tag{9}$$

não tem solução clássica $u \in C^2((\mathbb{R}^k \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^{N-k}) \cap D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap L^{p_*}(\mathbb{R}^N; V)$ *satisfazendo* $\nabla u \in L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ *para* $q > \max\{q_k, q_s, q_{s,k}\}$, *onde*

$$q_k := \frac{pk}{k-1}, \quad q_s = \frac{p_*(p-1)}{p_*-1} \quad \text{e } q_{s,k} = \frac{kp(N-s)(p-1)}{kp(N-s) - k(N-p) - N(p-s)}$$

Como consequência imediata do Teorema 0.5, mostramos que não existe solução clássica para a equação

$$-\Delta_p u + \frac{|u|^{p_*-2}}{|y|^s}u = |u|^{m-2}u, \text{ em } (\mathbb{R}^k \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^{N-k}, \tag{10}$$

quando $m \neq p^*$. Com base neste último resultado estudamos a existência de solução fraca para o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u + \dfrac{|u|^{p_*-2}u}{|y|^s} = |u|^{p^*-2}u \\ u \in W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}), \ u \geq 0. \end{cases} \tag{11}$$

Utilizando um teorema de compacidade devido a Solimini [42] e os resultados de regularidade devidos a Vassilev [48] estudamos a existência de soluções. Uma dificuldade é a obtenção do Principio da Criticalidade Simétrica, pois o espaço $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ não é um espaço de Hilbert, onde adaptamos ao nosso caso os resultados de Browder em [23] e de Boccardo e Murat em [19]. Uma outra dificuldade é a da modificação das reescalas geradas pelo Teorema de Solmini e obtenção das convergências no nosso espaço de Sobolev com peso. obtivemos os seguintes resultados

Teorema 0.6 *Sejam* $2 \leq k < N$, $1 < p < N$, $0 < s \leq p$, $s < k$ *ou* $k = p$. *Então existe* $u \in W_k^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V)$ *não trivial tal que* $u \geq 0$ *e*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{p_*-2}u}{|y|^s} \varphi \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*-2} u \varphi \, dx, \tag{12}$$

$\forall \varphi \in W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V)$.

Teorema 0.7 *Sejam* $N > k \geq 2$, $1 < p < N$. *Se* $0 < s \leq p$ *e* $s < k$ *ou* $k = p$, *então o problema (11) tem uma solução fraca não negativa* $u \in L^q(\mathbb{R}^N) \cap W_k^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V)$ *para todo* $\frac{p^*}{p'} < q \leq +\infty$ *e existe* $C := C(\mathbb{R}^N, p, \|u\|_{1,p})$ *tal que*

$$u(x) \leq \frac{C}{|x|^t}, \text{ para todo } t < \frac{N-p}{p-1}.$$

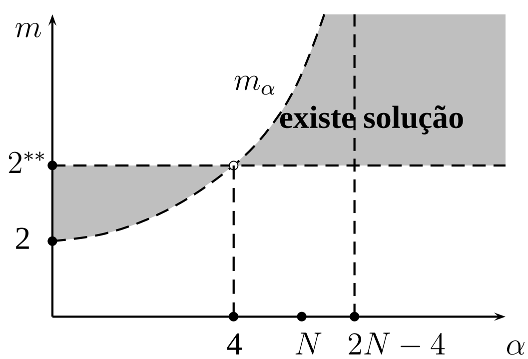
No Capítulo 2 estudamos o problema

$$\begin{cases} \Delta^2 u + V(|x|)u = f(u) \\ u \in D^{2,2}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}), \quad N \geq 5 \end{cases} \tag{13}$$

onde o potencial $V : [0, \infty) \to (0, \infty]$ é uma função mensurável satisfazendo (V_α) e (V_1), a não linearidade $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e satisfaz $(f_{m,2})$.

Problemas não lineares envolvendo o operador biharmônico em domínios limitados tem sido intensivamente estudados por vários autores, indicamos [16, 30, 35, 50, 52] e suas referências. Em domínios ilimitados resultados de existência e multiplicidade de soluções são obtidos em [3, 4, 5, 26, 37, 49]. Contudo problemas envolvendo potencial singular tem sido menos frequentes na literatura, veja [5, 49].

Neste capítulo nós estendemos os resultados envolvendo os operadores Laplaciano e p-Laplaciano obtidos em [11, 46] para o caso do operador Biharmônico. Na Seção 2.3, com base nas ideias em [46], generalizamos o Lema Radial em [37] e estabelecemos as estimativas necessárias para obter os resultados de imersão contínua para o nosso espaço de sobolev com peso. Depois, como em [11], obtivemos as imersões compactas usando o Lema de Compacidade de Strauss e estabelecemos a estimativa necessária para a obtenção do Princípio de Criticalidade de Palais Smale. A principal dificuldade no caso do operador Biharmônico é que em algumas estimativas aparecem termos do tipo $\int |u||u'|dx$, que são mais difíceis de ser controlados visto que nosso espaço de sobolev com peso não contém termos envolvendo derivadas de primeira ordem. Na Seção 2.4, sendo $m_\alpha := 2 + \frac{4\alpha}{2N-4-\alpha}$, provamos que o problema (13) admite solução radial não trivial se $\alpha \in (0,4)$ e $m \in (m_\alpha, 2^{**})$ ou $\alpha \in (4, 2N-4)$ e $m \in (2^{**}, m_\alpha)$ ou $\alpha \in [2N-4, \infty)$ e $m \in (2^{**}, \infty)$, ou seja, se (α, m) é um ponto da região abaixo



Mais especificamente, obtivemos os seguintes resultados

Teorema 0.8 *Sejam $V : [0,\infty) \to (0,\infty]$ uma função mensurável satisfezendo (V_1) e $f \in C^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$ satisfazendo (f_1). Suponha válidas $(f_{m,2})$ e (V_α) com $\alpha \in (0,4)$ e $p \in (m_\alpha, 2^{**})$ ou $\alpha \in (4, 2N-4)$ e $m \in (2^{**}, m_\alpha)$ ou $\alpha \in [2N-4, \infty)$ e $m \in (2^{**}, \infty)$. Suponha ainda que ou V satisfaz (V_2) e f satisfaz (f_2), ou f satisfaz (f_3). Então o problema (13) tem uma solução radial não trivial $u \in W^{2,2}(\mathbb{R}^N, V)$ no seguinte sentido*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Delta u \cdot \Delta h + V(|x|)uh\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)h\, dx, \ \ \forall h \in W^{2,2}(\mathbb{R}^N, V). \tag{14}$$

Teorema 0.9 *Sejam* $V : [0, \infty) \to (0, \infty]$ *uma função mensurável satisfazendo* (V_1) *e* $f \in C^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ *satisfazendo* (f_1) *e* (f_4). *Suponha válidas* $(f_{m,2})$, (V_α) *e* (F_m) $\alpha \in (0, 4)$ *e* $m \in (m_\alpha, 2^{**})$ *ou* $\alpha \in (4, 2N-4)$ *e* $m \in (2^{**}, m_\alpha)$*, ou* $\alpha \in [2N-4, \infty)$ *e* $m \in (2^{**}, \infty)$*. Então o problema (13) admite infinitas soluções radiais* $u \in W^{2,2}(\mathbb{R}^N, V)$ *no sentido da equação (14).*

Capítulo

1

Existência de soluções envolvendo o p-Laplaciano

Neste capítulo estudaremos problemas semilineares elípticos envolvendo o operador p-Laplaciano do tipo

$$\begin{cases} -\Delta_p u + V(|y|)|u|^{p_*(s)-2}u = f(u) \\ u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}), \ \ 1 < p < N \end{cases} \tag{1.1}$$

onde $(y, z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{N-k}$, $0 < s < N - \frac{N-p}{p}$, o potencial $V : [0, \infty) \to (0, \infty]$ é uma função mensurável, a não linearidade $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e satisfazem:

(V_α) Existem $A, \alpha > 0$ tais que $V(s) \geq \frac{A}{s^\alpha}$ para quase todo $s > 0$.

(V_1) $V \in L^1(a, b)$ para algum intervalo (a, b) com $b > a > 0$.

$(f_{m,p})$ Existem $M > 0$ e $m > p$ tais que $|f(s)| \leq M|s|^{m-1}$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

1.1 O espaço de Sobolev com peso

Sejam $N \geq k \geq 2$, $N > p > 1$ e $0 < s < N - \frac{N-p}{p}$. Seja $p_* = p_*(s) = \frac{p(N-s)}{N-p}$ e consideremos $x = (y, z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{N-k}$, e por um abuso de notação, para $k = N$ consideraremos $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{N-k}$ e $x = y$. O operador p-Laplaciano é definido por $\Delta_p u := \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u)$

Considere o espaço de Sobolev

$$D^{1,p}(\mathbb{R}^N) := \left\{ u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^p(\mathbb{R}^N), \forall i = 1, \cdots, N \right\}$$

com a norma $\|u\|_{1,p} = \|\nabla u\|_p$. Sabemos que $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ é espaço de Banach e que é o fecho de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ sobre a norma dada. Vejamos algumas propriedades que este espaço possui.

Proposição 1.1 *$D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ é uniformemente convexo.*

Demonstração: Dado $\varepsilon \in (0, 2)$, sejam $u, v \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ tais que

$$\|u\|_{1,p}, \|v\|_{1,p} \leq 1 \text{ e } \|u - v\|_{1,p} > \varepsilon.$$

Se $p \geq 2$, em [2], vemos que para todo $x, y \in \mathbb{R}$

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|^p + \left|\frac{x-y}{2}\right|^p \leq \frac{1}{2}\left(|x|^p + |y|^p\right).$$

Com isso,

$$\begin{aligned}
\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{1,p}^p + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|_{1,p}^p &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\left|\frac{\nabla u + \nabla v}{2}\right|^p + \left|\frac{\nabla u - \nabla v}{2}\right|^p \right) dx \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}\left(|\nabla u|^p + |\nabla v|^p\right) dx \\
&= \frac{1}{2}\left(\|u\|_{1,p}^p + \|v\|_{1,p}^p \right) \leq 1.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{1,p}^p \leq 1 - \left\|\frac{u-v}{2}\right\|_{1,p}^p \Rightarrow \left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{1,p} < 1 - \left(1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}\right).$$

Portanto, tomando $\delta = 1 - \left(1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^p\right)^{\frac{1}{p}}$, vemos que $\delta \in (0,1)$ e temos o resultado.

Se $p \in (1,2)$, novamente, em [2], temos que, sendo $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, para todos $x, y \in \mathbb{R}$

$$\left|\frac{x+y}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{x-y}{2}\right|^{p'} \leq \left(\frac{1}{2}|x|^p + \frac{1}{2}|y|^p\right)^{\frac{1}{p-1}}.$$

Além disso, como $p - 1 \in (0,1)$ vale a desigualdade de Minkowiski invertida, ou seja, para todos $u, v \in L^{p-1}(\mathbb{R}^N)$ tem-se que

$$\|u+v\|_{p-1} \geq \|u\|_{p-1} + \|v\|_{p-1}.$$

Neste caso,

$$\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{1,p}^{p'} + \left\|\frac{u-v}{2}\right\|_{1,p}^{p'} = \left\|\left|\frac{\nabla u + \nabla v}{2}\right|^{p'}\right\|_{p-1} + \left\|\left|\frac{\nabla u - \nabla v}{2}\right|^{p'}\right\|_{p-1}$$

$$\leq \left\|\left|\frac{\nabla u + \nabla v}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{\nabla u - \nabla v}{2}\right|^{p'}\right\|_{p-1}$$

$$= \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(\left|\frac{\nabla u + \nabla v}{2}\right|^{p'} + \left|\frac{\nabla u - \nabla v}{2}\right|^{p'}\right)^{p-1} dx\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

$$\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{1}{2}\left(|\nabla u|^p + |\nabla v|^p\right) dx\right)^{\frac{1}{p-1}}$$

$$= \frac{1}{2}\left(\|u\|_{1,p}^p + \|v\|_{1,p}^p\right)^{\frac{1}{p-1}} \leq 1.$$

Logo, $\left\|\frac{u+v}{2}\right\|_{1,p}^{p'} \leq 1 - \left\|\frac{u-v}{2}\right\|_{1,p}^{p'} < 1 - \left(\frac{\varepsilon}{2}\right)^{p'}$ e o resultado segue como antes. $\square$

Segue que $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ é reflexivo. Sabemos ainda que em $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ convergência fraca implica convergência pontual a menos de subsequência.

Note que o espaço $L^{p_*}(\mathbb{R}^N; V)$, com a norma definida por $\|u\|_{p_*,V} := \left(\int_{\mathbb{R}^N} V(|y|)|u|^{p_*} dx\right)^{\frac{1}{p_*}}$, é uniformemente convexo, isso segue direto do fato conhecido de que $L^p(\mathbb{R}^N)$ é uniformemente convexo. Sabemos também que convergência fraca implica convergência pontual a menos de subsequência.

Defina o espaço de Banach

$$W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V) := D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap L^{p_*}(\mathbb{R}^N;V)$$

com a norma definida por $\|u\| := \left(\|u\|_{1,p}^p + \|u\|_{p_*,V}^p\right)^{\frac{1}{p}}$. No caso em que $V \equiv 1$ denotaremos este espaço simplemente por $W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N)$.

Proposição 1.2 *$W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V)$ é uniformemente convexo.*

Demonstração: Em [2], vemos que $D^{1,p}(\mathbb{R}^N)\times L^{p_*}(\mathbb{R}^N;V)$ com a norma definida por $\|(u,v)\| = \left(\|u\|_{1,p}^p + \|v\|_{p_*,V}^p\right)^{\frac{1}{p}}$ é uniformemente convexo.

Defina a aplicação $P : u \in W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V) \mapsto (u,u) \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times L^{p_*}(\mathbb{R}^N;V)$. Note que P é uma isometria linear e $P(W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V))$ é um subespaço fechado de $D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \times L^{p_*}(\mathbb{R}^N;V)$. Neste caso, [21] garante que $P(W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V))$ é uniformemente convexo e segue da isometria que $W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V)$ é uniformemente convexo. $\square$

Consequentemente $W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V)$ é reflexivo e da imersão contínua $W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V) \hookrightarrow D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ temos que convergência fraca implica convergência pontual a menos de subsequência.

Defina por fim o espaço

$$W_k^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V) := \left\{u \in W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V); u(y,z) = u(gy,z), \ \ \forall g \in O(k)\right\},$$

o qual é um subespaço fechado de $W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V)$. No caso especial em que $k = N$ denotaremos $W_N^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V) = W_r^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V)$ devido à simetria radial de suas funções.

Definição 1.3 *Uma* ***ação*** *de um grupo topológico G sobre um espaço de Banach X é uma aplicação contínua*

$$(g,u) \in G \times X \mapsto gu \in X$$

tal que

$$1 \cdot u = u$$

$$(gh)u = g(hu)$$

$$u \in X \mapsto gu \in X \text{ *é linear*}.$$

Uma ação é dita ***isométrica*** *quando para todo $g \in G$ e para todo $u \in X$ temos que*

$$\|gu\| = \|u\|.$$

O ***espaço de pontos invariantes*** *é definido por*

$$X_G := \{u \in X : \ gu = u, \ \forall g \in G\}.$$

Uma aplicação $\varphi : X \to \mathbb{R}$ é dita ***invariante sobre G*** *se*

$$\varphi \circ g = \varphi, \ \forall g \in G.$$

Obeteremos agora o Princípio da Criticalidade Simétrica.

Proposição 1.4 *Sejam X um espaço de Banach estritamente convexo e reflexivo, uma ação isométrica de um grupo topológico G sobre X e $I : X_G \to \mathbb{R}$ uma aplicação $C^1(X_G; \mathbb{R})$. Seja $T : X_G \to X'$ uma aplicação tal que $T(u)|_{X'_G} = I'(u)$ e $T(u)$ é invariante sobre G. Se $u \in X_G$ é um ponto crítico de I, então $T(u) = 0$.*

Demonstração:

Suponha, por absurdo, que exista $u_0 \in X_G$ tal que $I'(u_0) = 0$ e $T(u_0) \neq 0$.

Definimos a aplicação dualidade $J : X \to \mathcal{P}(X')$ por

$$J(u) := \{\phi \in X'; \langle \phi, u\rangle = \|u\|^2, \|\phi\|_* = \|u\|\}.$$

Como X é estritamente convexo, temos que se $u_1 \neq u_2$ em X, então $J(u_1) \cap J(u_2) = \emptyset$, ou seja, J é injetiva, veja [29] Proposição 1. Sendo X reflexivo, Browder garante em [23] (veja Teorema A.13), que dado $\phi \in X'$ existe $u \in X$ tal que $\phi \in J(u)$. Neste caso, temos a seguinte propriedade

$$\forall \phi \in X', \ \exists! \ u \in X \text{ tal que } \langle \phi, u\rangle = \|u\|^2 \text{ e } \|\phi\|_* = \|u\|. \tag{1.2}$$

Com isso, para $T(u_0) \in X'$ existe um único $\tilde{u} \in X$ tal que $\langle T(u_0), \tilde{u}\rangle = \|\tilde{u}\|^2$ e $\|T(u_0)\|_* = \|\tilde{u}\|$. Da invariância de $T(u_0)$ sobre G e da isometria da ação de grupo temos que para todo $v \in X$

$$\langle T(u_0), gv\rangle = \langle T(u_0), v\rangle \text{ para todo } g \in G,$$

e

$$\|g\tilde{u}\| = \|\tilde{u}\| \text{ para todo } g \in G.$$

Daí,

(*i*) $\langle T(u_0), g\tilde{u}\rangle = \langle T(u_0), \tilde{u}\rangle = \|\tilde{u}\|^2 = \|g\tilde{u}\|^2$ para todo $g \in G$;

(*ii*) $\|T(u_0)\|_* = \|\tilde{u}\| = \|g\tilde{u}\|$ para todo $g \in G$.

Logo, $g\tilde{u}$ também satisfaz a propriedade (1.2) e pela unicidade $\tilde{u} = g\tilde{u}$ para todo $g \in G$, ou seja, $\tilde{u} \in X_G$. Daí, $\|\tilde{u}\|^2 = \langle T(u_0), \tilde{u}\rangle = \langle I'(u_0), \tilde{u}\rangle = 0$ e portanto $\|T(u_0)\|_* = \|\tilde{u}\| = 0$ o que contradiz o suposto inicialmente. □

Defina funcional $I : W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V) \to \mathbb{R}$ por

$$I(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + V(|y|)|u|^{p_*} dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx.$$

De (f_{p^*}) temos que $I \in C^1(W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V); \mathbb{R})$ com derivada de Fréchet em $u \in W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V)$ dada por

$$\langle I'(u), h\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla h \ + V(|y|)|u|^{p_*} uh \, dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)h \, dx.$$

A proposição a seguir é obtido seguindo as ideias de Boccardo e Murat em [19] e de Ghoussoub e Yuan em [31] (veja também [6] e [40]).

Proposição 1.5 *Seja* $\{u_n\} \subset W_k^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V)$ *uma sequência limitada tal que* $I'(u_n) \to 0$. *Se* $u_n \rightharpoonup u$ *em* $W_k^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V)$, *então, a menos de subsequência,* $\nabla u_n \to \nabla u$ *q.s em* $\mathbb{R}^N$.

Demonstração: Como $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V)$, então $u_n \to u$ q.s em $\mathbb{R}^N$, a menos de subsequência. Seja $e_n := (|\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u)\cdot\nabla(u_n - u)$ e note que, pelo Lema A.6, $e_n \geq 0$.

Para cada $\varepsilon \in \mathbb{N}$ definimos a função $\tau_\varepsilon : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\tau_\varepsilon(s) = \begin{cases} s, & \text{se } |s| \leq \varepsilon, \\ \varepsilon s/|s|, & \text{se } |s| > \varepsilon. \end{cases}$$

Note que

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(|y|)|\tau_\varepsilon(u_n - u)|^{p_*}dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} V(|y|)|u_n - u|^{p_*}dx < \infty,$$

daí, $\tau_\varepsilon(u_n - u) \in L^{p_*}(\mathbb{R}^N;V)$.

Pela regra da cadeia em [32] temos que

$$\nabla\tau_\varepsilon(u_n - u) = \begin{cases} \nabla(u_n - u), & \text{se } |u_n - u| \leq \varepsilon, \\ 0, & \text{se } |u_n - u| > \varepsilon. \end{cases}$$

Daí, $\nabla\tau_\varepsilon(u_n - u) \in L^p(\mathbb{R}^N)$.

É facil ver que $\tau_\varepsilon(u_n - u)(gy, z) = \tau_\varepsilon(u_n - u)(y, z),\ \forall g \in O(k)$. Logo $\tau_\varepsilon(u_n - u) \in W_k^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V)$.

Da desigualdade de Hölder temos que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} e_n(x)dx\right| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right|^{\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla(u_n - u)|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}$$

Usando a desigualdade de Hölder e a desigualdade $(a+b)^r \leq 2^{r-1}(a^r + b^r)$ na primeira integral do lado direito obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left||\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\right|^{\frac{p}{p-1}} dx \leq 2^{\frac{p}{p-1}-1} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^p + |\nabla u|^p dx$$

Com isso, da limitação de $\{u_n\}$ em $W_k^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V)$, temos $\{e_n\}$ é limitada em $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ com $\operatorname{supp}\varphi \subset B_{m+1}$, $0 \leq \varphi \leq 1$ e $\varphi|_{\operatorname{supp} B_m} \equiv 1$. Sejam

$$M_\ell := \{x \in \mathbb{R}^N; |u(x)| > \ell\} \quad \text{e} \quad m_\ell := \{x \in \mathbb{R}^N; |u(x)| \leq \ell\},$$

daí,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \varphi e_n^{\frac{1}{p}} dx = \int_{M_\ell} \varphi e_n^{\frac{1}{p}} dx + \int_{m_\ell} \varphi e_n^{\frac{1}{p}} dx \tag{1.3}$$

Da desigualdade de Hölder e da limitação de $\{e_n\}$ em $L^1(\mathbb{R}^N)$ temos que

$$\begin{aligned}
\int_{M_\ell} \varphi e_n^{\frac{1}{p}} dx &\leq \left(\int_{M_\ell} e_n dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{M_\ell} \varphi^{\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} e_n dx\right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{M_\ell \cap B_{m+1}} \varphi^{\frac{p}{p-1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq C \left(\int_{M_\ell \cap B_{m+1}} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \leq C \left(\int_{M_\ell \cap B_{m+1}} \frac{|u|}{\ell} dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq C \left(\left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{p^*}}{\ell^{p^*}} dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \left(\int_{B_{m+1}}\right)^{\frac{p^*-1}{p^*}}\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq \frac{C}{\ell^{\frac{p-1}{p}}},
\end{aligned} \tag{1.4}$$

onde C não depende nem de ℓ e nem de n.

Sejam

$$M_{n,\varepsilon} := \{x \in \mathbb{R}^N;\ |u_n(x) - u(x)| \geq \varepsilon\} \quad \text{e} \quad m_{n,\varepsilon} := \{x \in \mathbb{R}^N;\ |u_n(x) - u(x)| < \varepsilon\},$$

daí,

$$\int_{m_\ell} \varphi e_n^{\frac{1}{p}} dx = \int_{m_\ell \cap m_{n,\varepsilon}} \varphi e_n^{\frac{1}{p}} dx + \int_{m_\ell \cap M_{n,\varepsilon}} \varphi e_n^{\frac{1}{p}} dx. \tag{1.5}$$

Da desigualdade de Hölder e da limitação de $\{e_n\}$ em $L^1(\mathbb{R}^N)$ temos que

$$
\begin{aligned}
\int_{m_\ell \cap M_{n,\varepsilon}} \varphi e_n^{\frac{1}{p}} dx &\leq \left(\int_{m_\ell \cap M_{n,\varepsilon}} e_n dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{m_\ell \cap M_{n,\varepsilon}} \varphi^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq C \left(\int_{m_\ell \cap M_{n,\varepsilon} \cap B_{m+1}} \varphi^{\frac{p}{p-1}} dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq C |M_{n,\varepsilon} \cap B_{m+1}|^{\frac{p-1}{p}}
\end{aligned}
$$

Como $|B_{m+1}| < +\infty$ e $u_n \to u$ q.s em $\mathbb{R}^N$, pelo Teorema de Ergoroff, $\{u_n|_{B_{m+1}}\}$ converge em medida para u. Daí, existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$, então

$$
\left| \left\{ x \in \mathbb{R}^N;\ |u_n(x) - u(x)| \geq \frac{\varepsilon}{2} \cap B_{m+1} \right\} \right| < \frac{\varepsilon}{2},
$$

daí,

$$
|M_{n,\varepsilon} \cap B_{m+1}| < \frac{\varepsilon}{2} < \varepsilon,\ \forall n \geq n_0.
$$

Assim,

$$
\limsup_{n \to +\infty} \int_{m_\ell \cap M_{n,\varepsilon}} \varphi e_n^{\frac{1}{p}} dx \leq C \varepsilon^{\frac{p-1}{p}}. \tag{1.6}
$$

Por outro lado,

$$
\begin{aligned}
\int_{m_\ell \cap m_{n,\varepsilon}} \varphi e_n^{\frac{1}{p}} dx &= \int_{m_\ell \cap m_{n,\varepsilon} \cap B_{m+1}} \varphi e_n^{\frac{1}{p}} dx \\
&\leq \left(\int_{m_\ell \cap m_{n,\varepsilon} \cap B_{m+1}} \varphi e_n dx \right)^{\frac{1}{p}} \left(\int_{m_\ell \cap m_{n,\varepsilon} \cap B_{m+1}} \varphi dx \right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq C \left(\int_{m_\ell \cap m_{n,\varepsilon} \cap B_{m+1}} \varphi e_n dx \right)^{\frac{1}{p}}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
&= C\left(\int_{m_\ell \cap m_{n,\varepsilon}\cap B_{m+1}} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla(u_n - u)\varphi dx\right.\\
&\left. - \int_{m_\ell \cap m_{n,\varepsilon}\cap B_{m+1}} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla(u_n - u)\varphi dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&= C\left(\int_{m_\ell \cap m_{n,\varepsilon}\cap B_{m+1}} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla\tau_\varepsilon(u_n - u)\varphi dx\right.\\
&\left.\int_{\mathbb{R}^N} -|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\tau_\varepsilon(u_n - u)\varphi dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq C\left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla\tau_\varepsilon(u_n - u)\varphi dx\right.\\
&\left. - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\tau_\varepsilon(u_n - u)\varphi dx\right)^{\frac{1}{p}}\\
&.
\end{aligned} \tag{1.7}
$$

Note que o funcional $H : W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V) \to \mathbb{R}$ definido por

$$\langle H, w\rangle := \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla w\, \varphi\, dx$$

é limitado, daí, como $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V)$, temos que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\tau_\varepsilon(u_n - u)\varphi dx\right| \leq |\langle H, u_n - u\rangle| \to 0, \tag{1.8}$$

quando $n \to +\infty$.

Também temos que,

$$
\begin{aligned}
&\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla \tau_\varepsilon(u_n - u)\varphi dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla(\tau_\varepsilon(u_n-u)\varphi)dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla\varphi\, \tau_\varepsilon(u_n-u)dx.
\end{aligned} \tag{1.9}
$$

Da desigualdade de Hölder e da limitação de $\{u_n\}$ e como $\tau_\varepsilon \leq \varepsilon$ temos que

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla\varphi\, \tau_\varepsilon(u_n-u)dx\right| \leq \varepsilon \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-1}|\nabla\varphi|dx \\
&\leq \|\nabla u_n\|_p^{p-1} \|\nabla\varphi\|_p\, \varepsilon \leq C\varepsilon
\end{aligned} \tag{1.10}
$$

Como $I'(u_n) \to 0$, $\{\tau_\varepsilon(u_n-u)\}$ é limitada, $\tau_\varepsilon \leq \varepsilon$ e da desigualdade de Hölder temos que

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla(\tau_\varepsilon(u_n-u)\varphi)dx\right| \\
&= \left|\langle I'(u_n), \varphi\tau_\varepsilon(u_n-u)\rangle - \int_{\mathbb{R}^N} V(|y|)|u_n|^{p_*-2}u_n\varphi\tau_\varepsilon(u_n-u)dx\right. \\
&\left.+ \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*-2}u_n\varphi\tau_\varepsilon(u_n-u)dx\right| \\
&\leq |\langle I'(u_n), \varphi\tau_\varepsilon(u_n-u)\rangle| + \varepsilon\left(\int_{\mathbb{R}^N} V(|y|)|u_n|^{p_*-1}|\varphi|dx + \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*-1}|\varphi|dx\right) \\
&\leq o(1) + C\varepsilon.
\end{aligned} \tag{1.11}
$$

Logo, tomando limite superior em (1.9), usando (1.10) e (1.11) temos que

$$
\limsup_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla\tau_\varepsilon(u_n-u)\varphi dx \leq C\varepsilon. \tag{1.12}
$$

Do mesmo modo, passando o limite superior em (1.7), usando (1.8) e (1.12) temos que

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{m_\ell\cap m_{n,\varepsilon}}\varphi e_n^{\frac{1}{p}}dx \leq C\varepsilon. \tag{1.13}$$

Passando o limite superior em (1.5), usando (1.6) e (1.13) temos que

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{m_\ell}\varphi e_n^{\frac{1}{p}}dx \leq o(\varepsilon). \tag{1.14}$$

Substituindo (1.4) e (1.14) em (1.3) temos que

$$\limsup_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\varphi e_n^{\frac{1}{p}}dx \leq \frac{C}{\ell^{\frac{p-1}{p}}}+o(\varepsilon). \tag{1.15}$$

Fazendo $\varepsilon\to 0$ e $\ell\to+\infty$ temos que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{B_m} e_n^{\frac{1}{p}}dx = \lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N}\varphi e_n^{\frac{1}{p}}dx \to 0,$$

ou seja, $e_n^{\frac{1}{p}}\to 0$ em $L^1(B_m)$.

Se $p\geq 2$, então do Lema A.6

$$\int_{B_m}|\nabla u_n-\nabla u|dx \leq \int_{B_m} e_n^{\frac{1}{p}}dx \to 0,$$

daí, $\nabla u_n\to\nabla u$ q.s em B_m.

Se $1<p<2$, então tome $s=\frac{p^2-p+2}{p^2}$, $t=\frac{1}{sp}$ e note que $s>1$ e $t>0$. Do Lema A.6 e da desigualdade de Hölder

$$
\begin{aligned}
\int_{B_m} |\nabla u_n - \nabla u|^{2t} dx &\leq \int_{B_m} e_n^t (|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{(2-p)t} dx \\
&\leq \left(\int_{B_m} e_n^{st} \right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_{B_m} (|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{(2-p)ts}{s-1}} \right)^{\frac{s-1}{s}} \\
&= \left(\int_{B_m} e_n^{\frac{1}{p}} \right)^{\frac{1}{s}} \left(\int_{B_m} (|\nabla u_n| + |\nabla u|)^{\frac{(2-p)ts}{s-1}} \right)^{p} \to 0.
\end{aligned}
$$

quando $n \to +\infty$. Daí, $|\nabla u_n - \nabla u|^{2t} \to 0$ em $L^1(B_m)$, portanto, a menos de subsequência, $\nabla u_n \to \nabla u$ q.s em B_m.

Logo, tomando uma subsequência diagonal,

$$\nabla u_n \to \nabla u \text{ q.s em } \mathbb{R}^N.$$

□

1.2 Um caso radial simples

Nesta seção estudaremos a existência de solução fraca para o caso particular do problema (1.1) em que $k = N$ e $s = p$, ou seja, o problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u + V(|x|)|u|^{p-2}u = f(u) \\ u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}), \ \ 1 < p < N \end{cases} \tag{1.16}$$

O caso mais simples no qual nossos resultados são válidos é dado pelo problema

$$\begin{cases} -\Delta_p u + \dfrac{A}{|x|^\alpha}|u|^{p-2}u = |u|^{m-2}u \\ u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N; \mathbb{R}), \ \ 1 < p < N. \end{cases} \tag{1.17}$$

Neste caso, na próxima seção, estudaremos a não existência de solução clássica deste último problema.

1.2.1 Identidade de Pohožaev e resultados de não-existência

Através de identidades integrais provaremos o resultado de não-existência para o problema (1.17) da introdução.

Lema 1.6 *Sejam $f \in C^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ e $u \in C^2(\mathbb{R}^N; \mathbb{R})$ uma solução clássica para a equação*

$$-\Delta_p u + \frac{A}{|x|^\alpha}|u|^{p-2}u = f(u) \quad \textit{em } \mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \ \ 1 < p < N. \tag{1.18}$$

Seja $F(s) := \int_0^s f(t)dt$, $\forall s \in \mathbb{R}$. Se

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + \frac{|u|^p}{|x|^\alpha} + |F(u)|dx < \infty, \tag{1.19}$$

então

$$\frac{N-p}{p}\int_{\mathbb{R}^N}|\nabla u|^p dx + \frac{N-\alpha}{p}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{A|u|^p}{|x|^\alpha}dx = N\int_{\mathbb{R}^N}F(u)dx. \tag{1.20}$$

Demonstração: Sabemos que as seguintes identidades são válidas

$$(x\cdot\nabla u)\Delta_p u = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u(x\cdot\nabla u) - \frac{1}{p}|\nabla u|^p x\right) + \frac{N-p}{p}|\nabla u|^p;$$

$$(x\cdot\nabla u)\frac{A|u|^{p-2}u}{|x|^\alpha} = \operatorname{div}\left(\frac{A|u|^p}{p|x|^\alpha}x\right) - \frac{N-\alpha}{p}\frac{A|u|^p}{|x|^\alpha};$$

$$(x\cdot\nabla u)f(u) = \operatorname{div}\left(F(u)x\right) - NF(u).$$

Para cada $R_2 > R_1 > 0$, multiplicando a equação (1.18) por $(x\cdot\nabla u)$ e aplicando o Teorema da Divergência sobre o anel $\Omega := \Omega_{R_1,R_2} := B_{R_2}\setminus B_{R_1}$, nós obtemos

$$-\int_{\partial\Omega}|\nabla u|^{p-2}(x\cdot\nabla u)(\nabla u\cdot\nu)d\sigma + \frac{1}{p}\int_{\partial\Omega}\left(|\nabla u|^p + \frac{A|u|^p}{|x|^\alpha}\right)(x\cdot\nu)d\sigma - \int_{\partial\Omega}F(u)(x\cdot\nu)d\sigma$$

$$= \frac{N-p}{p}\int_{\Omega}|\nabla u|^p dx + \frac{N-\alpha}{p}\int_{\Omega}\frac{A|u|^p}{|x|^\alpha}dx - N\int_{\Omega}F(u)dx \tag{1.21}$$

onde $\nu(x)$ é o vetor normal apontando para fora de $\partial\Omega$ em x e $d\sigma$ é a medida $(N-1)-$dimensional de $\partial\Omega$. Como $\partial\Omega = \partial B_{R_1}\cup\partial B_{R_2}$ temos que $\nu(x) = (-1)^i\frac{x}{R_i}$ em ∂B_{R_i}, $i = 1,2$. Então,

$$\left|\int_{\partial B_{R_i}}|\nabla u|^{p-2}(x\cdot\nabla u)(\nabla u\cdot\nu)d\sigma\right| \le \frac{1}{R_i}\int_{\partial B_{R_i}}|\nabla u|^{p-2}(x\cdot\nabla u)^2 d\sigma \le R_i\int_{\partial B_{R_i}}|\nabla u|^p d\sigma; \tag{1.22}$$

$$\left|\int_{\partial B_{R_i}}\left(|\nabla u|^p + \frac{A|u|^p}{|x|^\alpha}\right)(x\cdot\nu)d\sigma\right| \le R_i\int_{\partial B_{R_i}}|\nabla u|^p + \frac{A|u|^p}{|x|^\alpha}d\sigma; \tag{1.23}$$

$$\left|\int_{\partial B_{R_i}}F(u)(x\cdot\nu)d\sigma\right| \le R_i\int_{\partial B_{R_i}}|F(u)|d\sigma, \tag{1.24}$$

para $i = 1,2$.

Afirmação 1 *Existe uma sequência $R_{1,n} \to 0$, $0 < R_{1,n} < 1$ tal que*

$$R_{1,n} \int_{\partial B_{R_{1,n}}} |\nabla u|^p + \frac{|u|^p}{|x|^\alpha} + |F(u)| d\sigma \to 0.$$

Assim, de (1.22)-(1.24), temos que

$$\left| - \int_{\partial B_{R_{1,n}}} |\nabla u|^{p-2}(x \cdot \nabla u)(\nabla u \cdot \nu) d\sigma + \frac{1}{p} \int_{\partial B_{R_{1,n}}} \left(|\nabla u|^p + \frac{A|u|^p}{|x|^\alpha} \right) (x \cdot \nu) d\sigma \right.$$

$$\left. - \int_{\partial B_{R_{1,n}}} F(u)(x \cdot \nu) d\sigma \right|$$

$$\leq C R_{1,n} \int_{\partial B_{R_{1,n}}} |\nabla u|^p + \frac{|u|^p}{|x|^\alpha} + |F(u)| d\sigma \to 0.$$

Com isso, fazendo $R_1 := R_{1,n}$ em (1.21) e passando o limite, obtemos

$$- \int_{\partial B_{R_2}} |\nabla u|^{p-2}(x \cdot \nabla u)(\nabla u \cdot \nu) d\sigma + \frac{1}{p} \int_{\partial B_{R_2}} \left(|\nabla u|^p + \frac{A|u|^p}{|x|^\alpha} \right) (x \cdot \nu) d\sigma - \int_{\partial B_{R_2}} F(u)(x \cdot \nu) d\sigma$$

$$= \frac{N-p}{p} \int_{B_{R_2}} |\nabla u|^p dx + \frac{N-\alpha}{p} \int_{B_{R_2}} \frac{A|u|^p}{|x|^\alpha} dx - N \int_{B_{R_2}} F(u) dx. \qquad (1.25)$$

Para concluir, assumiremos a seguinte afirmação

Afirmação 2 *Existe uma sequência $R_{2,n} \to \infty$, $R_{2,n} > 1$ tal que*

$$R_{2,n} \int_{\partial B_{R_{2,n}}} |\nabla u|^p + \frac{|u|^p}{|x|^\alpha} + |F(u)| d\sigma \to 0.$$

Com isso, fazendo $R_2 := R_{2,n}$ em (1.25), das estimativas (1.22)-(1.24) e passando o limite, obtemos que

$$\frac{N-p}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx + \frac{N-\alpha}{p} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{A|u|^p}{|x|^\alpha} dx = N \int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx.$$

□

Demostração da Afirmação 1: Defina

$$S(r) := \int_{\partial B_r} |\nabla u|^p + \frac{|u|^p}{|x|^\alpha} + |F(u)| d\sigma$$

e note que

$$\int_0^\infty S(r)dr = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + \frac{|u|^p}{|x|^\alpha} + |F(u)| dx < \infty.$$

Seja $g : R \in (0,\infty) \mapsto \inf_{0<r\leq R} rS(r) \in \mathbb{R}$. Temos que g é decrescente e $g(R) \geq 0,\ \forall R \in (0,+\infty)$, daí, $\lim_{R\to 0^+} g(R) = \sup_{R>0} g(R) \geq 0$.

Se $\lim_{R\to 0^+} g(R) > 0$, então existem $R_0 > 0$ e $\lambda > 0$ tais que $g(R_0) > \lambda$. Daí,

$$\lambda < g(R_0) \leq rS(r), \forall r \leq R_0 \Rightarrow S(r) \geq \frac{\lambda}{r}, \forall r \leq R_0.$$

Então,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + \frac{|u|^p}{|x|^\alpha} + |F(u)| dx \geq \int_0^{R_0} S(r)dr \geq \int_0^{R_0} \frac{\lambda}{r} dr = \infty,$$

o que é um absurdo, portanto $\lim_{R\to 0^+} g(R) = 0$.

Neste caso, $g(R) = 0,\ \forall R > 0$, ou seja, $\inf_{0<r\leq R} rS(r) = 0,\ \forall R > 0$. Com isso, para cada $n \in \mathbb{N}$, tome $R = \frac{1}{n}$. Então, como $\inf_{0<r\leq\frac{1}{n}} rS(r) = 0$, existe $0 < r_n \leq \frac{1}{n}$ tal que $r_n S(r_n) < \frac{1}{n}$, portanto $r_n \to 0^+$ e $r_n S(r_n) \to 0$.

□

A demonstração da Afirmação 2 segue de forma análoga, bastando agora definir a função $g(R) = \inf_{R<r} rS(r) \in \mathbb{R}$, notar que $g(R)$ é crescente e concluir que $\lim_{R\to+\infty} g(R) = 0$.

Lema 1.7 *Seja $u \in C^2(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \mathbb{R})$ uma solução clássica da equação*

$$-\Delta_p u + \frac{A|u|^{p-2}u}{|x|^\alpha} = |u|^{m-2}u \text{ em } \mathbb{R}^N \setminus \{0\}, \quad N > p > 1. \tag{1.26}$$

Se $u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N, V) \cap L^m(\mathbb{R}^N)$*, então*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^p + \frac{A|u|^p}{|x|^\alpha} \right) dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^m dx. \tag{1.27}$$

Demonstração: Multiplicando (1.26) por u, usando a identidade $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}u\nabla u) = u\Delta_p u + |\nabla u|^p$ e aplicando o Teorema da Divergência no anel $\Omega = B_{R_2} \setminus \bar{B}_{R_1}$, temos que

$$\frac{1}{R_1}\int_{\partial B_{R_1}} |\nabla u|^{p-2}u(\nabla u \cdot x)d\sigma - \frac{1}{R_2}\int_{\partial B_{R_2}} |\nabla u|^{p-2}u(\nabla u \cdot x)d\sigma$$

$$+ \int_\Omega \left(|\nabla u|^p + \frac{A|u|^p}{|x|^\alpha} \right) dx = \int_\Omega |u|^m dx.$$

Como $u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, então $u \in L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ e $|\nabla u|^{p-1} \in L^{p'}(\mathbb{R}^N)$. Usando a desigualdade de Hölder generalizada, onde $\frac{1}{p^*} + \frac{1}{p'} + \frac{1}{N} = 1$, temos que

$$\left| \frac{1}{R_i}\int_{\partial B_{R_i}} |\nabla u|^{p-2}u(\nabla u \cdot x)d\sigma \right| \le \int_{\partial B_{R_i}} |\nabla u|^{p-1}|u|d\sigma$$

$$\le \left(\int_{\partial B_{R_i}} |\nabla u|^p d\sigma\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\partial B_{R_i}} |u|^{p^*} d\sigma\right)^{\frac{1}{p^*}} \left(\int_{\partial B_{R_i}} d\sigma\right)^{\frac{1}{N}}$$

$$= N\omega_N R_i^{\frac{N-1}{N}} \left(\int_{\partial B_{R_i}} |\nabla u|^p d\sigma\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\partial B_{R_i}} |u|^{p^*} d\sigma\right)^{\frac{1}{p^*}}$$

$$\le N\omega_N \left(R_i \int_{\partial B_{R_i}} |\nabla u|^p + |u|^{p^*} d\sigma \right)^{\frac{1}{p^*}+\frac{1}{p'}}.$$

Assim como na Afirmação 1, exitem sequências $R_{1,n} \to 0^+$ e $R_{2,n} \to \infty$ tais que

$$R_{i,n}\int_{\partial B_{R_i}} |\nabla u|^p + |u|^{p^*} d\sigma \to 0, \ \ i = 1, 2$$

e daí segue o resultado. □

Teorema 1.8 *Se $\alpha \in (0,p)$ e $m \notin (p_\alpha, p^*)$, ou $\alpha = p$ e $m \neq p^*$, ou $\alpha \in (p,N)$ e $m \notin (p^*, p_\alpha)$, ou $\alpha \geq N$ e $0 < m \leq p^*$, então a equação (1.26) não tem solução clássica $u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N, V) \cap L^m(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração: Supondo, por contradição, que u seja uma solução clássica $u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap L^p(\mathbb{R}^N, V) \cap L^m(\mathbb{R}^N)$. Neste caso, podemos aplicar o Lema 1.6 e o Lema 1.7. Assim, multiplicando a equação (1.27) por $-\frac{N}{m}$ e somando com a equação (1.20), obtemos

$$\left(\frac{N-p}{p} - \frac{N}{m}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx = \left(\frac{N}{m} - \frac{N-\alpha}{p}\right) \int_{\mathbb{R}^N} \frac{A|u|^p}{|x|^\alpha} dx.$$

Sendo $u \not\equiv 0$, temos que está última igualdade só ocorre quando

$$\left(\frac{N-p}{p} - \frac{N}{m}\right)\left(\frac{N}{m} - \frac{N-\alpha}{p}\right) \geq 0,$$

o que contradiz as hipóteses do Teorema. $\square$

1.2.2 Resultados de Existência

Teorema 1.9 *Sejam $V : [0,\infty) \to (0,\infty]$ uma função mensurável satisfazendo (V_1) e $f \in C^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$ satisfazendo (f_1). Suponha válidas (f_m) e (V_α) com $\alpha \in (0,p)$ e $m \in (p_\alpha^*, p^*)$, ou $\alpha \in (p,\infty)$ e $m \in (p^*, p_\alpha^*)$. Suponha ainda que ou V satisfaz (V_2) e f satisfaz (f_2), ou f satisfaz (f_3). Então o problema (1.16) tem uma solução radial não negativa $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N; V)$ no seguinte sentido*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla h + V(|x|)|u|^{p-2} u h dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(u) h dx, \;\; \forall h \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N; V). \tag{1.28}$$

Teorema 1.10 *Sejam $V : [0,\infty) \to (0,\infty]$ uma função mensurável satisfazendo (V_1) e $f \in C^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$ satisfazendo (f_1) e (f_4). Suponha válidas (f_m), (V_α) e (F_m) com $\alpha \in (0,p)$ e $m \in (p_\alpha^*, p^*)$, ou $\alpha \in (p,\infty)$ e $m \in (p^*, p_\alpha^*)$. Então o problema (1.16) admite infinitas soluções radiais $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N; V)$ no sentido da equação (1.28).*

Os Teoremas 1.9 e 1.10 serão provados na Seção 1.2.4 usando o Teorema do Passo da Montanha (Teorema A.10), o qual o leitor pode ver em [39] e [51].

1.2.3 Resultados de Imersão

Nesta seção estudaremos as imersões contínuas e compacta do espaço $W^{1,p}(\mathbb{R}^N;V)$ introduzido na Seção 1.1.

Proposição 1.11 $W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N;V) \hookrightarrow L^{p_\alpha^*}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração: Pela Proposição A.1, temos que existe $C_{N,p} > 0$ tal que para todo $u \in W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N;V)$

$$|u(x)| \leq C_{N,p}\|\nabla u\|_p |x|^{-\frac{N-p}{p}},\ q.s \text{ em } \mathbb{R}^N. \tag{1.29}$$

Neste caso,

$$\begin{aligned} |u(x)|^{p_\alpha^*} &= |u(x)|^p |u(x)|^{\frac{p\alpha}{N-p}} \\ &\leq C_{N,p}|u(x)|^p \|\nabla u\|_p^{\frac{p\alpha}{N-p}} |x|^{-\alpha} \\ &\leq A^{-1}C_{N,p}\|\nabla u\|_p^{\frac{p\alpha}{N-p}} V(|x|)|u(x)|^p,\ q.s \text{ em } \mathbb{R}^N. \end{aligned}$$

Daí,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p_\alpha^*} dx \leq C\|\nabla u\|_p^{\frac{p\alpha}{N-p}} \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)|u(x)|^p dx \leq C\|u\|^{\frac{p\alpha}{N-p}}\|u\|^p = C\|u\|^{p_\alpha^*},$$

e portanto $\|u\|_{p_\alpha^*} \leq C\|u\|$. □

Como $W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N;V) \hookrightarrow D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ e $W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N;V) \hookrightarrow L^{p_\alpha^*}(\mathbb{R}^N)$, temos que $W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N;V)(\mathbb{R}^N;V) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \cap L^{p_\alpha^*}(\mathbb{R}^N)$. Por interpolação, temos as seguintes imersões contínuas:

$$W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N;V) \hookrightarrow L^m(\mathbb{R}^N),\ \forall\alpha \in (0,p) \text{ e } \forall m \in [p_\alpha^*, p^*]. \tag{1.30}$$

$$W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N;V) \hookrightarrow L^m(\mathbb{R}^N),\ \forall\alpha \in (p,\infty) \text{ e } \forall m \in [p^*, p_\alpha^*]. \tag{1.31}$$

Proposição 1.12 *As imersões (1.30) e (1.31) são compactas para* $m \neq p_\alpha^*, p^*$.

Demonstração: Queremos aplicar o Lema de Compacidade de Strauss, Proposição A.3.

Seja $\{u_n\} \subset W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V)$ limitada e sejam $P(s) := |s|^m$, $Q(s) := |s|^{p^*} + |s|^{p_\alpha^*}$. Pela reflexividade, $u_n \rightharpoonup u$ em $W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V)$ a menos de subsequência e temos ainda que:

(i) $\displaystyle\lim_{|s|\to\infty} \frac{P(s)}{Q(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{P(s)}{Q(s)} = 0;$

(ii) $\displaystyle\lim_{|x|\to\infty} |u_n(x) - u(x)| = 0$ uniformemente com respeito a n;

(iii) $|u_n(x) - u(x)|^m \to 0$ q.s em $\mathbb{R}^N$;

(iv) $\displaystyle\sup_n \int_{\mathbb{R}^N} Q(u_n - u)dx < \infty.$

Em que, (ii) é devido a (1.29) e a limitação de $\{\|\nabla(u_n - u)\|_p\}$, (iii) segue, a menos de subsequência, da convergência fraca em $W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V)$ e por fim (iv) segue das imersões (1.30) e (1.31) e da limitação de $\{u_n\}$ em $W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V)$.

Então, pelo Lema de Compacidade de Strauss $u_n \to u$ em $L^m(\mathbb{R}^N)$. □

Proposição 1.13 *Se* $u \in W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V)$, *então existe* $C := C(N, \alpha, p, A) > 0$ *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_\alpha^*-1}|v|dx \leq C\|u\|^{p_\alpha^*-1}\|v\|, \ \forall v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N; V).$$

Demonstração: Usando a desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p_\alpha^*-1}|v|dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\frac{\alpha}{p}}|u|^{p_\alpha^*-1}\frac{|v|}{|x|^{\frac{\alpha}{p}}}dx \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\frac{\alpha p'}{p}}|u|^{p'(p_\alpha^*-1)}dx\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|v|^p}{|x|^\alpha}dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\frac{\alpha p'}{p}}|u|^{p'(p_\alpha^*-1)}dx\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} A^{-1}V(|x|)|v|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\frac{\alpha p'}{p}}|u|^{p'(p_\alpha^*-1)}dx\right)^{\frac{1}{p'}} \|v\|.
\end{aligned}$$

Note que, $p'(p_\alpha^* - 1) = p + \frac{p'p\alpha}{N-p}$. Usando (1.29) obtemos

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\frac{\alpha p'}{p}} |u|^{p'(p_\alpha^*-1)} dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^p}{|x|^\alpha} |x|^{\frac{\alpha p'}{p}+\alpha} |u|^{\frac{p'p\alpha}{N-p}} dx \\
&\le C \|\nabla u\|_p^{\frac{p'p\alpha}{N-p}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^p}{|x|^\alpha} |x|^{\alpha p'} |x|^{-\frac{N-p}{p}\frac{p'p\alpha}{N-p}} dx \\
&\le C \|\nabla u\|_p^{\frac{p'p\alpha}{N-p}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^p}{|x|^\alpha} dx \\
&\le A^{-1} C \|\nabla u\|_p^{\frac{p'p\alpha}{N-p}} \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)|u|^p dx \\
&\le C \|u\|_p^{\frac{p'p\alpha}{N-p}} \|u\|^p = C\|u\|^{p'(p_\alpha^*-1)},
\end{aligned}
$$

o que completa a demonstração. □

Proposição 1.14 *Se* $u \in W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V)$*, então existe* $C = C_{N,p} > 0$ *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*-1}|v| dx \le C\|u\|^{p^*-1}\|v\|, \ \forall v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N; V).$$

Demonstração: Decorre da desigualdade de Hölder e da imersão de Sobolev. □

Proposição 1.15 *Se* $u \in W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V)$*, então existe* $C = C_{N,\alpha,A,p} > 0$ *tal que para todo* $m \in [p_\alpha^*, p^*]$ *ou* $m \in [p^*, p_\alpha^*]$*, de acordo com que* $\alpha \in (0,p)$ *ou* $\alpha \in (p,\infty)$*, temos que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{m-1}|v| dx \le C\|u\|^{m-1}\|v\|, \ \forall v \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N; V).$$

Demonstração: Segue por interpolação das Proposições 1.13 e 1.14. □

Lema 1.16 *Assuma que* V *satisfaz* (V_2) *e seja* $F \in C^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *satisfazendo* (f_2)*. Então existe* $u \in W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V)$ *tal que* $\int_{\mathbb{R}} F(u) dx > 0$.

Demonstração: Veja em [11]. □

1.2.4 Demonstração dos Teoremas 1.9 e 1.10

Os Teoremas 1.9 e 1.10 serão obtidos como consequência dos lemas abaixo.

Defina o funcional $I : W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V) \to \mathbb{R}$ por

$$I(u) := \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u|^p + V(|x|)|u|^p)\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx, \ \ \forall u \in W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V).$$

De (f_m) e das imersões (1.30) e (1.31) obtemos que $I \in C^1(W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V); \mathbb{R})$ com derivada de Fréchet em $u \in W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V)$ dada por

$$\langle I'(u), h\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla h + V(|x|)|u|^{p-2}uhdx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)hdx \ \ \forall h \in W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V).$$

No seguinte lema obteremos, do Princípio da Criticalidade Simétrica, que os pontos críticos de I são soluções do problema (1.16).

Lema 1.17 *Todo ponto crítico de $I : W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V) \to \mathbb{R}$ satisfaz (1.28).*

Demonstração: Seja $u_0 \in W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V)$ um ponto crítico de I. Da Proposição 1.2 vimos que $W^{1,p}(\mathbb{R}^N; V)$ é uniformemente convexo, portanto é reflexivo e estritamente convexo. Definimos a ação topológica do grupo $O(N)$ sobre $W^{1,p}(\mathbb{R}^N; V)$ por $(g, u) \in O(N) \times W^{1,p}(\mathbb{R}^N; V) \mapsto gu := u \circ g \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N; V)$.

De (f_m) e da Proposição 1.15 podemos definir $T : W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V) \to (W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V))'$ por

$$\langle T(u), h\rangle := \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla h + V(|x|)|u|^{p-2}uhdx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)hdx.$$

Por construção $T(u)|_{(W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N;V))'} = I'(u)$. Fazendo mudança de variáveis, vemos que $T(u)$ é invariante por $O(N)$, ou seja, dado $h \in W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V)$

$$\langle T(u), h \circ g\rangle = \langle T(u), h\rangle \text{ para todo } g \in O(N).$$

Do mesmo modo, vemos que

$$\|u \circ g\| = \|u\| \text{ para todo } g \in O(N),$$

ou seja, a ação topológica é isométrica. Logo, do Princípio da Criticalidade Simétrica, Proposição 1.4, temos que $T(u_0) = 0$, isto é, u_0 satisfaz (1.28).

$\square$

Lema 1.18 *O funcional $I : W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V) \to \mathbb{R}$ satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Demonstração: Seja $\{u_n\} \subset W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V)$ tal que $\{I(u_n)\}$ é limitada e $I'(u_n) \to 0$. Devemos mostrar que $\{u_n\}$ é convergente em $W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V)$ a menos de subsequência.

Afirmação 3 *$\{u_n\}$ é limitada em $W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V)$.*

De fato, de (f_1) temos que

$$I(u_n) - \frac{1}{\gamma}\langle I'(u_n), u_n\rangle \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\gamma}\right)\|u_n\|^p .$$

Como $I'(u_n) \to 0$, a partir de algum $n \in \mathbb{N}$ temos que $\|I'(u_n)\| < 1$, daí, $|\langle I'(u_n), u_n\rangle| < \|u_n\|$. Por hipótese, existe $C > 0$ tal que $|I(u_n)| \leq C$. Com isso,

$$C + \frac{\|u_n\|}{\gamma} \geq I(u_n) - \frac{1}{\gamma}\langle I'(u_n), u_n\rangle \geq \left(\frac{1}{p} - \frac{1}{\gamma}\right)\|u_n\|^p \Rightarrow \frac{C}{\|u_n\|^p} + \frac{1}{\gamma\|u_n\|^{p-1}} \geq \frac{1}{p} - \frac{1}{\gamma} > 0.$$

Supondo que $\{u_n\}$ não fosse limitada, teríamos que, a menos de subsequência, $0 < \|u_n\| \to \infty$. Daí, aplicando o limite na desigualdade anterior obtemos que $0 < \frac{1}{p} - \frac{1}{\gamma} = 0$, um absurdo! Portanto temos o afirmado.

Neste caso, como $W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V)$ é reflexivo, pela Proposição 1.12 e pelo fato de convergência fraca implica convergência pontual a menos de subsequência em $W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V)$, temos que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V);$$

$$u_n \to u \text{ em } L^m(\mathbb{R}^N);$$

$$u_n(x) \to u(x) \text{ q.s em } \mathbb{R}^N.$$

Defina $N : W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V) \to (W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V))'$ por

$$\langle N(u), h\rangle := \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla h + V(|x|)|u|^{p-2}uhdx,$$

e $K : W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V) \to (W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V))'$ por

$$\langle K(u), h\rangle := \int_{\mathbb{R}^N} f(u)hdx.$$

Por ora, vamos assumir, sem demonstração, as três seguintes afirmações.

Afirmação 4 *A menos de subsequência, as seguintes convergências são válidas:*

$$K(u_n) \to K(u) \text{ em } (W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V))';$$

$$\langle K(u_n), h\rangle \to \langle K(u), h\rangle \text{ para todo } h \in W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V);$$

$$\langle K(u_n), u_n\rangle \to \langle K(u), u\rangle.$$

Afirmação 5 $\lim\limits_{n\to\infty} (\|u_n\|^p - \|u_n - u\|^p) = \|u\|^p$.

Afirmação 6 *A menos de subsequência, temos que*

$$\langle N(u_n), h\rangle \to \langle N(u), h\rangle \text{ para todo } h \in W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V).$$

Neste caso, como

$$\langle N(u_n), h\rangle - \langle K(u_n), h\rangle = \langle I'(u_n), h\rangle \to 0, \text{ para todo } h \in W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V),$$

das Afirmações 4 e 6, segue que $\langle I'(u), h\rangle = 0$ para todo $h \in W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V)$.

Assim, continuando a demonstração, do Lema 1.17, como u é ponto crítico de I temos que

$$0 = \langle I'(u), u\rangle = \|u\|^p - \langle K(u), u\rangle \Rightarrow \langle K(u), u\rangle = \|u\|^p.$$

Como isso, da Afirmação 4 e sabendo que $I'(u_n) \to 0$ e $\{u_n\}$ é limitada e , temos que

$$\|u_n\|^p = \langle I'(u_n), u_n\rangle + \langle K(u_n), u_n\rangle \to \langle K(u), u\rangle = \|u\|^p .$$

Por fim, da Afirmação 5, concluímos que

$$\|u_n - u\|^p = (\|u_n - u\|^p - \|u_n\|^p) + \|u_n\|^p \to 0.$$

$\square$

Demonstração da Afirmação 4: De (f_m), obtemos que o seguinte operador de Nemitskii associado a f,

$$f_\sharp : L^m(\mathbb{R}^N) \to L^{m'}(\mathbb{R}^N), \quad f_\sharp(u)(x) := f(u(x))$$

é contínuo. Assim, como $u_n \to u$ em $L^m(\mathbb{R}^N)$ temos que $f_\sharp(u_n) \to f_\sharp(u)$ em $L^{m'}(\mathbb{R}^N)$, em outras palavras, $\|f(u_n) - f(u)\|_{m'} \to 0$.

Por outro lado, usando a desigualdade de Hölder e a imersão contínua $W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V) \hookrightarrow L^m(\mathbb{R}^N)$, temos que para todo $h \in W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V)$

$$|\langle K(u_n) - K(u), h\rangle| \leq \int_{\mathbb{R}^N} |f(u_n) - f(u)|\,|h| dx \leq \|f(u_n) - f(u)\|_{m'} \|h\|_m \leq C\|f(u_n) - f(u)\|_{m'} \|h\| ,$$

daí, obtemos que $\|K(u_n) - K(u)\|_{(W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N;V))'} \leq C\|f(u_n) - f(u)\|_{m'} \to 0$ e $\langle K(u_n) - K(u), h\rangle \to 0$ para todo $h \in W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V)$, demonstrando assim as duas primeiras convergências desejadas.

Por fim, como $u_n \rightharpoonup u$ em $W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V)$ e $K(u_n) \to K(u)$ em $(W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V))'$ segue, da análise funcional, que $\langle K(u_n), u_n\rangle \to \langle K(u), u\rangle$. $\square$

Demonstração da Afirmação 5: Na notação do Lema A.4, defina $g_n(x) := V^{\frac{1}{p}}(|x|)u_n(x)$ e $g(x) := V^{\frac{1}{p}}(|x|)u(x)$. Com isso temos que

(i) $\{g_n\} \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ é limitada;

(ii) $g_n(x) \to g(x)$ q.s em $\mathbb{R}^N$ a menos de subsequência, onde (i) segue da limitação de $\{u_n\}$ em $W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N;V)$ e (ii) da convergência pontual de $\{u_n\}$ em $\mathbb{R}^N$. Portanto, pelo Lema A.4,

$$\lim_{n\to\infty}(\|u_n-u\|_{p,V}^p-\|u_n\|_{p,V}^p)=\|u\|_{p,V}^p\,. \tag{1.32}$$

Da Proposição 1.5 temos que $\nabla u_n \to \nabla u$ q.s em $\mathbb{R}^N$. Usando a notação do Lema A.4 definimos $g_n^i(x):=D_iu_n(x)$ e $g^i(x):=D_iu(x)$. Como antes, pelo Lema A.4 obtemos que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\|D_iu_n\|_p^p-\|D_iu_n-D_iu\|_p^p\right)=\|D_iu\|_p^p\,,\ \ \forall i=1,\cdots,N.$$

Sabemos que a norma definida por $\|u\|_S:=\left(\sum_{i=1}^N\|D_iu\|_p^p\right)^{\frac{1}{p}}$ é equivalente à norma $\|\cdot\|_{1,p}$. Somando o limite anterior com $i=1,\cdots,N$ temos que

$$\lim_{n\to\infty}(\|u_n\|_S^p-\|u_n-u\|_S^p)=\|u\|_S^p\,.$$

Pela equivalência das normas concluímos que

$$\lim_{n\to\infty}\left(\|u_n\|_{1,p}^p-\|u_n-u\|_{1,p}^p\right)=\|u\|_{1,p}^p\,. \tag{1.33}$$

Somando (1.32) e (1.33) obtemos o resultado. $\square$

Demonstração da Afirmação 6: Novamente usaremos o Lema A.4. Desta vez definiremos $g_n(x):=V^{\frac{1}{p'}}(|x|)|u_n(x)|^{p-2}u_n(x)$ e $g(x):=V^{\frac{1}{p'}}(|x|)|u(x)|^{p-2}u(x)$ e como antes, vemos que

(i) $\{g_n\}$ é limitada em $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$;

(ii) $g_n\to g$ q.s em $\mathbb{R}^N$.

Da Observação A.5, $g_n \rightharpoonup g$ em $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N}V^{\frac{1}{p'}}(|x|)|u_n|^{p-2}u_nhdx\to\int_{\mathbb{R}^N}V^{\frac{1}{p'}}(|x|)|u|^{p-2}uhdx,\ \ \forall h\in L^p(\mathbb{R}^N).$$

Em particular, dado $h \in L^p(\mathbb{R}^N; V)$, temos que $V^{\frac{1}{p}}(|\cdot|)h \in L^p(\mathbb{R}^N)$,daí,

$$\int_{\mathbb{R}^N} V^{\frac{1}{p'}}(|x|)|u_n|^{p-2}u_n V^{\frac{1}{p}}(|x|)hdx \to \int_{\mathbb{R}^N} V^{\frac{1}{p'}}(|x|)|u|^{p-2}uV^{\frac{1}{p}}(|x|)hdx.$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)|u_n|^{p-2}u_n hdx \to \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)|u|^{p-2}uhdx, \;\; \forall h \in L^p(\mathbb{R}^N; V). \tag{1.34}$$

Do mesmo modo, definindo $g_n^i := |\nabla u_n|^{p-2}D_i u_n$ e $g^i := |\nabla u|^{p-2}D_i u$, vemos que

(i) $\{g_n^i\}$ é limitada em $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ para todo $i = 1, \cdots, N$;

(ii) $g_n^i(x) \to g^i(x)$ q.s em $\mathbb{R}^N$ para todo $i = 1, \cdots, N$,

onde (i) segue da desigualdade

$$\left\|g_n^i\right\|_{p'}^{p'} = \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^{p-2}\,|D_i u_n|\right)^{p'} dx \le \int_{\mathbb{R}^N} \left(|\nabla u|^{p-2}|\nabla u|\right)^{p'} dx \le \|u_n\|^p\,,$$

e (ii) segue da Proposição 1.5.

Novamente, da Observação A.5, $g_n^i \rightharpoonup g^i$ em $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$ para todo $i = 1, \cdots, N$, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}D_i u_n v dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}D_i u_n v dx, \;\; \forall v \in L^p(\mathbb{R}^N).$$

Em particular, dado $h \in W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V)$, temos que $D_i h \in L^p(\mathbb{R}^N)$ para todo $i = 1, \cdots, N$, daí,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}D_i u_n D_i h dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}D_i u_n D_i h dx, \;\; \forall h \in W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V).$$

Somando este último limite com $i = 1, \cdots, N$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2}\nabla u_n \cdot \nabla h dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla h dx, \;\; \forall h \in W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V). \tag{1.35}$$

E finalmente, somando (1.34) e (1.35) temos o desejado. $\square$

Demonstração do Teorema 1.9: Vamos verificar que o funcional I possui a geometria do passo da montanha.

As imersões compactas (1.30) e (1.31) juntamente com (f_m) implicam que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx\right| \leq C\int_{\mathbb{R}^N} |u|^m dx \leq C\|u\|^m, \;\; \forall u \in W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N;V).$$

Com isso,

$$I(u) \geq \frac{1}{p}\|u\|^p - C\|u\|^m, \;\; \forall u \in W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N;V).$$

Portanto, como $m > p$, existem $\rho, \delta > 0$ tais que para todo $u \in W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N;V)$, com $\|u\| = \rho$ tem-se que $I(u) \geq \delta$. Agora, vejamos que sob as hipóteses (V_2) e (f_2) ou sob a hipótese (f_3) temos existe $\bar{u} \in W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N;V)$ tal que $\|\bar{u}\| > \rho$ e $I(\bar{u}) < 0$.

<u>1º caso:</u> Se valem (V_2) e (f_2).

Neste caso, pelo Lema 1.16, exite $u \in W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N;V)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx > 0$. Defina $u_n(x) := u\left(\frac{1}{\mu_n}x\right)$, onde $\{\mu_n\} \subset (\mu_0, \infty)$ é uma sequência satisfazendo (V_2) e $\mu_n \to \infty$.

Assim temos que $u_n \in W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N;V)$. De (V_α) e da mudança de variáveis $y = \frac{1}{\mu_n}x$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\|u_n\|^p &= \frac{1}{\mu_n^p}\int_{\mathbb{R}^N}\left|\nabla u\left(\frac{1}{\mu_n}x\right)\right|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)\left|u\left(\frac{1}{\mu_n}x\right)\right|^p dx \\
&= \mu_n^{N-p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(y)|^p dy + \mu_n^N\int_{\mathbb{R}^N} V(\mu_n|y|)\,|u(y)|^p dy \\
&\geq \mu_n^{N-p}\|u\|_{1,p}^p + \mu_n^{N-\alpha}A\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u|^p}{|y|^\alpha}dy \to \infty.
\end{aligned}$$

De (V_2) e fazendo a mesma mudança de variáveis obtemos ainda que

$$\begin{aligned}
I(u_n) &= \frac{1}{p}\mu_n^{N-p}\|u\|_{1,p}^p + \frac{1}{p}\mu_n^N\int_{\mathbb{R}^N} V(\mu_n|x|)|u|^p dx - \mu_n^N\int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx \\
&\leq \frac{1}{p}\mu_n^{N-p}\|u\|_{1,p}^p + \frac{B}{p}\mu_n^{N-\beta}\int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)|u|^p dx - \mu_n^N\int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx \to -\infty.
\end{aligned}$$

Logo, podemos tomar n suficientemente grande de modo que $\|u_n\| > \rho$ e $I(u_n) < 0$.

<u>2º caso:</u> Se apenas (f_3) ocorre.

De (f_3) e (f_1) temos que existe $\gamma > p$ tal que $0 < \gamma F(t) \leq F'(t)t$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Para $t \geq 1$, temos que $F'(t) > 0$, portanto F é crescente e bijetora, daí,

$$\frac{\gamma}{t} \leq \frac{F'(t)}{F(t)} \Rightarrow \int_1^s \frac{\gamma}{t} dt \leq \int_1^s \frac{F'(t)}{F(t)} dt \Rightarrow F(s) \geq F(1)s^\gamma, \ \ \forall s \geq 1.$$

Tome $u \in W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V)$ não negativo. Neste caso, para cada $\lambda > 1$ temos que

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} F(\lambda u)dx \ &= \int_{\lambda u \geq 1} F(\lambda u)dx + \int_{0 \leq \lambda u < 1} F(\lambda u)dx \geq \int_{\lambda u \geq 1} F(\lambda u)dx \\ &\geq \int_{\lambda u \geq 1} (\lambda u)^\gamma F(1)dx \geq F(1)\lambda^\gamma \int_{u \geq 1} u^\gamma dx. \end{aligned}$$

Como $\gamma > p$,

$$I(\lambda u) \leq \frac{\lambda^p}{p} \|u\|^p - F(1)\lambda^\gamma \int_{u \geq 1} u^\gamma dx \to -\infty.$$

Portanto, para $\lambda > 1$ suficientemente grande, $\|\lambda u\| > \rho$ e $I(\lambda u) < 0$.

Com isso, I possui a geometria do passo da montanha. Pelo Teorema do Passo da Montanha, Teorema A.10 do apêndice, existe uma sequência $\{u_n\} \subset W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V)$ tal que $I(u_n) \to c$ e $I'(u_n) \to 0$, onde $c > 0$ é o nível do passo da montanha. Pelo Lema 1.18, a menos de subsequência, $u_n \to u$ em $W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V)$. Como $I \in C^1(W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V); \mathbb{R})$, então $I'(u_n) \to I'(u)$ e $I(u_n) \to I(u)$. Daí, $I'(u) = 0$ e $u \neq 0$, pois caso contrário teríamos que $c = I(u) = 0$, uma contradição, ou seja, $u \in W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V)$ é ponto crítico não trivial de I. Do Lema 1.17, temos que u é solução radial do problema (1.16) no sentido da equação (1.28).

Resta mostrar que u é não negativa. Demonstramos até agora que, para cada $f \in C^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ satisfazendo as condições do Teorema 1.9, existe $u \in W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V)$ satisfazendo a equação (1.28). Com isso, defina

$$\tilde{f}(s) := \begin{cases} f(s), & s \geq 0, \\ 0, & s < 0. \end{cases}$$

De (f_m), temos que $f(0) = 0$, daí, $\tilde{f} \in C^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ e também satisfaz as hipóteses do Teorema 1.9. Com isso, existe $u \in W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V)$ solução da equação

$$-\Delta_p u + V(|x|)|u|^{p-2}u = \tilde{f},$$

no sentido de (1.28). Note que $\tilde{f}(u)u_- = 0$ q.s em $\mathbb{R}^N$, daí,

$$0 = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla u_- dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)|u|^{p-2}uu_- dx - \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}(u)u_- dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_-|^p dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)|u_-|^p dx = -\|u_-\|^p .$$

Portanto $u = u_+$. Por fim, observe que, para todo $h \in W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V)$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \tilde{f}(u)hdx = \int_{u\geq 0} f(u)hdx + \int_{u<0} f(u)hdx = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)hdx,$$

logo u também é solução de

$$-\Delta_p u + V(|x|)|u|^{p-2}u = f,$$

no sentido de (1.28). $\square$

Demonstração do Teorema 1.10: Aplicaremos o Teorema do Passo da Montanha Simétrico, Teorema A.11 do apêndice. Para isso precisamos verificar que I satisfaz as seguintes condições:

(i) $I(-u) = I(u)$;

(ii) Para todo subespaço não trivial de dimensão finita $Y \subset W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V)$ existe $R > 0$ tal que $I(u) \leq 0$ para todo $u \in Y$ com $\|u\| \geq R$.

Vemos que (i) segue de (f_4). Para (ii) vamos raciocinar por absurdo. Suponha que (ii) não ocorra, então existe subespaço $Y \subset W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V)$ não trivial de dimensão finita no qual podemos construir uma sequência $\{u_n\}$ tal que $\|u_n\| \to \infty$ e $I(u_n) > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como Y tem dimensão finita todas as suas normas são equivalentes. Neste caso e de (F_m) temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(u_n)dx \geq \eta \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^m dx \geq C \|u_n\|^m .$$

Sendo $m > p$, obtemos que

$$I(u_n) = \frac{1}{p}\|u_n\|^p - \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n)dx \geq \frac{1}{p}\|u_n\|^p - C\|u_n\|^m \to -\infty.$$

Portanto, existe n suficientemente grande tal que $I(u_n) < 0$, o que é uma contradição, logo (ii) é válido.

Dessa forma, o Teorema do Passo da Montanha Simétrico garante que I possui uma sequência ilimitada de valores críticos, a qual corresponde uma sequência de pontos críticos não triviais de I. Logo, pelo Lema 1.17, temos o desejado. $\square$

1.3 O caso cilíndrico

Nesta seção trabalharemos o caso particular do problema (1.1) em que $V(|y|) = |y|^{-s}$ e $f(u) = |u|^{m-2}u$, ou seja,

$$\begin{cases} -\Delta_p u + \dfrac{|u|^{p_*-2}u}{|y|^s} = |u|^{m-2}u \\ u \in W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V),\ u \geq 0. \end{cases} \tag{1.36}$$

onde $(y,z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{N-k},\ 2 \leq k < N$, $1 < p < N$, $0 < s \leq p$ e $p_*(s) = p_* = \frac{p(N-s)}{N-p}$. Iniciaremos com o estudo de não existência de solução clássica.

1.3.1 Identidade de Pohožaev e resultados de não existência

Nesta seção provaremos que não existem soluções clássicas para a equação

$$-\Delta_p u + \frac{|u|^{p_*-2}}{|y|^s} u = |u|^{m-2}u, \text{ em } (\mathbb{R}^k \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^{N-k}, \tag{1.37}$$

quando $m \neq p^*$. Mais precisamente temos o

Teorema 1.19 *Sejam* $2 \leq k < N$, $1 < p < N$, $0 < s < N - \frac{N-p}{p}$ *e* $s > \frac{N(k-p^*(k-1))}{N-p^*(k-1)}$, *quando* $N > kp$ *e* $1 < p < \frac{kN}{k+N(k-1)}$. *Seja ainda* $f \in C^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *satisfazendo* (f_1) *e* (f_3) *tal que* $f(u)u \in L^1(\mathbb{R}^N)$. *Se* $\gamma > p^*$ *em* (f_1), *então a equação*

$$-\Delta_p u + \frac{|u|^{p_*-2}}{|y|^s} u = f(u), \text{ em } (\mathbb{R}^k \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^{N-k} \tag{1.38}$$

não tem solução clássica $u \in C^2((\mathbb{R}^k \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^{N-k}) \cap D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap L^{p_*}(\mathbb{R}^N; V)$ *satisfazendo* $\nabla u \in L^q_{\mathrm{loc}}(\mathbb{R}^N)$ *para* $q > \max\{q_k, q_s, q_{s,k}\}$, *onde*

$$q_k := \frac{pk}{k-1},\ \ q_s = \frac{p_*(p-1)}{p_*-1} \ \text{ e } q_{s,k} = \frac{kp(N-s)(p-1)}{kp(N-s) - k(N-p) - N(p-s)}$$

Observação 1.20 *Note que a condição* $s < N - \frac{N-p}{p}$ *é exigida para que se tenha* $p_* > 1$. *A condição* $q > q_s$ *para que se tenha* $\frac{p-1}{q} + \frac{1}{p_*} < 1$, *assim as duas primeiras parcelas são expoentes* *da desigualdade de Hölder generalizada, necessária no Lema 1.23 a seguir . A condição* $s > \frac{N(k-p^*(k-1))}{N-p^*(k-1)}$*, quando* $N > kp$ *e* $1 < p < \frac{kN}{k+N(k-1)}$ *é exigida para que se tenha* $q_{s,k} > 0$ *e* $0 < \frac{N(k-p^*(k-1))}{N-p^*(k-1)} < N - \frac{N-p}{p}$ *.*

Corolário 1.21 *Sejam* $2 \leq k < N$*,* $1 < p < N$*,* $0 < s < N - \frac{N-p}{p}$ *e* $s > \frac{N(k-p^*(k-1))}{N-p^*(k-1)}$*, quando* $N > kp$ *e* $1 < p < \frac{kN}{k+N(k-1)}$*. Se* $m \neq p^*$*, então a equação (1.37) não tem solução clássica* $u \in C^2((\mathbb{R}^k \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^{N-k}) \cap D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap L^{p_*}(\mathbb{R}^N; V) \cap L^m(\mathbb{R}^N)$ *satisfazendo* $\nabla u \in L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ *para* $q > \max\{q_k, q_s, q_{s,k}\}$*.*

A demonstração desse teorema se dará através dos próximos dois lemas.

Lema 1.22 *Sejam* $f \in C^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ *e* $u \in C^2((\mathbb{R}^k \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^{N-k})$ *uma solução clássica para a equação (1.38). Se* $\nabla u \in L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ *para algum* $q > q_k$ *e*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + \frac{|u|^{p_*}}{|y|^s} + |F(u)| dx < +\infty,$$

então

$$\frac{N-p}{p} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + \frac{|u|^{p_*}}{|y|^s} dx = N \int_{\mathbb{R}^N} F(u) dx. \tag{1.39}$$

Demonstração: Sabemos que as seguintes identidades são válidas

$$(x \cdot \nabla u)\Delta_p u = \operatorname{div}\left(|\nabla u|^{p-2}\nabla u(x \cdot \nabla u) - \frac{1}{p}|\nabla u|^p x\right) + \frac{N-p}{p}|\nabla u|^p;$$

$$(x \cdot \nabla u)\frac{|u|^{p_*-2}u}{|y|^s} = \operatorname{div}\left(\frac{|u|^{p_*}}{p_*|y|^s}x\right) - \frac{N-s}{p_*}\frac{|u|^{p_*}}{|y|^s};$$

$$(x \cdot \nabla u) f(u) = \operatorname{div}(F(u)x) - NF(u).$$

Para cada $R_2 > 1 > R_1 > 0$, defina $\Omega := \Omega_{R_1,R_2} := \{x \in B_{R_2};\ |y| > R_1\}$. Multiplicando (1.38) por $x \cdot \nabla u$, usando o Teorema da Divergência sobre Ω e observando que $\frac{N-s}{p_*} = \frac{N-p}{p}$

temos

$$-\int_{\partial\Omega}|\nabla u|^{p-2}(x\cdot\nabla u)(\nabla u\cdot\nu)d\sigma+\int_{\partial\Omega}\left(\frac{|u|^{p_*}}{p_*|y|^s}+\frac{1}{p}|\nabla u|^p\right)(x\cdot\nu)d\sigma-\int_{\partial\Omega}F(u)x\cdot\nu d\sigma$$

$$=\frac{N-p}{p}\int_\Omega|\nabla u|^p+\frac{|u|^{p_*}}{|y|^s}dx-N\int_\Omega F(u)dx, \tag{1.40}$$

onde $\nu(x)$ é o vetor normal apontando para fora de $\partial\Omega$ em x e $d\sigma$ é a medida $(N-1)-$dimensional de $\partial\Omega$. Note que $\partial\Omega=\partial\Omega^1_{R_1,R_2}\cup\partial\Omega^2_{R_1,R_2}$, onde

$$\partial\Omega^1_{R_1,R_2}=\{x\in B_{R_2};|y|=R_1\}\quad \text{e}\quad \partial\Omega^2_{R_1,R_2}=\{x\in\partial B_{R_2};|y|\geq R_1\}.$$

Daí, $\nu(x)=\frac{x}{R_2}$ quando $x\in\partial\Omega^2_{R_1,R_2}$ e $\nu(x)=-\frac{(y,0)}{R_1}$ quando $x\in\partial\Omega^1_{R_1,R_2}$. Com isso,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\partial\Omega^i_{R_1,R_2}}\left(\frac{1}{p}|\nabla u|^p+\frac{|u|^{p_*}}{p_*|y|^s}\right)(x\cdot\nu)d\sigma\right|&\leq R_i\int_{\partial\Omega^i_{R_1,R_2}}\frac{1}{p}|\nabla u|^p+\frac{|u|^{p_*}}{p_*|y|^s}d\sigma\\ \left|\int_{\partial\Omega^i_{R_1,R_2}}F(u)(x\cdot\nu)d\sigma\right|&\leq R_i\int_{\partial\Omega^i_{R_1,R_2}}|F(u)|d\sigma,\end{aligned} \tag{1.41}$$

para $i=1,2$.

Como $|\partial\Omega^1_{R_1,R_2}| \leq k\omega_k\omega_{N-k}R_1^{k-1}R_2^{N-k}$, $q \geq q_k$ e da desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}
&\left|\int_{\partial\Omega^1_{R_1,R_2}} |\nabla u|^{p-2}(x\cdot\nabla u)(\nabla u\cdot\nu)d\sigma\right| \leq R_2\int_{\partial\Omega^1_{R_1,R_2}} |\nabla u|^p d\sigma \\
&\leq R_2\left(\int_{\partial\Omega^1_{R_1,R_2}} d\sigma\right)^{1-\frac{p}{q}}\left(\int_{\partial\Omega^1_{R_1,R_2}} |\nabla u|^q d\sigma\right)^{\frac{p}{q}} \\
&\leq CR_2^{1+(N-k)(1-\frac{p}{q})}R_1^{(k-1)(1-\frac{p}{q})}\left(\int_{\partial\Omega^1_{R_1,R_2}} |\nabla u|^q d\sigma\right)^{\frac{p}{q}} \\
&\leq CR_1^{k(1-\frac{p}{q})-1}\left(R_1\int_{\partial\Omega^1_{R_1,R_2}} |\nabla u|^q d\sigma\right)^{\frac{p}{q}} \\
&\leq CR_1^{k(1-\frac{p}{q_k})-1}\left(R_1\int_{\partial\Omega^1_{R_1,R_2}} |\nabla u|^q d\sigma\right)^{\frac{p}{q}} = C\left(R_1\int_{\partial\Omega^1_{R_1,R_2}} |\nabla u|^q d\sigma\right)^{\frac{p}{q}},
\end{aligned} \tag{1.42}$$

onde C não depende de R_1. Fixado $R_2 > 1$, seja $S : (0, R_2) \to \mathbb{R}$ definida por

$$S(r) := \int_{\partial\Omega^1_{r,R_2}} |\nabla u|^q + \frac{1}{p}|\nabla u|^p + \frac{|u|^{p_*}}{p_*|y|^s} + |F(u)|d\sigma$$

e note que, pela fórmula de co-área,

$$\int_0^{R_2} S(r)dr = \int_{B_{R_2}} |\nabla u|^q + \frac{1}{p}|\nabla u|^p + \frac{|u|^{p_*}}{p_*|y|^s} + |F(u)|dx < +\infty.$$

Daí, procedendo como na Afirmação 1 do Lema 1.6, temos que existe uma sequência decrescente $\{r_n\} \subset (0,1)$ tal que $r_n \to 0$ e

$$r_n\int_{\partial\Omega^1_{r_n,R_2}} |\nabla u|^q + \frac{1}{p}|\nabla u|^p + \frac{|u|^{p_*}}{p_*|y|^s} + |F(u)|d\sigma \to 0.$$

Com isso, fazendo $R_1 = r_n$ em (1.40) e observando que a sequência $\{\partial\Omega^2_{r_n,R_2}\}_{n\in\mathbb{N}}$ é crescente e $\partial B_{R_2} \setminus (\{0\} \times \mathbb{R}^{N-k}) = \bigcup_n \partial\Omega^2_{r_n,R_2}$, de (1.41), (1.42) e como $\{0\} \times \mathbb{R}^{N-k}$ tem medida nula em relação a $d\sigma$ temos que

$$
\begin{aligned}
&-\int_{\partial B_{R_2}} |\nabla u|^{p-2}(x\cdot\nabla u)(\nabla u\cdot\nu)d\sigma + \int_{\partial B_{R_2}} \left(\frac{|u|^{p_*}}{p_*|y|^s} + \frac{1}{p}|\nabla u|^p\right)(x\cdot\nu)d\sigma \\
&-\int_{\partial B_{R_2}} F(u)(x\cdot\nu)d\sigma \qquad (1.43)\\
&= \frac{N-p}{p}\int_{B_{R_2}} |\nabla u|^p + \frac{|u|^{p_*}}{|y|^s}dx - N\int_{B_{R_2}} F(u)dx.
\end{aligned}
$$

Agora, note que

$$
\begin{aligned}
&\left|\int_{\partial B_{R_2}} \left(\frac{1}{p}|\nabla u|^p + \frac{|u|^{p_*}}{p_*|y|^s}\right)(x\cdot\nu)d\sigma\right| \leq R_2\int_{\partial B_{R_2}} \frac{1}{p}|\nabla u|^p + \frac{|u|^{p_*}}{p_*|y|^s}d\sigma \\
&\left|\int_{\partial B_{R_2}} F(u)(x\cdot\nu)d\sigma\right| \leq R_2\int_{\partial B_{R_2}} |F(u)|d\sigma, \qquad (1.44)\\
&\left|\int_{\partial B_{R_2}} |\nabla u|^{p-2}(x\cdot\nabla u)(\nabla u\cdot\nu)d\sigma\right| \leq R_2\int_{\partial B_{R_2}} |\nabla u|^p d\sigma.
\end{aligned}
$$

Daí, podemos mostrar que existe uma sequência $\{R_n\} \subset (1,+\infty)$ tal que $R_n \to +\infty$ e

$$R_n\int_{\partial B_{R_n}} |\nabla u|^p + \frac{1}{p}|\nabla u|^p + \frac{|u|^{p_*}}{p_*|y|^s} + |F(u)|d\sigma \to 0.$$

Por fim, fazendo $R_2 = R_n$ em (1.43) e aplicando o limite quando $n \to +\infty$, das estimativas (1.44), temos que

$$\frac{N-p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + \frac{|u|^{p_*}}{|y|^s}dx - N\int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx = 0$$

$\square$

Lema 1.23 *Sejam* $2 \leq k < N$, $1 < p < N$, $0 < s < N - \frac{N-p}{p}$ *e* $s > \frac{N(k-p^*(k-1))}{N-p^*(k-1)}$, *quando*

$N > kp$ *e* $1 < p < \frac{kN}{k+N(k-1)}$. *Sejam ainda* $f \in C^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$ *e* $u \in C^2((\mathbb{R}^k \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^{N-k})$ *uma solução clássica para a equação (1.38). Se* $u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap L^{p_*}(\mathbb{R}^N; V)$, $f(u)u \in L^1(\mathbb{R}^N)$ *e* $\nabla u \in L^q_{\text{loc}}(\mathbb{R}^N)$ *para* $q = \max\{q_s, q_k\}$, *então*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + \frac{|u|^{p_*}}{|y|^s} dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)u dx \tag{1.45}$$

Demonstração: Multiplicando a equação (1.38) por u, usando a identidade $\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}u\nabla u) = u\Delta_p u + |\nabla u|^p$ e aplicando o Teorema da divergência em $\Omega = \Omega_{R_1,R_2}$, definido no lema anterior, temos que

$$\begin{aligned} &\frac{1}{R_1}\int_{\partial\Omega^1_{R_1,R_2}} |\nabla u|^{p-2}u(\nabla u \cdot (y,0))d\sigma - \frac{1}{R_2}\int_{\partial\Omega^2_{R_1,R_2}} |\nabla u|^{p-2}u(\nabla u \cdot x)d\sigma \\ &+ \int_\Omega |\nabla u|^p + \frac{|u|^{p_*}}{|y|^s}dx = \int_\Omega f(u)udx. \end{aligned} \tag{1.46}$$

Na observação 1.20 vimos que $\frac{q}{p-1} > 1$ e $\frac{p-1}{q} + \frac{1}{p_*} < 1$, assim seja $r > 1$ tal que $\frac{p-1}{q} + \frac{1}{p_*} + \frac{1}{r} = 1$. Daí, pela desigualdade de Hölder generalizada, temos que

$$\begin{aligned} \left|\frac{1}{R_1}\int_{\partial\Omega^1_{R_1,R_2}} |\nabla u|^{p-2}u(\nabla u \cdot (y,0))d\sigma\right| &\leq \int_{\partial\Omega^1_{R_1,R_2}} |\nabla u|^{p-1}|u|d\sigma \\ &\leq \left(\int_{\partial\Omega^1_{R_1,R_2}} |\nabla u|^q d\sigma\right)^{\frac{p-1}{q}} \left(\int_{\partial\Omega^1_{R_1,R_2}} |u|^{p_*} d\sigma\right)^{\frac{1}{p_*}} \left(\int_{\partial\Omega^1_{R_1,R_2}} d\sigma\right)^{\frac{1}{r}} \\ &\leq (k\omega_k\omega_{N-k})^{\frac{1}{r}} R_2^{\frac{N-k}{r}} R_1^{\frac{k-1}{r}} \left(\int_{\partial\Omega^1_{R_1,R_2}} |\nabla u|^q d\sigma\right)^{\frac{p-1}{q}} \left(\int_{\partial\Omega^1_{R_1,R_2}} |u|^{p_*} d\sigma\right)^{\frac{1}{p_*}} \\ &\leq C R_1^{\frac{k-1}{r} - \frac{p-1}{q} + \frac{s-1}{p_*}} \left(R_1\int_{\partial\Omega^1_{R_1,R_2}} |\nabla u|^q d\sigma\right)^{\frac{p-1}{q}} \left(R_1\int_{\partial\Omega^1_{R_1,R_2}} \frac{|u|^{p_*}}{|y|^s} d\sigma\right)^{\frac{1}{p_*}} \end{aligned}$$

$$\leq C\left(R_1\int_{\partial\Omega^1_{R_1,R_2}}|\nabla u|^q d\sigma\right)^{\frac{p-1}{q}}\left(R_1\int_{\partial\Omega^1_{R_1,R_2}}\frac{|u|^{p_*}}{|y|^s}d\sigma\right)^{\frac{1}{p_*}},$$

onde C não depende de R_1 e a última desigualdade decorre do fato de que $0 < R_1 < 1$ e o expoente $\frac{k-1}{r} - \frac{p-1}{q} + \frac{s-1}{p_*}$ não é negativo, pois como $q > q_s$ temos que

$$\begin{aligned}\frac{k-1}{r} - \frac{p-1}{q} + \frac{s-1}{p_*} &= \frac{k}{r} - \frac{1}{r} - \frac{p-1}{q} - \frac{1}{p_*} + \frac{s}{p_*}\\ &= \frac{k}{r} - 1 + \frac{s}{p_*}\\ &\geq k\left(1 - \frac{p-1}{q_s} - \frac{1}{p_*}\right) - 1 + \frac{s}{p_*} = 0.\end{aligned}$$

Neste caso, assim como no Lema 1.22, podemos tomar uma sequência $\{r_n\} \subset (0,1)$ tal que $r_n \to 0$ e

$$\frac{1}{r_n}\int_{\partial\Omega^1_{r_n,R_2}}|\nabla u|^{p-2}u(\nabla u\cdot(y,0))d\sigma \to 0.$$

Daí, Fazendo $R_1 = r_n$ em (1.46) e aplicando o limite quando $n \to +\infty$, temos que

$$-\frac{1}{R_2}\int_{\partial B_{R_2}}|\nabla u|^{p-2}u(\nabla u\cdot x)d\sigma + \int_{B_{R_2}}|\nabla u|^p + \frac{|u|^{p_*}}{|y|^s}dx = \int_{B_{R_2}}f(u)udx. \qquad (1.47)$$

Do mesmo modo, usando a desigualdade de Hölder generalizada, onde $\frac{1}{p^*} + \frac{1}{p'} + \frac{1}{N} = 1$, temos que

$$\left|\frac{1}{R_2}\int_{\partial B_{R_2}} |\nabla u|^{p-2}u(\nabla u\cdot x)d\sigma\right| \leq \int_{\partial B_{R_2}} |\nabla u|^{p-1}|u|d\sigma$$

$$\leq \left(\int_{\partial B_{R_2}} |\nabla u|^p d\sigma\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\partial B_{R_2}} |u|^{p^*} d\sigma\right)^{\frac{1}{p^*}} \left(\int_{\partial B_{R_2}} d\sigma\right)^{\frac{1}{N}}$$

$$\leq (N\omega_N)^{\frac{1}{N}} R_2^{\frac{N-1}{N}} \left(\int_{\partial B_{R_2}} |\nabla u|^p d\sigma\right)^{\frac{1}{p'}} \left(\int_{\partial B_{R_2}} |u|^{p^*} d\sigma\right)^{\frac{1}{p^*}}$$

$$= (N\omega_N)^{\frac{1}{N}} \left(R_2\int_{\partial B_{R_2}} |\nabla u|^p d\sigma\right)^{\frac{1}{p'}} \left(R_2\int_{\partial B_{R_2}} |u|^{p^*} d\sigma\right)^{\frac{1}{p^*}}.$$

Daí, existe uma sequência $\{R_n\} \subset (1, +\infty)$ tal que $R_n \to +\infty$ e

$$\frac{1}{R_n}\int_{\partial B_{R_n}} |\nabla u|^{p-2}u(\nabla u\cdot x)d\sigma \to 0.$$

Logo, fazendo $R_2 = R_n$ em (1.47) e aplicando o limite quando $n \to +\infty$ temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p + \frac{|u|^{p_*}}{|y|^s}dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)udx.$$

□

Demonstração do Teorema 1.19: Suponha que u seja uma solução clássica da equação (1.38). Multiplicando a equação (1.45) por $\frac{N-p}{p}$ e subtraindo da equação (1.39) temos que

$$\frac{N-p}{p}\int_{\mathbb{R}^N} f(u)u\,dx - N\int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx = 0.$$

Daí e de (f_1) temos que

$$\left(\frac{N}{\gamma} - \frac{N-p}{p}\right)\int_{\mathbb{R}^N} f(u)u\,dx \geq 0.$$

De (f_3) temos que $f(u)u \geq 0$ e portanto, da última desigualdade temos necessariamente que $\gamma \leq p^*$, o que contradiz o enunciado. □

Demonstração do Corolário 1.21: Suponha que u seja uma solução clássica da equação (1.37), como no Teorema 1.19 onde $f(u) = |u|^{m-2}u$ e $F(u) = \frac{1}{m}|u|^m$ temos que

$$\left(\frac{N}{m} - \frac{N-p}{p}\right) \int_{\mathbb{R}^N} |u|^m dx = 0.$$

Logo, $m = p^*$, o que contradiz o enunciado.

□

1.3.2 Resultados de existência

Tendo em vista o resultado de não existência de solução clássica do Corolário 1.21, nesta seção trabalharemos o caso particular do problema (1.36) em que $V(|y|) = |y|^{-s}$ e $f(t) = |t|^{p^*-2}t$, ou seja

$$\begin{cases} -\Delta_p u + \dfrac{|u|^{p_*-2}u}{|y|^s} = |u|^{p^*-2}u \\ u \in W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}),\ u \geq 0 \end{cases} \tag{1.48}$$

onde $(y,z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{N-k},\ \ 2 \leq k < N$, $1 < p < N$, $0 < s \leq p$, $s < k$ ou $k = p$ e $p_* = \frac{p(N-s)}{N-p}$.

Definição 1.24 *Dizemos que* $u \in W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V)$ *é uma* ***solução fraca*** *do problema (1.48) quando*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{p_*-2}u}{|y|^s}\varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*-2}u\varphi dx,$$

$\forall\varphi \in W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N) + W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V)$.

Teorema 1.25 *Sejam* $2 \leq k < N$, $1 < p < N$, $0 < s \leq p$, $s < k$ *ou* $k = p$. *Então existe* $u \in W_k^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V)$ *não trivial tal que* $u \geq 0$ *e*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{p_*-2}u}{|y|^s}\varphi\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*-2}u\varphi\, dx, \tag{1.49}$$

$\forall\varphi \in W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V)$.

Teorema 1.26 *Sejam $N > k \geq 2$, $1 < p < N$. Se $0 < s \leq p$ e $s < k$ ou $k = p$, então o problema (1.48) tem uma solução fraca não negativa $u \in L^q(\mathbb{R}^N) \cap W_k^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V)$ para todo $\frac{p^*}{p'} < q \leq +\infty$ e existe $C := C(\mathbb{R}^N, p, \|u\|_{1,p})$ tal que*

$$u(x) \leq \frac{C}{|x|^t}, \text{ para todo } t < \frac{N-p}{p-1}.$$

1.3.3 Resultado de compacidade

Definição 1.27 *Dados $\lambda > 0$, $\xi \in \mathbb{R}^N$ e $1 < r < \infty$, definimos o operador linear $\rho_{\lambda,\xi} : L^r(\mathbb{R}^N) \to L^r(\mathbb{R}^N)$ por*

$$\rho_{\lambda,\xi} u(x) = \lambda^{-\frac{N-p}{p}} u(\lambda^{-1}x + \xi).$$

Observação 1.28 *O operador $\rho_{\lambda,\xi}$, via mudança de coordenadas, satisfaz as seguintes propriedades:*

1. *$\rho_{\lambda,\xi} : L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \to L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ e $\rho_{\lambda,\xi} : D^{1,p}(\mathbb{R}^N) \to D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ são isometrias;*

2. *$\rho_{\lambda,\xi} \cdot \rho_{\mu,\eta} = \rho_{\lambda\mu, \frac{\xi}{\mu}+\eta}$ e $\rho_{\lambda,\xi}^{-1} = \rho_{\lambda^{-1},-\lambda\xi}$;*

3. *Se $\tilde{z}_0 = (0, z_0)$, então $\rho_{\lambda,\tilde{z}_0} : W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V) \to W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V)$ é uma isometria e $\rho_{\lambda,\tilde{z}_0} u \in W_k^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V),\ \forall u \in W_k^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V)$*

Proposição 1.29 *Seja $1 < r < +\infty$ e assuma que $\{\lambda_n\} \subset (0, +\infty)$ e $\{\xi_n\} \subset \mathbb{R}^N$ são tais que $\lambda_n \to \lambda \neq 0$ e $\xi_n \to \xi$. Se $u_n \rightharpoonup u$ em $L^r(\mathbb{R}^N)$, então*

$$\rho_{\lambda_n,\xi_n} u_n \rightharpoonup \rho_{\lambda,\xi} u \text{ em } L^r(\mathbb{R}^N).$$

Demonstração: Sejam $\rho_n := \rho_{\lambda_n,\xi_n}$ e $\rho := \rho_{\lambda,\xi}$.

Afirmação 7 *$\rho_n^{-1}\varphi \to \rho^{-1}\varphi$ em $L^{r'}(\mathbb{R}^N)$, $\forall \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.*

De fato, pela continuidade de φ vemos que

$$\rho_n^{-1}\varphi(x) \to \rho^{-1}\varphi(x),\ \forall x \in \mathbb{R}^N \text{ quando } n \to +\infty. \tag{1.50}$$

Além disso, como $\operatorname{supp}\varphi$ é compacto, existe $R_0 > 0$ tal que $\varphi(x) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus B_{R_0}$. Como $\lambda_n \to \lambda \neq 0$ e $\xi_n \to \xi$ quando $n \to +\infty$, temos que existem $C_1, C_2 > 0$ tais que $\lambda_n > C_1 > 0$ e $|\xi_n| \leq C_2$. Daí, tome $R > \frac{R_0+C_2}{C_1}$ e note que se $x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R$, então

$$|\lambda_n(x - \xi_n)| = \lambda_n|x - \xi_n| \geq C_1R - C2 > R_0.$$

Com isso, $\rho_n\varphi(x) = \lambda_n^{\frac{N-p}{p}}\varphi(\lambda_n(x - \xi_n)) = 0,\ \forall x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R$. Daí, como $\{\lambda_n\}$ é limitada,

$$|\rho_n\varphi(x)| \leq C\|\varphi\|_\infty \chi_{B_R}(x) \in L^{r'}(\mathbb{R}^N),\ \forall x \in \mathbb{R}^N, \tag{1.51}$$

onde $\chi_{B_R}(x) = 1$, se $x \in B_R$, e $\chi_{B_R}(x) = 0$, se $x \in \mathbb{R}^N \setminus B_R$. De (1.50) e (1.51), pelo Teorema da Convergência dominada de Lebesgue, temos que

$$\|\rho_n^{-1}\varphi - \rho^{-1}\varphi\|_{r'}^{r'} = \int_{R^N} |\rho_n^{-1}\varphi(x) - \rho^{-1}\varphi(x)|^{r'}dx \to 0,$$

o que conclui a afirmação 1.

Por densidade,

$$\rho_n^{-1}\varphi \to \rho^{-1}\varphi \text{ em } L^{r'}(\mathbb{R}^N), \forall\varphi \in L^{r'}(\mathbb{R}^N).$$

Daí, $u_n \rightharpoonup u$ em $L^r(\mathbb{R}^N)$, temos que $\int_{\mathbb{R}^N}(\rho_n^{-1}\varphi)u_ndx \to \int_{\mathbb{R}^N}(\rho^{-1}\varphi)udx$, $\forall\varphi \in L^{r'}(\mathbb{R}^N)$.

Com isso, fazendo uma mudança de variáveis, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N}(\rho_nu_n)\varphi dx = \lambda_n^{N-\frac{2(N-p)}{p}}\int_{\mathbb{R}^N}(\rho_n^{-1}\varphi)u_ndx \to \lambda^{N-\frac{2(N-p)}{p}}\int_{\mathbb{R}^N}(\rho^{-1}\varphi)udx = \int_{\mathbb{R}^N}(\rho u)\varphi dx,$$

para toda $\varphi \in L^{r'}(\mathbb{R}^N)$. □

Proposição 1.30 *Sejam* $\{\lambda_n\} \subset (0, +\infty)$ *e* $\{\tilde{z}_n\} \subset \{0\} \times \mathbb{R}^{N-k}$ *tais que* $\lambda_n \to \lambda \neq 0$ *e* $\tilde{z}_n \to \tilde{z}$. *Se* $u_n \rightharpoonup u$ *em* $W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V)$(*ou* $W_k^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V)$), *então* $\rho_{\lambda_n,\tilde{z}_n}u_n \rightharpoonup \rho_{\lambda,\tilde{z}}u$ *em* $W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V)$ (*ou* $W_k^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V)$).

Demonstração: De fato, como $u_n \rightharpoonup u$ em $W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V)$, então $\{u_n\}$ é limitada em $W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V)$. Da observação 1.28, como $\rho_{\lambda_n,\tilde{z}_n}$ é uma isometria, temos que $\{\rho_{\lambda_n,\tilde{z}_n}u_n\}$ é limitada. Da reflexividade de $W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V)$, temos que, a menos de subsequência, $\rho_{\lambda_n,\tilde{z}_n}u_n \rightharpoonup w$ em $W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V)$.

Da imersão contínua $W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, temos que $\rho_{\lambda_n,\tilde{z}_n}u_n \rightharpoonup w$ e $u_n \rightharpoonup u$ em $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$. Por outro lado, da Proposição 1.29, $\rho_{\lambda_n,\tilde{z}_n}u_n \rightharpoonup \rho_{\lambda,\tilde{z}}u$ em $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$. Portanto, $\rho_{\lambda,\tilde{z}}u = w$ em $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ e como $w \in W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V)$, então $\rho_{\lambda,\tilde{z}}u \in W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V)$. $\square$

Enunciaremos a seguir, sem demonstração, um resultado de concentração de compacidade devido a Solimini [42].

Teorema 1.31 *Se $\{u_n\} \subset D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ é limitada e $1 < p < N$, então, a menos de subsequência, ou $u_n \to 0$ em $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ ou existem $\{\lambda_n\} \subset (0,+\infty)$ e $\{\xi_n\} \subset \mathbb{R}^N$ tais que $\rho_{\lambda_n,\xi_n}u_n \rightharpoonup u$ em $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, com $u \neq 0$.*

1.3.4 Demonstração dos Resultados

Demonstração do Teorema 1.25

Esta seção tem por finalidade a obtenção do Teorema 1.25, através da aplicação do Teorema do Passo da Montanha (Teorema A.10 do apêndice) e do resultado de compacidade devido a Solimini. A demonstração será dividida em diversos lemas.

Seja $I : W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V) \to \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx + \frac{1}{p_*}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{p_*}}{|y|^s} dx - \frac{1}{p^*}\int_{\mathbb{R}^N} (u_+)^{p^*} dx.$$

Sabemos que $I \in C^1(W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V);\mathbb{R})$ com derivada de Fréchet em $u \in W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V)$ dada por

$$\langle I'(u), h\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla h + \frac{|u|^{p_*-2}u}{|y|^s} h\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*-2}u_+ h\, dx, \qquad (1.52)$$

$\forall h \in W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V)$.

Proposição 1.32 (i) *Para todo $u \in W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V)$ e todo $\lambda > 0$ temos que*

$$I(u(\lambda^{-1}\cdot)) = \frac{\lambda^{N-p}}{p}\|u\|_{1,p}^p + \frac{\lambda^{N-s}}{p_*}\|u\|_{p_*,V}^{p_*} - \frac{\lambda^N}{p^*}\|u_+\|_{p^*}^{p^*}.$$

(ii) *Se* $u \in W_k^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V)$*, então para todo* $h \in W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V)$ *e* $g \in O(k)$ *temos que*

$$\langle I'(u), h(g\cdot, \cdot)\rangle = \langle I'(u), h(\cdot)\rangle.$$

(iii) *Para* $u \in W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V)$*,* $\lambda > 0$*,* $\tilde{z}_0 = (0, z_0) \in \mathbb{R}^N$ *e* $h \in W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V)$ *temos que*

$$\langle I'(\rho_{\lambda,\tilde{z}_0} u), h\rangle = \langle I'(u), \rho_{\lambda,\tilde{z}_0}^{-1} h\rangle.$$

Demonstração:

(i) Fazendo a mudança de variáveis linear $\bar{x} = \lambda^{-1}x$ e denotando $\bar{x} = (\bar{y}, \bar{z}) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{N-k}$ temos que

$$I(u(\lambda^{-1}\cdot)) =$$

$$= \frac{1}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(\lambda^{-1}x)\lambda^{-1}|^p dx + \frac{1}{p_*}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(\lambda^{-1}x)|^{p_*}}{|\lambda^{-1}y|^s} dx - \frac{1}{p^*}\int_{\mathbb{R}^N} |u_+(\lambda^{-1}x)|^{p^*} dx$$

$$= \frac{\lambda^{N-p}}{p}\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(\bar{x})|^p d\bar{x} + \frac{\lambda^{N-s}}{p_*}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u(\bar{x})|^{p_*}}{|\bar{y}|^s} d\bar{x} - \frac{\lambda^N}{p^*}\int_{\mathbb{R}^N} |u_+(\bar{x})|^{p^*} d\bar{x}.$$

(ii) Dado $g \in O(k)$, considere a aplicação linear $G : (y, z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{N-k} \mapsto (gy, z) \in \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{N-k}$.

Note que $G \in O(N)$ e, denotando por g a matriz na base canônica que representa a aplicação g, temos que a matriz na base canônica que representa G é dada em blocos por

$$G = \begin{bmatrix} g & 0 \\ 0 & Id \end{bmatrix}.$$

Assim, denotando por G^t a matriz transposta de G, vemos que

$$G^t = \begin{bmatrix} g^t & 0 \\ 0 & Id \end{bmatrix}.$$

Fazendo a mudança de variáveis $\bar{x} = Gx$ e temos que

$$\langle I'(u), h(g\cdot, \cdot)\rangle = \langle I'(u), h \circ G\rangle =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x) \cdot (\nabla h(G(x)) \cdot G) + \frac{|u(x)|^{p_*-2}u(x)}{|y|^s} h(G(x))dx$$

$$- \int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{p_*-2}u_+(x)h(G(x))dx$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(\bar{x}) \cdot G|^{p-2}(\nabla u(G^t\bar{x}) \cdot G^t) \cdot \nabla h(\bar{x}) + \frac{|u(\bar{x})|^{p_*-2}u(\bar{x})}{|\bar{y}|^s} h(\bar{x})d\bar{x}$$

$$- \int_{\mathbb{R}^N} |u(G^t\bar{x})|^{p_*-2}u_+(G^t\bar{x})h(\bar{x})d\bar{x}$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(\bar{x})|^{p-2}\nabla u(\bar{x}) \cdot \nabla h(\bar{x}) + \frac{|u(\bar{x})|^{p-2}u(\bar{x})}{|\bar{y}|^p} h(\bar{x})d\bar{x} - \int_{\mathbb{R}^N} |u(\bar{x})|^{p_*-2}u_+(\bar{x})h(\bar{x})d\bar{x}$$

$$= \langle I'(u), h(\cdot)\rangle$$

(iii) Fazendo a mudança de variáveis $\bar{x} = \lambda^{-1}x + \xi$, como no item (i) temos o resultado

$\square$

Proposição 1.33 *Seja $\{u_n\}$ limitada em $W_k^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V)$ tal que $I'(u_n) \to 0$ em $(W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V))'$. Se $u_n \rightharpoonup u$ em $W_k^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V)$, então para todo $h \in W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V)$*

$$\langle I'(u_n), h\rangle \to \langle I'(u), h\rangle .$$

Demonstração Seguindo a notação da Proposição A.4, tome $g_n(x) = \frac{|u_n(x)|^{p_*-2}u_n(x)}{|y|^{s/p_*'}}$ e $g(x) = \frac{|u(x)|^{p-2}u(x)}{|y|^{s/p_*'}}$. Como $u_n \rightharpoonup u$ em $W_k^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V)$ temos que $\{u_n\}$ é limitada em $W_k^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V)$ e $u_n \to u$ q.s em $\mathbb{R}^N$, daí, $\{g_n\}$ satisfaz as hipóteses da Proposição A.4, logo $g_n \rightharpoonup g$ em $L^{p_*'}(\mathbb{R}^N)$, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u_n|^{p_*-2}u_n}{|y|^{s/p_*'}} h\, dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{p_*-2}u}{|y|^{s/p_*'}} h\, dx,\ \forall h \in L^{p_*}(\mathbb{R}^N).$$

Em particular, dado $h \in W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V)$, temos que a função $x \mapsto \frac{h(x)}{|y|^{s/p_*}}$ está em $L^{p_*}(\mathbb{R}^N)$. Daí,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u_n|^{p_*-2}u_n}{|y|^s} h\,dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{p_*-2}u}{|y|^s} h\,dx,\ \forall h \in W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V),\ \text{quando}\ n \to +\infty. \tag{1.53}$$

Do mesmo modo, para cada $i = 1, \cdots, N$ defina $g_n^i(x) = |\nabla u_n(x)|^{p-2} D_i u_n(x)$ e $g^i(x) = |\nabla u(x)|^{p-2} D_i u(x)$. Claro que $\{g_n^i\}$ é limitada em $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$. Da Proposição 1.5, temos que $g_n^i(x) \to g^i(x)$ q.s em $\mathbb{R}^N$. Novamente, pela Proposição A.4, temos que $g_n^i \rightharpoonup g^i$ em $L^{p'}(\mathbb{R}^N)$, ou seja,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} D_i u_n h\,dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} D_i u h\,dx,\ \forall h \in L^p(\mathbb{R}^N),\ \text{quando}\ n \to +\infty.$$

Em particular, se $h \in W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V)$, então $D_i h \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Daí,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} D_i u_n D_i h\,dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} D_i u D_i h\,dx,\ \forall h \in W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V),\ \text{quando}\ n \to +\infty.$$

Somando esta última igualdade com $i = 1, \cdots, N$ temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \cdot \nabla h\,dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla h\,dx,\ \forall h \in W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V), \tag{1.54}$$

quando $n \to +\infty$. Procedendo da mesma forma, sendo $g_n := |u_n|^{p^*-2}u_n$, $g := |u|^{p^*-2}u$ e $W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*-2} u_n h\,dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*-2} u h\,dx,\ \forall h \in W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V), \tag{1.55}$$

quando $n \to +\infty$.

Logo, de (1.53), (1.54) e (1.55) segue o resultado. $\square$

Lema 1.34 *Se* $u \in W_k^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V)$ *é tal que* $\langle I'(u), h\rangle = 0, \forall h \in W_k^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V)$, *então* $\langle I'(u), h\rangle = 0,\ \forall h \in W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V)$.

Demonstração: Segue do Princípio da Criticalidade Simétrica, Proposição 1.4, de modo análogo à demonstração do Lema 1.17. □

Proposição 1.35 *Existe* $c > 0$ *e uma sequência limitada* $\{w_n\} \subset W_k^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V)$ *tais que*

$$I(w_n) \to c \ \textit{ e } I'(w_n)|_{W_k^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V)} \to 0 \textit{ em } (W_k^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V))'$$

Demonstração: Vejamos que $I|_{W_k^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V)}$ tem a geometria do passo da montanha.

De fato, $I(0) = 0$ e da imersão $W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V) \hookrightarrow L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ temos que

$$\|u\| = r \Rightarrow I(u) \geq \frac{1}{p_*} r^p - \frac{C}{p^*} r^{p^*} > 0, \text{ para algum } 0 < r < 1.$$

Por outro lado, da Proposição 1.32 fixado $u_0 \in W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V)$ tal que $u_0 \neq 0$ em $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$ vemos que

$$\lim_{\lambda \to +\infty} \|u_0(\lambda^{-1}\cdot)\| = +\infty \text{ e } \lim_{\lambda \to +\infty} I(u_0(\lambda^{-1}\cdot)) = -\infty.$$

Com isso, podemos escolher λ suficientemente grande de modo que $I(u_0(\lambda^{-1}\cdot)) < 0$ e $\|u_0(\lambda^{-1}\cdot)\| > r$.

Portanto, pelo Teorema do Passo da Montanha, Teorema A.10 do apêndice, existe $c > 0$ e uma sequência $\{w_n\} \subset W_k^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V)$ tal que $I(w_n) \to c$ e $I'(w_n)|_{W_k^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V)} \to 0$ em $(W_k^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V))'$.

Vejamos por fim que $\{w_n\}$ é limitada.

Note que

$$I(w_n) - \frac{1}{p^*}\langle I'(w_n), w_n\rangle \geq \left(\frac{1}{p_*} - \frac{1}{p^*}\right)(\|w_n\|_{1,p}^p + \|w_n\|_{p_*,V}^{p_*}).$$

Como $I'(w_n) \to 0$, a partir de algum $n \in \mathbb{N}$ temos que $\|I'(w_n)\| < 1$, daí, $|\langle I'(w_n), w_n\rangle| < \|w_n\|$. Da convergência de $\{I(w_n)\}$, existe $C > 0$ tal que $|I(w_n)| \leq C$. Com isso,

$$C+\frac{\|w_n\|}{p^*}\geq I(w_n)-\frac{1}{p^*}\langle I'(w_n),w_n\rangle\geq\left(\frac{1}{p_*}-\frac{1}{p^*}\right)(\|w_n\|_{1,p}^p+\|w_n\|_{p_*,V}^{p_*})$$

$$\Rightarrow\frac{C}{\|w_n\|^p}+\frac{1}{p^*\,\|w_n\|^{p-1}}\geq\left(\frac{1}{p_*}-\frac{1}{p^*}\right)\frac{\|w_n\|_{1,p}^p+\|w_n\|_{p_*,V}^{p_*}}{\|w_n\|^p}.$$

Supondo que $\{w_n\}$ não fosse limitada, teríamos que, a menos de subsequência, $\|w_n\|\to\infty$. Neste caso, o lado esquerdo da última desigualdade converge para zero. Daí, basta mostrar que o lado direito é estritamente maior que zero e temos um absurdo.

De fato, se $\{\|w_n\|_{p_*,V}\}$ não é limitada, então, a menos de subsequência, $\|w_n\|_{p_*,V}\to+\infty$ e $\|w_n\|_{p_*,V}>1$. Com isso, $\|w_n\|_{p_*,V}^{p_*}>\|w_n\|_{p_*,V}^{p}$ e daí,

$$\frac{\|w_n\|_{1,p}^p+\|u\|_{p_*,V}^{p_*}}{\|w_n\|^p}>\frac{\|w_n\|_{1,p}^p+\|w_n\|_{p_*,V}^{p}}{\|w_n\|^p}=1.$$

Por outro lado, se $\{\|w_n\|_{p_*,V}\}$ é limitada, então, a menos de subsequência, $\|w_n\|_{p_*,V}\to c\geq 0$ para algum $c\in\mathbb{R}$. Como $\|w_n\|\to+\infty$, então $\|w_n\|_{1,p}\to+\infty$ e daí,

$$\frac{\|w_n\|_{1,p}^p+\|u\|_{p_*,V}^{p_*}}{\|w_n\|^p}=\frac{1+\dfrac{\|w_n\|_{p_*,V}^{p_*}}{\|w_n\|_{1,p}^p}}{1+\dfrac{\|w_n\|_{p_*,V}^{p}}{\|w_n\|_{1,p}^p}}\to 1,$$

logo $\dfrac{\|w_n\|_{1,p}^p+\|w_n\|_{p_*,V}^{p_*}}{\|w_n\|^p}>c>0$ para n suficientemente grande.

□

Nos próximos resultados a sequência $\{w_n\}$ será sempre a sequência obtida nesta última proposição.

Lema 1.36 *A sequência $\{w_n\}$ não converge para 0 em $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração: Suponha que $w_n\to 0$ em $L^{p^*}(\mathbb{R}^N)$, daí,

$$I(w_n)-\frac{1}{p}\langle I'(w_n),w_n\rangle\leq\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{p^*}\right)\|w_n\|_{p^*}^{p^*}.$$

Como $\|w_n\|_{p^*} \to 0$, $\langle I'(w_n), w_n\rangle \to 0$ e da Proposição 1.35 temos que $I(w_n) \to c \leq 0$, o que contradiz a Proposição 1.35. $\square$

Corolário 1.37 *A menos de subsequência, existem* $\{\lambda_n\} \subset (0, +\infty)$ *e* $\{x_n\} \subset \mathbb{R}^N$ *tais que*

$$\rho_{\lambda_n, x_n} w_n \rightharpoonup \tilde{w} \text{ em } L^{p^*}(\mathbb{R}^N) \text{ e } \tilde{w} \neq 0.$$

Demonstração: Aplicação direta do Teorema 1.31.

Lema 1.38 *Sejam* $x_n = (y_n, z_n)$, $\tilde{y}_n := (y_n, 0)$ *e* $\tilde{z}_n := (0, z_n)$. *Seja* $u_n := \rho_{\lambda_n, \tilde{z}_n} w_n$. *Então* $\{u_n\} \subset W_k^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V)$ *é limitada e temos que*

$$I'(u_n) \to 0 \text{ em } (W_k^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V))' \text{ e } u_n \rightharpoonup u \text{ em } W_k^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V), \quad \text{com } u \neq 0.$$

Demonstração: Da Observação 1.28 temos que $u_n := \rho_{\lambda_n, \tilde{z}_n} w_n \in W_k^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V)$ e

$$\|u_n\| = \|\rho_{\lambda_n, \tilde{z}_n} w_n\| = \|w_n\|.$$

Portanto, da limitação de $\{w_n\}$ temos que $\{u_n\}$ é limitada.

Note que

$$\rho_{1, \lambda_n \tilde{y}_n} u_n = \rho_{1, \lambda_n \tilde{y_n}} \rho_{\lambda_n, \tilde{z}_n} w_n = \rho_{\lambda_n, x_n} w_n \rightharpoonup \tilde{w} \text{ em } L^{p^*}(\mathbb{R}^N). \tag{1.56}$$

Da Proposição 1.32 e da Observação 1.28, temos que

$$|\langle I'(u_n), h\rangle| = |\langle I'(w_n), \rho_{\lambda_n^{-1}, -\lambda_n \tilde{z}_n} h\rangle| \leq \|I'(w_n)\|_* \|\rho_{\lambda_n^{-1}, -\lambda_n \tilde{z}_n} h\| = \|I'(w_n)\|_* \|h\|.$$

Daí,

$$\|I'(u_n)\|_* \leq \|I'(w_n)\|_* \to 0 \text{ em } (W_k^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V))'. \tag{1.57}$$

quando $n \to +\infty$.

Como $\{u_n\}$ é limitada, da reflexividade de $W_k^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V)$ temos que $u_n \rightharpoonup u$ em $W_k^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V)$, a menos de subsequência.

Resta mostrar que $u \neq 0$. Suponha o contrário, ou seja, que $u = 0$. Então,

$$u_n \rightharpoonup 0 \text{ em } W_k^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V). \tag{1.58}$$

Vejamos que

$$\lim_{n \to +\infty} |\lambda_n \tilde{y}_n| = +\infty. \tag{1.59}$$

Suponha o contrário, então podemos extrair uma subsequência limitada e desta uma subsequência convergente, denotada da mesma forma. Assim, $\lambda_n \tilde{y}_n \to \tilde{y}_0$ em $\mathbb{R}^k \times \{0\}$. Com isso, da Proposição 1.29 e de (1.56),

$$u_n = \rho_{1,-\lambda_n \tilde{y}_n} \rho_{1,\lambda_n \tilde{y}_n} u_n \rightharpoonup \rho_{1,-\tilde{y}_0} \tilde{w} \text{ em } L^{p*}(\mathbb{R}^N) \text{ quando } n \to +\infty.$$

Neste caso, de (1.58) $\rho_{1,-\tilde{y}_0} \tilde{w} = 0$ em $L^{p*}(\mathbb{R}^N)$, o que contradiz o Corolário 1.37.

Como $\tilde{w} \neq 0$ temos que existem $\delta > 0$ e $A \subset \mathbb{R}^N$ com $|A| \neq 0$ tais que ou $\tilde{w}(x) > \delta$ ou $\tilde{w}(x) < -\delta$ q.s em A.

Com isso, seja $R > 0$ tal que $|B_R \cap A| > 0$. Da convergência fraca em (1.56) temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \rho_{1,\lambda_n \tilde{y}_n} u_n \varphi dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{w} \varphi dx, \ \forall \varphi \in L^{(p^*)'}(\mathbb{R}^N) \text{ quando } n \to +\infty.$$

Em particular, para $\varphi = \chi_{B_R \cap A}$ temos que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^N} \rho_{1,\lambda_n \tilde{y}_n} u_n \chi_{B_R \cap A} dx \right| \to \left| \int_{\mathbb{R}^N} \tilde{w} \chi_{B_R \cap A} dx \right| \geq \delta |B_R \cap A| > 0, \text{ quando } n \to +\infty. \tag{1.60}$$

Daí, usando a desigualdade de Hölder e fazendo uma mudança de variáveis, temos que

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^n} \rho_{1,\lambda_n\tilde{y}_n} u_n \chi_{B_R\cap A} dx\right| &\leq \int_{B_R} |\rho_{1,\lambda_n\tilde{y}_n} u_n| dx \\ &= \int_{B_R(\lambda_n\tilde{y}_n)} |u_n(x)| dx \qquad (1.61) \\ &\leq (\omega_N R^N)^{\frac{p^*-1}{p^*}} \left(\int_{B_R(\lambda_n\tilde{y}_n)} |u_n|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}}\end{aligned}$$

De (1.60) e (1.61) temos que

$$\liminf_{n\to+\infty} \int_{B_R(\lambda_n\tilde{y}_n)} |u_n|^{p^*} dx > 0.$$

Portanto, a menos de subsequência,

$$\inf_{n\in\mathbb{N}} \int_{B_R(\lambda_n\tilde{y}_n)} |u_n|^{p^*} dx > \varepsilon, \text{ para algum } \varepsilon > 0. \qquad (1.62)$$

Com isso, da Proposição A.7, para cada $m \in \mathbb{N} \setminus \{0,1\}$ existe $n_m \in \mathbb{N}$ tal que para todo $n > n_m$ podemos encontrar $g_1, \cdots, g_m \in O(k)$ satisfazendo

$$i \neq j \Rightarrow B_R(\lambda_n(g_i y_n, 0)) \cap B_R(\lambda_n(g_j y_n, 0)) = \emptyset.$$

De (1.62), como $u_n \in W_k^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V)$, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} dx \geq \sum_{i=1}^{m} \int_{B_R(\lambda_n(g_i y_n,0))} |u_n|^{p^*} dx = \sum_{i=1}^{m} \int_{B_R(\lambda_n\tilde{y}_n)} |u_n|^{p^*} dx > m\varepsilon,$$

para todo $m \in \mathbb{N}$ e todo $n > n_m$. Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{p^*} dx \to +\infty, \text{ quando } n \to +\infty,$$

o que é uma contradição, pois $\|u_n\|_{p^*}$ é limitada. $\square$

Demonstração do Teorema 1.25:

Do Lema 1.38 e da Proposição 1.33 que

$$\langle I'(u_n), h\rangle \to \langle I'(u), h\rangle\,,\ \forall h \in W_k^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V).$$

Daí, $I'(u) = 0$ em $(W_k^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V))'$, ou seja, u é ponto crítico de $I|_{W_k^{1,p_*}(\mathbb{R}^N;V)}$. Do Lema 1.34, $I'(u) = 0$ em $(W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V))'$, logo u satisfaz (1.49).

Resta mostrar que $u \geq 0$. De fato, fazendo $\varphi = u^-$ em (1.49) temos que

$$\left\|u^-\right\|^p = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla u^- + \frac{|u|^{p_*-2}u}{|y|^s}u^- dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*-2}u^+u^- dx = 0.$$

Logo $u = u^+ \geq 0$. □

Demonstração do Teorema 1.26

Primeiramente faremos uma extensão do resultado obtido na Seção 1.3.4 a fim de obter a existência de solução fraca no sentido da Definição 1.24 e depois obteremos as propriedades desta solução concluindo a demonstração do Teorema 1.26.

Lema 1.39 *Sejam $N > k \geq 2$, $1 < p < N$, $0 < s \leq p$ e $s < k$ ou $k = p$. Se $u \in W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V)$, $u \geq 0$ e satisfaz (1.49), então*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi\, dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{p_*-2}u}{|y|^s}\varphi\, dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*-2}u\varphi\, dx,\ \forall\varphi \in W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N).$$

Demonstração: Para $0 < s \leq p$ e $k > s$, a desigualdade de Hardy-Sobolev (A.4), nos garante que as normas $\|\cdot\|$ e $\|\cdot\|_{1,p}$ são equivalentes, portanto, $W^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V) = D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e segue o resultado.

Para $s = k = p$, temos que $p_* = p$. Neste caso faremos a demonstração por casos.

1º **caso** Suponha que $\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\varphi \geq 0$ e $\operatorname{supp}\varphi \subset B_R^p \times B_R^{N-p}$ para algum $R > 0$.

Tome $\xi \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ tal que

$$0 \leq \xi \leq 1,\ \xi \equiv 0 \text{ em } (-\infty, 1],\ \xi \equiv 1 \text{ em } [2, +\infty).$$

Com isso, defina $\xi_n(x) := \xi(n|y|)$, $n \in \mathbb{N}$ tal que $\frac{1}{n} < R$ e note que

(i) $0 \leq \xi_n \leq 1$;

(ii) $\xi_n \equiv 0$ quando $0 \leq |y| \leq \frac{1}{n}$ e $\xi_n \equiv 1$ quando $|y| \geq \frac{2}{n}$;

(iii) $|\nabla \xi_n| \leq n \left\|\xi'\right\|_\infty$ e $|\nabla \xi_n| \equiv 0$ quando $0 \leq |y| \leq \frac{1}{n}$ e $|y| \geq \frac{2}{n}$;

(iv) $\xi_n(x) \to 1$, para todo $x \in (\mathbb{R}^k \setminus \{0\}) \times \mathbb{R}^{N-k}$.

Como $\varphi\xi_n \leq \varphi$ em $\mathbb{R}^N$ e $\nabla\xi_n \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ temos que $\nabla(\varphi\xi_n) = \xi_n\nabla\varphi + \varphi\nabla\xi_n$ e $\varphi\xi_n \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, note que

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{\varphi^p|\xi_n|^p}{|y|^p}dx = \int_{\frac{1}{n}<|y|<R} \frac{\varphi^p|\xi_n|^p}{|y|^p}dx \leq n^p \int_{\mathbb{R}^N} \varphi^p < +\infty.$$

Assim $\varphi\xi_n \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N; V)$ e portanto da equação (1.49) temos que

$$\begin{aligned} &\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}(\nabla u \cdot \nabla\varphi)\xi_n dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}(\nabla u \cdot \nabla\xi_n)\varphi dx \\ &+ \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{p-2}u}{|y|^p}\varphi\xi_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*-2}u\varphi\xi_n dx \end{aligned} \tag{1.63}$$

Pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}(\nabla u \cdot \nabla\varphi)\xi_n dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}(\nabla u \cdot \nabla\varphi) dx \tag{1.64}$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*-2}u\varphi\xi_n dx \to \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*-2}u\varphi dx \tag{1.65}$$

quando $n \to +\infty$.

Por outro lado, seja $A_n := \left\{x \in B_R^p \times B_R^{N-p};\ \frac{1}{n} < |y| < \frac{2}{n}\right\}$ e note que $|A_n| \leq \frac{C}{n^p}$. Daí, da desigualdade de Hölder, temos que

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}(\nabla u \cdot \nabla \xi_n)\varphi dx\right| &\leq \|\varphi\|_\infty \int_{A_n} |\nabla u|^{p-1}|\nabla \xi_n| dx \\
&\leq \|\varphi\|_\infty \left(\int_{A_n} |\nabla u|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{A_n} |\nabla \xi_n|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\leq \|\varphi\|_\infty n \|\xi'\|_\infty |A_n|^{\frac{1}{p}} \left(\int_{A_n} |\nabla u|^p\right)^{\frac{p-1}{p}} \\
&\leq C \left(\int_{A_n} |\nabla u|^p\right)^{\frac{p-1}{p}}.
\end{aligned}$$

Com isso, como $|A_n| \to 0$ quando $n \to +\infty$, temos que

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}(\nabla u \cdot \nabla \xi_n)\varphi dx \to 0. \tag{1.66}$$

Aplicando o limite em (1.63) temos

$$\lim_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{p-2}u}{|y|^p}\varphi \xi_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*-2}u\varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla \varphi dx. \tag{1.67}$$

Como $u \geq 0$, então

$$0 \leq \frac{|u|^{p-2}u}{|y|^p}\varphi \xi_n \to \frac{|u|^{p-2}u}{|y|^p}\varphi, \quad \text{q.s em } \mathbb{R}^N,$$

daí, pelo Lema de Fatou,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{p-2}u}{|y|^p}\varphi dx &\leq \liminf_{n\to+\infty} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{p-2}u}{|y|^p}\varphi\xi_n dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*-2}u\varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi dx.\end{aligned}$$

Logo $\dfrac{|u|^{p-2}u}{|y|^p}\varphi \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e $0 \leq \dfrac{|u|^{p-2}u}{|y|^p}\varphi\xi_n \leq \dfrac{|u|^{p-2}u}{|y|^p}\varphi$. Daí, pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue,

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{p-2}u}{|y|^p}\varphi\xi_n dx \to \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{p-2}u}{|y|^p}\varphi dx, \tag{1.68}$$

quando $n \to +\infty$. Assim, de (1.63), (1.64), (1.65), (1.66) e (1.68) temos o resultado.

2º **caso** Suponha $\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \cap L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $\varphi \geq 0$.

Tome $\xi \in C^\infty(\mathbb{R};\mathbb{R})$ tal que

$$0 \leq \xi \leq 1,\ \xi \equiv 1 \text{ em } (-\infty, 1] \text{ e } \xi \equiv 0 \text{ em } [2, +\infty).$$

Defina $\xi_n(x) := \xi(\frac{|x|}{n})$, para todo $n \in \mathbb{N}$ e note que

(i) $0 \leq \xi_n \leq 1$;

(ii) $\xi_n \equiv 1$ em $\bar{B}_n$ e $\xi_n \equiv 0$ em $\mathbb{R}^N \setminus B_{2n}$;

(iii) $|\nabla\xi_n| \leq \frac{1}{n}\|\xi'\|_\infty$;

(iv) $\xi_n(x) \to 1$, para todo $x \in \mathbb{R}^N$.

Como $\xi_n \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, então $\varphi\xi_n \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e $\nabla(\varphi\xi_n) = \varphi\nabla\xi_n + \nabla\varphi\xi_n$. Além disso, $\varphi\xi_n \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, $\varphi\xi_n \geq 0$ e $\operatorname{supp}(\varphi\xi_n) \subset \bar{B}_{2n}$, portanto $\varphi\xi_n$ satisfaz as condições do 1º caso, daí,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}(\nabla u \cdot \nabla \varphi)\xi_n dx + \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}(\nabla u \cdot \nabla \xi_n)\varphi dx$$

$$+ \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{p-2}u}{|y|^p}\varphi \xi_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*-2}u\varphi\xi_n dx.$$

Observando que do Teorema da convergência dominada de Lebesgue segue que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}(\nabla u \cdot \nabla \xi_n)\varphi dx \to 0$$

quando $n \to +\infty$ e procedendo como antes temos o resultado.

3º **caso** Suponha $\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e $\varphi \geq 0$.

Para cada $n \in \mathbb{N}$ defina $\varphi_n := \min\{n, \varphi\} = \varphi - (\varphi - n)^+$ note que $\varphi_n \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $\varphi_n \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Como $\varphi_n \to \varphi$ q.s em $\mathbb{R}^N$ e $|\varphi_n - \varphi| \leq \varphi$, pelo Teorema da convergência dominada de Lebesgue temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_n - \varphi|^p dx \to 0,$$

quando $n \to +\infty$.

Além disso, sabemos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \varphi_n - \nabla \varphi|^p dx = \int_{\varphi \geq n} |\nabla \varphi|^p dx \to 0,$$

quando $n \to +\infty$. Portanto $\varphi_n \to \varphi$ em $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ quando $n \to +\infty$ e φ_n está nas condições do 2º caso, daí,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}(\nabla u \cdot \nabla \varphi_n)dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{p-2}u}{|y|^p}\varphi_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*-2}u\varphi_n dx. \tag{1.69}$$

Da desigualdade de Hölder, temos que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi_n - |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi dx\right| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p dx\right)^{\frac{p-1}{p}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\varphi_n - \nabla\varphi|^p dx\right)^{\frac{1}{p}} \to 0$$

quando $n \to +\infty$.

E

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*-2}u\varphi_n - |u|^{p^*-2}u\varphi dx\right| \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*} dx\right)^{\frac{p^*-1}{p^*}} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\varphi_n - \varphi|^{p^*} dx\right)^{\frac{1}{p^*}} \to 0$$

quando $n \to +\infty$.

Com isso, aplicando o limite em (1.69) temos que

$$\lim_{n\to+\infty}\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{p-2}u}{|y|^p}\varphi_n dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*-2}u\varphi dx - \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi dx,$$

quando $n \to +\infty$. Como $u \geq 0$, novamente pelo Lema de Fatou e pelo Teorema da convergência dominada temos o resultado.

Para o caso geral, ou seja, $\varphi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, basta observar que $\varphi = \varphi^+ - \varphi^-$, onde $\varphi^+, \varphi^- \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e $\varphi^+, \varphi^- \geq 0$, portanto satisfazem as condições do $3^{\underline{o}}$ caso.

$\square$

Enunciaremos a seguir três resultados devido a Vassilev em [48]. Como aplicação direta desses resultados obteremos as propriedades de regularidade e comportamento assintótico das soluções fracas do problema (1.36).

Teorema 1.40 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto, não necessariamente limitado, $1 < p < N$, $0 \leq r \leq p$, $r \leq k$, $r(N-k) < k(N-p)$ e $p_*(r) = \frac{p(N-r)}{N-p}$. Seja $u \in D^{1,p}(\Omega)$ não negativa e satisfazendo*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla\varphi dx \leq \int_\Omega V\frac{|u|^{p-2}u}{|y|^r}\varphi dx, \tag{1.70}$$

para toda $0 \leq \varphi \in C_0^\infty(\Omega)$.

a) *Se* $V \in L^{\frac{p^*}{p_*(r)-p}}(\Omega)$, *então* $u \in L^q(\Omega; |y|^{-t}dx)$ *para todo* $0 \leq t < \min\{p, r\}$ *e* $q \geq p_*(r)$. *Em particular,* $u \in L^q(\Omega)$ *para todo* $p^* \leq q < +\infty$.

b) *Se* $V \in L^{t_0}(\Omega) \cap L^{\frac{p^*}{p_*(r)-p}}(\Omega)$ *para algum* $t_0 > \frac{p^*}{p_*(r)-p}$, *então* $u \in L^\infty(\Omega)$

Teorema 1.41 *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto, não necessariamente limitado,* $1 < p < N$, $0 \leq r \leq p$, $r \leq k$, $r(N-k) < k(N-p)$ *e* $p_*(r) = \frac{p(N-r)}{N-p}$. *Suponha que* $R \in L^{\frac{p^*}{p_*(r)-p}}(\Omega)$ *e* $V_0 \in L^1(\Omega) \cap L^{\frac{p^*}{p_*(r)-p}}(\Omega)$, *e no caso* $p > 2$ *assuma* R *e* V_0 *não negativas. Se* u *é não negativa, localmente limitada e satisfaz*

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi dx \leq \int_\Omega R\frac{|u|^{p-2}u}{|y|^r}\varphi + V_0\varphi dx, \tag{1.71}$$

então $u \in L^q(\Omega), \forall\, \frac{p^*}{p'} < q \leq p^*$.

Teorema 1.42 *Sejam* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto, não necessariamente limitado,* $1 < p < N$, $0 \leq r \leq p$, $r \leq k$, $r(N-k) < k(N-p)$ *e* $p_*(r) = \frac{p(N-r)}{N-p}$. *Suponha* $R \in L^{\frac{p^*}{p_*(r)-p}}(\Omega) \cap L^{t_0}(\Omega)$, *para algum* $t_0 > \frac{p^*}{p_*(r)-p}$, *e no caso* $p > 2$ *assuma* $R, V_0 \geq 0$.

Se $u \in D^{1,p}(\Omega)$ *satisfaz (1.71), então existe* $C = C(\mathbb{R}^N, p, \|\nabla u\|_p) > 0$, *tal que* u *satisfaz*

$$u(x) \leq \frac{C}{|x|^t}\|\nabla u\|_p, \tag{1.72}$$

para todo $t < \frac{N-p}{p-1}$.

Demonstração do Teorema 1.26:

Segue diretamente do Teorema 1.25 e do Lema 1.39 que existe uma solução fraca $u \in W_k^{1,p_*}(\mathbb{R}^N; V)$ não negativa do problema (1.36) no sentido da Definição 1.24. Daí,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi dx + \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{p_*-2}u}{|y|^s}\varphi dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*-2}u\varphi dx, \tag{1.73}$$

para toda $0 \leq \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Seja $V(x) = |u|^{p^*-p}$ e note que

1. $|V|^{\frac{p^*}{p^*-p}} = |u|^{p^*}$;

2. $V|u|^{p-2}u = |u|^{p^*-2}u$.

Daí, $V \in L^{\frac{p^*}{p^*-p}}(\mathbb{R}^N)$ e de (1.73) temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla\varphi dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} V|u|^{p-2}u\varphi dx,$$

para toda $0 \leq \varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Fazendo $r = 0$ e $\Omega = \mathbb{R}^N$ no Teorema 1.40 temos, do item (a), que $p_*(0) = p$ e $u \in L^q(\mathbb{R}^N)$, para todo $p^* \leq q < +\infty$. Neste caso, fixado $q > p^*$ temos que $|V|^{\frac{q}{p^*-p}} = |u|^q$ e portanto $V \in L^{\frac{q}{p^*-p}}(\mathbb{R}^N)$. Com isso, $t_0 = \frac{q}{p^*-p} > \frac{p^*}{p^*-p}$ e então $V \in L^{t_0}(\mathbb{R}^N) \cap L^{\frac{p^*}{p^*-p}}(\mathbb{R}^N)$. Assim, do item (b) temos que $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Como $u \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, então u é localmente limitada. Tomando $V_0 \equiv 0$, $R \equiv V$, $r = 0$ e $\Omega = \mathbb{R}^N$ temos que u satisfaz as hipóteses do Teorema 1.41, daí, $u \in L^q(\mathbb{R}^N)$ para todo $\frac{p^*}{p'} < q \leq p^*$. Finalmente, tomando $V_0 = 0$, do Teorema 1.42 temos que

$$u(x) \leq \frac{C}{|x|^t},$$

para todo $t < \frac{N-p}{p-1}$, onde C depende de $\mathbb{R}^N, p$ e $\|\nabla u\|_p$.

$\square$

Capítulo

2

Existência de soluções radiais envolvendo o biharmônico

Neste capítulo trabalharemos com uma classe de problemas semilineares, envolvendo o operador biharmônico Δ^2, do tipo

$$\begin{cases} \Delta^2 u + V(|x|)u = f(u) \\ u \in D^{2,2}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}), \quad N \geq 5. \end{cases} \tag{2.1}$$

onde o potencial $V : [0,\infty) \to (0,\infty]$ é uma função mensurável, a não linearidade $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ é contínua e satisfazem:

(V_α) Existem $A, \alpha > 0$ tais que $V(s) \geq \frac{A}{s^\alpha}$ para quase todo $s > 0$.

(V_1) $V \in L^1(a,b)$ para algum intervalo (a,b) com $b > a > 0$.

$(f_{m,2})$ Existem $M > 0$ e $m > 2$ tais que $|f(s)| \leq M|s|^{m-1}$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

O caso mais simples no qual nossos resultados são válidos é dado pelo problema

$$\begin{cases} \Delta^2 u + \dfrac{A}{|x|^\alpha} u = |u|^{m-2}u \\ u \in D^{2,2}(\mathbb{R}^N;\mathbb{R}), \quad N \geq 5 \end{cases} \tag{2.2}$$

onde $A > 0$.

2.1 O espaço de Sobolev com peso

Sejam $N \geq 5$ e $V : [0, \infty) \to (0, \infty]$ uma função mensurável satisfazendo (V_1). Considere o espaço de Sobolev $D^{2,2}(\mathbb{R}^N)$ fecho de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ sobre a norma $\|\Delta u\|_2$. Sabemos que $D^{2,2}(\mathbb{R}^N)$ é espaço de Hilbert e sabemos ainda que em $D^{2,2}(\mathbb{R}^N)$ convergência fraca implica convergência pontual a menos de subsequência.

Note que o espaço $L^2(\mathbb{R}^N; V)$, com a norma definida por $\|u\|_{2,V}^2 := \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)|u|^2 dx$, é uniformemente convexo, isso segue direto do fato conhecido de que $L^p(\mathbb{R}^N)$ é uniformemente convexo. Sabemos também que convergência fraca implica convergência pontual a menos de subsequência.

Defina o espaço de Hilbert

$$W^{2,2}(\mathbb{R}^N; V) := D^{2,2}(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N; V)$$

com a produto interno definido por

$$(u, v) := \int_{\mathbb{R}^N} \Delta u \Delta v \, dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|) uv \, dx.$$

E norma $\|u\| = \sqrt{(u, u)}$.

Da imersão contínua $W^{2,2}(\mathbb{R}^N; V) \hookrightarrow D^{2,2}(\mathbb{R}^N)$ temos que convergência fraca implica convergência pontual a menos de subsequência.

Defina por fim o espaço

$$W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N; V) := \left\{ u \in W^{2,2}(\mathbb{R}^N; V); u(x) = u(gx), \ \ \forall g \in O(N) \right\},$$

o qual não é vazio devido a (V_1). Como $W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N; V)$ é um subespaço fechado de $W^{2,2}(\mathbb{R}^N; V)$ temos que possui as mesmas propriedades citadas de $W^{2,2}(\mathbb{R}^N; V)$.

Definimos $D_r^{2,2}(\mathbb{R}^N)$ como o conjunto das funções radiais em $D^{2,2}(\mathbb{R}^N)$. Daí, $W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N; V) = D_r^{2,2}(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N; V)$. Podemos ver em [37] que $C_{0,r}^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $D_r^{2,2}(\mathbb{R}^N)$.

Proposição 2.1 *$C_{0,r}^\infty(\mathbb{R}^N)$ é denso em $W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N; V)$*

Demonstração: Dado $u \in W^{2,2}(\mathbb{R}^N; V)$ sabemos que existe uma sequência $\{\phi_n\} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ tal que $\|\phi_n - u\| \to 0$. Defina

$$\bar{\phi}_n(r) := \frac{1}{N\omega_N} \int_{S_r^{N-1}} \phi_n(x) d\sigma(x) \text{ e } \bar{v}_n := \bar{\phi}_n(|x|).$$

Com isso, podemos ver que

$$\|\bar{v}_n - u\|_{2,V} \leq \|\phi - u\|_{2,V} \text{ e } \|\Delta(\bar{v}_n - u)\|_2 \leq \|\Delta(\phi_n - u)\|_2.$$

Logo,

$$\|\bar{v}_n - u\|^2 \leq \|\phi_n - u\|^2 \to 0.$$

□

2.2 Resultados de Existência

Para enunciarmos nossos resultados de existência necessitamos considerar algumas propriedades adicionais sobre f e V. Defina $F(s) := \int_0^s f(t)dt$ e considere as seguintes propriedades

(V_2) Existem $B, \beta, \mu_0 > 0$ tais que $V(\mu s) \leq \mu^{-\beta} BV(s)$ para quase todo $\mu > \mu_0$ e $s > 0$;

(f_1) existe $\gamma > 2$ tal que $\gamma F(s) \leq f(s)s$, $\forall s \in \mathbb{R}$;

(f_2) $F(s_*) > 0$ para algum $s_* \in (0, \infty)$;

(f_3) $F(s) > 0$, $\forall s \in (0, \infty)$;

(f_4) f é ímpar;

$(f_{m,2})$ Existem $M > 0$ e $m > 2$ tais que $|f(s)| \leq M|s|^{m-1}$ para todo $s \in \mathbb{R}$.

(F_m) existe $\eta > 0$ tal que $F(s) \geq \eta|s|^m$, $\forall \in \mathbb{R}$.

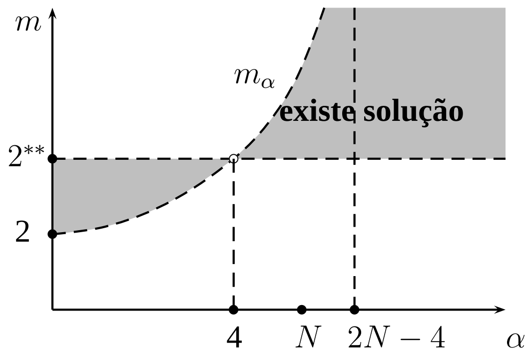
Denote ainda por $2^{**} = \frac{2N}{N-4}$ o expoente crítico da imersão de Sobolev em dimensão $N \geq 5$ e por $m_\alpha := 2 + \frac{4\alpha}{2N-4-\alpha}$ para $\alpha \in (0, 2N-4)$. Com isso temos os seguintes resultados:

Teorema 2.2 *Sejam $V : [0, \infty) \to (0, \infty]$ uma função mensurável satisfezendo (V_1) e $f \in C^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ satisfazendo (f_1). Suponha válidas $(f_{m,2})$ e (V_α) com $\alpha \in (0, 4)$ e $m \in (m_\alpha, 2^{**})$ ou $\alpha \in (4, 2N-4)$ e $m \in (2^{**}, m_\alpha)$ ou $\alpha \in [2N-4, \infty)$ e $m \in (2^{**}, \infty)$. Suponha ainda que ou V satisfaz (V_2) e f satisfaz (f_2), ou f satisfaz (f_3). Então o problema (2.1) tem uma solução radial não trivial $u \in W^{2,2}(\mathbb{R}^N, V)$ no seguinte sentido*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \Delta u \cdot \Delta h + V(|x|)uh \, dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(u)h \, dx, \;\; \forall h \in W^{2,2}(\mathbb{R}^N, V). \tag{2.3}$$

Teorema 2.3 *Sejam $V : [0, \infty) \to (0, \infty]$ uma função mensurável satisfezendo (V_1) e $f \in C^0(\mathbb{R}; \mathbb{R})$ satisfazendo (f_1) e (f_4). Suponha válidas $(f_{m,2})$, (V_α) e (F_m) $\alpha \in (0, 4)$ e $m \in (m_\alpha, 2^{**})$ ou $\alpha \in (4, 2N-4)$ e $m \in (2^{**}, m_\alpha)$, ou $\alpha \in [2N-4, \infty)$ e $m \in (2^{**}, \infty)$. Então o problema (2.1) admite infinitas soluções radiais $u \in W^{2,2}(\mathbb{R}^N, V)$ no seguinte da equação (2.3).*

O conjunto $(\alpha, m) \in \mathbb{R}^2$ onde existe solução fraca do problema (2.1) é representado pela seguinte região



Os Teoremas 2.2 e 2.3 serão provados na Seção 2.4 usando o Teorema do Passo da Montanha, Teorema A.10 do apêndice.

2.3 Resultados de Imersão

Sejam $N \geq 5$ e $V : [0, \infty) \to (0, \infty]$ mensurável satisfazendo (V_α) e (V_1). Nesta seção obteremos os resultados de imersões contínuas e compactas do espaço $W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N; V)$ introduzido na Seção 2.1.

Lema 2.4 *Se* $N \geq 5$ *e* $\alpha \in (0, 2N-4)$*, então existe* $C := C_{N,A,\alpha} > 0$ *tal que* $\forall u \in W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N; V)$ *temos que*

$$|u(x)| \leq C \frac{\|u\|}{|x|^{\frac{2N-4-\alpha}{4}}}, \text{ q.s em } \mathbb{R}^N.$$

Demonstração: Verificaremos a desigualdade para funções radiais em $C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \cap L^2(\mathbb{R}^N; V)$ e o resultado segue por densidade.

Como u é radial podemos definir $\varphi(t) := u(tx_0),\ t \in [0, \infty)$ para algum $x_0 \in \partial B_1$ fixado. Com isso $\varphi \in C_0^\infty([0, \infty))$ e $u(x) = \varphi(|x|)\ \forall x \in \mathbb{R}^N$. Da Proposição A.2 equação (A.1) vemos que

$$|\varphi'(t)| \leq C \frac{\|\Delta u\|_2}{t^{\frac{N-2}{2}}}. \tag{2.4}$$

Como $\alpha < 2N-4$, tome $k := \frac{2N-4-\alpha}{4}$ e note que $k \geq 0$. Daí,

$$\frac{d(t^k \varphi^2(t))}{dt} = 2t^k \varphi(t)\varphi'(t) + kt^{k-1}\varphi^2(t) \geq 2t^k \varphi(t)\varphi'(t). \tag{2.5}$$

De (2.4), (2.5) e (V_α) temos que

$$
\begin{aligned}
|x|^k|u(x)|^2 &\leq 2\int_{|x|}^{\infty} t^k|\varphi(t)||\varphi'(t)|dt \leq C\int_{|x|}^{\infty} t^k|\varphi(t)|\frac{\|\Delta u\|_2}{t^{\frac{N-2}{2}}}dt \\
&\leq C\|\Delta u\|_2\int_{|x|}^{\infty}\frac{|\varphi(t)|}{t^{\frac{\alpha}{2}}}t^{\frac{N-1}{2}}\frac{1}{t^{\frac{1+2k}{2}}}dt \\
&\leq C\|\Delta u\|_2\left(\int_{|x|}^{\infty}\frac{|\varphi(t)|^2}{t^{\alpha}}t^{N-1}dt\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{|x|}^{\infty}\frac{1}{t^{1+2k}}dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq C_{N,\alpha}\|\Delta u\|_2\left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u(x)|^2}{|x|^{\alpha}}dx\right)^{\frac{1}{2}}\frac{1}{|x|^k} \\
&\leq C_{N,A,\alpha}\frac{\|\Delta u\|_2\,\|u\|_{2,V}}{|x|^k} \leq C\frac{\|u\|^2}{|x|^k}.
\end{aligned}
$$

Daí, segue o resultado. □

Lema 2.5 *Se $N \geq 5$ e $q = \frac{2(N+b+1)}{N-4}$, onde $b \geq 0$, então, dado $R > 0$, existe $C := C_{N,R} > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R}|x|^b|u|^q dx \leq C\|\Delta u\|_2^q, \ \ \forall u \in W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N).$$

Demonstração: Basta verificar a desigualdade para $u \in C_{0,r}^{\infty}(\mathbb{R}^N)$. Sabemos que $u(x) = \varphi(|x|)$, onde $\varphi \in C_0^{\infty}([0,\infty))$, daí, $\frac{d}{dr}(r^{N+b}|\varphi|^q) = (N+b)r^{N+b-1}|\varphi|^q + qr^{N+b}|\varphi|^{q-2}\varphi\varphi'$. Com isso, de (A.1) e (A.2) temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R}|x|^b|u|^q dx=\int_R^\infty\int_{\partial B_R} r^b|\varphi(r)|^q d\sigma(x)dr = N\omega_N\int_R^\infty r^{b+N-1}|\varphi(r)|^q dr$$

$$\leq -\tfrac{N\omega_N q}{N+b}\int_R^\infty r^{b+N}|\varphi|^{q-2}\varphi\varphi' dr \leq \frac{4N\omega_N}{N-4}\int_R^\infty r^{b+N-\frac{N-4}{2}}|\varphi|^{q-1}|\varphi'|r^{\frac{N-4}{2}}dr$$

$$\leq C_N\left(\int_R^\infty r^{N-1+b}|\varphi|^q r^{b+5}|\varphi|^{q-2}dr\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_R^\infty r^{N-4}|\varphi'|^2 dr\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_N\left(\int_R^\infty r^{N-1+b}|\varphi|^q r^{b+5}\frac{\|\Delta u\|_2^{q-2}}{r^{\frac{N-4}{2}(q-2)}}dr\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_R^\infty r^{N-4}\frac{\|\Delta u\|_2^2}{r^{N-2}}dr\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_N\|\Delta u\|_2^{\frac{q}{2}}\left(\int_R^\infty r^{N-1+b}|\varphi|^q dr\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_R^\infty \frac{1}{r^2}dr\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq C_N\frac{1}{\sqrt{R}}\|\Delta u\|_2^{\frac{q}{2}}\left(\int_R^\infty\int_{\partial B_r} r^b|\varphi|^q d\sigma(x)dr\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$= C_{N,R}\|\Delta u\|_2^{\frac{q}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_R} r^b|\varphi|^q d\sigma(x)dr\right)^{\frac{1}{2}}$$

Logo, segue o resultado. □

Lema 2.6 *Sejam $N\geq 5$ e $\alpha\geq 2N-4$. Então existe $C:=C_{N,A}>0$ tal que $\forall u\in W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N;V)$*

$$|u(x)|\leq C\,\|u\|\,|x|^{\frac{\alpha-(2N-4)}{4}},\ \textit{para quase todo } 0\leq|x|\leq 1.$$

Demonstração: Basta mostrar para $u\in C_{0,r}^\infty(\mathbb{R}^N)$. Seja $u(x)=\varphi(|x|)$, onde $\varphi\in C_0^\infty([0,\infty))$ e seja $k:=\frac{2N-3-\alpha}{2}$. Note que

$$\frac{d}{dt}(t^k\varphi^2)=2t^k\varphi\varphi'+kt^{k-1}\varphi^2.$$

Com isso,

$$
\begin{aligned}
|x|^k|u(x)|^2 &= \int_0^{|x|} \frac{d}{dt}(t^k\varphi^2(t))dt = 2\int_0^{|x|} t^k\varphi\varphi' dt + k\int_0^{|x|} t^{k-1}\varphi^2 dt \\
&\le 2\int_0^{|x|} t^k|\varphi||\varphi'|dt + |k|\int_0^{|x|} t^{k-1}\varphi^2 dt.
\end{aligned}
$$

Vamos estimar cada uma das integrais separadamente.

De (A.2) temos que

$$
\begin{aligned}
\int_0^{|x|} t^k|\varphi||\varphi'|dt &\le C\|\Delta u\|_2 \int_0^{|x|} t^k|\varphi|\frac{1}{t^{\frac{N-2}{2}}}dt \le C\|\Delta u\|_2 \int_0^{|x|} \frac{|\varphi|}{t^{\frac{\alpha}{2}}} t^{\frac{N-1}{2}} dt \\
&\le C\|\Delta u\|_2 \left(\int_0^{|x|} \frac{|\varphi|}{t^\alpha} t^{N-1} dt\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_0^{|x|} dt\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\le \frac{C\|\Delta u\|_2}{\sqrt{AN\omega_N}} \|u\|_{2,V} |x|^{\frac{1}{2}} \le C\|u\|^2 |x|^{\frac{1}{2}}.
\end{aligned}
$$

Para a outra integral, vemos que

$$
\begin{aligned}
\int_0^{|x|} t^{k-1}\varphi^2 dt &\le \int_0^{|x|} \frac{|\varphi|^2}{t^\alpha} t^{N-1} t^{\frac{\alpha-3}{2}} dt \\
&\frac{|x|^{\frac{\alpha-3}{2}}}{AN\omega_N} \int_0^{|x|}\int_{\partial B_t} \frac{|u(y)|^2}{|y|^\alpha} d\sigma(y)dt \le C\|u\|^2 |x|^{\frac{\alpha-3}{2}}.
\end{aligned}
$$

Neste caso, como $|x| \le 1$, $\frac{\alpha-3}{2} \ge \frac{1}{2}$ e $|k| \le \frac{1}{2}$, temos que

$$
|x|^k|u(x)|^2 \le 2C\|u\|^2 |x|^{\frac{1}{2}} + |k|C\|u\|^2 |x|^{\frac{\alpha-3}{2}} \le C\|u\|^2 |x|^{\frac{1}{2}}.
$$

Daí,

$$
|u(x)| \le C\|u\| |x|^{\frac{1}{4}-\frac{k}{2}} = C\|u\| |x|^{\frac{\alpha-(2N-4)}{4}}.
$$

$\square$

Proposição 2.7 $W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N;V) \hookrightarrow L^m(\mathbb{R}^N),\ \forall\alpha \in [2N-4,\infty)$ *e* $\forall m \in [2^{**},\infty)$

Demonstração: Dado $m > 2^{**}$ tome $q = \frac{2(N+b+1)}{N-4} = 2^{**} + \frac{2(b+1)}{N-4} > m$.

Defina $S := \inf_{\substack{u \in W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N;V) \\ u \neq 0}} \frac{\|u\|^2}{\|u\|_q^2}$, assim, para mostrar a imersão basta mostrar que $S > 0$.

Suponha que $S = 0$. Neste caso, existe $\{v_n\} \subset W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N;V) \setminus \{0\}$ tal que $\frac{\|v_n\|^2}{\|v_n\|_q^2} \to 0$. Defina $u_n := \frac{v_n}{\|v_n\|_q}$ e note que $\|u_n\| \to 0$ e $\|u_n\|_q = 1$.

Do Lema 2.5 e do Lema 2.6 temos

$$\|u_n\|_q^q = \int_{B_1} |u_n|^q dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_1} |u_n|^q dx$$

$$\leq \int_{B_1} \|u_n\|^q |x|^{q\frac{\alpha-(2N-4)}{4}} dx + \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_1} |x|^b |u_n|^q dx$$

$$\leq C\|u_n\|^q + C\|\Delta u_n\|_2^q \leq C\,\|u_n\|^q \to 0.$$

Portanto, temos uma contradição.

Logo $W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N;V) \hookrightarrow L^q(\mathbb{R}^N) \cap L^{2^{**}}(\mathbb{R}^N)$ com $2^{**} < m < q$. Por interpolação temos o resultado.

$\square$

Proposição 2.8 $W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N;V) \hookrightarrow L^{m_\alpha}(\mathbb{R}^N)$ *para todo* $\alpha \in (0, 2N-4)$.

Demonstração: Para cada $\alpha \in (0, 2N-4)$, pelo Lema 2.4, temos que

$$|u(x)|^{m_\alpha} = |u(x)|^2 |u(x)|^{\frac{4\alpha}{2N-4-\alpha}} \leq C|u(x)|^2 \frac{\|u\|^{\frac{4\alpha}{2N-4-\alpha}}}{|x^\alpha|}, \;\; q.s \text{ em } \mathbb{R}^N.$$

Daí,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u(x)|^{m_\alpha} dx \leq C\,\|u\|^{\frac{4\alpha}{2N-4-\alpha}} \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)|u(x)|^2 dx \leq C\|u\|^{m_\alpha},$$

e portanto $\|u\|_{m_\alpha} \leq C\|u\|$. $\square$

Como $W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N;V) \hookrightarrow D^{2,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^{**}}(\mathbb{R}^N)$ e $W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N;V) \hookrightarrow L^{m_\alpha}(\mathbb{R}^N)$ temos, por interpolação, as seguintes imersões contínuas:

$$W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N;V) \hookrightarrow L^m(\mathbb{R}^N), \;\; \forall \alpha \in (0,4) \text{ e } \forall m \in [m_\alpha, 2^{**}]. \tag{2.6}$$

$$W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N;V) \hookrightarrow L^m(\mathbb{R}^N),\ \forall\alpha \in (4, 2N-4) \text{ e } \forall m \in [2^{**}, m_\alpha]. \tag{2.7}$$

$$W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N;V) \hookrightarrow L^m(\mathbb{R}^N),\ \forall\alpha \in [2N-4, \infty) \text{ e } \forall m \in [2^{**}, \infty). \tag{2.8}$$

Proposição 2.9 *As imersões (2.6), (2.7) e (2.8) são compactas para $m \neq 2^{**}, m_\alpha$.*

Demonstração: Queremos aplicar o Lema de Compacidade de Strauss, Proposição A.3.

Seja $\{u_n\} \subset W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N;V)$ limitada e sejam $P(s) := |s|^m$, $Q(s) := |s|^{2^{**}} + |s|^q$ onde $q = m_\alpha$ para as imersões (2.6) e (2.7) ou $q > m$ para a imersão (2.8). Pela reflexividade, $u_n \rightharpoonup u$ em $W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N;V)$ a menos de subsequência e temos ainda que:

(i) $\displaystyle\lim_{|s|\to\infty} \frac{P(s)}{Q(s)} = \lim_{s\to 0} \frac{P(s)}{Q(s)} = 0;$

(ii) $\displaystyle\lim_{|x|\to\infty} |u_n(x) - u(x)| = 0$ uniformemente com respeito a n;

(iii) $|u_n(x) - u(x)|^m \to 0$ q.s em $\mathbb{R}^N$;

(iv) $\displaystyle\sup_n \int_{\mathbb{R}^N} Q(u_n - u)dx < \infty.$

Em que, (ii) é devido a (A.1) e a limitação de $\{\|\Delta(u_n - u)\|_2\}$, (iii) segue, a menos de subsequência, da convergência fraca em $W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N;V)$ e por fim (iv) segue das imersões (2.6) e (2.7) ou (2.8) e da limitação de $\{u_n\}$ em $W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N;V)$.

Então, pelo Lema de Compacidade de Strauss $u_n \to u$ em $L^m(\mathbb{R}^N)$. □

Proposição 2.10 *Se $u \in W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N;V)$ e $\alpha \in (0, 2N-4)$, então existe $C := C(N, \alpha, A) > 0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{m_\alpha - 1}|v|dx \leq C\|u\|^{m_\alpha - 1}\|v\|,\ \forall v \in W^{2,2}(\mathbb{R}^N;V).$$

Demonstração: Usando a desigualdade de Hölder,

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{m_\alpha-1}|v|dx &= \int_{\mathbb{R}^N}|x|^{\frac{\alpha}{2}}|u|^{m_\alpha-1}\frac{|v|}{|x|^{\frac{\alpha}{2}}}dx\\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N}|x|^\alpha|u|^{2(m_\alpha-1)}dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|v|^2}{|x|^\alpha}dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N}|x|^\alpha|u|^{2(m_\alpha-1)}dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{\mathbb{R}^N}A^{-1}V(|x|)|v|^2dx\right)^{\frac{1}{2}}\\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N}|x|^\alpha|u|^{2(m_\alpha-1)}dx\right)^{\frac{1}{2}}\|v\|.\end{aligned}$$

Do Lema 2.4 temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N}|x|^\alpha|u|^{2(m_\alpha-1)}dx &= \int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u|^2}{|x|^\alpha}|x|^{2\alpha}|u|^{\frac{8\alpha}{2N-4-\alpha}}dx\\ &\leq C\|u\|^{\frac{8\alpha}{2N-4-\alpha}}\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u|^2}{|x|^\alpha}dx\\ &\leq C\|u\|^{\frac{8\alpha}{2N-4-\alpha}}\int_{\mathbb{R}^N}V(|x|)|u|^2dx\\ &\leq C\|u\|^{\frac{8\alpha}{2N-4-\alpha}}\|u\|^2 = C\|u\|^{2(m_\alpha-1)},\end{aligned}$$

o que completa a demonstração. □

Proposição 2.11 *Se $u \in W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N;V)$, então existe $C>0$ tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{2^{**}-1}|v|dx \leq C\|u\|^{2^{**}-1}\|v\|,\ \forall v \in W^{2,2}(\mathbb{R}^N;V).$$

Demonstração: Decorre da desigualdade de Hölder e da imersão de Sobolev. □

Proposição 2.12 *Se $N \geq 5$, $\alpha \in [2N-4,\infty)$ e $q = \frac{2N+b-3}{N-4}$, com $b > \alpha$, então $\forall u \in W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N;V)$*

$$\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{q-1}|v|dx \leq C\|u\|^{q-1}\|v\|,\ \forall v \in W^{2,2}(\mathbb{R}^N;V).$$

Demonstração: Note que

$$\int_{\mathbb{R}^N}|u|^{q-1}|v|dx = \int_{B_1}|u|^{q-1}|v|dx + \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1}|u|^{q-1}|v|dx.$$

Como na Proposição 2.10, temos que

$$\int_{B_1}|u|^{q-1}|v|dx \leq \left(\int_{B_1}|x|^\alpha|u|^{2(q-1)}dx\right)^{\frac{1}{2}}\|v\|.$$

Note que $q > 2$, portanto $2\alpha + (2q-4)\frac{\alpha-2N+4}{4} > 0$. Daí, seguindo novamente a mesma argumentação da Proposição 2.10, do Lema 2.6, temos que

$$\int_{B_1} |x|^\alpha |u|^{2(q-1)} dx \leq C\|u\|^{2q-4} \int_{B_1} \frac{|u|^2}{|x|^\alpha} |x|^{2\alpha+(2q-4)\frac{\alpha-2N+4}{4}} dx$$
$$\leq C\|u\|^{2q-4} \int_{B_1} \frac{|u|^2}{|x|^\alpha} dx \leq C\|u\|^{2(q-1)}.$$

Logo,

$$\int_{B_1} |u|^{q-1}|v| dx \leq C\|u\|^{q-1}\|v\|.$$

Da mesma forma,

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1} |u|^{q-1}|v| dx \leq \left(\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1} |x|^\alpha |u|^{2(q-1)} dx\right)^{\frac{1}{2}} \|v\|.$$

Como $b > \alpha$, então $|x|^\alpha \leq |x|^b$, para todo $0 \leq |x| \leq 1$. Como $2(q-1) = \frac{2(N+b+1)}{N-4}$, pelo Lema 2.5,

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1} |x|^\alpha |u|^{2(q-1)} dx \leq \int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1} |x|^b |u|^{2(q-1)} dx \leq \|\Delta u\|_2^{2(q-1)} \leq C\|u\|^{2(q-1)}.$$

Logo,

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus B_1} |u|^{q-1}|v| dx \leq C\|u\|^{q-1}\|v\|.$$

□

Proposição 2.13 *Se* $u \in W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N; V)$, *então para todo* $m \in [m_\alpha, 2^{**}]$ *ou* $m \in [2^{**}, m_\alpha]$ *ou* $m \in [2^{**}, \infty)$, *de acordo com que* $\alpha \in (0,4)$ *ou* $\alpha \in (4, 2N-4)$ *ou* $\alpha \in [2N-4, \infty)$, *existe* $C > 0$ *tal que*

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{m-1}|v| dx \leq C\|u\|^{m-1}\|v\|,\ \forall v \in W^{2,2}(\mathbb{R}^N; V).$$

Demonstração: Para $m \in [m_\alpha, 2^{**}]$ ou $m \in [2^{**}, m_\alpha]$ segue por interpolação das Proposições 2.10 e 2.11.

Se $m \in [2^{**}, \infty)$, tome $b = m\frac{(\alpha+2N-3)(N-4)}{N} + 3 - 2N$ na Proposição 2.12. Com isso, como $q > m$ o resultado segue, por interpolação, das Proposições 2.11 e 2.12.

□

Lema 2.14 *Assuma que V satisfaz (V_2) e seja $F \in C^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$ satisfazendo (f_2). Então existe $u \in W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N;V)$ tal que $\displaystyle\int_{\mathbb{R}} F(u)dx > 0$.*

Demonstração: Veja em [11]. □

2.4 Demonstração dos Teoremas 2.2 e 2.3

Nesta seção assumiremos que $V : [0,\infty) \to (0,\infty]$ é uma função mensurável satisfezendo (V_1) e $f \in C^0(\mathbb{R};\mathbb{R})$ satisfazendo (f_1). Suponha válidas $(f_{m,2})$ e (V_α) com $\alpha \in (0,4)$ e $m \in (m_\alpha, 2^{**})$, ou $\alpha \in (4, 2N-4)$ e $m \in (2^{**}, m_\alpha)$ ou $\alpha \in [2N-4,\infty)$ e $m \in [2^{**},\infty)$. Seja $F(s) := \int_0^s f(t)dt$ e $5 \le N$. Os Teoremas 2.2 e 2.3 serão obtidos como consequência dos lemas abaixo.

Defina o funcional $I : W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N;V) \to \mathbb{R}$ por

$$I(u) := \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^N} \left(|\Delta u|^2 + V(|x|)|u|^2\right) dx - \int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx.$$

De $(f_{m,2})$ e das imersões contínuas (2.6), (2.7) e (2.8) obtemos que $I \in C^1(W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N;V);\mathbb{R})$ com derivada de Fréchet em $u \in W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N;V)$ dada por

$$\langle I'(u), h\rangle = \int_{\mathbb{R}^N} \Delta u \Delta h + V(|x|)uh\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)h\, dx \quad \forall h \in W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N;V).$$

No seguinte lema obteremos o Princípio da Criticalidade Simétrica, o qual garante que os pontos críticos de I são soluções do problema 2.1.

Lema 2.15 *Todo ponto crítico de $I : W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N;V) \to \mathbb{R}$ satisfaz (2.3).*

Demonstração: De $(f_{m,2})$ e da Proposição 2.13 podemos definir $T : W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N;V) \to (W^{2,2}(\mathbb{R}^N;V))'$ por

$$\langle T(u), h\rangle := \int_{\mathbb{R}^N} \Delta u \Delta h + V(|x|)uh\, dx - \int_{\mathbb{R}^N} f(u)h\, dx.$$

Suponha, por absurdo, que exista $u \in W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N;V)$ tal que $I'(u) = 0$ e $T(u) \neq 0$.

Como $W^{2,2}(\mathbb{R}^N;V)$ é um espaço de Hilbert e $T(u) \in (W^{2,2}(\mathbb{R}^N;V))'$, então existe um único $\tilde{u} \in W^{2,2}(\mathbb{R}^N;V)$ tal que

$$\langle T(u), h\rangle = (\tilde{u}, h), \ \ \forall h \in W^{2,2}(\mathbb{R}^N;V).$$

Da invariância do Laplaciano por rotações, temos que

$$(\tilde{u}\circ g, h) = (\tilde{u}, h\circ g^{-1}), \ \ \forall h \in W^{2,2}(\mathbb{R}^N;V) \text{ e } \forall g \in O(N).$$

$$\langle T(u), h\circ g\rangle = \langle T(u), h\rangle, \ \ \forall h \in W^{2,2}(\mathbb{R}^N;V) \text{ e } \forall g \in O(N).$$

Com isso,

$$(\tilde{u}\circ g, h) = \langle T(u), h\circ g^{-1}\rangle = \langle T(u), h\rangle = (\tilde{u}, h), \ \ \forall h \in W^{2,2}(\mathbb{R}^N;V) \text{ e } \forall g \in O(N).$$

Daí, $\tilde{u}\circ g = \tilde{u}$ $\forall g \in O(N)$ e portanto $\tilde{u} \in W^{2,2}_r(\mathbb{R}^N;V)$. Neste caso, para todo $h \in W^{2,2}_r(\mathbb{R}^N;V)$, temos que

$$(\tilde{u}, h) = \langle T(u), h\rangle = \langle I'(u), h\rangle = 0.$$

Portanto, $\tilde{u} = 0$ e consequentemente $T(u) = 0$, o que é uma contradição. □

Lema 2.16 *O funcional $I : W^{2,2}_r(\mathbb{R}^N;V) \to \mathbb{R}$ satisfaz a condição de Palais-Smale.*

Demonstração: Seja $\{u_n\} \subset W^{2,2}_r(\mathbb{R}^N;V)$ tal que $\{I(u_n)\}$ é limitada e $I'(u_n) \to 0$. Devemos mostrar que $\{u_n\}$ é convergente em $W^{2,2}_r(\mathbb{R}^N;V)$ a menos de subsequência.

Afirmação 8 *$\{u_n\}$ é limitada em $W^{2,2}_r(\mathbb{R}^N;V)$.*

De fato, (f_1) temos que

$$I(u_n) - \frac{1}{\gamma}\langle I'(u_n), u_n\rangle \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}\right)\|u\|^2.$$

Como $I'(u_n) \to 0$, a partir de algum $n \in \mathbb{N}$ temos que $\|I'(u_n)\| < 1$, daí, $|\langle I'(u_n), u_n\rangle| < \|u_n\|$. Por hipótese, existe $C > 0$ tal que $|I(u_n)| \leq C$. Com isso,

$$C + \frac{\|u_n\|}{\gamma} \geq I(u_n) - \frac{1}{\gamma}\langle I'(u_n), u_n\rangle \geq \left(\frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma}\right)\|u\|^2 \Rightarrow \frac{C}{\|u_n\|^2} + \frac{1}{\gamma\,\|u_n\|} \geq \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma} > 0.$$

Supondo que $\{u_n\}$ não fosse limitada, teríamos que, a menos de subsequência, $\|u_n\| \to \infty$. Daí, aplicando o limite na desigualdade anterior obtemos que $0 < \frac{1}{2} - \frac{1}{\gamma} = 0$, um absurdo! Portanto temos o afirmado.

Neste caso, como $W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N; V)$ é Hilbert e da Proposição 2.9 temos que

$$u_n \rightharpoonup u \text{ em } W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N; V);$$

$$u_n \to u \text{ em } L^m(\mathbb{R}^N);$$

Defina $N : W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N; V) \to (W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N; V))'$ por

$$\langle N(u), h\rangle := \int_{\mathbb{R}^N} \Delta u \Delta h + V(|x|)uh\,dx,$$

e $K : W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N; V) \to (W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N; V))'$ por

$$\langle K(u), h\rangle := \int_{\mathbb{R}^N} f(u)hdx.$$

Podemos ver que N é invertível e K é compacto, portanto, como $\{u_n\}$ é $(P.S)$ e limitada, temos que $u_n \to u$ em $W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N; V)$ a menos de subsequência

$\square$

Demonstração do Teorema 2.2: Vamos verificar que o funcional I possui a geometria do passo da montanha.

As imersões contínuas (2.6), (2.7) e (2.8) juntamente com $(f_{m,2})$ implicam que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx\right| \leq C\int_{\mathbb{R}^N} |u|^m dx \leq C\,\|u\|^m\,, \ \ \forall u \in W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N; V).$$

Com isso,

$$I(u) \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - C\|u\|^m, \ \forall u \in W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N; V).$$

Portanto, como $m > 2$, existem $\rho, \delta > 0$ tais que para todo $u \in W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N; V)$, com $\|u\| = \rho$ tem-se que $I(u) \geq \delta$. Agora, vejamos que sob as hipóteses (V_2) e (f_2) ou sob a hipótese (f_3) temos existe $\bar{u} \in W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N; V)$ tal que $\|\bar{u}\| > \rho$ e $I(\bar{u}) < 0$.

1º caso: Se valem (V_2) e (f_2).

Neste caso, pelo Lema 2.14, exite $u \in W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N; V)$ tal que $\int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx > 0$. Defina $u_n(x) := u\left(\frac{1}{\mu_n}x\right)$, onde $\{\mu_n\} \subset (\mu_0, \infty)$ é uma sequência satisfazendo (V_2) e $\mu_n \to \infty$.

Assim temos que $u_n \in W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N; V)$. De (V_α) e da mudança de variáveis $y = \frac{1}{\mu_n}x$, obtemos que

$$\begin{aligned}
\|u_n\|^2 &= \frac{1}{\mu_n^4}\int_{\mathbb{R}^N}\left|\Delta u\left(\frac{1}{\mu_n}x\right)\right|^2 dx + \int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)\left|u\left(\frac{1}{\mu_n}x\right)\right|^2 dx \\
&= \mu_n^{N-4}\int_{\mathbb{R}^N}|\Delta u(y)|^2 dy + \mu_n^N\int_{\mathbb{R}^N} V(\mu_n|y|)\,|u(y)|^2 dy \\
&\geq \mu_n^{N-p}\|\Delta u\|_2^2 + \mu_n^{N-\alpha}A\int_{\mathbb{R}^N}\frac{|u|^2}{|y|^\alpha}dy \to \infty.
\end{aligned}$$

De (V_2) e fazendo a mesma mudança de variáveis obtemos ainda que

$$\begin{aligned}
I(u_n) &= \frac{1}{2}\mu_n^{N-4}\|\Delta u\|_2^2 + \frac{1}{2}\mu_n^N\int_{\mathbb{R}^N} V(\mu_n|x|)|u|^2dx - \mu_n^N\int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx \\
&\leq \frac{1}{2}\mu_n^{N-4}\|\Delta u\|_2^2 + \frac{B}{2}\mu_n^{N-\beta}\int_{\mathbb{R}^N} V(|x|)|u|^2dx - \mu_n^N\int_{\mathbb{R}^N} F(u)dx \to -\infty.
\end{aligned}$$

Logo, podemos tomar n suficientemente grande de modo que $\|u_n\| > \rho$ e $I(u_n) < 0$.

2º caso: Se apenas (f_3) ocorre.

De (f_3) e (f_1) temos que existe $\gamma > 2$ tal que $0 < \gamma F(t) \leq F'(t)t$, $\forall t \in \mathbb{R}$. Para $t \geq 1$, temos que $F'(t) > 0$, portanto F é crescente e bijetora, daí,

$$\frac{\gamma}{t} \leq \frac{F'(t)}{F(t)} \Rightarrow \int_1^s \frac{\gamma}{t}dt \leq \int_1^s \frac{F'(t)}{F(t)}dt \Rightarrow F(s) \geq F(1)s^\gamma, \ \forall s \geq 1.$$

Tome $u \in W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N; V)$ não negativo. Neste caso, para cada $\lambda > 1$ temos que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N} F(\lambda u)dx &= \int_{\lambda u \geq 1} F(\lambda u)dx + \int_{0 \leq \lambda u < 1} F(\lambda u)dx \geq \int_{\lambda u \geq 1} F(\lambda u)dx \\ &\geq \int_{\lambda u \geq 1} (\lambda u)^{\gamma} F(1)dx \geq F(1)\lambda^{\gamma} \int_{u \geq 1} u^{\gamma} dx.\end{aligned}$$

Como $\gamma > 2$,

$$I(\lambda u) \leq \frac{\lambda^2}{2} \|u\|^2 - F(1)\lambda^{\gamma} \int_{u \geq 1} u^{\gamma} dx \to -\infty.$$

Portanto, para $\lambda > 1$ suficientemente grande, $\|\lambda u\| > \rho$ e $I(\lambda u) < 0$.

Com isso, I possui a geometria do passo da montanha. Pelo Teorema do Passo da Montanha, Teorema A.10 existe uma sequência $\{u_n\} \subset W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N; V)$ tal que $I(u_n) \to c$ e $I'(u_n) \to 0$, onde $c > 0$ é o nível do passo da montanha. Pelo Lema 2.16, a menos de subsequência, $u_n \to u$ em $W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N; V)$. Como $I \in C^1(W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N; V); \mathbb{R})$, então $I'(u_n) \to I'(u)$ e $I(u_n) \to I(u)$. Daí, $I'(u) = 0$ e $u \neq 0$, pois caso contrário teríamos que $c = I(u) = 0$, uma contradição, ou seja, $u \in W_r^{2,2}(\mathbb{R}^N; V)$ é ponto crítico não trivial de I. Do Lema 2.15, temos que u é solução radial do problema (2.1) no sentido da equação (2.3).

□

Demonstração do Teorema 2.3: Aplicaremos o Teorema do Passo da Montanha Simétrico, Teorema A.11. Para isso precisamos verificar que I satisfaz as seguintes condições:

(i) $I(-u) = I(u)$;

(ii) Para todo subespaço não trivial de dimensão finita $Y \subset W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V)$ existe $R > 0$ tal que $I(u) \leq 0$ para todo $u \in Y$ com $\|u\| \geq \mathbb{R}$.

Vemos que (i) segue de (f_4). Para (ii) vamos raciocinar por absurdo. Suponha que (ii) não ocorra, então existe subespaço $Y \subset W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N; V)$ não trivial de dimensão finita no qual podemos construir uma sequência $\{u_n\}$ tal que $\|u_n\| \to \infty$ e $I(u_n) > 0$, para todo $n \in \mathbb{N}$.

Como Y tem dimensão finita todas as suas normas são equivalentes. Neste caso e de (F_m) temos que

$$\int_{\mathbb{R}^N} F(u_n)dx \geq \eta \int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^m dx \geq C \|u_n\|^m .$$

Sendo $m > 2$, obtemos que

$$I(u_n) = \frac{1}{2}\|u\|^2 - \int_{\mathbb{R}^N} F(u_n)dx \geq \frac{1}{2}\|u\|^2 - C\|u_n\|^m \to -\infty.$$

Portanto, existe n suficientemente grande tal que $I(u_n) < 0$, o que é uma contradição, logo (ii) é válido.

Dessa forma, o Teorema do Passo da Montanha Simétrico garante que I possui uma sequência ilimitada de valores críticos, a qual corresponde uma sequência de pontos críticos não triviais de I. Logo, pelo Lema 2.15, temos o desejado. $\square$

Apêndice

$\mathcal{A}$

Resultados Básicos

Neste apêndice reuniremos os resultados já consagrados na literatura que utilizamos ao longo do trabalho.

A seguinte proposição é um Lema devido a Kabeya, veja [33].

Proposição A.1 *Para $u \in W_r^{1,p}(\mathbb{R}^N)$ e $1 < p < N$, se $x \neq 0$, então para quase todo $x \in \mathbb{R}^N$*

$$|u(x)|^p \leq C|x|^{N-p}\|\nabla u\|_p^p,$$

onde C é uma constante dependendo somente de p e N.

Enunciaremos a seguir o Lema Radial para o biharmônico cuja demosntração pode ser vista em [37].

Proposição A.2 *Se $N \geq 5$ então existe $C := C_N > 0$ tal que para todo $u \in D_r^{2,2}(\mathbb{R}^N)$ temos que*

$$|u(x)| \leq C\frac{\|\Delta u\|_2}{|x|^{\frac{N-4}{2}}} \text{ q.s em } \mathbb{R}^N; \tag{A.1}$$

$$|\nabla u(x)| \leq C\frac{\|\Delta u\|_2}{|x|^{\frac{N-2}{2}}} \text{ q.s em } \mathbb{R}^N. \tag{A.2}$$

Enunciaremos um resultado de compacidade devido a Strauss, veja [15, 43].

Proposição A.3 (Lema de Compacidade de Strauss) *Sejam $P, Q : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funções contínuas satisfazendo*

$$\lim_{|s| \to +\infty} \frac{P(s)}{Q(s)} = 0.$$

Se $\{u_n\}$ é uma sequência de funções reais mensuráveis definidas em $\mathbb{R}^N$ tais que

(i) $\sup_n \int_{\mathbb{R}^N} |Q(u_n)|dx < +\infty$;

(ii) $P(u_n) \to v$ *q.s em* $\mathbb{R}^N$, *quando* $n \to +\infty$,

então para qualquer conjunto de Borel limitado B temos que

$$\int_B |P(u_n) - v(x)|dx \to 0, \text{ quando } n \to +\infty.$$

Além disso, se

(iii) $\lim_{|s| \to 0} \frac{P(s)}{Q(s)} = 0$;

(iv) $u_n(x) \to 0$ *quando* $|x| \to +\infty$ *uniformemente com respeito a* n,

então $P(u_n) \to v$ em $L^1(\mathbb{R}^N)$ quando $n \to \infty$.

A proposição a seguir é um lema devido a Brezis e Lieb em [22] e cuja demonstração também pode ser encontradas em [51].

Proposição A.4 *Sejam $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um aberto e $\{g_n\} \subset L^s(\mathbb{R}^N)$, com $1 \leq s < +\infty$ satisfazendo:*

(i) $g_n \to g$ *q.s em* Ω;

(ii) $\{g_n\}$ *limitada em* $L^s(\Omega)$.

Então,

$$\lim_{n \to \infty} \left(\|g_n\|_s^s - \|g_n - g\|_s^s\right) = \|g\|_s^s . \tag{A.3}$$

Observação A.5 *Uma obsevação devida a Brezis e Lieb e cuja demonstração pode ser encontrada em [34] é de que sob as mesmas hipóteses podemos concluir que $g_n \rightharpoonup g$ em $L^s(\Omega)$. Entretanto convergência fraca em $L^s(\Omega)$ não é suficiente para garantir a identidade (A.3), exceto quando $s = 2$.*

A seguinte proposição é o Lema 2.1 em [41]

Proposição A.6 *Sejam $x, y \in \mathbb{R}^N$. Então existe uma constante $C := C(p)$ tal que*

$$(|x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y) \cdot (x-y) \geq \begin{cases} C\dfrac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}}, & \textit{se } 1 < p < 2; \\ C|x-y|^p, & \textit{se } p \geq 2. \end{cases}$$

A proposição seguinte é a Proposição 14 em [9]

Proposição A.7 *Seja $\{\eta_n\} \subset \mathbb{R}^k$ uma sequência tal que $\lim\limits_{n\to+\infty} |\eta_n| = +\infty$. Seja $R > 0$ fixo, então dado $m \in \mathbb{N}\setminus\{0,1\}$ existe $n_m \in \mathbb{N}$ tal que para cada $n > n_m$ existem $g_1, \cdots, g_m \in O(k)$ satisfazendo a seguinte condição*

$$i \neq j \Rightarrow B_R(g_i\eta_n) \cap B_R(g_j\eta_n) = \emptyset.$$

Enunciaremos a desigualdade de Hardy-Sobolev devido a Badiale e Tarantello [13].

Teorema A.8 *Seja $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^{N-k}$, com $2 \leq k \leq N$. Se $1 < p < N$, $0 \leq s \leq p$, $s < k$ e $p_* = \frac{p(N-s)}{N-p}$, então existe uma constante positiva $C := C(s,p,N,k)$ tal que para todo $u \in D^{1,p}(\mathbb{R}^N)$*

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^{p_*}}{|y|^s} dx \leq C \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p \right)^{\frac{p_*}{p}} \tag{A.4}$$

A seguir apresentaremos o Teorema do Passo da Montanha devido a Ambrosetti e Rabinowitz cuja demonstração pode ser vista em [39, 51].

Definição A.9 *Sejam X um espaço de Banhac e $\varphi \in C^1(X;\mathbb{R})$. Dizemos que $\{u_n\} \subset X$ é uma sequência de Palais-Smale no nível c, ou simplesmente uma sequência $(PS)_c$, quando*

$$\varphi(u_n) \to c \quad \textit{e} \quad \varphi'(u_n) \to 0.$$

Dizemos que φ satisfaz a condição $(PS)_c$ se toda sequência $(PS)_c$ tem uma subsequência convergente.

Dizemos que φ satisfaz a condição (PS) quando satisfaz a condição $(PS)_c$ para todo $c \in \mathbb{R}$.

Teorema A.10 *Sejam X um espaço de Banach e $\varphi : X \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Suponha que existam $r, \rho > 0$ tais que $\varphi(u) \geq \rho$ para todo $u \in X$ com $\|u\| = r$, $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(v) < 0$ para algum $v \in X$ com $\|v\| > r$. Então, sendo*

$$\Gamma = \{\gamma \in C([0,1]; X); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = v\}$$

e

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} \varphi(\gamma(t)),$$

temos que $c \geq \rho > 0$ e existe uma sequência $(PS)_c$.

Enunciaremos agora o Teorema do Passo da Montanha Simétrico, cuja demonstração pode ser vista em [44], Teorema 6.5.

Teorema A.11 *Sejam X um espaço de Banach de dimensão infinita e $\varphi : X \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1. Suponha que φ satisfaz a condição (PS), $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(u) = \varphi(-u)$ para todo $u \in X$. Suponha ainda que $X = X^- \oplus X^+$, onde X^- tem dimensão finita, e*

1) Existem $r, \rho > 0$ tais que se $\|u\| = r$ e $u \in X^-$, então $\varphi(u) \geq \rho$.

2) Para todo subespaço de dimensão finita $Y \subset X$ existe $R > 0$ tal que $\varphi(u) \leq 0$ para todo $u \in Y$ com $\|u\| \geq R$.

Então φ possui uma sequência ilimitada de valores críticos.

Apresentaremos agora alguns resultados referentes a aplicação dualidade. Denotaremos por X um espaço de Banach real e por X' o seu dual. A norma em X será denotada por $\|\cdot\|$ e a norma em X' por $\|\cdot\|_*$. Se $\phi \in X'$ e $x \in X$, então $\langle \phi, x \rangle$ é a imagem de x por ϕ. O conjunto das partes de X' será representado por $\mathcal{P}(X')$.

Dado um operador $A : X \to \mathcal{P}(X')$, a imagem de A é definida pelo conjunto

$$\mathcal{R}(A) = \bigcup_{x \in D(A)} Ax,$$

onde $D(A) = \{x \in X;\ Ax \neq \emptyset\}$ é o domínio de A. O operador A é dito monótono se

$$\langle x_1' - x_2', x_1 - x_2 \rangle \geq 0,$$

sempre que $x_1, x_2 \in D(A)$ e $x_1' \in Ax_1$, $x_2' \in Ax_2$.

Uma função contínua $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ é dita uma *função de normalização* se é estritamente crescente, $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(r) \to +\infty$ quando $r \to +\infty$.

Dada uma função de normalização φ, associamos, a ela, uma aplicação dualidade $J_\varphi : X \to \mathcal{P}(X')$ definida por

$$J_\varphi(x) := \{x' \in X';\ \langle x', x \rangle = \varphi(\|x\|)\|x\|,\ \|x'\|_* = \varphi(\|x\|)\},$$

para cada $x \in X$.

O exemplo de aplicação dualidade que usaremos neste trabalho é quando a função de normalização é a identidade. Neste caso denotaremos a aplicação dualidade simplesmente por J.

Pelo Teorema de Hahn-Banach é fácil ver que $D(J_\varphi) = X$.

A seguinte proposição é um resultado de Dinca, Jebelean e Mawhim, cuja demonstração pode ser vista em [29].

Proposição A.12 *Se X é estritamente convexo, então J_φ é estritamente monótona, isto é,*

$$\langle x_1' - x_2', x_1 - x_2 \rangle > 0,$$

para cada $x_1, x_2 \in X$, $x_1 \neq x_2$ e $x_1' \in J_\varphi(x_1)$, $x_2' \in J_\varphi(x_2)$. Em particular, $J_\varphi(x_1) \cap J_\varphi(x_2) = \emptyset$ se $x_1 = x_2$.

Se Y é um subespaço fechado de X, então o anulador de Y em X' é o conjunto

$$Y^\perp := \{\phi \in X';\ \langle \phi, y \rangle = 0,\ \forall y \in Y\}.$$

Apresentemos em seguida um resultado devido a Browder em [23].

Teorema A.13 *Sejam X um espaço de Banach reflexivo, Y um subespaço fechado de X, X' o espaço dual de X e $Y^\perp$ o anulador de Y em X'. Seja ainda $J_\varphi : X \to \mathcal{P}(X')$ uma aplicação dualidade. Se $v_0 \in X$, $\phi_0 \in X'$, então*

$$J_\varphi(Y + v_0) \cap (Y^\perp + \phi_0) \neq \emptyset.$$

Corolário A.14 *Se X é um espaço de Banach reflexivo, então a aplicação dualidade J_φ é sobrejetora, isto é, dado $\phi \in X'$, existe $x \in X$ tal que*

$$\langle \phi, x\rangle = \varphi(\|x\|)\|x\| \ \ \textit{e} \quad \|\phi\|_* = \varphi(\|x\|)$$

Demonstração: De fato, dado $\phi \in X'$, devemos mostrar que $\phi \in J_\varphi(x)$ para algum $x \in X$. Tome $\phi_0 = \phi$, $Y = X$ e $v_0 = 0$ no Teorema A.13. Neste caso, $Y^\perp = \{0\}$ e

$$J_\varphi(X) \cap \{\phi\} \neq \emptyset,$$

isto é, $\phi \in J_\varphi(X) = \bigcup\limits_{x \in X} J_\varphi(x)$. Portanto, existe $x \in X$ tal que $\phi \in J_\varphi(x)$.

$\square$

Bibliografia

[1] Abdellaoui, B., Felli, V., e Peral, I. Existence and non-existence results for quasilinear elliptic equations involving the p-laplacian. *Boll. Unione Mat. Ital. 9-B* (2006), 445 – 484.

[2] Adams, R. A. *Sobolev spaces*. Academic Press, New York-London, 1975.

[3] Alves, C. O., e do Ó, J. M. Positive solutions of a fourth-order semilinear problem involving critical growth. *Adv. Nonlinear Stud. 2* (2002), 437 – 458.

[4] Alves, C. O., do Ó, J. M., e Miyagaki, O. H. Nontrivial solutions for a class of semilinear biharmonic problems involving critical exponents. *Nonlinear Anal. 46* (2001), 121 – 133.

[5] Alves, C. O., do Ó, J. M., e Miyagaki, O. H. On a class singular biharmonic problems involving critical exponent. *J. Math. Anal. Appl. 277* (2003), 12 – 26.

[6] Assunção, R. B., Carrião, P. C., e Miyagaki, O. H. Critical singular problems via concentration-compactness lemma. *J. Math. Anal. Appl. 326* (2007), 137 – 154.

[7] Assunção, R. B., Carrião, P. C., e Miyagaki, O. H. Multiplicity results for a degenerate quasilinear elliptic equations in half space. *Differential and Integral Equations 22* (2009), 753 – 770.

[8] Azorero, J. G., e Peral, I. Hardy inequalities and some critical elliptic and parabolic problems. *J. Differential Equations 144* (1998), 441 – 476.

[9] BADIALE, M., BENCI, V., E ROLANDO, S. A nonlinear elliptic equation with singular potential and applications to nonlinear field equations. *J. Eur. Math. Soc. 9* (2007), 355 – 381.

[10] BADIALE, M., GUIDA, M., E ROLANDO, S. Elliptic equations with decaying cylindrical potentials and power-type nonlinearities. *Adv. Diff. Eq 12* (2007), 1321 – 1362.

[11] BADIALE, M., E ROLANDO, S. A note on nonlinear elliptic problems with singular potentials. *Rend. Lincei Mat. Appl. 16* (2006), 1 – 13.

[12] BADIALE, M., E ROLANDO, S. Nonlinear elliptic equations with subhomogeneous potentials. *Nonlinear Anal. 72* (2010), 602 – 617.

[13] BADIALE, M., E TARANTELLO, G. A Sobolev Hardy inequality with applications to nonlinear elliptic equation arising in astrophysics. *Arch. Rat. Mech. Anal. 163* (2002), 259–293.

[14] BELLAZZINI, J., E BONANNO, C. Nonlinear schrödinger equations with o strongly singular potentials. *Proc. Royal Soc. of Edinburgh 140A* (2010), 707 – 721.

[15] BERESTYCKI, H., LIONS, P. L. Nonlinear Scalar Field Equations, I - Existence of a Ground State. *Arch. Rational Mech. Anal. 82* (1983), 313–345.

[16] BERNIS, F., AZORERO, J. G., E PERAL, I. Existence and multiplicity of nontrivial solutions in semilinear critical problems of fourth order. *Adv. Differential Equations 2* (1996), 219–240.

[17] BHAKTA, M., E BISWAS, A. Hardy-Sobolev type equations for p-laplacian, $1 < p < 2$ in bounded domain. *arXiv:0912.3048v2* (2010), 1 – 27.

[18] BHAKTA, M., E SANDEEP, K. Hardy-Sobolev-Maz'ya type equations in bounded domains. *J. Differential Equations 247* (2009), 119 – 139.

[19] BOCCARDO, L., E MURAT, F. Almost everywhere convergence of the gradients of solutions to elliptic and parabolic equations. *Nonlinear Anal. 19*, 6 (1992), 581 – 597.

[20] BOUCHEKIF, M., E MOKHTAR, M. E. O. E. Nonhomogeneous elliptic equations with decaying cylindrical potential and critical exponent. *Elec. J. Differential Equations 2011*, 54 (2011), 1–10.

[21] BREZIS, H. *Analyse fonctionnelle: Théorie et applications*. Masson, Paris, 1983.

[22] BREZIS, H., E LIEB, E. A relation between pointwise convergence of functions and convergence of functionals. *Proc. Amer. Math. Soc. 88* (1983), 486 – 490.

[23] BROWDER, F. E. Multivalued monotone nonlinear mappings and duality mappings in Banach spaces. *Trans. Amer. Math. Soc. 118* (1965), 338 – 351.

[24] CAFFARELLI, L., KOHN, R., E NIRENBERG, L. First order interpolation inequalities with weights. *Composition Math. 53* (1984), 259 – 275.

[25] CASTORINA, D., FABBRI, I., MANCINI, G., E SANDEEP, K. Hardy?Sobolev inequalities, hyperbolic symmetry and the webster scalar curvature problem. *J. Diff. Equations 246* (2009), 1187 – 1206.

[26] CHABROWSKI, J., E DO Ó, J. On some fourth order semilinear elliptic problems in $\mathbb{R}^n$. *Nonlinear Anal. 49* (2002), 861 – 884.

[27] CHEN, C., E WANG, H. Ground state solutions for singular p-Laplacian equation in $\mathbb{R}^n$. *J. Math. Anal. Appl. 351* (2009), 773 – 780.

[28] DIAZ, J. *Nonlinear partial differential equations and free boundaries*. Elliptic Equations Research Notes in Mathematics, 106. Pitman, Boston, London, Melbourne, 1986.

[29] DINCA, G., JEBELEAN, P., E MAWHIM, J. Variational and topological methods for Dirichlet problems with p-Laplacian. *Portugaliae Mathematica 58*, 3 (2001), 1 – 38.

[30] GAZZOLA, F., GRUNAU, H.-C., E SWEERS, G. *Polyharmonic boundary value problems*. Springer, Berlin, 2010.

[31] GHOUSSOUB, N., E YUAN, C. Multiple solutions for quasi-linear pdes involving the critical Sobolev and Hardy exponents. *Trans. Amer. Math. Soc. 352*, 12 (2000), 5703 – 5743.

[32] GILBARG, D., E TRUDINGER, N. S. *Elliptic partial differential equations of second order, Second edition*. Springer-Verlag, Berlin, 1983.

[33] KABEYA, Y. Existence theorems for quasilinear elliptic problems on $\mathbb{R}^n$. *Funkcialaj Ekvacioj 35* (1992), 603 – 616.

[34] KAVIAN, O. *Introduction à la théorie des points critiques et applications aux problèmes elliptiques*. Mathématiques et Applications 13. Springer-Verlag, New York/Berlin, 1993.

[35] MEIRA, S. A. *Equação biharmônica semilinear com condição de fronteira de Navier*. Tese de doutorado, UNB, Brasília - DF, 1996.

[36] MUSINA, R. Ground state solutions of a critical problem involving cylindrical weights. *Nonlinear Anal. 68* (2008), 3972 – 3986.

[37] NOUSSAIR, E. S., SWANSON, C. A., E YANG, J. Transcritical biharmonic equations in $\mathbb{R}^n$. *Funkcialaj Ekvacioj 35* (1992), 533 – 543.

[38] PUCCI, P., E SERVADEI, R. Existence, non-existence and regularity of radial ground states for p-Laplacian equations with singular weights. *Ann. I. H. Poincaré 25* (2008), 505 – 537.

[39] RABINOWITZ, P. H. *Minimax methods in critical point theory with applications to differential equations*. C. B. M.S.- A.M.S. 65, Providence, 1986.

[40] RODRIGUES, R. S. *Sistemas elípticos com pesos envolvendo o expoente crítico de Hardy-Sobolev*. Tese de doutorado, UFSCar, São Carlos - SP, 2007.

[41] SIMON, J. *Régularité de la solution d'une équation non linéaire dans* $\mathbb{R}^N$. Journées d'Analyse Non Linéaire (Proc. Conf., Besançon, 1977), pp. 205 – 227, Lecture Notes in Math., 665, Springer, Berlin, 1978.

[42] SOLIMINI, S. A note on compactness-type properties with respect to lorentz norms of bounded subsets of a Sobolev space. *Ann. Inst. Henry Poincaré - Analyse non linéaire 12* (1995), 319 – 337.

[43] STRAUSS, W. A. Existence of solitary waves in higher dimensions. *Comm. Math. Phys. 55* (1977), 149–172.

[44] STRUWE, M. *Variational methods*. Springer-Velarg, Berlin-Heidelberg, 1990.

[45] SU, J., E TIAN, R. Weighted Sobolev embeddings and radial solutions of inhomogeneous quasilinear elliptic equations. *Comm. on Pure and Appl. Anal. 9* (2010), 885 – 904.

[46] SU, J., WANG, Z.-Q., E WILLEM, M. Weighted Sobolev embedding with unbounded and decaying radial potentials. *J. Differential Equations 238* (2007), 201–219.

[47] TERRACINI, S. On positive entire solutions to a class of equations with a singular coefficient and critical exponent. *Adv. Differential Equations 1* (1996), 241 – 264.

[48] VASSILEV, D. L^p estimates and asymptotic behavior for finite energy solutions of extremals to Hardy-Sobolev inequalities. *Trans. Amer. Math. Soc. 363* (2011), 37 – 62.

[49] WANG, Y., E SHEN, Y. Multiple and sign-changing solutions for a class of semilinear biharmonic equation. *J. Differential Equations 246* (2009), 3109 – 3125.

[50] WANG, Y., E SHEN, Y. Nonlinear biharmonic equations with Hardy potential and critical parameter. *J. Math. Anal. Appl. 355* (2009), 649–660.

[51] WILLEM, M. *Minimax theorem*. PNLDE 24. Birkhauser, Boston, 1996.

[52] XIONG, H., E SHEN, Y. T. Nonlinear biharmonic equations with critical potential. *Acta Math. Sin. (Engl. Ser.) 21* (2005), 1285 – 1294.

[53] XUAN, B. Multiple solutions to p-Laplacian equation with singularity and cylindrical symmetry. *Nonlinear Anal. 55* (2003), 217 – 232.

[54] XUAN, B., E WANG, J. Existence of a nontrivial weak solution to quasilinear elliptic equations with singular weights and multiple critical exponents. *Nonlinear Anal. 72* (2010), 3649 – 3658.