UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
Departamento de Matemática

Polímeros Orientados em Ambientes Aleatórios

Larissa Brito de Oliveira

Belo Horizonte
2011

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Dissertação de Mestrado

Polímeros Orientados em Ambientes Aleatórios

Larissa Brito de Oliveira

Dissertação de mestrado apresentada como requisito para a obtenção do título de Mestre pelo Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais.

Orientador: Rémy de Paiva Sanchis

Belo Horizonte
2011

Ao meu melhor Amigo,
Senhor, Salvador e Mestre Jesus Cristo.
A Ele toda a honra e glória.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela minha vida, por seu imenso amor e por me dar força e coragem para enfrentar todas as dificuldades, pois "Tudo posso naquele que me fortalece".
Aos meus pais, a Laís e Márcio, pelo incentivo, pelo apoio e amor.
À minha família pelo carinho, pelo apoio emocional e espiritual.
Ao professor, Benedito M. Acióly, por ter acreditado em mim e ter me incentivado a continuar estudando.
Ao professor Rémy, pela orientação, pelo incentivo, pela paciência e pelo apoio em todas as circunstâncias.
Aos professores Leonardo e Sacha por aceitar o convite de participar da banca examinadora deste trabalho e pelas sugestões.
Aos funcionários, em especial a Andréa e Kelli, pelo carinho e por sempre estarem dispostos a ajudar.
Aos amigos e colegas que torceram por mim e que de alguma forma contribuíram para essa minha vitória, especialmente a Suzi, a Melina, aos amigos da turma, Camila, Edney, Fabiana, Samuel, aos amigos da UFMG, Adson, Amanda, Jeanne, Roney, pela amizade, paciência e por toda ajuda principalmente nos momentos difíceis.
À CAPES pelo apoio financeiro.
E a todos que de alguma maneira contribuíram.

Resumo

Nesta dissertação, temos por objetivo estudar polímeros orientados em ambientes aleatórios. Com base no artigo “Probabilistic Analysis of Directed Polymers in a Random Environment: a Review” escrito por F. Comets, T. Shiga e N. Yoshida em 2004, provaremos o comportamento difusivo de polímeros na fase de desordem fraca e o comportamento localizado na fase de desordem forte. Resultados sobre a difusividade de polímeros foram inicialmente obtidos por J. Imbrie e T. Spencer em 1988 e E. Bolthausen em 1989, já os resultados sobre a localização foram obtidos por P. Carmona e Y. Hu em 2002 e F. Comets, T. Shiga e N. Yoshida em 2003. Abordamos também a transição de fase da energia livre para o modelo de polímero orientado na árvore de Cayley, os resultados são baseados no artigo “Directed polymers on trees: a martingale approach” de E. Buffet, A. Patrick e J. V. Pulé em 1993.

Palavras-chave Polímeros orientados, ambientes aleátorios, martingais, energia livre, transição de fase, comportamento difusivo, localização.

Abstract

The main purpose of the present dissertation is the study of directed polymers in a random environment on Z^d, based on the article “Probabilistic Analysis of Directed Polymers in a Random Environment: a Review” by F. Comets, T. Shiga e N. Yoshida, published in 2004. We will study the diffusive behavior on the so-called weak disorder phase and the localized behavior on the so-called strong disorder phase. The results on the weak disorder were originally obtained by J. Imbrie and T. Spencer in 1988 and by E. Bolthausen in 1989, while the results on strong disorder were proved by P. Carmona e Y. Hu in 2002 and by F. Comets, T. Shiga and N. Yoshida in 2003.

Moreover, the phase transition of the free energy will be established for the directed polymer model on the regular Cayley tree. This result is based on the article “Directed polymers on trees: a martingale approach” de E. Buffet, A. Patrick and J. V. Pulé, published in 1993.

Key-words Directed Polymers, random environment, martingales, free energy, phase transition, diffusive behavior, localization.

Sumário

1

Introdução

O objetivo geral desta dissertação é estudar o modelo de polímero orientado em $\mathbb{Z}^d$ e na árvore de Cayley, na presença de uma desordem dada por um ambiente aleatório. Esse estudo terá por base a análise de martingais. Esta dissertação tem como referências principais [2] e [5].

1.1 O Polímero orientado em ambiente aleatório

Em $\mathbb{Z}^d$, consideremos $\{\omega_n\}_{n\geq 0}$ um passeio aleatório simples definido em um espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, P)$. Mais precisamente, seja

$$\Omega = \{\omega = (\omega_n)_{n\geq 0}; \omega_n \in \mathbb{Z}^d, n \geq 0\},$$

$\mathcal{F}$ a σ-álgebra dos cilindros sobre Ω, e P a medida de probabilidade dada por

$$P(\omega_0 = 0) = 1,\ P(\omega_n - \omega_{n-1} = \pm e_j) = \frac{1}{(2d)},$$

com $j = 1, 2, ..., d$, onde $e_j = (\delta_{jk})_{k=1}^d$ é o j-ésimo vetor da base canônica de $\mathbb{Z}^d$, sendo que os incrementos $\omega_1 - \omega_0, ..., \omega_n - \omega_{n-1}$ são independentes.

Assim, o polímero orientado de tamanho n será representado como a sequência $\{(j, \omega_j)\}_{j=1}^n$ em $\mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d$. Estaremos interessados em saber de que maneira este polímero direcionado será influenciado pela desordem dada por um ambiente aleatório que definimos da seguinte maneira.

O ambiente aleatório

$$\eta = \{\eta(n, x) : n \in \mathbb{N}, x \in \mathbb{Z}^d\}$$

é uma sequência de variáveis aleatórias reais, não-constantes, independentes e identicamente distribuídas em um espaço de probabilidade $(H, \mathcal{G}, Q)$ tal que

$$E_Q[\exp\{\beta\eta(n, x)\}] < \infty \tag{1.1}$$

para todo $\beta > 0$. Onde $E_Q[Y]$ denota a esperança de uma variável aleatória Y em relação a Q. Do mesmo modo, a esperança de uma variável aleatória Y em relação a P em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ será denotada por $E_P[Y]$. Denotamos por λ a função

$$\lambda(\beta) = \ln E_Q[\exp\{\beta\eta(n, x)\}] \in \mathbb{R}. \tag{1.2}$$

A medida do polímero sobre o espaço $(\Omega, \mathcal{F})$ será dada, para $n \geq 0$, por

$$\mu_n(\omega) = \frac{1}{Z_n} \exp\left(\beta \sum_{j=1}^{n} \eta(j, \omega_j)\right) P(\omega), \tag{1.3}$$

onde $\beta > 0$ é um parâmetro (temperatura inversa) e

$$Z_n(\beta) = \sum_{\omega:|\omega|=n} \exp\left(\beta \sum_{j=1}^{n} \eta(j, \omega_j)\right) P(\omega) \tag{1.4}$$

é a constante de normalização chamada função partição. Consideremos ainda a energia livre definida por

$$\frac{1}{n\beta} \log Z_n(\beta). \tag{1.5}$$

Estamos considerando, por um abuso de notação, que para ω um passeio de tamanho n, temos

$$P(\omega) = \frac{1}{(2d)^n}.$$

Consideremos também $\mathbb{T}_2$, a árvore de Cayley binária. Identificamos os elos da árvore por dois inteiros (j, k), onde $j \in \mathbb{N}$ identifica o nível e k enumera os elos do nível j da esquerda para a direita, assim $k \in \{1, 2, ..., 2^j\}$. Sobre $\mathbb{T}_2$, o passeio aleatório de tamanho n será uma sequência finita $\{(j, \omega_j)\}_{j=1}^n$ tal que

$$P(\omega_0 = 1) = 1, \ P(\omega_{j+1} = 2\omega_j + s_j) = \frac{1}{2},$$

onde $s_j \in \{-1, 0\}$ representa o fato do passeio aleatório ter escolhido o ramo da esquerda ou da direita, respectivamente.

Perceba que esse modelo se diferencia um pouco do modelo em $\mathbb{Z}^d$. Mas, como foi feito anteriormente, o ambiente aleatório

$$\eta = \{\eta(j, k) : j \leq n, 1 \leq k \leq 2^j\}$$

é uma sequência de variáveis aleatórias reais, não-constantes, independentes e identicamente distribuídas que serão associadas aos elos da árvore, tal que (1.1) também é válida. Definimos também, como em (1.4) e (1.5), a função partição e a energia livre. Observe que para um passeio de tamanho n temos

$$P(\omega) = \frac{1}{2^n}.$$

Para simplificar a notação usaremos $\mathbb{T}$ no lugar de $\mathbb{T}_2$.

Veremos que β é o parâmetro fundamental para uma mudança no comportamento da energia livre. O modelo acima descrito, para um polímero direcionado em ambiente aleatório em $\mathbb{Z}^d$, foi introduzido por Imbrie e Spencer [7].

1.2 Caracterização da fase de desordem fraca e da fase de desordem forte

Uma questão de interesse será o comportamento assintótico da função partição normalizada. Outra será o comportamento assintótico do polímero em relação à medida do polímero, quando $n \to \infty$, para cada realização do ambiente em $\mathbb{Z}^d$. Na árvore de Cayley binária, estudaremos a transição de fase da energia livre $\frac{1}{n\beta} \ln Z_n(\beta)$.

Para tanto, nosso estudo está baseado na função partição normalizada dada por

$$W_n = \frac{Z_n}{E_Q[Z_n]}.$$

Veremos que $(W_n)_{n \geq 1}$ é um martingal em $(H, \mathcal{G}, Q)$. Observe que $E_Q[W_n] = 1$ e $W_n > 0,\ \forall n \in \mathbb{N}$. Pelo Teorema de Convergência de Martingais o limite

$$\lim_{n \nearrow \infty} W_n = W_\infty$$

existe Q-q.c..Consideremos $\mathcal{G}_n := \sigma[\eta(j, x) : j \leq n, x \in \mathbb{Z}^d]$ ou $\mathcal{G}_n := \sigma[\eta(j, x) : j \leq n, 1 \leq x \leq 2^j]$ sequências crescentes de sub-σ-álgebras de $\mathcal{G}$. Aplicando a Lei zero-um de Kolmogorov provaremos

Teorema 1.1 *Consideremos o martingal* $W = (W_n, \mathcal{G}_n)$ *e* $\lim_{n \nearrow \infty} W_n = W_\infty$. *Então existem somente duas possibilidades para o limite;*

$$Q(W_\infty > 0) = 1,$$

ou

$$Q(W_\infty = 0) = 1.$$

Assim, considerando essa divisão do limite em somente duas possibilidade, definimos as fases

$$\boxed{\text{desordem fraca} \iff Q(W_\infty > 0) = 1}$$

e

$$\boxed{\text{desordem forte} \iff Q(W_\infty = 0) = 1},$$

sobre as quais obteremos comportamentos diferentes para o polímero direcionado.

Empregando o chamado método do segundo momento, mostraremos que para $d \geq 3$ e β suficientemente pequeno temos desordem fraca e, usando outro método, chamado de momento fracionário, provaremos que em qualquer dimensão e β suficientemente grande sempre estamos em desordem forte. De maneira mais precisa, provaremos os seguintes resultados.

Teorema 1.2 (Desordem Fraca) *Consideremos, em $\mathbb{Z}^d$, a função partição normalizada W_n e π_d é a probabilidade do passeio aleatório simples retornar a origem. Se $d \geq 3$ e*

$$\gamma_1(\beta) \equiv \lambda(2\beta) - 2\lambda(\beta) < \ln(1/\pi_d). \tag{1.6}$$

então

$$Q(W_\infty > 0) = 1.$$

Sabemos que

$$\pi_d \equiv P(\exists n \in \mathbb{Z}; \omega_n = 0) \begin{cases} = 1 \text{ se } d \leq 2, \\ < 1, \text{ se } d \geq 3 \end{cases}.$$

Teorema 1.3 (Desordem Forte) *Consideremos, em $\mathbb{Z}^d$, a função partição normalizada W_n. Se*
(i) *$d = 1, 2$ e $\beta \neq 0$, ou*
(ii) *$d \geq 1$ e $\gamma_2(\beta) \equiv \beta\lambda'(\beta) - \lambda(\beta) > \ln(2d)$*
então

$$Q(W_\infty = 0) = 1.$$

Poderíamos agora nos perguntar se haveria para $d \geq 3$ um valor crítico β_c, tal que estivéssemos em desordem fraca se $\beta < \beta_c$ e em desordem forte se $\beta > \beta_c$. Temos que ambos $\beta \mapsto \gamma_1(\beta)$ e $\beta \mapsto \gamma_2(\beta)$ são crescentes sobre $[0, \infty)$, com $\gamma_1(0) = \gamma_2(0) = 0$. Observe que os teoremas acima deixam uma lacuna, pois ao considerarmos

$$\beta_c^1 = \sup\{\beta \in [0, \infty) : \gamma_1(\beta) < \ln \frac{1}{\pi_d}\}$$

$$\beta_c^2 = \inf\{\beta \in [0, \infty) : \gamma_2(\beta) > \ln(2d)\},$$

poderá ocorrer que $\beta_c^1 < \beta_c^2$. No entanto, Comets e Yoshida [6] mostram que, em $\mathbb{Z}^d$,

Teorema 1.4 (Transição de fase em $\mathbb{Z}^d$) *Existe um valor crítico $\beta_c = \beta_c(d) \in [0, \infty)$ com*

$$\begin{array}{rl} \beta_c = 0, & \textit{para} \quad d = 1, 2, \\ 0 < \beta_c \leq \infty, & \textit{para} \quad d \geq 3. \end{array}.$$

tal que

$$Q(W_\infty > 0) = 1, \quad \textit{se} \quad \beta \in [0, \beta_c),$$

$$Q(W_\infty = 0) = 1, \quad \textit{se} \quad \beta > \beta_c.$$

Não daremos uma prova deste resultado. A seguir veremos um exemplo onde estudaremos as funções $\gamma_1(\beta)$ e $\gamma_2(\beta)$, sobre o ambiente Bernoulli.

Exemplo 1: Suponha que $d \geq 3$ e consideremos o ambiente Bernoulli, isto é,

$$Q(\eta(n,x) = -1) = p > 0 \text{ e } Q(\eta(n,x) = 1) = 1 - p > 0,$$

para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{Z}^d$.

Temos que $E_Q[e^{\beta\eta(n,x)}] = pe^{-\beta} + (1-p)e^{\beta}$. Logo, $\lambda(\beta) = \ln(pe^{-\beta} + (1-p)e^{\beta})$. Assim,

$$\gamma_1(\beta) = \ln(pe^{-2\beta} + (1-p)e^{2\beta}) - 2\ln(pe^{-\beta} + (1-p)e^{\beta})$$

e

$$\gamma_2(\beta) = \beta\frac{[-pe^{-\beta} + (1-p)e^{\beta}]}{pe^{-\beta} + (1-p)e^{\beta}} - \ln e^{\beta}\left(\frac{p}{e^{2\beta}} + (1-p)\right).$$

Calculando,

$$\lim_{\beta\to\infty} \gamma_1(\beta) = \ln\left(\frac{1}{1-p}\right) = \lim_{\beta\to\infty} \gamma_2(\beta) \tag{1.7}$$

Portanto, se $p < 1 - \pi_d$ então, para qualquer $\beta > 0$, temos que $\gamma_1(\beta) < \ln\frac{1}{\pi_d}$, pois $\gamma_1(\beta)$ é crescente. Pelo Teorema 1.2 obtemos que estamos na fase de desordem fraca. Se para algum p a desigualdade $p < 1 - \pi_d$ é válida, então ela será válida para todo $d \geq 3$ visto que $\pi_{d+1} < \pi_d$. Em particular, como $\pi_3 = 0,3405...$, se $p = 1/2$, então temos desordem fraca.

Por (1.7), se $p > 1 - \frac{1}{2d}$ e β é suficientemente grande então temos que $\ln\left(\frac{1}{1-p}\right) > \ln(2d)$. Pelo Teorema 1.3 obtemos que estamos na fase de desordem forte.

Em $\mathbb{T}$, obteremos que esta transição de fase mostra-se no comportamento da energia livre, da seguinte maneira. Consideremos a função partição normalizada, veremos que $E_Q[Z_n(\beta)] = e^{n\lambda(\beta)}$. Agora, observe que

$$\begin{aligned}\frac{1}{n\beta}\log Z_n(\beta) &= \frac{1}{n\beta}\log[e^{n\lambda(\beta)}W_n(\beta)] \\ &= \frac{\lambda(\beta)}{\beta} + \frac{1}{n\beta}\log W_n(\beta).\end{aligned}$$

Se estivermos em desordem fraca, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\beta}\log Z_n(\beta) = \frac{\lambda(\beta)}{\beta} \text{ Q-q.c..} \tag{1.8}$$

Para mostrarmos que existe um valor crítico β_c para a mudança no comportamento de energia livre provaremos o seguinte resultado, obtido por Buffet, Patrick e Pulé [2]. Sua prova será baseada em martingais e argumentos de convexidade.

Teorema 1.5 (Transição de fase da energia livre em $\mathbb{T}$) *Em $\mathbb{T}$, considere a função partição $Z_n(\beta)$, definida em (1.4) e a função $f(\beta) = \frac{\lambda(\beta)}{\beta}$ onde $\lambda(\beta)$ foi definida em* (1.2). *Temos*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\beta n} \log Z_n(\beta) = \begin{cases} f(\beta), & se \quad \beta \leq \beta_c, \\ f(\beta_c), & se \quad \beta > \beta_c. \end{cases}, \quad Q\text{-}q.c. \tag{1.9}$$

onde β_c é o valor que $f'(\beta_c) = 0$. Caso não exista tomemos $\beta_c = \infty$.

Em $\mathbb{Z}^d$, Comets, Shiga e Yoshida em [4] mostram que o limite da energia livre existe Q-q.c e, Comets e Yoshida [6] mostram

Teorema 1.6 (Transição de fase da energia livre em $\mathbb{Z}^d$) *Em $\mathbb{Z}^d$, considere a função $f(\beta) = \frac{\lambda(\beta)}{\beta}$ onde $\lambda(\beta)$ foi definida em* (1.2). *Existe $\beta_c^\lambda = \beta_c^\lambda(d)$ com $\beta_c \leq \beta_c^\lambda \leq \infty$, tal que*

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\beta} E_Q[\log Z_n(\beta)] \begin{cases} = \frac{\lambda(\beta)}{\beta}, & se \quad \beta \leq \beta_c^\lambda, \\ < \frac{\lambda(\beta)}{\beta}, & se \quad \beta > \beta_c^\lambda. \end{cases}, \tag{1.10}$$

onde β_c é o valor crítico que existe pelo Teorema da Transição de fase em $\mathbb{Z}^d$.

Não demonstraremos este resultado.

Observação: Seria natural esperar que, assim como em $\mathbb{T}$, em $\mathbb{Z}^d$ tivéssemos $\beta_c = \beta_c^\lambda$, isto é, que não existisse uma fase intermediaria. Contudo, este é um problema ainda em aberto.

1.3 Comportamento assintótico do polímero orientado

Seja $\{\omega_n\}_{n\geq 0}$ um passeio aleatório simples em $\mathbb{Z}^d$, sabemos que

$$\max_{x\in\mathbb{Z}^d} P(\omega_n = x) = O(n^{-d/2}), \tag{1.11}$$

quando $n \nearrow \infty$. Além disso, o passeio aleatório simples apresenta um comportamento difusivo, isto é,

$$E_P[|\omega_n|^2] = n. \tag{1.12}$$

Neste momento queremos saber se o polímero orientado mantém este comportamento quando estamos em um ambiente aleatório. Esperamos que na fase de desordem fraca o polímero tenha um comportamento assintótico como em (1.11) e que em desordem forte o mesmo não aconteça. Para tanto, provaremos os seguintes resultados.

Teorema 1.7 (Comportamento deslocalizado e difusivo) *Em* $\mathbb{Z}^d$, *suponha que* $\gamma_1(\beta) < \ln(1/\pi_d)$ *seja válida, onde* $\gamma_1(\beta)$ *foi definida em (1.6). Então, se* $d \geq 3$,

$$\sum_{n\geq 1} \max_{x\in\mathbb{Z}^d} \mu_{n-1}(\omega_n = x)^2 < \infty, \ \ Q\text{-}q.c. \tag{1.13}$$

e assim,

$$\lim_{n\nearrow\infty} \max_{x\in\mathbb{Z}^d} \mu_{n-1}(\omega_n = x) = 0, \ \ Q\text{-}q.c..$$

Além disso,

$$\lim_{n\nearrow\infty} \frac{E_{\mu_n}[|\omega_n|^2]}{n} = 1, \quad Q\text{-}q.c.. \tag{1.14}$$

Veremos na demonstração deste teorema que na hipótese de desordem fraca, (1.13) é válida. Diremos, quando (1.13) é válida, que o polímero orientado é **deslocalizado**, observe que neste caso o mesmo tem o comportamento parecido com um passeio aleatório simples. Estudaremos o comportamento do desvio quadrático médio, para obtermos (1.14), neste caso diremos que o polímero é **difusivo**, onde também podemos observar um comportamento parecido com o passeio aleatório simples. O primeiro resultado rigoroso sobre este comportamento assintótico é devido a Imbrie e Spencer [7], e depois Bolthausen [1] com a técnica de martingais.

Já nas mesmas condições do Teorema 1.3, iremos mostrar que o polímero é não-difusivo. Este é o resultado do nosso próximo teorema, a prova deste foi obtida para ambiente Gaussiano por Carmona e Hu [3], e então para ambiente quaisquer por Coments, Shiga e Yoshida [4] .

Teorema 1.8 (Comportamento localizado) *Em* $\mathbb{Z}^d$, *suponha que*
(i) $d = 1, 2$ *e* $\beta \neq 0$ *ou*
(ii) $d \geq 1$ *e*

$$\gamma_2(\beta) \equiv \beta\lambda'(\beta) - \lambda(\beta) > \ln(2d). \tag{1.15}$$

Então, existe uma constante $c = c(d,\beta) > 0$ *tal que*

$$\overline{\lim}_{n\nearrow\infty} \max_{x\in\mathbb{Z}^d} \mu_{n-1}(\omega_n = x) \geq c, \ \ Q\text{-}q.c.. \tag{1.16}$$

Diremos, quando (1.16) é válida que o polímero é **localizado**, ou que (ω_n) está concentrado em torno de alguns locais mais favoráveis. Faremos a prova apenas do item **(ii)**. Para a prova do item **(i)**, o leitor poderá consultar [4].

Veremos uma aplicação destes teoremas, onde vamos considerar o ambiente Bernoulli definido no exemplo 1.

Exemplo 2: Suponha que $d \geq 3$ e consideremos o ambiente Bernoulli. Pelo Exemplo 1, temos que se $p < 1 - \pi_d$, então para qualquer $\beta > 0$, $\gamma_1(\beta) < \ln \frac{1}{\pi_d}$, pelo Teorema (1.7) obtemos que para qualquer $\beta > 0$, temos que

$$\lim_{n\nearrow\infty} \frac{E_{\mu_n}[|\omega_n|^2]}{n} = 1 \text{ Q.q.c..}$$

Em particular, se $p = 1/2$ temos que, para quase toda realização do ambiente η, o nosso polímero orientado é difusivo.

Pelo Exemplo 1, se $p > 1 - \frac{1}{2d}$, então $\ln\left(\frac{1}{(1-p)}\right) > \ln(2d)$. Portanto, para β suficientemente grande temos que

$$\overline{\lim}_{n \nearrow \infty} \max_{x \in \mathbb{Z}^d} \mu_{n-1}\{\omega_n = x\} \geq c, \text{ Q-q.c.},$$

isto é, obtemos que o polímero tem o comportamento localizado.

Esta dissertação é composta de três capítulos, além desta introdução. Descreveremos abaixo, de maneira resumida, a proposta de cada capítulo.

No Capítulo 2, inicialmente daremos, de maneira sucinta, alguns resultados gerais sobre martingais, em seguida definiremos um martingal através do qual obteremos as caracterizações das fases de desordem fraca e forte. Provaremos o Teorema 1.1 e por fim, analisaremos algumas propriedades deste martingal em $\mathbb{T}$ e em $\mathbb{Z}^d$.

O Capítulo 3 está dividido em duas seções: Na primeira seção, estudaremos o comportamento do polímero orientado sobre $\mathbb{Z}^d$, provaremos o Teorema da Desordem fraca e o Teorema do Comportamento deslocalizado e difusivo. Na outra seção, estudaremos a transição de fase que se obtém do comportamento da energia livre do polímero orientado sobre a árvore de Cayley. Daremos então a demonstração do Teorema da transição de fase da energia livre em $\mathbb{T}$.

No Capítulo 4, utilizando o método do momento fracionário, provaremos o Teorema da Desordem forte e estudaremos o comportamento do polímero orientado sobre $\mathbb{Z}^d$, provando o Teorema do Comportamento localizado.

2

Análise de Martingais

Neste capítulo, inicialmente, enunciaremos alguns resultados gerais de martingais. Depois, mostramos que a função partição normalizada W_n é um martingal uniformemente integrável. E por fim, mostraremos resultados análogos para a sequência M_n, a ser definida, que serão usados para estudar a difusividade do polímero orientado na fase de desordem fraca.

2.1 Alguns resultados de martingais

Nesta seção será apresentada, de maneira sucinta, uma revisão da teoria de martingais, enunciaremos alguns resultados fundamentais que serão úteis no transcorrer do texto. Os mesmos não serão, aqui, demonstrados, mas o leitor pode encontrar um estudo, que será mais completo, nas seguintes referências [8] e [9].

Seja $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ um dado espaço de probabilidade, e seja $(\mathcal{F}_n)$ uma família de σ-álgebras $\mathcal{F}_n$, $n \geq 0$, tal que $\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_1 \subseteq ... \subseteq \mathcal{F}$. Seja (X_n) uma sequência de variáveis aleatórias definidas em $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P})$ com $X_n \in \mathcal{F}_n$ para todo n, diremos que $X = (X_n, \mathcal{F}_n), n \geq 0$ é uma sequência estocástica.

Definição 2.1 *Seja $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ uma sequência estocástica. Diremos que X é um martingal se*

(i) $E_P[|X_n|] < \infty$,
(ii) $E_P(X_{n+1}|\mathcal{F}_n) = X_n$ *para todo* $n \in \mathbb{N}$.

Diremos que X é um super-martingal ou sub-martingal, se na condição (ii), o sinal de $=$ for trocado por $\leq$ ou $\geq$, respectivamente.

Teorema 2.1 *Seja X um super-martingal positivo. Então*

$$\lim_{n\to\infty} X_n := X_\infty$$

existe q.c..

Teorema 2.2 *Se X é um martingal e $X_n^* = \max_{0\leq m\leq n} |X_m|$, Então para $1 < p < \infty$,*

$$E|X_n^*|^p \leq \left(\frac{p}{p-1}\right)^p E(|X_n|^p).$$

Teorema 2.3 *Seja X um martingal uniformemente integrável. Então*

$$\lim_{n\to\infty} X_n \equiv X_\infty$$

existe q.c. e em L^1.

Diremos que a sequência estocástica $X = (X_n, \mathcal{F}_n)$ é previsível se, para cada $n \geq 1$, a variável aleatória $X_n \in \mathcal{F}_{n-1}$, tomamos $\mathcal{F}_{-1} = \mathcal{F}_0$

Teorema 2.4 (Decomposição de Doob) *Consideremos o sub-martingal X. Então podemos escrever X de modo único como*

$$X_n = N_n + A_n,$$

onde N_n é um martingal e A_n é uma sequência crescente previsível, chamada compensador, com $A_0 = 0$, tal que

$$\Delta A_n = E_Q[\Delta X_n | \mathcal{G}].$$

Denotaremos $\Delta B_n = B_n - B_{n-1}$ para qualquer sequência B_n.

Corolário 2.1 *Seja X um martingal em L^2 com $X_0 = 0$. Então X^2 é um sub-martingal. Segue decomposição de Doob que podemos escrever*

$$X_n^2 = N_n + \langle X_n \rangle$$

onde N_n é um martingal e $\langle X_n \rangle$ é o compensador.

Para os próximos dois teoremas, considere X_n um martingal em L^2 e $\langle X_n \rangle$ o compensador de X_n^2. Definimos $\langle X_n \rangle_\infty \equiv \lim\limits_{n\nearrow\infty} \langle X_n \rangle$.

Teorema 2.5 *Seja X um martingal em L^2 com $X_0 = 0$. Então o $\lim_{n\nearrow\infty} X_n$ existe e é finito sobre $\{\langle X_n \rangle_\infty < \infty\}$.*

Teorema 2.6 *Seja f uma função crescente tal que $f \geq 1$ e $\int_0^\infty f(t)^{-2}dt < \infty$. Então $\frac{X_n}{f(\langle N \rangle_n)} \to 0$ q.c. sobre $\{\langle X_n \rangle_\infty = \infty\}$.*

2.2 A função partição normalizada

Nesta seção definimos uma sequência estocástica que será de fundamental importância para os resultados que queremos obter. Provaremos que a mesma é um martingal. Veremos nas próximas seções que será possível relacioná-la com os objetos que estamos interessados em estudar. Esta abordagem, de estudar o polímero orientado utilizando análise de martingal, foi introduzida por Bolthausen [1].

Iniciamos definindo a função partição normalizada por

$$W_n = \frac{Z_n}{E_Q[Z_n]}, \quad n \geq 1. \tag{2.1}$$

Onde Z_n foi definido em (1.4). Consideremos $\Delta = 2d$ para $\mathbb{Z}^d$ ou $\Delta = 2$, para $\mathbb{T}$. Observe que

$$\begin{aligned} E_Q[Z_n] &= E_Q\left[\frac{\sum\limits_{\omega:|\omega|=n} e^{\beta\sum_{j=1}^n \eta(j,w_j)}}{\Delta^n}\right] \\ &= \frac{\sum\limits_{\omega:|\omega|=n} E_Q\left[e^{\beta\sum_{j=1}^n \eta(j,w_j)}\right]}{\Delta^n} \\ &= \frac{\sum\limits_{\omega:|\omega|=n} E_Q\left[\prod_{j=1}^n e^{\beta\eta(j,w_j)}\right]}{\Delta^n}, \end{aligned}$$

como na última igualdade obtemos a esperança do produto de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, temos

$$E_Q[Z_n] = \frac{\sum\limits_{\omega:|\omega|=n} \left(E_Q\left[e^{\beta\eta(n,x)}\right]\right)^n}{\Delta^n}.$$

Agora observe que temos Δ possibilidades para cada passo do passeio aleatório, e estamos fazendo a soma sobre todos os passeios de tamanho n, assim

$$\begin{aligned} E_Q[Z_n] &= \left(E_Q\left[e^{\beta\eta(n,x)}\right]\right)^n \\ &= e^{n\lambda(\beta)}, \end{aligned} \tag{2.2}$$

onde usamos a definição para $\lambda(\beta)$ dada em (1.2).

Assim, como veremos depois, conseguimos um importante processo sobre $(H, \mathcal{G}, Q)$. Seja

$$\mathcal{G}_n := \sigma[\eta(j,x); j \leq n, x \in \mathbb{Z}^d] \tag{2.3}$$

ou

$$\mathcal{G}_n := \sigma[\eta(j,x); j \leq n, 1 \leq x \leq 2^j]$$

sequências crescentes de sub σ-álgebras de $\mathcal{G}$ em $\mathbb{Z}^d$, ou na árvore de Cayley. Para simplificar a notação, vamos considerar durante o transcorrer do texto

$$e(n,x) \equiv \exp(\beta\eta(n,x) - \lambda(\beta)), \tag{2.4}$$

onde omitimos, para simplificar, a dependência de $e(n,x)$ em η.

Lema 2.1 *Considere a sequência estocástica $W = (W_n, \mathcal{G}_n)$ onde W_n foi definida em (2.1), e $\mathcal{G}_n$ logo acima. Então W é um martingal.*

Demonstração: Faremos a prova apenas para o caso $\mathbb{Z}^d$ (para $\mathbb{T}$, a prova segue do mesmo modo). Temos por (2.1) e (2.2) que

$$\begin{aligned} W_n &= \frac{\sum\limits_{\omega:|\omega|=n} e^{\beta\sum_{j=1}^n \eta(j,\omega_j)}}{(2d)^n} \frac{1}{e^{n\lambda(\beta)}} \\ &= \frac{1}{(2d)^n} \sum_{\omega|\omega|=n} e^{\sum_{j=1}^n (\beta\eta(j,\omega_j) - \lambda(\beta))} \\ &= E_P\left[\prod_{j=1}^n e^{(\beta\eta(j,\omega_j)-\lambda(\beta))}\right]. \end{aligned}$$

Pela definição (2.4), temos

$$W_n = E_P[\prod_{j=1}^n e(j,\omega_j)]. \tag{2.5}$$

Primeiramente, observe que $W_n \in L^1$, porque $Z_n \in L^1$, e este último se deve a (1.1).

Provaremos agora que $E_Q[W_{n+1}|\mathcal{G}_n] = W_n$ para todo $n \geq 1$. Por (2.5),

$$\begin{aligned} E_Q[W_{n+1}|\mathcal{G}_n] &= E_Q\left[E_P\left[\prod_{j=1}^{n+1} e(j,\omega_j)\right] |\mathcal{G}_n\right] \\ &= E_Q\left[\left(\sum_{\omega:|\omega|=n+1} \frac{1}{(2d)^{n+1}} \prod_{j=1}^{n+1} e(j,\omega_j)\right) \middle| \mathcal{G}_n\right]. \end{aligned}$$

Como $\prod_{j=1}^n e(j,\omega_j)$ é $\mathcal{G}_n$-mensurável, temos

$$\begin{aligned} E_Q[W_{n+1}|\mathcal{G}_n] &= \sum_{\omega:|\omega|=n+1} \frac{1}{(2d)^{n+1}} \prod_{j=1}^n e(j,\omega_j) E_Q\left[e(n+1,\omega_{n+1})|\mathcal{G}_n\right] \\ &= \sum_{\omega:|\omega|=n+1} \frac{\prod_{j=1}^n e(j,\omega_j)}{(2d)^{n+1}} E_Q[e(n+1,\omega_{n+1})] \end{aligned}$$

onde, para a última igualdade, usamos que a variável aleatória $e(n+1, \omega_{n+1})$ é independente de $\mathcal{G}_n$. Temos que, $E_Q[e(j,\omega_j)] = E_Q[\exp(\beta\eta(j,\omega_j) - \lambda(\beta))] = 1$ e, para cada passo do passeio, temos $(2d)$ escolhas, assim

$$\begin{aligned} E_Q[W_{n+1}|\mathcal{G}_n] &= \sum_{\omega:|\omega|=n+1} \frac{\prod_{j=1}^{n} e(j,\omega_j)}{(2d)^{n+1}} \\ &= \sum_{\omega:|\omega|=n} (2d)\frac{1}{(2d)^{n+1}} \prod_{j=1}^{n} e(j,\omega_j) \\ &= W_n. \end{aligned}$$

$\square$

Pelo Lema 2.1, W é um martingal e, visto que ele é positivo, o Teorema 2.1, garante que o limite

$$\lim_{n\nearrow\infty} W_n := W_\infty$$

existe Q-q.c..

O próximo lema, de fundamental importância, prova que só existem duas possibilidades para o W_∞, que caracteriza as fases de desordem fraca e de desordem forte.

Demonstração do Teorema 1.1: Faremos a prova apenas para o caso $\mathbb{Z}^d$ (para $\mathbb{T}$, a prova segue do mesmo modo).

Considere o evento $\{W_\infty = 0\}$, se mostrarmos que esse evento é mensurável com respeito à σ-álgebra caudal

$$\bigcap_{n\geq 1} \sigma[\eta(j,x); j \geq n, x \in \mathbb{Z}^d],$$

então pela Lei Zero-Um de Kolmogorov, segue que somente $Q(W_\infty > 0) = 1$ ou $Q(W_\infty = 0) = 1$ são possíveis. Em palavras, precisamos mostrar que $\{W_\infty = 0\}$ é invariante pela mudança de um número finito de variáveis aleatórias $\eta(k,x)$.

Por (2.2) temos que

$$\begin{aligned} W_n &= \sum_{\omega:|\omega|=n} \frac{e^{\beta\sum_{j=1}^{n}\eta(j,\omega_j)}}{(2d)^n e^{n\lambda(\beta)}} \\ &= \frac{\sum_{\omega:|\omega|=n} e^{\beta\eta(1,\omega_1)} e^{\beta\sum_{j=2}^{n}\eta(j,\omega_j)}}{(2d)^n e^{n\lambda(\beta)}}. \end{aligned}$$

Agora, observe que temos $2d$ possibilidades para ω_1, isto é, para o primeiro passo do caminho. Denotaremos por $x_i, i \in \{1,2,...,2d\}$ uma dessas escolhas, e por L_{x_i} o conjunto dos caminhos de tamanho n em que $\omega_1 = x_i, i \in \{1,2,...,2d\}$. Então, obtemos

$$W_n = e^{\beta\eta(1,x_1)} \sum_{\omega\in L_{x_1}} \frac{e^{\beta\sum_{j=2}^{n}\eta(j,\omega_j)}}{(2d)^n e^{n\lambda(\beta)}} + \cdots + e^{\beta\eta(1,x_{2d})} \sum_{\omega\in L_{x_{2d}}} \frac{e^{\beta\sum_{j=2}^{n}\eta(j,\omega_j)}}{(2d)^n e^{n\lambda(\beta)}}.$$

Tomando o limite em ambos os lados dessa igualdade, temos

$$\lim_n W_n = \sum_{x_i \in \{1,2,\dots,2d\}} e^{\beta\eta(1,x_i)} \lim_n \sum_{\omega \in L_{x_i}} \frac{e^{\beta \sum_{j=2}^{n} \eta(j,\omega_j)}}{(2d)^n e^{n\lambda(\beta)}},$$

e portanto, vemos que o evento $\{\lim_n W_n = 0\}$ é independente de cada variável aleatória $\eta(1, x_i)$, da mesma maneira podemos ver que o evento é independente de $\eta(k, x)$ para cada k. Logo concluímos que o evento é mensurável com respeito à σ-álgebra caudal. $\square$

2.3 Integrabilidade uniforme de W para $\mathbb{T}$

Nesta seção estudaremos, baseado no artigo Directed polymers on trees: a martingale approach de E. Buffet, A. Patrick e J. V. Pulé, o martingal W sobre a árvore de Cayley. O objetivo principal será provar que W é uniformemente integrável, para isso, provaremos que W é limitado em $L^\alpha, \alpha > 1$. Este resultado será de fundamental importância para provarmos o Teorema 1.5.

Os dois próximos lemas que enunciaremos serão utilizados na demonstração da próxima proposição. As demonstração dos mesmos serão dadas ainda nesta seção.

Lema 2.2 *Seja $W = (W_n, \mathcal{G}_n)$ a sequência estocástica definida em (2.1) sobre a árvore de Cayley. Então*

$$E_Q[W_{n+1}^2(\beta)|\mathcal{G}_n] = W_n^2(\beta) + h(\beta)\left(\frac{e^{\lambda(2\beta)}}{2e^{2\lambda(\beta)}}\right)^n W_n(2\beta),$$

onde $h(\beta)$ é a função não-negativa

$$h(\beta) = \frac{1}{2}[e^{\gamma_1(\beta)} - 1] \quad \textit{com} \quad \gamma_1(\beta) := \lambda(2\beta) - 2\lambda(\beta).$$

Lema 2.3 *Considere a função $q(\beta) = \left(\sum_{j=1}^{n} e^{\beta x_j}\right)^{\frac{1}{\beta}}$, $\beta > 0$. Para quaisquer $x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}$, a função $q(\beta)$ é decrescente.*

Veremos, no próximo resultado, que, sob certas condições, W é limitado em L^α, isto é, $\sup_{n\geq 1} E_Q[W_n^\alpha(\beta)] < \infty$ onde $\alpha > 1$. Logo obtemos que é uniformemente integrável. Pelo Teorema 2.3, temos que ele converge para W_∞ em L^1. Visto que $E_Q[W_n] = 1$, obtemos $E_Q[W_\infty] = 1$. Logo $Q(W_\infty(\beta) = 0) < 1$, mas pelo Lema 1.1 segue que $Q(W_\infty(\beta) = 0) = 0$. Ou seja, com este resultado, iremos obter condições suficientes para termos desordem fraca sobre a árvore de Cayley.

Proposição 2.1 *Seja* $f(\beta) = \frac{\lambda(\beta)}{\beta}$*. Então para cada* $\beta > 0$ *tal que* $f'(\beta) < 0$*, existe* $\alpha > 1$ *tal que*

$$\sup_{n\geq 1} E_Q[W_n^\alpha(\beta)] < \infty.$$

Demonstração: Tomemos $1 < \alpha < 2$. Pela desigualdade de Jensen obtemos

$$(E_Q[W_{n+1}^\alpha(\beta)|\mathcal{G}_n])^{\frac{2}{\alpha}} \leq E_Q[W_{n+1}^2(\beta)|\mathcal{G}_n].$$

Usando esta desigualdade e o Lema 2.2 temos

$$\begin{aligned} E_Q[W_{n+1}^\alpha(\beta)|\mathcal{G}_n] &\leq (E_Q[W_{n+1}^2(\beta)|\mathcal{G}_n])^{\frac{\alpha}{2}} \\ &= \left[W_n^2(\beta) + h(\beta)\left(\frac{e^{\lambda(2\beta)}}{2e^{2\lambda(\beta)}}\right)^n W_n(2\beta)\right]^{\frac{\alpha}{2}} \\ &\leq W_n^\alpha(\beta) + h(\beta)^{\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{e^{\lambda(2\beta)}}{2e^{2\lambda(\beta)}}\right)^{\frac{n\alpha}{2}} W_n^{\frac{\alpha}{2}}(2\beta), \qquad (2.6) \end{aligned}$$

onde a última desigualdade decorre do fato: Se $\frac{\alpha}{2} < 1$ então

$$(a+b)^{\frac{\alpha}{2}} \leq a^{\frac{\alpha}{2}} + b^{\frac{\alpha}{2}}, \; a, b > 0.$$

Agora obteremos uma cota superior para $W_n^{\frac{\alpha}{2}}(2\beta)$. Pelo Lema 2.3 e dado que $0 < \alpha\beta < 2\beta$, temos

$$\left(\sum_{\omega:|\omega|=n} e^{2\beta\sum_{j=1}^n \eta(j,\omega_j)}\right)^{\frac{1}{2\beta}} \leq \left(\sum_{\omega:|\omega|=n} e^{\alpha\beta\sum_{j=1}^n \eta(j,\omega_j)}\right)^{\frac{1}{\alpha\beta}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} W_n^{\frac{\alpha}{2}}(2\beta) &= \frac{\left(\sum_{\omega:|\omega|=n} e^{2\beta\sum_{j=1}^n \eta(j,\omega_j)}\right)^{\frac{\alpha}{2}}}{(2^n E_Q[Z_n(2\beta)])^{\alpha/2}} \\ &\leq \frac{\left(\sum_{\omega:|\omega|=n} e^{\alpha\beta\sum_{j=1}^n \eta(j,\omega_j)}\right)}{2^n E_Q[Z_n(\alpha\beta)]}\frac{2^n E_Q[Z_n(\alpha\beta)]}{(2^n E_Q[Z_n(2\beta)])^{\alpha/2}}. \end{aligned}$$

Lembrando que, $E_Q[Z_n(\beta)] = (E_Q[e^{\beta\eta(n,x)}])^n = e^{n\lambda(\beta)}$. Concluímos

$$W_n^{\frac{\alpha}{2}}(2\beta) \leq W_n(\alpha\beta)\left[\frac{2e^{\lambda(\alpha\beta)}}{(2e^{\lambda(2\beta)})^{\frac{\alpha}{2}}}\right]^n.$$

Assim, substituindo essa cota superior para $W_n^{\frac{\alpha}{2}}(2\beta)$ em (2.6), obtemos

$$\begin{aligned} E_Q[W_{n+1}^{\alpha}(\beta)|\mathcal{G}_n] &\leq W_n^{\alpha}(\beta) + h(\beta)^{\frac{\alpha}{2}} \left(\frac{e^{\lambda(2\beta)}}{2e^{2\lambda(\beta)}}\right)^{\frac{n\alpha}{2}} \left[\frac{2e^{\lambda(\alpha\beta)}}{(2e^{\lambda(2\beta)})^{\frac{\alpha}{2}}}\right]^n W_n(\alpha\beta) \\ &= W_n^{\alpha}(\beta) + h(\beta)^{\frac{\alpha}{2}} \left[\frac{2e^{\lambda(\alpha\beta)}}{(2e^{\lambda(\beta)})^{\alpha}}\right]^n W_n(\alpha\beta). \end{aligned}$$

Tomando a esperança em ambos os lados, temos

$$E_Q[W_{n+1}^{\alpha}(\beta)] \leq E_Q[W_n^{\alpha}(\beta)] + h(\beta)^{\frac{\alpha}{2}} \left[\frac{2e^{\lambda(\alpha\beta)}}{(2e^{\lambda(\beta)})^{\alpha}}\right]^n,$$

pois $E_Q[W_n(\alpha\beta)] = 1$. Agora, somando sobre n, obtemos

$$\sum_{n=1}^{k-1} E_Q[W_{n+1}^{\alpha}(\beta)] \leq \sum_{n=1}^{k-1} E_Q[W_n^{\alpha}(\beta)] + h(\beta)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{n=1}^{k-1} \left[\frac{2e^{\lambda(\alpha\beta)}}{(2e^{\lambda(\beta)})^{\alpha}}\right]^n.$$

Perceba que alguns termos dessa desigualdade se anulam, ou seja,

$$E_Q[W_k^{\alpha}(\beta)] \leq E_Q[W_1^{\alpha}(\beta)] + h(\beta)^{\frac{\alpha}{2}} \sum_{n=1}^{k-1} \left[\frac{2e^{\lambda(\alpha\beta)}}{(2e^{\lambda(\beta)})^{\alpha}}\right]^n.$$

Tomando o sup para $k \geq 1$, vemos que

$$\sup_{k\geq 1} E_Q[W_k^{\alpha}(\beta)] < \infty, \text{ quando } \left[\frac{2e^{\lambda(\alpha\beta)}}{(2e^{\lambda(\beta)})^{\alpha}}\right] < 1.$$

Para concluirmos, perceba que

$$\left[\frac{2e^{\lambda(\alpha\beta)}}{(2e^{\lambda(\beta)})^{\alpha}}\right] = 2^{1-\alpha} \exp\{\alpha\beta[f(\alpha\beta) - f(\beta)]\}.$$

Assim, se $f'(\beta) < 0$, f é decrescente em β então existe $\alpha > 1$ tal que $f(\alpha\beta) < f(\beta)$. Portanto, existe $\alpha > 1$ tal que $\left[\frac{2e^{\lambda(\alpha\beta)}}{(2e^{\lambda(\beta)})^{\alpha}}\right] < 1$. $\square$

Faremos agora a prova dos Lemas 2.2 e 2.3.

Demonstração do Lema 2.2: Consideremos a $E_Q[Z_n]$ como definido em (2.2), assim

$$W_{n+1}^2 = \left(\frac{\sum_{\omega} e^{\beta\psi(\omega_{n+1},\eta)}}{2^{n+1}e^{(n+1)\lambda(\beta)}}\right)^2,$$

onde denotamos $\psi_{n+1}(\omega, \eta) := \sum_{j=1}^{n+1} \eta(j, \omega_j)$.

Portanto

$$E_Q[W_{n+1}^2(\beta)|\mathcal{G}_n] = \frac{E_Q\left[\left(\sum_\omega e^{\beta\psi_{n+1}(\omega,\eta)}\right)^2 |\mathcal{G}_n\right]}{(2e^{\lambda(\beta)})^{2(n+1)}}. \tag{2.7}$$

Iremos determinar, primeiramente, uma expressão para o termo $\left(\sum_\omega e^{\beta\psi_{n+1}(\omega,\eta)}\right)^2$. Temos

$$\left(\sum_\omega e^{\beta\psi_{n+1}(\omega,\eta)}\right)^2 = \sum_\omega e^{2\beta\psi_{n+1}(\omega,\eta)} + \sum_{\omega\neq\omega'} e^{\beta\psi_{n+1}(\omega,\eta)} e^{\beta\psi_{n+1}(\omega',\eta)}. \tag{2.8}$$

A parte onde $\omega \neq \omega'$ pode ser escrita da seguinte maneira

$$\sum_{\omega\neq\omega'} e^{\beta\psi_{n+1}(\omega,\eta)} e^{\beta\psi_{n+1}(\omega',\eta)} = \sum_{\substack{\omega_j=\omega'_j, j\leq n \\ \omega_j\neq\omega'_j, j=n+1}} e^{\beta\psi_{n+1}(\omega,\eta)} e^{\beta\psi_{n+1}(\omega',\eta)} + \sum_{\substack{\exists j\leq n; \\ \omega\neq\omega'}} e^{\beta\psi_{n+1}(\omega,\eta)} e^{\beta\psi_{n+1}(\omega',\eta)}.$$

assim,

$$\left(\sum_\omega e^{\beta\psi_{n+1}(\omega,\eta)}\right)^2 = \sum_\omega e^{2\beta\psi_{n+1}(\omega,\eta)} + \sum_{\substack{\omega_j=\omega'_j, j\leq n \\ \omega_j\neq\omega'_j, j=n+1}} e^{\beta\psi_{n+1}(\omega,\eta)} e^{\beta\psi_{n+1}(\omega',\eta)} + \sum_{\substack{\exists j\leq n; \\ \omega\neq\omega'}} e^{\beta\psi_{n+1}(\omega,\eta)} e^{\beta\psi_{n+1}(\omega',\eta)}.$$

Agora, tomando a esperança condicional em ambos os lados da igualdade, temos

$$\begin{aligned} E_Q\left[\left(\sum_\omega \exp\{\beta\psi_{n+1}(\omega,\eta)\}\right)^2 \middle| \mathcal{G}_n\right] &= E_Q\left[\sum_\omega \exp\{2\beta\psi_{n+1}(\omega,\eta)\}\middle|\mathcal{G}_n\right] \\ &+ E_Q\left[\sum_{\substack{\omega_j=\omega'_j, j\leq n \\ \omega_j\neq\omega'_j, j=n+1}} \exp\{2\beta\psi_n(\omega,\eta) + \beta\eta(n+1,\omega_{n+1}) + \beta\eta(n+1,\omega'_{n+1})\}\middle|\mathcal{G}_n\right] \\ &+ E_Q\left[\sum_{\substack{\exists j\leq n; \\ \omega\neq\omega'}} \exp\{\beta\psi_n(\omega,\eta) + \beta\psi_n(\omega',\eta) + \beta\eta(n+1,\omega_{n+1}) + \beta\eta(n+1,\omega'_{n+1})\}\middle|\mathcal{G}_n\right]. \end{aligned}$$

Como $\omega_{n+1} = 2\omega_n + s_n$ onde $s_n = \{-1, 0\}$ e $e^{\beta\psi(\omega_n,\eta)}$ é o produto de variáveis aleatórias independentes mensuráveis em relação à $\mathcal{G}_n$, a última igualdade pode ser reescrita da seguinte maneira

$$E_Q\left[\left(\sum_\omega \exp\{\beta\psi_{n+1}(\omega,\eta)\}\right)^2 \middle| \mathcal{G}_n\right] = \sum_\omega \exp\{2\beta\psi_n(\omega,\eta)\} E_Q\left[\sum_{s_n=-1,0} \exp\{2\beta\eta(n, 2\omega_n + s_n)\}\right]$$

$$
\begin{aligned}
&+ \sum_{\omega} \exp\{2\beta\psi_n(\omega,\eta)\} E_Q[2\exp\{\beta\eta(n,2\omega_n-1)+\beta\eta(n,2\omega_n)\}] \\
&+ \sum_{\substack{\exists j\le n;\\ \omega\neq\omega'}} \exp\{\beta\psi_n(\omega,\eta)+\beta\psi_n(\omega',\eta)\} \\
&\quad E_Q\left[\sum_{s_n=-1,0} \exp\{\beta\eta(n,2\omega_n+s_n)+\beta\eta(n,2\omega'_n+s_n)\}\right].
\end{aligned}
$$

Para cada ω fixado, temos que as variáveis aleatórias $e^{\beta\eta(n,\omega_n)}$ são independentes, usando isso obtemos

$$
\begin{aligned}
E_Q\left[\left(\sum_{\omega}\exp\{\beta\psi_{n+1}(\omega,\eta)\}\right)^2 \middle| \mathcal{G}_n\right] &= 2\exp\{\lambda(2\beta)\}\sum_{\omega}\exp\{2\beta\psi_n(\omega,\eta)\} \\
&+ 2\exp\{2\lambda(\beta)\}\sum_{\omega}\exp\{2\beta\psi_n(\omega,\eta)\} \\
&+ 4\exp\{2\lambda(\beta)\}\sum_{\substack{\exists j\le n;\\ \omega\neq\omega'}}\exp\{\beta\psi_n(\omega,\eta)+\beta\psi_n(\omega',\eta)\}.
\end{aligned} \tag{2.9}
$$

Como

$$
\left(\sum_{\omega} e^{\beta\psi_n(\omega,\eta)}\right)^2 = \sum_{\omega} e^{2\beta\psi_n(\omega,\eta)} + \sum_{\omega\neq\omega'} e^{\beta\psi_n(\omega,\eta)} e^{\beta\psi_n(\omega',\eta)}.
$$

Reescrevemos a equação (2.9) e obtemos

$$
\begin{aligned}
E_Q\left[\left(\sum_{\omega}\exp\{\beta\psi_{n+1}(\omega,\eta)\}\right)^2 |\mathcal{G}_n\right] &= 2\exp\{\lambda(2\beta)\}\sum_{\omega}\exp\{2\beta\psi_n(\omega,\eta)\} \\
&- 2\exp\{2\lambda(\beta)\}\sum_{\omega}\exp\{2\beta\psi_n(\omega,\eta)\} \\
&+ 4\exp\{2\lambda(\beta)\}\left(\sum_{\omega} e^{\beta\psi_n(\omega,\eta)}\right)^2.
\end{aligned}
$$

Como queremos obter (2.7), dividimos ambos os lados da última equação por $(2e^{\lambda(\beta)})^{2(n+1)}$, logo

$$
\begin{aligned}
E_Q\left[\left(\sum_{\omega}\exp\{\beta\psi_{n+1}(\omega,\eta)\}\right)^2 |\mathcal{G}_n\right] &= \frac{2\exp\{\lambda(2\beta)\}}{(2e^{\lambda(\beta)})^{2(n+1)}}\sum_{\omega}\exp\{2\beta\psi_n(\omega_n,\eta)\} \\
&- \frac{2\exp\{2\lambda(\beta)\}}{(2e^{\lambda(\beta)})^{2(n+1)}}\sum_{\omega}\exp\{2\beta\psi_n(\omega,\eta)\} \\
&+ \frac{4\exp\{2\lambda(\beta)\}}{(2e^{\lambda(\beta)})^{2(n+1)}}\left(\sum_{\omega} e^{\beta\psi_n(\omega,\eta)}\right)^2.
\end{aligned}
$$

Para concluirmos, perceba que

$$W_n(2\beta) = \frac{\sum_\omega e^{2\beta\psi_n(\omega,\eta)}}{(2e^{\lambda(2\beta)})^n} \text{ e } W_n^2(\beta) = \frac{\left(\sum_\omega \exp\{\beta\psi_n(\omega,\eta)\}\right)^2}{(2e^{\lambda(\beta)})^{2n}}.$$

Logo,

$$\begin{aligned}
E_Q\left[\left(\sum_\omega \exp\{\beta\psi_{n+1}(\omega,\eta)\}\right)^2 |\mathcal{G}_n\right] &= \left[\frac{2(e^{\lambda(2\beta)} - e^{2\lambda(\beta)})}{(2e^{\lambda(\beta)})^{2(n+1)}}\right] \sum_\omega \exp\{2\beta\psi_n(\omega,\eta)\} + W_n^2(\beta) \\
&= \left[\frac{2(e^{\lambda(2\beta)} - e^{2\lambda(\beta)})}{(2e^{\lambda(\beta)})^{2(n+1)}}\right] e^{n\lambda(2\beta)} W_n(2\beta) + W_n^2(\beta) \\
&= \frac{1}{2}\left[\frac{e^{\lambda(2\beta)} - e^{2\lambda(\beta)}}{e^{2\lambda(\beta)}}\right]\left[\frac{e^{\lambda(2\beta)}}{2e^{2\lambda(\beta)}}\right]^n W_n(2\beta) + W_n^2(\beta).
\end{aligned}$$

$\square$

Demonstração do Lema 2.3:

Mostraremos que se $\beta \leq \beta'$ então $q(\beta') \leq q(\beta)$. Temos

$$e^{\beta x_j} \leq \sum_{k=1}^n e^{\beta x_k},$$

então

$$\frac{e^{\beta x_j}}{\sum_{k=1}^n e^{\beta x_k}} \leq 1.$$

Como $\beta \leq \beta'$ obtemos $\frac{\beta'}{\beta} \geq 1$. Assim

$$\left(\frac{e^{\beta x_j}}{\sum_{k=1}^n e^{\beta x_k}}\right)^{\frac{\beta'}{\beta}} \leq \frac{e^{\beta x_j}}{\sum_{k=1}^n e^{\beta x_k}}.$$

Agora, somando em j temos

$$\sum_{j=1}^n \left(\frac{e^{\beta x_j}}{\sum_{k=1}^n e^{\beta x_k}}\right)^{\frac{\beta'}{\beta}} \leq \sum_{j=1}^n \frac{e^{\beta x_j}}{\sum_{k=1}^n e^{\beta x_k}} = 1.$$

Portanto,

$$\frac{\sum_{j=1}^n \left(e^{\beta x_j}\right)^{\frac{\beta'}{\beta}}}{\left(\sum_{k=1}^n e^{\beta x_k}\right)^{\frac{\beta'}{\beta}}} \leq 1.$$

Daí obtemos

$$\sum_{j=1}^{n} e^{\beta' x_j} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} e^{\beta x_k}\right)^{\frac{\beta'}{\beta}}.$$

Elevando ambos os membros da desigualdade a potência $\frac{1}{\beta'}$ concluímos que

$$\left(\sum_{j=1}^{n} e^{\beta' x_j}\right)^{\frac{1}{\beta'}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} e^{\beta x_k}\right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

$\square$

2.4 Método do segundo momento em $\mathbb{Z}$

Nessa seção, com base no artigo "Probabilistic Analysis of Directed Polymers in a Random Environment:a Review"escrito por Francis Comets, Tokuzo Shiga, and Nobuo Yoshida, determinaremos uma cota superior para o segundo momento do martingal W. Com isso concluiremos que W é limitado em L^2. Já havíamos obtido esse resultado na Seção 2.3 para a árvore de Cayley, aqui, faremos para $\mathbb{Z}^d$. E assim, do mesmo modo, o objetivo será obter desse fato que estamos em desordem fraca.

Também utilizaremos o método do segundo momento para provarmos uma proposição desta seção. A mesma será um passo de fundamental importância na demonstração do Teorema 1.7 na parte que se refere ao comportamento difusivo do polímero orientado. Antes de enunciá-la introduziremos uma sequência estocástica que provaremos ser um martingal. Nessa seção nos restringiremos a $\mathbb{Z}^d$.

Iniciamos definindo a medida de probabilidade $P^{\otimes 2}$ no espaço produto $(\Omega^2, \mathcal{F}^{\otimes 2})$, que será utilizada apenas para facilitar as demonstrações durante essa seção. Podemos pensar nessa medida de probabilidade como a distribuição do par $(\omega, \widetilde{\omega})$, com $\widetilde{\omega} = (\widetilde{\omega}_k)_{k\geq 0}$ uma cópia independente de $\omega = (\omega_k)_{k\geq 0}$. Escreveremos $\chi_{i_1,i_2,\ldots,i_k}$ para a função indicadora do evento

$$\{\omega_{i_1} = \widetilde{\omega}_{i_1}, \omega_{i_2} = \widetilde{\omega}_{i_2}, \ldots, \omega_{i_k} = \widetilde{\omega}_{i_k}\}.$$

O seguinte lema nos dará uma cota superior para a $E_Q[W^2]$ com a qual poderemos obteremos que W é limitado em L^2.

Lema 2.4 *Seja $d \geq 3$ e $\gamma_1(\beta) = \lambda(2\beta) - 2\lambda(\beta) < \ln(1/\pi_d)$. Então*

$$E_Q[W_n^2] \leq C, \textit{ para todo } n \geq 1, \textit{ Q-q.c.},$$

Demonstração: Temos de (2.5) que

$$W_n^2 = \left(E_P \left[\prod_{1 \le j \le n} e(j, \omega_j) \right] \right)^2.$$

Tomando a esperança, em ambos os lados da igualdade, em relação a Q e considerando a medida produto definida acima temos

$$\begin{aligned} E_Q[W_n^2] &= E_Q \left[E_P \left[\prod_{1 \le j \le n} e(j, \omega_j) \right] E_P \left[\prod_{1 \le j \le n} e(j, \omega_j) \right] \right] \\ &= E_Q \left[E_{P^{\otimes 2}} \left[\prod_{1 \le j \le n} e(j, \omega_j) \prod_{1 \le j \le n} e(j, \widetilde{\omega}_j) \right] \right]. \end{aligned}$$

Como o integrando é positivo obtemos

$$\begin{aligned} E_Q[W_n^2] &= E_{P^{\otimes 2}} \left[E_Q \left[\prod_{1 \le j \le n} e(j, \omega_j) \prod_{1 \le j \le n} e(j, \widetilde{\omega}_j) \right] \right] \\ &= E_{P^{\otimes 2}} \left[\prod_{1 \le j \le n} E_Q \left[e(j, \omega_j) e(j, \widetilde{\omega}_j) \right] \right], \end{aligned}$$

onde para a última igualdade usamos que as variáveis aleatórias $e(j, \omega_j)$ são independentes em j para ω fixo. Observe os seguintes fatos:

$$E_Q[e(j, \omega_j) e(j, \widetilde{\omega}_j)] = E_Q[e^{\beta(\eta(j,\omega_j) + \eta(j, \widetilde{\omega}_j)) - 2\lambda(\beta)}],$$

pela definição (2.4) e

$$E_Q[e^{\beta(\eta(j,\omega_j) + \eta(j, \widetilde{\omega}_j)) - 2\lambda(\beta)}] = \begin{cases} E_Q[e^{2\beta\eta(j,\omega_j) - 2\lambda(\beta)}], & \text{se} \quad \omega_j = \widetilde{\omega}_j; \\ 1 = \frac{E_Q[e^{\beta\eta(j,\omega_j)} e^{\beta\eta(j,\widetilde{\omega}_j)}]}{E_Q[e^{\beta\eta(j,\omega_j)}]^2}, & \text{se} \quad \omega_j \neq \widetilde{\omega}_j. \end{cases}$$

Assim, podemos escrever

$$E_Q[e(j, \omega_j) e(j, \widetilde{\omega}_j)] = (1 + E_Q[e^{2\beta\eta(j,\omega_j) - 2\lambda(\beta)} - 1]\chi_j).$$

Obtemos então

$$\begin{aligned} \prod_{1 \le j \le n} E_Q \left[e(j, \omega_j) e(j, \widetilde{\omega}_j) \right] &= \prod_{1 \le j \le n} (1 + E_Q[e^{2\beta\eta(j,\omega_j) - 2\lambda(\beta)} - 1]\chi_j) \\ &= \prod_{1 \le j \le n} [1 + (e^{\gamma_1(\beta)} - 1)\chi_j] \\ &= 1 + \left(\sum_{1 \le k \le n} (e^{\gamma_1(\beta)} - 1)^k \sum_{1 \le i_1 < \ldots < i_k \le n} \chi_{i_1, i_2, \ldots, i_k} \right). \qquad (2.10) \end{aligned}$$

Agora, retornando ao cálculo da $E_Q[W_n^2]$ e usando o obtido acima temos

$$\begin{aligned} E_Q[M_n^2] &= E_{P^{\otimes 2}}\left[1+\sum_{1\le k\le n}(e^{\gamma_1(\beta)}-1)^k \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}\chi_{i_1,i_2,\ldots,i_k}\right] \\ &= 1+\sum_{1\le k\le n}(e^{\gamma_1(\beta)}-1)^k \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} E_{P^{\otimes 2}}[\chi_{i_1,i_2,\ldots,i_k}]. \end{aligned}$$

Iremos agora encontrar uma cota superior para $\sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} E_{P^{\otimes 2}}[\chi_{i_1,i_2,\ldots,i_k}]$. Para isso, primeiramente vamos fixar $i_1, i_2, \ldots, i_k$, e calcular $E_{P^{\otimes 2}}[\chi_{i_1,i_2,\ldots,i_k}]$. Usando a definição de probabilidade condicional e a propriedade de Markov temos

$$\begin{aligned} E_{P^{\otimes 2}}[\chi_{i_1,i_2,\ldots,i_k}] &= E_{P^{\otimes 2}}[\chi_{i_2,i_3,\ldots,i_k}|\omega_{i_1}=\widetilde{\omega}_{i_1}]E_{P^{\otimes 2}}[\chi_{i_1}] \\ &= E_{P^{\otimes 2}}[\chi_{i_2-i_1,i_3-i_1,\ldots,i_k-i_1}]E_{P^{\otimes 2}}[\chi_{i_1}]. \end{aligned}$$

Assim, fazemos o mesmo procedimento acima, até obtermos

$$\begin{aligned} E_{P^{\otimes 2}}[\chi_{i_1,i_2,\ldots,i_k}] &= E_{P^{\otimes 2}}[\chi_{i_k-i_{k-2}}|\omega_{i_{k-1}-i_{k-2}}=\widetilde{\omega}_{i_{k-1}-i_{k-2}}]E_{P^{\otimes 2}}[\chi_{i_1}]E_{P^{\otimes 2}}[\chi_{i_2-i_1}]\ldots E_{P^{\otimes 2}}[\chi_{i_{k-1}-i_{k-2}}] \\ &= E_{P^{\otimes 2}}[\chi_{i_k-i_{k-1}}]E_{P^{\otimes 2}}[\chi_{i_1}]E_{P^{\otimes 2}}[\chi_{i_2-i_1}]\ldots E_{P^{\otimes 2}}[\chi_{i_{k-1}-i_{k-2}}]. \end{aligned}$$

Isto é,

$$E_{P^{\otimes 2}}[\chi_{i_1,i_2,\ldots,i_k}] = \prod_{m=1}^{k} E_{P^{\otimes 2}}[\chi_{i_m-i_{m-1}}],$$

com $i_0=0$. Portanto,

$$\begin{aligned} \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} E_{P^{\otimes 2}}[\chi_{i_1,i_2,\ldots,i_k}] &= \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}\prod_{m=1}^{k} E_{P^{\otimes 2}}[\chi_{i_m-i_{m-1}}] \\ &\le \sum_{1\le i_1\le n}\sum_{1\le i_2-i_1\le n}\cdots\sum_{1\le i_k-i_{k-1}\le n}\prod_{m=1}^{k} E_{P^{\otimes 2}}[\chi_{i_m-i_{m-1}}]. \end{aligned}$$

Observe que $\sum_{j\ge 1} E_{P^{\otimes 2}}[\chi_j] = \frac{\pi_d}{1-\pi_d}$. Assim, obtemos

$$E_Q[W_n^2] \le 1+\sum_{k\ge 1}(\exp^{\gamma_1(\beta)}-1)^k\left(\frac{\pi_d}{1-\pi_d}\right)^k,$$

isto é,

$$E_Q[W_n^2] \le 1+C,$$

dado que, por hipótese, $\gamma_1(\beta) < \ln(1/\pi_d)$. $\square$

Se tivermos $E_Q[W_n^2] \le C$ então, $\sup\limits_{n\ge 1} E_Q[W_n^2] < \infty$. Assim, temos que W é limitado em L^2. Usando o Teorema de Convergência de Martingal limitados em L^2 obtemos

$$\lim_{n\nearrow\infty} W_n \ \text{ existe Q-q.c. e em } L^2(Q).$$

Assim, temos a seguinte proposição

Proposição 2.2 *Considere o martingal W definido em (2.1). Suponha que $d \geq 3$ e $\gamma_1(\beta) < \ln(1/\pi_d)$. Então*

$$\lim_{n \nearrow \infty} W_n \quad \text{existe } Q\text{-q.c. e em } L^2(Q).$$

Consideremos a sequência estocástica $M = (M_n, \mathcal{G}_n)$ em $(H, \mathcal{G}, Q)$, definida por

$$M_n = E_P[\varphi(n, \omega_n) e_{1,n}], \tag{2.11}$$

onde denotamos

$$e_{1,n}(\omega, \eta) := \prod_{1 \leq j \leq n} e(j, \omega_j), \tag{2.12}$$

(usaremos apenas $e_{1,n}$ para simplificar a notação) e a função $\varphi : \mathbb{N} \times \mathbb{Z}^d \to \mathbb{R}$ definida por

$$\varphi(n, x) = |x|^2 - n.$$

Iremos agora mostrar que esta sequência estocástica é um martingal, depois provaremos algumas propriedades sobre este martingal e utilizaremos estes resultados para provarmos o Teorema do Comportamento difusivo e deslocalizado.

Lema 2.5 *Considere a sequência estocástica M definida em (2.11). Então M é um martingal.*

Demonstração: Iremos mostrar que $E_Q[M_{n+1}|\mathcal{G}_n] = M_n$. O fato que $E_Q[M_n] < \infty$, é de fácil verificação. Temos que

$$\begin{aligned}
E_Q[M_{n+1}|\mathcal{G}_n] &= E_Q[E_P[\varphi(n+1, \omega_{n+1}) e_{1,n+1}]|\mathcal{G}_n] \\
&= E_Q\left[\sum_{\omega:|\omega|=n+1} \frac{1}{(2d)^{n+1}} [\varphi(n+1, \omega_{n+1}) e_{1,n+1}] \middle| \mathcal{G}_n \right] \\
&= \sum_{\omega:|\omega|=n+1} \frac{1}{(2d)^{n+1}} E_Q[\varphi(n+1, \omega_{n+1}) e_{1,n+1}|\mathcal{G}_n]
\end{aligned}$$

onde usamos para a primeira igualdade a definição de M_n e, para a última igualdade, o fato da soma sobre ω ser finita. Agora, utilizando que, para cada ω fixado, $\varphi(n+1, \omega_{n+1})$ é independente de $\mathcal{G}_n$, temos que

$$E_Q[M_{n+1}|\mathcal{G}_n] = \sum_{\omega:|\omega|=n+1} \frac{1}{(2d)^{n+1}} \varphi(n+1, \omega_{n+1}) E_Q[e_{1,n+1}|\mathcal{G}_n].$$

Observe que para qualquer $\omega \in \Omega$ fixado, $e_{1,n+1} = \prod_{j=1}^{n+1} e(j, \omega_j)$ é o produto de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas sobre $(H, \mathcal{G}, Q)$ e que $E_Q[e(n,x)] = 1$, assim

$$\begin{aligned}
E_Q[M_{n+1}|\mathcal{G}_n] &= \sum_{\omega:|\omega|=n+1} \frac{1}{(2d)^{n+1}} \varphi(n+1, \omega_{n+1}) E_Q[e_{1,n+1}|\mathcal{G}_n] \\
&= \sum_{\omega:|\omega|=n+1} \frac{1}{(2d)^{n+1}} \varphi(n+1, \omega_{n+1}) e_{1,n} E_Q[e(n+1, \omega_{n+1})] \\
&= \sum_{\omega:|\omega|=n} \frac{1}{(2d)^{n}} \varphi(n+1, \omega_{n+1}) e_{1,n}
\end{aligned}$$

onde usamos na última igualdade o fato de que para cada passo temos $2d$ opções. Pela propriedade da esperança condicional, obtemos

$$\begin{aligned}
E_P\left[E_P\left[\varphi(n+1, \omega_{n+1}) e_{1,n}|\mathcal{F}_n\right]\right] &= E_P[\varphi(n+1, \omega_{n+1}) e_{1,n}] \\
&= \sum_{\omega:|\omega|=n} \frac{1}{(2d)^{n}} \varphi(n+1, \omega_{n+1}) e_{1,n}
\end{aligned}$$

Por fim, observe que $e_{1,n}$ é independente da σ-álgebra $\mathcal{F}_n$, e, utilizando o fato que $\varphi(n, \omega_n) = |\omega_n|^2 - n, \;\; n \geq 1$ é um martingal em $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ com respeito à sequência crescente de σ-álgebras

$$\mathcal{F}_n = \sigma[\omega_j; j \leq n],$$

obtemos

$$\begin{aligned}
E_Q[M_{n+1}|\mathcal{G}_n] &= E_P[e_{1,n} E_P[\varphi(n+1, \omega_{n+1})|\mathcal{F}_n]] \\
&= E_P[e_{1,n} \varphi(n, \omega_n)] \\
&= M_n.
\end{aligned}$$

$\square$

O lema, que provaremos a seguir, é um passo fundamental para a prova da proposição que é um dos objetivos desta seção.

Lema 2.6 *Seja $d \geq 3$ e $\gamma_1(\beta) = \lambda(2\beta) - 2\lambda(\beta) < \ln(1/\pi_d)$. Então*

$$E_Q[M_n^2] = O(b_n), \text{ quando } n \nearrow \infty, \quad Q\text{-q.c.},$$

onde

$$b_n = \begin{cases} n^{3-\frac{d}{2}}, & se \quad 3 \leq d < 6 \\ \ln n, & se \quad d = 6 \\ 1, & se \quad d > 6 \end{cases} \tag{2.13}$$

Demonstração: Por (2.11) e para simplificar a notação

$$M_n^2 = (E_P[\varphi(n,\omega_n)e_{1,n}])^2 \equiv (E_P[\phi_n e_{1,n}])^2.$$

Tomando a esperança, em ambos os lados da igualdade, em relação a Q e considerando a medida produto definida no inicio da seção temos

$$\begin{aligned} E_Q[M_n^2] &= E_Q[E_P[\phi_n e_{1,n}]E_P[\phi_n e_{1,n}]] \\ &= E_Q[E_{P^{\otimes 2}}[\phi_n(\omega)e_{1,n}(\omega,\eta)\phi_n(\widetilde{\omega})e_{1,n}(\widetilde{\omega},\eta)]]. \end{aligned}$$

Como o integrando é positivo e $\phi_n(\omega)$ é independente de $(H,\mathcal{G},Q)$,obtemos

$$\begin{aligned} E_Q[M_n^2] &= E_{P^{\otimes 2}}[E_Q[\phi_n(\omega)e_{1,n}(\omega,\eta)\phi_n(\widetilde{\omega})e_{1,n}(\widetilde{\omega},\eta)]] \\ &= E_{P^{\otimes 2}}[\phi_n(\omega)\phi_n(\widetilde{\omega})E_Q[e_{1,n}(\omega,\eta)e_{1,n}(\widetilde{\omega},\eta)]]. \end{aligned}$$

Temos, pela definição dada em (2.12)

$$\begin{aligned} E_Q[e_{1,n}(\omega,\eta)e_{1,n}(\widetilde{\omega},\eta)] &= E_Q\left[\prod_{1\le j\le n} e(j,\omega_j) \prod_{1\le j\le n} e(j,\widetilde{\omega}_j)\right] \\ &= \prod_{1\le j\le n} E_Q[e(j,\omega_j)e(j,\widetilde{\omega}_j)] \\ &= \prod_{1\le j\le n} E_Q[e^{\beta(\eta(j,\omega_j)+\eta(j,\widetilde{\omega}_j))-2\lambda(\beta)}], \end{aligned}$$

onde obtemos a última igualdade pela definição dada em (2.4). Do mesmo fato que em (2.10) segue que

$$\begin{aligned} E_Q[e_{1,n}(\omega,\eta)e_{1,n}(\widetilde{\omega},\eta)] &= \prod_{1\le j\le n}(1+E_Q[e^{2\beta(\eta(j,\omega_j))-2\lambda(\beta)}-1]\chi_j) \\ &= 1+\left(\sum_{1\le k\le n}(e^{\gamma_1(\beta)}-1)^k \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}\chi_{i_1,i_2,\ldots,i_k}\right). \end{aligned}$$

Assim, retornando ao cálculo de $E_Q[M_n^2]$ e usando o obtido acima, temos

$$\begin{aligned} E_Q[M_n^2] &= E_{P^{\otimes 2}}\left[\phi_n(\omega)\phi_n(\widetilde{\omega})\left(1+\sum_{1\le k\le n}(e^{\gamma_1(\beta)}-1)^k \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n}\chi_{i_1,i_2,\ldots,i_k}\right)\right] \\ &= E_{P^{\otimes 2}}[\phi_n(\omega)\phi_n(\widetilde{\omega})]+\sum_{1\le k\le n}(e^{\gamma_1(\beta)}-1)^k \sum_{1\le i_1<\ldots<i_k\le n} E_{P^{\otimes 2}}[\phi_{i_k}(\omega)^2\chi_{i_1,i_2,\ldots,i_k}]. \end{aligned}$$

Observe que para a última igualdade usamos o fato que $E_{P^{\otimes 2}}[\phi_n(\omega)\phi_n(\widetilde{\omega})\chi_{i_1,i_2,\ldots,i_k}] = E_{P^{\otimes 2}}[\phi_{i_k}(\omega)^2\chi_{i_1,i_2,\ldots,i_k}]$, pois $\phi_n(\omega)$ é um martingal.

Encontraremos agora uma cota superior para $\sum_{1\leq i_1<\ldots<i_k\leq n} E_{P^{\otimes 2}}[\phi_{i_k}(\omega)^2\chi_{i_1,i_2,\ldots,i_k}]$. Para isso, fixemos $i_1, i_2, \ldots, i_k$, por um momento e vamos encontrar uma cota superior para $E_{P^{\otimes 2}}[\phi_{i_k}(\omega)^2\chi_{i_1,i_2,\ldots,i_k}]$. Assim,

$$\begin{aligned} E_{P^{\otimes 2}}[\phi_{i_k}(\omega)^2\chi_{i_1,i_2,\ldots,i_k}] &= E_{P^{\otimes 2}}[(|\omega_{i_k}|^2 - i_k)^2\chi_{i_1,i_2,\ldots,i_k}] \\ &\leq E_{P^{\otimes 2}}[(|\omega_{i_k}|^4 - 2|\omega_{i_k}|^2 i_k + i_k^2)\chi_{i_1,i_2,\ldots,i_k}] \\ &\leq E_{P^{\otimes 2}}[|\omega_{i_k}|^4\chi_{i_1,i_2,\ldots,i_k}] + E_{P^{\otimes 2}}[i_k^2\chi_{i_1,i_2,\ldots,i_k}], \end{aligned}$$

Ainda com $i_1, i_2, \ldots, i_k$ fixados, iremos encontrar uma cota superior para $E_{P^{\otimes 2}}[|\omega_{i_k}|^4\chi_{i_1,i_2,\ldots,i_k}]$. Agora, a fim de obtermos uma cota superior para $E_{P^{\otimes 2}}[i_k^2\chi_{i_1,i_2,\ldots,i_k}]$, será suficiente multiplicar por uma constante a cota obtida para $E_{P^{\otimes 2}}[|\omega_{i_k}|^4\chi_{i_1,i_2,\ldots,i_k}]$. Temos

$$\begin{aligned} E_{P^{\otimes 2}}[|\omega_{i_k}|^4\chi_{i_1,i_2,\ldots,i_k}] &= E_{P^{\otimes 2}}\left[\left(\sum_{1\leq l\leq k}|\omega_{i_l} - \omega_{i_{l-1}}|\right)^4\chi_{i_1,i_2,\ldots,i_k}\right] \\ &\leq k^3\sum_{1\leq l\leq k} E_{P^{\otimes 2}}\left[|\omega_{i_l} - \omega_{i_{l-1}}|^4\chi_{i_1,i_2,\ldots,i_k}\right], \end{aligned} \tag{2.14}$$

onde usamos o fato $\left(\sum_{1\leq l\leq k} a_l\right)^4 \leq k^3\sum_{1\leq l\leq k}(a_l)^4$.

Afirmação 1: Para l fixo, temos

$$E_{P^{\otimes 2}}[|\omega_{i_l} - \omega_{i_{l-1}}|^4\chi_{i_1,i_2,\ldots,i_k}] = \left(\prod_{1\leq m<l} E_{P^{\otimes 2}}[\chi_{j_m}]\right) E_{P^{\otimes 2}}[|\omega_{j_l}|^4\chi_{j_l}]\left(\prod_{l<m\leq k} E_{P^{\otimes 2}}[\chi_{j_m}]\right).$$

De fato,

$$\begin{aligned} E_{P^{\otimes 2}}[|\omega_{i_l} - \omega_{i_{l-1}}|^4\chi_{i_1,i_2,\ldots,i_k}] &= E_{P^{\otimes 2}}[|\omega_{i_l} - \omega_{i_{l-1}}|^4\chi_{i_2,i_3,\ldots,i_k}|\omega_{i_1} = \widetilde{\omega}_{i_1}]E_{P^{\otimes 2}}[\chi_{i_1}] \\ &= E_{P^{\otimes 2}}[|\omega_{i_l-i_1} - \omega_{i_{l-1}-i_1}|^4\chi_{i_2-i_1,i_3-i_1,\ldots,i_k-i_1}]E_{P^{\otimes 2}}[\chi_{i_1}]. \end{aligned}$$

Assim, aplicando novamente as mesmas propriedade na última igualdade obtemos

$$\begin{aligned} &E_{P^{\otimes 2}}[|\omega_{i_l-i_1} - \omega_{i_{l-1}-i_1}|^4\chi_{i_3-i_1,i_4-i_1,\ldots,i_k-i_1}|\omega_{i_2-i_1} = \widetilde{\omega}_{i_2-i_1}]E_{P^{\otimes 2}}[\chi_{i_1}]E_{P^{\otimes 2}}[\chi_{i_2-i_1}] = \\ &\quad = E_{P^{\otimes 2}}[|\omega_{i_l-i_2} - \omega_{i_{l-1}-i_2}|^4\chi_{i_3-i_1,i_4-i_1,\ldots,i_k-i_1}]E_{P^{\otimes 2}}[\chi_{i_1}]E_{P^{\otimes 2}}[\chi_{i_2-i_1}] \end{aligned}$$

Seguindo do mesmo modo e escrevendo $j_l = i_l - i_{l-1}, l = 1, 2, \ldots, k$ com $i_0 = 0$, temos

$$E_{P^{\otimes 2}}[|\omega_{i_l} - \omega_{i_{l-1}}|^4\chi_{i_1,i_2,\ldots,i_k}] = E_{P^{\otimes 2}}[|\omega_{i_l-i_{l-1}}|^4\chi_{i_l-i_{l-1},i_{l+1}-i_{l-1},\ldots,i_k-i_{l-1}}]\prod_{1\leq l<m} E_{P^{\otimes 2}}[\chi_{j_m}].$$

Logo

$$\begin{aligned} E_{P^{\otimes 2}}[|\omega_{i_l} - \omega_{i_{l-1}}|^4\chi_{i_1,i_2,\ldots,i_k}] &= E_{P^{\otimes 2}}[|\omega_{i_l-i_{l-1}}|^4\chi_{i_l-i_{l-1},i_{l+1}-i_{l-1},\ldots,i_k-i_{l-1}}|\omega_{i_l-i_{l-1}} = \widetilde{\omega}_{i_l-i_{l-1}}] \\ &\quad \prod_{1\leq l\leq m} E_{P^{\otimes 2}}[\chi_{j_m}] \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= E_{P^{\otimes 2}}[|\omega_{j_l}|^4\chi_{j_l}|\omega_{i_l-i_{l-1}} = \widetilde{\omega}_{i_l-i_{l-1}}] \\
&\quad E_{P^{\otimes 2}}[\chi_{i_{l+1}-i_{l-1},\dots,i_k-i_{l-1}}|\omega_{i_l-i_{l-1}} = \widetilde{\omega}_{i_l-i_{l-1}}] \prod_{1\le l\le m} E_{P^{\otimes 2}}[\chi_{j_m}] \\
&= \prod_{1\le l<m} E_{P^{\otimes 2}}[\chi_{j_m}] E_{P^{\otimes 2}}[|\omega_{j_l}|^4\chi_{j_l}] \\
&\quad E_{P^{\otimes 2}}[\chi_{i_{l+1}-i_{l-1},\dots,i_k-i_{l-1}}|\omega_{i_l-i_{l-1}} = \widetilde{\omega}_{i_l-i_{l-1}}].
\end{aligned}
$$

Afirmação 2: Para todo $n \geq 1$,

$$E_{P^{\otimes 2}}[|\omega_n|^4\chi_n] \leq cn^{2-d/2}.$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
E_{P^{\otimes 2}}[|\omega_n|^4\chi_n] &= E_{P^{\otimes 2}}[|\omega_n|^4 1_{\{\omega_n=\widetilde{\omega}_n\}}] \\
&= \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} E_{P^{\otimes 2}}[|\omega_n|^4 1_{\{\omega_n=x\}} 1_{\{\widetilde{\omega}_n=x\}}]
\end{aligned}
$$

usando a independência entre ω_n e $\widetilde{\omega}_n$, temos que

$$
\begin{aligned}
E_{P^{\otimes 2}}[|\omega_n|^4\chi_n] &= \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} E_P[|\omega_n|^4 1_{\{\omega_n=x\}}] E_P[1_{\{\widetilde{\omega}_n=x\}}] \\
&= E_P[|\omega_n|^4] P(\widetilde{\omega}_n = x) \\
&\leq cn^{2-d/2}.
\end{aligned}
$$

onde a última desigualdade segue de (1.11) e (1.12).

Assim, retornando ao cálculo de $E_{P^{\otimes 2}}[\phi_{i_k}(\omega)^2\chi_{i_1,i_2,\dots,i_k}]$, em (2.14) e usando as afirmações 1 e 2 temos

$$
\begin{aligned}
E_{P^{\otimes 2}}[\phi_{i_k}(\omega)^2\chi_{i_1,i_2,\dots,i_k}] &\leq k^3 \sum_{1\le l\le k} \left(\prod_{1\le m<l} E_{P^{\otimes 2}}[\chi_{j_m}] \right) E_{P^{\otimes 2}}[|\omega_{j_l}|^4\chi_{j_l}] \left(\prod_{l<m\le k} E_{P^{\otimes 2}}[\chi_{j_m}] \right) \\
&\leq Ck^3 \sum_{1\le l\le k} j_l^{2-\frac{d}{2}} \prod_{\substack{l\le m\le k \\ m\neq l}} E_{P^{\otimes 2}}[\chi_{j_m}],
\end{aligned}
$$

Observe que $\sum_{1\le j\le n} j^{2-\frac{d}{2}} = O(b_n)$ e que $\sum_{j\ge 1} E_{P^{\otimes 2}}[\chi_j] = \frac{\pi_d}{1-\pi_d}$. Portanto, obtemos

$$
\begin{aligned}
\sum_{1\le i_1<\dots<i_k\le n} E_{P^{\otimes 2}}[\phi_{i_k}(\omega)^2\chi_{i_1,i_2,\dots,i_k}] &\leq Ck^3 \sum_{1\le l\le k} \sum_{1\le j_1\le n} \dots \sum_{1\le j_k\le n} j_l^{2-\frac{d}{2}} \prod_{\substack{l\le m\le k \\ m\neq l}} E_{P^{\otimes 2}}[\chi_{j_m}] \\
&\leq O(b_n) k^4 \left(\frac{\pi_d}{1-\pi_d} \right)^{k-1}.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$E_Q[M_n^2] \leq \phi_1^2 + O(b_n) \sum_{k\geq 1} k^4 (e^{\gamma_1(\beta)} - 1)^k \left(\frac{\pi_d}{1-\pi_d} \right)^{k-1}.$$

Como, por hipótese $\gamma_1(\beta) < \ln(1/\pi_d)$, concluímos que o somatório em k converge. $\square$

Proposição 2.3 *Considere o martingal M definido em (2.11). Suponha que $d \geq 3$ e $\gamma_1(\beta) < \ln(1/\pi_d)$. Então existe $\tau \in [0,1)$ tal que*

$$M_n^* := \max_{0\leq j\leq n} |M_j| = O(n^\tau)\ Q - q.c.,\ \textit{quando}\ n \nearrow \infty,$$

isto é, quase certamente existe uma constante $c = c(\eta)$ tal que $M_n^* \leq cn^\tau$.

Demonstração: Considerando b_n como definido em (2.13). Então, podemos notar que será suficiente provarmos que para qualquer $\delta > 0$,

$$M_n^* = O(n^\delta \sqrt{b_n}) \text{ quando } n \nearrow \infty,\ \text{Q-q.c..} \tag{2.15}$$

Agora, visto que M_n^* é uma sequência monótona crescente e $n^\delta\sqrt{b_n}$ tem crescimento polinomial, será suficiente provarmos (2.15) para uma subsequência $\{n^k : n \geq 1\}$ com alguma potência $k \geq 2$, isto é,

$$M_{n^k}^* = O(n^{k\delta} \sqrt{b_{n^k}}) \text{ quando } n \nearrow \infty,\ Q - \text{q.c..} \tag{2.16}$$

De fato, consideremos que (2.16) seja válida, temos que para todo n, existe m tal que $m^k < n < m^{k+1}$, assim

$$\begin{aligned} M_n^* \leq M_{(m+1)^k}^* = O((m+1)^{k\delta}\sqrt{b_{(m+1)^k}}) &= O\left(\frac{(m+1)^{k\delta} n^\delta \sqrt{b_{(m+1)^k}}\sqrt{b_n}}{n^\delta\sqrt{b_n}} \right) \\ &= O(n^\delta\sqrt{b_n}) O\left(\frac{(m+1)^{k\delta}\sqrt{b_{(m+1)^k}}}{n^\delta\sqrt{b_n}} \right) \\ &= O(n^\delta\sqrt{b_n}), \end{aligned}$$

dado que

$$O\left(\frac{(m+1)^{k\delta}\sqrt{b_{(m+1)^k}}}{n^\delta\sqrt{b_n}} \right) = O(1).$$

Logo, iremos mostrar apenas que (2.16) é válida. Tomemos, $k > 1/\delta$. Temos

$$\{M_{n^k}^* > n^{k\delta}\sqrt{b_{n^k}}\} \subset \{M_{n^k}^* > n\sqrt{b_{n^k}}\}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} Q(M_{n^k}^* > n^{k\delta}\sqrt{b_{n^k}}) &\leq Q(M_{n^k}^* > n\sqrt{b_{n^k}}) \\ &\leq \frac{E_Q[(M_{n^k}^*)^2]}{n^2 b_{n^k}}, \end{aligned}$$

onde a última desigualdade se verifica pela desigualdade de Chebychev. Pelo Teorema (2.2) obtemos

$$\frac{E_Q[(M^*_{n^k})^2]}{n^2 b_{n^k}} \leq \frac{4E_Q[M^2_{n^k}]}{n^2 b_{n^k}}.$$

Usando o Lema 2.6 obtemos

$$\begin{aligned} Q(M^*_{n^k} > n^{k\delta}\sqrt{b_{n^k}}) &\leq \frac{4E_Q[M^2_{n^k}]}{n^2 b_{n^k}} \\ &\leq \frac{4Cb_{n^k}}{n^2 b_{n^k}} \\ &= Cn^{-2} \end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q(M^*_{n^k} > n^{k\delta}\sqrt{b_{n^k}}) \leq \sum_{n=1}^{\infty} Cn^{-2} < \infty,$$

portanto, aplicando o Lema de Borel- Cantelli concluímos que

$$Q(M^*_{n^k} > n^{k\delta}\sqrt{b_{n^k}} \text{ infinitas vezes }) = 0.$$

Logo,

$$Q(M^*_{n^k} \leq n^{k\delta}\sqrt{b_{n^k}} \text{ para } n \text{ suficientemente grande }) = 1.$$

E daí, obtemos o desejado. $\square$

Para concluirmos este capítulo, observe que, usando o método do segundo momento, provamos as Proposições 2.2 e 2.3, que serão aplicadas para provarmos os dois teoremas principais da próxima seção. E a Proposição 2.1 obtida para a árvore de Cayley será de fundamental importância para obtermos o Teorema 1.5

3

Desordem fraca

Estaremos interessados em estudar alguns resultados para o comportamento do polímero orientado e para a função de energia livre. Assim, este capítulo está dividido em duas seções: na primeira seção iremos estudar o comportamento do polímero orientado em $\mathbb{Z}^d$. Nesse sentido, provaremos o Teorema do comportamento deslocalizado e difusivo que obteremos quando estamos sob a fase de desordem fraca, isto é, $Q(W_n > 0) = 1$ e usando o método do segundo momento; na outra, nosso interesse será o polímero orientado em $\mathbb{T}$, aqui estudaremos a energia livre, e provaremos o Teorema da transição de fase da energia livre em $\mathbb{T}$, que caracteriza a fase de desordem fraca.

3.1 Comportamento do polímero orientado em $\mathbb{Z}^d$.

Iniciaremos provando o teorema que nos dá condições suficientes para a desordem fraca.

Demonstração do Teorema 1.2(Desordem Fraca): Consideremos o martingal W_n. Pela Proposição 2.2 temos que

$$\lim_{n\nearrow\infty} W_n \text{ existe em } L^2(Q),$$

assim também existe em $L^1(Q)$, isto é,

$$\lim_{n\nearrow\infty} E_Q[W_n] = E_Q[W_\infty].$$

Como $E_Q[W_n] = 1$ então, $Q(W_\infty > 0) > 0$. Agora pelo Lema 1.1 concluímos o desejado. $\square$

Consideremos agora, para $n \geq 1$, em $(H, \mathcal{G}, Q)$ as seguintes variáveis aleatórias

$$I_n = \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \mu_{n-1}(\omega_n = x)^2 \text{ e} \tag{3.1}$$

$$J_n = \max_{x\in\mathbb{Z}^d} \mu_{n-1}(\omega_n = x),$$

temos que

$$\begin{aligned}
\max_{x\in\mathbb{Z}^d} \mu_{n-1}(\omega_n = x)^2 &\leq I_n \\
&\leq \sum_{x\in\mathbb{Z}^d} \mu_{n-1}(\omega_n = x) \max_{x\in\mathbb{Z}^d} \mu_{n-1}(\omega_n = x) \\
&= \max_{x\in\mathbb{Z}^d} \mu_{n-1}(\omega_n = x).
\end{aligned}$$

Logo

$$J_n^2 \leq I_n \leq J_n. \tag{3.2}$$

O lema que iremos enunciar agora será usado na prova do teorema seguinte. Para a demonstração consulte [4].

Lema 3.1 *Seja $e_i, 1 \leq i \leq m$, variáveis aleatórias positivas, independentes, identicamente distribuídas e não constantes sobre $(H, \mathcal{G}, Q)$ tais que*

$$E_Q[e_1] = 1, E_Q[e_1^3 + \ln^2 e_1] < \infty.$$

Para $\{\alpha_i\}_{1\leq i\leq m} \subset [0, \infty)$ tais que $\sum_{1\leq i\leq m} \alpha_i = 1$, defina uma variável aleatória $U > -1$ por $U = \sum_{1\leq i\leq m} \alpha_i e_i - 1$. Então, existe uma constante $c \in (0, \infty)$, que não dependente de $\{\alpha_i\}_{1\leq i\leq m}$ tais que

$$\frac{1}{c} \sum_{1\leq i\leq m} \alpha_i^2 \leq E_Q\left[\frac{U^2}{2+U}\right], \tag{3.3}$$

$$\frac{1}{c} \sum_{1\leq i\leq m} \alpha_i^2 \leq -E_Q\left[\ln(1+U)\right] \leq c \sum_{1\leq i\leq m} \alpha_i^2, \tag{3.4}$$

$$E_Q\left[\ln^2(1+U)\right] \leq c \sum_{1\leq i\leq m} \alpha_i^2. \tag{3.5}$$

Observe que para obtermos (1.13) do Teorema 1.7 estamos interessados em estudar o comportamento de J_n, quando $n \nearrow \infty$. Mas, veremos com o resultado seguinte, que a variável aleatória definida em (3.1) será adequada para a análise de martingal, pois a mesma estará relacionada a função partição normalizada W_n. Assim, obteremos para n suficientemente grande um critério para a desordem fraca, e através da desigualdade dada em (3.2) obteremos os resultados para J_n.

Proposição 3.1 *Seja $\beta \neq 0$. Então,*

$$\{W_\infty = 0\} = \left\{\sum_{n\geq 1} I_n = \infty\right\}, \ \ Q\text{-q.c.}. \tag{3.6}$$

Além disso, se $Q(W_\infty = 0) = 1$, então existem $c_1, c_2 \in (0, \infty)$ tais que Q-q.c.,

$$c_1 \sum_{1\leq k\leq n} I_k \leq -\ln W_n \leq c_2 \sum_{1\leq k\leq n} I_k \ \ \textit{para } n \textit{ suficientemente grande.} \tag{3.7}$$

Demonstração: Consideremos

$$\{W_\infty = 0\} \subset \left\{\sum_{n\geq 1} I_n = \infty\right\},\ Q-\text{q.c.}, \tag{3.8}$$

$$\left\{\sum_{n\geq 1} I_n = \infty\right\} \subset \{W_\infty = 0\}\ Q-\text{q.c.},$$

e que existam constantes $c_1, c_2 \in (0,\infty)$ tais que Q-q.c.

$$\left\{\sum_{n\geq 1} I_n = \infty\right\} \subset \left\{c_1 \sum_{1\leq k\leq n} I_k \leq -\ln W_n \leq c_2 \sum_{1\leq k\leq n} I_k \text{ para } n \text{ suficientemente grande é válida}\right\}, \tag{3.9}$$

Para a afirmação (3.6) da proposição precisamos mostrar as duas primeiras inclusões. Temos que será suficiente mostrarmos as inclusões (3.8) e (3.9) e assim provarmos a proposição. De fato, suponha que a primeira inclusão seja válida e, além disso, $Q(W_\infty = 0) = 1$. Então $Q\left(\sum_{n\geq 1} I_n = \infty\right) = 1$ e podemos verificar que a segunda conclusão da proposição é válida. Agora, se as inclusões (3.8) e (3.9) são válidas obtemos a igualdade (3.6). Desse modo, iremos mostrar que as inclusões (3.8) e (3.9) são verdadeiras.

Considere o processo $-\ln W_n$. Sabemos que W é um martingal, como $-\ln(x)$ é uma função convexa e $(-\ln W_n) \in L^1$ para todo $n \geq 1$, obtemos $(-\ln W)$ é um sub-martingal. Assim, segue do Teorema 2.4 que $(-\ln W_n)$ tem a seguinte decomposição de Doob

$$-\ln W_n = N_n + A_n,$$

onde N é um martingal e A é um compensador dado por

$$\begin{aligned}
\Delta A_n &= E_Q[\Delta(-\ln W_n)|\mathcal{G}_{n-1}] \\
&= E_Q[-\ln W_n - (-\ln W_{n-1})|\mathcal{G}_{n-1}] \\
&= E_Q\left[-\left(\ln \frac{W_n}{W_{n-1}}\right)|\mathcal{G}_{n-1}\right].
\end{aligned}$$

Pelas definições de W_n e Z_n observe que

$$\begin{aligned}
\frac{W_n}{W_{n-1}} &= \frac{Z_n}{Z_{n-1}e^{\lambda(\beta)}} \\
&= \sum_{\omega:|\omega|=n} \frac{e^{\beta\sum_{j=1}^{n}\eta(j,\omega_j)-\lambda(\beta)}}{(2d)^n}\frac{1}{Z_{n-1}} \\
&= \sum_{\omega:|\omega|=n} \frac{e^{\beta\eta(n,\omega_n)-\lambda(\beta)}}{2d}\frac{e^{\beta\sum_{j=1}^{n-1}\eta(j,\omega_j)}}{(2d)^{n-1}}\frac{1}{Z_{n-1}}.
\end{aligned}$$

Agora, lembrando que

$$\mu_{n-1}(\omega) = \frac{e^{\beta \sum_{j=1}^{n-1} \eta(j,\omega_j)}}{(2d)^{n-1}} \frac{1}{Z_{n-1}},$$

temos

$$\begin{aligned} \frac{W_n}{W_{n-1}} &= \sum_{\omega:|\omega|=n-1} e^{\beta\eta(n,\omega_n)-\lambda(\beta)} \mu_{n-1}(\omega) \\ &= \frac{E_{\mu_{n-1}}[e^{\beta\eta(n,\omega_n)}]}{e^{\lambda(\beta)}} \\ &= E_{\mu_{n-1}}[e(n,\omega_n)] \qquad (3.10) \\ &\equiv 1 + U_n. \qquad (3.11) \end{aligned}$$

Assim,

$$\begin{aligned} \Delta A_n &= E_Q\left[-\left(\ln \frac{W_n}{W_{n-1}}\right)|\mathcal{G}_{n-1}\right] \\ &= E_Q[-\ln(1+U_n)|\mathcal{G}_{n-1}]. \qquad (3.12) \end{aligned}$$

Daí

$$\begin{aligned} \Delta N_n &= \Delta(-\ln W_n) - \Delta A_n \\ &= -\ln(1+U_n) + E_Q[\ln(1+U_n)|\mathcal{G}_{n-1}]. \qquad (3.13) \end{aligned}$$

Como N é um martingal com $E_Q[N_n^2] < \infty$ para todo n, então, pelo Teorema 2.1, temos

$$N_n^2 = L_n + \langle N \rangle_n \,,$$

onde L_n é um martingal e $\langle N \rangle_n$ é um compensador dado por $\Delta \langle N \rangle_n = E_Q[\Delta N_n^2|\mathcal{G}_{n-1}]$.
Observe que

$$\begin{aligned} E_Q[(\Delta N_n)^2|\mathcal{G}_{n-1}] &= E_Q[(N_n - N_{n-1})^2|\mathcal{G}_{n-1}] \\ &= E_Q[N_n^2|\mathcal{G}_{n-1}] - 2E_Q[(N_n N_{n-1}|\mathcal{G}_{n-1}] + E_Q[N_{n-1}^2|\mathcal{G}_{n-1}]. \end{aligned}$$

Como N_n é um martingal, temos $E_Q[N_n N_{n-1}|\mathcal{G}_{n-1}] = N_{n-1}E_Q[N_n|\mathcal{G}_{n-1}] = N_{n-1}N_{n-1}$, assim

$$\begin{aligned} E_Q[(\Delta N_n)^2|\mathcal{G}_{n-1}] &= E_Q[N_n^2|\mathcal{G}_{n-1}] - 2N_{n-1}^2 - N_{n-1} \\ &= E_Q[N_n^2 - N_{n-1}^2|\mathcal{G}_{n-1}]. \end{aligned}$$

Pelo observado acima,

$$\begin{aligned} \Delta \langle N \rangle_n &= E_Q[\Delta N_n^2|\mathcal{G}_{n-1}] \\ &= E_Q[N_n^2 - N_{n-1}^2|\mathcal{G}_{n-1}] \\ &= E_Q[(\Delta N_n)^2|\mathcal{G}_{n-1}], \end{aligned}$$

agora, usando (3.13) na segunda igualdade, temos

$$\begin{aligned}
\Delta \langle N \rangle_n &= E_Q[(\Delta N_n)^2 | \mathcal{G}_{n-1}] \\
&= E_Q[\{-\ln(1+U_n) + E_Q[\ln(1+U_n)|\mathcal{G}_{n-1}]\}^2 | \mathcal{G}_{n-1}] \\
&= E_Q[\ln^2(1+U_n) + E_Q[\ln(1+U_n)|\mathcal{G}_{n-1}]^2 - 2\ln(1+U_n) E_Q[\ln(1+U_n)|\mathcal{G}_{n-1}] | \mathcal{G}_{n-1}].
\end{aligned}$$

Utilizando as propriedades de esperança condicional na última igualdade obtemos

$$\begin{aligned}
\Delta \langle N \rangle_n &= E_Q[\ln^2(1+U_n)|\mathcal{G}_{n-1}] + E_Q[\ln(1+U_n)|\mathcal{G}_{n-1}]^2 - 2E_Q[\ln(1+U_n) E_Q[\ln(1+U_n)|\mathcal{G}_{n-1}] | \mathcal{G}_{n-1}] \\
&= E_Q[\ln^2(1+U_n)|\mathcal{G}_{n-1}] - E_Q[\ln(1+U_n)|\mathcal{G}_{n-1}]^2 \\
&\leq E_Q[\ln^2(1+U_n)|\mathcal{G}_{n-1}]. \qquad (3.14)
\end{aligned}$$

Considere agora as seguintes variáveis aleatórias $e(n,z) = \exp\{\beta\eta(n,z) - \lambda(\beta)\}$ tal que $|z|_1 \leq n$, definidas em $(H, \mathcal{G}, Q)$ e $\alpha(z) = \mu_{n-1}(\omega_n = z)$ onde $\sum_{|z|_1 \leq n} \mu_{n-1}(\omega_n = z) = 1$. Definimos em (3.11) a variável aleatória $U_n = E_{\mu_{n-1}}[e(n,\omega_n)] - 1$, assim, aplicando o Lema 3.1, existe uma constante $c \in [0,\infty)$ que não depende de $\{\mu_{n-1}(\omega_n = z)_{|z|_1 \leq n}\}$ tal que

$$\frac{1}{c} \sum_{|z| \leq n} \mu_{n-1}(\omega_n = z)^2 \leq -E_Q\left[\ln(1+U_n)|\mathcal{G}_{n-1}\right] \leq c \sum_{|z| \leq n} \mu_{n-1}(\omega_n = z)^2$$

e

$$E_Q\left[\ln^2(1+U_n)|\mathcal{G}_{n-1}\right] \leq c \sum_{|z| \leq n} \mu_{n-1}(\omega_n = z)^2.$$

Portanto, de (3.12) e (3.14), temos que

$$\frac{1}{c} I_n \leq \Delta A_n \leq c I_n \qquad (3.15)$$

e

$$\Delta \langle N \rangle_n \leq c I_n. \qquad (3.16)$$

Se tivermos que

$$\left\{\sum I_n < \infty\right\} \subset \{W_\infty > 0\} \;\; Q\text{-q.c.}, \qquad (3.17)$$

então

$$\{W_\infty > 0\}^c \subset \left\{\sum I_n < \infty\right\}^c \;\; Q\text{-q.c.},$$

isto é,

$$\{W_\infty = 0\} \subset \left\{\sum I_n = \infty\right\} \;\; Q\text{-q.c.},$$

como queríamos.

Mostraremos agora que (3.17) é válido. Por (3.15) e (3.16) temos que

$$\begin{aligned}
\left\{\sum I_n < \infty\right\} &\subset \{A_\infty < \infty, \langle N \rangle_\infty < \infty\} \\
&\subset \left\{A_\infty < \infty, \lim_{n \nearrow \infty} N_n \text{existe e é finito q.c.}\right\} \\
&\subset \{W_\infty > 0\},
\end{aligned}$$

onde, na segunda inclusão aplicamos o Teorema 2.5 e, para a última inclusão, o fato de que $-\ln W_n = N_n + A_n$.

Iremos agora provar (3.9). Primeiramente, observe que, de (3.15) e (3.16), temos

$$\left\{\sum_{n\geq 1} I_n = \infty\right\} = \{A_\infty = \infty\}$$

e

$$\left\{\lim_{n\nearrow\infty} \frac{-\ln W_n}{A_n} = 1\right\} \subset \left\{c_1 \sum_{1\leq k\leq n} I_k \leq -\ln W_n \leq c_2 \sum_{1\leq k\leq n} I_k \text{ para } n \text{ suficientemente grande}\right\}.$$

Portanto, será suficiente mostrar que

$$\{A_\infty = \infty\} \subset \left\{\lim_{n\nearrow\infty} \frac{-\ln W_n}{A_n} = 1\right\} \ Q\text{-q.c.}.$$

Suponha que $A_\infty = \infty$. Se $\langle N\rangle_\infty < \infty$, $\lim_{n\nearrow\infty} N_n$ existe e é finito , então

$$\lim_{n\nearrow\infty} \frac{N_n + A_n}{A_n} = 1,$$

e temos a inclusão desejada.

Se $\langle N\rangle_\infty = \infty$, então

$$\frac{-\ln W_n}{A_n} = \frac{N_n}{A_n} + 1 = \frac{N_n}{\langle N\rangle_n}\frac{\langle N\rangle_n}{A_n} + 1.$$

Mas pelo Teorema 2.6, $\lim_{n\nearrow\infty} \frac{N_n}{1+\langle N\rangle_n} = 0$ Qq.c. sobre $\{\langle N\rangle_\infty = \infty\}$. □

Obtemos uma parte do próximo resultado dado que estamos em desordem fraca, isto é, provaremos que desordem fraca implica o comportamento deslocalizado do polímero. Para a parte do comportamento difusivo do polímero orientado usaremos os resultados obtidos na Seção 2.4 e a implicação dada pela desordem fraca.

Demonstração do Teorema 1.7 (Comportamento deslocalizado e difusivo): Temos do Teorema 1.2, dado por hipótese que $d \geq 3$ e que β é suficientemente pequeno tal que (1.6) é válida, que $Q(W_\infty > 0) = 1$. Pela Proposição 3.1, então $Q(\sum_{n\geq 1} I_n < \infty) = 1$, Assim, da desigualdade (3.2), segue que

$$\sum_{n\geq 1} \max_{x\in\mathbb{Z}^d} \mu_{n-1}(\omega_n = x)^2 < \infty,\ Q - \text{q.c.},$$

e portanto que

$$\lim_{n\nearrow\infty} \max_{x\in\mathbb{Z}^d} \mu_{n-1}(\omega_n = x) = 0,\ Q - \text{q.c.}.$$

Assim, provamos a primeira afirmação do teorema.

Para a afirmação (1.14) consideremos a medida de probabilidade definida em (1.3). Assim, temos que

$$\begin{aligned} E_{\mu_n}[|\omega_n|^2] - n &= \sum_{\omega:|\omega|=n} \frac{1}{Z_n} \frac{|\omega_n|^2 e^{\beta \sum_{j=1}^n \eta(j,\omega_j)}}{(2d)^n} - n \\ &= \sum_{\omega:|\omega|=n} \frac{1}{Z_n e^{-n\lambda(\beta)}} \frac{|\omega_n|^2 e^{\beta \sum_{j=1}^n \eta(j,\omega_j) - n\lambda(\beta)}}{(2d)^n} - n. \end{aligned}$$

Pela definição de W_n dada em (2.1) e usando (2.2) podemos reescrever a última igualdade como

$$\begin{aligned} E_{\mu_n}\left[|\omega_n|^2\right] - n &= \frac{E_P[|\omega_n|^2 e_{1,n}]}{W_n} - \frac{nW_n}{W_n} \text{ (por 2.5)} \\ &= \frac{E_P[|\omega_n|^2 e_{1,n}]}{W_n} - \frac{E_P[n e_{1,n}]}{W_n} \\ &= \frac{E_P[(|\omega_n|^2 - n) e_{1,n}]}{W_n}. \end{aligned}$$

Agora, consideremos o martingal M definido em (2.11). Note que, pela Proposição 2.3, existe $\tau \in [0,1)$ tal que $\max_{0\le j\le n} |M_j| = O(n^\tau)$, quando $n \nearrow \infty$, Q-q.c.. Além disso, temos pelo Teorema 1.2 estamos em desordem fraca. Assim,

$$\begin{aligned} E_{\mu_n}[|\omega_n|^2] - n &= \frac{E_P[(|W_n|^2 - n) e_{1,n}]}{W_n} \\ &= \frac{E_P[\varphi(n,\omega_n) e_{1,n}]}{W_n} \\ &= \frac{M_n}{W_n} \\ &= O(n^\tau), \end{aligned}$$

e, portanto, obtemos o que queríamos. $\square$

Como uma consequência do Teorema 1.7, daremos outro exemplo, agora consideraremos o ambiente gaussiano.

Exemplo 4 Suponha que $d \geq 3$ e que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{Z}^d$, as variáveis aleatórias $\eta(n,x)$ têm distribuição normal padrão. Se $\beta < \sqrt{\ln(1/\pi_d)}$, então para quase toda realização do ambiente η, o nosso polímero orientado é difusivo, ou mais precisamente

$$\lim_{n\nearrow\infty} \frac{E_{\mu_n}[|\omega_n|^2]}{n} = 1, \text{Q-q.c..} \tag{3.18}$$

De fato, temos que $E_Q[e^{\beta\eta(n,x)}] = \int e^{\beta t} dF(t) = \int e^{\beta t} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-t^2/2} dt = e^{\frac{\beta^2}{2}}$ assim, $\lambda(\beta) = \frac{\beta^2}{2}$ e $\gamma_1(\beta) = \frac{1}{2}(2\beta)^2 - 2\frac{1}{2}\beta^2 = \beta^2$. Portanto, se $\beta < \sqrt{\ln(1/\pi_d)}$, temos que $\gamma_1(\beta) < \ln\left(\frac{1}{\pi_d}\right)$ e, pelo Teorema do Comportamento deslocalizado e difusivo, temos que (3.18) é válida.

3.2 Estudo da função partição na árvore de Cayley

Estudaremos, nesta seção, a função partição na árvore de Cayley. Estaremos especialmente interessados na energia livre, provaremos o Teorema 1.5, com a qual obtemos a transição de fase no comportamento da energia livre, decorrente do ambiente aleatório.

Consideremos a função $f(\beta)$ definida no Teorema 1.5 e definida de (1.8), com β_c sendo o valor onde $f(\beta)$ atinge seu valor mínimo. Tomemos $\beta_c = \infty$ caso não exista o mínimo local. Pela Proposição 2.1, seria bom que tivéssemos uma caracterização das formas possíveis para o gráfico da $f(\beta)$. Assim, este é o objetivo do próximo lema.

Lema 3.2 *Considere a função $f(\beta)$ definida em (1.8). Então, ou existe β_c tal que a função $f(\beta)$ é estritamente decrescente sobre $(0, \beta_c)$ e estritamente crescente sobre (β_c, ∞), ou a função $f(\beta)$ é estritamente decrescente sobre $(0, \infty)$.*

Demonstração: Afirmamos que $\beta f(\beta)$ é estritamente convexa. De fato, vamos mostrar que a segunda derivada de $(\beta f(\beta))$ é positiva. Temos

$$(\beta f(\beta))' = \frac{(E_Q[e^{\beta\eta}])'}{E_Q[e^{\beta\eta}]}$$

e,

$$\begin{aligned}(\beta f(\beta))'' &= \frac{(E_Q[e^{\beta\eta}])'' E_Q[e^{\beta\eta}] - (E_Q[e^{\beta\eta}])'(E_Q[e^{\beta\eta}])'}{(E_Q[e^{\beta\eta}])^2} \\ &= E_Q^{\beta}[\eta^2] - (E_Q^{\beta}[\eta])^2 > 0,\end{aligned}$$

onde estamos considerando $E_Q^{\beta}[X] = E_Q\left[\frac{Xe^{\beta\eta}}{E_Q[e^{\beta\eta}]}\right]$ e para a desigualdade usamos a desigualdade de Jensen. Então, para cada β, β_0 com $\beta \neq \beta_0$, usando o fato de βf ser convexa temos

$$\beta f(\beta) > \beta_0 f(\beta_0) + [f(\beta_0) + \beta_0 f'(\beta_0)][\beta - \beta_0].$$

Suponha que f tenha um extremo local em β_c isto é, $f'(\beta_c) = 0$, então

$$\beta f(\beta) > \beta f(\beta_c) \text{ para todos } \beta \neq \beta_c,$$

assim β_c é o único valor onde f atinge seu mínimo global. Se β_c não tem um extremo local, f é estritamente monótona. Então, visto que $f(\beta) \to \infty$ quando $\beta \to 0$, f deve ser estritamente decrescente. $\square$

Enunciaremos agora um lema que será de fundamental importância para provarmos o próximo resultado.

Lema 3.3 *A função*

$$g(\beta) = \frac{1}{\beta} \log \sum_{j=1}^{n} e^{\beta x_j}, \quad \beta > 0,$$

é decrescente e convexa em β, para quaisquer números reais $x_1, x_2, ..., x_n$.

Demonstração: Pelo Lema 2.3 se $\beta' > \beta$ então

$$\left(\sum_{j=1}^{n} e^{\beta' x_j} \right)^{\frac{1}{\beta'}} \leq \left(\sum_{k=1}^{n} e^{\beta x_k} \right)^{\frac{1}{\beta}}.$$

Logo

$$\frac{1}{\beta'} \log \sum_{j=1}^{n} e^{\beta' x_j} \leq \frac{1}{\beta} \log \sum_{k=1}^{n} e^{\beta x_k}.$$

Para provar convexidade da função, iremos mostrar que $g''(\beta) \geq 0$. Então, derivando, temos

$$g'(\beta) = -\frac{1}{\beta^2} \log \sum_{j=1}^{n} e^{\beta x_j} + \frac{1}{\beta} \frac{1}{\sum_{j=1}^{n} e^{\beta x_j}} \sum_{j=1}^{n} x_j e^{\beta x_j}.$$

Ou seja,

$$\beta g'(\beta) = -g(\beta) + \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j e^{\beta x_j}}{\sum_{j=1}^{n} e^{\beta x_j}}.$$

Derivando novamente obtemos

$$\beta g''(\beta) + g'(\beta) = -g'(\beta) + \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^2 e^{\beta x_j} \sum_{j=1}^{n} e^{\beta x_j} - \sum_{j=1}^{n} x_j e^{\beta x_j} \sum_{j=1}^{n} x_j e^{\beta x_j}}{\left(\sum_{j=1}^{n} e^{\beta x_j} \right)^2}.$$

Assim

$$\beta g'(\beta) = -2g'(\beta) + \frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^2 e^{\beta x_j}}{\left(\sum_{j=1}^{n} e^{\beta x_j} \right)} - \left(\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j e^{\beta x_j}}{\sum_{j=1}^{n} e^{\beta x_j}} \right)^2,$$

como $g(\beta)$ é decrescente então $g'(\beta) \leq 0$ e $-2g'(\beta) \geq 0$. Pela desigualdade de Jensen obtemos que $\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j^2 e^{\beta x_j}}{\left(\sum_{j=1}^{n} e^{\beta x_j} \right)} \geq \left(\frac{\sum_{j=1}^{n} x_j e^{\beta x_j}}{\sum_{j=1}^{n} e^{\beta x_j}} \right)^2$. Portanto, $g''(\beta) \geq 0$, e concluímos que a função é convexa. $\square$

Demonstração do Teorema 1.5 (Transição de fase da energia livre em $\mathbb{T}$): Faremos a prova em duas partes. Consideremos primeiro $\beta < \beta_c$. Assim, temos $f'(\beta) < 0$, então, pela Proposição 2.1, existe $\alpha > 1$ tal que $\sup_{n \geq 1} E_Q[W_n^{\alpha}(\beta)] < \infty$. Assim, obtemos que W é uniformemente integrável, portanto $W_n(\beta) \to W_\infty(\beta)$ Q-q.c e em L^1, isto é, $E_Q[W_n(\beta)] \to$

$E_Q[W_\infty(\beta)]$. Daí, como $E_Q[W_n(\beta)] = 1$ temos $E_Q[W_\infty(\beta)] = 1$, e pelo Lema 1.1 obtemos $Q(W_\infty(\beta) > 0) = 1$, ou seja, estamos em desordem fraca.

Agora, do fato que $Z_n(\beta) = W_n \exp(n\lambda(\beta))$, tomando o logaritmo em ambos os lados da igualdade e dividindo por $n\beta$, obtemos

$$\frac{1}{n\beta} \log Z_n(\beta) = \frac{1}{n\beta} \log W_n(\beta) + \frac{\lambda(\beta)}{\beta}.$$

Portanto, tomando o limite em ambos lados e usando que estamos em desordem fraca, temos

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\beta} \log Z_n(\beta) = f(\beta) = \frac{\lambda(\beta)}{\beta} \quad q.c. \quad .$$

Disso, obtemos $P(H_\beta) = 1$ quando $0 < \beta < \beta_c$, onde definimos

$$H_\beta := \left\{ \eta \in H : \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n\beta} \log Z_n(\beta) = f(\beta) \right\}.$$

Para concluirmos a prova, precisamos mostrar que,

$$P(\bigcap_{0<\beta<\beta_c} H_\beta) = 1. \tag{3.19}$$

Para provar este resultado, considere o conjunto I denso e enumerável em $(0, \beta_c)$. Segue

$$\bigcap_{0<\beta<\beta_c} H_\beta \subset \bigcap_{\beta\in I} H_\beta,$$

daí, se (3.19) for válida, temos que

$$1 = P(\bigcap_{0<\beta<\beta_c} H_\beta) \leq P(\bigcap_{\beta\in I} H_\beta).$$

Agora, vamos mostrar que $P(\bigcap_{\beta\in I} H_\beta) = 1$ implica $P(\bigcap_{0<\beta<\beta_c} H_\beta) = 1$. Para qualquer $\beta_0 \in (0, \beta_c)$ construa sequências $\beta_k^+ \searrow \beta_0$ e $\beta_k^- \nearrow \beta_0$, onde $\beta_k^+, \beta_k^- \in I$. Então, para $\eta \in \bigcap_{\beta\in I} H_\beta$, usando o Lema 3.3, temos

$$\frac{1}{n\beta_0} \log Z_n(\beta_0)(\eta) \leq \frac{1}{n\beta_k^-} \log Z_n(\beta_k^-)(\eta),$$

assim, tomando o lim sup obtemos,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n\beta_0} \log Z_n(\beta_0)(\eta) \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n\beta_k^-} \log Z_n(\beta_k^-)(\eta) = f(\beta_k^-)$$

para todo k. Temos também, pelo Lema 3.3,

$$\frac{1}{n\beta_k^+} \log Z_n(\beta_k^+)(\eta) \leq \frac{1}{n\beta_0} \log Z_n(\beta_0)(\eta),$$

assim, tomando o lim inf obtemos,

$$f(\beta_k^+) = \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n\beta_k^+} \log Z_n(\beta_k^+)(\eta) \le \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n\beta_0} \log Z_n(\beta_0)(\eta)$$

para todo k. Assim, temos

$$\begin{aligned} \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n\beta_0} \log Z_n(\beta_0)(\eta) &\le \lim_{k\to\infty} f(\beta_k^-) \\ &= f(\beta_0) \\ &= \lim_{k\to\infty} f(\beta_k^+) \\ &\le \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n\beta_0} \log Z_n(\beta_0)(\eta). \end{aligned}$$

Portanto, $\eta \in H_{\beta_0}$. Assim, $\bigcap_{\beta\in I} H_\beta = \bigcap_{0<\beta<\beta_0} H_\beta$ e obtemos $P(\bigcap_{\beta\in I} H_\beta) = P(\bigcap_{0<\beta<\beta_0} H_\beta) = 1$.

Considere agora $\beta \ge \beta_c$. Para $\epsilon > 0$, usando o Lema 3.3, temos

$$\frac{1}{n\beta} \log Z_n(\beta) \le \frac{1}{n(\beta_c - \epsilon)} \log Z_n(\beta_c - \epsilon),$$

assim,

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n\beta} \log Z_n(\beta) \le f(\beta_c - \epsilon) \text{ Q-q.c.}.$$

Por outro lado, usando a convexidade do Lema 3.3 temos, para cada $\epsilon > 0$,

$$\frac{1}{n\beta} \log Z_n(\beta) \ge \left(\frac{1}{n(\beta_c - \epsilon)} \log Z_n(\beta_c - \epsilon) \right)' (\beta - \beta_c + \epsilon) + \frac{1}{n(\beta_c - \epsilon)} \log Z_n(\beta_c - \epsilon).$$

Pela primeira parte , para quase todo ponto $\eta \in H$, a sequência de funções convexas

$$\frac{1}{n\beta} \log Z_n(\beta)(\eta), \quad \beta \le \beta_c,$$

converge para a função diferenciável $f(\beta)$. Portanto, suas derivadas convergem para $f'(\beta)$, de modo que

$$\liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n\beta} \log Z_n(\beta)(\eta) \ge f'(\beta_c - \epsilon)(\beta - \beta_c + \epsilon) + f(\beta_c - \epsilon).$$

Como ϵ é arbitrário, e

$$\lim_{\epsilon\to 0} f'(\beta_c - \epsilon) = \lim_{\epsilon\to 0} f'(\beta_c) = 0,$$

temos que

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n\beta} \log Z_n(\beta)(\eta) \le f(\beta_c) \le \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n\beta} \log Z_n(\beta)(\eta).$$

$\square$

4

Desordem forte

Nosso interesse neste capítulo é demostrar, utilizando o método do momento fracionário, o Teorema da Desordem Forte e o Teorema do Comportamento localizado. No primeiro teorema obtemos o resultado que nos dá condições suficientes para estarmos em desordem forte e, no segundo obtemos que sob a medida do polímero, o passeio aleatório está localizado. Este comportamento do polímero orientado difere de quando $\beta = 0$, ou de quando estamos em desordem fraca, onde vimos que o polímero tem o comportamento deslocalizado e difusivo.

Para obtermos os resultados deste capítulo usaremos o momento fracionário da função partição normalizada, o ingrediente fundamental será mostrar que ele tende para zero quando $n \nearrow \infty$. Com isso, como provaremos no seguinte lema, temos desordem forte.

Lema 4.1 *Suponha que existam constantes $k_1 \in (0, \infty)$, $\theta \in (0, 1)$ e uma sequência $a_n \uparrow \infty$ tais que*

$$E_Q[W_n^\theta] \leq k_1 \exp(-a_n), n \geq 1. \tag{4.1}$$

Então, $Q(W_\infty = 0) = 1$. Além disso, se

$$\sum_{n \geq 1} \exp(-\delta a_n) < \infty$$

para algum $\delta \in (0, 1)$, então existe uma constante $k_2 \in (0, \infty)$ tal que

$$Q\left(\liminf_{n \nearrow \infty} -\frac{1}{a_n} \ln W_n \geq k_2\right) = 1. \tag{4.2}$$

Demonstração: Pelo Lema de Fatou temos

$$\begin{aligned} E_Q[W_\infty^\theta] &= E_Q[\liminf_{n \nearrow \infty} W_n^\theta] \\ &\leq \liminf_{n \nearrow \infty} E_Q[W_n^\theta] \\ &\leq \liminf_{n \nearrow \infty} k_1 \exp(-a_n) = 0. \end{aligned}$$

Então, $Q(W_\infty^\theta = 0) = 1$. Assim, temos que $Q(W_\infty = 0) = 1$. Para provar a afirmação (4.2), é suficiente mostrar que

$$Q\left(\liminf_{n \nearrow \infty} -\frac{1}{a_n} \ln W_n \geq k_2\right)^c = Q\left(\bigcap_{n \geq 1} \bigcup_{m \geq n} \left\{-\frac{1}{a_m} \ln W_m < k_2\right\}\right) = 0.$$

Temos,

$$\begin{aligned} Q\left(-\frac{1}{a_n}\ln W_n < k_2\right) &= Q\left(\ln W_n > -k_2 a_n\right) \\ &= Q(W_n^\theta > e^{-k_2\theta a_n}) \\ &\leq \frac{E_Q[W_n^\theta]}{e^{-k_2\theta a_n}}, \end{aligned}$$

onde, para a desigualdade, usamos a desigualdade de Chebychev. Agora, usando (4.1) e escolhendo $k_2 > 0$ de modo que $1 - k_2\theta > \delta$, obtemos

$$\begin{aligned} Q\left(-\frac{1}{a_n}\ln W_n < k_2\right) &\leq \frac{E_Q[W_n^\theta]}{e^{-k_2\theta a_n}} \\ &\leq k_1 e^{-a_n(1-k_2\theta)} \\ &\leq k_1 e^{-a_n\delta}. \end{aligned}$$

Assim,

$$\sum_{n\geq 1} Q\left(-\frac{1}{a_n}\ln W_n < -k_2\right) \leq k_1 \sum_{n\geq 1} e^{-a_n\delta} < \infty$$

e, por Borel- Cantelli,

$$Q\left(\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{m\geq n}\left\{-\frac{1}{a_n}\ln W_n < k_2\right\}\right) = 0.$$

Portanto, temos o desejado. $\square$

Uma parte fundamental da demonstração do próximo resultado, além do Lema 4.1, é o seguinte resultado.

Lema 4.2 *Considere um subconjunto finito Λ de $\mathbb{Z}^d$, ou seja, $\Lambda \subset \mathbb{Z}^d$. Então, para $\theta \in [0,1]$*

$$|\Lambda| E_Q[W_{n-1}^\theta I_n] \geq E_Q[W_{n-1}^\theta] - 2P(\omega_n \notin \Lambda)^\theta \tag{4.3}$$

Demonstração: Considere as variáveis aleatórias

$$I_n = \sum_{z\in\mathbb{Z}^d} \mu_{n-1}(\omega_n = z)^2,$$

como definidas anteriormente em (3.1). Então, obtemos

$$\begin{aligned} |\Lambda| I_n &\geq |\Lambda| \sum_{z\in\Lambda} \mu_{n-1}(\omega_n = z)^2 \\ &\geq \left\{\sum_{z\in\Lambda} \mu_{n-1}(\omega_n = z)\right\}^2 \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \{\mu_{n-1}(\omega_n \in \Lambda)\}^2 \\
&= \{1 - \mu_{n-1}(\omega_n \notin \Lambda)\}^2 \\
&\geq 1 - 2\mu_{n-1}(\omega_n \notin \Lambda) \\
&\geq 1 - 2\mu_{n-1}(\omega_n \notin \Lambda)^\theta.
\end{aligned}
$$

Assim,

$$|\Lambda| I_n W_{n-1}^\theta \geq W_{n-1}^\theta - 2W_{n-1}^\theta \mu_{n-1}(\omega_n \notin \Lambda)^\theta,$$

e, aplicando a esperança em ambos os lados dessa desigualdade, obtemos

$$
\begin{aligned}
E_Q[W_{n-1}^\theta |\Lambda| I_n] &\geq E_Q[W_{n-1}^\theta] - 2E_Q[W_{n-1}^\theta \mu_{n-1}(\omega_n \notin \Lambda)^\theta] \\
&\geq E_Q[W_{n-1}^\theta] - 2E_Q[W_{n-1}\mu_{n-1}(\omega_n \notin \Lambda)]^\theta \\
&= E_Q[W_{n-1}^\theta] - 2P(\omega_n \notin \Lambda)^\theta,
\end{aligned}
$$

onde a última desigualdade é dada pela desigualdade de Jensen, e a afirmação na igualdade provaremos a seguir.

$$
\begin{aligned}
E_Q[W_{n-1}\mu_{n-1}(\omega_n \notin \Lambda)] &= E_Q\left[W_{n-1} \sum_{\substack{\omega:|\omega|=n \\ \omega_n \notin \Lambda}} \frac{1}{Z_{n-1}} \exp\left(\beta \sum_{j=1}^{n-1} \eta(j,\omega_j)\right) P(\omega)\right] \\
&= E_Q\left[\frac{Z_{n-1}}{E_Q[e^{\beta\eta(n,x)}]^{n-1}} \sum_{\substack{\omega:|\omega|=n \\ \omega_n \notin \Lambda}} \frac{1}{Z_{n-1}} \exp\left(\beta \sum_{j=1}^{n-1} \eta(j,\omega_j)\right) P(\omega)\right] \\
&= E_Q\left[\sum_{\substack{\omega:|\omega|=n \\ \omega_n \notin \Lambda}} \frac{\exp\left(\beta \sum_{j=1}^{n-1} \eta(j,\omega_j)\right)}{E_Q[e^{\beta\eta(n,x)}]^{n-1}} P(\omega)\right] \\
&= \sum_{\substack{\omega:|\omega|=n \\ \omega_n \notin \Lambda}} \frac{E_Q\left[\exp\left(\beta \sum_{j=1}^{n-1} \eta(j,\omega_j)\right)\right]}{E_Q[e^{\beta\eta(n,x)}]^{n-1}} P(\omega) \\
&= \sum_{\substack{\omega:|\omega|=n \\ \omega_n \notin \Lambda}} P(\omega) = P(\omega_n \notin \Lambda)
\end{aligned}
$$

□

Para provarmos o resultado seguinte, obteremos sequências $a_n \nearrow \infty$ para as quais verificamos (4.1), e então, utilizaremos o Lema 4.1.

Demonstração do Teorema 1.3 (Desordem Forte): Faremos primeiro a prova da parte (i): Considere a função $f : (-1,\infty) \to [0,\infty)$ definida por

$$f(u) = 1 + \theta u - (1+u)^\theta, \tag{4.4}$$

e assuma agora que $\theta \in (0,1)$. Podemos ver que existem constantes $c_1, c_2 \in (0,\infty)$ tais que

$$\frac{c_1 u^2}{2+u} \leq f(u) \leq c_2 u^2 \quad \text{para todo} \quad u \in (-1,\infty). \tag{4.5}$$

De fato, para isto primeiro consideremos a expansão de Taylor de grau ≥ 2 da função $(1+u)^\theta$ em torno do zero, com isso obtemos que $f(u) = O(u^2)$. Para os valores de $u \to \infty$ e $u \to (-1)^+$ podemos verificar a validade da afirmação calculando alguns limites. Assim, temos de (3.11) e (4.4) que

$$\begin{aligned}
E_Q[\Delta W_n^\theta | \mathcal{G}_{n-1}] &= W_{n-1}^\theta E_Q\left[\left(\frac{W_n^\theta}{W_{n-1}^\theta} - 1\right) |\mathcal{G}_{n-1}\right] \\
&= W_{n-1}^\theta E_Q\left[\left((U_n+1)^\theta - 1\right) |\mathcal{G}_{n-1}\right] \\
&= W_{n-1}^\theta E_Q\left[(\theta U_n - f(U_n)) |\mathcal{G}_{n-1}\right] \\
&= -W_{n-1}^\theta E_Q\left[(f(U_n)) |\mathcal{G}_{n-1}\right],
\end{aligned}$$

pois

$$\begin{aligned}
E_Q[U_n|\mathcal{G}_{n-1}] &= E_Q[\frac{W_n}{W_{n-1}} - 1|\mathcal{G}_{n-1}] \\
&= \frac{E_Q[W_n|\mathcal{G}_{n-1}]}{W_{n-1}} - 1 = 0.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
E_Q[\Delta W_n^\theta | \mathcal{G}_{n-1}] &= -W_{n-1}^\theta E_Q\left[(f(U_n)) |\mathcal{G}_{n-1}\right] \\
&\leq -c_2 W_{n-1}^\theta E_Q\left(\frac{U_n^2}{2+U_n} |\mathcal{G}_{n-1}\right) \\
&\leq -c_3 W_{n-1}^\theta I_n,
\end{aligned}$$

onde usamos nas desigualdades, respectivamente, (4.5) e (3.3). Logo, obtemos

$$E_Q[W_n^\theta|\mathcal{G}_{n-1}] \leq E_Q[W_{n-1}^\theta|\mathcal{G}_{n-1}] - c_3 W_{n-1}^\theta I_n.$$

Aplicando a esperança em ambos os lados temos,

$$\begin{aligned}
E_Q[W_n^\theta] &\leq E_Q[W_{n-1}^\theta] - c_3 E_Q[W_{n-1}^\theta I_n] \\
&\leq \left(1 - \frac{c_3}{|\Lambda|}\right) E_Q[W_{n-1}^\theta] + \frac{2c_3}{|\Lambda|} P(\omega_n \notin \Lambda)^\theta,
\end{aligned} \tag{4.6}$$

onde usamos o Lema 4.2 para obter a última desigualdade.

Para $d = 1$, assumiremos $\Lambda = (-n^{2/3}, n^{2/3}]$. Então,

$$P(\omega_n \notin \Lambda) = P\left(\left|\frac{\omega_n}{n^{1/2}}\right| \geq n^{1/6}\right) \leq 2\exp\left(\frac{-n^{1/3}}{2}\right).$$

Substituindo o último resultado em (4.6) segue

$$E_Q[W_n^\theta] \leq \left(1 - \frac{c_3}{2n^{2/3}}\right) E_Q[W_{n-1}^\theta] + 4c_3 \exp\left(\frac{-\theta n^{1/3}}{2}\right).$$

Assim, $E_Q[W_n^\theta] \leq e^{-cn^{\frac{1}{3}}}$. Tomando $a_n = n^{\frac{1}{3}}$ e, aplicando o Lema 4.1, obtemos que estamos na fase de desordem forte.

Para $d = 2$, assumiremos $\Lambda = (-n^{1/2}\ln^{1/4} n, n^{1/2}\ln^{1/4} n]^2$. Assim, esta demonstração segue do mesmo modo que para $d = 1$. Não a faremos aqui, o leitor poderá obter-lá em [5].

Parte (ii): Considere a seguinte definição,

$$W_{n,m}^x = E_P\left[\prod_{1\leq j\leq m} e(j+n, x+\omega_j)\right] \text{ com } n, m \geq 1.$$

Seja $\theta \in (0,1)$, temos

$$\begin{aligned}
W_n^\theta &= \left\{\sum_{\omega:|\omega|=n} \frac{\prod_{j=1}^n e(j,\omega_j)}{(2d)^n}\right\}^\theta \\
&= \left\{\sum_{\omega:|\omega|=n} \frac{e(1,\omega_1)\prod_{j=2}^n e(j,\omega_j)}{(2d)^n}\right\}^\theta \\
&= \left[\sum_{x:|x|_1=1} \frac{e(1,x)}{2d}\left\{\sum_{\omega:|\omega|=n-1} \frac{\prod_{j=1}^{n-1} e(j+1,\omega_j+x)}{(2d)^n}\right\}\right]^\theta \\
&= \left[\sum_{x:|x|_1=1} \frac{e(1,x)}{2d} W_{1,n-1}^x\right]^\theta \\
&\leq \sum_{x:|x|_1=1} \frac{e(1,x)^\theta (W_{1,n-1}^x)^\theta}{(2d)^\theta}
\end{aligned}$$

onde, para obtermos a última desigualdade, usamos o fato que $(u+v)^\theta \leq u^\theta + v^\theta,$ se $u, v > 0$. Aplicando a esperança em ambos os lados da desigualdade temos

$$E_Q[W_n^\theta] \leq (2d)^{-\theta} E_Q\left[\sum_{x:|x|_1=1} e(1,x)^\theta (W_{1,n-1}^x)^\theta\right].$$

Dado que $W_{1,n-1}^x$ tem a mesma distribuição de W_{n-1} e fazendo $r(\theta) := (2d)^{1-\theta} E_Q[e(1,x)^\theta]$, obtemos

$$\begin{aligned}
E_Q[W_n^\theta] &\leq (2d)^{-\theta}(2d) E_Q[e(1,x)^\theta] E_Q[W_{n-1}^\theta] \\
&= r(\theta) E_Q[W_{n-1}^\theta].
\end{aligned}$$

Consideremos as seguintes funções $\ln : (0,\infty) \to \mathbb{R}$ e $r : (0,1) \to (0,\infty)$. Temos que $\ln(r(\theta))$ é convexa, diferenciável, e podemos ver que $\ln(2d) = \ln r(0) > \ln r(1) = 0$. Portanto, como por hipótese $\gamma_2(\beta) > \ln(2d)$, temos que $0 < \frac{d \ln r(\theta)}{d\theta}|_{\theta=1}$. Assim, pela convexidade, existe $\theta \in (0,1)$ tal que $r(\theta) < 1$. Com isso obtemos

$$E_Q[W_n^\theta] \leq r(\theta)^n.$$

Assim, as hipóteses do Lema 4.1 são satisfeitas com $a_n = n$ e, portanto, temos o desejado. $\square$

Veremos na próxima demonstração a maneira como o método do momento fracionário permite que venhamos obter a concentração do passeio em sítios favoritos.

Demonstração do Teorema 1.8 (Comportamento localizado): Faremos a prova apenas do item **(ii)**. Seja $c_3 \in (0,\infty)$, $\theta \in (0,1)$ e a sequência $n \nearrow \infty$. Segue do Teorema 1.3 que $Q(W_\infty = 0) = 1$. E, além disso, como $\sum_{n\geq 1} e^{-\delta n} < \infty$, onde $\delta \in (0,1)$, pelo Lema 4.1,

$$\liminf_{n\nearrow\infty} \frac{-\ln W_n}{n} \geq c_3 \quad \text{Q-q.c.} \quad ,$$

ou seja,

$$-\limsup_{n\nearrow\infty} \frac{\ln W_n}{n} \geq c_3.$$

Como $Q(W_\infty = 0) = 1$, segue do Proposição 3.1 que

$$\begin{aligned}
\limsup_{n\nearrow\infty} \frac{\sum_{k=1}^n I_k}{n} &\geq \limsup_{n\nearrow\infty} \frac{-\ln W_n}{nc_2} \\
&= -\liminf_{n\nearrow\infty} \frac{\ln W_n}{nc_2} \\
&\geq -\limsup_{n\nearrow\infty} \frac{\ln W_n}{nc_2} \\
&\geq \frac{c_3}{c_2} > 0.
\end{aligned}$$

Agora segue de (3.2) que $\limsup_{n\nearrow\infty} J_n > 0$ Q-q.c. $\square$

Daremos agora um exemplo onde aplicamos o Teorema 1.8 para ambiente gaussiano.
Exemplo 5: Suponha que $d \geq 3$ e que para qualquer $n \in \mathbb{N}$ e $x \in \mathbb{Z}^d$, as variáveis aleatórias $\eta(n,x)$ tem distribuição normal padrão. Se $\beta > \sqrt{2\ln(2d)}$, então para quase toda realização do ambiente η, o nosso polímero orientado está localizado, ou mais precisamente

$$\overline{\lim}_{n\nearrow\infty} \max_{x\in\mathbb{Z}^d} \mu_{n-1}(\omega_n = x) \geq c, \text{ Q-q.c.}$$

Temos $\lambda(\beta) = \frac{\beta^2}{2}$ e $\gamma_2(\beta) = \beta^2 - \frac{1}{2}\beta^2 = \frac{1}{2}\beta^2$. Portanto, se $\beta > \sqrt{2\ln(2d)}$, temos que $\gamma_2(\beta) > \ln(2d)$ e, pelo Teorema 1.8 obtemos o desejado.

Bibliografia

[1] Bolthausen, E. *A note on diffusion of directed polymers in a random environment.* Commun. Math. Phys.**123** (1989), 529-534.

[2] Buffet, E., Patrick,A. e Pulé, J. V. *Directed polymers on trees: a martingale approach.*, J. Phys. A, **26**, no.8, (1993), 1823-1834.

[3] Carmona, P., Hu, Y. *On the partition function of a directed polymer in a random environment.* Probab. Theory Related Fields **124**, no.3, (2002), 431-457.

[4] Comets, F., Shiga, T., Yoshida, N. *Directed Polymers in Random Environment: Path Localization and Strong Disorder.* Bernoulli **9**, (2003), 705-723.

[5] Comets, F., Shiga, T., Yoshida, N. *Probabilistic Analysis of Directed Polymers in a Random Environment: a Review.* In Stochastic Analysis on Large Scale Interacting Systems, Adv. Stud. Pure Math., **39** ,(2004), pp. 115-145

[6] Comets, F. e Yoshida, N. *Directed polymers in random environment are diffusive at weak disorder.* Ann. Probab. **34**, no. 5, (2006), 1746-1770.

[7] Imbrie, J.Z. e Spencer,T. *Diffusion of directed polymers in a random environment.* Journal of Statistical Physics., **52**, nos 3/4, (1988), 608-626.

[8] Shiryaev, A.N. *Probability* Steklov Mathematical Institute, 2ed., 1995.

[9] Williams, D. *Probability with Martingales.* Cambridge University Press, 1991.