

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Percolação em lajes e o problema do truncamento em percolação
de longo alcance

Caio Teodoro de Magalhães Alves

Orientador: Bernardo Nunes Borges de Lima

Apoio: CAPES
Belo Horizonte - MG

2011

Resumo

Estudaremos neste trabalho o artigo “The supercritical phase of percolation is well behaved” por G. R. Grimmett e J. M. Marstrand [1]. Nele se encontra uma prova, utilizando o elegante argumento da renormalização, de que na fase supercrítica já se enxerga o aglomerado infinito em entes com apenas duas dimensões infinitas.

Como aplicação, expomos o artigo “On Long Range Percolation with Heavy Tails” de Friedli, de Lima e Sidoravicius [2] que diz respeito ao problema do truncamento em percolação de longo alcance, a ser exposto no final da dissertação.

Capítulo 1

Introdução

Para d inteiro positivo, definimos o grafo \mathbb{L}^d da seguinte maneira: consideramos $\mathbb{Z}^d = \overbrace{\mathbb{Z} \times \dots \times \mathbb{Z}}^{d \text{ vezes}}$ como seu conjunto de vértices e dizemos que existe um elo e conectando os vértices $x = (x_1, x_2, \dots, x_d)$ e $y = (y_1, y_2, \dots, y_d)$ se $\sum_{i=1}^d |x_i - y_i| = 1$. Se existe um elo ligando x a y escrevemos $x \sim y$ e dizemos x é adjacente a y . Chamamos \mathbb{E}^d tal conjunto de elos em \mathbb{L}^d . Denotamos $\langle x, y \rangle$ o elo que liga x a y . Vamos permitir confundir o conjunto de elos \mathbb{Z}^d com o próprio grafo \mathbb{L}^d por simplicidade de notação.

Em \mathbb{Z}^d consideramos a norma do máximo, ou seja

$$|x| = \max_j |x_j|. \quad (1.1)$$

Com essa norma temos uma função distância associada, a qual nos referiremos casualmente:

$$d(x, y) = |x - y|. \quad (1.2)$$

Seja $0 < p < 1$. Declaramos cada vértice de \mathbb{Z}^d aberto com probabilidade p independentemente de qualquer outro vértice. Um vértice estará então fechado com probabilidade $1 - p$. Estamos com isso dizendo que para cada vértice x em \mathbb{Z}^d definimos uma variável aleatória X_x com distribuição de Bernoulli de parâmetro p , definimos x aberto quando $X_x = 1$ e fechado caso contrário, independentemente de todas outras variáveis associadas aos outros vértices. Cada configuração de vértices de \mathbb{Z}^d pode ser pensada como uma função de \mathbb{Z}^d em $\{0, 1\}$ da seguinte maneira: Se $\omega \in \Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{Z}^d}$ dizemos que x está aberto na configuração ω se e somente se $\omega(x) = 1$. Ω será então o espaço amostral a ser estudado. Pensando em Ω como produto cartesiano infinito, a σ -álgebra \mathcal{F} será a usual, gerada pelas pré-imagens das projeções de Ω em subprodutos cartesianos finitos. Tais pré-imagens são comumente designadas cilindros, sendo \mathcal{F} então chamada a σ -álgebra dos cilindros. Quando definimos as variáveis X_x já definimos implicitamente a medida produto P_p , a medida de probabilidade a ser utilizada. Está portanto definido nosso espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P_p)$.

Um caminho em \mathbb{Z}^d é uma sequência finita $x(0), x(1), \dots, x(n)$ ou infinita $x(0), x(1), \dots, x(n), \dots$ tal que $x(i) \sim x(i+1)$ para todo i em que essa expressão faça sentido. Dizemos $A \subseteq \mathbb{Z}^d$ conexo se para todo $x, y \in A$ existir um caminho todo contido em A ligando x a y . As próximas definições serão feitas

dada uma configuração de vértices $\omega \in \Omega$. Um caminho é dito aberto se todos seus vértices forem abertos na configuração ω . Escrevemos $x \leftrightarrow y$ se existe caminho aberto ligando x a y . Escrevemos $A \leftrightarrow B$ se existem $a \in A$ e $b \in B$ tais que $a \leftrightarrow b$. Escrevemos $A \leftrightarrow B$ em D quando o caminho aberto ligando um ponto de A até um ponto de B está totalmente contido em D . Escrevemos $A \leftrightarrow \infty$ se existe algum caminho aberto infinito contendo algum ponto de A . Chamamos de aglomerado aberto, ou em geral, aglomerado do ponto y o conjunto aleatório

$$C_y(\omega) = \{x \in \mathbb{Z}^d : x \leftrightarrow y \text{ em } \omega\}$$

com $C_y(\omega) = \emptyset$ se y é fechado. Em geral omitiremos a configuração ω na definição de conjuntos aleatórios para simplificar a notação. Denotamos C o aglomerado da origem, C_0 .

O foco do estudo em percolação são as condições para que o número de elementos de C , denotado $|C|$, seja infinito. Quando isso ocorre, dizemos que a origem percola. Definimos a função

$$\theta_{\mathbb{Z}^d}[0, 1] : \rightarrow [0, 1],$$

onde

$$\theta_{\mathbb{Z}^d}(p) = P_p(|C| = \infty \text{ em } \mathbb{Z}^d).$$

Note o subíndice \mathbb{Z}^d na função θ . De fato, podemos fazer definições completamente análogas para definir um processo de percolação em um grafo G qualquer.

Note também que como \mathbb{Z}^d é grafo transitivo, se para algum $p > 0$ a função $\theta_{\mathbb{Z}^d}(p)$ é maior do que zero, temos

$$P_p\left(\bigcup_{x \in \mathbb{Z}^d} (|C(x)| = \infty)\right) \geq P_p(|C_0| = \infty) > 0.$$

E pela lei 0-1 de Kolmogorov, como o evento $\bigcup_{x \in \mathbb{Z}^d} (|C(x)| = \infty)$ não depende do estado de um número finito de vértices, tal conjunto possui medida 1. Logo, se $\theta_{\mathbb{Z}^d}(p) > 0$ existe quase certamente algum aglomerado infinito no modelo de percolação de Bernoulli em \mathbb{Z}^d

As vezes nos será útil comparar processos de percolação no mesmo grafo utilizando parâmetros diferentes. Para tanto usamos uma técnica chamada acoplamento. Em resumo se trata de construir um novo espaço de probabilidade $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P})$ similar ao que possuíamos anteriormente. Agora $\Omega' = [0, 1]^{\mathbb{Z}^d}$ e a medida de probabilidade será medida produto de uniformes no intervalo $[0, 1]$, cada uma delas associada a um vértice em \mathbb{Z}^d , todas independentes entre si. Agora um elemento ω' do espaço amostral é uma função de \mathbb{Z}^d em $[0, 1]$. Para cada $\rho \in [0, 1]$ e $x \in \mathbb{Z}^d$ dizemos que x é ρ -aberto se $\omega'(x) \leq \rho$ e ρ -fechado se $\omega'(x) > \rho$. Assim, $\mathbb{P}(x \text{ é } \rho\text{-aberto}) = \rho$ e $\mathbb{P}(x \text{ é } \rho\text{-fechado}) = 1 - \rho$. De modo que em uma realização ω' do processo conseguimos enxergar uma realização do processo usual de parâmetro p para cada $p \in [0, 1]$.

Como aplicação dessa técnica, demonstramos a monotonicidade da função $\theta_{\mathbb{Z}^d}(p)$

Proposição 1.1 *Sejam $0 \leq p_1 \leq p_2 \leq 1$. Então $\theta_{\mathbb{Z}^d}(p_1) \leq \theta_{\mathbb{Z}^d}(p_2)$*

Prova: Vemos em $(\Omega', \mathcal{F}', \mathbb{P})$ processos idênticos aos processos de percolação com parâmetro p_1 e p_2 e utilizamos o fato de tais processos estarem definidos no mesmo espaço de probabilidade para

compará-los. Observe que em uma configuração $\omega' \in \Omega'$, se um dado vértice x é p_1 -aberto ele também será necessariamente p_2 -aberto. Portanto

$$C'_{p_1}(\omega') \equiv \{x \in \mathbb{Z}^d : x \text{ está conectado à origem por um caminho de vértices } p_1\text{-abertos em } \omega'\}$$

está contido no conjunto

$$C'_{p_2}(\omega') \equiv \{x \in \mathbb{Z}^d : x \text{ está conectado à origem por um caminho de vértices } p_2\text{-abertos em } \omega'\}$$

para toda configuração $\omega' \in \Omega'$. Portanto, temos

$$\{\omega' \in \Omega' : |C'_{p_1}| = \infty\} \subseteq \{\omega' \in \Omega' : |C'_{p_2}| = \infty\},$$

onde usamos novamente a notação $|A|$ para designar o número de elementos do conjunto A . Essa última equação por sua vez implica a desigualdade desejada, lembrando que, para $i = 1, 2$, o processo de percolação dos vértices p_i -abertos possui a mesma distribuição do processo de percolação em vértices usual de parâmetro p_i e o conjunto C'_{p_i} é justamente o aglomerado de vértices p_i -abertos da origem, logo

$$\begin{aligned} \theta_{\mathbb{Z}^d}(p_1) &= P_{p_1}(|C| = \infty) = \mathbb{P}(\omega' \in \Omega' : |C'_{p_1}| = \infty) \leq \\ &\leq \mathbb{P}(\omega' \in \Omega' : |C'_{p_2}| = \infty) = P_{p_2}(|C| = \infty) = \theta_{\mathbb{Z}^d}(p_2). \end{aligned}$$

□

Um aspecto interessante do processo de percolação é o fato dele ser exemplo de um fenômeno crítico. Dada a monotonicidade da função $\theta_{\mathbb{Z}^d}(p)$ e o fato dela estar limitada entre 0 e 1, é natural definir

Definição 1.1 $p_c(G) = \sup \{p \text{ em } [0, 1] \text{ tal que } \theta_{\mathbb{Z}^d}(p) = 0\}$

o chamado ponto crítico de G . É fato conhecido (ver [3] pag 14) que $p_c(\mathbb{Z}^d) \in (0, 1)$ para $d \geq 2$. Demonstramos anteriormente que se $\theta_{\mathbb{Z}^d}(p) > 0$ então existe quase certamente um aglomerado infinito de vértices abertos. Provamos agora que $\theta_{\mathbb{Z}^d}(p) = 0$ implica não existir aglomerado em lugar algum quase certamente. Temos que $\{\omega \in \Omega : \exists y \text{ tal que } |C_y(\omega)| = \infty\} = \bigcup_y \{\omega \in \Omega : |C_y(\omega)| = \infty\}$. Mas para cada y , como \mathbb{Z}^d é grafo transitivo e $\theta_{\mathbb{Z}^d}(p) = 0$, $P_p(\omega \in \Omega : |C_y(\omega)| = \infty) = 0$. Segue o resultado da propriedade subaditiva da medida P_p .

Se $G \subseteq G'$ então necessariamente temos $p_c(G') \leq p_c(G)$, basta visualizar G dentro de G' e reparar que sempre que existe aglomerado infinito em G existirá também aglomerado infinito em G' . Logo $\theta_G(p) > 0$ implica $\theta_{G'}(p) > 0$, o que pela definição de $p_c(\mathbb{Z}^d)$ implica a desigualdade desejada.

Em Ω conseguimos uma ordem parcial. Dados $\omega, \tilde{\omega} \in \Omega$, dizemos $\omega \leq \tilde{\omega}$ se $\omega(x) \leq \tilde{\omega}(x)$ para todo $x \in \mathbb{Z}^d$. Dizemos que um evento $A \in \mathcal{F}$ é crescente quando $\omega \in A$ implica $\tilde{\omega} \in A$ para todo $\tilde{\omega} \geq \omega$. Já um evento $B \in \mathcal{F}$ será decrescente se $\omega \in B$ implica $\tilde{\omega} \in B$ para todo $\tilde{\omega} \leq \omega$. Informalmente, A é um evento crescente sempre que abrir novos elos de uma configuração não atrapalha sua ocorrência. Analogamente, B é evento decrescente se ao fechar novos elos em uma configuração não impedimos a ocorrência de B .

Para essa classe de eventos temos a importante desigualdade FKG (ver [3] pag 34) que enunciamos sem demonstrar:

Teorema 1.2 (Desigualdade FKG) *Se A e B são eventos ou ambos crescentes ou ambos decrescentes, temos:*

$$P_p(A \cap B) \geq P_p(A)P_p(B) \quad (1.3)$$

Informalmente essa desigualdade nos diz que se dois eventos são crescentes, eles ajudam um ao outro a ocorrer, no sentido de que a probabilidade da intersecção é pelo menos tanto quanto caso eles fossem independentes.

Finalmente vamos ao teorema principal dessa dissertação, devido a Grimmett e Marstrand [1]. Considere os conjuntos:

Uma laje de espessura k , k inteiro positivo

$$S(k) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d : 0 \leq x_j \leq k \forall j > 2\}. \quad (1.4)$$

Um subespaço

$$\mathbb{H} = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d : x_1 \geq 0\}. \quad (1.5)$$

Temos que $S'(k) \subseteq \mathbb{H} \subseteq \mathbb{Z}^d$ para todo d, k , onde $S'(k)$ é um subgrafo de \mathbb{Z}^d isomorfo a $S(k)$, e portanto

$$p_c(\mathbb{Z}^d) \leq p_c(\mathbb{H}) \leq p_c(S(k)), \quad (1.6)$$

e pelo mesmo motivo $p_c(S(k))$ é função decrescente em k e portanto existe

$$p_c(S) \equiv \lim_{k \rightarrow \infty} p_c(S(k)). \quad (1.7)$$

O que estamos interessados em mostrar é o

Teorema 1.3 [1] *para $d \geq 3$, $p_c(S) = p_c(\mathbb{Z}^d)$*

Isso implicará, entre outras coisas, que na fase supercrítica $p > p_c$ existe k inteiro positivo tal que vemos aglomerado infinito em $S(k) \subseteq \mathbb{Z}^d$, um conjunto com apenas duas dimensões infinitas. Para tanto precisaremos antes de seis lemas. Serão esses lemas o tema do próximo capítulo.

Capítulo 2

Lemas

A prova do Teorema 1.3 usará um argumento de renormalização. Consideraremos grandes caixas de vértices e a essas caixas corresponderão vértices em nosso novo grafo, isomorfo a \mathbb{Z}^2 . Percolação nesse grafo implicará percolação nas nossas lajes $S(k)$, que nada mais serão do que a união de tais grandes caixas.

Antes de provar o teorema propriamente dito precisaremos de seis lemas. O primeiro nos permitirá comparar um processo de percolação dependente com o nosso usual. Ele será o arremate da demonstração, já que não poderemos garantir independência do modo que construiremos nosso processo. Os quatro próximos lemas serão técnicos, apenas preparação para o Lema 2.6, esse sim ferramenta principal na construção do aglomerado infinito nas lajes $S(k)$.

Dado $A \subseteq \mathbb{Z}^d$, subconjunto de vértices, defina a fronteira interna de A

$$\partial A = \{x \in A : \exists y \in \mathbb{Z}^d \setminus A \text{ tal que } x \sim y\} \quad (2.1)$$

e a fronteira externa

$$\Delta A = \{x \in A : \exists y \in A \text{ tal que } x \sim y\} = \partial(\mathbb{Z}^d \setminus A) \quad (2.2)$$

Precisamos mudar a forma de ver nosso fenômeno, agora ele será um processo estocástico. Começamos com uma enumeração $e(1), e(2), \dots$ dos elos de $F \subseteq \mathbb{Z}^d$ subgrafo contendo a origem. Dada uma função $g : \mathbb{Z}^d \rightarrow \{0, 1\}$ denotamos como usual $x \in \mathbb{Z}^d$ aberto se $g(x) = 1$ e fechado caso contrário. Definimos indutivamente uma sequência (S_n) de pares ordenados de subconjuntos de \mathbb{Z}^d

$$S_0 = (\emptyset, \emptyset), \quad (2.3)$$

$$S_1 = \begin{cases} (\{x_1\}, \emptyset), & \text{se } g(x_1) = 1 \\ (\emptyset, \{x_1\}), & \text{se } g(x_1) = 0 \end{cases} \quad (2.4)$$

onde x_1 é a origem.

Tendo definido $S_r = (A_r, B_r)$ para $r = 0, 1, \dots, t$ definimos S_{t+1} da seguinte maneira:

Se for possível encontrar um elo incidente a um vértice em A_t com seu outro vértice em $(A_t \cup B_t)^C$, chame o primeiro (de acordo com a enumeração de F) dos elos com tal propriedade e_t e seu vértice em $(A_t \cup B_t)^C$ de x_{t+1} . Escrevemos

$$S_{t+1} = \begin{cases} (A_t \cup \{x_{t+1}\}, B_t), & \text{se } g(x_t) = 1 \\ (A_t, B_t \cup \{x_{t+1}\}), & \text{se } g(x_t) = 0 \end{cases}$$

Se não existir e_t dessa forma definimos $S_{t+1} = S_t$

Essencialmente estamos guardando nos S_i informação sobre o aglomerado da origem. Denotamos $S = (A, B)$ com $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ e $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$. Assim construímos dinamicamente o aglomerado de vértices abertos da origem. É intuitivo que A será tal aglomerado e que B será sua fronteira exterior contida em F , todos seus vértices necessariamente fechados.

Escrevemos $\mathcal{I} = (S_0, S_1, \dots)$. A mesma construção pode ser feita quando as $g(x)$ são variáveis aleatórias tomando valores em $\{0, 1\}$, nossa sequência \mathcal{I} virando agora uma sequência de conjuntos aleatórios. Para $t = 0, 1, \dots$ escrevemos

$$\rho(\mathcal{I}, t) = \begin{cases} \mu(g(x_{t+1} = 1) \mid S_0, S_1, \dots, S_t), & \text{se } e_t \text{ existe} \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (2.5)$$

Onde μ é a medida de probabilidade associada a sequência $g(x_1), g(x_2), \dots$. Note que quando essas variáveis $g(x_i)$ são independentes e com distribuição de Bernoulli de parâmetro ρ , $\rho(\mathcal{I}, t) = \rho$ constante sempre que e_t puder ser definido. Nesse caso estamos contruindo o processo de percolação usual de parâmetro ρ . A idéia do Lema 2.1 é comparar um processo qualquer \mathcal{J} com a mesma distribuição de \mathcal{I} e um processo de percolação em \mathbb{Z}^d na fase supercrítica.

Lema 2.1 *Com a notação introduzida anteriormente, suponha que existe γ , $\gamma > p_c(F)$ e*

$$\rho(\mathcal{I}, t) \geq \gamma \text{ para todo } \mathcal{I} \text{ e } t \quad (2.6)$$

então

$$\mu(|A| = \infty) > 0 \quad (2.7)$$

onde $|A|$ denota o número de elementos do conjunto A .

Prova: Como é de costume, sejam $(\omega'(x) : x \in \mathbb{Z}^d)$ variáveis aleatórias uniformes em $[0, 1]$ independentes entre si e considere o seguinte processo \mathcal{J} associado a medida \mathbb{P} definida no capítulo anterior.

Declaramos a origem de \mathbb{Z}^d verde se $\omega'(0) \leq \mu(g(0) = 1)$ e vermelha caso contrário. Se a origem é vermelha abortamos o processo. Se a origem é verde prosseguimos achando o primeiro elo e_1 incidente a origem e declaramos x_2 , o outro vértice a qual e_1 é incidente, verde se $\omega'(x_2) \leq \mu(g(x_2) = 1 \mid S_1 =$

(A_1, B_1)), com $A_1 = \{0\}$ e $B_1 = \emptyset$, e vermelho caso contrário. Prosseguimos iterando o processo à maneira descrita anteriormente: achamos o primeiro elo e_t incidente tanto a A_t quanto a $(A_t \cup B_t)^C$ e declaramos o vértice $x_{t+1} \in (A_t \cup B_t)^C$ ao qual e_t é incidente verde se

$$\omega'(x_{t+1}) \leq \mu(g(x_{t+1}) = 1 \mid S_i = (A_i, B_i) \text{ para } 0 \leq i \leq t) \quad (2.8)$$

e vermelho caso contrário, com A_i o conjunto de vértices verdes e B_i o conjunto de vértices vermelhos depois de declarada a cor de x_i . Estamos, à maneira como foi feito antes, definindo uma sequência $\mathcal{J} = (S_0, S_1, \dots)$ indutivamente. Começamos com

$$S_0 = (\emptyset, \emptyset) \text{ e} \quad (2.9)$$

$$S_1 = \begin{cases} (A_0 \cup \{x_1\}, B_0), & \text{se } x_1 \text{ é verde} \\ (A_0, B_0 \cup \{x_1\}), & \text{se } x_1 \text{ é vermelho} \end{cases} \quad (2.10)$$

Após definirmos S_r para $r = 0, 1, \dots, t$, definimos S_{t+1} também de forma análoga ao processo \mathcal{I} . Achamos, se possível, o primeiro elo e_t incidente tanto a A_t quanto a $(A_t \cup B_t)^C$ e definimos a partir do vértice $x_{t+1} \in (A_t \cup B_t)^C$ ao qual e_t é incidente

$$S_{t+1} = \begin{cases} (A_t \cup \{x_{t+1}\}, B_t), & \text{se } x_{t+1} \text{ é verde} \\ (A_t, B_t \cup \{x_{t+1}\}), & \text{se } x_{t+1} \text{ é vermelho} \end{cases}$$

se não existir elo e_t com essa propriedade, definimos $S_{t+1} = S_t$

Seja $A = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ o aglomerado de vértices verdes e $B = \bigcup_{i=1}^{\infty} B_i$ sua fronteira exterior em F . Como $\rho(\mathcal{I}, t) \geq \gamma$ e para declarar um dado vértice x_k vermelho é necessário que $\omega'(x_k) > \rho(\mathcal{I}, k) \geq \gamma$, segue que todo vértice de B é γ -fechado. O aglomerado C_γ de vértices γ -abertos da origem não intercecta B e portanto é subconjunto de A . Como $\gamma > p_c(F)$ a probabilidade de C_γ ser infinito é estritamente positiva. Como o processo \mathcal{J} tem a mesma distribuição de \mathcal{I} , temos

$$\mu(|A| = \infty) = \mathbb{P}(|A| = \infty) \geq \mathbb{P}(|C_\gamma| = \infty) = P_\gamma(|C| = \infty) > 0. \quad (2.11)$$

Um pequeno detalhe é que A denota conjuntos que a rigor são distintos, apesar das definições análogas. Está então demonstrado o lema. \square

Vamos a série de lemas precursores do Lema 2.6. Serão necessárias antes novas notações:

Para $j = 1, 2, \dots, d$ definimos os vértices unitários

$$i_j = (\delta_1^{(j)}, \delta_2^{(j)}, \dots, \delta_d^{(j)}) \quad (2.12)$$

onde $\delta_r^{(j)} = 1$ se $r = j$ e 0 caso contrário.

Para cada inteiro positivo n a caixa $B(n)$, por vezes denotada simplesmente B é o conjunto

$$B(n) = \{x \in \mathbb{Z}^d : |x| \leq n\} \quad (2.13)$$

e definimos

$$T(n) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d : x_1 = n, 0 \leq x_j \leq n \forall j = 2, 3, \dots, d\} \quad (2.14)$$

um subconjunto especial de uma das faces de $B(n)$. Para m, n inteiros positivos, escrevemos

$$T(m, n) = \bigcup_{j=1}^{2m+1} \{ji_1 + T(n)\} \quad (2.15)$$

Para cada $x \in \mathbb{Z}^d$ chamamos uma caixa de raio m cujos vértices estão todos abertos, transladada por x , uma m -semente ou simplesmente semente com centro em x . Para m, n inteiros positivos, $2m < n$ definimos o conjunto aleatório

$$K(m, n) = \{x \in T(n) : x + i_1 \text{ pertence a alguma } m\text{-semente em } T(m, n)\} \quad (2.16)$$

ou seja, $K(m, n)$ é o subconjunto de vértices de $T(n)$ que são adjacentes a alguma semente contida em $T(m, n)$.

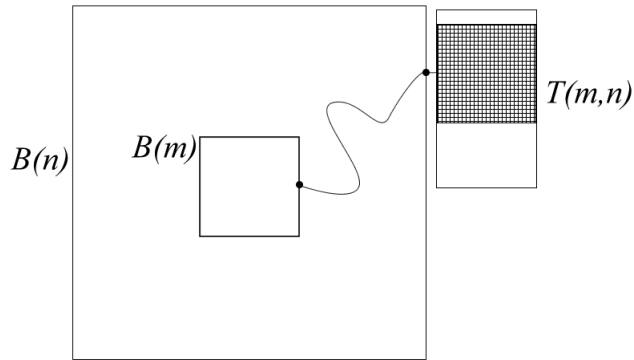


Figura 2.1: Representação bidimensional dos conjuntos definidos acima. A caixa quadriculada contida em $T(m, n)$ representa uma m -semente.

O próximo lema nos diz que se dois conjuntos são conectados por um caminho aberto com alta probabilidade, também com alta probabilidade eles serão conectados por vários caminhos abertos.

Lema 2.2 *Sejam $R, K \subseteq \mathbb{Z}^d$ com $(R \cup \Delta R) \cap K = \emptyset$ e seja*

$$U = \{x \in \Delta R \cap B : \exists y \in B \text{ tal que } x \sim y \text{ e } y \leftrightarrow K \text{ em } B - (R \cup \Delta R)\} \quad (2.17)$$

Onde B é a caixa $B(n)$ definida anteriormente em 2.13. Então para cada inteiro positivo t

$$P_p(|U| \leq t) \leq (1-p)^{-t} P_p(\Delta R \leftrightarrow K \text{ em } B-R) \quad (2.18)$$

Prova:

$$\begin{aligned} P_p(\Delta R \leftrightarrow K \text{ em } B-R) &= P_p(U \text{ é fechado ou vazio}) \\ &\geq P_p(|U| \leq t, U \text{ é fechado}) \\ &= \sum_{A \subseteq \Delta R \cap B, |A| \leq t} P_p(\{U \text{ é fechado}\} \cap \{U = A\}) \\ &= \sum_{A \subseteq \Delta R \cap B, |A| \leq t} P_p(U \text{ é fechado} \mid U = A) P_p(U = A) \\ &= \sum_{A \subseteq \Delta R \cap B, |A| \leq t} (1-p)^{|A|} P_p(U = A) \end{aligned} \quad (2.19)$$

Aqui usamos o fato de que o evento $\{U = A\}$ não depende do estado dos vértices de A , pela própria definição de U . Segue

$$P_p(\Delta R \leftrightarrow K \text{ em } B-R) \geq (1-p)^t \sum_{A \subseteq \Delta R \cap B, |A| \leq t} P_p(U = A) = (1-p)^t P_p(|U| \leq t) \quad (2.20)$$

que é a desigualdade requerida. \square

Para o próximo lema note que se para algum m nós temos $B(m) \leftrightarrow \infty$ numa configuração ω então na mesma configuração, para todo $n > m$, existe um $x \in \partial B(n)$ tal que $x \leftrightarrow B(m)$ em $B(n)$. O próximo lema nos diz que para n grande, com alta probabilidade existem muitos vértices x com tal propriedade.

Lema 2.3 *Para quaisquer inteiros positivos k e m , temos*

$$\sum_{n=m}^{\infty} P_p(|U_n| < k, B(m) \leftrightarrow \infty) < (1-p)^{-dk} \quad (2.21)$$

onde

$$U_n = \{x \in \partial B(n) : B(m) \leftrightarrow x \text{ em } B(n)\} \quad (2.22)$$

Prova: Para $n \geq m$ temos

$$(1-p)^{dk} P_p(|U_n| < k, B(m) \leftrightarrow \infty) \leq (1-p)^{dk} P_p(1 \leq |U_n| < k) \quad (2.23)$$

pela observação feita logo antes do Lema 2.3. Por sua vez

$$(1-p)^{dk} P_p(1 \leq |U_n| \leq k) < P_p(U_{n+1} = \emptyset \mid 1 \leq |U_n| < k) P_p(1 \leq |U_n| < k) \quad (2.24)$$

Já que $(1 - p)$ é a probabilidade de um vértice estar fechado, estamos considerando U_n com menos de k vértices e cada vértice em $\partial B(n)$ é vizinho de no máximo d vértices em $\partial B(n + 1)$. (Em geral, vizinho de apenas um vértice, porém nas quinas de um hipercubo um vértice de $\partial B(n)$ pode ser vizinho de até d vértices em $\partial B(n + 1)$). Mas

$$P_p(U_{n+1} = \emptyset \mid 1 \leq |U_n| < k) P_p(1 \leq |U_n| < k) = P_p(U_{n+1} = \emptyset, 1 \leq |U_n| < k) \equiv P_p(E_n). \quad (2.25)$$

Mas note que os eventos E_n são todos disjuntos, portanto

$$(1 - p)^{dk} \sum_{n=m}^{\infty} P_p(|U_n| < k, B(m) \leftrightarrow \infty) < \sum_{n=m}^{\infty} P_p(E_n) \leq 1 \quad (2.26)$$

o que implica a desigualdade desejada.

Do Lema 2.3 provamos o

Lema 2.4 *Para quaisquer inteiros positivos l e m nós temos*

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} P_p(|V(n)| \geq l) \geq 1 - P_p(B(m) \leftrightarrow \infty)^{\frac{1}{w}} \quad (2.27)$$

onde $w = d2^d$ e

$$V(n) = \{x \in T(n) : B(m) \leftrightarrow x \text{ em } B(n)\} \quad (2.28)$$

Prova: Para cada $r \leq d$ inteiro positivo e cada $J = \{j_1, j_2, \dots, j_k\} \subseteq (\{1, \dots, d\} - \{r\})$ existe uma isometria $\sigma_{r+,J}$ de \mathbb{Z}^d que leva $T(n)$ em

$$T_{\sigma_{r+,J}}(n) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d : x_r = n, -n \leq x_j \leq 0 \forall j \in J \text{ e } 0 \leq x_j \leq n \forall j \in \{1, \dots, d\} - (\{r\} \cup J)\} \quad (2.29)$$

e uma isometria $\sigma_{r-,J}$ que leva $T(n)$ em

$$T_{\sigma_{r-,J}}(n) = \{x = (x_1, x_2, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d : x_r = -n, -n \leq x_j \leq 0 \forall j \in J \text{ e } 0 \leq x_j \leq n \forall j \in \{1, \dots, d\} - (\{r\} \cup J)\} \quad (2.30)$$

Existem ao todo $w = (2d)2^{d-1} = d2^d$ isometrias dessa forma como mostra uma conta simples de combinatória. Existem d possíveis números para escolher como r . Após feita a escolha de r existem duas escolhas possíveis para o sinal de x_r e 2^{d-1} possíveis subconjuntos $J = \{j_1, j_2, \dots, j_k\} \subseteq (\{1, \dots, d\} - \{r\})$. Temos portanto exatamente $d2^d$ possíveis isometrias. Denotamos por $T_1(n), T_2(n), \dots, T_w(n)$ as imagens de $T(n)$ por tais simetrias. Temos então

$$\bigcup_{i=1}^w T_i(n) = \partial B(n) \quad (2.31)$$

e pela definição de $U(n)$ segue

$$\{|U(n)| < wl\} \supseteq \bigcap_{i=1}^w \{|V_i(n)| < l\} \quad (2.32)$$

onde

$$V_i(n) = \{x \in T_i(n) : B(m) \leftrightarrow x \text{ em } B(n)\} \quad (2.33)$$

para $i = 1, 2, \dots, w$. Como essa é uma intersecção de eventos decrescentes segue pela desigualdade FKG que

$$P_p(|U_n| < wl) \geq \prod_{i=1}^w P_p(|V_i(n)| < l) = P_p(|V(n)| < l)^w \quad (2.34)$$

já que as isometrias preservam a medida P_p . Portanto,

$$P_p(|V_n| \geq l) \geq 1 - P_p(|U_n| < wl)^{\frac{1}{w}} \quad (2.35)$$

Observando que

$$P_p(|U_n| < wl) \leq P_p(|U_n| < wl, B(m) \leftrightarrow \infty) + P_p(B(m) \leftrightarrow \infty) \quad (2.36)$$

e escrevendo $wl = k$ no Lema 2.3 segue que a série $\sum_{n=m}^{\infty} P_p(|U_n| < k, B(m) \leftrightarrow \infty)$ é convergente e portanto

$$P_p(|U_n| < wl, B(m) \leftrightarrow \infty) \rightarrow 0 \quad (2.37)$$

quando $n \rightarrow \infty$. □

No próximo lema demonstramos que se $\theta(p) > 0$ existem inteiros positivos m e n grandes o suficiente tais que $B(m)$ se conecta por um caminho aberto a uma semente apoiada em $T(n)$ com alta probabilidade.

Lema 2.5 *Se $\theta(p) > 0$ então para cada $\eta > 0$ existem inteiros positivos $m = m(d, p, \eta)$ e $n = n(d, p, \eta)$ tais que $2m < n$ e*

$$P_p(B(m) \leftrightarrow K(m, n) \text{ em } B(n)) > 1 - \eta \quad (2.38)$$

Prova: Como $\theta(p) > 0$, existe aglomerado infinito com probabilidade 1 e a caixa $B(m)$ encontra tal aglomerado quando $m \rightarrow \infty$. Note que $\{B(k) \leftrightarrow \infty\} \subseteq \{B(k+1) \leftrightarrow \infty\}$. Pela continuidade da probabilidade, $P_p(B(k) \leftrightarrow \infty) \rightarrow 1$ quando $k \rightarrow \infty$. Portanto existe $m = m(d, p, \eta)$ tal que

$$P_p(B(m) \rightarrow \infty) > 1 - \left(\frac{1}{2}\eta\right)^w \quad (2.39)$$

onde $w = d2^d$.

Defina M tal que

$$(1 - p^{(2m+1)^d})^M < \frac{1}{2}\eta \quad (2.40)$$

Note que $(1 - p^{(2m+1)^d})$ é justamente a probabilidade de uma caixa $B(m)$ não estar com todos seus vértices abertos, de forma que $(1 - p^{(2m+1)^d})^M$ é a probabilidade que em M caixas de raio m disjuntas nenhuma delas seja uma m -semente.

Pelo Lema 2.4, existe um $n = n(d, p, \eta)$ tal que

$$P_p(|V(n)| \geq l) \geq 1 - P_p(B(m) \leftrightarrow \infty)^w > 1 - \frac{1}{2}\eta \quad (2.41)$$

Como escolhermos n depois de escolhermos m , podemos supor que $2m + 1$ divide $n + 1$. Podemos então dividir $T(n)$ em caixas $(d - 1)$ -dimensionais de raio m . Tais caixas conterão então $(2m + 1)^{d-1}$ vértices. Como $V(n) \geq l = (2m + 1)^{d-1}M$, $B(m)$ se conecta a pelo menos M dessas caixas, por um argumento utilizando o princípio da casa dos pombos. A cada uma dessas caixas $(d - 1)$ -dimensionais corresponde uma caixa d -dimensional de raio m contida em $T(m, n)$. Designamos χ o conjunto de vértices de $V(n)$ adjacentes a alguma dessas caixas d -dimensionais. Temos que $\{B(m) \leftrightarrow K(m, n)\} \supseteq (\{|\chi| \geq 1\} \cap \{|V(n)| \geq l\})$. Portanto

$$\begin{aligned} P_p(B(m) \leftrightarrow K(m, n)) &\geq P_p(|\chi| \geq 1, |V(n)| \geq l) \\ &= \sum_{K \subseteq T(n), |K| \geq l} P_p(|\chi| \geq 1, V(n) = K) \\ &= \sum_{K \subseteq T(n), |K| \geq l} P_p(|\chi| \geq 1 | V(n) = K) P_p(V(n) = K) \\ &\geq \sum_{K \subseteq T(n), |K| \geq l} (1 - (1 - p)^{(2m+1)^d})^M P_p(V(n) = K) \\ &= (1 - (1 - p)^{(2m+1)^d})^M \sum_{K \subseteq T(n), |K| \geq l} P_p(V(n) = K) \\ &= (1 - (1 - p)^{(2m+1)^d})^M P_p(V(n) \geq l) \\ &\geq (1 - (1 - p)^{(2m+1)^d})^M \left(1 - \frac{1}{2}\eta\right) \\ &\geq \left(1 - \frac{1}{2}\eta\right) \left(1 - \frac{1}{2}\eta\right) \\ &> 1 - \eta \end{aligned} \quad (2.42)$$

□

De agora em diante trabalharemos com a medida \mathbb{P} produto de uniformes independentes. O próximo resultado parece obscuro a primeira vista, mas quando mostrarmos o modo de construir o aglomerado em $S(k)$ no próximo capítulo sua utilidade ficará clara. Em resumo, sua utilidade está

em achar mais vértices e caminhos abertos uma vez que já temos informações não favoráveis a nossa construção.

Lema 2.6 *Se $\theta(p) > 0$ então para todo $\epsilon, \delta > 0$ existem inteiros positivos $m = m(d, p, \epsilon, \delta)$ e $n = n(d, p, \epsilon, \delta)$ tais que para cada R com $B(m) \subseteq R \subseteq B(n)$ e $(R \cup \Delta R) \cap T(n) = \emptyset$ e para cada função $\beta : \Delta R \cap B(n) \rightarrow [0, 1 - \delta]$, temos*

$$\mathbb{P}(G \mid H) > 1 - \epsilon$$

onde

$$G = \{ \text{existe um caminho em } B(n) - R \text{ de } \Delta R \cap B(n) \text{ até } K(m, n), \text{ esse caminho é } p\text{-aberto fora de } \Delta R \cap B(n) \text{ e } (\beta(u) + \delta)\text{-aberto no seu único vértice } u \in \Delta R \cap B(n) \} \quad (2.43)$$

$$H = \{x \text{ é } \beta(x)\text{-fechado para todo } x \in \Delta R \cap B(n)\} \quad (2.44)$$

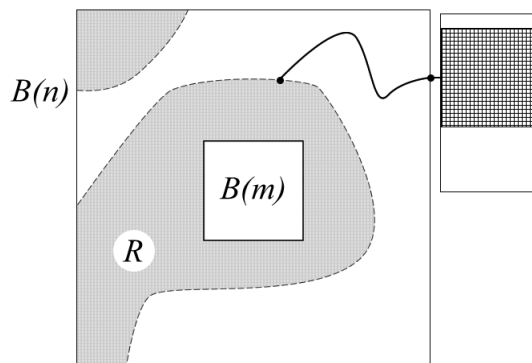


Figura 2.2: Representação bidimensional da ocorrência do evento G

Prova: Dados $\theta(p) > 0$, $\epsilon, \delta > 0$, escolha t inteiro positivo grande o bastante para que

$$(1 - \delta)^t < \frac{1}{2}\epsilon \quad (2.45)$$

e então escolha $\eta > 0$ tal que

$$\eta < \frac{1}{2}\epsilon(1 - p)^t. \quad (2.46)$$

Pelo Lema 2.5 podemos escolher $m = m(d, p, \epsilon, \delta)$ e $n = n(d, p, \epsilon, \delta)$ tais que $2m < n$ e

$$P_p(B(m) \leftrightarrow K(m, n) \text{ em } B(n)) > 1 - \eta. \quad (2.47)$$

Suponha $B(m) \subseteq R \subseteq B(n)$, $(\Delta R \cup R) \cap T(n) = \emptyset$ e $\beta : \Delta R \cap B(n) \rightarrow [0, 1 - \delta]$. Conseguimos intuir, apesar de ser provavelmente muito chato demonstrar rigorosamente que

$$\{B(m) \leftrightarrow K(m, n) \text{ em } B(n)\} \subseteq \{\Delta R \leftrightarrow K(m, n) \text{ em } B(n) - R\}$$

e portanto

$$P_p(\Delta R \leftrightarrow K(m, n) \text{ em } B(n) - R) > 1 - \eta. \quad (2.48)$$

Para cada $K \subseteq T(n)$ defina

$$U(K) = \{x \in \Delta R \cap B(n) : \exists y \in B(n) \text{ tal que } x \sim y \text{ e } y \leftrightarrow K \text{ em } B(n) - (R \cup \Delta R)\} \quad (2.49)$$

Os eventos $\{|U(K)| \leq t\}$ e $\{K(m, n) = K\}$ dependem de conjuntos disjuntos de vértices e portanto são independentes. Segue que

$$P_p(|U(K(m, n))| \leq t) = \sum_{K \subseteq T(n)} P_p(|U(K)| \leq t) P_p(K(m, n) = K). \quad (2.50)$$

Com o Lema 2.2 vem que

$$\sum_{K \subseteq T(n)} P_p(|U(K)| \leq t) P_p(K(m, n) = K) \leq \sum_{K \subseteq T(n)} (1-p)^{-t} P_p(\Delta R \leftrightarrow K \text{ em } B(n) - R) P_p(K(m, n) = K). \quad (2.51)$$

Novamente, como os eventos $\{\Delta R \leftrightarrow K \text{ em } B(n) - R\}$ e $\{K(m, n) = K\}$ dependem de conjuntos distintos de vértices, eles são independentes. Daí vem

$$\begin{aligned} & \sum_{K \subseteq T(n)} (1-p)^{-t} P_p(\Delta R \leftrightarrow K \text{ em } B(n) - R) P_p(K(m, n) = K) = \\ & = (1-p)^{-t} \sum_{K \subseteq T(n)} P_p(\Delta R \leftrightarrow K \text{ em } B(n) - R, K(m, n) = K) = \\ & = (1-p)^{-t} P_p(\Delta R \leftrightarrow K(m, n) \text{ em } B(n) - R). \end{aligned}$$

Unindo a equação acima com as equações 2.48 e 2.50, temos

$$P_p(|U(K(m, n))| > t) \geq 1 - (1-p)^{-t} \eta.$$

Para cada $U \subseteq \Delta R \cap B(n)$ o evento $\{U(K(m, n)) = U\}$ independe dos estados dos vértices de U , pela própria definição de $U(K)$. Escrevendo \mathbb{P}^H para a medida de probabilidade \mathbb{P} condicionada ao evento H , conseguimos

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}^H(x \text{ é } (\beta(x) + \delta)\text{-fechado para todo } x \in U(K(m, n)), |U(K(m, n))| > t) = \\
= & \sum_{U \subseteq \Delta R \cap B(n), |U| > t} \mathbb{P}^H(x \text{ é } (\beta(x) + \delta)\text{-fechado para todo } x \in U, U(K(m, n)) = U) \leq \\
& \leq \sum_{U \subseteq \Delta R \cap B(n), |U| > t} (1 - \delta)^{|U|} \mathbb{P}^H(U(K(m, n)) = U) \leq (1 - \delta)^t. \quad (2.52)
\end{aligned}$$

Pelas nossas escolhas de t e η feitas em 2.45 e 2.46, temos

$$\begin{aligned}
& \mathbb{P}^H(\text{existe um vértice } u \in U(K(m, n)), u \text{ sendo } (\beta(u) + \delta)\text{-aberto}) \geq \\
\geq & \mathbb{P}^H(|U(K(m, n))| > t) - \mathbb{P}^H(x \text{ é } (\beta(x) + \delta)\text{-fechado para todo } x \in U(K(m, n)), |U(K(m, n))| > t) \geq \\
& \geq \mathbb{P}^H(|U(K(m, n))| > t) - (1 - \delta)^t.
\end{aligned}$$

Mas o conjunto aleatório $U(K(m, n))$ não depende do estado dos vértices em $\Delta R \cap B(n)$. Portanto

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}^H(|U(K(m, n))| > t) - (1 - \delta)^t &= P_p(|U(K(m, n))| > t) - (1 - \delta)^t \geq \\
&\geq 1 - (1 - p)^{-t} \eta - (1 - \delta)^t \geq 1 - \epsilon \quad (2.53)
\end{aligned}$$

Onde a última desigualdade vem das nossas escolhas apropriadas de η e t . Portanto $\mathbb{P}^H(G) > 1 - \epsilon$.

□

Capítulo 3

O Teorema

Finalmente provamos o teorema principal da dissertação no presente capítulo. Provaremos o seguinte

Teorema 3.1 [1] *Se F é um subgrafo infinito conexo de \mathbb{Z}^d com $p_c(F) < 1$ então para cada $\eta > 0$ existe inteiro $k > 0$ tal que*

$$p_c(2kF + B(k)) \leq p_c(\mathbb{Z}^d) + \eta \quad (3.1)$$

Primeiro vamos entender a notação. Com $2kF + B(k)$ estamos querendo denotar o seguinte subgrafo de \mathbb{Z}^d : Para cada $x \in F$ transladamos a caixa $B(k)$ pelo vetor $2kx$. Tal caixa transladada, como de costume, denotamos $2kx + B(k)$. O grafo $2kF + B(k)$ nada mais será do que a união dessas caixas, com uma pequena adição de elos. Se $x, y \in F$, $y \sim x$, adicionamos entre as caixas $2kx + B(k)$ e $2ky + B(k)$ todos os elos entre vértices que originalmente em \mathbb{Z}^d seriam vizinhos.

Agora tentamos entender como esse teorema implica o Teorema 1.3. Primeiro nos convencemos que, quando $F = \mathbb{Z}^2$ (vendo \mathbb{Z}^2 como $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \overbrace{0 \times \dots \times 0}^{d-2 \text{ vezes}} \subseteq \mathbb{Z}^d$), $2kF + B(k)$ é uma translação da laje $S(2k)$, $2k\mathbb{Z}^2 + B(k) = (0, 0, -k, \dots, -k) + S(2k)$. Supondo o teorema verdadeiro vem que, para qualquer η , achamos k tal que

$$p_c(S(2k)) \leq p_c(\mathbb{Z}^d) + \eta \quad (3.2)$$

o que implica

$$\lim_{k \rightarrow \infty} p_c(S(2k)) = p_c(\mathbb{Z}^d) \quad (3.3)$$

Prova do Teorema 3.1: Provaremos que para $\eta > 0$ e $p = p_c(\mathbb{Z}^d) + \frac{1}{2}\eta$ existe com probabilidade positiva um aglomerado infinito de vértices $(p + \eta)$ -abertos em $2kF + B(k)$, para algum k suficientemente grande. Segue que $p_c(2kF + B(k)) \leq p + \eta = p_c(\mathbb{Z}^d) + \frac{3}{2}\eta$. O teorema fica então demonstrado. Fazemos isso descrevendo um processo de construção dinâmica do aglomerado em $2kF + B(k)$ e utilizando o Lema 2.1.

Dado $0 < \eta < p_c(\mathbb{Z}^d)$, definimos

$$p = p_c + \frac{1}{2}\eta, \quad (3.4)$$

$$\delta = \frac{\eta}{4d} \text{ e} \quad (3.5)$$

$$\epsilon = \frac{(1 - p_c(F))}{8d} \quad (3.6)$$

Observamos que daí segue que $\theta_{\mathbb{Z}^d}(p) > 0$ e como $p_c(F) < 1$, temos que $\epsilon > 0$. Como $\eta > 0$, vem que $\delta > 0$. Segue que existem inteiros positivos $m = m(d, p, \eta, \delta)$ e $n = n(d, p, \eta, \delta)$ com a propriedade descrita no Lema 2.6. Definimos

$$N = n + m + 1 \quad (3.7)$$

Provaremos o Teorema 3.1 para $k = 2N$

A prova utilizará um argumento de renormalização. Considere o conjunto de subconjuntos de \mathbb{Z}^d $\{4Nx + B(N) : x \in \mathbb{Z}^d\}$. Chamamos tais conjuntos de vértices de caixas-sítio. Tais caixas farão o papel de vértices no nosso modelo renormalizado. Dizemos que duas caixas-sítio $4Nx + B(N)$ e $4Ny + B(N)$ são adjacentes se $x \sim y$. O grafo renormalizado, com vértices como caixas-sítio e adjacência entre vértices assim definida é isomorfo a \mathbb{Z}^d .

Muitas vezes teremos necessidade de nos referir a outras caixas de raio N , essencialmente $B(N)$ transladada, no decorrer da prova. Entre duas caixas sítio $4Nx + B(N)$ e $4Ny + B(N)$ adjacentes estão localizadas várias caixas sobrepostas denominadas caixas-de-ligação, caixas da forma $Nz + B(N)$, onde $z \in \mathbb{Z}^d$ e exatamente uma coordenada de z , a saber a única coordenada onde x e y diferem, não é divisível por 4. Em especial nos referiremos às caixas-do-meio: uma caixa de ligação $Nz + B(N)$ tal que a componente não divisível por 4 de z é par.

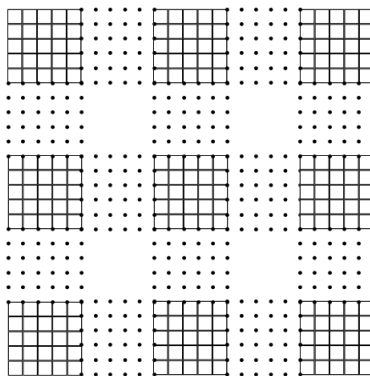


Figura 3.1: Exemplo bidimensional dos conjuntos definidos acima. As caixas quadriculadas são caixas sítio e as pontilhadas são caixas-do-meio.

Examinaremos as caixas-sítio uma a uma da maneira feita no Lema 2.1. Começamos com a caixa da origem, de acordo com o processo designamos a origem “boa” ou “ruim” dependendo da ocorrência de

certos eventos. Se ela for ruim terminamos o processo. Caso contrário continuamos o processo achando o primeiro elo (de acordo com alguma enumeração fixa dos elos de F) no grafo F incidente à origem e olhamos para o outro vértice a qual esse elo é incidente, digamos que tal vértice seja x_1 . Consideramos então a caixa $4Nx_1 + B(N)$ e de acordo com regras pré-estabelecidas vemos se ela é boa ou ruim, Continuamos à maneira descrita no Lema 2.1 encontrando vértices de F adjacentes ao aglomerado de vértices que são centros de caixas-sítio boas e descobrindo se as caixas-sítio desses vértices são boas ou não. O Lema 2.6 nos garantirá que as caixas-sítio serão boas com alta probabilidade e o Lema 2.1 por sua vez implicará que o aglomerado de caixas boas é infinito com probabilidade positiva. Mas a definição do que é uma caixa-sítio boa forçará a existência de um aglomerado infinito de vértices $(p + \eta)$ -abertos contendo a origem caso exista uma aglomerado infinito de caixas boas. Nosso maior trabalho agora é justamente definir o que é uma caixa boa e mostrar que isso ocorre com probabilidade boa o suficiente para os nossos propósitos.

Considere a caixa-sítio $B(N)$. De acordo com as definições, temos $B(m) \subseteq B(n) \subseteq B(N)$. A primeira etapa da série de etapas para determinar se a caixa da origem $B(N)$ é boa é verificar se a caixa $B(m)$ possui todos seus vértices abertos, neste caso diremos que a primeira etapa é sucesso. Para $A \subseteq \mathbb{Z}^d$ dizemos A é ρ -aberto se todos os seus vértices são ρ -abertos. Repare que $\mathbb{P}(B(m) \text{ é } p\text{-aberto}) = p^{(2m+1)^d} > 0$. Se $B(m)$ não for p -aberta, terminamos o processo, caso contrário prosseguimos. De agora em diante admitimos $B(m)$ p -aberta.

Definiremos na i -ésima etapa da construção o conjunto $C_i \subseteq \mathbb{Z}^d$ que saberemos ser α_i -aberto para algum parâmetro α_i apropriado. Isso será feito de forma que $\alpha_i \leq \alpha_{i+1}$ e portanto $C_i \subseteq C_{i+1}$. Informalmente, C_i guardará nosso aglomerado de vértices abertos até a i -ésima etapa. Acompanhando essa cadeia de conjuntos virão as funções $\beta_i : \mathbb{Z}^d \rightarrow [0, 1 - \delta]$ e $\gamma_i : \mathbb{Z}^d \rightarrow [0, 1]$. Para $x \in \mathbb{Z}^d$, tais funções terão as seguintes propriedades

$$\gamma_{i+1}(x) \leq \gamma_i(x) \tag{3.8}$$

$$\beta_i(x) \leq \gamma_{i+1}(x) \tag{3.9}$$

$$\beta_i(x) \leq \omega'(x) \leq \gamma_i(x) \tag{3.10}$$

onde $\omega'(x)$ é a variável aleatória uniforme em $[0, 1]$ associada a x . Dessa forma, todo ponto $x \in \mathbb{Z}^d$ será $\beta_i(x)$ -fechado e $\gamma_i(x)$ -aberto, para todo i correspondente a alguma etapa da construção. Assim, $\beta_i(x)$ e $\gamma_i(x)$ guardarão nosso conhecimento aproximado do estado $\omega'(x)$ dos vértices analisados. Além disso, as funções $\beta_i(x)$ servirão como função β à maneira descrita no Lema 2.6. A utilidade dessas definições ficará mais clara no decorrer da demonstração.

Começamos definindo $C_1 = B(m)$ e para $x \in \mathbb{Z}^d$ definimos

$$\gamma_1(x) = \begin{cases} p, & \text{se } x \in C_1 \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases} \tag{3.11}$$

$$\beta_1(x) = 0 \text{ para todo } x \in \mathbb{Z}^d \quad (3.12)$$

de modo que todo vértice x em \mathbb{Z}^d é $\gamma_1(x)$ -aberto e $\beta_1(x)$ -fechado. Seja $L_1 : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{Z}^d$ a função identidade e para $j = 2, 3, \dots, d$ defina $L_j : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{Z}^d$ uma isometria de \mathbb{Z}^d que fixa a origem, manda a primeira coordenada na j -ésima para $j \leq d$, e manda a primeira coordenada na $(j \bmod d)$ -ésima trocando seu sinal quando $j > d$. Informalmente, L_j manda uma face fixa do hipercubo d -dimensional em outra das suas $2d$ faces. Definimos C_2 da seguinte maneira.

$$C_2 = C_1 \cup E_1 \cup F_1 \quad (3.13)$$

onde E_1 é o conjunto dos $x \in \Delta C_1$ que são $(\beta_1(x) + \delta)$ -abertos, e F_1 é o conjunto de vértices p -abertos $y \in B'_1 = B(n) \cup \{\bigcup_{j=1}^{2d} L_j(T(m, n))\}$ tal que y se conecta a ΔC_1 por um caminho contido em B'_1 , caminho esse que é p -aberto fora de ΔC_1 e cujo único vértice $u \in \Delta C_1$ é $(\beta_1(x) + \delta)$ -aberto. Esse procedimento será padrão: na etapa $i + 1$ uniremos C_i ao conjunto de vértices $x \in \Delta C_i$ que são $(\beta_i(x) + \delta)$ -abertos, e a um conjunto F_i de vértices, contidos num conjunto apropriado, que são ligados a ΔC_i por um caminho de vértices p -abertos com exceção de seu único vértice $u \in \Delta C_i$ que será $(\beta_i(x) + \delta)$ -aberto. Fazemos isso porque na construção dinâmica dos C_i ganhamos a informação indesejada de que certos vértices $x \in \Delta C_i$ são $\beta_i(x)$ -fechados. Contornamos isso dando um pequeno acréscimo δ em $\beta_i(x)$ e vendo se alguns dos vértices x $\beta_i(x)$ -fechados se tornam $(\beta_i(x) + \delta)$ -abertos, podendo assim unir mais vértices ao nosso conjunto. Essa é a idéia do Lema 2.6 e daí vem sua importância.

Dizemos que a segunda etapa é sucesso se C_2 contém um vértice em $K_j(m, n)$ para cada $j = 1, 2, \dots, 2d$ onde $K_j(m, n)$ é o análogo de $K(m, n)$ para $L_j(T(n))$, ou seja, o conjunto de vértices $z \in L_j(T(n))$ tal que $z + L_j(i_1)$ pertence a alguma m -semente de $L_j(T(m, n))$. Se essa etapa falha, terminamos o processo.

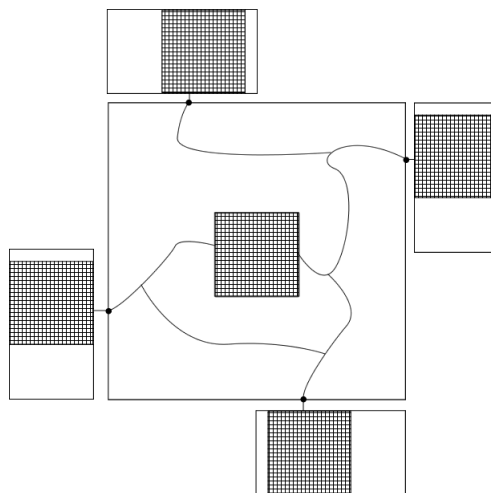


Figura 3.2: Representação bidimensional do evento em que a segunda etapa é sucesso. As caixas quadradas representam m -sementes.

Vamos estimar a probabilidade de sucesso na segunda etapa condicionado ao sucesso da primeira etapa. Seja G o evento em que existe um caminho em $B(n) - B(m)$ de $\Delta B(m)$ até $K(m, n)$, esse caminho sendo p -aberto fora de $\Delta B(m)$ e $(\beta_1(x) + \delta)$ -aberto em seu único vértice $u \in \Delta B(m)$. Escrevemos G_j para o evento análogo substituindo $K(m, n)$ por $K_j(m, n)$. Então vemos que, por uma aplicação do Lema 2.6 com $R = B(m)$, $\beta = \beta_1$ restrita a $\Delta R \cap B(n)$, (por simetria dos eventos G_j):

$$\mathbb{P}(G_j \mid B(m) \text{ é } p\text{-aberta}) > 1 - \epsilon \quad (3.14)$$

de modo que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(\bigcap_{j=1}^{2d} G_j \mid B(m) \text{ é } p\text{-aberta}\right) &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_{j=1}^{2d} G_j^c \mid B(m) \text{ é } p\text{-aberta}\right) \\ &> 1 - 2d\epsilon. \end{aligned} \quad (3.15)$$

Mas a ocorrência de $\bigcap_{j=1}^{2d} G_j$ implica sucesso da segunda etapa, de modo que a probabilidade de sucesso da segunda etapa condicionada ao sucesso da primeira é maior do que $1 - 2d\epsilon$. Para dar continuidade, partimos do pressuposto que a segunda etapa é sucesso. Defina, para $x \in \mathbb{Z}^d$

$$\gamma_2(x) = \begin{cases} \gamma_1(x), & \text{se } x \in C_1 \\ \beta_1 + \delta, & \text{se } x \in \Delta C_1 \cap C_2 \\ p, & \text{se } x \in C_2 - (C_1 \cup \Delta C_1) \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.16)$$

$$\beta_2(x) = \begin{cases} \beta_1(x), & \text{se } x \notin B'_1 \\ \beta_1 + \delta, & \text{se } x \in (\Delta C_1 - C_2) \cap B'_1 \\ p, & \text{se } x \in (\Delta C_2 - \Delta C_1) \cap B'_1 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.17)$$

Note que para todo $x \in \mathbb{Z}^d$, x é $\gamma_2(x)$ -aberto e $\beta_2(x)$ -fechado.

Queremos agora “plantar” uma m -semente na caixa-do-meio $2Ni_1 + B(N)$, com isso queremos dizer que queremos achar uma m -semente inteiramente contida em $2Ni_1 + B(N)$ tal que seja possível ligá-la por meio de caminho de vértices abertos, segundo algum parâmetro apropriado, ao nosso conjunto C_2 . É esse o próximo passo da nossa construção.

A região $T(m, n)$ está contida na caixa-de-ligação $Ni_1 + B(N)$. Assumindo o sucesso da etapa anterior conseguimos uma m -semente, digamos B_2 , totalmente contida em $T(m, n) \cap C_2$. Se houver mais de uma semente com essa propriedade escolhemos a primeira delas de acordo com uma enumeração fixa das caixas $\{u + B(m) : u \in \mathbb{Z}^d\}$. Existe $b \in \mathbb{Z}^d$ tal que $B_2 = b + B(m)$. Para plantar nossa semente em $2N_1 + B(N)$ queremos usar o Lema 2.6 substituindo as caixas usuais por caixas transladadas por b : $b + B(m)$, $b + B(n)$, $b + T(m, n)$. O problema é que o lugar onde plantaríamos a próxima semente, $b + T(m, n)$, não está totalmente contido em $2Ni_1 + B(N)$. Contornamos isso trocando $b + T(m, n)$ por

$b + T^*(m, n)$, onde $T^*(m, n)$ é a imagem de $T(m, n)$ pela isometria $\sigma^* : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{Z}^d$ que fixa a primeira coordenada e troca o sinal de todas as outras, $\sigma^*(x_1, x_2, \dots, x_d) = (x_1, -x_2, \dots, -x_d)$.

Agora, como b possui todas as coordenadas positivas, $b + T^*(m, n) \subset 2Ni_1 + B(N)$. Escrevemos

$$K_*(m, n) = \{x \in b + T^*(n) : x + i_1 \text{ pertence a alguma } m\text{-semente em } T^*(m, n)\} \quad (3.18)$$

onde $T^*(n) = \sigma^*(T(n))$. Definimos então

$$C_3 = C_2 \cup E_2 \cup F_2 \quad (3.19)$$

da maneira usual: E_2 é o conjunto de vértices $x \in \Delta C_2$ que são $(\beta_2(x) + \delta)$ -abertos, e F_2 é o conjunto de vértices $y \in B'_2 = b + (B(n) \cup T^*(m, n))$ tal que y é ligado a ΔC_2 por um caminho totalmente contido em B'_2 de vértices p -abertos fora de ΔC_2 cujo único vértice u em ΔC_2 é $(\beta_2(x) + \delta)$ -aberto. Dizemos que essa terceira etapa é sucesso se C_3 contém ao menos um vértice em $K_*(m, n)$. Se a etapa falha, terminamos o processo.

Estimamos agora a probabilidade de sucesso dessa etapa condicionado ao sucesso das etapas anteriores. Aplicamos o Lema 2.6 centrado em b , com $K(m, n)$ substituído por $K_*(m, n)$, $R = C_2 \cap (b + B(n))$, $\beta = \beta_2$ restrita a $\Delta R \cap (b + B(n))$. Pelas nossas escolhas anteriores de m e n e o fato de $K_*(m, n)$ ser análogo a $K(m, n)$, tal probabilidade condicional é maior do que $1 - \epsilon$. No que se segue, assumimos que essa etapa é sucesso.

Similarmente a 3.16 e 3.17, definimos

$$\gamma_3(x) = \begin{cases} \gamma_2(x), & \text{se } x \in C_2 \\ \beta_2 + \delta, & \text{se } x \in \Delta C_2 \cap C_3 \\ p, & \text{se } x \in C_3 - (C_2 \cup \Delta C_2) \\ 1, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.20)$$

$$\beta_3(x) = \begin{cases} \beta_2(x), & \text{se } x \notin B'_2 \\ \beta_2 + \delta, & \text{se } x \in (\Delta C_2 - C_3) \cap B'_2 \\ p, & \text{se } x \in (\Delta C_3 - \Delta C_2) \cap B'_2 \\ 0, & \text{caso contrário} \end{cases} \quad (3.21)$$

Dessa maneira “ligamos” nossa caixa da origem $B(N)$ à caixa-do-meio $2Ni_1 + B(N)$. O resto da construção consiste em ligar a caixa $B(N)$ às outras $d - 1$ caixas-do-meio $2Ni_j + B(N)$ para $j = 2, \dots, d$ e às d caixas-do-meio $-2Ni_k + B(N)$ para $k = 1, \dots, d$, plantando em cada uma dessas $2d - 1$ caixas uma m -semente conectada à caixa $B(N)$.

Começamos tentando ligar $B(N)$ a $2Ni_2 + B(N)$ de uma maneira similar a da terceira etapa. Por virtude da segunda etapa, conseguimos uma semente $B_2^{(2)} = b^{(2)} + B(m)$ em $C_3 \cap L_2(T(m, n))$. Defina, como já é de costume

$$C_4 = C_3 \cup E_3 \cup F_3 \quad (3.22)$$

onde E_3 é o conjunto de vértices $x \in \Delta C_3$ que são $(\beta_3(x) + \delta)$ -abertos, e F_3 é o conjunto de vértices $y \in B'_3 = b^{(2)} + (B(n) \cup L_2(T^*(m, n)))$ tal que y é ligado a ΔC_3 por um caminho totalmente contido em B'_3 de vértices p -abertos fora de ΔC_3 cujo único vértice u em ΔC_3 é $(\beta_3(x) + \delta)$ -aberto. Dizemos que essa terceira etapa é sucesso se C_4 contém ao menos um vértice em

$$K_*^{(2)}(m, n) = \{x \in b^{(2)} + L_2(T^*(n)) : x + i_2 \text{ pertence a alguma } m\text{-semente em } L_2(T^*(m, n))\}. \quad (3.23)$$

Se tal passo não for sucesso terminamos o processo. Mas

$$(C_3 \cup \Delta C_3) \cap \{b^{(2)} + L_2(T^*(m, n))\} = \emptyset \quad (3.24)$$

de modo que informação sobre o conjunto $(C_3 \cup \Delta C_3)$ não influencia a probabilidade de existirem m -sementes em $b^{(2)} + L_2(T^*(m, n))$: a distribuição conjunta dos $\omega'(x)$ para x em $b^{(2)} + L_2(T^*(m, n))$ é independente de C_3 . Dessa forma, podemos aplicar o Lema 2.6 para garantir que a probabilidade de sucesso da quarta etapa condicionado ao sucesso das etapas anteriores é maior do que $1 - \epsilon$. Definimos as funções γ_4 e β_4 analogamente a 3.16 e 3.17.

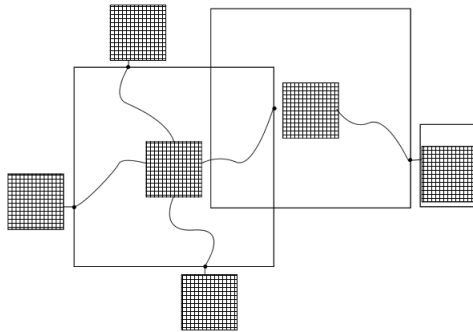


Figura 3.3: Ilustração mostrando o evento em que a terceira etapa é sucesso. Novamente, caixas quadradas representam m -sementes.

Continuamos assim tentando plantar m -sementes nas outras $2d - 2$ direções de maneira completamente análoga ao que fizemos acima. Se conseguimos tal feito, dizemos que a origem é boa. Só podemos julgar que a origem é boa após definirmos C_{2d+2} . Seja

$$Q_q = \{\omega' \in \Omega' : \text{a } q\text{-ésima etapa do processo de verificação se a caixa } B(N) \text{ é boa é sucesso}\}$$

para $q = 1, 2, \dots, 2d + 2$. Temos então

$$\mathbb{P}(B(N) \text{ é boa} \mid B(m) \text{ é } p\text{-aberta}) = \mathbb{P}\left(\bigcap_{q=2}^{2d+2} Q_q \mid Q_1\right) =$$

$$= \mathbb{P}(Q_2 | Q_1) \mathbb{P}(Q_3 | Q_1 \cap Q_2) \dots \mathbb{P}(Q_{2d+2} | Q_1 \cap \dots \cap Q_{2d+1})$$

Lembrando que $\mathbb{P}(Q_2 | Q_1) > 1 - 2d\epsilon$, e que para $i \geq 2$, $\mathbb{P}(Q_{i+1} | Q_1 \cap \dots \cap Q_i) > 1 - \epsilon$ vem que o produto acima é maior do que $(1 - 2d\epsilon)(1 - \epsilon)^{2d}$. Portanto temos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(B(N) \text{ é boa} \mid B(m) \text{ é } p\text{-aberta}) &> (1 - 2d\epsilon)(1 - \epsilon)^{2d} \\ &> 1 - 4d\epsilon \\ &> \frac{1 + p_c(F)}{2} \end{aligned} \tag{3.25}$$

pela nossa escolha de ϵ . Se a origem não é boa, terminamos o processo. A conta acima só faz sentido se as funções β_q estiverem de acordo com a definição do Lema 2.6, para $q = 1, 2, \dots, 2d + 2$.

Vamos então estimar os valores de β_q e γ_q , lembrando que suas definições são análogas a 3.16 e 3.17 para todo $q \geq 2$. Lembramos também que durante a construção, para expandir C_r para C_{r+1} , restringíamos nossas funções em questão a conjuntos B'_r e neles aplicávamos o Lema 2.6. De modo que acrescentávamos δ às funções apenas em um subconjunto limitado de B'_r . Assim, seguindo a história da construção, vemos que

$$\beta_q(x) \leq \gamma_q(x) \leq p + (w_q(x) - 1)\delta \text{ para todo } x \in C_q \tag{3.26}$$

onde $w_q(x)$ é o número de inteiros $r \leq q$ tais que o vértice $x \in B'_r$. Vemos que só usamos $2d + 1$ conjuntos B'_r durante a construção da caixa boa da origem. Portanto, para $q = 1, 2, \dots, 2d + 2$

$$w_q(x) \leq 2d + 1 \tag{3.27}$$

para todo $x \in \mathbb{Z}^d$. Unindo 3.27 com 3.26 vem que

$$\beta_q(x) \leq \gamma_q(x) \leq p + 2d\delta = p_c(\mathbb{Z}^d) + \eta \tag{3.28}$$

para todo $x \in C_q$, $q = 1, 2, \dots, 2d + 2$. De modo que as aplicações do Lema 2.6 estão bem fundamentadas.

Depois de todo o trabalho de definir quando a caixa-sítio da origem é boa, vamos a parte final do teorema. Suponha que a origem é boa e, sem perda de generalidade, suponha que a próxima caixa a ser verificada de acordo com a enumeração dos elos de F é $4Ni_1 + B(N)$. Vamos dizer o que significa essa caixa ser boa.

Primeiro tentaremos conectar $2Ni_1 + B(N)$ a $3Ni_1 + B(N)$ e a partir dessa última caixa, plantar uma semente em $4Ni_1 + B(N)$. A partir dessa semente (descentralizada) vamos plantar sementes em cada uma das $2d - 1$ caixas-do-meio vizinhas de $4Ni_1 + B(N)$ que ainda não analisamos.

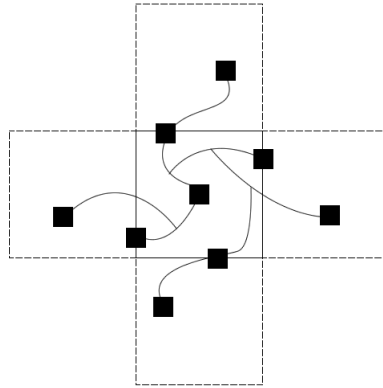


Figura 3.4: Representação bidimensional de uma caixa-sítio da origem boa. Os pequenos retângulos pretos representam m -sementes.

Usando a notação da terceira etapa, lembramos que $b + T^*(m, n) \subset 2Ni_1 + B(N)$. Lembramos também que $C_3 \cap (b + T^*(m, n))$ e portanto $C_{2d+2} \cap (b + T^*(m, n))$ contém ao menos uma semente. Designamos B_3 a primeira delas segundo a ordem pré-estabelecida. Temos $B_3 \subset 2Ni_1 + B(N)$ e queremos ligar C_{2d+2} a uma semente B_4 em $3Ni_1 + B(N)$, de uma maneira similar a que usamos para ligar $Ni_1 + B(N)$ a $2Ni_1 + B(N)$. Repare que $w_{2d+2}(x) \leq d + 1$ para $x \in 2Ni_1 + B(N)$, já que $2Ni_1 + B(N)$ se intersecta com no máximo metade dos conjuntos B'_r (como é possível analisar a partir da figura 3.5). Portanto, $\beta_{2d+2} \leq p + d\delta$ em $2Ni_1 + B(N)$. Logo, não precisamos nos preocupar com ter “gastado” todos os δ possíveis na construção da caixa boa da origem, de fato nessa etapa de ligação entre caixas-sítio as funções w_i sempre serão pequenas o suficiente para nossos propósitos. Vamos então usar o Lema 2.6 para plantar uma semente na caixa $3Ni_1 + B(N)$. Todos os conjuntos serão análogos ao da segunda etapa, mas agora necessitaremos de uma “ação centralizadora”. Definimos, para cada vértice $z \in \mathbb{Z}^d$, a isometria $\sigma_z : \mathbb{Z}^d \rightarrow \mathbb{Z}^d$ da seguinte maneira: $\sigma_z(x_1, x_2, \dots, x_d) = (z_1, z_2, \dots, z_d)$, onde $z_j = -x_j$ para $j = 2, \dots, d$. Seja b_3 o centro da semente B_3 . Na aplicação do Lema 2.6, no lugar de $T(m, n)$ utilizaremos $b_3 + \sigma_{b_3}(T(m, n))$. Fazemos isso para “centralizar” nossa m -semente em torno da reta $\{x = (x_1, \dots, x_d) \in \mathbb{Z}^d : x_j = 0 \text{ para } j \geq 2\}$, para assim nenhuma semente escapar das caixas desejadas (caixas-sítio ou caixas-de-ligação). Dizemos que a etapa $2d + 3$ é sucesso se conseguirmos expandir C_{2d+2} a um conjunto C_{2d+3} da maneira usual, de modo que C_{2d+3} possua uma m -semente em $b_3 + \sigma_{b_3}(T(m, n))$. Seja B_4 a primeira dessas sementes. Uma aplicação do Lema 2.6 mostra que a etapa $2d + 3$ é sucesso condicionado ao sucesso das etapas anteriores com probabilidade maior do que $1 - \epsilon$. Assumimos de agora em diante que a etapa $2d + 3$ é sucesso.

De maneira completamente análoga ao passo anterior tentamos expandir o conjunto C_{2d+3} para o conjunto C_{2d+4} , de modo que esse conjunto possua uma m -semente em $4Ni_1 + B(N)$. Fazemos isso a partir da m -semente $B_4 \subseteq 3Ni_1 + B(N)$. Novamente, vemos que a probabilidade de sucesso dessa etapa condicionada ao sucesso das etapas anteriores excede $1 - \epsilon$ após uma aplicação do Lema 2.6. Suponha que essa etapa também é sucesso. Seja B_5 a primeira das sementes que conseguimos plantar em $4Ni_1 + B(N)$ e b_5 seu centro.

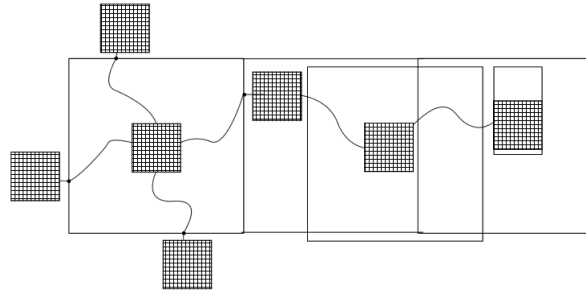


Figura 3.5: A ilustração mostra o sucesso ao plantar uma semente na caixa $4Ni_1 + B(N)$ a partir da caixa boa da origem.

Expandimos, a partir de b_5 nas $2d - 1$ direções que faltam: plantamos, à maneira da segunda etapa, uma semente adjacente a cada face não analisada anteriormente do hipercubo $b_5 + B(n)$. A partir de cada uma dessas $2d - 1$ sementes prosseguimos plantando mais uma semente na caixa-do-meio adjacente a $4Ni_1 + B(N)$. Mas em geral b_5 não estará no centro de $4Ni_1 + B(N)$, de modo que precisamos centralizar os conjuntos $b_5 + L_j(T(m, n))$ para que as sementes adjacentes a cada face pertençam às respectivas caixas-de-ligação. Notamos que a probabilidade de sucesso dessa etapa que consiste em plantar sementes adjacentes às faces do hipercubo $b_5 + B(n)$ condicionado ao sucesso das etapas anteriores excede $1 - 2d\epsilon$. Dizemos que a caixa $4Ni_1 + B(N)$ é boa quando conseguimos expandir nosso conjunto de vértices abertos plantando uma semente em cada caixa-do-meio adjacente a $4Ni_1 + B(N)$, a partir das sementes adjacentes às faces do hipercubo $b_5 + B(n)$. Notamos que a probabilidade de sucesso dessas últimas etapas é maior do que $(1 - \epsilon)^{2d-1}$.

Para garantir que a caixa $4Ni_1 + B(N)$ seja boa dado que a caixa $B(N)$ é boa, precisamos unir ao nosso conjunto de vértices abertos $2 + (2d - 2) + (2d - 1)$ sementes, de modo que, analogamente a equação 3.25

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(4Ni_1 + B(N) \text{ é boa} \mid B(N) \text{ é boa}) &> (1 - \epsilon)(1 - \epsilon)(1 - (2d - 2)\epsilon)(1 - \epsilon)^{2d-1} \\
 &> 1 - 4d\epsilon \\
 &= \frac{1 + p_c(F)}{2} \\
 &> p_c(F)
 \end{aligned} \tag{3.29}$$

O processo não termina se $4Ni_1 + B(N)$ não for boa, podemos continuar olhando outros elos adjacentes à origem. Em geral, ao olhar uma nova caixa adjacente ao nosso aglomerado de caixas boas, fazemos o mesmo processo que fizemos para verificar se $4Ni_1 + B(N)$ é boa dado que $B(N)$ é boa. Essa probabilidade, pela construção análoga, excederá $\frac{1 + p_c(F)}{2}$. No meio da construção, podemos nos deparar com uma etapa que consistiria em plantar uma semente numa caixa-do-meio já verificada. Se isso ocorrer, simplesmente falamos que essa etapa é sucesso e prosseguimos para a próxima etapa.

Definimos então nosso processo dinâmico à maneira descrita no Lema 2.1. Seja A o aglomerado de caixas-sítio boas da origem. Mostramos acima que a probabilidade de uma nova caixa-sítio adjacente ao nosso aglomerado ser boa, condicionado ao sucesso das etapas anteriores, excede $p_c(F)$. Logo, nosso processo satisfaz as hipóteses do Lema 2.1. Porém nós assumimos todo esse tempo que a caixa $B(m)$ está

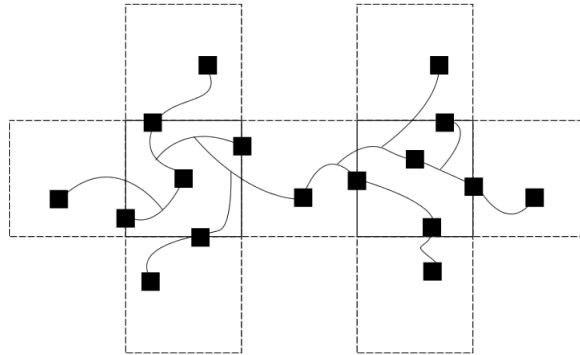


Figura 3.6: Ilustração da construção de uma caixa $4Ni_1 + B(N)$ boa, a partir de uma caixa da origem boa.

p -aberta. Portanto, a medida que satisfaz o Lema 2.1 é a medida produto de uniformes independentes condicionada ao sucesso da primeira etapa. Ainda assim:

$$\begin{aligned}
 \mathbb{P}(|A| = \infty) &= \mathbb{P}(|A| = \infty, B(m) \text{ é } p\text{-aberta}) \\
 &= \mathbb{P}(|A| = \infty \mid B(m) \text{ é } p\text{-aberta})\mathbb{P}(B(m) \text{ é } p\text{-aberta}) \\
 &= \mathbb{P}(|A| = \infty \mid B(m) \text{ é } p\text{-aberta})p^{(2m+1)^d} \\
 &> 0
 \end{aligned} \tag{3.30}$$

Mas aglomerado de caixas boas da origem ser infinito implica o aglomerado de vértices $(p + \eta)$ -abertos da origem ser infinito, concluindo a prova do Teorema 3.1. \square

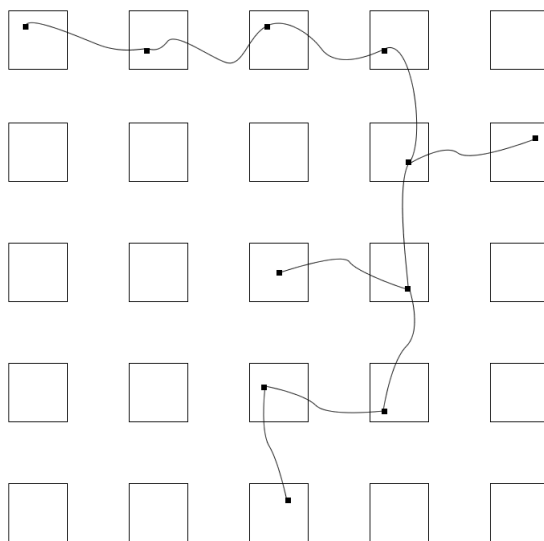


Figura 3.7: Ilustração mostrando o aglomerado de caixas boas, e com ele um subconjunto do aglomerado de vértices $(p + \eta)$ -abertos da origem.

Capítulo 4

O Problema do Truncamento em Percolação de Longo Alcance

Neste capítulo utilizaremos resultados de um processo chamado percolação de elos independente de Bernoulli em \mathbb{Z}^d . Nesse processo, para $0 < p < 1$, dizemos que um elo em \mathbb{E}^d está aberto com probabilidade p e fechado com probabilidade $1 - p$ independentemente de todos os outros elos. Construímos adequadamente nosso espaço de probabilidade à maneira feita para o processo de percolação de sítios, novamente denotaremos P_p a medida produto das variáveis com distribuição de Bernoulli de parâmetro p independentes associadas a cada elo. Analogamente também definimos a noção de caminho: uma sequência $x_0, e_1, x_1, e_2, \dots, e_n, x_n, \dots$ de vértices $x_i \in \mathbb{Z}^d$ e elos $e_i \in \mathbb{E}^d$ tal que $e_i = \langle x_{i-1}, x_i \rangle$. Dizemos que um caminho é aberto em uma configuração se nela todos seus elos são abertos. A partir dessa noção, podemos definir aglomerado de elos abertos de um ponto, função

$$\theta_{\mathbb{Z}^d}(p) : [0, 1] \rightarrow [0, 1], \text{ e}$$

$$p_c(\mathbb{Z}^d) = \sup \{p \text{ em } [0, 1] \text{ tal que } \theta_{\mathbb{Z}^d}(p) = 0\}$$

agora para o processo de percolação de elos. Nesse capítulo tanto $p_c(\mathbb{Z}^d)$ quanto $\theta_{\mathbb{Z}^d}(p)$ estarão associados à percolação de elos.

O Teorema 3.1 [1] pode ser demonstrado de maneira análoga para percolação de elos independente de Bernoulli em \mathbb{Z}^d . Precisaremos adiante do seguinte resultado:

Proposição 4.1 *No processo de percolação de elos independente de Bernoulli, vale*

$$\lim_{d \rightarrow \infty} p_c(\mathbb{Z}^d) = 0 \tag{4.1}$$

Prova: Considere $\mathbb{Z}^2 = \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \times \overbrace{0 \times \dots \times 0}^{d-2 \text{ vezes}} \subseteq \mathbb{Z}^d$ subgrafo. Vamos mostrar que, para qualquer $\epsilon > 0$, $P_\epsilon(0 \leftrightarrow i_1)$ (com i_j definido da mesma forma que em 2.12) pode ser tão próximo de 1 quanto o necessário fazendo d suficientemente grande. Dessa forma podemos fazer

$$P_\epsilon(0 \leftrightarrow i_1) > p_c(\mathbb{Z}^2). \quad (4.2)$$

Pela transitividade de \mathbb{Z}^d , se $x, y \in \mathbb{Z}^2 \subset \mathbb{Z}^d$, $x \sim y$, conseguimos

$$P_\epsilon(x \leftrightarrow y) > p_c(\mathbb{Z}^2). \quad (4.3)$$

Considerando agora um novo processo de percolação em \mathbb{Z}^2 onde dizemos que o elo entre x e y está aberto quando $x \leftrightarrow y$ em \mathbb{Z}^d , vemos que a probabilidade de a origem percolar é maior do que zero. Mas temos que quando a origem percola nesse novo processo, necessariamente a origem agora vista em \mathbb{Z}^d está conectada a um número infinito de vértices. Assim, para esse d apropriado,

$$\theta_{\mathbb{Z}^d}(\epsilon) > 0 \quad (4.4)$$

o que implica

$$p_c(\mathbb{Z}^d) < \epsilon. \quad (4.5)$$

Resta mostrar a validade da equação 4.2. Para $2 < j \leq d$, considere o caminho que passa apenas pelos vértices $0, i_j, i_j + i_1, i_1$. Repare que para índices j distintos, os elos desses caminhos são disjuntos. A probabilidade de um caminho dessa forma não estar aberto é $1 - \epsilon^3$. Para que $0 \leftrightarrow i_1$ é necessário que nenhum desses $d - 2$ caminhos seja aberto. Assim

$$P_\epsilon(0 \leftrightarrow i_1) < (1 - \epsilon^3)^{d-2}. \quad (4.6)$$

Existe d tal que $(1 - \epsilon^3)^{d-2} < 1 - p_c(\mathbb{Z}^2)$. Assim, para esse d ,

$$P_\epsilon(0 \leftrightarrow i_1) > p_c(\mathbb{Z}^2). \quad (4.7)$$

Antes de concluir a demonstração, devemos notar que alguns dos elos utilizados para encontrarmos a cota inferior para $P_\epsilon(0 \leftrightarrow i_1)$ serão os mesmos a ser utilizados para acharmos cota inferior para $P_\epsilon(i_1 \leftrightarrow 2i_1)$. Para garantir a independência entre os eventos estudados, devemos então construir outro caminho conectando i_1 a $2i_1$, dessa vez disjunto do caminhos que usamos para conectar 0 a i_1 . Dado $x \in \mathbb{Z}^d$, fazemos isso olhando o análogo do caminho definido por $x, x + i_j, x + i_j + i_1, x + i_1$ só que “para baixo”: o caminho definido por $x, x - i_j, x - i_j + i_1, x + i_1$. Assim, dado $y = (y_1, \dots, y_d)$, sempre que $\sum_{i=1}^d |y_i| \equiv 0 \pmod{2}$, usamos o caminho definido originalmente. Caso contrário, achamos nossa cota inferior olhando para o evento em que o caminho que passa por $y, y - i_j, y - i_j + i_1, y + i_1$ está aberto. Ainda

assim podemos encontrar problemas, como cada vértice x se conecta a quatro outros vértices em \mathbb{Z}^2 , é necessário criar quatro caminhos independentes saindo de x e chegando aos seus vértices vizinhos. Mas isso se faz facilmente, criando quatro caminhos “padrões” análogos aos caminhos para cima e para baixo que consideramos anteriormente. Pela observação feita no começo da demonstração, segue a proposição.

□

Estudamos agora um outro processo denominado percolação de longo alcance. Trabalhamos novamente com um grafo cujos vértices são o conjunto \mathbb{Z}^d , $d \geq 2$, mas consideramos como conjunto de elos o conjunto $\mathcal{E} = \{\langle x, y \rangle : x, y \in \mathbb{Z}^d, x \neq y\}$. Ou seja, dizemos que existe elo $\langle x, y \rangle$ ligando x a y sempre que x for diferente de y . Tal grafo assim definido denotamos por \mathcal{G} . Dada uma sequência $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, $p_n \in [0, 1] \forall n \in \mathbb{N}$, dizemos que o elo $\langle x, y \rangle$ está aberto com probabilidade $p_{|x-y|}$ e fechado com probabilidade $1 - p_{|x-y|}$. Definimos $\tilde{\Omega} = \{0, 1\}^{\mathcal{E}}$ nosso espaço amostral, como de costume denotando um elo e aberto numa configuração $\tilde{\omega} \in \tilde{\Omega}$ se $\tilde{\omega}(e) = 1$ e fechado caso contrário. Novamente a σ -álgebra a ser considerada será $\tilde{\mathcal{F}}$, a σ -álgebra gerada pelos cilindros de $\tilde{\Omega}$. Definimos \mathcal{P} a medida produto das medidas de Bernoulli independentes $\mu_{\langle x, y \rangle}$ associadas a cada elo $\langle x, y \rangle \in \mathcal{E}$,

$$\mathcal{P} = \prod_{\langle x, y \rangle \in \mathcal{E}} \mu_{\langle x, y \rangle}.$$

Mais uma vez as definições de caminho aberto e aglomerado de um vértice são análogas às definições feitas anteriormente. Observe que se $\limsup_{n \rightarrow \infty} p_n > 0$, uma aplicação do Lema de Borel-Cantelli nos garante que $\mathcal{P}(0 \leftrightarrow \infty) = 1$. Uma pergunta natural que surge é se a existência de um número infinito de elos conectando a origem a outros vértices é crucial para a ocorrência de percolação nesse modelo. Com tal pergunta em mente, dado um inteiro positivo N e uma sequência $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$, definimos a sequência truncada

$$p_{N,n} = \begin{cases} p_n, & \text{se } n \leq N \\ 0, & \text{se } n > N. \end{cases}$$

Dado inteiro positivo N , denotamos \mathcal{P}_N a medida produto truncada em N ,

$$\mathcal{P}_N = \prod_{\langle x, y \rangle \in \mathcal{E}} \tilde{\mu}_{\langle x, y \rangle},$$

onde

$$\tilde{\mu}_{\langle x, y \rangle}(\langle x, y \rangle \text{ está aberto}) = \begin{cases} p_{|x-y|}, & \text{se } |x-y| \leq N \\ 0, & \text{se } |x-y| > N. \end{cases}$$

O problema do truncamento se refere a condições que a sequência $(p_n)_{n \in \mathbb{N}}$ deve satisfazer para que exista inteiro positivo N tal que

$$\mathcal{P}_N(0 \leftrightarrow \infty) > 0. \tag{4.8}$$

O próximo teorema, devido a Friedli, de Lima e Sidoravicius [2], fornece uma condição suficiente para que a questão do truncamento tenha resposta afirmativa.

Teorema 4.2 [2]

Em \mathbb{Z}^d , $d \geq 2$, se $\limsup_{n \rightarrow \infty} p_n > 0$ então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que

$$\mathcal{P}_N(0 \leftrightarrow \infty) > 0 \quad (4.9)$$

Prova: É suficiente mostrar o resultado para \mathbb{Z}^2 . Defina $\epsilon > 0$ de modo que $2\epsilon = \limsup_{n \rightarrow \infty} p_n$. Pela Proposição 4.1, existe uma dimensão d_ϵ tal que

$$p_c(\mathbb{Z}^{d_\epsilon}) < \frac{\epsilon}{2} \quad (4.10)$$

onde $p_c(\mathbb{Z}^{d_\epsilon})$ denota o ponto crítico de \mathbb{Z}^{d_ϵ} no processo de percolação independente de elos em \mathbb{Z}^{d_ϵ} . Pelo Teorema 3.1, existe um inteiro $K_\epsilon > 0$ tal que

$$p_c(\{0, 1, \dots, K_\epsilon - 1\}^{d_\epsilon - 2} \times \mathbb{Z}^2) < p_c(\mathbb{Z}^{d_\epsilon}) + \frac{\epsilon}{2} < \epsilon. \quad (4.11)$$

Seja $m_0 = 0$. Para $j \in \{1, 2, \dots, d_\epsilon - 1\}$ definimos recursivamente

$$m_j = \min\{l > (K_\epsilon - 1)m_{j-1} : p_l \geq \epsilon\}. \quad (4.12)$$

Note que tal definição faz sentido já que $\limsup_{n \rightarrow \infty} p_n = 2\epsilon$. Observe também que $p_{m_j} \geq \epsilon \forall j \in \{1, 2, \dots, d_\epsilon - 1\}$. Para $x \in \mathbb{Z}^2$ e $D \subseteq \mathbb{Z}^2$ definimos como de costume o conjunto $x + D = \{z + x, z \in D\}$. Seja $D_0 = \{(0, 0)\}$. Para $j \in \{1, 2, \dots, d_\epsilon - 2\}$ definimos recursivamente

$$D_j = \bigcup_{n=0}^{K_\epsilon - 1} ((nm_j, 0) + D_{j-1}).$$

Seja então

$$\mathcal{V}_{d_\epsilon - 1} = \bigcup_{(k,n) \in \mathbb{Z}^2} ((km_{d_\epsilon - 1}, nm_1) + D_{d_\epsilon - 2})$$

e

$$\mathcal{E}_{d_\epsilon - 1} = \{ \langle x, y \rangle \subset \mathcal{V}_{d_\epsilon - 1} \times \mathcal{V}_{d_\epsilon - 1} : |x_1 - y_1| = m_j \text{ para algum } 1 \leq j \leq d_\epsilon - 1 \text{ e } x_2 = y_2, \text{ ou} \\ |x_2 - y_2| = m_1 \text{ e } x_1 = y_1 \}.$$

O grafo $\mathcal{G}_{d_\epsilon - 1} = (\mathcal{V}_{d_\epsilon - 1}, \mathcal{E}_{d_\epsilon - 1}) \subseteq \mathcal{G}$ é isomorfo a $\{0, 1, \dots, K_\epsilon - 1\}^{d_\epsilon - 2} \times \mathbb{Z}^2$. Um isomorfismo entre esses grafos é a função

$$\phi : \{0, 1, \dots, K_\epsilon - 1\}^{d_\epsilon - 2} \times \mathbb{Z}^2 \rightarrow \mathcal{V}_{d_\epsilon - 1}$$

tal que $\phi(x_1, \dots, x_{d_\epsilon}) = (\sum_{i=1}^{d_\epsilon - 1} x_i m_i, x_{d_\epsilon} m_1)$. Observe que na construção de $\mathcal{G}_{d_\epsilon - 1} \subset \mathcal{G}$ utilizamos um número finito de “alcances” para nossos elos. Dessa forma, sempre que houver percolação em $\mathcal{G}_{d_\epsilon - 1}$, vendo $\mathcal{G}_{d_\epsilon - 1}$ dentro de \mathcal{G} , haverá percolação no processo truncado. Mas por nossas escolhas de m_j , $1 \leq j \leq d_\epsilon - 1$, cada elo de $\mathcal{G}_{d_\epsilon - 1}$ está aberto com probabilidade no mínimo ϵ . Portanto

$$\begin{aligned}
\mathcal{P}_{n_{d_\epsilon-1}}(0 \leftrightarrow \infty) &\geq \mathcal{P}(0 \leftrightarrow \infty \text{ em } \mathcal{G}_{d_\epsilon-1}) \\
&= P_\epsilon(0 \leftrightarrow \infty \text{ em } \{0, 1, \dots, K_\epsilon - 1\}^{d_\epsilon-2} \times \mathbb{Z}^2). \quad (4.13)
\end{aligned}$$

Mas por nossas escolhas de d_ϵ e K_ϵ , temos que

$$P_\epsilon(0 \leftrightarrow \infty \text{ em } \{0, 1, \dots, K_\epsilon - 1\}^{d_\epsilon-2} \times \mathbb{Z}^2) > 0 \quad (4.14)$$

□

Referências Bibliográficas

- [1] MARSTRAND, John M., GRIMMETT, Geoffrey R., The supercritical phase of percolation is well behaved, *Proceedings of the Royal Society, (London) Series A* 430 439-457, 1990.
- [2] FRIEDLI S. ; DE LIMA Bernardo N.B ; SIDORAVICIUS V.. On Long Range Percolation with Heavy Tails *Electronic Communications in Probability, Vol 9, Pages 175-177*, 2004
- [3] GRIMMETT, Geoffrey R., *Percolation*, Springer, 1999.