

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

**FOLHEAÇÕES EM $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ ADMITINDO FEIXE
LINEAR POLAR REDUTÍVEL**

Gilberto Duarte Cuzzuol

Tese apresentada como requisito à obtenção do título de Doutor junto ao Programa de
Pós-Graduação em Matemática da UFMG

Setembro de 2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

**FOLHEAÇÕES EM $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ ADMITINDO FEIXE
LINEAR POLAR REDUTÍVEL**

Gilberto Duarte Cuzzuol


Tese apresentada ao Programa de Pós-Graduação em
Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais,
como parte dos requisitos para obtenção do Título de
Doutor em Matemática.

Orientação: Rogério Santos Mol

Belo Horizonte
Setembro/2011

ATA DA TRIGÉSIMA SÉTIMA DEFESA DE TESE DO ALUNO GILBERTO DUARTE CUZZUOL, REGULARMENTE MATRICULADO NO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA DO INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, REALIZADA DIA 08 DE SETEMBRO DE 2011.


Aos oito dias do mês de setembro de 2011, às 13h30, na Sala 3060, reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para julgar a defesa de tese do aluno **Gilberto Duarte Cuzzuol** intitulada: "*Folheações em P^2 admitindo feixe linear polar redutível*", requisito final para obtenção do Grau de doutor em Matemática. Abrindo a sessão, o Senhor Presidente da Comissão, Prof. Rogério Santos Mol, após dar conhecimento aos presentes o teor das normas regulamentares do trabalho final, passou a palavra ao aluno para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa do aluno. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se sem a presença do aluno e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: o aluno foi considerado aprovado, por unanimidade. O resultado final foi comunicado publicamente ao aluno pelo Senhor Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 08 de setembro de 2011.


PROF. ROGÉRIO SANTOS MOL
Orientador - (UFMG)


PROF. MÁRCIO GOMES SOARES
Examinador - (UFMG)


PROF. ARTURO ULISES FERNÁNDEZ PÉREZ
Examinador - (UFMG)


PROF. HERNÁN MAYCOL FALLA LUZA
Examinador - (UFF)


PROF. THIAGO FASSARELLA DO AMARAL
Examinador - (UFF)

*À Danúbia e à Maria
Eduarda.*

Agradecimentos

Certamente uma das partes mais difíceis que encontrei para escrever. Passados um mês da data da defesa, estas linhas ainda estão incompletas. Esta tese é hoje uma meta atingida e que foi traçada há cerca de 10 anos quando, ainda no início da graduação, decidi o que queria alcançar. Chegar aqui hoje é, sem dúvida, uma grande conquista não somente minha, mas de todos aqueles que caminharam ao meu lado.

Começo, assim, agradecendo ao professor Márcio Soares pela disposição em discutir as dúvidas, e foram várias, que surgiram ao longo desta caminhada desde o mestrado; por ter contribuído efetivamente em minha formação; pelas oportunidades que tive ao longo desta jornada e que, sem dúvida, tiveram em muito seu apoio.

Ao meu orientador Rogério Mol pela disposição, paciência e pela forma com que conduziu de maneira tão eficaz meus estudos até a conclusão desta tese. Agradeço por sua forma de orientar. Agradeço pela amizade, pelas conversas "além matemática". Agradeço pelas oportunidades que me proporcionou ao longo desses anos. Sou grato por suas (diversas) perguntas que se seguiam posteriormente a cada problema resolvido e que culminaram nesta tese. Agradeço por acreditar em mim.

Agradeço a professora Nuria Corral pela recepção tão calorosa em Santander. Por proporcionar uma experiência acadêmica ímpar em minha formação. Por trabalhar comigo e orientar meus estudos enquanto estive na Espanha. Agradeço também a Universidad de Cantabria por me acolher e dar suporte aos meus estudos.

Agradeço ao professor Felipe Cano (e a Universidad de Valladolid) pelo suporte financeiro que me possibilitou viajar para a Espanha e trabalhar com a Nuria no período em que lá estive. Vale destacar a grandeza desse pesquisador que se deslocou de Valladolid para Santander para conversar comigo, saber em que estava trabalhando e, gentilmente,

após apresentar-lhe meus trabalhos, direcionou meus estudos apontando questões a serem respondidas. Questões essas fundamentais para a conclusão de minha tese.

Tão bom saber que nesse nosso meio existem grandes pesquisadores com atitudes tão somente voltadas às questões matemáticas. A esses, meu muito obrigado.

Agradeço aos professores Arturo Ulisses Fernández Pérez, Hernán Maycol Falla Luza, Márcio Gomes Soares e Thiago Fassarela do Amaral por participarem da banca. Obrigado pela leitura minuciosa, pelas sugestões, pelos comentários e questionamentos.

À Capes por financiar parcialmente meu doutorado.

Agradeço ao professor Leonardo Câmara, pelo convite para ministrar um minicurso de verão na Ufes, onde tive a oportunidade de apresentar meus resultados. Agradeço pelas conversas e questionamentos.

Agradeço aos professores da UFMG: Renato Vidal, Fabio Brochero, Nikolai Goussevskii, Israel Vainsencher, Gilcione Nonato e Marcelo Terra Cunha pelos cursos e seminários ministrados, pelas conversas extraclasse.

Agradeço aos colegas da pós graduação Alexandre, Bafo, Drí, Éden-San, Flaviano, Godines, Heleno, Justin, Luciano, Narciso, Rafael Paraná, Reginaldo Demarque, Rodrigo Couto, Thiago Mesmo e Sebastian por tornarem agradável esse ambiente.

Agradeço à Andréa e à Kelly, secretárias da pós graduação pelo profissionalismo sempre presente e pela amizade.

Aos proprietários do Resort Melillo, Celio e Kelly, pelas estadias sempre aconchegantes, por suas amizades.

Ao Tonesco e ao Guillermo pelas inúmeras discussões e por suas amizades.

Ao Leandro e à Pita, pela amizade.

Ao Gaúcho (vulgo Rodrigo Bissacot) pelas várias noites de estudos regadas a café na UFMG, por sua enorme paciência em discutir assuntos distantes de sua área, por sua amizade e sua sinceridade.

Aos meus pais, pela ajuda e disposição de vir a Belo Horizonte para minha defesa.

A cada um dos meus irmãos, por acreditarem em mim.

Por fim, agradeço profundamente a esta que esteve sempre presente ao meu lado, desde a graduação, ao meu amor, à minha esposa, Danúbia. A ela agradeço simplesmente por tudo. Por ser minha alegria, por me trazer conforto, por ser companheira, conselheira, por acreditar em mim, mesmo nos momentos em que parecia ser a única a crer. Por ser minha cúmplice

nos meus momentos mais difíceis e ainda assim ser forte para me dar todo o suporte que precisei para continuar nessa jornada. Pelo apoio, pela paciência e por me proporcionar a alegria de ser pai do nosso anjo, Maria Eduarda. A ela o meu respeito, o meu amor e minha admiração.

Resumo

Dada uma folheação \mathcal{F} em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, fixamos uma reta $L \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ e definimos o feixe linear polar de \mathcal{F} com eixo L como sendo o conjunto de todas as curvas polares de \mathcal{F} com respeito aos pontos $l \in L$. Começamos esta tese estudando folheações \mathcal{F} que admitem um feixe linear polar cujo elemento genérico é redutível. A esta folheação \mathcal{F} é associado um modelo primitivo, que é uma folheação $\tilde{\mathcal{F}}$ cujo feixe linear polar, além de possuir elemento genérico irredutível, é tal que suas curvas estão contidas nas curvas do feixe linear polar de \mathcal{F} . Estabelecemos propriedades geométricas que relacionam folheações não primitivas e seus modelos primitivos associados como, por exemplo, relações entre os números de Milnor de suas singularidades. Na parte final, exploramos o conceito de equivalência linear, sendo que duas folheações são linearmente equivalentes se, e somente se, possuem o mesmo feixe linear polar. Usando esse conceito construímos uma família a dois parâmetros de folheações em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ com o mesmo conjunto singular e mesmos números de Milnor em suas singularidades, mostrando assim que apenas o conjunto singular de uma folheação não define a mesma. Mostramos ainda que a rede polar define de maneira única uma folheação \mathcal{F} em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ e, como consequência direta, o subesquema singular de uma folheação em \mathbb{P}^2 também a define. Por fim, estudamos as variedades invariantes comuns a duas folheações linearmente equivalentes e exploramos suas consequências.

Palavras-Chave: Feixe linear de curvas, feixe linear redutível, folheações primitivas, equivalência linear e rede polar.

Abstract

Given a foliation \mathcal{F} on $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, by fixing a line $L \subset \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$, we define the polar pencil of \mathcal{F} with axis L as the set of all polar curves of \mathcal{F} with respect to points $l \in L$. We begin this thesis by studying foliations \mathcal{F} which admit a polar pencil whose generic element is reducible. To such an \mathcal{F} we associate a primitive model, which is a foliation $\tilde{\mathcal{F}}$ whose polar pencil, besides having irreducible generic element, is such that its curves are contained in those of the polar pencil of \mathcal{F} . We establish geometric properties that relate a foliation \mathcal{F} and its primitive model $\tilde{\mathcal{F}}$, such as relations between the Milnor numbers of their singularities. In the final part, we explore the concept of linear equivalence, two foliations being linearly equivalent if, and only if, they have the same polar pencil. By using this concept, we construct a two-parameter family of foliations on $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ with the same singular set and the same Milnor numbers at their singular points, and this shows that the singular set alone does not define a foliation. We also prove that the polar net defines in a unique way a foliation \mathcal{F} in $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ and, as a direct consequence, a foliation on $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$ is uniquely defined by its singular subesqueme. Finally, we study common invariant varieties to two linearly equivalent foliations and explore its consequences.

Keywords: Pencil of curves, reducible linear pencil, primitive foliations, linear equivalence and polar net.

Sumário

INTRODUÇÃO	1
1 PRELIMINARES	7
1.1 FOLHEAÇÕES HOLOMORFAS EM \mathbb{P}^2	7
1.2 CURVAS POLARES	15
1.2.1 BREVE HISTÓRICO	15
1.2.2 DEFINIÇÕES E PRIMEIRAS PROPRIEDADES	18
2 MODELOS PRIMITIVOS	24
2.1 MODELOS PRIMITIVOS DE FOLHEAÇÕES NO PLANO PROJETIVO	24
2.1.1 FOLHEAÇÕES LINEARMENTE EQUIVALENTES	33
2.1.2 FOLHEAÇÕES COM MODELO PRIMITIVO DE GRAU 1	37
2.1.3 SINGULARIDADES DE FOLHEAÇÕES NÃO PRIMITIVAS E DE SEUS MODELOS PRIMITIVOS ASSOCIADOS	42
2.2 O ESTUDO DAS SINGULARIDADES EM L_∞	44
3 EQUIVALÊNCIA LINEAR	49
3.1 FOLHEAÇÕES LINEARMENTE EQUIVALENTES	49
3.2 ESTUDO DO CONJUNTO SINGULAR DE FOLHEAÇÕES LINEARMENTE EQUIVALENTES EM L_∞	51
3.3 SUBESQUEMAS SINGULARES	56
3.4 VARIEDADES INVARIANTES	61
REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS	69

INTRODUÇÃO

Neste trabalho é feito um estudo sobre as propriedades de reducibilidade do feixe linear de curvas algébricas

$$\mathcal{P} := \{\alpha P(x, y) + \beta Q(x, y) = 0; (\alpha : \beta) \in \mathbb{P}^1\},$$

em que $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ e $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ são polinômios nas variáveis x e y . Mais especificamente, damos condições que identificam quando o elemento genérico deste feixe linear é redutível. A seguinte situação se mostra clara: se os geradores P e Q tem um fator irredutível em comum, então este será um fator comum para todos os elementos deste feixe linear. Assim, podemos supor P e Q primos relativos. Neste caso, valendo-se do Teorema de Fatorização de Stein (veja [1]), pode-se afirmar que o elemento genérico de \mathcal{P} é redutível se, e somente se, existem polinômios $\tilde{P}(x, y)$ e $\tilde{Q}(x, y)$ e uma função racional $r : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ de grau r maior que um, chamado de grau de ramificação, tal que

$$\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = r \left(\frac{\tilde{P}(x, y)}{\tilde{Q}(x, y)} \right).$$

Para tal situação associamos duas folheações no plano projetivo \mathbb{P}^2 : uma folheação \mathcal{F} induzida em coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ pelo campo de vetores polinomial

$$\mathbf{v} = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

e uma segunda folheação $\tilde{\mathcal{F}}$ induzida no mesmo sistema de coordenadas afins pelo campo de vetores

$$\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{P}(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \tilde{Q}(x, y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Chamamos \mathcal{F} de *folheação não primitiva* e $\tilde{\mathcal{F}}$ seu *modelo primitivo associado*. Contudo, se o elemento genérico do feixe linear polar

$$\mathcal{P} := \{\alpha P(x, y) + \beta Q(x, y) = 0; (\alpha : \beta) \in \mathbb{P}^1\}$$

for irredutível, dizemos que \mathcal{F} é uma *folheação primitiva*. Nossa ideia é estudar esta

configuração, analisando as propriedades geométricas de \mathcal{F} e $\tilde{\mathcal{F}}$. Começamos, através da Proposição 2.1.6 que, enunciada como

PROPOSIÇÃO 2.1.6. *Se \mathcal{F} é folheação não primitiva então L_∞ é \mathcal{F} -invariante.*

nos diz que a reta do infinito é sempre invariante por uma folheação não primitiva. Mais adiante, mostramos através da Proposição 2.1.8 que se \mathcal{F} é uma folheação em \mathbb{P}^2 e L é uma reta do plano projetivo para a qual o feixe linear polar $\mathcal{P}(\mathcal{F}, L)$ é redutível, é valido que

PROPOSIÇÃO 2.1.8. *L é a única reta para a qual o feixe linear polar $\mathcal{P}(\mathcal{F}, L)$ é redutível.*

Assim, o conceito de folheação não primitiva é intrínseco à folheação, e não depende da escolha do sistema de coordenadas afins. A seguir, introduzimos o conceito de *equivalência linear* no espaço das folheações de grau d em \mathbb{P}^2 do seguinte modo: fixado um plano afim em \mathbb{P}^2 com coordenadas $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ consideramos \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 folheações em \mathbb{P}^2 induzidas nesse sistema, respectivamente, pelos campos de vetores polinomiais

$$\mathbf{v}_1 = P_1(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q_1(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2 = P_2(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q_2(x, y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Nessas condições, dizemos que as folheações \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 são *linearmente equivalentes* se existem $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, com $ad - bc \neq 0$, tais que

$$\begin{cases} P_1(x, y) = \alpha P_2(x, y) + \beta Q_2(x, y) \\ Q_1(x, y) = \gamma P_2(x, y) + \delta Q_2(x, y). \end{cases}$$

Observe que esse conceito equivale à existência de um elemento $g \in GL(2, \mathbb{C})$ da forma $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ de modo que os objetos acima se escrevem da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} P_2(x, y) \\ Q_2(x, y) \end{pmatrix} = g \cdot \begin{pmatrix} P_1(x, y) \\ Q_1(x, y) \end{pmatrix}. \quad (1)$$

Podemos ver que este conceito corresponde à ação de $GL(2, \mathbb{C})$ no espaço das folheações de \mathbb{P}^2 dada por

$$\begin{aligned} * : GL(2, \mathbb{C}) \times \mathcal{F}ol(d) &\longrightarrow \mathcal{F}ol(d) \\ (g, \mathcal{F}) &\longmapsto g_*\mathcal{F}, \end{aligned}$$

em que $g_*\mathcal{F}$ é a folheação de \mathbb{P}^2 definida na parte afim pela equação (1) acima.

Este conceito depende da fixação de um sistema de coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C}^2$. Uma vez fixado esse sistema, tal noção de equivalência linear estabelece uma relação de equivalência em $\mathcal{F}ol(d)$, o espaço das folheações de grau d em \mathbb{P}^2 . Nessa relação, as classes de equivalência corresponderão às órbitas de uma ação definida em $\mathcal{F}ol(d)$ e os feixes lineares polares com respeito a uma reta fixada L , tomada nesse sistema como a reta do infinito L_∞ , classificam as classes de equivalência por essa relação como enunciado na proposição a seguir:

PROPOSIÇÃO 2.1.10 *Duas folheações de grau d em \mathbb{P}^2 possuem o mesmo feixe linear polar com respeito à uma reta L se, e somente se, essas folheações são linearmente equivalentes.*

Uma consequência direta desse fato nos diz que dois modelos primitivos para uma mesma folheação são linearmente equivalentes. Na seção seguinte classificamos as folheações não primitivas com modelos primitivos de grau 1 sob a forma do teorema:

TEOREMA 2.1.6. *Seja \mathcal{F} uma folheação não primitiva em \mathbb{P}^2 que admite um modelo primitivo de grau afim um. Então, ou \mathcal{F} é uma folheação homogênea ou é uma folheação em uma variável.*

Definiremos por folheação homogênea como sendo uma folheação de grau d em \mathbb{P}^2 que em coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ é induzida por um campo de vetores polinomial cujas coordenadas são polinômios homogêneos de mesmo grau. Por folheação em uma variável, denotamos aquelas que, em coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, são induzidas por campos de vetores polinomiais cujas coordenadas são polinômios nas variáveis x ou y . No que diz respeito aos conjuntos singulares das folheações não primitivas e seus modelos primitivos associados, mostramos primeiramente que, na parte afim, essas folheações possuem o mesmo conjunto singular. A partir disso encontramos, por meio da Proposição 2.1.22 uma relação entre os números de Milnor das singularidades de folheações não primitivas e seus modelos primitivos associados, enunciada como

PROPOSIÇÃO 2.1.18 *Seja \mathcal{F} uma folheação não primitiva tendo $\tilde{\mathcal{F}}$ como modelo primitivo associado e m como grau de ramificação. Se $p \in \mathbb{C}^2$, então $\mu_p(\mathcal{F}) = m^2\mu_p(\tilde{\mathcal{F}})$.*

Uma consequência deste fato é que uma folheação tendo somente singularidades não degeneradas é primitiva. Isto, por sua vez implicará que a folheação genérica no espaço de folheações de grau d em \mathbb{P}^2 é primitiva Seguindo para a Seção 2.2, estudamos as

singularidades de \mathcal{F} e $\tilde{\mathcal{F}}$ que estão sobre a reta no infinito L_∞ .

Dedicamo-nos a seguir, no Capítulo 3, ao estudo das folheações linearmente equivalentes, um conceito introduzido no capítulo anterior e que aqui, estudamos dentre outras coisas o conjunto singular dessa classe de folheações linearmente equivalentes. Mostramos, ainda, como se movem as singularidades sobre a reta do infinito quando mudamos de classe de equivalência.

Introduzimos nesse capítulo conceito de subesquema singular de uma folheação \mathcal{F} denotado por $Sings(\mathcal{F})$, proposto por Antonio Campillo e Jorge Olivares no artigo [7] no qual eles demonstram o seguinte teorema:

TEOREMA 3.3.2. *Seja \mathcal{F} folheação reduzida de grau $r \geq 2$ e $\mathcal{I}_0 \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ o feixe de ideais de seu subesquema singular $Sings(\mathcal{F})$. Então, existe uma única tripla P, Q, R (a menos de múltiplo por escalar) em $\mathcal{V} = H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_0(r+1))$ satisfazendo a condição de Euler $XP + YQ + ZC = 0$. Em consequência desse fato, se $d \geq 2$, \mathcal{F} é a única folheação em $\mathcal{F}ol(d)$, tendo $Sings(\mathcal{F})$ como subesquema singular.*

Valendo-se do *LEMA DE NOETHER PARA FOLHEAÇÕES* devido a A. Lins Neto e D. Cerveau em [10], provamos a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 3.3.4. *Se duas folheações em \mathbb{P}^2 têm o mesmo subesquema singular então elas possuem a mesma rede polar.*

Assim, de posse do Lema de Noether para folheações e da proposição acima, enunciamos e provamos o seguinte teorema:

TEOREMA 3.3.5. *Se \mathcal{F} e $\tilde{\mathcal{F}}$ são folheações em $\mathcal{F}ol(d)$ induzindo a mesma rede polar, então $\mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}}$.*

Como consequência direta desse fato, damos uma prova alternativa ao teorema de Campillo-Olivares citado anteriormente que enunciamos no:

COROLÁRIO 3.3.6. *Se \mathcal{F} e \mathcal{F}' são folheações de mesmo grau em \mathbb{P}^2 com mesmo subesquema singular então $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$.*

Construímos ainda uma família a dois parâmetros de folheações em \mathbb{P}^2 de mesmo grau dada por

$$\mathcal{F}_{(\alpha, \beta)} = \left\{ \tilde{\mathcal{F}} = g_*\mathcal{F}; g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}) \right\},$$

possuindo genericamente o mesmo conjunto singular e mesmos números de Milnor nos pontos singulares, mostrando que apenas o conjunto singular de uma folheação em \mathbb{P}^2 , mesmo tendo números de Milnor como pesos, não define a mesma.

Na Seção 3.4 que trata de variedades invariantes, encontramos uma certa rigidez para a questão de curvas invariantes comuns a duas folheações linearmente equivalentes enunciada como:

PROPOSIÇÃO 3.4.3. *Sejam \mathcal{F} e \mathcal{F}' duas folheações distintas de mesmo grau em \mathbb{P}^2 . Suponha que \mathcal{F} e \mathcal{F}' tenham em comum uma curva algébrica irredutível invariante de grau maior ou igual a dois. Então, \mathcal{F} e \mathcal{F}' não são linearmente equivalentes.*

Tendo em vista a proposição acima, que nos garante que uma curva algébrica irredutível e invariante por duas folheações linearmente equivalentes é uma reta, analisamos o índice GSV de duas folheações distintas sobre uma reta comum e invariante por ambas e enunciamos o seguinte resultado com o qual finalizamos esse trabalho:

COROLÁRIO 3.4.8. *Sejam \mathcal{F} e \mathcal{F}' folheações em \mathbb{P}^2 linearmente equivalentes deixando uma reta $L \neq L_\infty$ invariante. Se $p \in L$ é uma singularidade comum às folheações \mathcal{F} e \mathcal{F}' então $GSV(\mathcal{F}, L, p) = GSV(\mathcal{F}', L, p)$.*

PRELIMINARES

1.1 FOLHEAÇÕES HOLOMORFAS EM \mathbb{P}^2

Uma folheação em uma superfície complexa suave X pode ser definida de várias maneiras. Começemos pela seguinte:

DEFINIÇÃO 1.1.1. Considere uma cobertura aberta $\{U_j\}_{j \in I}$ de X e em cada aberto U_j um campo de vetores holomorfo v_j com zeros isolados. Nas interseções $U_{ij} = U_i \cap U_j \neq \emptyset$, identificamos os campos v_i e v_j através de multiplicação por uma função holomorfa nunca nula

$$v_i = g_{ij}v_j, \text{ em } U_{ij}, \text{ e } g_{ij} \in \mathcal{O}_X^*(U_{ij}).$$

Isso nos diz que as curvas integrais de v_i e v_j se colam, nos dando as chamadas *folhas* de \mathcal{F} .

Obviamente, uma folheação não é simplesmente uma coleção $\{U_j, v_j\}_{j \in I}$, mas sim uma classe de equivalência de coleções deste tipo, onde

$$\{U_j, v_j\}_{j \in I} \sim \{U'_j, v'_j\}_{j \in I'}$$

se, e somente se, sempre que $U_j \cap U'_j \neq \emptyset$, v_j e v'_j definem a mesma direção, isto é, $v_j = f_{jj'}v'_j$, para $f_{jj'}$ holomorfa nunca nula.

DEFINIÇÃO 1.1.2. Seja \mathcal{F} folheação em X definida por $\{U_j, v_j\}_{j \in I}$. O conjunto singular $Sing(\mathcal{F})$ de \mathcal{F} é o subconjunto discreto de X definido por

$$Sing(\mathcal{F}) \cap U_j = \{x \in U_j; v_j(x) = 0\}.$$

OBSERVAÇÃO 1.1.3. Vamos sempre supor $Sing(\mathcal{F})$ de codimensão 2, pois caso existam componentes de codimensão 1, tomamos como $\{g = 0\}$ a equação de uma de suas componentes irredutíveis e, escrevendo v em coordenadas locais no aberto U_j na forma

$$v_j = a_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + a_2 \frac{\partial}{\partial z_2},$$

teremos que g divide cada a_1 e a_2 . Assim, fazendo $a_j = g\tilde{a}_j$, $j = 1, 2$, temos que o campo

$$\tilde{v} = \tilde{a}_1 \frac{\partial}{\partial z_1} + \tilde{a}_2 \frac{\partial}{\partial z_2},$$

induz uma folheação holomorfa regular em $U_j \setminus \tilde{S}$, onde $\tilde{S} = \{\tilde{a}_1 = \tilde{a}_2 = 0\}$. Esta folheação estende a folheação definida por v em $U \setminus Sing(\mathcal{F})$. Repetindo esse processo para todas as componentes irredutíveis de codimensão um de $Sing(\mathcal{F})$, obtemos uma folheação holomorfa singular \mathcal{F} , cujo conjunto singular tem codimensão 2.

As funções $g_{ij} \in \mathcal{O}^*(U_{ij})$ formam um cociclo multiplicativo e, conseqüentemente, uma classe cohomológica em $H^1(X, \mathcal{O}_X^*)$, ou seja, um *fibrado em retas* em X . Observe que tal fibrado em retas é definido intrinsecamente por \mathcal{F} . De fato, note que, se mudamos da carta afim $\{U_j, v_j\}_{j \in I}$ para uma carta equivalente $\{U'_j, v'_j\}_{j \in I'}$, obtemos um cociclo (g'_{ij}) cohomólogo a (g_{ij}) . Definimos assim o *fibrado cotangente* de \mathcal{F} , denotado por $T_{\mathcal{F}}^*$. Seu dual, $T_{\mathcal{F}}$, representado pelo cociclo inverso (g_{ij}^{-1}) , é chamado *fibrado tangente* de \mathcal{F} .

As relações $v_i = g_{ij}v_j$ em U_{ij} podem ser pensadas como relações de uma seção holomorfa global s de $T_{\mathcal{F}}^* \otimes TX$. Como cada v_j tem zeros isolados, podemos afirmar que s também tem zeros isolados sobre $Sing(\mathcal{F})$. Entretanto, é fácil ver que s não é definida intrinsecamente por \mathcal{F} . Com efeito, se mudarmos do representante $\{U_j, v_j\}_{j \in I}$ para $\{U_j, f v_j\}_{j \in I}$ onde $f \in \mathcal{O}_X^*(X)$, então s será substituída por $f s$. Por outro lado, uma seção holomorfa global s de $L \otimes TX$ com um conjunto de zeros discreto Z define uma folheação holomorfa \mathcal{F} com $Sing(\mathcal{F}) = Z$ e $T_{\mathcal{F}}^* = L$. Desse modo, chegamos a uma segunda definição equivalente de folheação:

DEFINIÇÃO 1.1.4. *Dado um fibrado em retas L em uma superfície M , uma folheação em M com fibrado L é uma seção holomorfa de $L \otimes TX$, com um conjunto discreto de zeros e a menos de multiplicação por uma função holomorfa nunca nula.*

Podemos também reformular a definição acima da maneira descrita a seguir: A seção

s de $T_{\mathcal{F}}^* \otimes TX$ pode ser vista como um morfismo $T\mathcal{F} \xrightarrow{\Phi} TX$, que é injetivo sobre os pontos regulares e nulo apenas sobre $Sing(\mathcal{F})$. Segue assim que tal morfismo se encaixa na seguinte sequência exata curta

$$0 \rightarrow T_{\mathcal{F}} \rightarrow TX \rightarrow \mathcal{I}_Z \cdot N_{\mathcal{F}} \rightarrow 0$$

onde $N_{\mathcal{F}}$ é um fibrado em retas suave em X e \mathcal{I}_Z é um feixe ideal baseado em $Sing(\mathcal{F})$.

Como o objetivo deste trabalho é estudar as folheações do plano projetivo complexo, passemos a considerar a superfície complexa $X = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Desse modo, tal morfismo Φ que define a folheação \mathcal{F} estabelece, para qualquer ponto $p \in \mathbb{P}^2$ fora de $Sing(\mathcal{F})$, uma direção em $T_p\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^2$, denotada por $T_p\mathcal{F}$. A distribuição de direções tangentes $p \mapsto T_p\mathcal{F}$, onde $p \in \mathbb{P}^2 \setminus Sing(\mathcal{F})$, define, neste conjunto, uma folheação não singular. Esta distribuição de direções corresponde, em coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, à distribuição definida por um campo de vetores polinomial da forma

$$\mathbf{v} = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y}. \quad (1.1)$$

Alternativamente, podemos representar a folheação \mathcal{F} em \mathbb{P}^2 em coordenadas homogêneas $(X : Y : Z) \in \mathbb{P}^2$. Suponha que o plano afim considerado acima seja $Z = 1$, onde estabelecemos coordenadas $x = X/Z$ e $y = Y/Z$. Seja $\eta = -Q(x, y)dx + P(x, y)dy$ a forma dual de \mathbf{v} . Tomando a projeção natural $\pi: \mathbb{C}^3 \setminus \{0\} \rightarrow \mathbb{P}^2$, temos que $\pi^*\eta$ é uma 1-forma meromorfa com um polo de ordem $d + 1$ ao longo de $Z = 0$. Cancelando este polo, encontramos uma forma polinomial

$$\omega = A(X, Y, Z)dX + B(X, Y, Z)dY + C(X, Y, Z)dZ, \quad (1.2)$$

onde A, B e C são polinômios homogêneos de grau $d + 1$. Iremos utilizar ao longo desta tese as representações de \mathcal{F} , tanto em coordenadas afins quanto em coordenadas homogêneas. Evidentemente, as retas passando pela origem de \mathbb{C}^3 devem ser invariantes por ω . Tal propriedade pode ser expressa pela condição de Euler

$$X A(X, Y, Z) + Y B(X, Y, Z) + Z C(X, Y, Z) = 0. \quad (1.3)$$

Observamos que, neste caso, $Sing(\mathcal{F})$ é o conjunto de zeros comuns de A, B e C . Como por hipótese $Sing(\mathcal{F})$ tem codimensão pelo menos 2, segue que A, B e C não

possuem fatores em comum. No plano afim $Z = 1$, com coordenadas afins $x = X/Z$ e $y = Y/Z$, a folheação \mathcal{F} é induzida pela 1-forma

$$\omega = A(x, y, 1)dx + B(x, y, 1)dy.$$

Assim, olhando para as curvas integrais do campo de vetores dual de ω , temos novamente o campo:

$$\mathbf{v} = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Tomamos aqui $P(x, y) = -B(x, y, 1)$ e $Q(x, y) = A(x, y, 1)$. Temos então duas situações: Se a reta no infinito $L_\infty : \{Z = 0\}$ é invariante por \mathcal{F} então Z divide A e B . Além do mais, para $k > 1$, Z^k não é um fator comum para A e B pois, caso contrário, Z seria um fator comum de A, B e C pela condição de Euler. Isto implica que $\max\{\deg P, \deg Q\} = d$. Por outro lado, se a reta no infinito não é invariante por \mathcal{F} , então Z não é um fator de ambos A e B . Logo, $P(x, y) = -B(x, y, 1)$ e $Q(x, y) = A(x, y, 1)$ têm grau $d + 1$. A condição de Euler escrita em coordenadas afins se lê:

$$xA(x, y, 1) + yB(x, y, 1) + C(x, y, 1) = xQ(x, y) - yP(x, y) + C(x, y, 1) = 0.$$

Os termos de grau $d + 2$ na relação acima nos dá a equação:

$$xQ_{d+1}(x, y) - yP_{d+1}(x, y) = 0,$$

onde P_{d+1} e Q_{d+1} são as partes homogêneas de grau $d + 1$ of P e Q , respectivamente. Logo, existe um polinômio homogêneo $G(x, y)$ de grau d tal que $P_{d+1}(x, y) = xG(x, y)$ e $Q_{d+1}(x, y) = yG(x, y)$. Concluimos que, quando L_∞ não é invariante, \mathcal{F} é induzida pelo campo de vetores do tipo

$$\mathbf{v} = (xG(x, y) + \hat{P}(x, y)) \frac{\partial}{\partial x} + (yG(x, y) + \hat{Q}(x, y)) \frac{\partial}{\partial y}, \quad (1.4)$$

onde \hat{P} e \hat{Q} compreendem os termos de grau menores ou iguais à d de P e Q .

Reciprocamente, seja \mathcal{F} uma folheação induzida em coordenadas afins (x, y) por um

campo de vetores da forma

$$\mathbf{v} = (xG(x, y) + \hat{P}(x, y))\frac{\partial}{\partial x} + (yG(x, y) + \hat{Q}(x, y))\frac{\partial}{\partial y},$$

onde G , quando não nulo, é um polinômio homogêneo de grau d , enquanto \hat{P} e \hat{Q} ou são polinômios de grau d , quando $G = 0$, ou de grau menor ou igual a d , quando $G \neq 0$. Então \mathcal{F} é uma folheação de grau d e L_∞ é \mathcal{F} -invariante se, e somente se, $G = 0$.

Esta escrita mostra que, visto como um campo meromorfo em \mathbb{P}^2 , o campo \mathbf{v} dado por

$$\mathbf{v} = P(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial}{\partial y}$$

tem um polo de ordem $d - 1$ na reta do infinito L_∞ . O grau d é interpretado geometricamente como o número de tangências, contadas com multiplicidades, entre \mathcal{F} e uma reta $L \subset \mathbb{P}^2$ não invariante por \mathcal{F} . O grau da folheação \mathcal{F} será denotado por $\text{grau}(\mathcal{F})$. Fica evidente que, em coordenadas afins, $\text{Sing}(\mathcal{F})$ é o conjunto de zeros comuns de $P(x, y)$ e $Q(x, y)$. Se tal conjunto tem uma componente de codimensão 1, ou seja, se $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ têm um fator em comum, podemos cancelar este fator e sempre supor que $\text{Sing}(\mathcal{F})$ é um conjunto finito de pontos.

DEFINIÇÃO 1.1.5. Chamamos de *folheação radial* com centro $l \in \mathbb{P}^2$ a folheação de grau 0 dada em coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ pelo campo de vetores

$$\mathbf{v} = (x - x_0)\frac{\partial}{\partial x} + (y - y_0)\frac{\partial}{\partial y},$$

onde $l = (x_0, y_0)$.

Consideramos agora \mathcal{F} um germe de folheação em $p = (0, 0) \in \mathbb{C}^2$, induzida em coordenadas locais (x, y) pelo campo de vetores

$$\mathbf{v} = P(x, y)\frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y)\frac{\partial}{\partial y} \tag{1.5}$$

em que $P, Q \in \mathcal{O}_p$ são primos relativos. Definimos o *número de Milnor* de \mathcal{F} em p como sendo

$$\mu_p(\mathcal{F}) = \mu_p(\mathbf{v}) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_p}{(P, Q)},$$

onde $(P, Q) \subseteq \mathcal{O}_p$ refere-se ao ideal gerado por P e Q .

OBSERVAÇÃO 1.1.6. São bem conhecidos os seguintes fatos a respeito do número de Milnor:

(i) $\mu = 0$ se, e somente se, $\mathbf{v}(p) \neq 0$;

(ii) $0 < \mu < \infty$ se, e somente se, p é singularidade isolada do campo \mathbf{v} ;

(iii) $\mu = 1$ se, e somente se, $\det \begin{pmatrix} \frac{\partial P}{\partial x} & \frac{\partial P}{\partial y} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} & \frac{\partial Q}{\partial y} \end{pmatrix} \neq 0$.

(iv) Tome $0 < \mu < \infty$. Dado $\epsilon > 0$ existe $\delta > 0$ tal que para qualquer $c \in \mathbb{C}^2$, com $\|c\| < \delta$, o número de soluções da equação $\mathbf{v}(z) = c$ na bola $B_p(\epsilon) = \{z; \|z-c\| < \epsilon\}$ é no máximo μ .

E mais, se p_1, \dots, p_m , com $m \leq \mu$, são tais soluções então

$$\sum_{1 \leq i \leq m} \mu_{p_i}(\mathbf{v} - c) = \mu,$$

(veja [6] para mais detalhes).

Suponha agora que a folheação \mathcal{F} tenha uma separatriz lisa S em p , isto é, um germe de curva holomorfa invariante por \mathcal{F} passando por $p = (0, 0)$. Se tomamos coordenadas locais $S = \{y = 0\}$, então \mathcal{F} será induzida por um campo de vetores da forma

$$\mathbf{v} = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + y\bar{Q}(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

que, restrito a S , é o campo de vetores $\mathbf{v}|_S = P(x, 0) \frac{\partial}{\partial x}$. Definimos o *número de Milnor relativo* de \mathcal{F} com respeito a S como a ordem de $\mathbf{v}|_S$ em $x = 0$, ou seja,

$$\mu_p(\mathcal{F}, S) = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}}{(P, y)} = \text{ordem}_{x=0} \mathbf{v}|_S = \text{ordem}_{x=0} P(x, 0).$$

Segue da definição que $\mu_p(\mathcal{F}, S) \leq \mu_p(\mathcal{F})$. Observamos também que, quando p é um ponto regular de \mathcal{F} , ambos os números são iguais a zero.

Agora, se S é um germe de curva suave em p , não invariante por \mathcal{F} , tomamos coordenadas locais (x, y) tais que $p = (0, 0)$ e $S : \{y = 0\}$, de modo que $Q(x, 0) \neq 0$.

A ordem de tangência entre \mathcal{F} e S em p é o seguinte número:

$$\tau_p(\mathcal{F}, S) = \text{ordem}_{x=0} Q(x, 0).$$

Como pode ser visto em [6] e [3], os invariantes $\mu_p(\mathcal{F})$, $\mu_p(\mathcal{F}, S)$ e $\tau_p(\mathcal{F}, S)$ independem das coordenadas locais e da expressão local do campo de vetores que induz a folheação \mathcal{F} .

Enunciaremos a seguir alguns resultados globais sobre estes invariantes.

PROPOSIÇÃO 1.1.7. *Seja \mathcal{F} uma folheação de grau d em \mathbb{P}^2 . Dada uma reta $L \subset \mathbb{P}^2$ não-invariante por \mathcal{F} , temos*

$$\sum_{p \in \mathbb{P}^2} \tau_p(\mathcal{F}, L) = d.$$

Demonstração. De fato, basta tomarmos um sistema de coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ para o qual a reta L tenha equação $y = 0$ e tal que \mathcal{F} e L não sejam tangentes em $q = L \cap L_\infty$, isto é, $\tau_q(\mathcal{F}, L) = 0$. Aqui, L_∞ denota a reta no infinito. Podemos supor também que L_∞ não é \mathcal{F} -invariante, de modo que \mathcal{F} seja induzida por um campo de vetores polinomial como em (1.4). Um simples cálculo mostra que $\tau_q(\mathcal{F}, L) = 0$ equivale ao fato de o grau de \hat{Q} em (1.4) ser d . Além do mais, sendo L não invariante por \mathcal{F} , a variável y não divide \hat{Q} , donde segue que $\hat{Q}(x, 0)$ tem de fato grau d . O resultado segue notando que em cada ponto $p = (x_0, 0) \in L$, a ordem de tangência $\tau_p(\mathcal{F}, L)$ é a multiplicidade de x_0 como uma raiz de $\hat{Q}(x, 0)$. \square

Agora, se $L \subset \mathbb{P}^2$ é uma reta invariante por \mathcal{F} , vale a

PROPOSIÇÃO 1.1.8.

$$\sum_{p \in L} \mu_p(\mathcal{F}, L) = d + 1. \tag{1.6}$$

Demonstração. Tomamos um sistema de coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ tal que L_∞ não seja invariante por \mathcal{F} , onde L tenha equação $y = 0$ e $q = L \cap L_\infty$ seja um ponto regular para \mathcal{F} . Temos, então, $\mu_q(\mathcal{F}, L) = 0$. Assim, supondo que \mathcal{F} é induzida por um campo vetorial como em (1.4), para um ponto $p = (x_0, 0) \in L$, temos que $\mu_p(\mathcal{F}, L)$ é a ordem de x_0 como uma raiz de $P(x, 0) = xG(x, 0) + \hat{P}(x, 0)$. O resultado segue do fato de que este polinômio tem grau $d + 1$. \square

Finalmente, a soma dos números de Milnor de uma folheação no plano projetivo nos dá um teorema do tipo Bézout, enunciado da seguinte forma

PROPOSIÇÃO 1.1.9. *Dada uma folheação de \mathbb{P}^2 de grau d temos que*

$$\sum_{p \in \mathbb{P}^2} \mu_p(\mathcal{F}) = d^2 + d + 1. \quad (1.7)$$

Demonstração. Para ver isto, suponha que \mathcal{F} seja induzida em coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ pelo campo de vetores polinomial $\mathbf{v} = P(x, y)\partial/\partial x + Q(x, y)\partial/\partial y$. Por uma escolha apropriada da reta no infinito L_∞ , podemos supor que esta não contenha nenhuma singularidade de \mathcal{F} . Isso, por sua vez, também implica que L_∞ não é invariante por \mathcal{F} e, portanto, também nos diz que P e Q tem grau $d + 1$. O Teorema de Bézout para as curvas projetivas definidas por P e Q nos dá que a soma dos seus números de interseção $(d + 1)^2 = d^2 + 2d + 1$. A soma correspondente aos pontos contidos no plano afim \mathbb{C}^2 é igual à soma dos números de Milnor das singularidades de \mathcal{F} . O resultado segue da observação que as duas curvas tem d pontos de interseção sobre L_∞ , contados com multiplicidade. Para ver isso, basta notarmos que ao escrevermos o campo \mathbf{v} como em (1.4) teremos sua forma dual dada por

$$\omega = (yG(x, y) + \tilde{Q}(x, y))dx - (xG(x, y) + \tilde{P}(x, y))dy. \quad (1.8)$$

Assim, consideramos a seguinte mudança de coordenadas

$$\begin{cases} x = 1/u \\ y = v/u. \end{cases}$$

Denotando por $(u, v) = \Phi(x, y)$ essa mudança de coordenadas, temos que \mathcal{F} é então induzida nessas novas coordenadas pela 1-forma $\tilde{\omega}$ pullback de ω por Φ dada por

$$\tilde{\omega} = \left[v\hat{P}(u, v) - \hat{Q}(u, v) \right] du - \left[G(1, v) + u\hat{P}(u, v) \right] dv, \quad (1.9)$$

onde \hat{P} e \hat{Q} são os polinômios \tilde{P} e \tilde{Q} avaliados nas novas coordenadas (u, v) . Assim, sobre a reta do infinito, agora com equação $\{u = 0\}$, encontramos d pontos, raízes de $G(1, v) = 0$, contados com multiplicidades. \square

1.2 CURVAS POLARES

1.2.1 BREVE HISTÓRICO

A história da “polarização” de polinômios tem origem com Gaspard Monge (1746-1818), considerado o principal criador da geometria descritiva, como uma maneira de considerar o seguinte problema:

Dada uma curva algébrica não singular Γ em \mathbb{R}^2 e um ponto ℓ , existem quantas retas tangentes a Γ passando por ℓ ?

O problema é fortemente relacionado com um fenômeno cotidiano relativo à visão. A percepção de um objeto transmitido ao cérebro por nossos olhos é construído a partir do contorno aparente do objeto, ou seja, pelo conjunto de retas tangentes à superfície fronteira do objeto e passando por nosso olho.

Mais tarde, Jean-Victor Poncelet (1788-1867) definiu a *curva polar* ou *locus polar* de um polinômio homogêneo $P(x, y, z)$ de grau d do seguinte modo: seja Γ a curva de equação $P(x, y, z) = 0$. Tome $\ell = (x_\ell : y_\ell : z_\ell)$ um ponto em $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$. Os pontos de Γ cujas tangentes a Γ passam por ℓ são os pontos comuns de Γ e da curva $P(\Gamma; \ell)$, de grau $d - 1$, chamada de *curva polar*, com equação

$$P(\Gamma; \ell) = x_\ell \frac{\partial P}{\partial x} + y_\ell \frac{\partial P}{\partial y} + z_\ell \frac{\partial P}{\partial z} = 0$$

e obtida por polarização do polinômio P com respeito ao ponto $(x_\ell : y_\ell : z_\ell)$. Se Γ é uma curva não singular, os pontos que procuramos, pontos de Γ cujas tangentes a Γ passam por $(x_\ell : y_\ell : z_\ell)$, são todos os pontos de interseção de Γ e $P(\Gamma; \ell)$. Pelo Teorema de Bézout, o número desses pontos contados com multiplicidade é $d(d - 1)$, para todo ponto $(x_\ell : y_\ell : z_\ell)$, de modo que o número de retas tangentes a parte real de Γ passando por um ponto $\ell \in \mathbb{R}^2$ é no máximo este número.

Com mais formalismo na escrita, por volta de 1828-1831, Étienne Bobillier (1798-1840) e Julius Plücker (1801-1868) foram provavelmente os primeiros a utilizarem coordenadas projetivas de um ponto de um espaço projetivo. Consideraram também a família de curvas polares como parametrizadas linearmente pelas coordenadas $(x_\ell : y_\ell : z_\ell)$, e

começaram o estudo do que veio a ser um dos primeiros exemplos de um sistema linear de curvas de grau maior que 3. De fato, um número razoável de ideias importantes surgiram naquele momento. Em primeiro lugar, o uso do plano projetivo como um ajuste natural para a geometria, uma ideia devida principalmente a Poncelet. Em segundo lugar, a ideia do grupo de transformações projetivas, é claro, não declarada explicitamente nesses termos, mas claramente presente nos trabalhos futuros de Monge e Poncelet. Por fim a *dualidade projetiva* vista, talvez, como uma transformação extra do plano projetivo.

A ideia da dualidade projetiva, devido a Poncelet, é a seguinte: uma reta no espaço projetivo \mathbb{P}^2 passa a ser um ponto no espaço projetivo dual $\check{\mathbb{P}}^2$ enquanto os pontos passam a ser retas. Poncelet viu que dada uma cônica não degenerada Q , desde que a curva polar de Q com respeito a qualquer ponto é uma reta, teremos um isomorfismo entre \mathbb{P}^2 e seu dual $\check{\mathbb{P}}^2$.

O conjunto de pontos de $\check{\mathbb{P}}^2$ correspondendo às retas em \mathbb{P}^2 tangentes a curva algébrica Γ é uma curva algébrica denotada por $\check{\Gamma} \subset \check{\mathbb{P}}^2$. Um ponto $x \in \mathbb{P}^2$ corresponde a uma reta \check{x} em $\check{\mathbb{P}}^2$. Cada ponto desta reta representa uma reta em \mathbb{P}^2 , a qual contem x e as retas passando por x tangentes a Γ corresponde aos pontos de interseção da curva $\check{\Gamma}$ e a reta $\check{x} \in \check{\mathbb{P}}^2$. A classe da curva Γ , definida como o número de retas tangentes a Γ em pontos não singulares e passando por um ponto genérico de \mathbb{P}^2 , é o grau \check{d} de $\check{\Gamma}$. Este número é igual a $d(d-1)$ se Γ não tem singularidades. Se a curva $\check{\Gamma}$ fosse regular, o cálculo dos graus daria $d(d-1)(d^2-d-1) = d$, ou seja, $d = 2$. Concluimos assim que, se $d > 2$, a forma dual de uma curva não singular é singular. Para uma curva não singular geral, pontos duplos correspondem a pontos tangentes de Γ e cúspides correspondem a seus pontos de inflexão.

Em suma, o problema de estimar a complexidade do contorno aparente, junto com o conceito de dualidade introduzido por Poncelet, levou à construção da curva dual de uma dada curva algébrica e o cálculo de seus graus para curvas e superfícies com singularidades simples.

O conceito (clássico) moderno de *locus polar* remonta a Francesco Severi (1879-1961), quando por volta do ano 1900 sob a orientação de Conrado Segre (1863-1924), obteve seu doutorado. Juntamente com uma série de outros artigos publicados na mesma época, trataram de questões enumerativas da geometria projetiva. Os conceitos e ideias de Severi foram retomados por John Arthur Todd (1908-1994) que, por volta de 1936, chamou os loci polares de *variedades polares* e as utilizou para definir as classes canônicas das variedades projetivas, além de mostrar que algumas combinações lineares destas classes são invariantes

projetivos.

Em outras palavras, Todd considerou uma variedade projetiva $X \subseteq \mathbb{P}^n$, suave, de dimensão r e, para cada inteiro k satisfazendo $0 \leq k \leq r$, considerou um subespaço linear $(n-r+k-2)$ -dimensional $L_{(k)}$ de \mathbb{P}^n . O r -espaço tangente T_x a X em um ponto x intersecta $L_{(k)}$ em um subespaço de dimensão pelo menos $k-2$. O conjunto de pontos $x \in X$ tais que este espaço inteseccção tenha dimensão ao menos $k-1$ é chamado de k -ésimo locus polar de X e denotado por $M_k(L_{(k)})$.

Tome, por exemplo, uma superfície $X \in \mathbb{P}^3$. Seja $L_{(1)} = \{p\}$ um ponto e $L_{(2)} = L$ uma reta em \mathbb{P}^3 . O primeiro locus polar $M_1(p)$ de X consiste de pontos tais que o plano tangente no ponto contém p , enquanto o segundo locus polar $M_2(L)$ consiste dos pontos cujos planos tangentes contém a reta L . Para uma escolha genérica de p , $M_1(p)$ é uma curva, enquanto que para uma escolha genérica de L , $M_2(L)$ consiste de um número finito de pontos.

Mais geralmente, digamos $X \subset \mathbb{P}^n$ com $\dim X = r$, o locus $M_k(L_{(k)})$ terá codimensão k em X para uma escolha genérica de $L_{(k)}$. Além do mais, para tais $L_{(k)}$, a classe de equivalência racional do ciclo definido por $M_k(L_{(k)})$ não depende de $L_{(k)}$. Tomamos $[M_k] = [M_k(L_{(k)})]$ para denotar essa classe e a chamamos da k -ésima classe polar de X . O grau μ_k de M_k é chamado a k -ésima classe.

Foi por volta de 1975 que ocorreu uma renovação da teoria de variedades polares, com contribuições essenciais de Ragni Piene ([23], [24]) que, estudando as classes polares de variedades singulares, estabeleceu relações entre tais classes polares e as classes características. Destacamos também Bernard Teissier [27], Lê Dung Tráng e M. Merle. A ideia nesta época era utilizar as classes de equivalência racionais de variedades polares genéricas como uma ferramenta que permitisse estabelecer um critério para classificar as variedades singulares através de seu caráter geométrico intrínseco.

Vale ressaltar nesse breve histórico que a construção de classes de Chern utilizando variedades de Schubert, estudadas por Hermann Cäsar Hannibal Schubert (1848-1911), já estava presente no artigo fundamental de 1946 de S.S Chern (1911-2004) [11], no qual ele deu várias construções de classes características para variedades Hermitianas. Esse trabalho, fornece embasamento para a relação entre a teoria de obstrução, Variedades de Schubert, formas diferenciais. Sendo assim, podemos perceber que, para o caso suave, tanto Schubert quanto Charles Ehresmann (1905-1979) trabalharam, mesmo que indiretamente,

com as variedades e classes polares, iniciadas pelos trabalhos de Severi, em paralelo com os trabalhos de Todd. Essa construção foi enfatizada por P.B. Gamkrelidze em [14] e [15] e a relação entre os invariantes de Todd e as classes de Chern tem sido descrita por Camkrelidze nos artigos acima citados e por S. Nakano em [22]. Deve-se então a Piene, valendo-se das classes polares, o trabalho de unir toda essa teoria em termos das variedades polares.

Valendo-se de toda a teoria acerca das classes e das variedades polares e as relacionando com a teoria de folheações que, por volta de 2000, nomes como Antonio Campillo, Jorge Olivares que, em [7] e [8], mostraram que uma folheação de grau maior que 1 é unicamente determinada pelo seu subesquema de pontos singulares. Márcio Soares no trabalho [26] utilizou as classes polares para, sob certas condições, dar uma cota para o problema de *Poincaré-Painlevé*, Rogério Mol no artigo [20], fazendo uso das classes polares, associou-as à distribuições holomorfas de subespaços tangentes de uma variedade projetiva provando, dentre outros, que tais classes podem ser calculadas em termos das classes de Chern-Mather dos feixes tangentes das distribuições. Citamos também a Nuria Corral que no trabalho [12] estudou a topologia das curvas polares associadas a curvas generalizadas, através do Teorema de decomposição da polar genérica, descreve o tipo equissingular da polar genérica em termos do tipo topológico (equissingular) da curva de separatrizes da folheação \mathcal{F} .

1.2.2 DEFINIÇÕES E PRIMEIRAS PROPRIEDADES

No espaço projetivo complexo \mathbb{P}^n , um *sistema linear* é simplesmente uma família de todas as hipersuperfícies U_λ da forma,

$$U_\lambda : \lambda_0 u^{(0)} + \dots + \lambda_s u^{(s)} = 0,$$

em que $\lambda := (\lambda_0, \dots, \lambda_s)$ é um ponto do espaço projetivo \mathbb{P}^s , o *espaço de parâmetros*, e na qual, $u^{(0)}, \dots, u^{(s)}$ são polinômios homogêneos linearmente independentes de mesmo grau nas $n + 1$ variáveis x_0, \dots, x_n . O sistema é chamado um *feixe linear* se $s = 1$ e uma *rede* se $s = 2$.

Se todos os membros U_λ contêm uma hipersuperfície em comum $U : u = 0$, então, U é dita ser uma *componente fixa*, e o sistema definido pelos quocientes $u^{(0)}/u, \dots, u^{(s)}/u$ é chamado *sistema residual*. Existe um menor sistema residual: aquele no qual u é o maior

divisor comum dos $u^{(i)}$. Se todos os membros desse menor sistema residual contém um ponto em comum ou uma variedade em comum, então, esse ponto ou variedade, será chamado de *ponto base* ou *variedade base* do sistema original.

Estaremos interessados ao longo desta tese, nos sistemas lineares de dimensões 1 e 2, ou seja, nos feixes lineares e também nas redes. Começaremos então, o estudo dos feixes lineares associados à uma folheação \mathcal{F} de \mathbb{P}^2 de grau d e conjunto singular $Sing(\mathcal{F})$, induzida em coordenadas homogêneas $(X : Y : Z)$ de \mathbb{P}^2 pela 1-forma dada pela equação (1.2) ou mesmo em coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ pelo campo vetorial dual da 1-forma (1.2) dado pela equação (1.5).

Denotaremos por $T_p^{\mathbb{P}}\mathcal{F}$ a reta por p com direção $T_p\mathcal{F}$ que chamaremos de *reta tangente projetiva* de \mathcal{F} em $p \in \mathbb{P}^2 \setminus Sing(\mathcal{F})$. O *locus polar* de \mathcal{F} com centro em $l \in \mathbb{P}^2$ é o fecho do conjunto de pontos $p \in \mathbb{P}^2 \setminus Sing(\mathcal{F})$ tal que $T_p^{\mathbb{P}}\mathcal{F}$ passa por l :

$$P_l^{\mathcal{F}} = \overline{\{p \in \mathbb{P}^2 \setminus Sing(\mathcal{F}); l \in T_p^{\mathbb{P}}\mathcal{F}\}}.$$

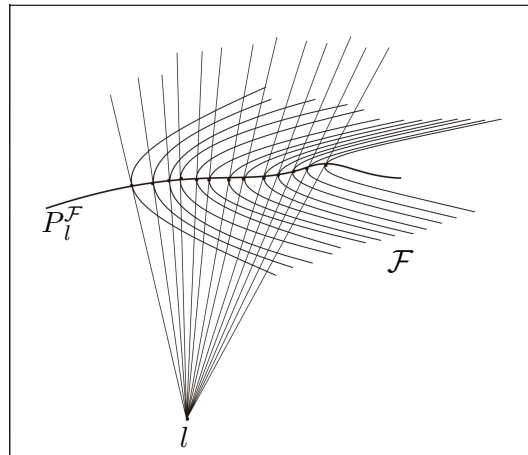


Figura 1.1: Curva polar de uma folheação \mathcal{F} centrada em $l \in \mathbb{P}^2$.

Em coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ como acima, tomando $l = (x_0, y_0)$, a curva polar $P_l^{\mathcal{F}}$ é então dada pela equação

$$(y - y_0)P(x, y) - (x - x_0)Q(x, y) = 0. \tag{1.10}$$

Em coordenadas homogêneas $(X : Y : Z) \in \mathbb{P}^2$, quando \mathcal{F} é induzida por uma

1-forma como em (1.2), a curva polar com centro $l = (\alpha : \beta : \gamma)$ é dada pela equação

$$\alpha A(X, Y, Z) + \beta B(X, Y, Z) + \gamma C(X, Y, Z) = 0. \quad (1.11)$$

Vemos assim que $P_l^{\mathcal{F}}$ é uma curva algébrica de grau $d + 1$. Além disso, por qualquer uma das duas equações acima nota-se que o centro l sempre está contido na curva polar $P_l^{\mathcal{F}}$.

Por outro lado, variando o centro $l = (\alpha : \beta : \gamma)$ da curva polar, produzimos um sistema linear em \mathbb{P}^2 gerado pelos divisores $A = 0$, $B = 0$ e $C = 0$.

PROPOSIÇÃO 1.2.1. *Seja \mathcal{F} uma folheação de grau d em \mathbb{P}^2 induzida por uma 1-forma homogênea como em (1.2). Se $d \geq 1$, então, seu sistema linear tem dimensão 2. Se $d = 0$ então temos um feixe linear.*

Demonstração. Seja \mathcal{F} a folheação induzida pela 1-forma ω dada por (1.2) e suponha, por contradição, que tal dimensão seja menor que 2. Então, um dos polinômios A , B ou C seria escrito como combinação linear dos outros, digamos $C = \lambda A + \mu B$, com $\lambda, \mu \in \mathbb{C}$. Agora, observe que se essa condição fosse satisfeita, da relação de Euler para os coeficientes de ω em (1.2), teríamos

$$XA + YB + Z(\lambda A + \mu B) = 0 \Leftrightarrow (X + \lambda Z)A = -(Y + \mu Z)B.$$

Se tivéssemos $d_0 = \text{grau}(A) = \text{grau}(B) = d + 1 \geq 2$, necessariamente A e B teriam um fator em comum. Se $d_0 > 2$, esse fator em comum teria grau pelo menos 2. Escrevendo a relação de Euler para os coeficientes de ω como $ZC = -(XA + YB)$, encontraríamos um fator comum para A , B e C , o que seria um absurdo. Agora se $d_0 = 2$, a relação de Euler $XA + YB + ZC = 0$ nos mostra que Z é um fator linear comum a A e B . A menos de multiplicação por escalar não nulo, podemos supor

$$A = -(Y - \beta Z)Z, B = (X - \alpha Z)Z,$$

e novamente pela relação de Euler, encontramos $C = (\alpha Y - \beta X)Z$ o que é uma contradição com o fato de A , B e C não possuírem fator em comum. \square

Portanto, para uma folheação \mathcal{F} de grau maior ou igual a 1, temos uma rede de curvas polares, também chamada de *rede polar*. Seus pontos-base, isto é, pontos comuns das

interseções de todas as curvas nessa família, são exatamente os pontos singulares de \mathcal{F} . Tal objeto foi estudado em [7], cujos autores provaram que, se $d \geq 2$ então, o subesquema singular de seus pontos-base determina \mathcal{F} .

Com o intuito de estudar o elemento genérico da rede polar de uma folheação \mathcal{F} em \mathbb{P}^2 , R. Mol através do Teorema de Bertini-Krull [25] que caracteriza os sistemas lineares cujo elemento genérico é redutível e enunciado como:

TEOREMA 1.2.2. *Seja K um corpo de característica 0 algebricamente fechado. Sejam P_0, P_1, \dots, P_r polinômios não nulos e distintos, relativamente primos em $K[\underline{x}]$, $r \geq 1$, em que $x = (x_1, \dots, x_n)$ são variáveis independentes, com $\max\{\text{grau}(P_i)\} > 0$. Então o conjunto dos valores $\underline{\lambda} = (\lambda_0 : \lambda_1 : \dots : \lambda_r) \in \mathbb{P}^r = \mathbb{P}_{\mathbb{C}}^r$ tal que*

$$F = F(\underline{x}, \underline{\lambda}) = P_0 + \lambda_1 P_1 + \dots + \lambda_r P_r$$

é redutível em $K[\underline{x}]$ é um aberto denso de Zariski em \mathbb{P}^r se, e somente se, as seguintes condições são válidas: Existem polinômios relativamente primos $\Phi, \Psi \in K[\underline{x}]$ com $\text{grau}_{\underline{x}}(F) > \max\{\text{grau}(\Phi), \text{grau}(\Psi)\}$ tais que existem $s > 1$ e $r + 1$ polinômios $h_i(u, v) \in K[u, v]$ homogêneos de grau s tal que

$$P_i = h_i(\Phi(\underline{x}), \Psi(\underline{x})) = \sum_{k=0}^s a_{ik} \Phi(\underline{x})^k \Psi(\underline{x})^{s-k}, i = 0, \dots, r,$$

de tal modo que, colocando

$$H(u, v, \underline{\lambda}) = \sum_{i=0}^r \lambda_i h_i(u, v)$$

tenhamos $F(\underline{x}, \underline{\lambda}) = H(\Phi(\underline{x}), \Psi(\underline{x}), \underline{\lambda})$.

prova o seguinte fato a respeito da curva polar genérica e para o qual daremos uma ideia da demonstração.

TEOREMA 1.2.3. *A curva polar genérica de uma folheação em \mathbb{P}^2 é irredutível.*

Demonstração. Seja \mathcal{F} folheação de grau d em \mathbb{P}^2 induzida, em coordenadas homogêneas $(X : Y : Z)$, pela 1-forma homogênea

$$\omega = A(X, Y, Z)dX + B(X, Y, Z)dY + C(X, Y, Z)dZ,$$

em que A, B e C são polinômios homogêneos de grau $d + 1$, satisfazendo a condição de Euler

$$XA(X, Y, Z) + YB(X, Y, Z) + ZC(X, Y, Z) \equiv 0.$$

Suponha que o elemento genérico da rede polar de \mathcal{F} ,

$$\alpha A(X, Y, Z) + \beta B(X, Y, Z) + \gamma C(X, Y, Z) = 0; (\alpha : \beta : \gamma) \in \mathbb{P}^2,$$

seja redutível.

Segue, pois, do Teorema de Bertinni-Krull que existem polinômios relativamente primos $\Phi, \Psi \in \mathbb{C}[X, Y, Z]$ tal que $\max\{\text{grau}(\Phi), \text{grau}(\Psi)\} < d + 1$ e polinômios homogêneos $h_0(u, v), h_1(u, v), h_2(u, v) \in \mathbb{C}[u, v]$ de grau s tal que

$$A = h_0(\Phi, \Psi), B = h_1(\Phi, \Psi), C = h_2(\Phi, \Psi).$$

Escreva

$$h_i(u, v) = \sum_{k=0}^s a_{ik} u^k v^{s-k}, i = 0, 1, 2.$$

Uma vez que $XA + YB + ZC \equiv 0$, isolando os termos em Φ^s em um mesmo lado da igualdade, conseguimos:

$$(Xa_{0s} + Ya_{1s} + ZCa_{2s})\Phi^s = - \sum_{k=0}^{s-1} (Xa_{0k} + Ya_{1k} + ZCa_{2k})\Phi^k \Psi^{s-k}. \quad (1.12)$$

Observamos primeiramente que $Xa_{0s} + Ya_{1s} + ZCa_{2s}$ na equação (1.12) acima é não nulo pois, caso contrário, encontraríamos $a_{0s} = a_{1s} = a_{2s} = 0$ e, desse modo, A, B e C teriam Ψ como fator comum.

Assim, uma vez que Φ e Ψ são primos relativos, a expressão (1.12) nos diz que Ψ divide $Xa_{0s} + Ya_{1s} + ZCa_{2s}$. Mas isso é possível se, e somente se, $\text{grau}(\Psi) = 1$ e isso nos fornece $\Psi = \lambda(Xa_{0s} + Ya_{1s} + ZCa_{2s})$ para algum $\lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$.

De maneira análoga, encontramos $\text{grau}(\Phi) = 1$ e $\Phi = \xi(Xa_{0s} + Ya_{1s} + ZCa_{2s})$ para algum $\xi \in \mathbb{C} - \{0\}$.

A demonstração de que esses fatos a respeito dos mapas Φ e Ψ nos fornece uma contradição se dá após considerarmos a seguinte mudança de coordenadas:

$$\begin{cases} u = \Phi(X, Y, Z) = \xi(Xa_{00} + Ya_{10} + ZCa_{20}) \\ v = \Psi(X, Y, Z) = \lambda(Xa_{0s} + Ya_{1s} + ZCa_{2s}) \\ w = \Lambda(X, Y, Z) = Xa + Yb + Zc, \end{cases}$$

em que Λ é uma forma linear qualquer tal que Φ , Ψ e Λ sejam linearmente independentes. Denotando por $(u, v, w) = F(X, Y, Z)$ essa mudança linear de coordenadas, \mathcal{F} é então induzida nessas novas coordenadas pela 1-forma $\tilde{\omega}$ pullback de ω por F e dada por

$$\tilde{\omega} = \tilde{A}(u, v)du + \tilde{B}(u, v)dv + \tilde{C}(u, v)dw,$$

em que \tilde{A} , \tilde{B} e \tilde{C} são polinômios homogêneos de grau $d + 1$ nas variáveis u e v . A condição de Euler para $\tilde{\omega}$ nos fornece que $\tilde{C} \equiv 0$, contradizendo o fato de que $d = \text{grau}(\mathcal{F}) \geq 1$ e os polinômios \tilde{A} , \tilde{B} e \tilde{C} serem linearmente independentes. \square

MODELOS PRIMITIVOS

Neste capítulo desenvolveremos o conceito de modelos primitivos de folheações do plano projetivo complexo. Tal conceito será definido a partir da reducibilidade do feixe linear polar de uma folheação com respeito a uma reta fixa L . Estabeleceremos propriedades geométricas que relacionam folheações não primitivas e seus modelos primitivos associados, como por exemplo, relações entre os números de Milnor de suas singularidades.

2.1 MODELOS PRIMITIVOS DE FOLHEAÇÕES NO PLANO PROJETIVO

Considere \mathcal{F} , folheação em \mathbb{P}^2 induzida em coordenadas homogêneas $(X : Y : Z) \in \mathbb{P}^2$ pela 1-forma polinomial

$$\omega = A(X, Y, Z)dX + B(X, Y, Z)dY + C(X, Y, Z)dZ. \quad (2.1)$$

Como visto na Seção 1.2.2, a curva polar com centro $l = (\alpha : \beta : \gamma)$ da folheação \mathcal{F} tem equação

$$\alpha A(X, Y, Z) + \beta B(X, Y, Z) + \gamma C(X, Y, Z) = 0. \quad (2.2)$$

É possível observar, pela equação acima que, se \mathcal{F} tem grau $d \geq 1$, então $P_l^{\mathcal{F}}$ é uma curva de grau $d + 1$. Além disso, $P_l^{\mathcal{F}}$ contém todas as singularidades de \mathcal{F} , bem como o ponto l , pois os zeros comuns de A , B e C , singularidades de \mathcal{F} , também satisfazem a equação (2.2).

Variando o centro $l = (\alpha : \beta : \gamma)$ da curva polar, produzimos um sistema linear em \mathbb{P}^2 gerado pelos divisores $A = 0$, $B = 0$ e $C = 0$ da forma que induz \mathcal{F} . Como mostrado na Proposição 1.2.1, se o grau da folheação \mathcal{F} é maior do que ou igual a 1, tal sistema tem

dimensão 2. Nesse caso, teremos uma rede de curvas polares, também chamada de *rede polar*.

Agora, se fixamos uma reta $L \subset \mathbb{P}^2$ e tomamos todas as curvas polares de \mathcal{F} cujos centros estejam sobre a reta L , teremos o *feixe linear polar* de \mathcal{F} com *eixo* L . O conjunto dessas curvas é, pois,

$$\alpha A(X, Y, Z) + \beta B(X, Y, Z) + \gamma C(X, Y, Z) = 0, \quad (\alpha : \beta : \gamma) \in L$$

e será denotado por $\mathcal{P}(\mathcal{F}, L)$.

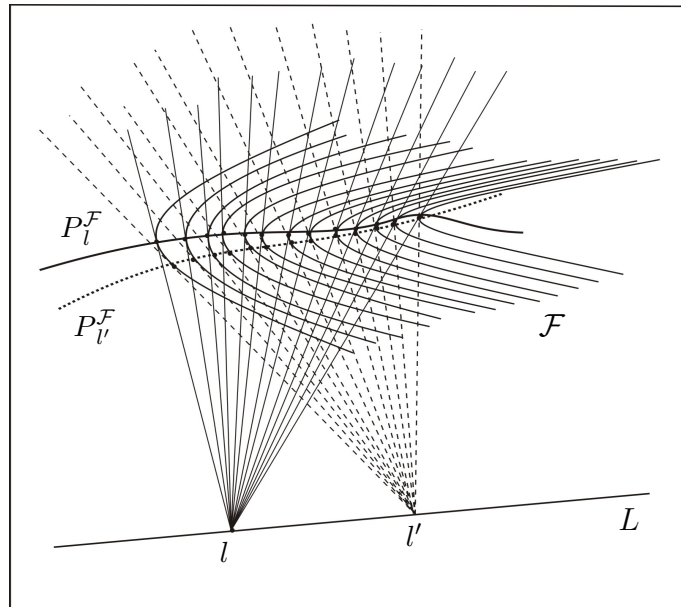


Figura 2.1: Feixe linear de curvas polares cujos centros estão contidos numa reta L .

O resultado a seguir nos mostra quando tal família de curvas possui uma componente fixa, ou seja, uma componente comum a todas as curvas dessa família.

PROPOSIÇÃO 2.1.1. *Seja $L \subset \mathbb{P}^2$ uma reta \mathcal{F} -invariante. Então L é uma componente fixa de $\mathcal{P}(\mathcal{F}, L)$ com multiplicidade um. Reciprocamente, a única componente fixa admitida em $\mathcal{P}(\mathcal{F}, L)$ é a reta L que, nesse caso, é \mathcal{F} -invariante e de multiplicidade um. Em particular, se L não é invariante por \mathcal{F} , então $\mathcal{P}(\mathcal{F}, L)$ não tem componentes fixas.*

Demonstração. Suponha primeiro que L seja \mathcal{F} -invariante e fixe $l \in L$. Então, a \mathcal{F} -invariância de L nos dá $l \in T_p^{\mathbb{P}}\mathcal{F}$ para todo $p \in L \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$. Assim, $L \subset P_l^{\mathcal{F}}$. Sendo

$l \in L$ arbitrário, temos $L \subset \mathcal{P}(\mathcal{F}, L)$. No que diz respeito à multiplicidade da reta L , tomando-a como $L : \{Z = 0\}$ no sistema de coordenadas homogêneas $(X : Y : Z)$ de \mathbb{P}^2 , temos

$$\mathcal{P}(\mathcal{F}, L) = \{\alpha A(X, Y, Z) + \beta B(X, Y, Z) = 0; (\alpha : \beta) \in \mathbb{P}^1\}.$$

Assim, se L fosse um elemento fixo do feixe linear com multiplicidade $k > 1$, então Z^k seria um divisor de ambos os polinômios A e B . Da condição de Euler (1.3), isso implicaria que Z^{k-1} seria um divisor de C e teríamos encontrado uma componente de codimensão um em $\text{Sing}(\mathcal{F})$, o que seria um absurdo.

Para a recíproca, primeiro observamos que, se $\mathcal{P}(\mathcal{F}, L)$ tem uma reta L' em sua base, então $L' = L$. De fato, se $p \in L' \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$, então, $l \in T_p^{\mathbb{P}}\mathcal{F}$ para todo $l \in L$. Mas, se $L' \neq L$ e se $p \notin L$, então, $T_p^{\mathbb{P}}\mathcal{F}$ intersecta L somente em um ponto. Assim, a única possibilidade restante é que tenhamos $L' = L$. Então, para $l \in L$ fixado e para todo $p \in L \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$ teremos $l \in T_p^{\mathbb{P}}\mathcal{F}$. Isso nos dá $T_p^{\mathbb{P}}\mathcal{F} = L$ para todo $p \in L \setminus \text{Sing}(\mathcal{F})$ e a \mathcal{F} -invariância de L . Pela primeira parte da prova, L tem multiplicidade um. Finalmente, a existência de uma componente irredutível fixa de $\mathcal{P}(\mathcal{F}, L)$ de grau maior que um com equação $F(X, Y, Z) = 0$ implicaria que F seria um fator de ambos os polinômios A e B . Concluiríamos, pois, pela condição de Euler, que tal componente seria um fator de C , originando assim uma componente de codimensão um em $\text{Sing}(\mathcal{F})$, o que é uma contradição. \square

DEFINIÇÃO 2.1.2. Considere uma folheação \mathcal{F} em \mathbb{P}^2 . Seu feixe linear polar modificado com eixo na reta $L \subset \mathbb{P}^2$, denotado por $\mathcal{P}^*(\mathcal{F}, L)$, é o feixe linear obtido de $\mathcal{P}(\mathcal{F}, L)$ do seguinte modo:

$$\mathcal{P}^*(\mathcal{F}, L) = \begin{cases} \mathcal{P}(\mathcal{F}, L) - L, & \text{se } L \text{ é } \mathcal{F}\text{-invariante;} \\ \mathcal{P}(\mathcal{F}, L), & \text{se } L \text{ não é } \mathcal{F}\text{-invariante.} \end{cases}$$

Pela Proposição 2.1.1, $\mathcal{P}^*(\mathcal{F}, L)$ é livre de componentes fixas.

Escolhemos agora um sistema de coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, no qual a reta L é a reta no infinito, fazendo $L : \{Z = 0\}$, $x = X/Z$ e $y = Y/Z$. Consideramos, nesse sistema de coordenadas, a folheação \mathcal{F} induzida pelo campo de vetores

$$\mathbf{v} = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

em que $P(x, y) = B(x, y, 1)$ e $Q(x, y) = -A(x, y, 1)$. Nas coordenadas (x, y) , ambos os feixes lineares $\mathcal{P}(\mathcal{F}, L)$ e $\mathcal{P}^*(\mathcal{F}, L)$ são dados por

$$\alpha P(x, y) + \beta Q(x, y) = 0; (\alpha : \beta) \in \mathbb{P}^1.$$

Nesse caso, adotamos para esse feixe linear a notação $\mathcal{P}(P, Q)$.

Vimos no Capítulo 1 no Teorema 1.12 que o elemento genérico da rede polar é irredutível. Entretanto, observamos que a rede polar de uma folheação pode conter um feixe linear cujo elemento genérico é redutível. Evidentemente, se L é uma reta invariante por \mathcal{F} , então L pertence a todos os elementos do feixe linear polar que possui L como um eixo, ou seja, L é um elemento fixo do feixe linear polar $\mathcal{P}(\mathcal{F}, L)$. Removendo L do feixe linear, ou seja, passando a $\mathcal{P}^*(\mathcal{F}, L)$, podemos nos perguntar novamente se o seu elemento genérico é redutível.

Observamos ainda que, agora não mais existem elementos fixos de codimensão um no feixe linear. Tal afirmação segue evidentemente do fato do conjunto singular $\text{Sing}(\mathcal{F})$ ter codimensão 2, não havendo fatores comuns para os polinômios P e Q . Podemos, então, aplicar o Teorema de Fatorização de Stein (veja [1]), que, no caso algébrico lê-se:

TEOREMA 2.1.3. ([17]) *O elemento genérico do feixe linear*

$$\{\alpha P(x, y) + \beta Q(x, y) = 0, (\alpha : \beta) \in \mathbb{P}^1\}$$

é redutível se, e somente se, existem polinômios $\tilde{P}(x, y)$ e $\tilde{Q}(x, y)$, bem como uma função racional $r : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ de grau maior que um, tais que

$$\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = r \left(\frac{\tilde{P}(x, y)}{\tilde{Q}(x, y)} \right).$$

Isso significa que o feixe linear induzido por P e Q se “fatora” pelo feixe linear induzido por \tilde{P} e \tilde{Q} . Podemos nos perguntar ainda se o elemento genérico do feixe linear

$$\{\alpha \tilde{P}(x, y) + \beta \tilde{Q}(x, y) = 0; (\alpha : \beta) \in \mathbb{P}^1\} \quad (2.3)$$

é redutível. Se o for, podemos repetir o processo acima até obtermos \tilde{P} e \tilde{Q} satisfazendo a propriedade acima com grau mínimo. Nesse caso o elemento genérico do pencil (2.3) é

irredutível.

DEFINIÇÃO 2.1.4. Dizemos que uma folheação \mathcal{F} em \mathbb{P}^2 é *primitiva* se, para toda reta $L \subset \mathbb{P}^2$ o feixe linear polar $\mathcal{P}^*(\mathcal{F}, L)$ tem elemento genérico irredutível. Se para alguma reta $L \subset \mathbb{P}^2$ o feixe linear polar $\mathcal{P}^*(\mathcal{F}, L)$ tem elemento genérico redutível, dizemos que \mathcal{F} é *não primitiva* (com respeito à reta L). Nesse caso, tomando coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ para as quais L é a reta do infinito e que, nesse mesmo sistema, \mathcal{F} seja induzida pelo campo de vetores polinomial

$$\mathbf{v} = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y}, \quad (2.4)$$

encontramos polinômios $\tilde{P}(x, y)$ e $\tilde{Q}(x, y)$ de grau \tilde{d} e uma função racional $r : \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ de grau $\text{grau}(r) = m \geq 2$ tal que $P/Q = r(\tilde{P}/\tilde{Q})$ e, além disso, o feixe linear $\mathcal{P}(\tilde{P}, \tilde{Q})$ tem elemento genérico irredutível.

Observe que, colocando $t = z/w$, escrevemos $r(t) = r(z/w) = S(z, w)/T(z, w)$, em que S e T são polinômios homogêneos de mesmo grau m , temos

$$\begin{cases} P(x, y) = S(\tilde{P}(x, y), \tilde{Q}(x, y)) \\ Q(x, y) = T(\tilde{P}(x, y), \tilde{Q}(x, y)). \end{cases} \quad (2.5)$$

Definimos agora uma folheação $\tilde{\mathcal{F}}$ em \mathbb{P}^2 induzida no mesmo sistema de coordenadas afins pelo campo de vetores

$$\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{P}(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \tilde{Q}(x, y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

O fato de $\mathcal{P}(\tilde{P}, \tilde{Q})$ possuir elemento genérico irredutível nos garante que \tilde{P} e \tilde{Q} são relativamente primos e conseqüentemente o conjunto singular $\text{Sing}(\tilde{\mathcal{F}})$ tem codimensão dois.

DEFINIÇÃO 2.1.5. Dizemos que $\tilde{\mathcal{F}}$ assim definida é um *modelo primitivo* para \mathcal{F} e número $m = \text{grau}(r)$ será chamado *grau de ramificação* de \mathcal{F} .

Observamos que as noções de folheação não primitiva e de modelo primitivo envolvem a fixação de um plano afim com coordenadas $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ e uma reta no infinito $L_\infty \subset \mathbb{P}^2$. Veremos na Proposição 2.1.6 a seguir que se \mathcal{F} é uma folheação não primitiva com respeito à reta no infinito, então L_∞ é sempre \mathcal{F} -invariante. O grau do campo vetorial dado pela equação (2.4), induzindo \mathcal{F} em coordenadas afins é chamado de *grau afim* de \mathcal{F} e é denotado

por $\text{grau}_a(\mathcal{F})$. Se \mathcal{F} é uma folheação não primitiva admitindo um modelo primitivo $\tilde{\mathcal{F}}$, um fato a ser destacado é que

$$\text{grau}_a(\mathcal{F}) = m \text{grau}_a(\tilde{\mathcal{F}}), \quad (2.6)$$

em que m é o grau de ramificação.

Considerando a folheação \mathcal{F} de grau d em \mathbb{P}^2 , conforme a Definição 2.1.4 podemos enunciar a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 2.1.6. *Se \mathcal{F} é folheação não primitiva então L_∞ é \mathcal{F} -invariante.*

Demonstração. Suponha que em coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, \mathcal{F} seja induzida pelo campo vetorial

$$\mathbf{v} = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Sabemos que existem polinômios $\tilde{P}, \tilde{Q} \in \mathbb{C}[x, y]$, com $\max\{\text{grau}(\tilde{P}), \text{grau}(\tilde{Q})\} = \tilde{d}$, e um mapa racional $r: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ de grau maior que 1, tais que

$$\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = r \left(\frac{\tilde{P}(x, y)}{\tilde{Q}(x, y)} \right) = \frac{S(\tilde{P}(x, y), \tilde{Q}(x, y))}{T(\tilde{P}(x, y), \tilde{Q}(x, y))}, \quad (2.7)$$

em que S e T são polinômios homogêneos de mesmo grau que o mapa r . Temos também que \tilde{P}, \tilde{Q} são tais que o campo

$$\tilde{\mathbf{v}} = \tilde{P}(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + \tilde{Q}(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

induz uma folheação $\tilde{\mathcal{F}}$ de grau afim \tilde{d} , o modelo primitivo associado à \mathcal{F} . Supondo L_∞ não \mathcal{F} -invariante, devemos ter

$$\mathbf{v} = (xG(x, y) + \bar{P}(x, y)) \frac{\partial}{\partial x} + (yG(x, y) + \bar{Q}(x, y)) \frac{\partial}{\partial y},$$

em que $G(x, y)$ é um polinômio homogêneo de grau d e $\max\{\text{grau}(\bar{P}), \text{grau}(\bar{Q})\} = d$. Assim, da equação (2.7) e da não invariância da reta do infinito L_∞ , devemos ter

$$\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = \frac{xG(x, y) + \bar{P}(x, y)}{yG(x, y) + \bar{Q}(x, y)} = \frac{S(\tilde{P}(x, y), \tilde{Q}(x, y))}{T(\tilde{P}(x, y), \tilde{Q}(x, y))}. \quad (2.8)$$

Observe que a não invariância de L_∞ nos diz que $\text{grau}(P) = \text{grau}(Q) = d + 1$. Antes de

darmos sequência à prova da proposição, mostremos que é válido o seguinte lema:

LEMA 2.1.7. *Nas condições da proposição acima, supondo L_∞ não invariante, vale que $\text{grau}(\tilde{P}) = \text{grau}(\tilde{Q})$.*

Demonstração. Sejam $m = \text{grau}(r)$, κ_1 e κ_2 os respectivos graus dos polinômios \tilde{P} e \tilde{Q} . Sabendo que $\tilde{d} = \max\{\text{grau}(\tilde{P}), \text{grau}(\tilde{Q})\}$ vamos supor, sem perda de generalidade, que $\tilde{d} = \kappa_1$. Temos

$$S(z, w) = \sum_{i+j=m} \alpha_{ij} z^i w^j \quad \text{e} \quad T(z, w) = \sum_{l+k=m} \beta_{lk} z^l w^k,$$

em que $\alpha_{ij}, \beta_{lk} \in \mathbb{C}$ para todos i, j, k, l . Portanto,

$$\text{grau}_a(\mathcal{F}) = \text{grau}(r) \cdot \text{grau}_a(\tilde{\mathcal{F}}) \quad (2.9)$$

$$= \text{grau}(S(\tilde{P}(x, y), \tilde{Q}(x, y))) = \text{grau} \left(\sum_{i+j=m} \alpha_{ij} \tilde{P}^i \tilde{Q}^j \right). \quad (2.10)$$

Assim, pelas igualdades (2.9) e (2.10) teremos

$$\begin{aligned} m\tilde{d} = \text{grau} \left(\sum_{i+j=m} \alpha_{ij} \tilde{P}^i \tilde{Q}^j \right) &\leq i\tilde{d} + j\kappa_2, \text{ para algum par } (i, j) \text{ tal que } \alpha_{ij} \neq 0, \\ &\leq (i + j)\tilde{d} = m\tilde{d}. \end{aligned}$$

Isso nos diz que vale a igualdade e, conseqüentemente, teremos $\kappa_2 = \tilde{d}$. \square

De volta à prova da proposição, considere \hat{P} e \hat{Q} os termos homogêneos de grau \tilde{d} dos polinômios \tilde{P} e \tilde{Q} respectivamente. Comparando os termos de maior grau na equação (2.7), obtemos

$$xG(x, y) = S(\hat{P}(x, y), \hat{Q}(x, y))$$

e

$$yG(x, y) = T(\hat{P}(x, y), \hat{Q}(x, y)).$$

Isso implica em

$$\frac{x}{y} = \frac{S(\hat{P}(x, y), \hat{Q}(x, y))}{T(\hat{P}(x, y), \hat{Q}(x, y))} = r \left(\frac{\hat{P}(x, y)}{\hat{Q}(x, y)} \right).$$

Contradizendo o fato de ser $\text{grau}(r) > 1$. □

Considerando a folheação \mathcal{F} , induzida como em (2.1), e $L \subset \mathbb{P}^2$ uma reta para a qual o feixe linear polar $\mathcal{P}(\mathcal{F}, L)$ é redutível, temos a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 2.1.8. *L é a única reta para a qual o feixe linear polar $\mathcal{P}(\mathcal{F}, L)$ é redutível.*

Demonstração. Suponha que \mathcal{F} , folheação não primitiva de grau d , e seu modelo primitivo associado $\tilde{\mathcal{F}}$ sejam induzidos numa carta afim $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ respectivamente pelas formas diferenciais

$$\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy$$

e

$$\tilde{\omega} = \tilde{P}(x, y)dx + \tilde{Q}(x, y)dy.$$

Aqui, estamos considerando $d = \text{grau}(P) \geq \text{grau}(Q) = k$. Sabemos do Teorema de fatorização de Stein que existe um mapa racional $r: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ de grau maior que 1, tal que

$$\frac{P(x, y)}{Q(x, y)} = r \left(\frac{\tilde{P}(x, y)}{\tilde{Q}(x, y)} \right) = \frac{S(\tilde{P}(x, y), \tilde{Q}(x, y))}{T(\tilde{P}(x, y), \tilde{Q}(x, y))}, \quad (2.11)$$

em que S e T são polinômios homogêneos de mesmo grau que o mapa r . Supondo que \mathcal{F} é não primitiva em relação a outra reta \tilde{L} , tomamos um novo sistema de coordenadas afins $(u, v) = \left(\frac{1}{x}, \frac{y}{x} \right)$, ou de maneira equivalente, $(x, y) = \left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u} \right)$, de modo que a reta \tilde{L} seja a reta no infinito nesse novo sistema de coordenadas. Nas coordenadas (u, v) \mathcal{F} é induzida por

$$\begin{aligned}
 \bar{\omega} &= P \left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u} \right) d \left(\frac{1}{u} \right) + Q \left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u} \right) d \left(\frac{v}{u} \right) \\
 &= \frac{1}{u^d} \left[P_0(u, v) \left(\frac{-1}{u^2} du \right) + u^{d-k} Q_0(u, v) \left(\frac{udv - vdu}{u^2} \right) \right] \\
 &= \frac{1}{u^{d+2}} \{ [-P_0(u, v) - u^{d-k} v Q_0(u, v)] du + u^{d-k+1} Q_0(u, v) dv \},
 \end{aligned}$$

em que $P_0(u, v) = P \left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u} \right) u^d$ e $Q_0(u, v) = Q \left(\frac{1}{u}, \frac{v}{u} \right) u^d$. Afim de não carregarmos a notação escrevamos a forma $\bar{\omega}$, que induz \mathcal{F} nas coordenadas (u, v) , como

$$\bar{\omega} = P_1(u, v) du + Q_1(u, v) dv,$$

em que

$$P_1(u, v) = -P_0(u, v) - u^{d-k} v Q_0(u, v) \quad \text{e} \quad Q_1(u, v) = u^{d-k+1} Q_0(u, v).$$

Supondo que o feixe linear $\mathcal{P}(\mathcal{F}, \tilde{L})$ tem elemento genérico redutível, devemos ter um mapa racional $r_1: \mathbb{P}^1 \rightarrow \mathbb{P}^1$ de grau maior que 1, tal que

$$\frac{P_1(u, v)}{Q_1(u, v)} = r_1 \left(\frac{\tilde{P}_1(u, v)}{\tilde{Q}_1(u, v)} \right) = \frac{S_1(\tilde{P}_1(u, v), \tilde{Q}_1(u, v))}{T_1(\tilde{P}_1(u, v), \tilde{Q}_1(u, v))}, \quad (2.12)$$

em que $S_1(u, v)$ e $T_1(u, v)$ são polinômios homogêneos com o mesmo grau que o mapa r_1 e $\tilde{P}_1(u, v)$ e $\tilde{Q}_1(u, v)$ são os polinômios \tilde{P} e \tilde{Q} avaliados nas coordenadas (u, v) .

Assim, tomando $\hat{P}_1(u, v)$ e $\hat{Q}_1(u, v)$ e os termos de maior grau dos polinômios $\tilde{P}_1(u, v)$ e $\tilde{Q}_1(u, v)$ respectivamente, comparamos os termos de maior grau da equação (2.12), onde encontramos

$$\frac{-u^{d-k} v Q_0(u, v)}{u^{d-k+1} Q_0(u, v)} = \frac{-v}{u} = r_1 \left(\frac{\hat{P}_1(u, v)}{\hat{Q}_1(u, v)} \right),$$

e isso contradiz o fato de ser $\text{grau}(r_1) > 1$. □

2.1.1 FOLHEAÇÕES LINEARMENTE EQUIVALENTES

Considere \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 folheações em \mathbb{P}^2 induzidas em um plano afim fixado com coordenadas $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, respectivamente, pelos campos de vetores polinomiais

$$\mathbf{v}_1 = P_1(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q_1(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2 = P_2(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q_2(x, y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Temos a definição.

DEFINIÇÃO 2.1.9. Dizemos que \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 são *linearmente equivalentes* se existem $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$, com $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$, tais que

$$\begin{cases} P_2(x, y) = \alpha P_1(x, y) + \beta Q_1(x, y) \\ Q_2(x, y) = \gamma P_1(x, y) + \delta Q_1(x, y). \end{cases}$$

Observe que esse conceito equivale à existência de um elemento $g \in GL(2, \mathbb{C})$, da forma $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$, de modo que os objetos acima se escrevem da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} P_2(x, y) \\ Q_2(x, y) \end{pmatrix} = g \cdot \begin{pmatrix} P_1(x, y) \\ Q_1(x, y) \end{pmatrix}. \quad (2.13)$$

Podemos ver que esse conceito corresponde à ação de $GL(2, \mathbb{C})$ no espaço das folheações de \mathbb{P}^2 dada por

$$\begin{aligned} * : GL(2, \mathbb{C}) \times \mathcal{F}ol(d) &\longrightarrow \mathcal{F}ol(d) \\ (g, \mathcal{F}) &\longmapsto g_*\mathcal{F} \end{aligned}$$

em que $g_*\mathcal{F}$ é a folheação de \mathbb{P}^2 definida na parte afim pela equação (2.13). Note que a definição acima depende da fixação de um sistema de coordenadas afins, $(x, y) \in \mathbb{C}^2$.

A noção de equivalência linear estabelece uma relação de equivalência no espaço de folheações em \mathbb{P}^2 . Nessa relação, as classes de equivalência correspondem às órbitas da ação definida acima e os feixes lineares polares com respeito à reta no infinito desse sistema de coordenadas afins, classificam as classes de equivalência por essa relação, como será mostrado na Proposição 2.1.12 mais adiante. Antes, porém, enunciaremos e provaremos o seguinte resultado a respeito das classes de equivalência acima citadas:

PROPOSIÇÃO 2.1.10. *Todas as folheações numa mesma classe de equivalência possuem o mesmo grau d e deixam L_∞ invariante, com a possível exceção de uma, que tem grau $d - 1$ e para a qual temos que L_∞ é não invariante.*

Demonstração. De fato, considere duas folheações linearmente equivalentes \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 induzidas, em coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, pelos campos vetoriais

$$\mathbf{v}_1 = P_1(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q_1(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}_2 = P_2(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q_2(x, y) \frac{\partial}{\partial y}. \quad (2.14)$$

Se a reta no infinito é invariante por ambas as folheações \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 , temos que $\max\{\text{grau}(P_1), \text{grau}(Q_1)\} = d = \max\{\text{grau}(P_2), \text{grau}(Q_2)\}$. Concluimos assim que, nesse caso, as folheações possuem o mesmo grau. Supondo que a folheação \mathcal{F}_1 não deixa a reta do infinito invariante, sabemos que existe polinômio homogêneo $G(x, y)$ de grau d e polinômios \hat{P}_1 e \hat{Q}_1 com $\max\{\text{grau}(\hat{P}_1), \text{grau}(\hat{Q}_1)\} \leq d$, de modo que o campo \mathbf{v}_1 que induz \mathcal{F}_1 se escreva na forma

$$\mathbf{v}_1 = (xG(x, y) + \hat{P}_1(x, y)) \frac{\partial}{\partial x} + (yG(x, y) + \hat{Q}_1(x, y)) \frac{\partial}{\partial y}. \quad (2.15)$$

Considere também a matriz $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$ que estabelece a relação de equivalência entre \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 . Assim, podemos reescrever o campo \mathbf{v}_2 como

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 &= (\alpha(xG(x, y) + \hat{P}_1(x, y)) + \beta(yG(x, y) + \hat{Q}_1(x, y))) \frac{\partial}{\partial x} \\ &+ (\gamma(xG(x, y) + \hat{P}_1(x, y)) + \delta(yG(x, y) + \hat{Q}_1(x, y))) \frac{\partial}{\partial y}, \end{aligned}$$

que, por sua vez, equivale a

$$\begin{aligned} \mathbf{v}_2 &= ((\alpha x + \beta y)G(x, y) + \alpha \hat{P}_1(x, y) + \beta \hat{Q}_1(x, y)) \frac{\partial}{\partial x} \\ &+ ((\gamma x + \delta y)G(x, y) + \gamma \hat{P}_1(x, y) + \delta \hat{Q}_1(x, y)) \frac{\partial}{\partial y}. \end{aligned} \quad (2.16)$$

Como $G(x, y)$ é não identicamente nulo, a escrita dada para o campo \mathbf{v}_2 em (2.16) é possível se, e somente se, $\alpha = \delta = 1$ e $\gamma = \beta = 0$. Isso nos diz que $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$. \square

Entretanto, o grau afim é o mesmo para toda folheação na mesma classe de

equivalência linear. Portanto, uma folheação de grau d cuja reta no infinito é não invariante é sempre linearmente equivalente a uma folheação de grau $d + 1$ que deixa a reta no infinito L_∞ invariante.

PROPOSIÇÃO 2.1.11. *Se duas folheações do plano projetivo complexo, \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 , são linearmente equivalentes então, na parte afim, elas possuem o mesmo conjunto singular, isto é, $\text{Sing}(\mathcal{F}_1)|_{\mathbb{C}^2} = \text{Sing}(\mathcal{F}_2)|_{\mathbb{C}^2}$. Além disso, $\mu_p(\mathcal{F}_1) = \mu_p(\mathcal{F}_2)$ para todo $p \in \mathbb{C}^2$.*

Demonstração. A primeira parte da proposição deve-se ao fato de ser inversível a matriz que estabelece a relação de equivalência entre as folheações (veja a equação (2.13)). Por outro lado, a última afirmação da proposição segue do fato de que o número de Milnor de uma folheação \mathcal{F} em \mathbb{P}^2 num ponto $p \in \mathbb{P}^2$ é definido por $\mu_p(\mathcal{F}) = \dim_{\mathbb{C}}(\mathcal{O}_p/\mathcal{I})$, em que \mathcal{I} denota o ideal gerado pelas componentes da 1-forma que induz \mathcal{F} . O resultado segue do fato de serem iguais os respectivos ideais $\mathcal{I}_1 = (P_1, Q_1)$ e $\mathcal{I}_2 = (\alpha P_1 + \beta Q_1, \gamma P_1 + \delta Q_1)$. \square

Para o resultado a seguir, consideramos \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 folheações de grau d em \mathbb{P}^2 como em (2.14) e fixamos coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ de modo que a reta $L = L_\infty$ seja a reta do infinito.

PROPOSIÇÃO 2.1.12. *Duas folheações de grau d em \mathbb{P}^2 possuem o mesmo feixe linear polar com respeito à uma reta L se, e somente se, \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 são linearmente equivalentes.*

Demonstração. Sejam \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 folheações de grau d em \mathbb{P}^2 induzidas em coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ pelos campos \mathbf{v}_1 e \mathbf{v}_2 na equação (2.14). Considere seus feixes lineares polares com respeito à reta $L = L_\infty$ dados, nesse mesmo sistema de coordenadas, respectivamente por

$$\mathcal{P}(\mathcal{F}_1, L) = \{\eta P_1(x, y) + \xi Q_1(x, y) = 0; (\eta : \xi) \in \mathbb{P}^1\}$$

e

$$\mathcal{P}(\mathcal{F}_2, L) = \{\lambda P_2(x, y) + \mu Q_2(x, y) = 0; (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1\}.$$

Uma vez que $\mathcal{P}(\mathcal{F}_1, L) = \mathcal{P}(\mathcal{F}_2, L)$, temos que as curvas $\{P_1 = 0\}$ e $\{Q_1 = 0\}$ estão em $\mathcal{P}(\mathcal{F}_2, L)$. Existem então a_1, a_2, b_1 e $b_2 \in \mathbb{C}$ tais que

$$P_2(x, y) = a_1 P_1(x, y) + a_2 Q_1(x, y), \quad (2.17)$$

$$Q_2(x, y) = b_1 P_1(x, y) + b_2 Q_1(x, y). \quad (2.18)$$

Além disso, podemos supor que um dos a_i 's sejam não nulos, digamos $a_1 \neq 0$, e podemos garantir que b_2 seja diferente de zero, pois, em caso contrário, teríamos que os polinômios $P_2(x, y)$ e $Q_2(x, y)$ não seriam primos entre si. Observe que se $a_1b_2 - a_2b_1 = 0$, então, do sistema acima, multiplicando a equação (2.17) por b_2 e a equação (2.18) por $-a_2$, teríamos

$$b_2P_2(x, y) = a_1b_2P_1(x, y) + a_2b_2Q_1(x, y), \quad (2.19)$$

$$-a_2Q_2(x, y) = -a_2b_1P_1(x, y) - a_2b_2Q_1(x, y). \quad (2.20)$$

Somando as equações (2.19) e (2.20) obtemos

$$b_2P_2(x, y) - a_2Q_2(x, y) = (a_1b_2 - a_2b_1)P_1(x, y) = 0,$$

o que é um absurdo, pois $P_2(x, y)$ e $Q_2(x, y)$ são primos entre si. Portanto, devemos ter $a_1b_2 - a_2b_1 \neq 0$ e o elemento $g = \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ b_1 & b_2 \end{pmatrix}$, estabelece a relação de equivalência linear entre as folheações \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 .

Reciprocamente, nesse mesmo sistema de coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, com a reta $L = L_\infty$ fixada e, supondo que $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$ é a matriz que estabelece a relação de equivalência linear entre \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 , temos que o feixe linear polar de \mathcal{F}_2 com respeito a essa reta pode ser escrito como

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\mathcal{F}_2, L) &= \{\lambda P_2(x, y) + \mu Q_2(x, y) = 0; (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1\} \\ &= \{\lambda(\alpha P_1(x, y) + \beta Q_1(x, y)) + \mu(\gamma P_1(x, y) + \delta Q_1(x, y)) = 0; (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1\} \\ &= \{(\lambda\alpha + \mu\gamma)P_1(x, y) + (\lambda\beta + \mu\delta)Q_1(x, y); (\lambda : \mu) \in \mathbb{P}^1\} \\ &= \mathcal{P}(\mathcal{F}_1, L). \end{aligned}$$

□

COROLÁRIO 2.1.13. *Se $\tilde{\mathcal{F}}_1$ e $\tilde{\mathcal{F}}_2$ são modelos primitivos para uma mesma folheação \mathcal{F} então $\tilde{\mathcal{F}}_1$ e $\tilde{\mathcal{F}}_2$ são linearmente equivalentes.*

Demonstração. O resultado segue do fato de $\tilde{\mathcal{F}}_1$ e $\tilde{\mathcal{F}}_2$ possuírem o mesmo feixe linear polar. □

Além disso, observe que duas folheações não primitivas e linearmente equivalentes possuem a mesma classe de modelos primitivos. Um estudo mais detalhado a respeito dessa classe de equivalência será feito no próximo capítulo.

2.1.2 FOLHEAÇÕES COM MODELO PRIMITIVO DE GRAU 1

DEFINIÇÃO 2.1.14. Dizemos que uma folheação \mathcal{F} de grau d em \mathbb{P}^2 é *homogênea* com centro em $l \in \mathbb{P}^2$ se, em coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ para as quais $l = (0, 0)$, a folheação \mathcal{F} for induzida por um campo de vetores

$$\mathbf{v} = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

em que $P(x, y)$ e $Q(x, y)$ são polinômios homogêneos de mesmo grau d .

PROPOSIÇÃO 2.1.15. Se \mathcal{F} é uma folheação homogênea de grau d com centro em $l \in \mathbb{P}^2$ então sua curva polar com centro em l é \mathcal{F} -invariante e consiste de $d + 1$ retas passando por l , contadas com multiplicidades. Além disso, a reta no infinito também é \mathcal{F} -invariante e $d = \text{grau}(\mathcal{F}) = \text{grau}_a(\mathcal{F})$.

Demonstração. Suponha que \mathcal{F} seja induzida num sistema de coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ pelo campo de vetores

$$\mathbf{v} = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

de modo que $l = (0, 0)$ e P e Q sejam homogêneos. Temos, pois, que a curva polar $\mathcal{P}_l^{\mathcal{F}}$ de \mathcal{F} centrada em $(0, 0)$ tem equação

$$F(x, y) = yQ(x, y) - xP(x, y) = 0. \quad (2.21)$$

Queremos mostrar que $\mathcal{P}_l^{\mathcal{F}}$ é uma solução de \mathbf{v} , ou seja, que a equação abaixo

$$\mathbf{v}(F) = P F_x + Q F_y, \quad (2.22)$$

é um múltiplo polinomial de F , onde F_x e F_y denotam as derivadas parciais com respeito a x e y . Mas observe que $\mathcal{P}_l^{\mathcal{F}}$ é invariante por \mathcal{F} se, e somente se, as retas tangentes à curva $\mathcal{P}_l^{\mathcal{F}}$ e à folheação \mathcal{F} são coincidentes nos pontos onde ambas estão definidas. Da definição de $\mathcal{P}_l^{\mathcal{F}}$ essa última afirmação equivale ao fato de as retas tangentes a $\mathcal{P}_l^{\mathcal{F}}$ passarem por $(0, 0)$,

ou seja,

$$\mathbf{r}(F(x, y)) = x F_x + y F_y = 0. \quad (2.23)$$

Aqui, \mathbf{r} denota o campo radial $\mathbf{r}(x, y) = x \partial/\partial x + y \partial/\partial y$. Segue da equação (2.23) acima que

$$x F_x + y F_y = x(y P_x - Q - x Q_x) + y(P + y P_y - x Q_y) = 0,$$

que por sua vez equivale a

$$x(y P_x - Q - x Q_x) = y(-P - y P_y + x Q_y). \quad (2.24)$$

A equação acima (2.24) nos diz que

$$x/(P + y P_y) \quad \text{e} \quad y/(Q + x Q_x).$$

Isso nos mostra que existem polinômios $G(x, y)$ e $H(x, y)$ tais que

$$P + y P_y = x G \quad \text{e} \quad Q + x Q_x = y H. \quad (2.25)$$

Substituindo xG e yH dados pela equação (2.25) acima em (2.24) encontramos

$$xy(P_x - H) = xy(-G + Q_y),$$

ou seja,

$$P_x - H = -G + Q_y = B(x, y),$$

para algum polinômio $B(x, y)$. De volta a equação (2.22) temos

$$\begin{aligned} \mathbf{v}(F) &= P F_x + Q F_y = P(y P_x - Q - x Q_x) + Q(P + y P_y - x Q_y) \\ &= P(y P_x - y H) + Q(x G - x Q_y) \\ &= y P B(x, y) - x Q B(x, y) \\ &= (y P - x Q) B(x, y) = F(x, y) B(x, y). \end{aligned}$$

Com relação a reta no infinito, sua não invariância, do ponto de vista da equação (1.4), implica em $G(x, y) \neq 0$. Sendo \mathcal{F} folheação homogênea, isso nos diz que $\hat{P} = \hat{Q} \equiv 0$,

ou seja, \mathcal{F} seria uma folheação radial, tendo $G(x, y) = 0$ como curva de singularidades. Concluimos, pois, que L_∞ é \mathcal{F} -invariante e $d = \text{grau}(\mathcal{F}) = \text{grau}_a(\mathcal{F})$. \square

PROPOSIÇÃO 2.1.16. *Se \mathcal{F} é uma folheação homogênea de grau d e centro $l = (0, 0) \in \mathbb{C}^2$ então l é sua única singularidade na parte afim, nesse caso, com número de Milnor $\mu_l(\mathcal{F}) = d^2$.*

Demonstração. Uma vez que \mathcal{F} é induzida em coordenadas afins por um campo de vetores do tipo

$$\mathbf{v} = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y},$$

em que P e Q são polinômios homogêneos, vemos claramente que $\text{Sing}(\mathcal{F})|_{\mathbb{C}^2} = \{0\}$. Em relação à última afirmação a respeito do número de Milnor, vemos que a igualdade segue, pois, do fato do grau dos polinômios $P(x, y)$ e $Q(x, y)$, componentes do campo \mathbf{v} que induz \mathcal{F} , ser igual a d juntamente com o fato de que se $c \in \mathbb{C}^2 - \{0\}$ é um valor regular do mapa $\mathbf{v}: \mathbb{C}^2 \rightarrow \mathbb{C}^2$, então pelo Teorema de Bézout o número de soluções da equação $\mathbf{v}(x, y) = c$ é exatamente d^2 . \square

OBSERVAÇÃO 2.1.17. *Note que esse último fato, aliado à expressão (1.7), implica que*

$$\sum_{p \in L_\infty} \mu_p(\mathcal{F}) = d + 1. \quad (2.26)$$

DEFINIÇÃO 2.1.18. *Seja \mathcal{F} uma folheação em \mathbb{P}^2 . Dizemos que \mathcal{F} é uma folheação em uma variável se, em algum sistema de coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ a folheação \mathcal{F} é induzida por um campo de vetores polinomiais do tipo*

$$\mathbf{v} = P(x) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x) \frac{\partial}{\partial y} \quad \left(\text{ou } \mathbf{v} = P(y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(y) \frac{\partial}{\partial y} \right) \quad (2.27)$$

em que P e Q são polinômios dependendo somente da variável x (respect. y).

PROPOSIÇÃO 2.1.19. *Se \mathcal{F} é uma folheação em uma variável, induzida pelo campo de vetores*

$$\mathbf{v} = P(x) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x) \frac{\partial}{\partial y},$$

são válidas as seguintes afirmações:

- (a) A reta no infinito é \mathcal{F} -invariante;
- (b) Se x_0 é uma raiz de $P(x)$, então a reta $x = x_0$ é \mathcal{F} -invariante. Além disso, todas essas retas invariantes encontram L_∞ em uma singularidade p ;
- (c) Se $\text{grau}(P) \geq \text{grau}(Q)$, então essa singularidade p é a única singularidade de \mathcal{F} ;
- (d) Se $\text{grau}(P) < \text{grau}(Q)$ existe ainda outra singularidade em L_∞ .

Demonstração. Para o item (a), se a reta no infinito fosse não invariante, a expressão (1.4), implicaria que os termos de ordem mais alta de P e Q dependeriam de ambos x e y . Assim, $d = \text{grau}(\mathcal{F}) = \text{grau}_a(\mathcal{F})$. No item (b) claramente as retas verticais $L_j := \{x = x_j\}, j = 1, \dots, r$, onde cada x_j é uma raiz de $P(x)$, são invariantes por \mathcal{F} .

Agora, considere ω a forma dual do campo \mathbf{v} dada por

$$\omega = Q(x)dx - P(x)dy.$$

Assim, façamos uso da seguinte mudança de coordenadas

$$\begin{cases} x = 1/u \\ y = v/u, \end{cases}$$

Denotando por $(u, v) = \Phi(x, y)$ tal mudança de coordenadas, temos que a folheação \mathcal{F} é então induzida nessas novas coordenadas pela 1-forma $\tilde{\omega}$ pullback de ω por Φ dada por

$$\tilde{\omega} = Q\left(\frac{1}{u}\right) d(1/u) - P\left(\frac{1}{u}\right) d(v/u). \quad (2.28)$$

Para o item (c), ou seja, para o caso em que $\text{grau}(P) = d \geq k = \text{grau}(Q)$ a forma dada pela equação (2.28) se escreve, após eliminarmos os polos, como

$$\tilde{\omega} = \left[v\hat{P}(u) - u^{d-k}\hat{Q}(u) \right] du - u\hat{P}(u)dv, \quad (2.29)$$

onde $\hat{P}(u)$ e $\hat{Q}(u)$ são os polinômios P e Q avaliados na nova variável u . Assim, ao longo da reta no infinito, L_∞ , de equação $u = 0$ vemos, a partir da equação (2.29) que \mathcal{F} possui uma única singularidade. Note que $u = 0$ não é raiz de \hat{P} .

Agora, para o item (d) onde $\text{grau}(P) = k < d = \text{grau}(Q)$, a forma $\tilde{\omega}$ é escrita do seguinte modo:

$$\tilde{\omega} = \left[-\hat{Q}(u) + vu^{d-k}\hat{P}(u) \right] du - u^{d-k+1}\hat{P}(u)dv. \quad (2.30)$$

Dessa forma, vemos a partir da equação (2.30) e do fato de ser $d > k$, que existe uma nova singularidade de \mathcal{F} em L_∞ .

□

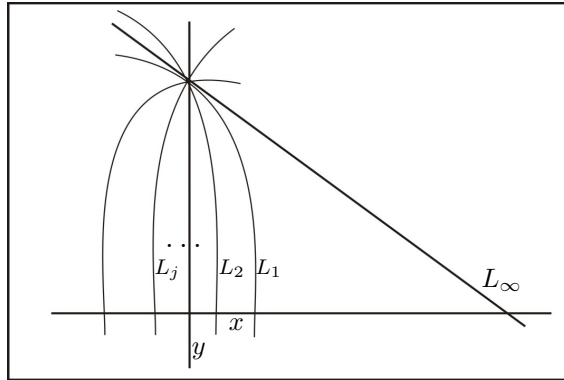


Figura 2.2: Retas verticais invariantes por \mathcal{F} .

Considerando ainda uma folheação em uma variável como acima, vemos que qualquer elemento do feixe linear polar com eixo em L_∞ consiste de $d + 1$ retas verticais contadas com multiplicidades.

TEOREMA 2.1.20. *Seja \mathcal{F} uma folheação não primitiva em \mathbb{P}^2 que admite um modelo primitivo de grau afim um. Então, ou \mathcal{F} é uma folheação homogênea ou é uma folheação em uma variável.*

Demonstração. Seja $\tilde{\mathcal{F}}$ um modelo primitivo para \mathcal{F} , induzida em coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ por um campo de vetores polinomiais $\tilde{P}(x, y)\partial/\partial x + \tilde{Q}(x, y)\partial/\partial y$.

Caso 1: \tilde{P} ou \tilde{Q} é uma constante. Então, por equivalência linear, podemos supor que $\tilde{\mathcal{F}}$ é induzida por um campo da forma $(ax + by)\partial/\partial x + \partial/\partial y$, em que $a \neq 0$ ou $b \neq 0$. Se $a = 0$, evidentemente $\tilde{\mathcal{F}}$ é uma folheação em uma variável. Se $a \neq 0$, aplicando uma mudança afim de coordenadas $(u, v) = (ax + by, y)$, chegamos à mesma conclusão.

Caso 2: Ambos \tilde{P} e \tilde{Q} tem grau um. Coloquemos

$$\tilde{P} = ax + by + e \text{ e } \tilde{Q} = cx + dy + f.$$

Primeiro, consideramos a situação em que \tilde{P} e \tilde{Q} não têm raízes em comum no plano afim \mathbb{C}^2 . Isso significa que $ax + by$ é um múltiplo de $cx + dy$ por uma constante não nula. Assim, por equivalência linear, podemos supor que $\tilde{P} = ax + by$ e $\tilde{Q} = 1$, e voltamos ao primeiro caso, em que $\tilde{\mathcal{F}}$ é uma folheação em uma variável. Suponhamos então, que \tilde{P} e \tilde{Q} têm uma raiz em comum em \mathbb{C}^2 . Por uma mudança afim de coordenadas, podemos supor que essa raiz é $(0, 0)$, o que nos dá $\tilde{P} = ax + by$ e $\tilde{Q} = cx + dy$. Se $r(t)$ é o mapa racional tal que $P/Q = r(\tilde{P}/\tilde{Q})$, escrevendo $t = z/w$, temos $r(z/w) = F(z, w)/G(z, w)$, em que F e G são polinômios homogêneos de grau igual ao grau de r . Concluímos assim que

$$P(x, y) = F(ax + by, cx + dy) \quad \text{e} \quad Q(x, y) = G(ax + by, cx + dy),$$

e isso nos diz que \mathcal{F} é uma folheação homogênea. \square

2.1.3 SINGULARIDADES DE FOLHEAÇÕES NÃO PRIMITIVAS E DE SEUS MODELOS PRIMITIVOS ASSOCIADOS

Estabeleceremos, aqui, relações entre as singularidades de folheações não primitivas e seus modelos primitivos associados. Inicialmente mostraremos no Lema 2.1.21 a seguir que, na parte afim, ambas folheações possuem as mesmas singularidades. A seguir, estudaremos as propriedades geométricas relacionadas a esse fato, como por exemplo, a degeneração dos números de Milnor de cada singularidade na passagem da folheação não primitiva para o seu modelo primitivo.

LEMA 2.1.21. *Se \mathcal{F} é uma folheação não primitiva com modelo primitivo $\tilde{\mathcal{F}}$ então, no plano afim fixado \mathbb{C}^2 , os pontos singulares para \mathcal{F} e $\tilde{\mathcal{F}}$ são os mesmos.*

Demonstração. Com a mesma notação da equação (2.5), temos que

$$P(x, y) = S(\tilde{P}(x, y), \tilde{Q}(x, y)) \quad \text{e} \quad Q(x, y) = T(\tilde{P}(x, y), \tilde{Q}(x, y)).$$

Evidentemente, os zeros comuns de \tilde{P} e \tilde{Q} são zeros de ambos os polinômios P e Q , o que nos dá $\text{Sing}(\tilde{\mathcal{F}})|_{\mathbb{C}^2} \subset \text{Sing}(\mathcal{F})|_{\mathbb{C}^2}$. Reciprocamente, a existência de um ponto (x_0, y_0) em \mathbb{C}^2 singular para \mathcal{F} mas não para $\tilde{\mathcal{F}}$ implicaria a existência de um fator comum para $S(z, w)$ e $T(z, w)$. Assim, temos de fato que $\text{Sing}(\tilde{\mathcal{F}})|_{\mathbb{C}^2} = \text{Sing}(\mathcal{F})|_{\mathbb{C}^2}$. \square

PROPOSIÇÃO 2.1.22. *Seja \mathcal{F} uma folheação não primitiva tendo $\tilde{\mathcal{F}}$ como modelo primitivo e m como grau de ramificação. Se $p \in \mathbb{C}^2$, então, $\mu_p(\mathcal{F}) = m^2 \mu_p(\tilde{\mathcal{F}})$.*

Demonstração. Mantendo a notação da equação (2.5), consideramos os seguintes mapas de \mathbb{C}^2 para \mathbb{C}^2 :

$$\begin{aligned}\Phi(x, y) &= (P(x, y), Q(x, y)); \\ \tilde{\Phi}(x, y) &= (\tilde{P}(x, y), \tilde{Q}(x, y)); \\ H(z, w) &= (S(u, v), T(u, v)).\end{aligned}$$

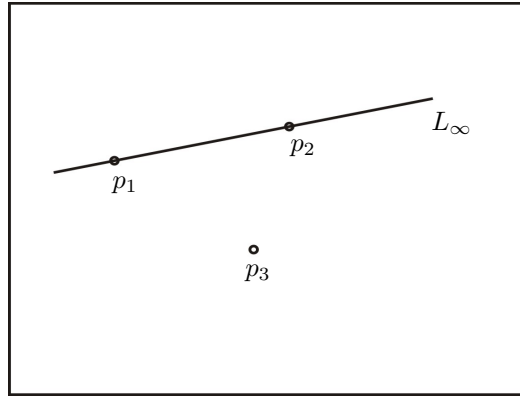
Temos $\Phi = H \circ \tilde{\Phi}$. Primeiro, observamos que o número de Milnor do campo $\mathbf{v} = P\partial/\partial x + Q\partial/\partial y$, em uma singularidade p , é o número de pré-imagens por $\Phi = (P, Q)$, de um ponto q genérico suficientemente próximo de $(0, 0) \in \mathbb{C}^2$ (veja a Observação 1.1.6-(iv)), que por sua vez será igual ao número de pré-imagens de um ponto q próximo a $0 \in \mathbb{C}^2$ pelo mapa $H \circ \tilde{\Phi}$. O resultado segue, pois, do fato de serem homogêneos de mesmo grau m e sem fatores comuns, os polinômios S e T e, conseqüentemente, um ponto q genérico próximo a $0 \in \mathbb{C}^2$ tem m^2 pré-imagens por H e cada um destes terá $\tilde{\mu}$ pré-imagens por $\tilde{\Phi}$. Para mais detalhes, veja a Proposição 2.1.16. \square

COROLÁRIO 2.1.23. *Se \mathcal{F} é uma folheação com três singularidades não alinhadas, cada uma delas com a propriedade de que seu número de Milnor é não divisível por nenhum número da forma m^2 , em que $m \in \mathbb{Z}$ e $m \geq 2$. Então \mathcal{F} é uma folheação primitiva. Em particular, se \mathcal{F} possui três singularidades não degeneradas e não alinhadas, então \mathcal{F} é primitiva.*

Demonstração. Sejam p_1, p_2 e p_3 tais singularidades. Tomemos coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ de modo que a reta do infinito contenha duas dessas singularidades, digamos p_1 e p_2 . Desse modo, como não existe $m \in \mathbb{Z}_{>1}$ tal que o número de Milnor $\mu_{p_3}(\mathcal{F})$ da singularidade p_3 de \mathcal{F} na parte afim seja divisível por m^2 , a Proposição 2.1.22 implica que \mathcal{F} é primitiva. \square

COROLÁRIO 2.1.24. *Seja \mathcal{F} uma folheação com somente singularidades não degeneradas. Então, \mathcal{F} é primitiva.*

Demonstração. Do fato de todas as singularidades de \mathcal{F} terem número de Milnor iguais a 1, em vista do corolário acima, se \mathcal{F} fosse não primitiva, teríamos que todas as singularidades



de \mathcal{F} estariam sobre a reta no infinito L_∞ . Assim, somando seus números de Milnor, pela Proposição 1.1.9 teríamos $\sum_{p \in L_\infty} \mu_p(\mathcal{F}) = d^2 + d + 1$, em que d é o grau de \mathcal{F} . Uma vez que, para folheações não primitivas, a reta do infinito é sempre invariante, chegaríamos a conclusão pela Proposição 1.1.8 que $\sum_{p \in L_\infty} \mu_p(\mathcal{F}, L_\infty) = d + 1$. Isso leva a uma contradição, pois, para uma singularidade não degenerada, $\mu_p(\mathcal{F}) = \mu_p(\mathcal{F}|_{L_\infty}) = 1$. \square

COROLÁRIO 2.1.25. *Seja $\mathcal{F}ol(d)$ o espaço das folheações de grau d em \mathbb{P}^2 . Então, o conjunto das folheações primitivas contém um conjunto aberto não vazio de Zariski.*

Demonstração. De fato, as folheações com todas as singularidades não degeneradas possuem número de Milnor, calculados nas mesmas, iguais a 1 e, portanto, não divisível por nenhum número da forma m^2 com $m \in \mathbb{Z}_{>1}$. \square

2.2 O ESTUDO DAS SINGULARIDADES EM L_∞

Vimos na seção anterior que uma folheação não primitiva \mathcal{F} e seu modelo primitivo $\tilde{\mathcal{F}}$ possuem as mesmas singularidades no plano afim \mathbb{C}^2 e, além disso, que seus números de Milnor estão relacionados pela Proposição 2.1.22. O objetivo desta seção é explorar as consequências desse fato para as singularidades de \mathcal{F} e $\tilde{\mathcal{F}}$ que estão sobre L_∞ .

DEFINIÇÃO 2.2.1. Seja \mathbf{v} um campo vetorial em \mathbb{C}^2 com uma singularidade isolada em $p \in \mathbb{C}^2$. Dizemos que p é uma *sela-nó* para \mathbf{v} se, os autovalores da parte linear de $D\mathbf{v}(p)$, digamos λ_1 e λ_2 , satisfazem $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 \neq 0$. Se E_1 e E_2 são os autoespaços de $D\mathbf{v}(p)$

correspondentes a λ_1 e λ_2 , chamamos E_1 e E_2 , respectivamente, de *direção fraca* e *direção forte* de \mathbf{v} .

PROPOSIÇÃO 2.2.2. *Seja \mathcal{F} um germe de folheação tendo uma singularidade em $p \in \mathbb{C}^2$ e seja L um germe de separatriz suave em p . Então $\mu_p(\mathcal{F}, L) \leq \mu_p(\mathcal{F})$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, uma das duas alternativa for válida:*

- (i) p é uma singularidade não degenerada de \mathcal{F} ;
- (ii) p é uma sela-nó tendo L como sua separatriz fraca.

Demonstração. Suponha que \mathcal{F} seja induzida em p por um campo de vetores $P\partial/\partial x + Q\partial/\partial y$, em que $P, Q \in \mathcal{O}_p$. Denotemos $\mu_p(P, Q) := \mu_p(\mathcal{F})$. Para um campo de vetores $P\partial/\partial x + Q_1Q_2\partial/\partial y$, em que $Q_1, Q_2 \in \mathcal{O}_p$, temos $\mu_p(P, Q_1Q_2) = \mu_p(P, Q_1) + \mu_p(P, Q_2)$ (veja [6]). Vamos supor que a separatriz L tenha equação $y = 0$, de modo que \mathcal{F} seja então induzida pelo campo vetorial da forma $P\partial/\partial x + yQ_1\partial/\partial y$ para algum $Q_1 \in \mathcal{O}_p$. Assim,

$$\mu_p(\mathcal{F}) = \mu_p(P, yQ_1) = \mu_p(P, y) + \mu_p(P, Q_1) = \mu_p(\mathcal{F}, L) + \mu_p(P, Q_1),$$

onde usamos $\mu_p(\mathcal{F}, L) = \mu_p(P, y)$. O resultado segue da observação de que $\mu_p(P, Q_1) \geq 0$. Agora, a igualdade é válida se, e somente se, $\mu_p(P, Q_1) = 0$. Isso significa que o campo vetorial $P\partial/\partial x + Q_1\partial/\partial y$ é não singular em p . O fato de $P(p) = 0$ implica em $Q_1(p) \neq 0$. Isso nos dá ao menos um autovalor não nulo para $P\partial/\partial x + Q\partial/\partial y$, implicando (i) ou (ii). Reciprocamente, se p é uma singularidade não degenerada, então $\mu_p(\mathcal{F}) = \mu_p(\mathcal{F}, L) = 1$. No caso de uma sela-nó tendo $y = 0$ como separatriz fraca, após uma mudança analítica de coordenadas, podemos dizer que temos a forma normal da sela-nó: $x^{k+1}\partial/\partial x + y(1 + \lambda x^k)\partial/\partial y$, em que $\lambda \in \mathbb{C}$ e $k \geq 0$ (veja [5] para mais detalhes). Note ainda que $\mu_p(\mathcal{F}) = \mu_p(\mathcal{F}, L) = k + 1$. Para ver isso, note que uma base para a \mathbb{C} -álgebra quociente $\mathcal{O}_p/\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$, onde $\mathcal{I}_{\mathcal{F}} = \langle x^{k+1}, y(1 + \lambda x^k) \rangle$, é dada por $\{1, x, x^2, \dots, x^k\}$, uma vez que $x^{k+1} \equiv 0 \pmod{\mathcal{I}_{\mathcal{F}}}$ e $y \equiv yx^k \pmod{\mathcal{I}_{\mathcal{F}}}$. \square

Observe que se uma reta L é invariante por uma folheação \mathcal{F} em \mathbb{P}^2 então

$$d + 1 = \sum_{p \in L} \mu_p(\mathcal{F}, L) \leq \sum_{p \in L} \mu_p(\mathcal{F}),$$

onde $d = \text{grau}(\mathcal{F})$. Assim, o valor mínimo assumido por $\sum_{p \in L} \mu_p(\mathcal{F})$ é $d + 1$, e isso ocorre se, e somente se, $\mu_p(\mathcal{F}) = \mu_p(\mathcal{F}, L) \forall p \in L$. Nesse caso, a Proposição 2.2.2 diz que os pontos $p \in \text{Sing}(\mathcal{F}) \cap L$ ou são não degenerados ou são sela-nós.

Agora, consideremos uma folheação não primitiva \mathcal{F} de grau d_0 , tendo um modelo primitivo $\tilde{\mathcal{F}}$ de grau \tilde{d}_0 . Denotamos os graus afins de \mathcal{F} e $\tilde{\mathcal{F}}$, respectivamente, por d e \tilde{d} . Somando os números de Milnor dessas folheações e utilizando a relação entre eles para a parte afim, encontrada na Proposição 2.1.22, teremos que

$$\begin{aligned} \sum_{\mathbb{P}^2} \mu_p(\mathcal{F}) &= \sum_{\mathbb{C}^2} \mu_p(\mathcal{F}) + \sum_{L_\infty} \mu_p(\mathcal{F}) \\ &= m^2 \sum_{\mathbb{C}^2} \mu_p(\tilde{\mathcal{F}}) + \sum_{L_\infty} \mu_p(\mathcal{F}) \\ &= m^2 \left(\sum_{\mathbb{P}^2} \mu_p(\tilde{\mathcal{F}}) - \sum_{L_\infty} \mu_p(\tilde{\mathcal{F}}) \right) + \sum_{L_\infty} \mu_p(\mathcal{F}). \end{aligned}$$

Assim, usando (1.7), obtemos

$$\begin{aligned} \sum_{L_\infty} \mu_p(\mathcal{F}) - m^2 \sum_{L_\infty} \mu_p(\tilde{\mathcal{F}}) &= \sum_{\mathbb{P}^2} \mu_p(\mathcal{F}) - m^2 \sum_{\mathbb{P}^2} \mu_p(\tilde{\mathcal{F}}) \\ &= (d_0^2 + d_0 + 1) - m^2(\tilde{d}_0^2 + \tilde{d}_0 + 1). \end{aligned} \quad (2.31)$$

Os valores de d_0 e \tilde{d}_0 em termos dos graus afins d e \tilde{d} dependem somente do fato de a reta do infinito L_∞ ser invariante ou não pelas folheações \mathcal{F} e $\tilde{\mathcal{F}}$. Sendo L_∞ sempre invariante por \mathcal{F} , como provado na Proposição 2.1.6, teremos $d_0 = d$. Consideremos assim os dois casos seguintes:

Caso 1: L_∞ não é $\tilde{\mathcal{F}}$ -invariante. Temos aqui $d_0 = d$ e $\tilde{d}_0 = \tilde{d} - 1$. A equação (2.31) nos dá

$$\begin{aligned} \sum_{L_\infty} \mu_p(\mathcal{F}) - m^2 \sum_{L_\infty} \mu_p(\tilde{\mathcal{F}}) &= (d^2 + d + 1) - m^2((\tilde{d} - 1)^2 + \tilde{d}) \\ &= ((m\tilde{d})^2 + m\tilde{d} + 1) - m^2(\tilde{d}^2 - \tilde{d} + 1) \\ &= m^2(\tilde{d} - 1) + m\tilde{d} + 1. \end{aligned}$$

Suponha que $\sum_{L_\infty} \mu_p(\mathcal{F}) = d_0 + 1 = d + 1$, isto é, que seja minimal a soma dos números de Milnor de \mathcal{F} em L_∞ .

Isso nos dá

$$-m^2 \sum_{L_\infty} \mu_p(\tilde{\mathcal{F}}) = m^2(\tilde{d} - 1),$$

que, por sua vez, é equivalente a

$$\sum_{L_\infty} \mu_p(\tilde{\mathcal{F}}) = 1 - \tilde{d}.$$

Isso implica que $\tilde{d} = 1$ e $\sum_{L_\infty} \mu_p(\tilde{\mathcal{F}}) = 0$.

AFIRMAÇÃO 2.2.3. *Nas condições acima para $\tilde{d} = 1$ e $\sum_{L_\infty} \mu_p(\tilde{\mathcal{F}}) = 0$ podemos afirmar que $\tilde{\mathcal{F}}$ é a folheação radial.*

Demonstração. Com efeito, o fato de ser $\sum_{L_\infty} \mu_p(\tilde{\mathcal{F}}) = 0$, nos diz que a reta no infinito é não invariante. Tendo em vista a equação (1.4), vemos que \mathcal{F} deve ser induzida em coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ por um campo da forma

$$\tilde{\mathbf{v}} = (xG(x, y) + \alpha) \frac{\partial}{\partial x} + (yG(x, y) + \beta) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Sendo $\text{grau}_a(\tilde{\mathcal{F}}) = 1$ vemos que $G(x, y) = \lambda \in \mathbb{C} - \{0\}$. Temos, pois, que $\tilde{\mathcal{F}}$ é uma folheação radial com centro $\left(\frac{-\alpha}{\lambda}, \frac{-\beta}{\lambda}\right) \in \mathbb{C}^2$. \square

Assim, \mathcal{F} é uma folheação homogênea. Como comentado na Observação 2.1.17, para uma folheação homogênea \mathcal{F} de grau d_0 , é válido que $\sum_{L_\infty} \mu_p(\mathcal{F}) = d_0 + 1$. Temos, portanto, o seguinte resultado.

PROPOSIÇÃO 2.2.4. *Seja \mathcal{F} uma folheação não primitiva de grau d_0 que deixa L_∞ invariante. Suponha que \mathcal{F} tenha um modelo primitivo $\tilde{\mathcal{F}}$ para a qual L_∞ é não invariante. É válido então que $\sum_{L_\infty} \mu_p(\mathcal{F}) = d_0 + 1$ se, e somente se, \mathcal{F} for uma folheação homogênea e, sendo assim, $\tilde{\mathcal{F}}$ é a folheação radial.*

Caso 2: L_∞ é $\tilde{\mathcal{F}}$ -invariante. Temos, nesse caso, $d_0 = d$ e $\tilde{d}_0 = \tilde{d}$, assim

$$\begin{aligned} \sum_{L_\infty} \mu_p(\mathcal{F}) - m^2 \sum_{L_\infty} \mu_p(\tilde{\mathcal{F}}) &= (d^2 + d + 1) - m^2(\tilde{d}^2 + \tilde{d} + 1) \\ &= ((m\tilde{d})^2 + m\tilde{d} + 1) - m^2(\tilde{d}^2 + \tilde{d} + 1) \\ &= -m^2\tilde{d} + m\tilde{d} - m^2 + 1. \end{aligned}$$

Suponha agora que valha a condição de minimalidade $\sum_{L_\infty} \mu_p(\tilde{\mathcal{F}}) = \tilde{d}_0 + 1 = \tilde{d} + 1$. Isso é equivalente a

$$\sum_{L_\infty} \mu_p(\mathcal{F}) - m^2(\tilde{d} + 1) = -m^2\tilde{d} + m\tilde{d} - m^2 + 1,$$

o que por sua vez equivale a

$$\sum_{L_\infty} \mu_p(\mathcal{F}) = m\tilde{d} + 1 = d + 1 = d_0 + 1.$$

Chegamos, portanto, à seguinte conclusão:

PROPOSIÇÃO 2.2.5. *Seja \mathcal{F} uma folheação não primitiva de grau d_0 tendo um modelo primitivo $\tilde{\mathcal{F}}$ de grau \tilde{d}_0 . Suponha que $\tilde{\mathcal{F}}$ deixa L_∞ invariante. Então, $\sum_{L_\infty} \mu_p(\tilde{\mathcal{F}}) = \tilde{d}_0 + 1$ se, e somente se, $\sum_{L_\infty} \mu_p(\mathcal{F}) = d_0 + 1$.*

O resultado acima, mostra um interessante comportamento das folheações não primitivas e de seus modelos primitivos. Se \mathcal{F} é uma folheação não primitiva tendo $\tilde{\mathcal{F}}$ como modelo primitivo, ambas com a reta no infinito invariante, então, a passagem de $\tilde{\mathcal{F}}$ para \mathcal{F} degenera todas as singularidades no plano afim \mathbb{C}^2 , no sentido de que $\mu_p(\mathcal{F}) = m^2\mu_p(\tilde{\mathcal{F}})$ para todo $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})|_{\mathbb{C}^2} = \text{Sing}(\tilde{\mathcal{F}})|_{\mathbb{C}^2}$, em que m é o grau de ramificação. Por outro lado, esse processo não degenera as singularidades de $\tilde{\mathcal{F}}$ que estão sobre L_∞ , tendo em vista que, considerando a Proposição 2.2.2, se todas as singularidades de $\tilde{\mathcal{F}}$ sobre L_∞ são não degeneradas ou sela-nó com separatriz fraca sobre L_∞ , então a mesma propriedade é válida para as singularidades de \mathcal{F} sobre L_∞ .

EQUIVALÊNCIA LINEAR

3.1 FOLHEAÇÕES LINEARMENTE EQUIVALENTES

Nesta seção, exploraremos o conceito de equivalência linear já introduzido no capítulo anterior, na Seção 2.1.1. Consideramos \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 folheações de mesmo grau em \mathbb{P}^2 onde fixamos um sistema de coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ de modo que nessas coordenadas, essas folheações sejam induzidas, respectivamente, pelas 1-formas

$$\omega_1 = P_1(x, y) dx + Q_1(x, y) dy \text{ e } \omega_2 = P_2(x, y) dx + Q_2(x, y) dy. \quad (3.1)$$

Diremos que \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 são folheações linearmente equivalentes com respeito às coordenadas $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ se existem $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in \mathbb{C}$ satisfazendo $\alpha\delta - \beta\gamma \neq 0$ e

$$\begin{cases} P_2(x, y) = \alpha P_1(x, y) + \beta Q_1(x, y) \\ Q_2(x, y) = \gamma P_1(x, y) + \delta Q_1(x, y). \end{cases}$$

Vimos, dentre outras propriedades, que esta define uma relação de equivalência no espaço das folheações de \mathbb{P}^2 e que, em uma mesma classe de equivalência por essa relação, todas as folheações possuem o mesmo conjunto singular na parte afim e os mesmos números de Milnor nos pontos de \mathbb{C}^2 . Provamos também que os feixes lineares polares com respeito a uma reta fixada classificam as classes de equivalência por essa relação, ou seja, duas folheações \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 como acima possuem o mesmo feixe linear polar com respeito à uma reta L se, e somente se, \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 são linearmente equivalentes quando a reta L é

tomada como a reta no infinito em relação ao sistema de coordenadas afins. Um outro resultado interessante acerca dessa relação de equivalência nos diz que duas folheações em \mathbb{P}^2 linearmente equivalentes \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 que possuem a mesmas curvas polares $P_l^{\mathcal{F}_1}$ e $P_l^{\mathcal{F}_2}$ em relação a um ponto $l \in \mathbb{P}^2 \setminus L_\infty$ coincidem.

PROPOSIÇÃO 3.1.1. *Se \mathcal{F}_1 e \mathcal{F}_2 são folheações linearmente equivalentes com $P_l^{\mathcal{F}_1} = P_l^{\mathcal{F}_2}$ para algum ponto $l \in \mathbb{P}^2 \setminus L_\infty$, então $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$.*

Demonstração. Por uma mudança afim de coordenadas, podemos supor que $l = (0, 0) \in \mathbb{C}^2$. Sabemos que existe $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$ tal que

$$\begin{cases} P_2(x, y) = \alpha P_1(x, y) + \beta Q_1(x, y) \\ Q_2(x, y) = \gamma P_1(x, y) + \delta Q_1(x, y). \end{cases} \quad (3.2)$$

Por outro lado, sabemos de [19] que duas curvas polares $P_0^{\mathcal{F}_1}$ e $P_0^{\mathcal{F}_2}$ são iguais se, e somente se, na parte afim, \mathcal{F}_2 é modificação radial de \mathcal{F}_1 , ou seja, a forma ω_2 induzindo a folheação \mathcal{F}_2 difere da forma ω_1 que induz a folheação \mathcal{F}_1 por um múltiplo da forma que induz a folheação radial. Temos assim, a seguinte equação

$$\omega_1 = \omega_2 + G(x, y) (ydx - xdy). \quad (3.3)$$

Por (3.2), a equação acima equivale a

$$\begin{aligned} P_1(x, y)dx + Q_1(x, y)dy &= \\ &= (\alpha P_1(x, y) + \beta Q_1(x, y))dx + (\gamma P_1(x, y) + \delta Q_1(x, y))dy + G(x, y) (ydx - xdy) \end{aligned}$$

que, por sua vez, é equivalente a

$$\begin{aligned} [(\alpha - 1)P_1(x, y) + \beta Q_1(x, y)] dx + [(\delta - 1)Q_1(x, y) + \gamma P_1(x, y)] dy &= \\ &= yG(x, y)dx - xG(x, y)dy. \end{aligned}$$

Temos então o seguinte sistema

$$\begin{cases} (\alpha - 1)P_1(x, y) + \beta Q_1(x, y) = yG(x, y) & \text{(I)} \\ (\delta - 1)Q_1(x, y) + \gamma P_1(x, y) = -xG(x, y). & \text{(II)} \end{cases}$$

Do sistema acima, devemos ter necessariamente que $\alpha = \delta = 1$, $\beta = \gamma = 0$. Caso contrário, quaisquer outros valores para α, β, γ e δ implicaria a existência de um fator comum $G(x, y)$ para $P_1(x, y)$ e $Q_1(x, y)$. Concluimos, então, que $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, ou seja, $\mathcal{F}_1 = \mathcal{F}_2$. \square

3.2 ESTUDO DO CONJUNTO SINGULAR DE FOLHEAÇÕES LINEARMENTE EQUIVALENTES EM L_∞

Seja \mathcal{F} folheação de grau d em \mathbb{P}^2 induzida em um sistema de coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ pela 1-forma:

$$\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy,$$

Seja ω_h a homogeneização de ω nas coordenadas homogêneas $(X : Y : Z) \in \mathbb{P}^2$. Vamos cindir $Sing(\mathcal{F})$ como $Sing(\mathcal{F}) = S_1(\omega_h) \cup S_2(\omega_h)$ em que

$$S_1(\omega_h) = \{p = (X : Y : Z) \in Sing(\omega_h); Z \neq 0\}$$

e

$$S_2(\omega_h) = \{p = (X : Y : Z) \in Sing(\omega_h); Z = 0\}.$$

Considere também:

$$\Sigma_t = \{(X : Y : 0) \in \mathbb{P}^2; t(X, Y) = 0\}$$

e

$$\Sigma_{\tilde{t}} = \{(X : Y : 0) \in \mathbb{P}^2; \tilde{t}(X, Y) = 0\},$$

onde $t(X, Y)$ e $\tilde{t}(X, Y)$ serão polinômios definidos *a posteriori*. Nesse mesmo sistema de coordenadas afins, seja $\tilde{\mathcal{F}}$ uma folheação linearmente equivalente a \mathcal{F} induzida pela 1-forma

$$\tilde{\omega} = \tilde{P}(x, y)dx + \tilde{Q}(x, y)dy.$$

Observe que a homogeneização de ω nos dá

$$\omega_h = ZP_h(X, Y, Z)dX + ZQ_h(X, Y, Z)dY - [XP_h(X, Y, Z) + YQ_h(X, Y, Z)] dZ.$$

Aqui estamos denotando por P_h e Q_h os polinômios homogeneizados de P e Q . Para a folheação \mathcal{F} devemos considerar os casos em que $Z \neq 0$ e $Z = 0$. Se $Z \neq 0$, teremos $p = (X : Y : Z) \in S_1(\omega_h)$ se, e somente se, $(x, y) \in \text{Sing}(\omega)|_{\mathbb{C}^2}$. Se $Z = 0$, segue que, $p = (X : Y : 0) \in S_2(\omega_h)$ se, e somente se, $(X : Y) \in \Sigma_t$, em que

$$t(X, Y) = XP_h(X, Y, 0) + YQ_h(X, Y, 0).$$

Para a folheação $\tilde{\mathcal{F}}$, observamos primeiramente que a homogeneização de $\tilde{\omega}$ é dada por

$$\tilde{\omega}_h = Z(\alpha P_h + \beta Q_h) dX + Z(\gamma P_h + \delta Q_h) dY - [X(\alpha P_h + \beta Q_h) + Y(\gamma P_h + \delta Q_h)] dZ.$$

Devemos novamente considerar os casos $Z \neq 0$ e $Z = 0$. Assim, se $Z \neq 0$, para $\tilde{\mathcal{F}}$ bem como para \mathcal{F} visto acima, $p = (X : Y : Z) \in S_1(\tilde{\omega}_h)$ se, e somente se, $(x, y) \in \text{Sing}(\omega)$. Agora, se $Z = 0$, temos $p = (X : Y : 0) \in S_2(\tilde{\omega}_h)$ se, e somente se, $(X, Y) \in \Sigma_{\tilde{t}}$, onde

$$\tilde{t}(X, Y) = X(\alpha P_h + \beta Q_h) + Y(\gamma P_h + \delta Q_h).$$

Considere a seguinte matriz $A(X, Y) \in M_{2 \times 2}$ definida por

$$A(X, Y) = \begin{pmatrix} P_h \\ Q_h \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X & Y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} XP_h & YP_h \\ XQ_h & YQ_h \end{pmatrix},$$

em que, $P_h = P_h(X, Y, 0)$ e $Q_h = Q_h(X, Y, 0)$. Observe que:

$$t(X, Y) = \text{tr}(A(X, Y)) = \text{tr} \begin{pmatrix} XP_h & YP_h \\ XQ_h & YQ_h \end{pmatrix} = XP_h + YQ_h. \quad (3.4)$$

Por outro lado, considerando $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$ a matriz que estabelece a

equivalência linear entre \mathcal{F} e $\tilde{\mathcal{F}}$, temos que

$$\begin{aligned}\tilde{t}(X, Y) &= \operatorname{tr}(gA(X, Y)) = \operatorname{tr} \left[\begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \begin{pmatrix} XP_h & YP_h \\ XQ_h & YQ_h \end{pmatrix} \right] = \\ &= (\alpha X + \gamma Y)P_h + (\beta X + \delta Y)Q_h.\end{aligned}\tag{3.5}$$

Vamos considerar os seguintes casos:

Caso 1: P e Q homogêneos de mesmo grau.

De posse da Definição 2.1.14 temos a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 3.2.1. *Sejam \mathcal{F} e $\tilde{\mathcal{F}}$ folheações homogêneas, linearmente equivalentes em $\mathcal{F}ol(d)$ com $d > 1$. Se \mathcal{F} e $\tilde{\mathcal{F}}$ têm mesmo conjunto singular, então, $\mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}}$.*

Demonstração. Suponha que \mathcal{F} e $\tilde{\mathcal{F}}$ sejam induzidas em coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C}^2$, respectivamente, por

$$\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad \text{e} \quad \tilde{\omega} = \tilde{P}(x, y)dx + \tilde{Q}(x, y)dy.$$

Seja $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$ a matriz que estabelece a relação de equivalência entre \mathcal{F} e $\tilde{\mathcal{F}}$. Sabemos que $S_2(\omega_h) = S_2(\tilde{\omega}_h)$ e então $\sum_t = \sum_{\tilde{t}}$. Assim,

$$\tilde{t}(X, Y) = \lambda t(X, Y), \quad \text{onde } \lambda \in \mathbb{C}^*.\tag{3.6}$$

Da equação (3.6), segue que

$$\begin{aligned}\tilde{t}(X, Y) = \operatorname{tr}(gA(X, Y)) &= X(\alpha P_h + \beta Q_h) + Y(\gamma P_h + \delta Q_h) \\ &= P_h(\alpha X + \gamma Y) + Q_h(\beta X + \delta Y) = \lambda(XP_h + YQ_h).\end{aligned}$$

A igualdade acima nos diz que

$$(\alpha X + \gamma Y)P_h + (\beta X + \delta Y)Q_h = (\lambda X)P_h + (\lambda Y)Q_h,$$

que pode ser reescrita como

$$[(a - \lambda)X + cY]P_h + [bX + (d - \lambda)Y]Q_h = 0$$

e, conseqüentemente,

$$[(a - \lambda)X + cY]P_h = -[bX + (d - \lambda)Y]Q_h. \quad (3.7)$$

Segue da primalidade entre P_h e Q_h que $\alpha = \delta = \lambda$ e $\beta = \gamma = 0$ e, assim, podemos concluir que $g = \lambda I$. \square

Caso 2: $\text{grau}(P) > \text{grau}(Q)$.

Tal condição equivale a dizer que $Q_h(X, Y, 0) \equiv 0$. Consideremos novamente, folheações linearmente equivalentes \mathcal{F} e $\tilde{\mathcal{F}}$ induzidas em coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ por

$$\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad \text{e} \quad \tilde{\omega} = \tilde{P}(x, y)dx + \tilde{Q}(x, y)dy.$$

PROPOSIÇÃO 3.2.2. *Sejam \mathcal{F} e $\tilde{\mathcal{F}}$ folheações linearmente equivalentes, definidas como acima, e suponha que $\text{grau}(P) > \text{grau}(Q)$. Nessas condições, $\text{Sing}(\omega_h) = \text{Sing}(\tilde{\omega}_h)$ se, e somente se, $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & \delta \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$, onde g é a matriz que estabelece a equivalência linear.*

Demonstração. A condição nos graus de P e Q nos garantem que $Q_h(X, Y, 0) \equiv 0$. Isso também nos garante que a matriz $A(X, Y)$ pode ser escrita como

$$A(X, Y) = \begin{pmatrix} P_h(X, Y, 0) \\ 0 \end{pmatrix} (X \ Y) = \begin{pmatrix} X P_h(X, Y, 0) & Y P_h(X, Y, 0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

A matriz $A(X, Y)$ dada como acima nos fornece

$$t(X, Y) = t(A(X, Y)) = X P_h(X, Y, 0). \quad (3.8)$$

Por outro lado,

$$\tilde{t}(X, Y) = \text{tr}(gA(X, Y)) = \text{tr} \left[\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X P_h(X, Y, 0) & Y P_h(X, Y, 0) \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \right]$$

$$= (aX + cY)P_h(X, Y, 0). \quad (3.9)$$

Uma vez que $S_1(\omega_h) = S_1(\tilde{\omega}_h)$, devemos estudar somente os conjuntos $S_2(\omega_h)$ e $S_2(\tilde{\omega}_h)$. Como por hipótese $S_2(\omega_h) = S_2(\tilde{\omega}_h)$ podemos garantir a existência de $\alpha \neq 0$ tal que $\tilde{t}(X, Y) = \alpha t(X, Y)$. Da equação (3.9) segue que

$$(aX + cY)P_h(X, Y, 0) = \alpha X P_h(X, Y, 0),$$

o que nos dá,

$$[(a - \alpha)X + cY]P_h(X, Y, 0) = 0 \quad \forall (X : Y) \in \mathbb{P}^1.$$

Daí concluímos que $a = \alpha$ e $c = 0$ e, conseqüentemente, $g = \begin{pmatrix} \alpha & b \\ 0 & d \end{pmatrix}$.

A recíproca é imediata. □

caso 3: P e Q polinômios não homogêneos de mesmo grau.

Nesse caso, se $m.d.c(P_h(X, Y, 0), Q_h(X, Y, 0)) = 1$, retornamos ao caso 1, pelo qual sabemos que $S(\omega) = S(\tilde{\omega})$ se, e somente se, $\mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}}$. No outro caso, ou seja, $m.d.c(P_h(X, Y, 0), Q_h(X, Y, 0)) \neq 1$, devemos ter:

$$P_h(X, Y, 0) = G(X, Y)\bar{P}(X, Y) \quad \text{e} \quad Q_h(X, Y, 0) = G(X, Y)\bar{Q}(X, Y),$$

em que $G(X, Y)$ é um polinômio homogêneo e os polinômios \bar{P} e \bar{Q} são relativamente primos entre sí. Assim, vamos considerar duas situações:

$$(1) \quad \text{grau}(\bar{P}) = \text{grau}(\bar{Q}) = 0.$$

Podemos considerar $\bar{P} = \bar{Q} = 1$ e, então, com a notação acima, os polinômios $t(X, Y)$ e $\tilde{t}(X, Y)$ são dados respectivamente, por

$$t(X, Y) = XP_h(X, Y, 0) + YQ_h(X, Y, 0) = G(X, Y)(X + Y)$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{t}(X, Y) &= (\alpha X + \gamma Y)P_h(X, Y, 0) + (\beta X + \delta Y)Q_h(X, Y, 0) \\ &= G(X, Y)[(\alpha + \beta)X + (\gamma + \delta)Y]. \end{aligned}$$

Portanto, a singularidade $[-1 : 1 : 0] \in L_\infty$ se move por equivalência linear para $\left[-\frac{\alpha + \beta}{\gamma + \delta} : 1 : 0\right] \in L_\infty$, enquanto as outras, raízes de $G(X, Y)$, permanecem fixas.

Agora, se

$$(2) \text{ grau}(\bar{P}) = \text{grau}(\bar{Q}) \geq 1.$$

Temos que

$$\begin{aligned} t(X, Y) &= XP_h(X, Y, 0) + YQ_h(X, Y, 0) = XG(X, Y)\bar{P} + YG(X, Y)\bar{Q} \\ &= G(X, Y)(X\bar{P} + Y\bar{Q}) \end{aligned}$$

e

$$\begin{aligned} \tilde{t}(X, Y) &= (\alpha X + \gamma Y)P_h(X, Y, 0) + (\beta X + \delta Y)Q_h(X, Y) \\ &= G(X, Y)[(\alpha X + \beta Y)\bar{P} + (\gamma X + \delta Y)\bar{Q}]. \end{aligned}$$

Retornamos assim à situação da equação (3.7), em que \bar{P} e \bar{Q} são polinômios homogêneos de mesmo grau, relativamente primos. Isto nos permite concluir que $t(x, y)$ e $\tilde{t}(x, y)$ terão as mesmas raízes se, e somente se, os polinômios

$$(X\bar{P} + Y\bar{Q}) \text{ e } [(\alpha X + \beta Y)\bar{P} + (\gamma X + \delta Y)\bar{Q}]$$

possuírem as mesmas raízes. Como visto anteriormente isto ocorre se, e somente se, $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} = \lambda I \in GL(2, \mathbb{C})$.

3.3 SUBESQUEMAS SINGULARES

A. Campillo e J. Olivares demonstram em [7] que uma folheação de grau maior que 1 no plano projetivo é unicamente determinada por seu subesquema de pontos singulares, generalizando o trabalho de X. Gomez-Mont e G. Kempf que, em [16], demonstram que se uma folheação em \mathcal{F} em \mathbb{P}^n possui somente singularidades não degeneradas então \mathcal{F} é completamente determinada por seu conjunto singular. Faremos aqui uma breve explanação desse conceito que nos será útil para provarmos de maneira independente o mesmo teorema provado em [7]. Para isso, começamos por considerar uma folheação $\mathcal{F} \in \mathcal{F}ol(d)$ induzida

em coordenadas homogêneas $(X : Y : Z) \in \mathbb{P}^2$ pela 1-forma

$$\omega = P(X, Y, Z)dX + Q(X, Y, Z)dY + R(X, Y, Z)dZ. \quad (3.10)$$

Seja $\Delta = \Delta_{\mathcal{F}}$ sua rede polar associada (veja (2.1)). Consideremos também o ideal $\mathcal{I}(\omega) = (P, Q, R)$ das componentes de ω . Para qualquer ponto $q \in \mathbb{P}^2$, denotamos por $\mathcal{I}_q = (P_q, Q_q, R_q)$ o ideal de $\mathcal{O}_{(\mathbb{P}^2, q)}$ gerado pelas equações dos germes em q de todas as curvas polares $\mathcal{P}_i^{\mathcal{F}}$ em Δ . Considere a seguinte definição:

DEFINIÇÃO 3.3.1. *O subesquema singular $Sings(\mathcal{F})$ de uma folheação \mathcal{F} em \mathbb{P}^2 é o subesquema de \mathbb{P}^2 dado pelo feixe de ideais $\mathcal{I} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$ cujas fibras nos pontos $q \in Sing(\mathcal{F})$ são os ideais $\mathcal{I}_q = (P_q, Q_q, R_q)$ e $\mathcal{O}_{(\mathbb{P}^2, q)}$, nos pontos $q \notin Sing(\mathcal{F})$. O feixe de ideais do subesquema singular $Sings(\mathcal{F})$ de \mathcal{F} será denotado por $\mathcal{I}_{\mathcal{F}} \subset \mathcal{O}_{\mathbb{P}^2}$.*

É provado em [7] o seguinte teorema afirmando-se que o subesquema singular $Sings(\mathcal{F})$ define a folheação \mathcal{F} , ou seja, uma folheação \mathcal{F} de grau $d \geq 2$ induzida por (3.10) é definida por seu feixe de ideais $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$.

TEOREMA 3.3.2. *Seja \mathcal{F} folheação de grau $d \geq 2$. Então, existe uma única tripla P, Q, R (a menos de múltiplo por escalar) em $\mathcal{V} = H^0(\mathbb{P}^2, \mathcal{I}_0(r+1))$ satisfazendo a condição de Euler $XP + YQ + ZR = 0$. Em consequência desse fato, se $d \geq 2$, a folheação \mathcal{F} induzida pela forma $\omega = P dX + Q dY + R dZ$ é a única folheação em $\mathcal{F}ol(d)$, tendo $Sings(\mathcal{F})$ como subesquema singular.*

Faremos uso do seguinte resultado provado por D. Cerveau e A. Lins Neto em [10], que é um teorema do tipo *Lema de Noether* para folheações, para dar uma prova alternativa (e mais simples) para o teorema acima citado.

LEMA DE NOETHER PARA FOLHEAÇÕES. ([10]) *Seja g um polinômio homogêneo em \mathbb{C}^3 com a seguinte propriedade: para cada $p \in \mathbb{C}^3 - \{0\}$, o germe g_p pertence ao ideal local $\mathcal{I}(\omega)_p$. Então, $g \in \mathcal{I}(\omega)$, isto é, existem polinômios homogêneos A, B, C tais que $g = AP + BQ + CR$.*

Antes de seguirmos para o principal teorema desta seção, provemos a seguinte proposição.

PROPOSIÇÃO 3.3.3. *Se duas folheações em \mathbb{P}^2 têm o mesmo subesquema singular então elas possuem a mesma rede polar.*

Demonstração. Sejam \mathcal{F} e $\tilde{\mathcal{F}}$ folheações em $\mathcal{F}ol(d)$, induzidas em coordenadas homogêneas pelas 1-formas

$$\omega = P(X, Y, Z)dX + Q(X, Y, Z)dY + R(X, Y, Z)dZ$$

e

$$\tilde{\omega} = \tilde{P}(X, Y, Z)dX + \tilde{Q}(X, Y, Z)dY + \tilde{R}(X, Y, Z)dZ.$$

Considere também suas respectivas redes polares

$$\Delta_{\mathcal{F}} = \{\alpha P(X, Y, Z) + \beta Q(X, Y, Z) + \gamma R(X, Y, Z) = 0; (\alpha : \beta : \gamma) \in \mathbb{P}^2\}$$

e

$$\Delta_{\tilde{\mathcal{F}}} = \{\alpha \tilde{P}(X, Y, Z) + \beta \tilde{Q}(X, Y, Z) + \gamma \tilde{R}(X, Y, Z) = 0; (\alpha : \beta : \gamma) \in \mathbb{P}^2\}.$$

Por hipótese, são iguais seus feixes ideais $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$ e $\mathcal{I}_{\tilde{\mathcal{F}}}$ e, para qualquer ponto $q \in \mathbb{P}^2$, temos que os germes \tilde{P}_q, \tilde{Q}_q e \tilde{R}_q pertencem a $\mathcal{I}_{\mathcal{F}}$. Assim, pelo Lema de Noether para folheações, existem polinômios A_i, B_i e $C_i, i = 1, 2, 3$ tais que:

$$\tilde{P} = A_1P + B_1Q + C_1R,$$

$$\tilde{Q} = A_2P + B_2Q + C_2R,$$

$$\tilde{R} = A_3P + B_3Q + C_3R.$$

Como $\text{grau}(\mathcal{F}) = \text{grau}(\tilde{\mathcal{F}})$ devemos ter que A_i, B_i e $C_i \in \mathbb{C}$ para $i = 1, 2, 3$. Dessa forma, os geradores P, Q e R de $\Delta_{\mathcal{F}}$ pertencem à rede polar $\Delta_{\tilde{\mathcal{F}}}$ gerada pelos polinômios \tilde{P}, \tilde{Q} e \tilde{R} , donde segue o resultado. \square

TEOREMA 3.3.4. *Se \mathcal{F} e $\tilde{\mathcal{F}}$ são folheações em $\mathcal{F}ol(d)$, com $d \neq 1$, induzindo a mesma rede polar, então $\mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}}$.*

Demonstração. Vamos considerar

$$\omega = P(X, Y, Z)dX + Q(X, Y, Z)dY + R(X, Y, Z)dZ$$

e

$$\tilde{\omega} = \tilde{P}(X, Y, Z)dX + \tilde{Q}(X, Y, Z)dY + \tilde{R}(X, Y, Z)dZ,$$

as 1-formas que induzem em coordenadas homogêneas as folheações \mathcal{F} e $\tilde{\mathcal{F}}$ e manter a mesma notação introduzida na Proposição 3.3.3 para as redes polares de \mathcal{F} e $\tilde{\mathcal{F}}$. Temos, por hipótese, que \tilde{P} , \tilde{Q} e \tilde{R} pertencem a $\Delta_{\mathcal{F}}$ e, portanto, existem $a_i, b_i, c_i \in \mathbb{C}$ para $i = 1, 2, 3$ tais que

$$\begin{aligned}\tilde{P} &= a_1P + b_1Q + c_1R \\ \tilde{Q} &= a_2P + b_2Q + c_2R, \\ \tilde{R} &= a_3P + b_3Q + c_3R.\end{aligned}\tag{3.11}$$

Da relação de Euler, temos

$$XP + YQ + ZR = 0 \Rightarrow ZR = -XP - YQ\tag{3.12}$$

e

$$X\tilde{P} + Y\tilde{Q} + Z\tilde{R} = 0.\tag{3.13}$$

Substituindo (3.11) em (3.13) temos

$$(a_1X + a_2Y + a_3Z)P + (b_1X + b_2Y + b_3Z)Q + (c_1X + c_2Y + c_3Z)R = 0.\tag{3.14}$$

Multiplicando (3.14) por Z e substituindo ZR pelo valor em (3.12) encontraremos

$$\begin{aligned}P[Z(a_1X + a_2Y + a_3Z) - X(c_1X + c_2Y + c_3Z)] &= \\ &= -Q[Z(b_1X + b_2Y + b_3Z) - Y(c_1X + c_2Y + c_3Z)].\end{aligned}\tag{3.15}$$

Assumindo que $Z = 0$ não é invariante por \mathcal{F} vemos que se $\text{grau}(\mathcal{F}) = d \geq 2$ então $\text{grau } P = \text{grau } Q \geq 3$ e, conseqüentemente, devemos ter necessariamente da equação (3.15) que $\tilde{P} = \lambda P$, $\tilde{Q} = \lambda Q$, $\tilde{R} = \lambda R$ para algum $\lambda \in \mathbb{C}^*$.

O caso em que $d = 0$ é trivial. □

Este resultado, simplifica a prova do Teorema 3.3.2 que enunciamos como o

COROLÁRIO 3.3.5. *Se \mathcal{F} e \mathcal{F}' são folheações em $\mathcal{F}ol(d, \mathbb{P}^2)$, $d \neq 1$, com mesmo subesquema singular então $\mathcal{F} = \mathcal{F}'$.*

Demonstração. Segue da Proposição 3.3.3 que, se \mathcal{F} e \mathcal{F}' possuem o mesmo subesquema

singular então \mathcal{F} e \mathcal{F}' definem a mesma rede polar. Consequentemente, a Proposição 3.3.4 estabelece que as folheações \mathcal{F} e \mathcal{F}' são as mesmas. \square

COROLÁRIO 3.3.6. *Se $\mu_p(\mathcal{F}) = 1$ para todo $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$ então, o conjunto singular define a folheação \mathcal{F} .*

O corolário acima, juntamente com a Proposição 3.2.2, nos permite concluir que, para um elemento genérico no espaço de folheações, o conjunto singular define a folheação. Por outro lado, o exemplo a seguir mostra que é possível construir uma família a dois parâmetros de folheações de mesmo grau e mesmos pontos singulares em \mathbb{P}^2 , aqui denotada por $\mathcal{F}_{(\alpha,\beta)}$, para o qual o elemento genérico nesta família possui os mesmos números de Milnor.

EXEMPLO 3.3.7. Seja \mathcal{F} uma folheação de grau d em \mathbb{P}^2 , induzida em coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ pelo campo de vetores

$$\mathbf{v} = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Considere a seguinte família de folheações:

$$\mathcal{F}_{(\alpha,\beta)} = \left\{ \tilde{\mathcal{F}} = g_*\mathcal{F}; g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C}) \right\}.$$

Sabemos que toda folheação nesta família possui o mesmo grau d . Na Seção 3.1, vimos ainda que, na parte afim, essas folheações possuem mesmo conjunto singular, e mais, o mesmo número de Milnor nos pontos singulares. Sabemos da equação (3.9) que as singularidades em L_∞ de cada folheação $\tilde{\mathcal{F}} \in \mathcal{F}_{(\alpha,\beta)}$ são zeros do polinômio $\tilde{t}(X, Y) = XP_h(X, Y, 0)$, em que P_h é o polinômio homogeneizado de $P(x, y)$. Sabemos também que $\sum_{p \in \text{Sing}(\tilde{\mathcal{F}}) \cap L_\infty} \mu_p(\tilde{\mathcal{F}}) = d + 1$ em que d é o grau de $\tilde{\mathcal{F}}$. Assim, temos finitas possibilidades para os números de Milnor de $\tilde{\mathcal{F}}$ nas singularidades sobre L_∞ . Podemos, então, afirmar que, genericamente, essas folheações possuem os mesmos números de Milnor nos pontos singulares. Além disso devemos, nesse caso, ter que $\mu_p(\tilde{\mathcal{F}}) > 1$ para alguma singularidade p de $\tilde{\mathcal{F}}$ sobre L_∞ . Pois, em caso contrário, teríamos do Corolário 3.3.6 que, genericamente, essas folheações seriam as mesmas.

3.4 VARIEDADES INVARIANTES

Nesta seção vamos considerar folheações em \mathbb{P}^2 linearmente equivalentes que possuem curvas algébricas invariantes em comum. Começaremos com a seguinte proposição:

PROPOSIÇÃO 3.4.1. *Sejam \mathcal{F} e \mathcal{F}' duas folheações distintas em \mathbb{P}^2 tendo uma folha em comum L . Então, L é algébrica, isto é, o fecho \bar{L} é uma curva algébrica.*

Demonstração. Tome um sistema de coordenadas afins $(x, y) \subset \mathbb{C}^2$ tal que L não esteja contida na reta do infinito. Suponha que \mathcal{F} e \mathcal{F}' são induzidas, neste sistema de coordenadas, pelos campos de vetores polinomiais

$$\mathbf{v} = P(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q(x, y) \frac{\partial}{\partial y} \quad \text{e} \quad \mathbf{v}' = P'(x, y) \frac{\partial}{\partial x} + Q'(x, y) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Sabendo que L é uma folha comum para ambos, \mathbf{v} e \mathbf{v}' definem as mesmas direções sobre L e, assim, o polinômio não nulo $P(x, y)\tilde{Q}(x, y) - Q(x, y)\tilde{P}(x, y)$ se anula nos pontos de L . Isso prova que L é algébrico. \square

EXEMPLO 3.4.2. Fixe números complexos $x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_l \in \mathbb{C}$. Suponha que \mathcal{F} seja induzida em coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C}$ pelo campo de vetores

$$\mathbf{v} = (x - x_1) \cdots (x - x_k) \frac{\partial}{\partial x} + (y - y_1) \cdots (y - y_l) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Para $a, d \in \mathbb{C}^*$ com $a \neq d$, seja \mathcal{F}' a folheação induzida pelo campo vetorial

$$\mathbf{v}' = a(x - x_1) \cdots (x - x_k) \frac{\partial}{\partial x} + d(y - y_1) \cdots (y - y_l) \frac{\partial}{\partial y}.$$

Então \mathcal{F} e \mathcal{F}' são linearmente equivalentes tendo como curvas invariantes as retas verticais $x = x_i, i = 1, \dots, k$, e as retas horizontais $y = y_j, j = 1, \dots, l$.

Sejam \mathcal{F} e \mathcal{F}' duas folheações distintas, linearmente equivalentes de mesmo grau. Observamos anteriormente que, como o grau é o mesmo, L_∞ é uma curva invariante comum para ambas folheações. A seguir, vamos considerar a situação na qual existe uma curva algébrica invariante S , diferente de L_∞ . Evidentemente, os pontos de interseção de S e L_∞ são singularidades comuns para \mathcal{F} e \mathcal{F}' .

PROPOSIÇÃO 3.4.3. *Sejam \mathcal{F} e \mathcal{F}' duas folheações distintas de mesmo grau em \mathbb{P}^2 . Suponha que \mathcal{F} e \mathcal{F}' tenham em comum uma curva algébrica irreduzível invariante de grau maior ou igual a dois. Então, \mathcal{F} e \mathcal{F}' não são linearmente equivalentes.*

Demonstração. Suponha por absurdo que \mathcal{F} e \mathcal{F}' sejam folheações linearmente equivalentes e induzidas em coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ por

$$\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy = 0 \quad \text{e} \quad \omega' = P'(x, y)dx + Q'(x, y)dy = 0.$$

Suponha ainda que \mathcal{F} e \mathcal{F}' possuam uma curva irreduzível invariante de equação reduzida $S := \{F = 0\}$ de grau maior que 1. Escrevendo a equivalência linear para \mathcal{F}'

$$\begin{pmatrix} P'(x, y) \\ Q'(x, y) \end{pmatrix} = g \cdot \begin{pmatrix} P(x, y) \\ Q(x, y) \end{pmatrix}, \quad (3.16)$$

onde $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$ é a matriz que estabelece a relação de equivalência linear, temos que a 1-forma induzindo a folheação \mathcal{F}' pode ser reescrita como

$$\omega' = (\alpha P(x, y) + \beta Q(x, y))dx + (\gamma P(x, y) + \delta Q(x, y))dy.$$

Assim, é válido que

$$\omega \wedge dF = (QF_y + PF_x)dx \wedge dy \quad (3.17)$$

e

$$\omega' \wedge dF = [(\gamma P + \delta Q)F_y + (\alpha P + \beta Q)F_x]dx \wedge dy. \quad (3.18)$$

Assim, se a curva S fosse invariante por \mathcal{F} teríamos a partir da equação (3.17) que:

$$F|(QF_y + PF_x)$$

o que significa que existe $H \in \mathbb{C}[x, y]$ tal que

$$QF_y + PF_x = HF, \quad (3.19)$$

ou equivalentemente,

$$QF_y = HF - PF_x. \quad (3.20)$$

Da invariância de S por \mathcal{F}' , temos

$$F|[(\gamma P + \delta Q)F_y + (\alpha P + \beta Q)F_x]. \quad (3.21)$$

Substituindo (3.20) em (3.21) temos que

$$F|[\gamma PF_y + \delta HF - \delta PF_x + (\alpha P + \beta Q)F_x],$$

o que implica

$$F|\{\gamma PF_y + [(\alpha - \delta)P + \beta Q]F_x\}. \quad (3.22)$$

Segue, então, que

$$F|\{\gamma PQF_y + [(\alpha - \delta)PQ + \beta Q^2]F_x\}. \quad (3.23)$$

Substituindo o valor de QF_y dado por (3.20) em (3.23) temos

$$F|\{\gamma PHF + [-\gamma P^2 + (\alpha - \delta)PQ + \beta Q^2]F_x\}$$

e, conseqüentemente,

$$F|[-\gamma P^2 + (\alpha - \delta)PQ + \beta Q^2].$$

Podemos, então, afirmar que existem números complexos r_1, r_2, s_1 e s_2 , tais que

$$F|(r_1P + s_1Q)(r_2P + s_2Q) \quad (3.24)$$

e, portanto,

$$F|(r_1P + s_1Q) \text{ ou } F|(r_2P + s_2Q).$$

Na equação (3.24) acima usamos o fato de a curva S ser irredutível assim como a decomposição em fatores lineares do tipo $(r_1Z + s_1W)(r_2Z + s_2W)$ do polinômio quadrático $-\gamma Z^2 + (\alpha - \delta)ZW + \beta W^2$. Sem perda de generalidade, suponha que $F|(r_1P + s_1Q)$. Isso nos diz que existe $G(x, y) \in \mathbb{C}[x, y]$ tal que $r_1P + s_1Q = GF$. Suponha $r_1 = 1$. Neste

caso, podemos admitir que $s_1 = s$. Assim,

$$P + sQ = GF \quad (3.25)$$

e, conseqüentemente,

$$P = GF - sQ. \quad (3.26)$$

De (3.22) e (3.26) temos que $F|Q\{-s\gamma F_y + [-s(\alpha - \delta) + \beta]F_x\}$. Teremos, portanto, que $F|Q$. Do mesmo modo, usando a igualdade (3.20),

$$PF_x = HF - QF_y$$

e, observando que $F_y \neq 0$, encontraríamos que $F|P$, o que é um absurdo. \square

PROPOSIÇÃO 3.4.4. *Sejam \mathcal{F} e \mathcal{F}' folheações em \mathbb{P}^2 linearmente equivalentes em um sistema de coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C}^2$. Se \mathcal{F} e \mathcal{F}' admitem uma reta invariante em comum diferente de L_∞ , então, $\mathcal{F}' = g_*\mathcal{F}$, onde $g \in GL(2, \mathbb{C})$ é uma matriz triangular.*

Demonstração. Após mudança afim de coordenadas, suponha que a reta L tenha equação $\{x = 0\}$. Suponha que \mathcal{F} e \mathcal{F}' sejam induzidas nesse sistema pelas 1-formas

$$\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad \text{e} \quad \omega' = P'(x, y)dx + Q'(x, y)dy.$$

Como \mathcal{F} e \mathcal{F}' são linearmente equivalentes, existe matriz $g = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \in GL(2, \mathbb{C})$ tal que

$$\begin{pmatrix} P' \\ Q' \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \gamma & \delta \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}.$$

Como S é invariante por \mathcal{F} , temos que

$$\begin{aligned} [P(x, y)dx + Q(x, y)dy] \wedge dx &= -Q(x, y)dx \wedge dy \\ &= x(-\bar{Q}(x, y))dx \wedge dy \end{aligned} \quad (3.27)$$

para algum polinômio $\bar{Q}(x, y)$. Por outro lado, o produto exterior de ω' por dx nos fornece

$$\begin{aligned}\omega' \wedge dx &= [(\alpha P(x, y) + \gamma Q(x, y))dx + (\gamma P(x, y) + \delta Q(x, y))dy] \wedge dx \\ &= -(\gamma P(x, y) + \delta Q(x, y))dx \wedge dy.\end{aligned}\quad (3.28)$$

Sabemos de (3.27) que x divide o polinômio $Q(x, y)$. Da invariância de S por \mathcal{F}' devemos ter que x divide $(\gamma P(x, y) + \delta Q(x, y))$ e, portanto, divide também $\gamma P(x, y)$. Isso é possível se, e somente se, $\gamma \equiv 0$. Segue o resultado. \square

COROLÁRIO 3.4.5. *Se \mathcal{F} e $\tilde{\mathcal{F}}$ são folheações de \mathbb{P}^2 linearmente equivalentes admitindo, na parte afim, três retas distintas não admitindo um mesmo ponto em comum e invariantes por ambas as folheações, então, $\mathcal{F} = \tilde{\mathcal{F}}$.*

Demonstração. Tomamos coordenadas afins de modo que as retas tenham equações $L_1 = \{x = 0\}$, $L_2 = \{y = 0\}$ e $L_3 = \{ax + by + c = 0\}$ com $a \neq 0 \neq b$. Nesse mesmo sistema de coordenadas, consideramos as folheações \mathcal{F} e $\tilde{\mathcal{F}}$ induzidas por

$$\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad \text{e} \quad \tilde{\omega} = \tilde{P}(x, y)dx + \tilde{Q}(x, y)dy.$$

De maneira análoga a Proposição 3.4.4 acima, pode-se mostrar que no caso de uma segunda reta invariante em comum, neste caso a reta L_2 , a matriz que estabelece a relação de equivalência entre as folheações \mathcal{F} e $\tilde{\mathcal{F}}$ seja uma matriz diagonal $g \in GL(2, \mathbb{C})$. Sem perda de generalidade, podemos supor que a matriz g tenha a forma $g = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \delta \end{pmatrix}$.

Supondo que a reta L_3 é invariante por \mathcal{F} devemos ter

$$(P(x, y)dx + Q(x, y)dy) \wedge (a dx + b dy) = (bP(x, y) - aQ(x, y))dx \wedge dy \quad (3.29)$$

$$= (ax + by + c)F(x, y)dx \wedge dy. \quad (3.30)$$

A sua invariância por $\tilde{\mathcal{F}}$ nos dá

$$\begin{aligned}(\tilde{P}(x, y)dx + \tilde{Q}(x, y)dy) \wedge (a dx + b dy) &= (P(x, y)dx + \delta Q(x, y)dy) \wedge (a dx + b dy) \\ &= (bP(x, y) - a\delta Q(x, y))dx \wedge dy\end{aligned}\quad (3.31)$$

$$= (ax + by + c)G(x, y)dx \wedge dy. \quad (3.32)$$

Das equações (3.30) e (3.32) encontramos

$$bP(x, y) - aQ(x, y) = (ax + by + c)F(x, y) \quad (3.33)$$

$$bP(x, y) - a\delta Q(x, y) = (ax + by + c)G(x, y). \quad (3.34)$$

Subtraindo (3.33) de (3.34), encontramos

$$a(1 - \delta)Q(x, y) = (ax + by + c)(G(x, y) - F(x, y)).$$

Assim, caso $\delta \neq 1$, teríamos que $F \neq G$ e, portanto, $(ax + by + c) \mid Q(x, y)$. Isso implicaria, por (3.33) ou por (3.34), que $(ax + by + c)$ também divide o polinômio $P(x, y)$, o que seria uma contradição. \square

Seja \mathcal{F} folheação local em $p \in \mathbb{C}^2$. Dados $p \in \text{Sing}(\mathcal{F})$ e S separatriz em p tomamos uma 1-forma holomorfa ω que induz \mathcal{F} em torno de p e uma função holomorfa f tal que $f = 0$ é a equação local reduzida de S .

LEMA 3.4.6. ([18]) *Nas condições acima, existem germes de funções holomorfas g e h , relativamente primos e não identicamente nulos sobre S , e germe de 1-forma holomorfa η , tais que*

$$g\omega = hdf + f\eta. \quad (3.35)$$

Dessa forma, temos o seguinte índice devido a *Gomez-Mont-Seade-Verjovsky* :

DEFINIÇÃO 3.4.7. ([21]) *O índice GSV de \mathcal{F} com respeito a S passando em p é definido por*

$$GSV(\mathcal{F}, S, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{d(h/g)}{h/g}, \quad (3.36)$$

onde $\partial S = S \cap S_\epsilon^3$, para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Convencionamos ainda que em caso de $p \notin \text{Sing}(\mathcal{F})$, temos $GSV(\mathcal{F}, S, p) = 0$. O índice GSV depende apenas da folheação \mathcal{F} e da curva S .

De posse de tal definição temos o

COROLÁRIO 3.4.8. *Sejam \mathcal{F} e \mathcal{F}' folheações em \mathbb{P}^2 linearmente equivalentes deixando uma reta $L \neq L_\infty$ invariante. Se $p \in L$ é uma singularidade comum às folheações \mathcal{F} e \mathcal{F}' então $GSV(\mathcal{F}, L, p) = GSV(\mathcal{F}', L, p)$.*

Demonstração. Fixamos coordenadas afins $(x, y) \in \mathbb{C}^2$ de modo que \mathcal{F} e \mathcal{F}' sejam induzidas respectivamente por

$$\omega = P(x, y)dx + Q(x, y)dy \quad \text{e} \quad \omega' = P'(x, y)dx + Q'(x, y)dy,$$

e $S = L := \{f = y = 0\}$ seja sua equação reduzida. Sabemos do corolário anterior que a matriz $g \in GL(2, \mathbb{C})$ que estabelece a relação de equivalência linear entre \mathcal{F} e \mathcal{F}' é uma matriz triangular, digamos $\begin{pmatrix} \alpha & 0 \\ \gamma & \delta \end{pmatrix}$. Isso nos dá

$$\begin{cases} P'(x, y) = \alpha P(x, y) \\ Q'(x, y) = \gamma P(x, y) + \delta Q(x, y). \end{cases}$$

Sabemos ainda do lema anterior que existem germes de funções holomorfas g, g', h e h' e germes de 1-formas holomorfas η e η' tais que

$$g\omega = hdf + f\eta \quad \text{e} \quad g'\omega' = h'df + f'\eta'$$

de onde um cálculo simples nos mostra que $g = f_y = 1 = f'_y = g', h = Q, h' = \gamma P + \delta Q'$ $\eta = -kdx, \eta' = -k'dx$, para funções holomorfas k e k' .

Desse modo,

$$\begin{aligned} GSV(\mathcal{F}', L, p) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{d(h'/g')}{h'/g'} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{d(\gamma P + \delta Q)}{\gamma P + \delta Q} \\ &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{(\gamma P_x + \delta Q_x)dx + (\gamma P_y + \delta Q_y)dy}{\gamma P + \delta Q}, \end{aligned} \quad (3.37)$$

em que P_x, P_y, Q_x, Q_y representam respectivamente as derivadas parciais em relação a x e y dos polinômios P e Q . Por outro lado, se $y = 0$ é separatriz de \mathcal{F} , devemos ter que y divide $P(x, y)$ e isso nos dá que $P(x, y) = y\tilde{P}(x, y)$, para algum polinômio $\tilde{P}(x, y)$. Portanto, da equação (3.37), vem que, ao longo de ∂S , devemos ter

$$\begin{aligned}
GSV(\mathcal{F}', L, p) &= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{(\gamma y \tilde{P}_x + \delta Q_x)}{\gamma y \tilde{P} + \delta Q} dx \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{Q_x}{Q} dx \\
&= \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial S} \frac{d(h/g)}{h/g} = GSV(\mathcal{F}, L, p).
\end{aligned}$$

□

O corolário acima, nos fornece um método computacional para mostrarmos se duas folheções em \mathbb{P}^2 são linearmente equivalentes ou não.

Referências Bibliográficas

- [1] BARTHEL, G., KAUP, B. AND KAUP, L., *Holomorphic functions of several variables: an introduction to the fundamental theory*, Berlin, Walter de Gruyter, 1983.
- [2] BRASSELET, J. P., *The Schwartz Classes of complex analytic singular Varieties*, Institut de Mathématiques de Luminy - Marseille - France.
- [3] BRUNELA, M., *Birrational Geometry of Foliations*, First Latin American Congress of Mathematicians, IMPA, 2000.
- [4] CAMACHO C. AND SAD, P., *Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields*, Ann. of Math. **(2)115**(1982), 579-595.
- [5] CAMACHO, C. AND SAD, P., *Pontos Singulares de Equações Diferenciais Analíticas*, 16° Colóquio Brasileiro de Matemática, Rio de Janeiro, IMPA, 1988.
- [6] CAMACHO, C., LINS NETO, A. AND SAD, P., *Topological invariants and equidesingularization for holomorphic vector fields*, J. Differential Geometry, **20** (1984), 143-174.
- [7] CAMPILLO, A. AND OLIVARES, J., *Polarity with respect to a foliation and Cayley-Bacharach Theorems*, J. reine angew. Math. **534** (2001), 95-118.
- [8] CAMPILLO, A. AND OLIVARES, J., *A plane foliation of degree different from 1 is determined by its singular scheme*, C. R Acad. Sci. Paris **L 328, Série 1** (1999), p. 877-882.
- [9] CASAS-ALVERO, E., *Singularities of plane curves*, London Mathematical Society Lecture Note Series No **276**, (2000)

- [10] CERVEAU, D. AND LINS NETO, A., *Holomorphic Foliations in $\mathbb{C}P(2)$ having an invariant algebraic curve*, Annales de l'institut Fourier, **tome 41,n°4** (1991),p. 883-903.
- [11] CHERN, S. S., *Characteristic classes of Hermitian Manifolds*, Annals of Mathematics. Second Series 47 (1) 85-121.
- [12] CORRAL, N., *Sur la topologie des courbes polaires de certains feuilletages singuliers*, Ann. Inst. Fourier, Grenoble. **53** (2003), 787-814.
- [13] CUZZUOL, G. D. AND MOL, R. S., *Foliations on \mathbb{P}^2 admitting a primitive model*, Journal of Singularities, Vol **3** (2011), 8-19.
- [14] GAMKRELIDZE, P.B., *Computation of the Chern cycles of algebraic manifolds*, (em russo) Doklady Akad. Nauk., (**90**) No 5(1953),719-722.
- [15] GAMKRELIDZE, P.B., *Chern's cycles of complex algebraic manifolds* *Computation of the Chern cycles of algebraic manifolds*, (em russo) Izv Akad. Nauk. SSSR, Math. Ser. (**20**) No 5(1956),658-706.
- [16] GÓMEZ-MONT, X. AND KEMPF, G., *Stability of meromorphic vector fields in projective spaces*, Comment. Math. Helvetici **64** (1989), 462-473.
- [17] KLEIMAN, S. L., *Bertini and his two fundamental theorems*, arXiv, Serie II - Complemento (1997)
- [18] LINS NETO, A., *Some examples for the Poincaré and Painlevé Problems*, Ann. Scient. Éc. Norm. Sup., **4^e série**, t. **35**, (2002), p. 231 à 266.
- [19] MOL, R.S., *The polar curve of a foliation on $\mathbb{P}_{\mathbb{C}}^2$* , Ann. Fac. Sci. Toulouse (6)**19**(2010), no. 3-4, 849-863.
- [20] MOL, R.S., *Classes polaires associées aux distributions holomorphes de sous-espaces tangents*, Bull. Braz. Math. Soc., Vol. 37(1) (2006), 29-48
- [21] MOL, R.S. AND SOARES, M. G., *Índices de Campos Holomorfos e Aplicações*, 23^o Colóquio Brasileiro de Matemática, Rio de Janeiro, IMPA, 2001.

- [22] NAKANO, S., *Tangencial vector bundle and Todd canonical systems on an algebraic variety*, Mem. Coll. Sci. Univ. Kyoto Ser. A. Math. **(29)** (1955) 145-149.
- [23] PIENE, R., *Polar classes of singular varieties*, Ann. Sc. E.N.S. **11**, (1978), 247-276.
- [24] PIENE, R., *Cycles polaires et classes de Chern pour les variétés projectives singulières*, Séminaire Ecole Polytechnique, Paris, 1977-78 and Travaux en cours **(37)**, Hermann Paris (1988), 7-34.
- [25] SCHINZEL, A., *Polynomials with special regard to reducibility*, Encyclopedia of Mathematics and its Applications **77**, Cambridge University, Cambridge, 2000.
- [26] SOARES, M. G., *Projective Varieties Invariant by One-Dimensional Foliations*. The Annals of Mathematics, Second Series, Vol. **152**, No. 2 (Sep., 2000), pp. 369-382.
- [27] TEISSIER, B., *Quelques points de l'histoire des variétés polaires, de Poncelet à nos jours*. Séminaire d'Analyse, 1987-1988, Clermont-Ferrand, Exp. No. **4**, Univ. Clermont-Ferrand II, 1990.