Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Resultados de existência e de não existência de soluções para uma classe de equações elípticas

Fabiana Maria Ferreira

Belo Horizonte
2011

Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Resultados de existência e de não existência de soluções para uma classe de equações elípticas

Fabiana Maria Ferreira

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção de título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Profa. Dra. Maria José Alves
Co-orientador: Prof. Dr. Ronaldo B. Assunção

Belo Horizonte
2011

Ferreira, Fabiana Maria
Resultados de existência e de não existência de soluções para uma classe de equações elípticas
xvi + 94 páginas. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Matemática

1. Operador p-laplaciano.
2. Desigualdade de Caffarelli-Kohn-Nirenberg.
3. Existência e não-existência de soluções.

I. Universidade Federal de Minas Gerais. Instituto de Ciências Exatas. Departamento de Matemática.

ATA DA CENTÉSIMA NONAGÉSIMA PRIMEIRA DEFESA DE DISSERTAÇÃO DA ALUNA FABIANA MARIA FERREIRA, REGULARMENTE MATRICULADA NO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA DO INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, REALIZADA NO DIA 20 DE SETEMBRO DE 2011.

Aos vinte dias do mês de setembro de 2011, às 09:00 horas, na Sala 3060, reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para julgar a defesa de dissertação da aluna **Fabiana Maria Ferreira**, intitulada: *" Resultados de existência e de não existência de soluções para uma classe de equações elípticas"*, requisito final para obtenção do Grau de mestre em Matemática. Abrindo a sessão, a Senhora Presidente da Comissão, Profª. Maria José Alves, após dar conhecimento aos presentes o teor das normas regulamentares do trabalho final, passou a palavra a aluna para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a argüição pelos examinadores com a respectiva defesa da aluna. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se sem a presença da aluna e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: a aluna foi considerada aprovada, por unanimidade. O resultado final foi comunicado publicamente a aluna pela Senhora Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, a Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente Ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 20 de setembro de 2011.

Maria José Alves

PROFª. MARIA JOSÉ ALVES
Orientadora (UFMG)

Ronaldo B. Assunção

PROF. RONALDO BRASILEIRO ASSUNÇÃO
Coorientador (UFMG)

Paulo César

PROF. PAULO CÉSAR CARRIÃO
Examinador - (UFMG)

PROF. OLIMPIO HIROSHI MIYAGAKI
Examinador - (UFJF)

Dedico este trabalho aos meus pais Glória e Roberto.

Agradecimentos

A Deus, por ser presença certa em todos os momentos e por me mostrar que a alegria é sempre o remédio da alma.

Aos meus pais, pelo apoio e confiança que depositaram em mim. E acima de tudo pelo amor que se mostrou sempre presente através de palavras ao telefone, abraços de conforto, consolo, incentivo, alegria e saudade. Amo vocês!

Às minhas irmãs, pela amizade e pelos conselhos.

Aos amigos do mestrado, obrigada pela amizade e carinho!

Aos meus orientadores Maria José Alves e Ronaldo Brasileiro, pela paciência e pelo conhecimento transmitido.

Aos professores Olímpio Hiroshi Miyagaki e Paulo César Carrião, pelas dicas valiosas e amizade.

A todos os professores e aos funcionários, em especial a Andréa e a Kelli, que fizeram parte dessa jornada.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta monografia estudamos uma classe de problemas elípticos quase lineares com singularidades no operador e na não-linearidade. Especificamente, consideramos o problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^{\alpha}|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)) = |x|^{\beta}[u(x)]^{p(\alpha,\beta)-1} & x \in \Omega \\ u(x) \geqslant 0 & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 3$ e $p(\alpha,\beta) \equiv \dfrac{p(N+\beta)}{N-p+\alpha}$ é o valor crítico obtido da desigualdade de Caffarelli, Kohn e Nirenberg.

Recentemente muitos resultados foram publicados para esse tipo de problema nos casos em que $0 \in \Omega$ ou em que Ω é um domínio exterior tal que $0 \notin \partial\Omega$. Baseados no artigo de Bartsch, Peng e Zhang [3], consideramos o caso menos estudado em que $0 \in \partial\Omega$. Quando $\alpha \leqslant 0$ e $\beta \geqslant 0$, isto é, quando a desigualdade de Caffarelli, Kohn e Nirenberg falha, demonstramos uma identidade do tipo de Pohozaev. Consequentemente, esse problema não possui solução quando Ω é um cone estrelado em relação a um ponto $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Modificando algumas condições sobre os parâmetros α e β demonstramos a existência de uma solução através da minimização de um funcional definido em um espaço de Sobolev com propriedades que refletem a geometria do domínio Ω.

Também estudamos o caso concreto da desigualdade de Caffarelli, Kohn e Nirenberg. Supondo que $1 < p < N$, $\alpha > p - N$, $\beta > \alpha - p$, $\alpha/p > \beta/p(\alpha,\beta)$ demonstramos a existência de uma solução através da minimização do quociente de Rayleigh-Ritz, isto é,

$$\overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega) \equiv \inf_{\substack{u \in D_0^{\alpha}(\Omega) \\ u \not\equiv 0}} \frac{\displaystyle\int_{\Omega} |x|^{\alpha}|\nabla u(x)|^p \, \mathrm{d}x}{\left(\displaystyle\int_{\Omega} |x|^{\beta}|u(x)|^{p(\alpha,\beta)} \, \mathrm{d}x\right)^{p/p(\alpha,\beta)}}.$$

A existência de uma solução estritamente positiva e de energia mínima (conhecida como solução *ground state*) é obtida como consequência do princípio do máximo. Na mesma direção, usando o fato de que $\overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega)$ é atingido e o princípio do máximo demonstramos um resultado de comparação para $\overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega)$; precisamente, se $\Omega_1 \subsetneq \Omega_2$, então $\overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega_1) > \overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega_2)$.

No caso de domínios diferenciáveis, quando $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$ e com a hipótese de que $0 \in \partial\Omega$, demonstramos um resultado de não existência de solução para alguns tipos de domínios Ω. A ideia é demonstrar que $\overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega) = \overline{S}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^N)$ e usar a invariância do quociente acima para concluir que $\overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega)$ não é atingido.

Baseados nos artigos de Bartsch, Peng e Zhang [3] e de Kou e Peng [17], também estudamos um problema de valor de fronteira com condições do tipo de Neumann. Especificamente,

consideramos o problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^{\alpha}|\nabla u(x)|^{p-2}u(x)) = |x|^{\beta}[u(x)]^{p(\alpha,\beta)-1} - \lambda|x|^{\gamma}[u(x)]^{p-1} & x \in \Omega \\ u(x) > 0 & x \in \Omega \\ |\nabla u(x)|^{p-2}\dfrac{\partial u(x)}{\partial n} = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

em que Ω é domínio limitado, $0 \in \partial\Omega$, , $\lambda \in \mathbb{R}^{+}$ e $1 < p < N$. Soluções fracas desses problemas são pontos críticos do funcional $J\colon W^{1,p}_{\gamma,\alpha}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido no espaço de Sobolev $W^{1,p}_{\gamma,\alpha}(\Omega)$ e dado por

$$J(u) \equiv \frac{1}{p}\int_{\Omega}|x|^{\alpha}|\nabla u(x)|^{p}\,\mathrm{d}x + \frac{\lambda}{p}\int_{\Omega}|x|^{\gamma}|u(x)|^{p}\,\mathrm{d}x - \frac{1}{p(\alpha,\beta)}\int_{\Omega}|x|^{\beta}|u_{+}(x)|^{p(\alpha,\beta)}\,\mathrm{d}x\,.$$

Para isso, demonstramos que o funcional J verifica a condição de Palais-Smale $(PS)_c$ para todos os níveis $c \in \mathbb{R}$ tais que

$$c < \frac{(p-\alpha+\beta)}{2p(N+\beta)}\, S_{\alpha,\beta}^{(N+\beta)/(\beta+p-\alpha)}.$$

O principal argumento da demonstração desse fato é um lema de concentração-compacidade. Para obtermos uma sequência de Palais-Smale no nível de minimax e com o expoente crítico usamos a hipótese de que a curvatura média em $0 \in \partial\Omega$ é positiva.

Palavras-chave Operador p-laplaciano, existência e não-existência de soluções, desigualdade de Caffarelli, Kohn e Nirenberg.

Abstract

In this monograph we study a class of quasilinear elliptic problems with singularities on the operator and on the nonlinearity. Specifically, we consider the problem

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^{\alpha}|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)) = |x|^{\beta}[u(x)]^{p(\alpha,\beta)-1} & x \in \Omega \\ u(x) \geqslant 0 & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $N \geqslant 3$ and $p(\alpha,\beta) \equiv \dfrac{p(N+\beta)}{N-p+\alpha}$ is the critical value obtained from the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequality.

Recently, several results have been published concerning this type of problem in the cases when $0 \in \Omega$ or when Ω is an exterior domain such that $0 \notin \partial\Omega$. Based on the paper by Bartsch, Peng and Zhang [3], we consider the less studied case where $0 \in \partial\Omega$. When $\alpha \leqslant 0$ and $\beta \geqslant 0$, that is, when the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequality fails, we prove a Pohozaev-type identity. As a consequence, this problem does not have solution when Ω is a cone star-shaped with respect to a point $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Changing some conditions on the parameters α and β we prove an existence result by minimizing a functional defined in a Sobolev space with properties that reflect the geometry of the domain Ω.

We also study the concrete case of the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequality. Supposing that $1 < p < N$, $\alpha > p - N$, $\beta > \alpha - p$, $\alpha/p > \beta/p(\alpha,\beta)$, we prove an existence result by minimizing the Rayleigh-Ritz quotient, that is,

$$\overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega) \equiv \inf_{\substack{u \in D_0^{\alpha}(\Omega) \\ u \not\equiv 0}} \frac{\displaystyle\int_{\Omega} |x|^{\alpha}|\nabla u(x)|^{p}\, \mathrm{d}x}{\left(\displaystyle\int_{\Omega} |x|^{\beta}|u(x)|^{p(\alpha,\beta)}\, \mathrm{d}x\right)^{p/p(\alpha,\beta)}}.$$

The existence of a strictly positive solution with minimal energy (known as *ground state* solution) is obtained as a consequence of the maximum principle. In the same direction, as a consequence of the fact that $\overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega)$ is attained and from the maximum principle, we prove a comparison result for $\overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega)$; precisely, if $\Omega_1 \subsetneq \Omega_2$, then $\overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega_1) > \overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega_2)$.

In the case of smooth domains, when $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$ and with the hypothesis $0 \in \partial\Omega$ we prove a nonexistence result for some types of domains Ω. The idea is to prove that $\overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega) = \overline{S}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^N)$ and to use the invariance of the quotient to conclude that $\overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega)$ is not attained.

Based on the papers by Bartsch, Peng, and Zhang [3] and by Kou and Peng [17] we also study a boundary value problem with Neumann condition. We consider the problem

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^{\alpha}|\nabla u(x)|^{p-2}u(x)) = |x|^{\beta}[u(x)]^{p(\alpha,\beta)-1} - \lambda|x|^{\gamma}[u(x)]^{p-1} & x \in \Omega \\ u(x) > 0 & x \in \Omega \\ |\nabla u(x)|^{p-2}\dfrac{\partial u(x)}{\partial n} = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

where $0 \in \partial\Omega$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ and $1 < p < N$. Weak solutions of these problems are critical points of the functional $J\colon W^{1,p}_{\gamma,\alpha}(\Omega) \to \mathbb{R}$ defined in the Sobolev space $W^{1,p}_{\gamma,\alpha}(\Omega)$ and given by

$$J(u) \equiv \frac{1}{p}\int_\Omega |x|^\alpha |\nabla u(x)|^p \,\mathrm{d}x + \frac{\lambda}{p}\int_\Omega |x|^\gamma |u(x)|^p \,\mathrm{d}x - \frac{1}{p(\alpha,\beta)}\int_\Omega |x|^\beta |u_+(x)|^{p(\alpha,\beta)} \,\mathrm{d}x\,.$$

To show this, we prove that the functional J verifies the Palais-Smale condition $(PS)_c$ for all levels $c \in \mathbb{R}$ such that

$$c < \frac{(\beta + p - \alpha)}{2p(N+\beta)}\, S_{\alpha,\beta}^{(N+\beta)/(\beta+p-\alpha)}.$$

The main argument in the proof of this fact is a concentration-compactness lemma. To obtain a Palais-Smale sequence with a minimax level under the critical exponent we use the hypothesis that the mean curvature in $0 \in \partial\Omega$ is positive.

Key-words p-Laplacian operator, existence and nonexistence of solutions,
Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequality.

Notações

$\equiv$	igualdade por definição
$\mathbb{R}^+$	conjunto dos números reais positivos
$\mathbb{R}^-$	conjunto dos números reais negativos
$x = (x_1, \ldots, x_N)$	elemento de $\mathbb{R}^N$
$\lvert x\rvert = \big(\sum_{i=1}^N x_i^2\big)^{1/2}$	norma do elemento $x \in \mathbb{R}^N$
$B_\rho(x)$	bola aberta de raio ρ e centro em $x \in \mathbb{R}^N$
B_ρ	bola aberta de raio ρ e centro na origem
ω_N	volume da bola $B_\rho(x)$ em $\mathbb{R}^N$
$N\omega_N$	área da superfície esférica $\partial B_\rho(x)$ em $\mathbb{R}^N$
$p' \equiv \dfrac{p}{p-1}$	expoente conjugado de p
$p^* \equiv \dfrac{Np}{N-p}$	expoente crítico de Sobolev
$p(\alpha,\beta) \equiv \dfrac{p(N+\beta)}{N-p+\alpha}$	expoente crítico de Hardy-Sobolev
$\nabla u(x) \equiv \Big(\dfrac{\partial u(x)}{\partial x_1}, \ldots, \dfrac{\partial u(x)}{\partial x_N}\Big)$	gradiente da função u
$\operatorname{div}(u_1(x), \ldots, u_N(x)) \equiv \dfrac{\partial u_1(x)}{\partial x_1} + \cdots + \dfrac{\partial u_N(x)}{\partial x_N}$	divergente do campo $(u_1(x), \ldots, u_N(x))$
$\Delta u(x) \equiv \operatorname{div}\left[\nabla u(x)\right] = \displaystyle\sum_{i=1}^N \dfrac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2}$	operador laplaciano
$\Delta_p u(x) \equiv \operatorname{div}\left[\lvert\nabla u(x)\rvert^{p-2}\nabla u(x)\right]$	operador p-laplaciano
X^*	espaço dual do espaço X
supp (u)	suporte da função $u\colon \Omega \to \mathbb{R}^N$
$C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$	espaço das funções infinitamente diferenciáveis e de suporte compacto em $\mathbb{R}^N$
$L^p(\mathbb{R}^N)$	espaço de Lebesgue
$\lVert u\rVert_{L^p} \equiv \Big(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \lvert u(x)\rvert^p \,\mathrm{d}x\Big)^{1/p}$	norma no espaço de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^N)$
$W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \equiv \{u \in L^p(\mathbb{R}^N) : \nabla u(x) \in (L^p(\mathbb{R}^N))^N\}$	espaço de Sobolev
$\lVert u\rVert \equiv \Big(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} \lvert\nabla u(x)\rvert^p \,\mathrm{d}x\Big)^{1/p}$	norma do gradiente no espaço de Sobolev $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$
$W_0^{1,p}(\Omega)$	espaço de Sobolev com traço nulo
$H^1(\Omega) \equiv W^{1,2}(\Omega)$	espaço de Hilbert
$H_0^1(\Omega) \equiv W_0^{1,2}(\Omega)$	espaço de Hilbert com traço nulo
$D_0^\alpha(\Omega)$	completamento de $C_0^\infty(\Omega)$ na norma $\lVert u\rVert_{D_0^\alpha}$
$\lVert u\rVert_{D_0^\alpha} = \Big(\displaystyle\int \lvert x\rvert^\alpha \lvert\nabla u\rvert^p\Big)^{1/p}$	norma do espaço de Sobolev $D_0^\alpha(\Omega)$

$D^{\alpha}_{0,r}(\Omega)$	funções de $D^{\alpha}_{0}(\Omega)$ invariantes por rotações em torno do eixo y
$W^{1,p}_{\gamma,\alpha}(\Omega) \equiv \Big\{ u \in L^{p}_{\gamma}(\Omega)\colon \int \lvert x\rvert^{\alpha} \lvert\nabla u\rvert^{p}\,\mathrm{d}x + \lambda \int \lvert x\rvert^{\gamma}\lvert u\rvert^{p}\,\mathrm{d}x < \infty \Big\}$	espaço de Sobolev
$F(u) \equiv \dfrac{\displaystyle\int_{\Omega} \lvert x\rvert^{\alpha}\lvert\nabla u(x)\rvert^{p}\,\mathrm{d}x}{\Big[\displaystyle\int_{\Omega} \lvert x\rvert^{\beta}\lvert u(x)\rvert^{p(\alpha,\beta)}\,dx\Big]^{p/p(\alpha,\beta)}}$	quociente de Rayleigh-Ritz
S	$\inf\limits_{\substack{u\in D^{\alpha}_{0,r}(\Omega)\\ u\not\equiv 0}} F(u)$
$\overline{S}_{\alpha,\beta}$	$\inf\limits_{\substack{u\in D^{\alpha}_{0}(\Omega)\\ u\not\equiv 0}} F(u)$
$u_n \to u$	convergência forte (em norma)
$u_n \rightharpoonup u$	convergência fraca
$u_n \to u$ q.t.p. em X	convergência em quase todo ponto de X
$u_{+}(x) \equiv \max\{u(x), 0\}$	parte positiva da função u
$u_{-}(x) \equiv \min\{u(x), 0\}$	parte negativa da função u
$\Omega_{\lambda} = \lambda\Omega \equiv \{\lambda x \in \mathbb{R}^{N}\colon x \in \Omega\}$	homotetia de Ω por fator $\lambda \in \mathbb{R}$
$\mathcal{C}^{0}(\Omega)$	espaço das funções reais contínuas
$\mathcal{C}^{k}(\Omega)$	espaço das funções reais k-vezes continuamente diferenciáveis
$\mathcal{C}^{0,\alpha}(\Omega)$	espaço das funções reais Hölder contínuas
$\mathcal{C}^{1,\alpha}(\Omega)$	espaço das funções reais com derivadas Hölder contínuas
$\Gamma(z) \equiv \displaystyle\int_{0}^{\infty} t^{z-1}e^{-t}\,dt$	função gama
$B(z,w) \equiv \dfrac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$	função beta
$(PS)_{c}$	sequência de Palais-Smale no nível c

Sumário

1 Introdução aos métodos de minimização

1.1 O método direto do cálculo das variações

Entre as diversas teorias usadas no estudo de equações diferenciais parciais não lineares, os métodos variacionais têm se mostrado particularmente úteis no caso de equações elípticas. Ilustramos essa teoria com um exemplo clássico referente à equação de Laplace. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^3$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ diferenciável e seja $g\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Consideramos o problema de determinar uma função $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ tal que

$$\begin{cases} \Delta u(x) = 0 & x \in \Omega, \\ u(x) = g(x) & x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.1}$$

Uma das interpretações desse problema é a seguinte: o conjunto Ω representa um objeto feito de um material condutor de calor; a temperatura dos pontos da fronteira $\partial\Omega$ é prescrita pela função g; e a temperatura de equilíbrio no interior desse objeto é a função u a ser determinada.

O princípio de Dirichlet consiste em substituir o problema (1.1) pelo problema de determinar uma função $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$, com $u(x) = g(x)$ para $x \in \partial\Omega$ e que minimiza o valor do funcional

$$I(u) = \int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x,$$

conhecido como integral de Dirichlet. Em outros termos, determinar uma função u pertencente à classe das funções admissíveis

$$A \equiv \{w \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega) \colon w(x) = g(x) \text{ se } x \in \partial\Omega \text{ e } \int_\Omega |\nabla w|^2 \, dx \text{ é finita}\}$$

tal que

$$\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \leqslant \int_\Omega |\nabla w|^2 \, dx,$$

para toda função $w \in A$. Observamos que a equação de Laplace $\Delta u = 0$, que possui diversas aplicações em Matemática e em outras ciências, é a equação de Euler-Lagrange associada ao funcional de Dirichlet.

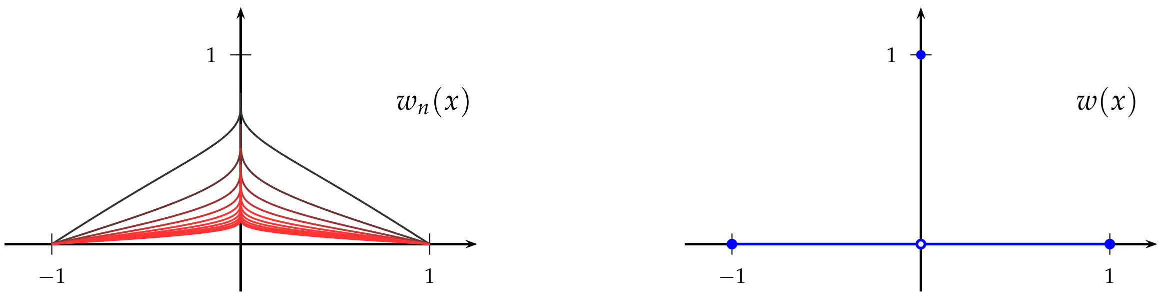
O princípio de Dirichlet foi usado na resolução de muitos problemas; entretanto, a ideia de que o problema de minimização sempre possui solução deve ser questionada. A seguir apresentamos um exemplo de problema de minimização que pode ser formulado nos moldes acima mas que não possui solução; a referência para esse e para os demais exemplos dessa seção é o texto de Frehse [12].

Seja $\Omega \equiv \{x \in \mathbb{R}^N : 0 < |x| \leqslant 1\}$ em que $N \geq 2$ e seja $g\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ definida por $g(x) = 0$ se $|x| = 1$ e $g(x) = 1$ se $x = 0$. Nesse caso, a função g é a restrição a $\partial\Omega$ de uma função continuamente diferenciável definida em $\mathbb{R}^N$ e a correspondente classe A de funções admissíveis é não vazia.

Afirmamos que $\inf_{w \in A} \left\{ \int_\Omega |\nabla w|^2 \, \mathrm{d}x \right\} = 0$. Para verificar essa afirmativa consideramos a sequência $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ definida por

$$w_n(x) \equiv \frac{2}{\pi} \arctan\left(\frac{1}{n} \ln\left(\ln\left(\frac{e}{|x|}\right)\right)\right).$$

Para comprovar que $w_n \in A$ observamos que $w_n(x) = 0$ se $|x| = 1$ e que $\lim_{x\to 0} w_n(x) = 1$; portanto, por uma extensão contínua temos $w_n(0) = 1$. Também temos $w_n \in \mathcal{C}^2(B_1 \backslash \{0\})$ e $w_n \in \mathcal{C}(\overline{\Omega})$. Além disso, é claro que a sequência $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ converge para a função $w\colon [-1, 1] \to \mathbb{R}$ dada por $w(x) = 0$ se $x \neq 0$ e $w(x) = 1$ se $x = 0$.



Usando as propriedades elementares das funções logarítmicas e trigonométricas, temos

$$\frac{\partial w_n}{\partial x_i}(x) = \frac{2}{\pi} \frac{1}{n} \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{n} \ln\left(\ln\left(\frac{e}{|x|}\right)\right)\right)^2} \frac{1}{\ln\left(\frac{e}{|x|}\right)} \frac{(-x_i)}{|x|^2}$$

e

$$|\nabla w_n|^2 \leqslant \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{n^2} \left| \ln\left(\frac{e}{|x|}\right) \right|^{-2}.$$

Usando coordenadas polares é possível demonstrar que a integral $\int_\Omega \left| \ln\left(\frac{e}{|x|}\right) \right|^{-2} \mathrm{d}x$ é finita. Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla w_n|^2 \, \mathrm{d}x \leqslant \lim_{n\to\infty} \frac{4}{\pi^2} \frac{1}{n^2} \int_\Omega \left| \ln\left(\frac{e}{|x|}\right) \right|^{-2} \mathrm{d}x = 0.$$

Isso conclui a verificação da afirmativa. Assim, se existir uma função $u \in A$ que minimiza a integral de Dirichlet, então $\int_\Omega |\nabla u|^2 \, \mathrm{d}x = 0$ e, portanto, $u(x)$ é constante já que Ω é conexo.

Mas isso é uma contradição com o fato de que $u \in A$. Dessa forma, o problema de minimização não possui solução.

Para analisar o que ocorre nesse tipo de situação descrevemos sucintamente os passos que normalmente seguimos quando resolvemos um problema de minimização de uma função $F\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$.

1. Verificamos que F é contínua ou pelo menos que F é semicontínua inferiormente, isto é, para todo $t \in \mathbb{R}$, o conjunto de nível $F^t \equiv \{u \in \mathbb{R}^N : F(u) \leqslant t\}$ é fechado. Também verificamos que a função F é limitada inferiormente.

2. Consideramos uma sequência minimizante, isto é, uma sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$ tal que $\lim_{n\to\infty} F(u_n) = \inf_{u\in\mathbb{R}^N} F(u)$ e verificamos que a sequência minimizante é limitada. Usualmente esta etapa é obtida através da verificação de que a função F é coerciva, isto é, $\lim_{|u|\to\infty} F(u) = \infty$.

3. Usamos o fato de que conjuntos fechados e limitados em $\mathbb{R}^N$ são compactos e selecionamos uma subsequência convergente $(u_{n_j})_{j\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$ tal que $\lim_{j\to\infty} u_{n_j} = u$. Como $\lim_{j\to\infty} F(u_{n_j}) = \inf_{v\in\mathbb{R}^N} F(v)$, pela semicontinuidade inferior de F temos que $F(u) \leqslant \inf_{v\in\mathbb{R}^N} F(v)$ e isto implica que F atinge o seu ínfimo.

4. Verificamos que u é um ponto crítico da função F.

Quando aplicado a integrais variacionais da forma $F(x,u,\nabla u) = \int_\Omega f(x,u,\nabla u)\,\mathrm{d}x$ esses passos constituem o *método direto do cálculo das variações*. Usualmente o ponto crítico cuja existência é garantida no passo 4 corresponde a uma solução fraca da equação diferencial de Euler-Lagrange associada à função F.

Nesta monografia estudamos apenas resultados de existência e de não existência de soluções fracas para equações diferenciais parciais envolvendo o operador p-laplaciano; a questão da regularidade das soluções fracas, embora extremamente rica e importante para a teoria do cálculo das variações, não será aqui apresentada. Entretanto, como as não linearidades das equações que estudamos verificam uma desigualdade do tipo $|x|^\beta u^{p(\alpha,\beta)-1} < C(1+|u|^{p(\alpha,\beta)-1})$ em que $C \in \mathbb{R}_+$ para qualquer domínio limitado Ω' tal que $0 \notin \overline{\Omega'}$, a teoria de regularidade para equações elípticas e o princípio do máximo forte podem ser aplicados a Ω'. Para maiores detalhes consulte o livro de Struwe [21, Lemma B3, pág. 218]; veja também a Proposição 2.6.

O método direto do cálculo das variações não funciona se não escolhemos adequadamente o conjunto A das funções admissíveis e sua topologia. Por exemplo, seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$ diferenciável e seja $g\colon \partial\Omega \to \mathbb{R}$ uma função contínua. Se o conjunto de funções admissíveis

$$A \equiv \left\{u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega) : u(x) = g(x) \text{ se } x \in \partial\Omega \text{ e } \int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x \text{ é finita}\right\}$$

é equipado com a norma do máximo

$$\|u\|_\infty \equiv \max_{x\in\Omega} |u(x)|$$

então os passos 2 e 3 acima não são possíveis. De fato, seja a sequência $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset A$ definida por

$$v_n(x) \equiv \ln\Big(\ln\Big(\frac{e\sqrt{1+1/n}}{\sqrt{|x|^2+1/n}}\Big)\Big)$$

para $x \in \Omega \equiv \{x \in \mathbb{R}\colon |x| \leqslant 1\}$, que converge para a função $v(x) \equiv \ln\Big(\ln\Big(\frac{e}{|x|^2}\Big)\Big)$. Dessa forma temos

$$\frac{\partial v_n}{\partial x_i}(x) = \frac{-x_i}{|x|^2+1/n}\,\frac{1}{\ln\Big(\frac{e\sqrt{1+1/n}}{\sqrt{|x|^2+1/n}}\Big)}$$

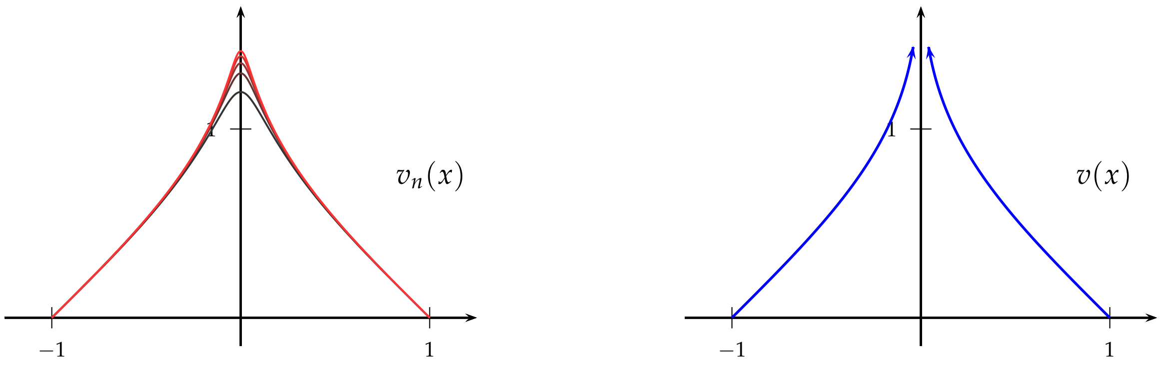
e

$$|\nabla v_n|^2 = \frac{|x|^2}{(|x|^2+1/n)^2}\,\frac{1}{\Big(\ln\Big(\frac{e\sqrt{1+1/n}}{\sqrt{|x|^2+1/n}}\Big)\Big)^2} < \frac{1}{|x|^2}.$$

Portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \|v_n\|_\infty = \infty \qquad \text{mas} \qquad \lim_{n\to\infty} \int_\Omega |\nabla v_n|^2 \,\mathrm{d}x \ \text{ é finito,}$$

ou seja, usando a norma do máximo a integral de Dirichlet não é coerciva e o passo 2 falha. Assim sendo, dada uma sequência minimizante não podemos garantir a existência de uma subsequência convergente e o passo 3 também falha.



Considerando o mesmo conjunto A de funções admissíveis do exemplo anterior, agora equipado com a norma

$$\|u\|_{1,2} = \Big(\int_\Omega |u|^2 \,\mathrm{d}x\Big)^{1/2} + \Big(\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x\Big)^{1/2}$$

então o passo 3 não é possível. De fato, usando a mesma sequência de funções do exemplo anterior vemos que a integral de Dirichlet é coerciva em relação a essa norma, mas como o conjunto de funções admissíveis tem dimensão infinita, não podemos garantir a compacidade de conjuntos fechados e limitados. Assim sendo, não podemos garantir a existência de uma subsequência convergente e o passo 3 falha novamente.

Uma tentativa plausível poderia ser o uso da topologia fraca. Entretanto, essa alternativa não funciona se usamos o espaço de funções $\mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ como conjunto de funções admissíveis, já que esse conjunto não é fechado e também não é reflexivo. Assim, o método apropriado é o de usar o completamento de $\mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ em relação à norma $\|u\|_{1,2}$ ou em relação a uma outra norma equivalente a essa como espaço de funções admissíveis. O completamento de $\mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ em relação à norma $\|u\|_{1,2}$ é denotado por $W^{1,2}(\Omega)$ ou por $H^1(\Omega)$ e é denominado espaço de Sobolev.

Mais precisamente, o espaço $W^{1,2}(\Omega)$ é definido como o espaço quociente $\tilde{W}^{1,2}(\Omega)/N$ em que $\tilde{W}^{1,2}$ é o conjunto das sequências de Cauchy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ com a propriedade de que $\left(\int_\Omega |u_n|^2 \, dx\right)^{1/2} + \left(\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \, dx\right)^{1/2}$ são finitas e $\|u_n - u_m\|_{1,2} \to 0$ quando $m, n \to \infty$; N é o conjunto dos elementos $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \tilde{W}^{1,2}(\Omega)$ tais que $\|u_n\|_{1,2} \to 0$ quando $n \to \infty$.

Como os elementos do espaço $W^{1,2}(\Omega)$ são classes de equivalência de sequências de Cauchy, devemos considerar a questão da definição da integral de Dirichlet $\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx$ no espaço $W^{1,2}(\Omega)$. De fato, se $u \in W^{1,2}(\Omega)$, então existe uma sequência de Cauchy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ tal que $\|u_n - u_m\|_{1,2} \to 0$ quando $m, n \to \infty$ e com $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in u$. Como a sequência $(\nabla u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(\Omega)$ é de Cauchy e já que o espaço $L^2(\Omega)$ é completo, a sequência numérica das integrais de Dirichlet $\int_\Omega |\nabla u_n|^2 \, dx$ possui um limite quando $n \to \infty$, que podemos definir como o valor de $\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx$. Certamente essa definição independe da escolha particular da sequência $\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx$. Como a sequência $(\nabla u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset L^2(\Omega)$ é de Cauchy, podemos associar a cada elemento $u \in W^{1,2}(\Omega)$ o gradiente $\nabla u \in L^2(\Omega)$, que fica definido a menos de conjuntos de medida zero. Analogamente, a cada elemento $u \in W^{1,2}(\Omega)$ podemos associar uma função $u \in L^2(\Omega)$ que também fica definido a menos de conjuntos de medida zero.

Verificamos também que a cada elemento $u \in W^{1,2}(\Omega)$ podemos associar uma função que fica definida a menos de um conjunto de capacidade zero. Para a definição de capacidade e algumas de suas propriedades, veja a seção A.6. Aqui apenas observamos que uma função $u \in W^{1,2}(\Omega)$ não registra informações em conjuntos de capacidade zero. Esta é uma outra razão porque não podemos verificar a existência de uma função minimizante para o primeiro exemplo. Naquela situação havíamos prescrito condições de fronteira em um ponto isolado e que tem capacidade zero; e como o espaço $W^{1,2}(\Omega)$ é a classe natural de funções admissíveis, as condições de fronteira podem ser violadas em conjuntos de capacidade zero.

Para preservar as condições de fronteira normalmente consideramos o espaço $W_0^{1,2}(\Omega)$, definido como o fecho do espaço $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ das funções teste em relação à norma $\|u\|_{1,2}$. Claramente, vale a inclusão $W_0^{1,2}(\Omega) \subset W^{1,2}(\Omega)$ e podemos verificar que $W_0^{1,2}(\Omega)$ consiste das funções de $W_{1,2}(\Omega)$ que se anulam na fronteira $\partial\Omega$ a menos de um conjunto de capacidade zero. Essa é uma das maneiras de compreender porque usamos o espaço $W_0^{1,2}(\Omega)$ para expressar as condições de fronteira.

Encerramos esta seção enunciando uma proposição que sintetiza esses comentários. Trata-se de um resultado sobre minimização convexa em espaços reflexivos.

1.1 Proposição. *Seja X um espaço de Banach reflexivo e seja $f\colon X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ uma função convexa, semicontínua inferiormente e coerciva. Então existe um único elemento $u \in X$ que minimiza a função f em X, isto é, vale a desigualdade $f(u) \leqslant f(w)$ para todo $w \in X$.*

Referência. Consulte o livro de Attouch, Buttazzo e Michaille [1, Teorema 3.3.4, pág. 93]. □

1.2 Exemplo do método de minimização para o operator *p*-laplaciano

Nesta seção apresentamos um exemplo de aplicação da Proposição 1.1 para o operador não linear p-laplaciano, que é definido por

$$\begin{aligned}\Delta_p v(x) &\equiv \sum_{i=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\Big(|\nabla v(x)|^{p-2}\,\frac{\partial v(x)}{\partial x_i}\Big)\\ &= \operatorname{div}(|\nabla v(x)|^{p-2}\nabla v(x)),\end{aligned}$$

em que $1 < p < +\infty$. Essa hipótese é crucial já que, para um domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, podemos considerar o espaço $W^{1,p}(\Omega)$, definido como o completamento de $C^\infty(\Omega)$ em relação à norma dada por

$$\|v\|_{W^{1,p}(\Omega)} \equiv \Big(\int_\Omega |\nabla v(x)|^p\,\mathrm{d}x + \int_\Omega |v(x)|^p\,\mathrm{d}x\Big)^{1/p}.$$

Sabemos que $W^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach e como $1 < p < +\infty$, esse espaço de Banach é reflexivo. Também consideramos o espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$, definido como o completamento de $C_0^\infty(\Omega)$ em relação à norma acima. Dessa forma $W_0^{1,p}(\Omega)$ é um subespaço fechado de um espaço de Banach reflexivo; portanto, $W_0^{1,p}(\Omega)$ também é um espaço de Banach reflexivo.

Uma outra forma de compreender o espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ é descrita a seguir. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio com fronteira $\partial\Omega \in \mathcal{C}^1$. Então para todo número $p \in \mathbb{R}$ tal que $p \geq 1$ o conjunto $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ é denso em $W^{1,p}(\Omega)$ e a aplicação restrição $\gamma_0\colon \mathcal{D}(\overline{\Omega}) \to L^p(\partial\Omega)$ definida por $\gamma_0(v) \equiv v|_{\partial\Omega}$, que a cada elemento $v \in \mathcal{D}(\overline{\Omega})$ associa sua restrição a $\partial\Omega$, pode ser estendida por continuidade a uma aplicação linear de $W^{1,p}(\Omega)$ em $L^p(\partial\Omega)$, que também é denotada por γ_0. A aplicação $\gamma_0\colon W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\partial\Omega)$ é chamada de operador traço. Dessa forma, o espaço de Sobolev $W_0^{1,p}(\Omega)$ é o núcleo do operador γ_0, isto é, $W_0^{1,p}(\Omega) = \{v \in W^{1,p}(\Omega)\colon \gamma_0(v) = 0\}$.

Observamos que se $p = 2$ então $\Delta_2 v(x) = \Delta v(x)$, que é o operador linear laplaciano. Nesse caso é comum usar as notações $H^1(\Omega) \equiv W^{1,2}(\Omega)$ e $H_0^1(\Omega) \equiv W_0^{1,2}(\Omega)$, que são espaços de Hilbert.

Como ilustração de um problema de valor de fronteira para o operador p-laplaciano, consideramos o problema de Dirichlet. A demonstração é baseada nos livros de Attouch, Buttazzo e Michaille [1, Theorem 6.6.1, pág. 249] e Chipot [8, Theorem 17.1, pág. 231].

1.2 Proposição. *Seja $p \in \mathbb{R}_+$ um número tal que $1 < p < +\infty$. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e limitado e seja $f \in L^\infty(\Omega)$ uma função qualquer. As seguintes afirmativas são válidas.*

(a) Existe uma única solução $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ do problema de minimização

$$\min\Big\{\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p \,\mathrm{d}x - \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x \colon v \in W_0^{1,p}(\Omega)\Big\}. \tag{1.2}$$

(b) Equivalentemente, a função $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ é solução do problema

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x, \qquad v \in W_0^{1,p}(\Omega), \tag{1.3}$$

isto é, $u > 0$ no sentido das distribuições.

(c) A função $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$, solução do problema (1.3), é uma solução fraca do problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f & x \in \Omega, \\ u = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.4}$$

em que a equação diferencial é verificada no sentido das distribuições e a condição de fronteira é verificada no sentido do operador traço $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$.

Demonstração. Para verificar o item (a) seguimos os passos do método direto do cálculo das variações e aplicamos a Proposição 1.1. Consideramos inicialmente o espaço $W_0^{1,p}(\Omega)$ e o funcional $J \colon W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$J(v) \equiv \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v|^p \,\mathrm{d}x - \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x\,. \tag{1.5}$$

O funcional J é convexo, isto é, dadas as funções $v_1, v_2 \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e dado $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $0 \leqslant \lambda \leqslant 1$, temos

$$\begin{aligned} J(\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2) &= \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla(\lambda v_1 + (1-\lambda)\nabla v_2)|^p \,\mathrm{d}x - \int_\Omega f(\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2) \,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \frac{1}{p}\int_\Omega (\lambda|\nabla v_1| + (1-\lambda)|\nabla v_2|)|)^p \,\mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega f v_1 - (1-\lambda)\int_\Omega f v_2) \,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Agora usamos a função $\varphi\colon \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$ definida por $\varphi(r) \equiv r^p$. Dessa forma temos que $\varphi''(r) = p(p-1)r^{p-2}$ é uma função não negativa e, portanto, φ é uma função convexa. Assim, temos

$$\begin{aligned} J(\lambda v_1 + (1-\lambda)v_2) \equiv \lambda\Big(\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v_1|^p \,\mathrm{d}x - \int_\Omega f v_1 \,\mathrm{d}x\Big) \\ + (1-\lambda)\Big(\frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla v_2|^p \,\mathrm{d}x - \int_\Omega f v_2 \,\mathrm{d}x\Big) \\ \leqslant \lambda J(v_1) + (1-\lambda)J(v_2). \end{aligned}$$

Para o passo 1 mostramos que o funcional J é contínuo em $W_0^{1,p}(\Omega)$. De fato, observamos inicialmente que

$$\begin{aligned} \int_\Omega ||\nabla v| - |\nabla w||^p \,\mathrm{d}x &\leqslant \int_\Omega |\nabla(v-w)|^p \,\mathrm{d}x \\ &\leqslant \|v-w\|^p_{W_{1,p}(\Omega)}. \end{aligned}$$

Essa desigualdade implica na continuidade da aplicação $\psi\colon W^{1,p}(\Omega) \to L^p(\Omega)$, definida por $\psi(v) \equiv |\nabla v|$ e, portanto, implica na continuidade do funcional $I\colon W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por $I(v) \equiv \int_\Omega |\nabla v|^p \,\mathrm{d}x$. Como $f \in L^\infty(\Omega)$, temos que

$$\Big|\int_\Omega f v \,\mathrm{d}x\Big| \leqslant \|f\|_\infty \|v\|_1 \leqslant \|f\|_\infty |\Omega|^{1/p'} \|v\|_p \leqslant \|f\|_\infty |\Omega|^{1/p'} \|v\|_{W^{1,p}(\Omega)}.$$

Portanto, a aplicação $L\colon W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definida por $L(v) \equiv \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x$ é uma aplicação linear contínua.

Para o passo 2 mostramos que o funcional J é coercivo. Nesse caso usamos a desigualdade clássica de Poincaré em $W_0^{1,p}(\Omega)$, que não requer condições de regularidade sobre Ω mas apenas que Ω seja limitado. Pela desigualdade de Poincaré (Lema A.14), sabemos que existe uma constante positiva $C \in \mathbb{R}$ tal que

$$\int_\Omega |v|^p \,\mathrm{d}x \leqslant C \int_\Omega |\nabla v|^p \,\mathrm{d}x \tag{1.6}$$

para todo $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Para verificar a coercividade do funcional J mostramos a propriedade equivalente de que seus subníveis são conjuntos limitados. Fixamos $\lambda \in \mathbb{R}$ e consideramos o conjunto

$$J^\lambda \equiv \{v \in W_0^{1,p}(\Omega) \colon J(v) \leqslant \lambda\}.$$

Para $v \in J^\lambda$, usando a definição do funcional J temos

$$\begin{aligned} \int_\Omega |\nabla v|^p \,\mathrm{d}x &\leqslant p \int_\Omega |f||v| \,\mathrm{d}x + p\lambda \\ &\leqslant p\|f\|_\infty |\Omega|^{1/p'} \|v\|_p + p\lambda. \end{aligned} \tag{1.7}$$

Usando as desigualdades (1.6) e (1.7), obtemos

$$\|v\|_p^p \leqslant pC\|f\|_\infty |\Omega|^{1/p'} \|v\|_p + pC\lambda,$$

ou seja,

$$\|v\|_p^{p-1} \leqslant pC\|f\|_\infty |\Omega|^{1/p'} + \frac{pC\lambda}{\|v\|_p}.$$

Isso implica que $\|v\|_p$ é limitada em $W^{1,0}_\infty(\Omega)$

Para o passo 3 consideramos uma sequência minimizante $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W_0^{1,2}(\Omega)$. Pelo passo 2 essa sequência é limitada e como o espaço $W_0^{1,2}(\Omega)$ é reflexivo, existe um elemento $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ e existe uma subsequência, ainda denotada da mesma forma, tal que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $W_0^{1,2}(\Omega)$ quando $n \to \infty$.

Antes de prosseguir, resumimos os resultados anteriores: O conjunto $W_0^{1,p}(\Omega)$ é um espaço de Banach reflexivo e o funcional $J\colon W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ é convexo, contínuo e coercivo. As hipóteses da Proposição 1.1 são verificadas e o problema de minimização (1.2) possui solução. A unicidade da solução é uma consequência da convexidade estrita do funcional $I\colon W_0^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}^N$ definido por $I(v) \equiv \int_\Omega |\nabla v|^p \,dx$, que é uma consequência da convexidade estrita da função $\varphi(r) \equiv r^p$.

Para o passo 4 e, consequentemente, para verificar o item (b), estabelecemos a equação de Euler-Lagrange correspondente ao funcional J. Para quaisquer $u, v \in W_0^{1,p}(\Omega)$ e para qualquer $t \in \mathbb{R}^+$, temos

$$\frac{1}{t}[J(u+tv) - J(u)] \geqslant 0,$$

e devemos passar ao limite nessa desigualdade quanto $t \to 0^+$. Temos

$$\frac{1}{p}\int_\Omega \frac{|\nabla u + t\nabla v|^p - |\nabla u|^p}{t}\,dx - \int_\Omega fv\,dx \geqslant 0 \tag{1.8}$$

para toda funçao $v \in W_0^{1,p}(\Omega)$. Para passar ao limite na desigualdade (1.8) usamos o teorema da convergência dominada de Lebesgue. Para isso, definimos a função $h(t) \equiv |\nabla u + t\nabla v|^p$; assim, temos $h'(t) = p|\nabla u + t\nabla v|^{p-2}(\nabla u + t\nabla v)\cdot\nabla v$. Portanto,

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}[|\nabla u + t\nabla v|^p - |\nabla u|^p] &= \frac{1}{t}(h(t) - h(0))\\ &= \frac{1}{t}\int_0^1 p|\nabla u + s\nabla v|^{p-2}(\nabla u + s\nabla v)\cdot\nabla v\,ds.\end{aligned}$$

Usando $t \in \mathbb{R}^+$ tal que $0 < t \leqslant 1$, segue que

$$\begin{aligned}\frac{1}{p}[|\nabla u + t\nabla v|^p - |\nabla u|^p] &\leqslant \frac{p}{t}\int_0^t |\nabla u + s\nabla v|^{p-1}|\nabla v|\,ds\\ &\leqslant p(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-1}|\nabla v|.\end{aligned} \tag{1.9}$$

Observamos que $|\nabla v| \in L^p(\Omega)$ e que $(|\nabla u| + |\nabla v|)^{p-1} \in L^{p'}(\Omega)$, pois $p' = p/(p-1)$. Assim, o lado direito da desigualdade (1.9) é uma função que pertence a $L^1(\Omega)$ que é independente de t. Podemos passar ao limite na desigualdade (1.8) para obter

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v\,dx - \int_\Omega fv\,dx \geqslant 0 \qquad v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Substituindo v por $-v$ obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x - \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x \leqslant 0 \qquad v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Combinando esses dois resultados, obtemos

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x \qquad v \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

Para verificar o item (c), consideramos uma função $v \in (L^\infty(\Omega))^*$. Pela definição de derivada fraca temos a igualdade

$$-\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f$$

em que $f \in L^\infty(\Omega)$. Por outro lado, quando Ω é regular, usando o fato de que $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ inferimos que $u = 0$ para $x \in \partial\Omega$ no sentido do operador traço. □

1.3 Observação. Na Proposição 1.2 partimos do funcional J e mostramos que seus pontos críticos são soluções fracas do problema (1.4). Mostraremos como construir esse funcional a partir de uma equação diferencial. Para isso consideramos o problema modelo com condição de fronteira do tipo de Neumann, a saber,

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = f & x \in \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial n} = g & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.10}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio aberto, $1 < p < N$ e $f, g \in L^\infty(\Omega)$. Notamos que no caso $p = 2$ recuperamos a conhecida condição de fronteira de Neumann, a saber, $\partial u(x)/\partial n = g(x)$ para $x \in \partial\Omega$.

Multiplicando a equação diferencial do problema (1.10) por $v \in C^\infty(\Omega)$ e integrando em Ω, obtemos

$$-\int_\Omega \operatorname{div}(|\nabla u|^{p-2}\nabla u) v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x\,.$$

Usando a fórmula de integração por partes (Proposição A.9), resulta

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} |\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \eta} v \,\mathrm{d}\sigma = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x$$

e como $|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial \eta} = g(x)$ em $\partial\Omega$, segue que

$$\int_\Omega |\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla v \,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} g v \,\mathrm{d}\sigma = \int_\Omega f v \,\mathrm{d}x, \tag{1.11}$$

para todo função $v \in C_0^\infty(\Omega)$.

Definimos uma solução fraca do problema (1.10) como uma função $u \in W^{1,p}(\Omega)$ que verifica a identidade integral (1.11) para todo função $v \in C^\infty(\Omega)$. Essa solução fraca se caracteriza como ponto crítico do funcional $J\colon W^{1,p}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$J(u) = \frac{1}{p}\int_\Omega |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x - \int_\Omega f u \,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} g u \,\mathrm{d}\sigma\,.$$

1.3 A identidade de Pohozaev e um resultado de não existência

Uma das principais dificuldades para aplicar o método direto do cálculo das variações é a verificação do passo 3. A situação ideal é a seguinte: Suponhamos que $I\colon A \to \mathbb{R}$ seja um funcional diferenciável definido em uma classe A de funções admissíveis; seja $(u_h)_{h\in\mathbb{N}} \subset A$ uma sequência minimizante para o funcional I, isto é, $I(u_h) \to \inf_{u\in A} I(u)$ quando $h \to +\infty$. Gostaríamos de concluir que a sequência $(u_h)_{n\in\mathbb{N}}$ possui uma subsequência convergente para uma função pertencente à classe A. Quando isso ocorre, dizemos que o problema tem compacidade. Muitos problemas desse tipo já foram estudados e podemos afirmar que são relativamente bem conhecidos. Por exemplo, se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado e se $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W^{1,2}(\Omega)$ é uma sequência limitada, então existe $u \in W^{1,2}(\Omega)$ e existe uma subsequência, sempre denotada da mesma forma, tal que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $W^{1,2}(\Omega)$ quando $n \to \infty$. Usando o teorema de imersão compacta de Rellich-Kondrachov (Proposição A.15), podemos extrair uma nova subsequência de modo que $u_n \to u$ fortemente em $L^q(\Omega)$ para $q \in \mathbb{R}_+$ tal que $2 < q < 2^* \equiv 2N/(N-2)$ se $N \geqslant 3$ e $2 < q < +\infty$ se $N = 1$ ou $N = 2$.

Entretanto, existem muitos problemas em que a compacidade falha. Quando as técnicas usuais do cálculo das variações não podem ser usadas diretamente para o passo 3 dizemos que se trata de um problema com *ausência de compacidade*. Por exemplo, se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio não limitado então o argumento descrito no parágrafo anterior não funciona mais. De fato, seja $\Omega = \mathbb{R}^N$ e seja $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^N$ uma sequência tal que $|x_n| \to \infty$ quando $n \to \infty$. Dada uma função não nula $u_0 \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$, definimos a sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ por $u_n(x) \equiv u_0(x - x_n)$. Então $\|u_n\|_{1,2} = \|u_0\|_{1,2}$ e $\|u_n\|_{L^q} = \|u_0\|_{L^q}$. Assim, $u_n(x) \to 0$ q.t.p. em $\mathbb{R}^N$ e, portanto, $u_n \rightharpoonup 0$ fracamente em $\subset W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$; entretanto, a sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ não pode convergir para a função nula no espaço $L^q(\mathbb{R}^N)$. O motivo é a invariância da norma pelo grupo de translações.

Entre os problemas com ausência de compacidade citamos, em Geometria: o problema da prescrição da curvatura escalar, o problema de Yamabe e problemas de superfícies mínimas; e em Física: o problema de N corpos e problemas envolvendo equações não lineares de Schrödinger. Esses são alguns dos motivos porque problemas com ausência de compacidade estão sendo intensamente estudados por vários pesquisadores nas últimas décadas, com a obtenção de muitos resultados relevantes.

Sabemos que uma importante classe de problemas com ausência de compacidade está relacionada com o princípio de Dirichlet. Agora consideramos o problema mais geral de minimizar um funcional $I\colon A \to \mathbb{R}$ da forma

$$I(u) \equiv \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2\,\mathrm{d}x + \int_\Omega G(u)\,\mathrm{d}x,$$

em que $G(u) = \displaystyle\int_0^u g(s)\,ds$ é a primitiva de uma função $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ e o conjunto A consiste das funções $u\colon \Omega \to \mathbb{R}$ tais que $u(x) = 0$ se $x \in \partial\Omega$. A correspondente equação de Euler-Lagrange é

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) & \text{se } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{se } x \in \partial\Omega, \end{cases}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}$ é um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$. Como já mencionamos, o espaço natural para estudar este tipo de problema é o espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ das funções pertencentes a $H^1(\Omega)$ que se anulam na fronteira $\partial\Omega$ no sentido do traço, já que nesse espaço a integral de Dirichlet $\int_\Omega |\nabla u(\xi)|^2\,d\xi$ é bem definida. Entretanto, de modo a ter um funcional bem definido no espaço $H_0^1(\Omega)$ também devemos garantir que a integral $\displaystyle\int_\Omega G(u(\xi))\,d\xi$ seja finita e continuamente diferenciável no mesmo espaço. Isto conduz à questão natural das condições de crescimento da função g devido às bem conhecidas imersões de Sobolev. Estas garantem que, para $q \leqslant 2^* \equiv 2N/(N-2)$, temos a imersão contínua $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$, ou equivalentemente, temos a existência de uma constante positiva $c \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|u\|_{L^q} \leqslant C\|u\|_{H_0^1(\Omega)}$ para toda função $u \in H_0^1(\Omega)$. Dessa forma, podemos considerar o problema modelo $g(s) = |s|^{q-2}s$ e para esse caso devemos ter $q \leqslant 2^*$ para que o funcional I esteja bem definido. Na verdade, devemos impor a desigualdade estrita $q < 2^*$ para obtermos a propriedade de compacidade mencionada anteriormente, em que fazemos uso do conhecido Teorema de Rellich-Kondrachov (veja a Proposição A.15), que garante que a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ é compacta.

A seguir mencionamos uma classe de problemas para os quais o funcional não é necessariamente limitado inferiormente. Uma forma de utilizar o método de minimização é através da imposição de certas condições na classe de funções admissíveis. Essas condições são puramente técnicas; entretanto, permitem a aplicação de algumas das ideias anteriores em diversas situações que, a princípio, não poderiam ser estudadas como problemas de minimização. Para enunciar os resultados mais precisamente necessitamos definir o primeiro autovalor do problema envolvendo o operador laplaciano com condições de fronteira do tipo de Dirichlet.

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$. Consideramos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{se } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{se } x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.12}$$

O menor número $\lambda \in \mathbb{R}_+$ para o qual o problema (1.12) possui solução não trivial é denominado primeiro autovalor e é denotado por λ_1. Uma importante caracterização do primeiro autovalor é dada pelo quociente de Rayleigh-Ritz

$$\lambda_1 = \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u(\xi)|^2\,d\xi}{\displaystyle\int_\Omega |u(\xi)|^2\,d\xi}. \tag{1.13}$$

Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega \in \mathcal{C}^\infty$ e seja $q \in \mathbb{R}_+$ tal que $2 < q < 2^* \equiv 2N/(N-2)$ se $N \geqslant 3$ e $2 < q < +\infty$ se $N = 1$ ou $N = 2$. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, consideramos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u + \lambda u = |u|^{q-2}u & \text{se } x \in \Omega, \\ u(x) > 0 & \text{se } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{se } x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.14}$$

1.4 Proposição. *Para todo $\lambda > -\lambda_1$ o problema (1.14) possui solução positiva $u \in \mathcal{C}(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$.*

Referência. Consulte os livros de Struwe [21, Theorem I.2.1, pág. 14] ou de Willem [24, Theorem 1.19, pág. 14]. □

Seja agora $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega \in \mathcal{C}^\infty$ e sejam $N \geqslant 3$ e $q = 2^* \equiv 2N/(N-2)$. Dado $\lambda \in \mathbb{R}$, consideramos o problema

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda u + |u|^{2^*-2}u & \text{se } x \in \Omega, \\ u(x) > 0 & \text{se } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{se } x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.15}$$

Observamos que, de modo a mantermos a consistência com a literatura, no problema (1.15) invertemos o sinal do fator λ em comparação com o problema (1.14).

Assim como no caso da Proposição 1.4, podemos tentar uma abordagem do problema (1.15) usando o método direto do cálculo das variações. Para isso, tentamos obter solução não trivial para o problema como mínimo relativo do funcional

$$I_\lambda(u) \equiv \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \frac{\lambda}{2}\int_\Omega |u|^2 \, dx$$

na esfera unitária do espaço $L^{2^*}(\Omega)$, isto é, no conjunto

$$M \equiv \{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \colon \|u\|_{L^{2^*}(\Omega)} = 1\}.$$

De forma equivalente, podemos tentar minimizar o quociente de Rayleigh-Ritz

$$S_\lambda(\Omega) \equiv \inf_{\substack{u \in W_\alpha^{1,2}(\Omega) \\ u \not\equiv 0}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx + \lambda \int_\Omega |u|^2 \, dx}{\displaystyle\left[\int_\Omega |u|^{2^*} \, dx\right]^{2/2^*}}.$$

Lembramos que, para $\lambda = 0$, o ínfimo $S_0(\mathbb{R}^N)$ está relacionado com a melhor constante de Sobolev para a imersão $W^{1,2}(\mathbb{R}^N) \hookrightarrow L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, que desempenha um papel importante em muitos problemas variacionais provenientes da geometria e da análise. Em geral, temos os seguintes resultados.

1.5 Lema. *(a) $S_0(\Omega) = S_0(\mathbb{R}^N)$ independe do conjunto Ω.*

(b) $S_0(\Omega)$ nunca é atingido em um domínio $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^N$.

(c) $S_0(\mathbb{R}^N) = \pi N(N-2)\left(\dfrac{\Gamma(N/2)}{\Gamma(N)}\right)^{N/2}$.

(d) O ínfimo $S_0(\mathbb{R}^N)$ é atingido pelas funções $u_\varepsilon(x) \equiv \left[\dfrac{(N(N-2))^{1/2}\varepsilon}{(\varepsilon^2+|x|^2)}\right]^{(N-2)/2}$ *em que $\varepsilon > 0$.*

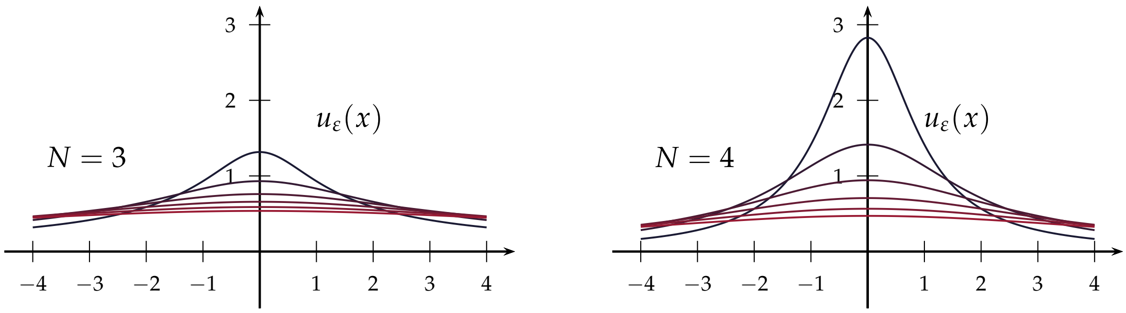
Referências. Consulte o livro de Struwe [21, Remark 4.5, pág. 40; Remark 4.7, pág. 42] para os ítens (a) e (b), respectivamente. Para os ítens (c) e (d) consulte os artigos de Talenti [22], Aubin [2], Chou e Chu [9] ou Horiuchi [15]. □

1.6 Observações. 1. Pelo item (b) da Proposição 1.5, para $\lambda = 0$ as ideias da demonstração da Proposição 1.4 não funcionam no caso crítico $p = 2^*$.

2. As funções u_ε do item (d) podem ser construídas a partir de homotetias da função $u_1(x)$ através da fórmula $u_\varepsilon(x) = \varepsilon^{-N/2^*}u_1(x/\varepsilon)$. Além disso, valem as relações

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_\varepsilon|^2 \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_1|^2 \,\mathrm{d}x \qquad \text{e} \qquad \int_{\mathbb{R}^N} |u_\varepsilon|^{2^*} \,\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}^N} |u_1|^{2^*} \,\mathrm{d}x\,.$$

3. Em geral, para qualquer função $u \in W_0^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ o quociente de Rayleigh-Ritz é invariante pelas transformações $v(x) \equiv \lambda^{-N/2^*}u((x-x_0)/\lambda)$.



Antes de enunciar o próximo resultado, que trata de não existência de solução, apresentamos um lema conhecido como identidade de Pohozaev.

1.7 Lema. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto compacto. Seja $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ uma função contínua com primitiva $G(u) \equiv \int_0^u g(s)\,\mathrm{d}s$ e seja $u \in \mathcal{C}^1(\overline{\Omega}) \cap \mathcal{C}^2(\Omega)$ uma solução do problema*

$$\begin{cases} -\Delta u = g(u) & \text{se } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{se } x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

Então vale a identidade

$$\frac{N-2}{2}\int_\Omega |\nabla u|^2 \,\mathrm{d}x - N\int_\Omega G(u)\,\mathrm{d}x + \frac{1}{2}\int_{\partial\Omega}\left|\frac{\partial u}{\partial \nu}\right|^2 x\cdot\nu \,\mathrm{d}\sigma = 0, \tag{1.16}$$

em que ν denota o vetor normal unitário exterior.

Referência. Consulte o livro de Struwe [21, Lemma III.1.4, pág. 156]. □

Usando a identidade de Pohozaev (1.16) podemos demonstrar o seguinte resultado de não existência de solução.

1.8 Proposição. *Seja $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^N$ um domínio possivelmente não limitado e com fronteira $\partial\Omega \in \mathcal{C}^\infty$, em que $N \geqslant 3$. Suponhamos que Ω é um conjunto estrelado em relação à origem e seja $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $\lambda \leqslant 0$. Então o problema (1.15) não possui solução. Em outros termos, toda solução $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ da equação diferencial e da condição de fronteira do problema (1.15) é identicamente nula.*

Referência. Consulte o livro de Struwe [21, Theorem III.1.3, pág. 156]. □

1.4 O resultado de Brézis e Nirenberg

Em contraste com a Proposição 1.8, para $\lambda > 0$ podemos reverter a situação e o problema (1.15) tem soluções não triviais em alguns casos. Entretanto, para que isso ocorra existe uma dependência sutil em relação à dimensão de $\mathbb{R}^N$. Um dos trabalhos pioneiros nessa direção é devido a Brézis e Nirenberg [5] que em 1983 demostraram um resultado fundamental a respeito desse problema.

1.9 Proposição. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio qualquer em que $N \geqslant 3$.*

1. *Suponhamos que $N \geqslant 4$. Se $\lambda \in (0, \lambda_1)$, então o problema (1.15) tem solução; se $\lambda \leqslant 0$, então o problema (1.15) não tem solução.*
2. *Suponhamos que $N = 3$. Então existe $\lambda_* \in (0, \lambda_1)$ tal que para qualquer $\lambda \in (\lambda_*, \lambda_1)$ o problema (1.15) tem solução. Em particular, se $\Omega = B_1(0) \subset \mathbb{R}^3$, então $\lambda_* = \lambda_1/4$; além disso, para $\lambda \leqslant \lambda_* = \lambda_1/4$ o problema (1.15) não tem solução.*

Referências. Consulte o artigo de Brézis e Nirenberg [5] ou os livros de Struwe [21, Theorem 2.1, pág. 158], Willem [24, Theorem 1.45, pág. 34]. □

A principal diferença entre os casos $N \geqslant 4$ e $N = 3$ está no fato de que nesse último a recuperação da solução só é possível para uma perturbação suficientemente grande; ressaltamos que no caso tridimensional as estimativas são muito mais refinadas, tornando esse caso muito mais difícil.

Para indicar como ocorre a recuperação da compacidade nessas situações consideramos o problema modelo

$$\begin{cases} -\Delta u = |u|^{q-2}u & \text{se } x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & \text{se } x \in \partial\Omega. \end{cases} \tag{1.17}$$

Se $2 < q < 2^*$, então o problema tem compacidade e uma solução pode ser encontrada através de um problema de minimização com vínculo. De fato, sejam

$$V(\Omega) \equiv \{u \in W_0^{1,2}(\Omega) \colon \int_\Omega |u|^q \, dx = 1\} \qquad \text{e} \qquad S_0(\Omega) \equiv \min_{u \in V} \int_\Omega |\nabla u|^2 \, dx \, .$$

Como a esfera V é fracamente sequencialmente compacta em $H_0^1(\Omega)$, pelo Teorema de Rellich-Kondrachov o mínimo é atingido em um ponto $v \in V$. Esta função v é uma solução da correspondente equação de Euler-Lagrange $-\Delta v = \alpha |v|^{q-2} v$ se $x \in \Omega$ e da condição de fronteira $v(x) = 0$ se $x \in \partial\Omega$, em que $\alpha \in \mathbb{R}$ é o multiplicador de Lagrange relativo ao vínculo V. Usando as diferentes homogeneidades nos dois termos da equação podemos renormalizar a solução v para construir uma solução $u(x) \equiv \alpha^{-1/(q-2)} v(x)$ para o problema (1.17).

Se $q = 2^*$, então a esfera V não é compacta em $W_0^{1,2}(\Omega)$. Entretanto, a ausência de compacidade é relativamente bem compreendida e deve-se apenas devido à ação do grupo de homotetias. Assim, uma sequência minimizante $(u_{\lambda_h})_{h \in \mathbb{N}} \subset W_0^{1,2}(\Omega)$ é limitada tanto em $W_0^{1,2}(\Omega)$ quanto em $L^{2^*}(\Omega)$ mas não possui subsequência convergente neste último espaço, já que $(u_{\lambda_h})_{h \in \mathbb{N}}$ converge para zero em $L^q(\Omega)$ se $q \in [2, 2^*)$ mas converge apenas fracamente para zero em $W_0^{1,2}(\Omega)$. Brézis e Nirenberg mostraram que se existir um nível crítico abaixo do valor $S_0(\mathbb{R}^N)$, por exemplo adicionando uma perturbação de ordem inferior ao funcional de energia, então a compacidade é recuperada. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

1.10 Lema. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado em que $N \geqslant 3$. Se $S_\lambda(\Omega) < S_0(\mathbb{R}^N)$, então existe uma função positiva $u \in W_0^{1,2}(\Omega)$ que realiza o valor $S_\lambda(\Omega)$.*

Referência. Consulte o artigo de Brézis e Nirenberg [5, Lemma 1.2, pág. 445]. □

1.5 Resultados principais

Um dos objetivos desta monografia é o de estudar resultados de existência e de não existência de soluções para uma classe de problemas elípticos com condições de fronteira do tipo de Dirichlet, a saber,

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^\alpha |\nabla u(x)|^{p-2} \nabla u(x)) = |x|^\beta [u(x)]^{p(\alpha,\beta)-1} & x \in \Omega \\ u(x) \geqslant 0 & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.18}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com $N \geqslant 3$, $1 < p < N$ e e os parâmetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ verificam a desigualdade $p(\alpha, \beta) \equiv \dfrac{p(N+\beta)}{N-p+\alpha} > p$.

Essa classe de problemas está relacionada com equações do tipo

$$-\operatorname{div}(a(x) |\nabla u|^{p-2} \nabla u) = b(x) f(u) \qquad x \in \Omega, \tag{1.19}$$

em que os pesos $a(x)$ e $b(x)$ são funções não negativas que podem se anular em alguns pontos ou ser não limitadas. Equações da forma (1.19) aparecem como soluções de estado estacionário para modelos de vários fenômenos físicos relacionados com difusão em meios contínuos que são isolantes "perfeitos."

O problema (1.18) está diretamente relacionado à desigualdade de Caffarelli, Kohn e Nirenberg em [6], que garante a existência de uma constante positiva $S_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^N)$ tal que

$$S_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^N) \leqslant \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\alpha} |\nabla u(x)|^p \,\mathrm{d}x}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{\beta} |u(x)|^{p(\alpha,\beta)} \,\mathrm{d}x \right)^{p/p(\alpha,\beta)}} \tag{1.20}$$

para toda função $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$ não identicamente nula, em que

$$1 < p < N, \qquad \alpha > p - N, \qquad \frac{\alpha}{p} \geqslant \frac{\beta}{p(\alpha,\beta)}, \qquad \beta > \alpha - p. \tag{1.21}$$

O número $p(\alpha,\beta)$ é chamado de expoente crítico de Hardy-Sobolev pois se $\alpha = 0$ e $\beta = -p$ ou se $\alpha = 0$ e $\beta = 0$, temos as desigualdades clássicas de Hardy e de Sobolev, respectivamente. Como já mencionamos, essa desigualdade desempenha um papel importante nas aplicações devido às informações sobre a melhor constante $S_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^N)$ e sobre as funções extremas que realizam essa melhor constante.

Para apresentar um breve histórico desse problema necessitamos de algumas definições. Para estudar o problema (1.18) consideramos o espaço de Lebesgue com peso $L^q_\beta(\Omega)$ equipado com a norma

$$\|u\|_{L^q_\beta(\Omega)} \equiv \left(\int_\Omega |x|^{\beta} |u|^p \,\mathrm{d}x \right)^{1/p}.$$

Também consideramos o espaço de Sobolev $\mathcal{D}_0^\alpha(\Omega)$, definido como o completamento de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ em relação à norma

$$\|u\| = \|u\|_{\mathcal{D}_0^\alpha(\Omega)} \equiv \left(\int_\Omega |x|^{\alpha} |\nabla u|^p \,\mathrm{d}x \right)^{1/p}.$$

Em diversos resultados consideramos o cone $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, isto é, um domínio com fronteira lipschitziana e tal que $\nu x \in \Omega$ para todo $\nu \in \mathbb{R}_+$ e para todo $x \in \Omega$.

Desde o aparecimento da desigualdade de Caffarelli, Kohn e Nirenberg em [6] existe uma extensa literatura tratando de variantes do problema (1.18). Se $0 \in \Omega$, a situação pode ser comparada com a do caso não degenerado. Por exemplo, Chou e Chu em [9] estudaram o caso $p = 2$ e demonstraram que a melhor constante $S_{\alpha,\beta}(\Omega)$ é atingida por funções radialmente simétricas em $\mathbb{R}^N$ no caso em que $\alpha \leqslant 0$. Catrina e Wang em [7] também investigaram o caso $p = 2$ e obtiveram resultados interessantes a respeito da melhor constante $S_{\alpha,\beta}(\Omega)$, das funções extremas e de suas propriedades quantitativas; além disso, demonstraram resultados de existência e de não existência de funções extremas e de simetria e não simetria de funções extremas. Quando $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado contendo a origem e no caso não degenerado $\alpha = 0$, diversos resultados de existência e de não existência de soluções também foram obtidos para o problema (1.18) no caso subcrítico.

O caso em que $0 \in \partial\Omega$ parece mais interessante e é muito diferente do caso não degenerado $\alpha = 0$ ou dos casos em que $0 \in \Omega$, ou em que $0 \notin \partial\Omega$. Recentemente, Ghoussoub e Kang em [13] estudaram o problema (1.18) no caso em que $p = 2$, $\alpha = 0$ e $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio geral tal que $0 \in \partial\Omega$ e demonstraram que resultados de existência e de não existência de soluções para o problema dependem da curvatura principal da fronteira $\partial\Omega$ na origem. Esse resultado apresenta um distinto contraste com o caso em que Ω é um cone, domínio para o qual também existem resultados de existência e de não existência de soluções.

A presente monografia trata do problema (1.18) em situações bastante gerais e nos casos singulares e possivelmente degenerados. Apresentamos resultados de existência e de não existência de soluções para o problema (1.18) com os parâmetros p, α e β em diversos intervalos. Para essa parte a principal referência é o artigo de Bartsch, Peng e Zhang [3]. Inicialmente demonstramos que se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um cone estrelado e se $\alpha \leqslant 0$ e $\beta \geqslant 0$, isto é, no caso em que a desigualdade de Caffarelli, Kohn e Nirenberg não é válida pois as desigualdades em (1.21) não são verificadas, então o problema (1.18) não tem solução.

1.11 Teorema. *Suponhamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ seja um cone e que $\alpha \leqslant 0$ e $\beta \geqslant 0$. Se existe $x_0 \in \mathbb{R}^N$ com $x_0 \neq 0$ e tal que Ω é um conjunto estrelado em relação a x_0 e $\langle x, x_0 \rangle \geqslant 0$ para todo $x \in \Omega$, então o problema* (1.18) *não possui solução.*

Pelo Teorema 1.11, para revertermos a situação e obtermos um resultado de existência de solução para o problema (1.18) devemos considerar domínios não estrelados. Por outro lado, como $p(\alpha, \beta) \geqslant pN/(N-p)$, devemos considerar domínios simétricos de forma a obter resultados de compacidade. O próximo teorema é motivado por um resultado de Ghoussoub e Kang em [13].

1.12 Teorema. *Suponhamos que $\alpha \leqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ e $p(\alpha, \beta) < 2p/(2-p)$ quando $1 < p < 2$. Se $\Omega = \{(z, y) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} \colon y > 0, ay < |z| < by\}$, em que $a, b \in \mathbb{R}^+$ são tais que $0 < a < b < +\infty$, então o problema* (1.18) *possui uma solução que é invariante por rotação em torno do eixo y.*

Ainda pelo Teorema 1.11, se consideramos a existência de soluções para o problema (1.18) em um cone $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, devemos impor as condições $1 < p < N$, $\alpha/p > \beta/p(\alpha, \beta)$ e $\beta > \alpha - p$. Nesse caso, vale a desigualdade de Caffarelli, Kohn e Nirenberg (1.20) e, assim $p < p(\alpha, \beta) < Np/(N-p)$. Dessa forma a imersão $\mathcal{D}_0^\alpha(\Omega) \hookrightarrow L_\beta^{p(\alpha,\beta)}(\Omega)$ é compacta. Entretanto, ainda devemos considerar a questão da perda de compacidade da imersão devido à invariância do problema (1.18) sob a ação das homotetias $v(x) \equiv \lambda^{(N-p+\alpha)/p} u(\lambda x)$.

1.13 Teorema. *Suponhamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ seja um cone e que $1 < p < N$, $\alpha > p - N$, $\alpha/p > b/p(\alpha, \beta)$ e $\beta > \alpha - p$. Então o problema* (1.18) *possui uma solução de energia mínima.*

Usando um princípio do máximo forte (Proposição 2.6), obtemos propriedades quantitativas e alguns resultados de não existência de solução para o problema (1.18).

1.14 Teorema. *(a) Suponhamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ seja um subconjunto tal que $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$ e $T(\Omega) \subset \mathbb{R}^N_+$ para alguma rotação $T\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$. Então $\overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega) = \overline{S}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^N)$ e $\overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega)$ não é atingido a menos que $\Omega = \mathbb{R}^N_+$.*

(b) Dado $\gamma \in \mathbb{R}$ definimos o exterior de um parabolóide por

$$P_\gamma \equiv \{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} \colon x_N > \gamma |x'|^2\}.$$

Se $\gamma \in \mathbb{R}^-$ e $N \geqslant 4$, então $\overline{S}_{\alpha,\beta}(P_\gamma) = \overline{S}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^N) = S_{\alpha,\beta}$ e $\overline{S}_{\alpha,\beta}(P_\gamma)$ não é atingido a menos que $P_\gamma = \mathbb{R}^N$.

(c) Seja Ω é um domínio exterior tal que $0 \in \partial\Omega$. Então $\overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega) = \overline{S}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^N) = S_{\alpha,\beta}$ e $\overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega)$ não é atingido.

Portanto, o problema (1.18) não tem solução de energia mínima no caso do item (a) se $\Omega \neq \mathbb{R}^N_+$; no caso do item (b) se $P_\gamma \neq \mathbb{R}^N$; no caso do item (c).

Outro objetivo desta monografia é o de estudar um resultado de existência de solução para um problema de valor de fronteira com condições do tipo de Neumann. Especificamente, consideramos o problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^\alpha |\nabla u(x)|^{p-2} u(x)) = |x|^\beta [u(x)]^{p(\alpha,\beta)-1} - \lambda |x|^\gamma [u(x)]^{p-1} & x \in \Omega \\ u(x) > 0 & x \in \Omega \\ |\nabla u(x)|^{p-2} \dfrac{\partial u(x)}{\partial \eta} = 0 & x \in \partial\Omega \end{cases} \tag{1.22}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com $N \geqslant 3$ é um domínio limitado, $0 \in \partial\Omega$, $1 < p < N$, $\alpha < 0$, $\beta < 0$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ e η denota o vetor normal unitário exterior. Nosso interesse nesse problema deve-se à presença do expoente crítico de Hardy-Sobolev e a localização do ponto singular na fronteira do domínio.

Para estudar esse problema consideramos o espaço de Sobolev $W^{1,p}_{\gamma,\alpha}(\Omega)$ definido por

$$W^{1,p}_{\gamma,\alpha}(\Omega) \equiv \Big\{ u \in L^p_\gamma(\Omega) \colon \int_\Omega |x|^\alpha |\nabla u|^p \, \mathrm{d}x + \lambda \int_\Omega |x|^\gamma |u|^p \, \mathrm{d}x \text{ é finita} \Big\},$$

equipado com a norma

$$\|u\| = \|u\|_{W^{1,p}_{\gamma,\alpha}(\Omega)} \equiv \Big(\int_\Omega |x|^\alpha |\nabla u|^p \, \mathrm{d}x + \lambda \int_\Omega |x|^\gamma |u|^p \, \mathrm{d}x \Big)^{1/p}.$$

Soluções fracas do problema (1.22) são pontos críticos do funcional $J\colon W^{1,p}_{\gamma,\alpha}(\Omega) \to \mathbb{R}$ definido por

$$J(u) \equiv \frac{1}{p} \int_\Omega |x|^\alpha |\nabla u(x)|^p \, \mathrm{d}x + \frac{\lambda}{p} \int_\Omega |x|^\gamma |u(x)|^p \, \mathrm{d}x - \frac{1}{p} \int_\Omega |x|^\beta |u_+(x)|^{p(\alpha,\beta)} \, \mathrm{d}x \,.$$

Ghoussoub e Kang em [13] estudaram o problema (1.22) no caso $\alpha = 0$ em vários domínios e com várias condições de fronteira distintas. Bartsch, Peng e Zhang em [3] investigaram o problema (1.22) no caso $p = 2$ e obtiveram resultados de existência de solução positiva. Baseados no artigo de Kou e Peng [17], investigamos o problema (1.22) no caso acima mencionado. O principal resultado a respeito do problema (1.22) é apresentado a seguir.

1.15 Teorema. *Suponhamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ seja um domínio limitado tal que $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$ e com $0 \in \partial\Omega$. Sejam $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_{N-1}$ sejam as curvaturas principais em $0 \in \partial\Omega$. Sejam $1 < p < N$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \leqslant 0$ e suponhamos que sejam válidas as desigualdades* (1.21)*. Então o problema* (1.22) *tem uma solução de energia mínima em cada um dos casos seguintes.*

(a) $\alpha > 2p - 1 - N$, $\alpha - (p-1) < \gamma \leqslant \alpha$.

(b) $\alpha = 2p - 1 - N$, $(N - p^2 + p\alpha)/(p-1) < \gamma \leqslant \alpha$.

(c) $p - N < \alpha < 2p - 1 - N$, $(N - p^2 + p\alpha)/(p-1) < \gamma \leqslant \alpha$ *e* $\kappa \equiv \min\{\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_{N-1}\} > C^*$ *para alguma constante* $C^* = C^*(\delta, \alpha, \beta, N, p)$ *suficientemente grande.*

O restante desta monografia está organizado da forma seguinte. No capítulo 2 demonstramos os resultados relativos ao problema de Dirichlet: na seção 2.1 mostramos que o problema (1.18) é equivalente a um problema com um termo singular do tipo de Hardy no caso do operador laplaciano; na seção 2.2 estudamos o caso em que não vale a desigualdade de Caffarelli, Kohn e Nirenberg e demonstramos uma identidade do tipo de Pohozaev; a partir dessa identidade demonstramos o primeiro resultado de não existência de solução, Teorema 1.11; prosseguindo, consideramos um tipo de domínio não estrelado e demonstramos um resultado de existência de solução, Teorema 1.12; na seção 2.3 estudamos o caso em que vale a desigualdade de Caffarelli, Kohn e Nirenberg e demonstramos um resultado de existência de solução de energia mínima, Teorema 1.13; em seguida, usando um princípio do máximo forte (Proposição 2.6), demonstramos um resultado que trata de não existência de solução para diversos tipos de domínios, Teorema 1.14.

No capítulo 3 demonstramos o resultado relativo ao problema de Neumann: na seção 3.1 apresentamos alguns resultados preliminares e um lema crucial que garante a recuperação da compacidade das sequências minimizantes para determinados níveis de energia; na seção 3.2 demonstramos diversas estimativas para os erros de aproximação usando as funções que realizam a melhor constante de Sobolev; na seção 3.3 usamos essas estimativas e demonstramos um resultado de existência de solução de energia mínima, Teorema 1.15.

Por fim, mencionamos que os enunciados de todos esses teoremas são reapresentados nas correspondentes seções.

2 Demonstração dos teoremas para o problema de Dirichlet

2.1 Um problema equivalente com singularidade do tipo de Hardy

Neste capítulo estudamos resultados de existência e de não existência de soluções para uma classe de problemas elípticos com condições de fronteira do tipo de Dirichlet, a saber,

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^{\alpha}|\nabla u(x)|^{p-2}\nabla u(x)) = |x|^{\beta}[u(x)]^{p(\alpha,\beta)-1} & x \in \Omega \\ u(x) \geqslant 0 & x \in \Omega \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.18}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com $N \geqslant 3$, $1 < p < N$ e os parâmetros $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ verificam a desigualdade $p(\alpha, \beta) \equiv \dfrac{p(N+\beta)}{N-p+\alpha} > p$.

Como já mencionamos, para estudar esse problema consideramos o espaço de Lebesgue com peso $L^q_\beta(\Omega)$ equipado com a norma

$$\|u\|_{L^q_\beta(\Omega)} \equiv \Big(\int_\Omega |x|^{\beta}|u|^p \,\mathrm{d}x \Big)^{1/p}$$

e também o espaço de Sobolev $\mathcal{D}^\alpha_0(\Omega)$, definido como o completamento de $\mathcal{C}^\infty_0(\Omega)$ em relação à norma

$$\|u\| = \|u\|_{\mathcal{D}^\alpha_0(\Omega)} \equiv \Big(\int_\Omega |x|^{\alpha}|\nabla u|^p \,\mathrm{d}x \Big)^{1/p}.$$

Começamos relacionando o problema (1.18) com um problema com termo singular do tipo de Hardy que tem sido estudado por diversos pesquisadores nas últimas décadas. Especificamente, o problema singular

$$\begin{cases} -\Delta u = \mu \frac{u}{|x|^2} + |x|^{\beta} u^{p(\beta)-1} + f(x,u) & x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.1}$$

em que $0 \leq \mu < (N-2)^2/4$, $p(\beta) = 2(N+\beta)/(N-2)$, $-2 < \beta \leq 0$ e $f(x,u)$ é uma perturbação subcrítica pode ser relacionado com o problema (1.18) no caso $p = 2$.

De fato, definindo

$$v(x) = |x|^{\frac{N-2}{2} - \sqrt{(\frac{N-2}{2})^2 - \mu}}\, u(x), \tag{2.2}$$

então o problema (2.1) é equivalente a

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^{\overline{\alpha}}\nabla v) = |x|^{\overline{\beta}} v^{p(\overline{\alpha},\overline{\beta})-1} + \overline{f}(x,v), & x \in \Omega, \\ v(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{2.3}$$

com

$$\overline{\alpha} = -(N-2) + 2\sqrt{\left(\frac{N-2}{2}\right)^2 - \mu} \quad \text{e} \quad \overline{\beta} = -N + 2\frac{(N+\beta)}{(N-2)}\sqrt{\left(\frac{N-2}{2}\right)^2 - \mu}. \tag{2.4}$$

Suponhamos que u seja solução de (2.1); mostraremos que v dada pela equação (2.2) é solução do problema (2.3). Podemos escrever a função v na forma

$$v(x) = |x|^{-\frac{\overline{\alpha}}{2}} u(x). \tag{2.5}$$

Lembrando que $\frac{\partial}{\partial x_i}(|x|) = \frac{x_i}{|x|}$ e pela regra da cadeira, obtemos

$$v_{x_i}(x) = -\frac{\overline{\alpha}}{2}|x|^{-\frac{\overline{\alpha}}{2}-2} x_i u(x) + |x|^{-\frac{\overline{\alpha}}{2}} u_{x_i}(x).$$

Consequentemente,

$$|x|^{\overline{\alpha}} v_{x_i}(x) = -\frac{\overline{\alpha}}{2}|x|^{\frac{\overline{\alpha}}{2}-2} x_i u(x) + |x|^{\frac{\overline{\alpha}}{2}} u_{x_i}(x).$$

Derivando a igualdade anterior em relação à i-ésima coordenada, resulta que

$$\begin{aligned}
\Big(|x|^{\overline{\alpha}} v_{x_i}(x)\Big)_{x_i} &= -\frac{\overline{\alpha}}{2}\Big(\frac{\overline{\alpha}}{2} - 2\Big)|x|^{\frac{\overline{\alpha}}{2}-3}\frac{x_i}{|x|} x_i u(x) - \frac{\overline{\alpha}}{2}|x|^{\frac{\overline{\alpha}}{2}-2} u(x) \\
&\quad - \frac{\overline{\alpha}}{2}|x|^{\frac{\overline{\alpha}}{2}-2} x_i u_{x_i}(x) + \frac{\overline{\alpha}}{2}|x|^{\frac{\overline{\alpha}}{2}-1}\frac{x_i}{|x|} u_{x_i}(x) + |x|^{\frac{\overline{\alpha}}{2}} u_{x_i x_i}(x) \\
&= -\frac{\overline{\alpha}}{2}\Big(\frac{\overline{\alpha}}{2} - 2\Big)|x|^{\frac{\overline{\alpha}}{2}-4} {x_i}^2 u(x) - \frac{\overline{\alpha}}{2}|x|^{\frac{\overline{\alpha}}{2}-2} u(x) + |x|^{\frac{\overline{\alpha}}{2}} u_{x_i x_i}(x).
\end{aligned}$$

Sendo assim, obtemos

$$\begin{aligned}
-\mathrm{div}(|x|^{\overline{\alpha}}\nabla v) &= \frac{\overline{\alpha}}{2}\Big(\frac{\overline{\alpha}}{2} - 2\Big)|x|^{\frac{\overline{\alpha}}{2}-4}|x|^2 u(x) + \frac{\overline{\alpha}N}{2}|x|^{\frac{\overline{\alpha}}{2}-2} u(x) - |x|^{\frac{\overline{\alpha}}{2}}\Delta u(x) \\
&= \frac{\overline{\alpha}}{2}\Big[\frac{\overline{\alpha} - 4 + 2N}{2}\Big]|x|^{\frac{\overline{\alpha}}{2}-2} u(x) - |x|^{\frac{\overline{\alpha}}{2}}\Delta u(x).
\end{aligned}$$

Como u é solução do problema (2.1), resulta que

$$\begin{aligned}
-\mathrm{div}(|x|^{\overline{\alpha}}\nabla v) &= \frac{\overline{\alpha}}{2}\Big[\frac{\overline{\alpha} - 4 + 2N}{2}\Big]|x|^{\frac{\overline{\alpha}}{2}-2} u(x) + |x|^{\frac{\overline{\alpha}}{2}}\Big\{\mu\frac{u(x)}{|x|^2} + |x|^{\beta} u^{p(\beta)-1} + f(x,u)\Big\} \\
&= |x|^{\frac{\overline{\alpha}}{2}-2} u(x)\Big\{\frac{\overline{\alpha}}{2}\Big[\frac{\overline{\alpha} - 4 + 2N}{2}\Big] + \mu\Big\} + |x|^{\frac{\overline{\alpha}}{2}} f(x,u) + |x|^{\beta + \frac{\overline{\alpha}}{2}} u^{p(\beta)-1}.
\end{aligned}$$

Portanto

$$-\,\mathrm{div}(|x|^{\overline{\alpha}}\nabla v) = |x|^{\beta + \frac{\overline{\alpha}}{2}} u^{p(\beta)-1} + \overline{f}(x,v), \tag{2.6}$$

em que

$$\overline{f}(x,v) = |x|^{\frac{\overline{\alpha}}{2}-2} u(x)\Big\{\frac{\overline{\alpha}}{2}\Big[\frac{\overline{\alpha} - 4 + 2N}{2}\Big] + \mu\Big\} + |x|^{\frac{\overline{\alpha}}{2}} f(x,u).$$

Substituindo a definição (2.5) na equação (2.6), obtemos

$$\begin{aligned}
-\mathrm{div}(|x|^{\overline{\alpha}}\nabla v) &= |x|^{\beta + \frac{\overline{\alpha}}{2}}|x|^{\frac{\overline{\alpha}}{2}(p(\beta)-1)} v(x)^{p(\beta)-1} + \overline{f}(x,v) \\
&= |x|^{\beta + \frac{\overline{\alpha}}{2}p(\beta)} v(x)^{p(\beta)-1} + \overline{f}(x,v).
\end{aligned} \tag{2.7}$$

Afirmativa 1. $p(\beta) = p(\overline{\alpha}, \overline{\beta})$

Como estamos no caso $p = 2$ e usando as definições de $\overline{\alpha}$ e $\overline{\beta}$ dadas em (2.4) temos que

$$p(\overline{\alpha}, \overline{\beta}) = \frac{2(N+\overline{\beta})}{N-2+\overline{\alpha}} = \frac{2\left(N - N + 2\frac{(N+\beta)}{(N-2)}\sqrt{(\frac{N-2}{2})^2 - \mu}\right)}{N-2-(N-2)+2\sqrt{(\frac{N-2}{2})^2 - \mu}} = p(\beta).$$

O que demonstra a primeira afirmativa.

Afirmativa 2. $\beta + \frac{\overline{\alpha}}{2} p(\beta) = \overline{\beta}$

De fato,

$$\beta + \frac{\overline{\alpha}}{2} p(\beta) = \beta + \overline{\alpha}\frac{(N+\beta)}{N-2} = \beta + \left[-(N-2) + 2\sqrt{(\frac{N-2}{2})^2 - \mu}\right]\frac{(N+\beta)}{N-2} = \overline{\beta}.$$

O que demonstra a afirmativa.

Enfim, usando as Afirmativas 1 e 2 em (2.7) concluímos que a função v é solução do problema (2.3).

Como os passos usados são reversíveis obtemos que u é solução de (2.1) se, e somente se, v é solução de (2.3).

Observamos agora que

$$\begin{cases} 0 \leqslant \mu < (N-2)^2/4, \\ -2 < \beta \leqslant 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} -N+2 < \overline{\alpha} \leq 0, \\ \overline{\alpha}/2 \geqslant \overline{\beta}/p(\overline{\alpha}, \overline{\beta}), \\ \overline{\beta} > \overline{\alpha} - 2 \end{cases} \tag{2.8}$$

De fato, a desigualdade $0 \leq \mu < (N-2)^2/4$ é equivalente a $0 < 2\sqrt{(N-2)^2/4 - \mu} \leq 2\sqrt{(N-2)^2/4}$ que por sua vez é verdadeira se, e somente se, $-(N-2) < \overline{\alpha} \leq 0$.

Usando a afirmativa 1 temos que

$$\frac{\overline{\beta}}{p(\overline{\alpha}, \overline{\beta})} = -\frac{N}{N+\beta}\frac{(N-2)}{2} + \sqrt{\left(\frac{N-2}{2}\right)^2 - \mu}. \tag{2.9}$$

É também verdade que

$$\frac{\overline{\alpha}}{2} = -\frac{(N-2)}{2} + \sqrt{\left(\frac{N-2}{2}\right)^2 - \mu}. \tag{2.10}$$

Das igualdades (2.9) e (2.10) concluímos que $\frac{\overline{\alpha}}{2} \geq \frac{\overline{\beta}}{p(\overline{\alpha}, \overline{\beta})}$ se e somente se $\frac{N}{N+\beta} \geq 1$, que é equivalente a $\beta \leq 0$.

Por fim, a desigualdade $\beta > -2$ é equivalente a $-(N-2) + 2\frac{N+\beta}{N-2}\sqrt{(N-2)^2/4 - \mu} > -(N-2) + 2\sqrt{(N-2)^2/4 - \mu}$ que por sua vez é equivalente a $\overline{\beta} > \overline{\alpha} - 2$. Isso conclui a demonstração da equivalência (2.8).

Assim, o problema (2.3) é um caso especial do problema (1.18) sob a condição (1.21). Portanto, na presente monografia, todos os resultados para $\alpha \leq 0$ e $p = 2$ são válidos para o problema (2.1) com $\mu \in [0, (N-2)^2/4)$, $-2 < \beta \leq 0$ e pertubações $f(x,u)$ escolhidas convenientemente.

2.1 Observação. A transformação $v(x) \equiv |x|^{(N-2)/2-\sqrt{((N-2)/2)^2-\mu}}u(x)$ aparece no artigo de Catrina e Wang em [7]. Apresentamos agora uma interessante aplicação dessa transformação. Quando $p = 2$, Chou e Chu em [9] obtiveram a seguinte fórmula para as funções extremas u_ε que realizam a melhor constante $S_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^N)$ sob a hipótese de que $\alpha \leqslant 0$:

$$u_\varepsilon(x) \equiv \frac{\varepsilon^{\frac{(N-2+\alpha)}{2(2-\alpha+\beta)}}}{\left(\varepsilon + |x|^{2-\alpha+\beta}\right)^{\frac{(N-2+\alpha)}{(2-\alpha+\beta)}}} \tag{2.11}$$

em que $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ e $x \in \mathbb{R}^N$. O passo crucial para a obtenção das funções u_ε é a demonstração de que as funções extremas são radialmente simétricas. A seguir apresentamos uma demonstração bem mais simples desse resultado. Inicialmente notamos que, pelas desigualdades (2.8) e pela transformação (2.5) de Catrina e Wang, os problemas (2.1) e (2.3) são equivalentes. Por outro lado, um resultado conhecido garante que o processo de simetrização diminui a norma do gradiente em $L^2(\Omega)$. Assim, podemos demonstrar que se $\Omega = \mathbb{R}^N$, se vale o lado esquerdo de (2.8) e se $f(x,u) \equiv 0$, então as soluções de energia mínima do problema (2.1) são radialmente simétricas; consequentemente, as soluções de energia mínima do problema (2.3) também são radialmente simétricas se $\Omega = \mathbb{R}^N$, se vale o lado direito de (2.8) e $\overline{f}(x,v) \equiv 0$. Finalmente, usando os argumentos apresentados por Talenti em [22], por Aubin em [2] ou por Horiuchi em [15], podemos obter as expressões para u_ε usando cálculos diretos.

Outras interessantes aplicações da fórmula (2.5) podem ser encontradas na Observação 2.8 e na Observação 3.7.

2.2 Caso em que a desigualdade de Caffarelli, Kohn e Nirenberg não é válida

Nesta seção vamos supor que $\alpha \leq 0$ e $\beta \geq 0$. Observamos que, se $\alpha \neq 0$ ou $\beta \neq 0$ então $\alpha/p < \beta/p(\alpha,\beta)$, consequentemente a desigualdade de Caffarelli, Kohn e Nirenberg (1.20) não se mantém, além disso

$$p(\alpha,\beta) = \frac{p(N+\beta)}{N-p+\alpha} \geq \frac{pN}{N-p} \equiv p^*,$$

em que p^* é o expoente crítico de Sobolev.

1.11 Teorema. *Suponhamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ seja um cone e que $\alpha \leqslant 0$ e $\beta \geqslant 0$. Se existe $x_0 \in \mathbb{R}^N$ com $x_0 \neq 0$ e tal que Ω é um conjunto estrelado em relação a x_0 e $\langle x, x_0\rangle \geqslant 0$ para todo $x \in \Omega$, então o problema (1.18) não possui solução.*

Demonstração. A demonstração é baseada em uma identidade do tipo de Pohozaev, seguindo a estratégia usada por Felli e Schneider em [11]. Suponha, por absurdo, $u \in D_0^\alpha(\Omega)$, $u \neq 0$, verificando a equação diferencial em (1.18), isto é

$$-\mathrm{div}(|x|^\alpha |\nabla u|^{p-2} \nabla u) = |x|^\beta u^{p(\alpha,\beta)-1}.$$

Multiplicando a igualdade anterior por $v \in C_0^\infty(\Omega)$ e integrando em Ω obtemos

$$-\int_\Omega \mathrm{div}(|x|^\alpha |\nabla u|^{p-2} \nabla u)\, \mathrm{d}x = \int_\Omega |x|^\beta u^{p(\alpha,\beta)-1}\, \mathrm{d}x\,.$$

Aplicando a fórmula de integração por partes (Proposição A.9), resulta

$$-\int_{\partial\Omega} |x|^\alpha |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \eta\, v\, \mathrm{d}x + \int_\Omega |x|^\alpha |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v\, \mathrm{d}x = \int_\Omega |x|^\beta u^{p(\alpha,\beta)-1} v\ \mathrm{d}x,$$

em que η é o vetor unitário normal exterior. Como $v = 0$ em $\partial\Omega$, segue que

$$\int_\Omega |x|^\alpha |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla v\, \mathrm{d}x = \int_\Omega |x|^\beta u^{p(\alpha,\beta)-1} v\, \mathrm{d}x\,.$$

No caso particular em que $v = u$, obtemos

$$\int_\Omega |x|^\alpha |\nabla u|^p\, \mathrm{d}x = \int_\Omega |x|^\beta u^{p(\alpha,\beta)}\, \mathrm{d}x\,.$$

Portanto, toda solução do problema (1.18) verifica a igualdade anterior e como $u \in D_0^\alpha(\Omega)$ resulta que

$$\int_\Omega |x|^\alpha |\nabla u|^p\, \mathrm{d}x = \int_\Omega |x|^\beta u^{p(\alpha,\beta)}\, \mathrm{d}x \tag{2.12}$$

e essas integrais são finitas.

Usando a fórmula de integração em coordenadas polares (Proposição A.11), temos

$$\int_{B_1(0)\cap\Omega} \left(|x|^\alpha |\nabla u|^p + |x|^\beta u^{p(\alpha,\beta)}\right) \mathrm{d}x = \int_0^1 \left[\int_{\partial B_s(0)\cap\Omega} \left(|x|^\alpha |\nabla u|^p + |x|^\beta u^{p(\alpha,\beta)}\right) \mathrm{d}\sigma\right] \mathrm{d}s\,.$$

Denotando

$$A(s) = \int_{\partial B_s(0)\cap\Omega} \left(|x|^\alpha |\nabla u|^p + |x|^\beta u^{p(\alpha,\beta)}\right) \mathrm{d}\sigma,$$

segue da igualdade (2.12) que $\displaystyle\int_0^1 A(s)\, \mathrm{d}s$ é finita. Logo existe uma sequência $(\varepsilon_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$, com $\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$ e tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_0^{\varepsilon_n} A(s)\, \mathrm{d}s = 0.$$

Pelo Teorema do valor médio para integrais (Proposicao A.8), para cada $n \in \mathbb{N}$ existe $s_n \in [0, \varepsilon_n]$, tal que

$$\int_0^{\varepsilon_n} A(s)\, \mathrm{d}s = \varepsilon_n A(s_n).$$

Dessa forma, escrevendo

$$\varepsilon_n A(s_n) = \varepsilon_n A(\varepsilon_n) + \varepsilon_n \left[A(s_n) - A(\varepsilon_n)\right]$$

segue que $\varepsilon_n A(s_n) \to 0$ e que $\varepsilon_n\big[A(s_n) - A(\varepsilon_n)\big] \to 0$, quando $n \to \infty$ (o último limite é válido devido ao fato de que $u \in C^{1,\alpha}(\Omega)$ é solução do problema (1.18) e devido à continuidade de $A(s)$). Portanto

$$\lim_{n\to\infty} \varepsilon_n \int_{\partial B_{\varepsilon_n}(0)\cap\Omega} \left(|x|^\alpha |\nabla u|^p + |x|^\beta u^{p(\alpha,\beta)}\right) d\sigma = 0. \tag{2.13}$$

Analogamente, usando coordenadas polares (Teorema A.11), temos

$$\int_{\Omega\setminus B_1(0)} \left(|x|^\alpha |\nabla u|^p + |x|^\beta u^{p(\alpha,\beta)}\right) dx = \int_1^\infty \left(\int_{\partial B_s(0)\cap\Omega} \left(|x|^\alpha |\nabla u|^p + |x|^\beta u^{p(\alpha,\beta)}\right) d\sigma \right) ds\,.$$

Usando a definição de $A(s)$ segue de (2.12) que $\int_1^\infty A(s)\, ds$ é finita. Logo existe uma sequência $(R_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ com $\lim_{n\to\infty} R_n = \infty$ e tal que

$$\lim_{n\to\infty} \int_{R_n}^\infty A(s)\, ds = 0.$$

Utilizando o mesmo argumento anterior, obtemos

$$\lim_{n\to\infty} R_n \int_{\partial B_{R_n}(0)\cap\Omega} \left(|x|^\alpha |\nabla u|^p + |x|^\beta u^{p(\alpha,\beta)}\right) d\sigma = 0. \tag{2.14}$$

Multiplicando a equação diferencial em (1.18) por $\nabla u \cdot (x - x_0)$ e integrando sobre $\Omega_n = (\Omega \cap B_{R_n}(0)) \setminus B_{\varepsilon_n}(0)$ obtemos

$$\int_{\Omega_n} -\mathrm{div}(|x|^\alpha |\nabla u|^{p-2} \nabla u) \nabla u \cdot (x - x_0)\, dx = \int_{\Omega_n} |x|^\beta u^{p(\alpha,\beta)-1} \nabla u \cdot (x - x_0)\, dx\,. \tag{2.15}$$

Agora estudamos separadamente os dois lados da igualdade (2.15). Para o lado esquerdo usamos a fórmula de integração por partes (Proposição A.9) e obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_{\Omega_n} -\mathrm{div}(|x|^\alpha |\nabla u|^{p-2} \nabla u) \nabla u \cdot (x - x_0)\, dx \\
&\quad = -\sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega_n} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(|x|^\alpha |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\right) \left(\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_j - x_j^0)\right) dx \\
&\quad = -\sum_{i,j=1}^n \int_{\partial\Omega_n} |x|^\alpha |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_j - x_j^0)\eta_i\, d\sigma \\
&\qquad + \sum_{i,j=1}^n \int_{\Omega_n} |x|^\alpha |\nabla u|^{p-2} \frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{\partial u}{\partial x_j}(x_j - x_j^0)\right) dx \\
&\quad = -\int_{\partial\Omega_n} |x|^\alpha |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \eta \nabla u \cdot (x - x_0)\, d\sigma \\
&\qquad + \int_{\Omega_n} |x|^\alpha |\nabla u|^{p-2} \nabla u \cdot \nabla(\nabla u \cdot (x - x_0))\, dx
\end{aligned} \tag{2.16}$$

em que η é o vetor unitário normal exterior a $\partial\Omega_n$. Analisando o integrando da última parcela da expressão (2.16), temos o seguinte resultado.

AFIRMATIVA 3. $|x|^\alpha |\nabla u|^{p-2} \nabla(\nabla u \cdot (x - x_0)) \cdot \nabla u = \nabla\left(\frac{1}{p}|\nabla u|^p\right) \cdot (x - x_0)|x|^\alpha + |x|^\alpha |\nabla u|^p.$

Para verificar essa afirmativa observamos que

$$\begin{aligned} |x|^{\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla(\nabla u\cdot(x-x_0))\cdot\nabla u &= |x|^{\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla\Big(\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial x_i}(x_i-x_0^i)\Big)\cdot\nabla u \\ &= |x|^{\alpha}|\nabla u|^{p-2}\Big[\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)(x_j-x_0^j)+|\nabla u|^2\Big] \\ &= |x|^{\alpha}|\nabla u|^{p}+|x|^{\alpha}|\nabla u|^{p-2}\Big[\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)(x_j-x_0^j)\Big]. \end{aligned} \tag{2.17}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned} &\nabla\left(\frac{1}{p}|\nabla u|^p\right)\cdot(x-x_0)|x|^{\alpha}+|x|^{\alpha}|\nabla u|^p \\ &\qquad= |x|^{\alpha}|\nabla u|^p+|x|^{\alpha}\Big(\frac{1}{2}|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial}{\partial x_1}(|\nabla u|^2),\cdots,\frac{1}{2}|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial}{\partial x_N}(|\nabla u|^2)\Big)\cdot(x-x_0) \\ &\qquad= |x|^{\alpha}|\nabla u|^p+|x|^{\alpha}|\nabla u|^{p-2}\Big[\sum_{j=1}^{N}\sum_{i=1}^{N}\frac{\partial u}{\partial x_i}\frac{\partial}{\partial x_i}\Big(\frac{\partial u}{\partial x_j}\Big)(x_j-x_0^j)\Big]. \end{aligned} \tag{2.18}$$

De (2.17) e (2.18) concluímos a verificação da afirmativa.

Utilizando a Afirmativa 3, segue que

$$\begin{aligned} &\int_{\Omega_n} -\mathrm{div}(|x|^{\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\nabla u\cdot(x-x_0)\,\mathrm{d}x \\ &\qquad= -\int_{\partial\Omega_n}|x|^{\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\eta\nabla u\cdot(x-x_0)\,\mathrm{d}\sigma \\ &\qquad\quad+\int_{\Omega_n}\nabla\left(\frac{1}{p}|\nabla u|^p\right)\cdot(x-x_0)|x|^{\alpha}\,\mathrm{d}x+\int_{\Omega_n}|x|^{\alpha}|\nabla u|^p\,\mathrm{d}x \\ &\qquad\equiv A_1+A_2+A_3. \end{aligned} \tag{2.19}$$

Aplicando a fórmula de integração por partes na parcela denotada por A_2, obtemos que

$$\begin{aligned} A_2 &= \sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega_n}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(\frac{1}{p}|\nabla u|^p\right)(x_i-x_i^0)|x|^{\alpha}\,\mathrm{d}x \\ &= \sum_{i=1}^{n}\left[\int_{\partial\Omega_n}\frac{1}{p}|\nabla u|^p|x|^{\alpha}(x_i-x_i^0)\eta_i\,\mathrm{d}\sigma-\int_{\Omega_n}\frac{1}{p}|\nabla u|^p\frac{\partial}{\partial x_i}\big((x_i-x_i^0)|x|^{\alpha}\big)\right]\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{p}\int_{\partial\Omega_n}|\nabla u|^p|x|^{\alpha}(x-x_0)\cdot\eta\,\mathrm{d}\sigma-\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega_n}\frac{1}{p}|\nabla u|^p\left(|x|^{\alpha}+\alpha|x|^{\alpha-2}x_i(x_i-x_i^0)\right)\mathrm{d}x \\ &= \frac{1}{p}\int_{\partial\Omega_n}|\nabla u|^p|x|^{\alpha}(x-x_0)\cdot\eta\,\mathrm{d}\sigma-\frac{\alpha}{p}\int_{\Omega_n}|\nabla u|^p|x|^{\alpha-2}x\cdot(x-x_0)\,\mathrm{d}x-\frac{N}{p}\int_{\Omega_n}|x|^{\alpha}|\nabla u|^p\,\mathrm{d}x\,. \end{aligned}$$

Substituindo a igualdade anterior em (2.19) obtemos

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_n} -\operatorname{div}(|x|^{\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\nabla u\cdot(x-x_0)\,\mathrm{d}x\\
&\quad= -\int_{\partial\Omega_n}|x|^{\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\eta\nabla u\cdot(x-x_0)\,\mathrm{d}\sigma+\frac{1}{p}\int_{\partial\Omega_n}|\nabla u|^{p}|x|^{\alpha}(x-x_0)\cdot\eta\,\mathrm{d}\sigma\\
&\qquad-\frac{\alpha}{p}\int_{\Omega_n}|\nabla u|^{p}|x|^{\alpha-2}x\cdot(x-x_0)\,\mathrm{d}x-\frac{N-p}{p}\int_{\Omega_n}|x|^{\alpha}|\nabla u|^{p}\,\mathrm{d}x
\end{aligned}
\tag{2.20}
$$

Denotando por θ_1 o ângulo entre ∇u e η e por θ_2 o ângulo entre ∇u e $(x-x_0)$ observamos que, ∇u e η tem a mesma direção e sentido, dessa forma θ_2 é também o ângulo entre $(x-x_0)$ e η. Consequentemente

$$
\begin{aligned}
(\nabla u\cdot\eta)(\nabla u\cdot(x-x_0)) &= |\nabla u||\eta|\cos\theta_1|\nabla u||(x-x_0)|\cos\theta_2\\
&= |\nabla u||\eta||\nabla u||(x-x_0)|\cos\theta_2\\
&= |\nabla u|^2|(x-x_0)||\eta|\cos\theta_2\\
&= |\nabla u|^2(x-x_0)\cdot\eta,
\end{aligned}
$$

sendo assim podemos reescrever a igualdade 2.20 na forma

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_n} -\operatorname{div}(|x|^{\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\nabla u\cdot(x-x_0)\,\mathrm{d}x\\
&\quad=\frac{1-p}{p}\int_{\partial\Omega_n}|x|^{\alpha}|\nabla u|^{p}\eta\cdot(x-x_0)\,\mathrm{d}\sigma+\frac{p-N}{p}\int_{\Omega_n}|x|^{\alpha}|\nabla u|^{p}\,\mathrm{d}x\\
&\qquad-\frac{\alpha}{p}\int_{\Omega_n}|\nabla u|^{p}|x|^{\alpha-2}x\cdot(x-x_0)\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}
\tag{2.21}
$$

Notando que $\nabla(u^{p(\alpha,\beta)})=p(\alpha,\beta)u^{p(\alpha,\beta)-1}\nabla u$ e usando a fórmula de integração por partes, o lado direito da igualdade (2.15) pode ser reescrito na forma

$$
\begin{aligned}
&\int_{\Omega_n}|x|^{\beta}u^{p(\alpha,\beta)-1}\nabla u\cdot(x-x_0)\,\mathrm{d}x\\
&\quad=\frac{1}{p(\alpha,\beta)}\int_{\Omega_n}|x|^{\beta}\nabla(u^{p(\alpha,\beta)})\cdot(x-x_0)\,\mathrm{d}x\\
&\quad=\frac{1}{p(\alpha,\beta)}\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega_n}|x|^{\beta}\frac{\partial}{\partial x_i}(u^{p(\alpha,\beta)})(x_i-x_i^0)\,\mathrm{d}x\\
&\quad=\frac{1}{p(\alpha,\beta)}\sum_{i=1}^{n}\left[\int_{\partial\Omega_n}|x|^{\beta}u^{p(\alpha,\beta)}(x_i-x_i^0)\eta_i\,\mathrm{d}\sigma-\int_{\Omega_n}u^{p(\alpha,\beta)}\frac{\partial}{\partial x_i}\left(|x|^{\beta}(x_i-x_i^0)\right)\right]\mathrm{d}x\\
&\quad=\frac{1}{p(\alpha,\beta)}\left[\int_{\partial\Omega_n}|x|^{\beta}u^{p(\alpha,\beta)}(x-x_0)\cdot\eta\,\mathrm{d}\sigma-\sum_{i=1}^{n}\int_{\Omega_n}u^{p(\alpha,\beta)}\left(|x|^{\beta}+\beta|x|^{\beta-2}x_i(x_i-x_i^0)\right)\right]\mathrm{d}x\\
&\quad=\frac{1}{p(\alpha,\beta)}\int_{\partial\Omega_n}|x|^{\beta}u^{p(\alpha,\beta)}(x-x_0)\cdot\eta\,\mathrm{d}\sigma-\frac{N}{p(\alpha,\beta)}\int_{\Omega_n}|x|^{\beta}u^{p(\alpha,\beta)}\,\mathrm{d}x\\
&\qquad-\frac{\beta}{p(\alpha,\beta)}\int_{\Omega_n}u^{p(\alpha,\beta)}|x|^{\beta-2}x\cdot(x-x_0)\,\mathrm{d}x\,.
\end{aligned}
\tag{2.22}
$$

Passando ao limite na igualdade (2.15), obtemos

$$\lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_n} -\mathrm{div}(|x|^{\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u)\nabla u\cdot(x-x_0)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to\infty}\int_{\Omega_n}|x|^{\beta}u^{p(\alpha,\beta)-1}\nabla u\cdot(x-x_0)\,\mathrm{d}x \quad (2.23)$$

Substituindo as igualdades (2.21) e (2.22) em (2.23) resulta que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\Big[\frac{1-p}{p}\int_{\partial\Omega_n}&|x|^{\alpha}|\nabla u|^{p}(x-x_0)\cdot\eta\,\mathrm{d}\sigma\\ &+\frac{p-N}{p}\int_{\Omega_n}|x|^{\alpha}|\nabla u|^{p}\,\mathrm{d}x-\frac{\alpha}{p}\int_{\Omega_n}|\nabla u|^{p}|x|^{\alpha-2}x\cdot(x-x_0)\,\mathrm{d}x\Big]\\ &=\lim_{n\to\infty}\Big[\frac{1}{p(\alpha,\beta)}\int_{\partial\Omega_n}|x|^{\beta}u^{p(\alpha,\beta)}(x-x_0)\cdot\eta\,\mathrm{d}\sigma-\frac{N}{p(\alpha,\beta)}\int_{\Omega_n}|x|^{\beta}u^{p(\alpha,\beta)}\,\mathrm{d}x\\ &\qquad-\frac{\beta}{p(\alpha,\beta)}\int_{\Omega_n}u^{p(\alpha,\beta)}|x|^{\beta-2}x\cdot(x-x_0)\,\mathrm{d}x\Big].\end{aligned}$$

Observamos agora que $\Omega_n\to\Omega$ mas $\partial\Omega_n \nrightarrow \partial\Omega$ quando $n\to\infty$. Assim, reescrevemos a igualdade anterior na forma

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}&\Big[\frac{1-p}{p}\int_{\partial\Omega_n}|x|^{\alpha}|\nabla u|^{p}(x-x_0)\cdot\eta\,\mathrm{d}\sigma-\frac{1}{p(\alpha,\beta)}\int_{\partial\Omega_n}|x|^{\beta}u^{p(\alpha,\beta)}(x-x_0)\cdot\eta\,\mathrm{d}\sigma\Big]\\ &=\frac{N-p}{p}\int_{\Omega}|x|^{\alpha}|\nabla u|^{p}\,\mathrm{d}x+\frac{\alpha}{p}\int_{\Omega}|\nabla u|^{p}|x|^{\alpha-2}x\cdot(x-x_0)\,\mathrm{d}x-\frac{N}{p(\alpha,\beta)}\int_{\Omega}|x|^{\beta}u^{p(\alpha,\beta)}\,\mathrm{d}x\\ &\quad-\frac{\beta}{p(\alpha,\beta)}\int_{\Omega}u^{p(\alpha,\beta)}|x|^{\beta-2}x\cdot(x-x_0)\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}$$

Usando a igualdade (2.12) obtemos que

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\Big[\frac{1-p}{p}\int_{\partial\Omega_n}&|x|^{\alpha}|\nabla u|^{p}(x-x_0)\cdot\eta\,\mathrm{d}\sigma-\frac{1}{p(\alpha,\beta)}\int_{\partial\Omega_n}|x|^{\beta}u^{p(\alpha,\beta)}(x-x_0)\cdot\eta\,\mathrm{d}\sigma\Big]\\ &=-\frac{\alpha}{p}\int_{\Omega}|\nabla u|^{p}|x|^{\alpha-2}x\cdot x_0\,\mathrm{d}x+\frac{\beta}{p(\alpha,\beta)}\int_{\Omega}u^{p(\alpha,\beta)}|x|^{\beta-2}x\cdot x_0\,\mathrm{d}x\,.\end{aligned}\quad (2.24)$$

Agora denotamos

$$\partial\Omega_n = F_n\cup T_n\cup M_n,$$

em que $F_n=\partial B_{\varepsilon_n}(0)\cap\Omega$, $T_n=\partial B_{R_n}(0)\cap\Omega$ e $M_n=\partial\Omega_n\setminus(F_n\cup T_n)$. Observamos que $M_n\to\partial\Omega$ quando $n\to\infty$. Analisando as integrais sobre $\partial\Omega_n$ da igualdade (2.24), podemos escrever

$$\begin{aligned}\int_{\partial\Omega_n}&|x|^{\alpha}|\nabla u|^{p}(x-x_0)\cdot\eta\,\mathrm{d}\sigma\\ &=\int_{T_n}|x|^{\alpha}|\nabla u|^{p}(x-x_0)\cdot\eta\,\mathrm{d}\sigma+\int_{M_n}|x|^{\alpha}|\nabla u|^{p}(x-x_0)\cdot\eta\,\mathrm{d}\sigma\\ &\quad+\int_{F_n}|x|^{\alpha}|\nabla u|^{p}(x-x_0)\cdot\eta\,\mathrm{d}\sigma\\ &\equiv J_1+J_2+J_3\end{aligned}\quad (2.25)$$

e

$$
\begin{aligned}
\int_{\partial\Omega_n} & |x|^{\beta} u^{p(\alpha,\beta)} (x - x_0) \cdot \eta \, \mathrm{d}\sigma \\
& = \int_{T_n} |x|^{\beta} u^{p(\alpha,\beta)} (x - x_0) \cdot \eta \, \mathrm{d}\sigma + \int_{M_n} |x|^{\beta} u^{p(\alpha,\beta)} (x - x_0) \cdot \eta \, \mathrm{d}\sigma \\
& \quad + \int_{F_n} |x|^{\beta} u^{p(\alpha,\beta)} (x - x_0) \cdot \eta \, \mathrm{d}\sigma \\
& \equiv I_1 + I_2 + I_3. \qquad (2.26)
\end{aligned}
$$

Notamos que $I_2 = 0$ pois $M_n \subset \partial\Omega$ e $u = 0$ em $\partial\Omega$. Além disso,

$$
\lim_{n\to\infty} J_2 = \int_{\partial\Omega} |x|^{\alpha} |\nabla u|^{p} (x - x_0) \cdot \eta \, \mathrm{d}\sigma \,. \qquad (2.27)
$$

Utilizando as identidades (2.25), (2.26) e o limite (2.27) em (2.24) obtemos

$$
\begin{aligned}
\lim_{n\to\infty} \left[\frac{1-p}{p} (J_1 + J_3) - \frac{1}{p(\alpha,\beta)} (I_1 + I_3) \right] & = -\frac{\alpha}{p} \int_{\Omega} |\nabla u|^{p} |x|^{\alpha-2} x \cdot x_0 \, \mathrm{d}x \\
+ \frac{\beta}{p(\alpha,\beta)} \int_{\Omega} u^{p(\alpha,\beta)} |x|^{\beta-2} x \cdot x_0 \, \mathrm{d}x & + \frac{p-1}{p} \int_{\partial\Omega} |x|^{\alpha} |\nabla u|^{p} (x - x_0) \cdot \eta \, \mathrm{d}\sigma \,. \qquad (2.28)
\end{aligned}
$$

Demonstraremos a seguir duas afirmativas que combinadas acarretarão na contradição desejada.

AFIRMATIVA 4. *O lado direito da igualdade* (2.28) *é positivo.*

Para verificar essa afirmativa basta observar que $\alpha \le 0$, $\beta \ge 0$, por hipótese $x \cdot x_0 > 0$ para todo $x \in \Omega$ e o cone Ω é estrelado.

AFIRMATIVA 5. *O lado esquerdo da igualdade* (2.28) *é negativo.*

Para verificar essa afirmativa observamos que $\eta \cdot x = |\eta||x| \cos\theta$ em que θ é o ângulo entre η e x e que $-1 \le \cos\theta \le 1$, dessa forma obtemos

$$
-|x| \le \eta \cdot x \le |x|. \qquad (2.29)
$$

Analisando separadamente cada uma das parcelas do lado esquerdo de (2.28) e utilizando (2.29) temos

$$
\begin{aligned}
J_1 & = \int_{T_n} |x|^{\alpha} |\nabla u|^{p} x \cdot \eta \, \mathrm{d}\sigma + \int_{T_n} |x|^{\alpha} |\nabla u|^{p} x_0 \cdot (-\eta) \, \mathrm{d}\sigma \\
& \ge \int_{T_n} |x|^{\alpha} |\nabla u|^{p} (-|x|) \, \mathrm{d}\sigma + \int_{T_n} |x|^{\alpha} |\nabla u|^{p} x_0 \cdot (-\eta) \, \mathrm{d}\sigma \\
& = -R_n \int_{T_n} |x|^{\alpha} |\nabla u|^{p} \, \mathrm{d}\sigma + \int_{T_n} |x|^{\alpha} |\nabla u|^{p} x_0 \cdot (-\eta) \, \mathrm{d}\sigma \,.
\end{aligned}
$$

Usando agora o limite (2.14) e o fato de que a integral em T_n tende a zero, obtemos que $\lim_{n\to\infty} J_1 = 0$.

Analogamente

$$\begin{aligned} J_3 &= \int_{F_n} |x|^{\alpha}|\nabla u|^p x\cdot\eta \,\mathrm{d}\sigma + \int_{F_n} |x|^{\alpha}|\nabla u|^p x_0\cdot(-\eta)\,\mathrm{d}\sigma \\ &\geq \int_{F_n} |x|^{\alpha}|\nabla u|^p(-|x|)\,\mathrm{d}\sigma + \int_{F_n} |x|^{\alpha}|\nabla u|^p x_0\cdot(-\eta)\,\mathrm{d}\sigma \\ &= -\,\varepsilon_n \int_{F_n} |x|^{\alpha}|\nabla u|^p \,\mathrm{d}\sigma + \int_{F_n} |x|^{\alpha}|\nabla u|^p x_0\cdot(-\eta)\,\mathrm{d}\sigma\,. \end{aligned}$$

Usando agora o limite (2.13) e o fato que $x_0\cdot(-\eta) > 0$ segue que $\lim_{n\to\infty} J_3 > 0$.

Prosseguindo, temos

$$\begin{aligned} I_1 &= \int_{T_n} |x|^{\beta}u^{p(\alpha,\beta)} x\cdot\eta \,\mathrm{d}\sigma + \int_{T_n} |x|^{\beta}u^{p(\alpha,\beta)} x_0\cdot(-\eta)\,\mathrm{d}\sigma \\ &\geq -\,R_n \int_{T_n} |x|^{\beta}u^{p(\alpha,\beta)} \,\mathrm{d}\sigma + \int_{T_n} |x|^{\beta}u^{p(\alpha,\beta)} x_0\cdot(-\eta)\,\mathrm{d}\sigma\,. \end{aligned}$$

Usando novamente o limite (2.14) segue que $\lim_{n\to\infty} I_1 = 0$.

Finalmente,

$$\begin{aligned} I_3 &= \int_{F_n} |x|^{\beta}u^{p(\alpha,\beta)} x\cdot\eta \,\mathrm{d}\sigma + \int_{F_n} |x|^{\beta}u^{p(\alpha,\beta)} x_0\cdot(-\eta)\,\mathrm{d}\sigma \\ &\geq -\,\varepsilon_n \int_{F_n} |x|^{\beta}u^{p(\alpha,\beta)} \,\mathrm{d}\sigma + \int_{F_n} |x|^{\beta}u^{p(\alpha,\beta)} x_0\cdot(-\eta)\,\mathrm{d}\sigma\,. \end{aligned}$$

Usando novamente o limite (2.13) segue que $\lim_{n\to\infty} I_3 > 0$.

Retomando o limite (2.28), temos

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{1-p}{p}(J_1+J_3) - \frac{1}{p(\alpha,\beta)}(I_1+I_3)\right] < 0.$$

isso conclui a verificação da afirmativa.

Combinando as Afirmativas 4 e 5 obtemos uma contradição. Isso conclui a demonstração do teorema. □

Como já mencionamos, o Teorema 1.11 mostra que, para encontrarmos cones nos quais o problema (1.18) tenha solução devemos investigar domínios não estrelados. Por outro lado, como $p(\alpha,\beta) > pN/(N-p)$, vamos considerar domínios simétricos para obtermos alguns resultados de compacidade.

1.12 Teorema. *Suponhamos que $\alpha \leqslant 0$, $\beta \geqslant 0$ e $p(\alpha,\beta) < 2p/(2-p)$ quando $1 < p < 2$. Se $\Omega = \{(z,y) \in \mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{R} \colon y > 0, ay < |z| < by\}$, em que $a, b \in \mathbb{R}^+$ são tais que $0 < a < b < +\infty$, então o problema (1.18) possui uma solução que é invariante por rotação em torno do eixo y.*

Para demonstrar o Teorema 1.12 devemos primeiro estabelecer alguns resultados de imersão contínua e compacta. Definimos $D^{\alpha}_{0,r}(\Omega)$ o espaço das funções em $D^{\alpha}_0(\Omega)$ que são invariantes por rotação em torno do eixo y.

2.2 Lema. *Supondo que* $1 \leq q < 2p/(2-p)$ *se* $1 \leq p < 2$ *e* $q \geq 1$ *se* $2 \leq p < N$, Ω *como no Teorema (1.11). Então existe uma constante C tal que para cada* $k \in \mathbb{Z}$ *temos*

$$\left(\int_\Omega |v|^q\right)^{p/q} \leq C2^{k(Np-(N-p)q)/q}\int_\Omega |\nabla v|^p$$

para toda $v \in D^\alpha_{0,r}(\Omega)$ *com supp* $v \subset \{(z,y) \in \Omega : 2^{k-1} < y < 2^{k+2}\}$.

Demonstração. Considerando primeiramente $k = 0$. Seja $v \in D^\alpha_{0,r}(\Omega)$, pela simetria podemos afirmar que $v(z,y) = v(|z|,y)$ é uma função de duas variáveis e usando a fórmula de mudança de variáveis obtemos $dzdy = \omega_{N-2}d|z|dy$, em que ω_{N-2} é a medida da esfera unitária em $\mathbb{R}^{N-2}$. Como supp $v \subset \{(z,y) \in \Omega : 2^{-1} < y < 2^2\}$ eliminamos a preocupação com a origem e pelo Teorema de Imersão de Sobolev em dimensão 2 (Teorema A.15) obtemos

$$\left(\int_{\{(z,y)\in\Omega:2^{-1}<y<2^2\}} |v|^q dzdy\right)^{p/q} \leq C\int_{\{(z,y)\in\Omega:2^{-1}<y<2^2\}} |\nabla v|^p dzdy. \tag{2.30}$$

Para k arbitrário definimos a translação $u(\xi) = v(\lambda\xi)$ com $\lambda = 2^{-k}$ e $\xi = (\xi', \xi_N) \in \mathbb{R}^{N-1}\times\mathbb{R}$ e supp $u \subset \{(\xi',\xi_N) \in \Omega : 2^{k-1} < \xi_N < 2^{k+2}\}$. Fazendo a mudança de variáveis $\mu = 2^{-k}\xi$, isto é, $d\mu = 2^{-kN}d\xi$, resulta

$$\begin{aligned}\int_\Omega |u(\xi)|^q d\xi &= \int_\Omega |v(2^{-k}\xi)|^q d\xi \\ &= 2^{kN}\int_\Omega |v(\mu)|^q d\mu.\end{aligned}$$

Observamos que $\nabla u(\xi) = 2^{-k}\nabla v(2^{-k}\xi)$, consequentemente

$$\begin{aligned}\int_\Omega |\nabla u(\xi)|^p d\xi &= \int_\Omega 2^{-kp}|\nabla v(2^{-k}\xi)|^p d\xi \\ &= \int_\Omega 2^{-kp}2^{kN}|\nabla v(\mu)|^p d\mu.\end{aligned}$$

Enfim obtemos

$$\int_\Omega |v(\mu)|^q d\mu = 2^{-kN}\int_\Omega |u(\xi)|^q d\xi \quad \text{e} \quad \int_\Omega |\nabla v(\mu)|^p d\mu = 2^{kp-kN}\int_\Omega |\nabla u(\xi)|^p d\xi. \tag{2.31}$$

Observamos que, para $v(\mu)$, recaímos no caso $k = 0$ e podemos usar as igualdades (2.31) na desigualdade (2.30). Portanto,

$$\left(\int_\Omega |u|^q\right)^{p/q} \leq C2^{k(Np-(N-p)q)/q}\int_\Omega |\nabla u|^p.$$

Isso conclui a demonstração do lema. □

O Lema a seguir é um resultado do tipo de Rellich e Kondrachov.

2.3 Lema. *Sob as hipóteses do Teorema 1.12 existe uma imersão contínua* $D^\alpha_{0,r}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(\alpha,\beta)}_\beta(\Omega)$. *Além disso, toda sequência limitada em* $D^\alpha_{0,r}(\Omega)$ *contém uma subsequência que converge fortemente em* $L^{p(\alpha,\beta)}(\{(z,y) \in \Omega : M^{-1} < y < M\})$ *em M é um número positivo qualquer.*

Demonstração. Assim como na demonstração do Lema 2.2, Ω é essencialmente bidimensional. Notamos que, para $M < \infty$ e $1 \leq q < 2p/(2-p)$ se $1 \leq p < 2$ e $q \geq 1$ se $2 \leq p < N$, temos que a imersão $D^{\alpha}_{0,r}(\Omega) \cap \{u : \operatorname{supp} u \subset \{(z,y) \in \Omega : M^{-1} < y < M\}\} \hookrightarrow L^q$ é compacta, o que garante a existência de uma subsequência convergente em $L^{p(\alpha,\beta)}(\{(z,y) \in \Omega : M^{-1} < y < M\})$. Resta mostrar que a imersão $D^{\alpha}_{0,r}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(\alpha,\beta)}_{\beta}(\Omega)$ é contínua. Definimos as funções $\varphi, \chi_k \colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ por

$$\varphi(s) \equiv \begin{cases} s-1 & \text{se } 1 \leq s \leq 2, \\ 1 & \text{se } 2 \leq s \leq 4, \\ (8-s)/4 & \text{se } 4 \leq s \leq 8, \\ 0 & \text{se } 0 \leq s \leq 1 \text{ ou se } s \geq 8. \end{cases} \qquad \chi_k(s) \equiv \begin{cases} 1 & \text{se } 2^k \leq s \leq 2^{k+3}, \\ 0 & \text{se } s \leq 2^k \text{ ou se } s \geq 2^{k+3}. \end{cases}$$

Denotando $\eta_k = \varphi^p(2^{-k}s)$, temos $\operatorname{supp} \eta_k = \operatorname{supp} \chi_k$ e que $|(\sqrt[p]{\eta_k(s)})'| = |2^{-k}\varphi'(2^{-k}s)|$. Para prosseguirmos com a demonstração vamos utilizar as seguintes afirmativas,

AFIRMATIVA 6. *A seguinte desigualdade é verdadeira*

$$\frac{1}{s}\,\chi_k(s) \leq |2^{-k}\varphi'(2^{-k}s)| \leq \frac{2}{s}\,\chi_k(s). \tag{2.32}$$

De fato, observamos que

$$2^{-k}\varphi'(2^{-k}s) = \begin{cases} \frac{1}{2^k} & \text{se } 2^k \leq s \leq 2^{k+1}, \\ 0 & \text{se } 2^{k+1} \leq s \leq 2^{k+2}, \\ \frac{-1}{2^{k+2}} & \text{se } 2^{k+2} \leq s \leq 2^{k+3}, \\ 0 & \text{se } 0 < s < 2^k \text{ ou se } s > 2^{k+3} \end{cases}$$

Suponhamos $2^k \leq s \leq 2^{k+1}$, ou seja, $\frac{1}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{s} \leq \frac{1}{2^k}$. Dessa forma

$$|(\sqrt[p]{\eta_k(s)})'| = |2^{-k}\varphi'(2^{-k}s)| = \frac{1}{2^k} \geq \frac{1}{s} = \frac{1}{s}\chi_k(s);$$

por outro lado

$$\frac{|(\sqrt[p]{\eta_k(s)})'|}{2} = \frac{|2^{-k}\varphi'(2^{-k}s)|}{2} = \frac{1}{2^{k+1}} \leq \frac{1}{s} = \frac{1}{s}\chi_k(s).$$

Portanto, $(1/s)\chi_k(s) \leq |2^{-k}\varphi'(2^{-k}s)| \leq (2/s)\chi_k(s)$.

Suponhamos agora $2^{k+2} \leq s \leq 2^{k+3}$, ou seja, $\frac{1}{2^{k+3}} \leq \frac{1}{s} \leq \frac{1}{2^{k+2}}$. Segue que

$$|(\sqrt[p]{\eta_k(s)})'| = |2^{-k}\varphi'(2^{-k}s)| = \frac{1}{2^{k+2}} \geq \frac{1}{s} = \frac{1}{s}\chi_k(s);$$

por outro lado

$$\frac{|(\sqrt[p]{\eta_k(s)})'|}{2} = \frac{|2^{-k}\varphi'(2^{-k}s)|}{2} = \frac{1}{2^{k+3}} \leq \frac{1}{s} = \frac{1}{s}\chi_k(s').$$

Portanto, $(1/s)\chi_k(s) \leq |2^{-k}\varphi'(2^{-k}s)| \leq (2/s)\chi_k(s)$.

Nos intervalos restantes de s temos que $|\left(\sqrt[p]{\eta_k(s)}\right)'| = |2^{-k}\varphi'(2^{-k}s)| = 0$ e a afirmação vale trivialmente.

Portanto

$$(1/s)\chi_k(s) \leq |\left(\sqrt[p]{\eta_k(s)}\right)'| = |2^{-k}\varphi'(2^{-k}s)| \leq (2/s)\chi_k(s)$$

o que demonstra a afirmativa 2.32.

AFIRMATIVA 7. *Para $s > 0$ valem as desigualdades*

$$1 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \eta_k(s) \leq 3, \quad e \quad 1 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \chi_k(s) \leq 3. \tag{2.33}$$

De fato, dado $s \in \mathbb{R}^+$ existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que $2^{k_0} \leq s \leq 2^{k_0+1}$. Pela definição de η_k temos $\eta_k(s) = 0$ para todo $k \leq k_0 - 3$ e $\eta_k(s) = 0$ para todo $k \geq k_0 + 1$. Logo

$$\begin{aligned}
\sum_{k=-\infty}^{\infty} \eta_k(s) = \sum_{k=k_0-2}^{k_0} \eta_k(s) &= \eta_{k_0-2}(s) + \eta_{k_0-1}(s) + \eta_{k_0}(s) \\
&= \left(\frac{8 - 2^{-k_0+2}s}{4}\right)^p + 1 + (2^{-k_0}s - 1)^p \\
&= (2 - 2^{-k_0}s)^p + 1 + (2^{-k_0}s - 1)^p.
\end{aligned}$$

Como $2^{k_0} \leq s \leq 2^{k_0+1}$, obtemos que $0 \leq 2^{-k_0}s - 1 \leq 1$ e $0 \leq 2 - 2^{-k_0}s \leq 1$. Lembrando que $p > 1$, podemos concluir que

$$1 \leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \eta_k(s) \leq 3.$$

Isso demonstra a primeira desigualdade. A demonstração segunda desigualdade é análoga.

Denotando $\eta_k = \eta_k(y)$, em que $x = (z, y) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}$, então no suporte de η_k temos $2^k \leq y \leq |x| \leq By \leq B2^{k+3}$ para alguma constante positiva B. Das Desigualdades em (2.33) e em (A.1), podemos escrever

$$\begin{aligned}
\left(\int_\Omega |x|^\beta |u|^{p(\alpha,\beta)}\right)^{\frac{p}{p(\alpha,\beta)}} &\leq \left(\int_\Omega |x|^\beta |u|^{p(\alpha,\beta)} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \eta_k\right)^{\frac{p(\alpha,\beta)}{p}}\right)^{\frac{p}{p(\alpha,\beta)}} \\
&= \left(\int_\Omega |x|^\beta (|u|^p)^{\frac{p(\alpha,\beta)}{p}} \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \eta_k\right)^{\frac{p(\alpha,\beta)}{p}}\right)^{\frac{p}{p(\alpha,\beta)}} \\
&= \left(\int_\Omega |x|^\beta \left(\sum_{k=-\infty}^{\infty} \eta_k |u|^p\right)^{\frac{p(\alpha,\beta)}{p}}\right)^{\frac{p}{p(\alpha,\beta)}} \\
&\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_\Omega |x|^\beta \eta_k^{\frac{p(\alpha,\beta)}{p}} |u|^{p(\alpha,\beta)}\right)^{\frac{p}{p(\alpha,\beta)}}.
\end{aligned}$$

Como $|x| \leq B2^{k+3}$ e do Lema 2.2, obtemos

$$
\begin{aligned}
\left(\int_\Omega |x|^\beta |u|^{p(\alpha,\beta)}\right)^{\frac{p}{p(\alpha,\beta)}} &\leq \sum_{k=-\infty}^{\infty}\left(\int_\Omega B^\beta 2^{\beta(k+3)} \eta_k^{\frac{p(\alpha,\beta)}{p}} |u|^{p(\alpha,\beta)}\right)^{\frac{p}{p(\alpha,\beta)}}\\
&= B^{\frac{\beta p}{p(\alpha,\beta)}} 2^{\frac{3\beta p}{p(\alpha,\beta)}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{\frac{k\beta p}{p(\alpha,\beta)}} \left(\int_\Omega (|u|\eta_k^{\frac{1}{p}})^{p(\alpha,\beta)}\right)^{\frac{p}{p(\alpha,\beta)}}\\
&\leq B^{\frac{\beta p}{p(\alpha,\beta)}} 2^{\frac{3\beta p}{p(\alpha,\beta)}} \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{\frac{k\beta p}{p(\alpha,\beta)}} C 2^{\frac{k[Np-(N-p)p(\alpha,\beta)]}{p(\alpha,\beta)}} \int_\Omega \left|\nabla\left(|u|\eta_k^{\frac{1}{p}}\right)\right|^p.
\end{aligned}
$$

Novamente, como $|x| \leq B2^{k+3}$ e $\alpha \leq 0$, obtemos que $|x|^\alpha B^{-\alpha} 2^{-k\alpha-3\alpha} \geq 1$. Segue que

$$
\begin{aligned}
\left(\int_\Omega |x|^\beta |u|^{p(\alpha,\beta)}\right)^{\frac{p}{p(\alpha,\beta)}} &\leq C \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{\frac{k[Np-(N-p)p(\alpha,\beta)+p\beta]}{p(\alpha,\beta)}} \int_\Omega B^{-\alpha} 2^{-k\alpha-3\alpha} |x|^\alpha \left|\nabla\left(|u|\eta_k^{\frac{1}{p}}\right)\right|^p\\
&= C \sum_{k=-\infty}^{\infty} 2^{\frac{k[Np-(N-p)p(\alpha,\beta)+p\beta-\alpha]}{p(\alpha,\beta)}} \int_\Omega |x|^\alpha \left|\nabla\left(|u|\eta_k^{\frac{1}{p}}\right)\right|^p
\end{aligned}
$$

Pela definição de $p(\alpha,\beta)$ segue que $Np-(N-p)p(\alpha,\beta)+p\beta-\alpha=0$. Prosseguindo, obtemos

$$
\begin{aligned}
\left(\int_\Omega |x|^\beta |u|^{p(\alpha,\beta)}\right)^{\frac{p}{p(\alpha,\beta)}} &\leq C \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_\Omega |x|^\alpha \left|\nabla\left(|u|\eta_k^{\frac{1}{p}}\right)\right|^p\\
&= C \sum_{k=-\infty}^{\infty} \int_\Omega |x|^\alpha \left|\eta_k^{\frac{1}{p}} \nabla u + u\nabla(\eta_k^{\frac{1}{p}})\right|^p\\
&\leq C \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_\Omega |x|^\alpha \eta_k |\nabla u|^p + \int_\Omega |x|^\alpha |u|^p |\nabla(\eta_k^{\frac{1}{p}})|^p\right)\\
&\leq C \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_\Omega |x|^\alpha \eta_k |\nabla u|^p + \int_\Omega |x|^\alpha |u|^p \frac{2^p B^p}{B^p |y|^p} \chi_k^p(y)\right),
\end{aligned}
$$

em que na última passagem usamos a desigualdade (2.32). Como $|x| \leq By$ e da desigualdade em (2.33), resulta

$$
\begin{aligned}
\left(\int_\Omega |x|^\beta |u|^{p(\alpha,\beta)}\right)^{\frac{p}{p(\alpha,\beta)}} &\leq C \sum_{k=-\infty}^{\infty} \left(\int_\Omega |x|^\alpha \eta_k |\nabla u|^p + \int_\Omega |x|^{\alpha-p} |u|^p 2^p B^p \chi_k^p(y)\right)\\
&\leq C_1 \int_\Omega |x|^\alpha |\nabla u|^p + C_2 \int_\Omega |x|^{\alpha-p} |u|^p.
\end{aligned}
$$

Finalmente, usando a desigualdade de Caffarelli, Kohn e Nirenberg (1.20) para $\beta = \alpha - p$, obtemos

$$
\left(\int_\Omega |x|^\beta |u|^{p(\alpha,\beta)}\right)^{\frac{p}{p(\alpha,\beta)}} \leq C \int_\Omega |x|^\alpha |\nabla u|^p.
$$

Concluindo assim a demonstração do Lema. □

2.4 Lema. *Sejam $u \in D^\alpha_{0,r}(\Omega)$ e $\lambda > 0$ então a função $v : \Omega \longrightarrow \mathbb{R}$ definida por*

$$
v(x) = \lambda^{(N-p+\alpha)/p} u(\lambda x)
$$

verifica as seguintes propriedades:

1. $\int_\Omega |x|^\beta v(x)^{p(\alpha,\beta)}\,\mathrm{d}x = \int_\Omega |x|^\beta u(x)^{p(\alpha,\beta)}\,\mathrm{d}x$

2. $\int_\Omega |x|^\alpha |\nabla v(x)|^p\,\mathrm{d}x = \int_\Omega |x|^\alpha |\nabla u(x)|^p\,\mathrm{d}x$

Demonstração. Fazendo a mudança de variáveis $y = \lambda x$ temos $dy = \lambda^N dx$, e já que o cone Ω é invariante por essa mudança, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |x|^\beta v(x)^{p(\alpha,\beta)}\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega |x|^\beta (\lambda^{(N-p+\alpha)/p} u(\lambda x))^{p(\alpha,\beta)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega |x|^\beta \lambda^{N+\beta} u(\lambda x)^{p(\alpha,\beta)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega |x|^\beta \lambda^{N+\beta} u(y)^{p(\alpha,\beta)} \lambda^{-N}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_\Omega |x|^\beta \lambda^{\beta} u(y)^{p(\alpha,\beta)} dy \\
&= \int_\Omega |y|^\beta u(y)^{p(\alpha,\beta)}\,\mathrm{d}y\,.
\end{aligned}$$

Isso demonstra a propriedade 1.

Para demonstrarmos a propriedade 2 observamos que

$$\frac{\partial v}{\partial x_i} = \lambda^{\frac{(N-p+\alpha)}{p}+1} \frac{\partial v}{\partial x_i}(\lambda x)$$

e, consequentemente,

$$\nabla v(x) = \lambda^{\frac{(N-p+\alpha)}{p}+1} \nabla u(\lambda x).$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\int_\Omega |x|^\alpha |\nabla v(x)|^p\,\mathrm{d}x &= \int_\Omega |x|^\alpha |\lambda^{\frac{(N-p+\alpha)}{p}+1} \nabla u(\lambda x)|^p\,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega |x|^\alpha \lambda^{\left(\frac{(N-p+\alpha)}{p}+1\right)p} |\nabla u(\lambda x)|^p\,\mathrm{d}x \\
&= \int_\Omega |x|^\alpha \lambda^{N+\alpha} |\nabla u(y)|^p \lambda^{-N}\,\mathrm{d}y \\
&= \int_\Omega |x|^\alpha \lambda^{\alpha} |\nabla u(y)|^p\,\mathrm{d}y \\
&= \int_\Omega |y|^\alpha |\nabla u(y)|^p\,\mathrm{d}y\,.
\end{aligned}$$

Isso demonstra a propriedade 2. □

Demonstração do Teorema 1.12. Pelo Lema 2.4, no problema (1.18) temos ausência de compacidade. Para contornar essa dificuldade usamos um argumento de concentração-compacidade. Consideramos o problema de minimização

$$S = \inf_{u \in D^\alpha_{0,r}\setminus\{0\}} F(u) \equiv \inf_{u \in D^\alpha_{0,r}\setminus\{0\}} \frac{\int_\Omega |x|^\alpha |\nabla u|^p}{\left(\int_\Omega |x|^\beta u^{p(\alpha,\beta)}\right)^{\frac{p}{p(\alpha,\beta)}}}. \tag{2.34}$$

Pelo Lema 2.3 da imersão contínua $D^{\alpha}_{0,r}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(\alpha,\beta)}_{\beta}(\Omega)$ seque que o ínfimo S é positivo. Assim, se $u \in D^{\alpha}_{0,r}(\Omega)$ é uma função positiva que realiza o ínfimo, então um múltiplo conveniente de u é solução do problema (1.18). Em outros termos, se $u \in D^{\alpha}_{0}(\Omega)\backslash\{0\}$ atinge o ínfimo do quociente (2.34), então afirmamos que a função $v(x) = S^{\frac{1}{p(\alpha,\beta)-p}} u(x)$ é solução do problema

$$-\operatorname{div}(|x|^{\alpha}|\nabla v|^{p-2}\nabla v) = |x|^{\beta} v^{p(\alpha,\beta)-1}.$$

De fato,

$$\begin{aligned}
-\operatorname{div}(|x|^{\alpha}|\nabla v|^{p-2}\nabla v) &= -S^{\frac{p-1}{p(\alpha,\beta)-p}} \operatorname{div}(|x|^{\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \\
&= S^{\frac{p-1}{p(\alpha,\beta)-p}} S|x|^{\beta} u^{p(\alpha,\beta)-1} \\
&= S^{\frac{p-1}{p(\alpha,\beta)-p}+1-\frac{p(\alpha,\beta)-1}{p(\alpha,\beta)-p}} |x|^{\beta} v^{p(\alpha,\beta)-1} \\
&= |x|^{\beta} v^{p(\alpha,\beta)-1},
\end{aligned}$$

como afirmamos.

Como consequência do Lema 2.4, para cada $u \in D^{\alpha}_{0,r}(\Omega)$ o valor de $F(u)$ é invariante pela dilatação $u_{\lambda}(x) = \lambda^{\frac{(N-p+\alpha)}{p}} u(\lambda x)$. Como consequência desse fato, se $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D^{\alpha}_{0,r}(\Omega)$ é uma sequência minimizante para S então a sequência $(v_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D^{\alpha}_{0,r}(\Omega)$, definida por

$$v_n(x) = \lambda^{\frac{(N-p+\alpha)}{p}} u_n(\lambda x)$$

também é sequência minimizante para S.

Definimos a função baricentro $G : D^{\alpha}_{0,r}(\Omega) \to [0,\infty)$ por

$$G(u) = S^{p(\alpha,\beta)/p} \int_{\Omega} \frac{|x|}{1+|x|} |x|^{\beta} u(x)^{p(\alpha,\beta)}\, dx\,. \tag{2.35}$$

Claramente G é contínua. Além disso, temos

$$\begin{aligned}
G(u_{\lambda}) &= S^{p(\alpha,\beta)/p} \int_{\Omega} \frac{|x|}{1+|x|} \lambda^{\frac{(N-p+\alpha)p(\alpha,\beta)}{p}} |x|^{\beta} u(\lambda x)^{p(\alpha,\beta)}\, dx \\
&= S^{p(\alpha,\beta)/p} \int_{\Omega} \frac{|x|}{1+|x|} \lambda^{(N+\beta)} |x|^{\beta} u(\lambda x)^{p(\alpha,\beta)}\, dx \\
&= S^{p(\alpha,\beta)/p} \int_{\Omega} \frac{|y/\lambda|}{1+|y/\lambda|} \lambda^{N+\beta} \frac{|y|^{\beta}}{\lambda^{\beta}} u(y)^{p(\alpha,\beta)} \lambda^{-N}\, dy \\
&= S^{p(\alpha,\beta)/p} \int_{\Omega} \frac{|y|}{\lambda+|y|} u(y)^{p(\alpha,\beta)} |y|^{\beta}\, dy
\end{aligned}$$

em que usamos a mudança de coordenadas $y = \lambda x$ e $dy = \lambda^N\, dx$. Assim

$$\begin{aligned}
\lim_{\lambda\to 0^+} G(u_{\lambda}) &= \lim_{\lambda\to 0^+} S^{p(\alpha,\beta)/p} \int_{\Omega} \frac{|y|}{\lambda+|y|} u(y)^{p(\alpha,\beta)} |y|^{\beta}\, dy \\
&= S^{p(\alpha,\beta)/p} \int_{\Omega} u(y)^{p(\alpha,\beta)} |y|^{\beta}\, dy \\
&\leq S^{p(\alpha,\beta)/p} \left(\int_{\Omega} |y|^{\alpha} |\nabla u|^{p}\, dy \right)^{p(\alpha,\beta)/p}
\end{aligned} \tag{2.36}$$

e

$$\lim_{\lambda\to\infty} G(u_\lambda) = \lim_{\lambda\to\infty} S^{p(\alpha,\beta)/p} \int_\Omega \frac{|y|}{\lambda+|y|} u(y)^{p(\alpha,\beta)} |y|^\beta \,\mathrm{d}y = 0. \tag{2.37}$$

Consideramos agora uma sequência $(w_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D^{\alpha}_{0,r}(\Omega)$ minimizante para $S_{\alpha,\beta}$. Podemos supor que $\|w_n\|_{D^{\alpha}_{0,r}(\Omega)} = \int_\Omega |x|^\alpha |\nabla w_n|^p = 1$ e, portanto,

$$\lim_{n\to\infty} \Big(\int_\Omega |x|^\beta |w_n|^{p(\alpha,\beta)} \Big)^{\frac{1}{p(\alpha,\beta)}} = S^{-1/p}.$$

Usando a continuidade de G e os limites (2.36) e (2.37) podemos escolher uma sequência $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}_+$ de tal forma que $G(u_n) = \frac{1}{2}$, em que

$$u_n(x) = \lambda_n^{(N-p+\alpha)/p} w_n(\lambda_n x).$$

Como a sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset D^{\alpha}_{0,r}(\Omega)$ assim construída é limitada e o espaço $D^{\alpha}_{0,r}(\Omega)$ é reflexivo, existe uma subsequência, ainda denotada da mesma forma, tal que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $D^{\alpha}_{0,r}(\Omega)$ quando $n\to\infty$. Passando novamente a subsequências temos que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $L^{p(\alpha,\beta)}_\beta(\Omega)$ quando $n\to\infty$. Usando a convergência em quase todos os pontos do conjunto $\Omega \cap B_n(0)$ e usando o argumento diagonal de Cantor obtemos que $u_n \to u$ q.t.p. em Ω quando $n\to\infty$. Além disso, pelo Lema 2.3, $u_n \to u$ fortemente em $L^{p(\alpha,\beta)}_\beta(\{(z,y)\in\Omega : M^{-1} < y < M\})$, para algum número $M\in\mathbb{R}_+$.

Equipamos o espaço $\mathbb{R}^N \cup \{\infty\}$ com a topologia padrão que o torna compacto, especificamente em $\mathbb{R}^{N+1}$ consideramos a esfera unitária S^N e construimos bijeções locais entre S^N e $\mathbb{R}^N$ usando a projeção estereográfica do polo norte da esfera sobre o plano equatorial dada por

$$(x_1,\cdots,x_n)\in\mathbb{R}^N \mapsto \Big(\frac{2x_1}{1+\|x\|^2},\cdots,\frac{2x_N}{1+\|x\|^2},\frac{-1+\|x\|^2}{1+\|x\|^2}\Big)\in\mathbb{R}^{N+1}.$$

Isso significa que as medidas podem ser identificadas com o espaço dual $C(\mathbb{R}^N\cup\{\infty\})$. Por exemplo δ_∞ esta bem definido e $\delta_\infty(\varphi)=\varphi(\infty)$.

Dessa forma concluímos que

$$|x|^\beta |u_n|^{p(\alpha,\beta)} \to \nu = |x|^\beta |u|^{p(\alpha,\beta)} + \nu_0\delta_0 + \nu_\infty\delta_\infty \tag{2.38}$$

quando $n\to\infty$, no sentido de medidas. Em que ν_0, ν_∞ são não negativas. Utilizando este fato, podemos mostrar que

AFIRMATIVA 8. *Valem as relações*

$$|x|^\alpha |\nabla u_n|^p \rightharpoonup \mu \geq |x|^\alpha |\nabla u|^p + S\nu_0^{p/p(\alpha,\beta)}\delta_0 + S\nu_\infty^{p/p(\alpha,\beta)}\delta_\infty \tag{2.39}$$

quando $n\to\infty$.

De fato, façamos $v_n = u_n - u$, então $(v_n)_{n\in\mathbb{N}}$ converge fracamente para zero em $D^{\alpha}_{0,r}(\Omega)$ e em $L^{p(\alpha,\beta)}_{\beta}(\Omega)$ e converge q.t.p. em Ω. Seja $\varphi \in \mathcal{C}^1(\mathbb{R}^N \cup \{\infty\})$ tal que $0 \leq \varphi \leq 1$ e $\nabla\varphi$ tenha suporte compacto em $\mathbb{R}^N$. Como $\nabla(\varphi v_n) = \varphi\nabla v_n + v_n\nabla\varphi$ obtemos que

$$\varphi\nabla v_n = \nabla(\varphi v_n) - v_n\nabla\varphi \longrightarrow \nabla(\varphi v_n) \quad \text{q.t.p. em } \Omega$$

quando $n \to \infty$. Portanto

$$\int_\Omega |x|^\alpha |\nabla v_n|^p \varphi^p = \int_\Omega |x|^\alpha |\nabla(\varphi v_n)|^p + o(1) \geq S\left(\int_\Omega |x|^\beta |\varphi v_n|^{p(\alpha,\beta)}\right)^{p/p(\alpha,\beta)} + o(1) \tag{2.40}$$

em que a desigualdade vem da definição de ínfimo dada em (2.34).

Como a sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é limitada em $D^{\alpha}_{0,r}(\Omega)$ e em $L^{p(\alpha,\beta)}_{\beta}(\Omega)$ e já que $u_n \to u$ q.t.p. em Ω quando $n \to \infty$, podemos usar o Lema de Brézis-Lieb (Lema A.16); portanto

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega |x|^\alpha |\nabla u_n|^p - \int_\Omega |x|^\alpha |\nabla(u_n - u)|^p\right) = \int_\Omega |x|^\alpha |\nabla u|^p$$

e

$$\lim_{n\to\infty}\left(\int_\Omega |x|^\beta |u_n|^{p(\alpha,\beta)} - \int_\Omega |x|^\beta |u_n - u|^{p(\alpha,\beta)}\right) = \int_\Omega |x|^\beta |u|^{p(\alpha,\beta)}.$$

No sentido de medida podemos escrever as convergências acima na forma

$$|x|^\alpha |\nabla v_n|^p = |x|^\alpha |\nabla(u_n - u)|^p \to \mu' = \mu - |x|^\alpha |\nabla u|^p \tag{2.41}$$

e

$$|x|^\beta |v_n|^{p(\alpha,\beta)} = |x|^\beta |u_n - u|^{p(\alpha,\beta)} \to \nu' = \nu - |x|^\beta |u|^{p(\alpha,\beta)} = \nu_0\delta_0 + \nu_\infty\delta_\infty. \tag{2.42}$$

Obtemos de (2.40), (2.41) e (2.42) que

$$\int_\Omega \varphi^p \, d\mu' \geq S\left(\int_\Omega |\varphi|^{p(\alpha,\beta)} d\nu'\right)^{p/p(\alpha,\beta)}.$$

Em particular escolhendo $\varphi = \varphi_0$ função teste com suporte próximo de zero, obtemos

$$\int_\Omega \varphi_0^p \, d\mu' \geq S\left(\int_\Omega |\varphi_0|^{p(\alpha,\beta)} d\nu'\right)^{p/p(\alpha,\beta)} = S\,\nu_0^{p/p(\alpha,\beta)}\delta_0; \tag{2.43}$$

por outro lado escolhendo $\varphi = \varphi_\infty$, função teste com suporte próximo ao infinito, obtemos

$$\int_\Omega \varphi_\infty^p \, d\mu' \geq S\left(\int_\Omega |\varphi_\infty|^{p(\alpha,\beta)} d\nu'\right)^{p/p(\alpha,\beta)} = S\,\nu_\infty^{p/p(\alpha,\beta)}\delta_\infty. \tag{2.44}$$

Combinando as desigualdades (2.43), (2.44) e o limite (2.43) verificamos a desigualdade (2.39). Isso conclui a verificação da afirmativa.

Usando a desigualdade (2.39) e o fato de que $\mu(\Omega \cup \{\infty\}) = S(\nu(\Omega \cup \{\infty\}))^{p/p(\alpha,\beta)}$ resulta que

$$S\left(\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |x|^\beta |u_n|^{p(\alpha,\beta)}\right)^{p/p(\alpha,\beta)} \geq S\,\nu_0^{p/p(\alpha,\beta)}\delta_0 + S\,\nu_\infty^{p/p(\alpha,\beta)}\delta_\infty + \int_\Omega |x|^\alpha |\nabla u|^p.$$

Da definição (2.34) sabemos que

$$\int_\Omega |x|^\alpha |\nabla u|^p \geq S\left(\int_\Omega |x|^\beta |u|^{p(\alpha,\beta)}\right)^{p/p(\alpha,\beta)}$$

e, portanto,

$$S\left(\lim_{n\to\infty}\int_\Omega |x|^\beta |u_n|^{p(\alpha,\beta)}\right)^{p/p(\alpha,\beta)} \geq S\,\nu_0^{p/p(\alpha,\beta)}\delta_0 + S\,\nu_\infty^{p/p(\alpha,\beta)}\delta_\infty + S\left(\int_\Omega |x|^\beta |u|^{p(\alpha,\beta)}\right)^{p/p(\alpha,\beta)}.$$

Da convergência (2.38) obtemos

$$\left(\int_\Omega |x|^\beta |u|^{p(\alpha,\beta)} + \nu_0 + \nu_\infty\right)^{p/p(\alpha,\beta)} \geq \left(\int_\Omega |x|^\beta |u|^{p(\alpha,\beta)}\right)^{p/p(\alpha,\beta)} + \nu_0^{p/p(\alpha,\beta)}\delta_0 + \nu_\infty^{p/p(\alpha,\beta)}\delta_\infty.$$

Como $0 < p(\alpha,\beta) < p$, a desigualdade anterior é verdadeira somente quando um dos três termos ν_0, ν_∞ ou $\int_\Omega |x|^\beta |u|^{p(\alpha,\beta)}$ é não nulo. Como $G(u_n) = 1/2$ podemos afirmar que $\nu_0 = \nu_\infty = 0$ e portanto $u_n \to u$ fortemente em $L_\beta^{p(\alpha,\beta)}(\Omega)$. Portanto o ínfimo $S_{\alpha,\beta}$ é atingido pela função u. Isso conclui a demonstração do teorema. □

2.5 Observação. O Teorema 1.12 continua válido se $\alpha > 0$ ou $\beta < 0$ pois o Lema 2.2 é independente de α e β e o Lema 2.3 continua verdadeiro nesse caso.

2.3 Caso em que a desigualdade de Caffarelli, Kohn e Nirenberg é válida

Como consequência do Teorema 1.11, se considerarmos a existência de solução para o problema (1.18) em um cone Ω, devemos impor as condições $1 < p < N$, $\alpha > -N + p$, $\frac{\alpha}{p} > \frac{\beta}{p(\alpha,\beta)}$ e $\beta > \alpha - p$. Nesse caso a desigualdade de Caffarelli, Kohn e Nirenberg é válida. Além disso, $p < p(\alpha,\beta) < Np/(N-p)$, pois $p(\alpha,\beta)$ é crescente em relação a β e $\alpha - p < \beta < \frac{\alpha N}{N-p}$.

1.13 Teorema. *Suponhamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ seja um cone e que $1 < p < N$, $\alpha > p - N$, $\alpha/p > b/p(\alpha,\beta)$ e $\beta > \alpha - p$. Então o problema (1.18) possui uma solução de energia mínima.*

Demonstração. Consideramos o seguinte problema de minimização

$$\overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega) = \inf_{u\in D_0^\alpha(\Omega)\setminus\{0\}} \frac{\displaystyle\int_\Omega |x|^\alpha |\nabla u|^p}{\left(\displaystyle\int_\Omega |x|^\beta u^{p(\alpha,\beta)}\right)^{\frac{p}{p(\alpha,\beta)}}}.$$

Como consequência do Princípio do Máximo Forte (Proposição 2.6), se $u \in D_0^\alpha(\Omega)$ é uma função positiva que realiza o ínfimo, então $v(x) = \overline{S}_{\alpha,\beta}^{\frac{1}{p(\alpha,\beta)-p}} u(x)$ é solução do problema (1.18). Da desigualdade de Caffarelli, Kohn e Nirenberg, $\overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega) \geq S_{\alpha,\beta} > 0$. Por outro lado, como $p(\alpha,\beta) < Np/(N-p)$, para algum $M \in \mathbb{R}_+$ a imersão

$$D_0^\alpha(\{x\in\Omega : M^{-1} < |x| < M\}) \hookrightarrow L_\beta^{p(\alpha,\beta)}(\{x\in\Omega : M^{-1} < |x| < M\})$$

é compacta. Usando os mesmos argumentos da demonstração do Teorema 1.12 podemos mostrar que a melhor constante $\overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega)$ é atingida. Portanto, o problema (1.18) tem uma solução energia mínima. □

Para obtermos propriedades quantitativas das soluções e resultados de não existência de solução, estabelecemos a seguir um princípio do máximo cuja demonstração é inspiradada no artigo de Vázquez [23, Theorem 1, pág. 192].

2.6 Proposição (Princípio do máximo forte). *Suponhamos $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, $\partial\Omega$ contínua e $0 \in \partial\Omega$. Se $u \in C^1(\Omega)$, $u \geq 0$ e $u \neq 0$ satisfazendo*

$$-div(|x|^{\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \geq 0, \quad x \in \Omega,$$

então $u > 0$ em Ω.

Demonstração. Suponhamos que u se anula em algum ponto de Ω; então $N = \{x \in \Omega;\ u(x) = 0\}$ é não vazio. Usando a função distância de um ponto a um conjunto definimos as funções $d_1, d_2 \colon \Omega \to \mathbb{R}$ por $d_1(x) = \operatorname{dist}(x, \partial\Omega)$ e $d_2(x) = \operatorname{dist}(x, N)$.

Afirmamos que o conjunto $D \equiv \{x \in \Omega;\ d_1(x) > d_2(x)\}$ é não vazio. De fato, se $D = \emptyset$ então $d_1(x) \leq d_2(x)$ para todo $x \in \Omega$. Como por hipótese u se anula em algum ponto de Ω, digamos $u(y_0) = 0$, então $d_2(y_0) = d(y_0, N) = 0$ pois $y_0 \in N$. Isto implica que $d_1(y_0) = d(y_0, \partial\Omega) = 0$ o que é uma contradição pois $y_0 \in \Omega$. Portanto $D \neq \emptyset$.

Se $x_1 \in D$, então $x_1 \in \Omega$ e $u(x_1) > 0$ (pois caso contrário $u(x_1) = 0$ e x_1 pertenceria a N contradizendo o fato de x_1 pertencer a D). Tomemos $R = \sup\{r > 0; B_r(x_1) \subset \Omega \setminus N\}$ e denotemos $B = B_R(x_1)$. Desta forma temos $\overline{B} \subset \Omega$, pois dado $y \in \overline{B}$ temos $d(y, x_1) \leq R \leq d(x_1, N) < d(x_1, \partial\Omega)$, ou seja, $y \in \Omega$. Além disso, como $u \in C^1(\Omega)$, u tem máximo e mínimo em $\overline{B}$ e podemos dizer que $0 < u(x) < a$ para um certo $a \in \mathbb{R}_+$.

Afirmamos que existe um ponto $x_0 \in N$ tal que $d(x_0, x_1) = R$, isto é, $x_0 \in \partial B$. De fato, se não existisse esse ponto x_0 então existiria $\varepsilon > 0$ tal que $B(x_1, R + \varepsilon) \subset \Omega \setminus N$ o que contradiz a definição de R.

Consideramos o anel

$$A = \left\{x \in \mathbb{R}^N : \frac{R}{2} < |x - x_1| < R\right\} \subset \Omega$$

em que, em particular, $0 < u(x) < a$. Definindo

$$c = \inf\left\{u(x) : |x - x_1| = \frac{R}{2}\right\}$$

então $0 < c < a$.

Suponhamos que $v(r) = v(r; k_1, r_1, c)$, $k_1, r_1 > 0$ seja solução de

$$\begin{cases} v'' = k_1 v' & \text{se} \quad 0 < r < r_1 \\ v(0) = 0, \quad v(r_1) = c. \end{cases} \tag{2.45}$$

A solução dessa equação diferencial é da forma $v(r) = c_1 e^{k_1 r} - c_2$, para constantes $c_1, c_2 \in \mathbb{R}$. Observamos também que v, v' e v'' são positivas em $(0, r_1)$ e $0 < v(r) < c$ em $(0, r_1)$.

Vamos agora construir a seguinte função,

$$\overline{u}(x) = v(R - |x - x_1|; k_1, R/2, c). \tag{2.46}$$

Notamos que se $x \in \partial B_R(x_1)$, então $|x - x_1| = R$; assim,

$$\overline{u}(x) = v(R - |x - x_1|; k_1, R/2, c) = v(0) = 0 \leq u(x).$$

Além disso, se $x \in \partial B_{R/2}(x_1)$, então $|x - x_1| = R/2$; assim,

$$\overline{u}(x) = v(R - |x - x_1|; k_1, R/2, c) = v(R/2; k_1, R/2, c) = c \leq u(x).$$

AFIRMATIVA 9. *Se $k_1 \geq \frac{2(N-1+\alpha)}{R(p-1)}$ então no anel A valem as desigualdades*

$$-div(|x|^\alpha |\nabla \overline{u}\,|^{p-2} \nabla \overline{u}) \leq -|x|^\alpha v'^{p-2} \Big[(p-1)k_1 - \frac{N-1+\alpha}{R}\Big] v' \leq 0.$$

Para verificar essa afirmativa consideramos $\rho \equiv R - |x - x_1|$. Dessa forma

$$\overline{u}(x) = c_1 e^{k_1(R - |x - x_1|)} - c_2 = c_1 e^{k_1 \rho} - c_2 = v(\rho)$$

e

$$\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i} = k_1 c_1 e^{k_1 \rho} \, \frac{-(x_i - x_1^i)}{|x - x_1|} = -v'(\rho) \frac{(x_i - x_1^i)}{|x - x_1|}.$$

Assim,

$$|\nabla \overline{u}\,| = |v'(\rho)| \Rightarrow |\nabla \overline{u}\,|^{p-2} = v'(\rho)^{p-2}.$$

e

$$|x|^\alpha |\nabla \overline{u}\,|^{p-2} \frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i} = -|x|^\alpha v'(\rho)^{p-1} \frac{(x_i - x_1^i)}{|x - x_1|}.$$

Prosseguindo, temos

$$
\begin{aligned}
-\left(|x|^{\alpha}|\nabla \overline{u}\ |^{p-2}\frac{\partial \overline{u}}{\partial x_i}\right)_{x_i} &= \left(|x|^{\alpha} v'^{p-1}\frac{(x_i - x_1^i)}{|x-x_1|}\right)_{x_i} \\
&= \alpha |x|^{\alpha-2} x_i \left(v'^{p-1}\frac{(x_i - x_1^i)}{|x-x_1|}\right) + |x|^{\alpha}\left(v'^{p-1}\frac{(x_i - x_1^i)}{|x-x_1|}\right)_{x_i} \\
&= \alpha |x|^{\alpha-2} v'^{p-1} x_i \frac{(x_i - x_1^i)}{|x-x_1|} + |x|^{\alpha}\left[v'^{p-1}\left(\frac{(x_i - x_1^i)}{|x-x_1|}\right)_{x_i}\right. \\
&\quad \left. + (p-1)v'^{p-2}v''\frac{-(x_i - x_1^i)}{|x-x_1|}\frac{(x_i - x_1^i)}{|x-x_1|}\right] \\
&= \alpha |x|^{\alpha-2} v'^{p-1} x_i \frac{(x_i - x_1^i)}{|x-x_1|} + |x|^{\alpha} v'^{p-1}\left(\frac{|x-x_1| - (x_i - x_1^i)^2}{|x-x_1|^3}\right) \\
&\quad - |x|^{\alpha}(p-1)v'^{p-2}v''\frac{(x_i - x_1^i)^2}{|x-x_1|^2} \\
&= \alpha |x|^{\alpha-2} v'^{p-1} x_i \frac{(x_i - x_1^i)}{|x-x_1|} + \frac{|x|^{\alpha} v'^{p-1}}{|x-x_1|^2} - \frac{|x|^{\alpha} v'^{p-1}(x_i - x_1^i)^2}{|x-x_1|^3} \\
&\quad - |x|^{\alpha}(p-1)v'^{p-2}v''\frac{(x_i - x_1^i)^2}{|x-x_1|^2}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{div}(|x|^{\alpha}|\nabla \overline{u}\ |^{p-2}\nabla \overline{u}) &= \alpha |x|^{\alpha-2} v'^{p-1}\frac{x\cdot(x-x_1)}{|x-x_1|} + \frac{|x|^{\alpha} v'^{p-1}N}{|x-x_1|^2} - \frac{|x|^{\alpha} v'^{p-1}}{|x-x_1|} \\
&\quad - |x|^{\alpha}(p-1)v'^{p-2}v'' \\
&= \frac{\alpha |x|^{\alpha} v'^{p-1}}{|x-x_1|} - \frac{\alpha |x|^{\alpha-2} v'^{p-1} x\cdot x_1}{|x-x_1|} + \frac{|x|^{\alpha} v'^{p-1}N}{|x-x_1|^2} - \frac{|x|^{\alpha} v'^{p-1}}{|x-x_1|} \\
&\quad - |x|^{\alpha}(p-1)v'^{p-2}v'' \\
&= -|x|^{\alpha} v'^{p-2}\left[(p-1)v'' - \frac{N-1+\alpha}{|x-x_1|}v'\right] - \frac{\alpha |x|^{\alpha-2} v'^{p-1} x\cdot x_1}{|x-x_1|}.
\end{aligned}
$$

Como $d_1(x_1) > d_2(x_1)$ e já que $0 \in \partial\Omega$, temos que $|x_1| > R$. Com isso o anel A está contido no semi-plano formado pelos pontos $x \in \mathbb{R}^N$ tais que $x \cdot x_1 \geq 0$. Segue deste fato que,

$$
\begin{aligned}
-\mathrm{div}(|x|^{\alpha}|\nabla \overline{u}\ |^{p-2}\nabla \overline{u}) &\leq -|x|^{\alpha} v'^{p-2}\left[(p-1)v'' - \frac{N-1+\alpha}{|x-x_1|}v'\right] \\
&\leq -|x|^{\alpha} v'^{p-2}\left[(p-1)k_1 - \frac{2(N-1+\alpha)}{R}\right]v' \leq 0.
\end{aligned}
$$

em que na penúltima passagem usamos o fato de que $v'' = k_1 v'$ e que $\frac{R}{2} < r = |x - x_1|$ e na última passagem usamos a hipótese de que $k_1 \geq \frac{2(N-1+\alpha)}{R(p-1)}$. Isso conclui a verificação da afirmativa.

Agora devemos mostrar que $u(x) \geq \overline{u}(x)$ para $x \in A$. Observamos que $u(x) \geq \overline{u}(x)$ para $x \in \partial A = \partial B_R(x_1) \cup \partial B_{R/2}(x_1)$. Também temos que $-\mathrm{div}(|x|^{\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \geq 0$ e que

$-\text{div}(|x|^{\alpha}|\nabla \overline{u}\,|^{p-2}\nabla \overline{u}) \leq 0$ em A. Aplicando o Lema 2.7 (Princípio de comparação), para $\Lambda = A$ e $f \equiv 0$ temos que $u(x) \geq \overline{u}(x)$ q.t.p. em A.

Por fim, temos

$$\begin{aligned} 0 < v'(0) &= \liminf_{h\to 0} \frac{v(0+th)-v(0)}{h} = \liminf_{h\to 0} \frac{\overline{u}(x_0+h(x_1-x_0))-\overline{u}(x_0)}{h} \\ &\leq \liminf_{h\to 0} \frac{u(x_0+h(x_1-x_0))-u(x_0)}{h} \end{aligned}$$

o que é uma contradição, pois $v'(0) \leq 0$ já que x_0 é ponto de mínimo de $u(x)$ em Ω. Isso conclui a demonstração da proposição. □

2.7 Lema (Princípio da comparação). *Se $\nabla u, \nabla v \in L^p_\alpha(\Lambda)$ e $u \geq v$ em $\partial\Lambda$ tal que*

$$-div(|x|^{\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) \geq f, \qquad -div(|x|^{\alpha}|\nabla v|^{p-2}\nabla v) \leq f, \quad q.t.p \text{ em } \Lambda, \tag{2.47}$$

então $u \geq v$ q.t.p. em Λ.

Demonstração. Suponhamos que exista um conjunto $\Lambda_0 \subset \Lambda$ com medida positiva, tal que $v > u$ em Λ_0; obteremos uma contradição. Seja $w = (v-u)^+ = \max\{(v-u)(x), 0\}$. Usando a primeira identidade de Green (Proposição A.10) e a segunda linha da desigualdade (A.3) do Lema A.3 para $p \geq 2$, obtemos

$$\begin{aligned} \frac{1}{2^{p-1}} \int_{\Lambda_0} |x|^{\alpha}|\nabla w|^p \,\mathrm{d}x &\leq \frac{1}{2^{p-1}} \int_{\Lambda} |x|^{\alpha}|\nabla w|^p \,\mathrm{d}x \\ &\leq \int_{\Lambda} \left(|x|^{\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u - |\nabla v|^{p-2}\nabla v\right) \cdot (\nabla u - \nabla v) \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\Lambda} |x|^{\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot (\nabla u - \nabla v) \,\mathrm{d}x - \int_{\Lambda} |x|^{\alpha}|\nabla v|^{p-2}\nabla v \cdot (\nabla u - \nabla v) \,\mathrm{d}x \\ &= -\int_{\Lambda} |x|^{\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u \cdot \nabla w \,\mathrm{d}x + \int_{\Lambda} |x|^{\alpha}|\nabla v|^{p-2}\nabla v \cdot \nabla w \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\Lambda} \text{div}(|x|^{\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) w \,\mathrm{d}x - \int_{\Lambda} \text{div}(|x|^{\alpha}|\nabla v|^{p-2}\nabla v) w \,\mathrm{d}x \\ &= \int_{\Lambda} \Big[\text{div}(|x|^{\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) - \text{div}(|x|^{\alpha}|\nabla v|^{p-2}\nabla v)\Big] w \,\mathrm{d}x \end{aligned} \tag{2.48}$$

Da hipótese em (2.47), obtemos

$$\text{div}(|x|^{\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) - \text{div}(|x|^{\alpha}|\nabla v|^{p-2}\nabla v) \leq 0$$

e, consequentemente,

$$\int_{\Lambda_0} |x|^{\alpha}|\nabla w|^p \,\mathrm{d}x \leq 0.$$

Como o integrando da expressão anterior é não negativo, segue que

$$\int_{\Lambda_0} |x|^{\alpha}|\nabla w|^p \,\mathrm{d}x = 0. \tag{2.49}$$

Analogamente, usando a primeira identidade de Green (Proposição A.10) e a primeira linha da desigualdade (A.3) do Lema A.3 para $1 < p < 2$, resulta

$$\begin{aligned}(p-1)\int_{\Lambda_0} |x|^\alpha |\nabla w|^2 (|\nabla v| + |\nabla u|)^{p-2}\,dx &\le (p-1)\int_{\Lambda} |x|^\alpha |\nabla w|^2 (|\nabla v| + |\nabla u|)^{p-2}\,dx \\ &\le \int_\Lambda |x|^\alpha (|\nabla v|^{p-2}\nabla v - |\nabla u|^{p-2}\nabla u)\nabla w\,dx \\ &= \int_\Lambda |x|^\alpha |\nabla v|^{p-2}\nabla v\cdot\nabla w\,dx - \int_\Lambda |x|^\alpha |\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla w\,dx \\ &= \int_\Lambda \Big[\operatorname{div}(|x|^\alpha|\nabla u|^{p-2}\nabla u) - \operatorname{div}(|x|^\alpha|\nabla v|^{p-2}\nabla v)\Big] w\,dx \\ &\le 0.\end{aligned}$$

Como o integrando da expressão anterior é não negativo, segue que

$$\int_{\Lambda_0} |x|^\alpha |\nabla w|^2 (|\nabla v| + |\nabla u|)^{p-2}\,dx = 0, \tag{2.50}$$

Combinando as igualdades (2.49) e (2.50) obtemos que $\nabla w = 0$ q.t.p. em Λ_0 para $1 < p < N$. Aplicando a Proposição A.17 temos que $v - u = 0$ q.t.p. em Λ_0, o que é uma contradição com a hipótese de que $w > 0$ em Λ_0. Isso conclui a demonstração do lema. □

2.8 Observação. Pelo princípio da comparação (Lema 2.7), usando a transformação (2.5) podemos mostrar que o princípio da comparação ainda continua verdadeiro para o problema

$$-\Delta u - \mu\frac{u}{|x|^2} = f(x),$$

para $x \in \Omega$, $u \in W^{1,2}(\Omega)$ e $0 \le \mu < \frac{(N-2)^2}{4}$. Esse já havia sido demonstrado usando hipóteses mais fortes e com argumentos mais elaborados.

2.9 Corolário. *Sejam $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^N$ dois cones tais que $\Omega_1 \subsetneq \Omega_2$. Então $\overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega_1) > \overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega_2)$.*

Demonstração. Suponhamos que u_1 realiza a melhor constante $\overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega_1)$. Sem perda de generalidade podemos supor que u_1 é solução de energia mínima de problema (1.18) em Ω_1. Como $\Omega_1 \subsetneq \Omega_2$ segue que $\overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega_2) \le \overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega_1)$. Suponhamos que $\overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega_2) = \overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega_1)$. Definindo

$$u_2 = \begin{cases} u_1 & \text{em } \Omega_1 \\ 0 & \text{em } \Omega_2 \setminus \Omega_1, \end{cases}$$

temos que $u_2 \in D_0^\alpha(\Omega)$ realiza a melhor constante $\overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega_2)$ e é solução da equação diferencial em (1.18) no domínio Ω_2. Para algum compacto $K \subset \Omega_2$, as funções $|x|^\alpha$ e $|x|^\beta$ são limitadas; portanto, segue da teoria de regularidade para equações elípticas quasilineares que $u \in C^{1,k}(\Omega)$, $0 < k < 1$. Portanto, da Proposição 2.6 (princípio do máximo forte), obtemos $u_2 > 0$ em Ω_2, o que contradiz a definição de u_2. Isso conclui a demonstração do corolário. □

Agora usamos o princípio do máximo forte (Proposição 2.6) e a invariância, por dilatações, do quociente que define a melhor constante $\overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega)$ para obtermos resultados de não-existência em alguns domínios de fronteira suave contendo o zero. Os resultados abaixo são similares aos encontrados em [13].

1.14 Teorema. *(a) Suponhamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ seja um subconjunto tal que $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$ e $T(\Omega) \subset \mathbb{R}^N_+$ para alguma rotação $T\colon \mathbb{R}^N \to \mathbb{R}^N$. Então $\overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega) = \overline{S}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^N)$ e $\overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega)$ não é atingido a menos que $\Omega = \mathbb{R}^N$.*

(b) Dado $\gamma \in \mathbb{R}$ definimos o exterior de um parabolóide por

$$P_\gamma \equiv \{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} \colon x_N > \gamma |x'|^2\}.$$

Se $\gamma \in \mathbb{R}^-$ e $N \geqslant 4$, então $\overline{S}_{\alpha,\beta}(P_\gamma) = \overline{S}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^N) = S_{\alpha,\beta}$ e $\overline{S}_{\alpha,\beta}(P_\gamma)$ não é atingido a menos que $P_\gamma = \mathbb{R}^N$.

(c) Seja Ω é um domínio exterior tal que $0 \in \partial\Omega$. Então $\overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega) = \overline{S}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^N) = S_{\alpha,\beta}$ e $\overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega)$ não é atingido.

Portanto, o problema (1.18) não tem solução de energia mínima no caso do item (a) se $\Omega \neq \mathbb{R}^N_+$; no caso do item (b) se $P_\gamma \neq \mathbb{R}^N$; no caso do item (c).

Demonstração. Para demonstrar o item (a) começamos observando que $\overline{S}_{\alpha,\beta}$ é invariante por rotações; assim podemos supor que $\Omega \subset \mathbb{R}^N_+$; portanto, $\overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega) \geq \overline{S}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^N_+)$.

Devemos mostrar agora que a desigualdade reversa $\overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega) \leq \overline{S}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^N_+)$ é verdadeira. Para cada $\tau \in \mathbb{R}_+$ definimos uma bola de raio τ e centro (x', τ) por

$$B_\tau = \{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^N_+ : |x'|^2 + (x_N - \tau)^2 < \tau^2\} \subset \mathbb{R}^N_+.$$

Assim $\overline{S}_{\alpha,\beta}(B_\tau) \geq \overline{S}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^N_+)$ para cada $\tau > 0$.

AFIRMATIVA 10. *Se $\tau_1 < \tau_2$, então $B_{\tau_1} \subset B_{\tau_2}$.*

De fato, se $x \in B_{\tau_1}$ então

$$\begin{aligned} |x'|^2 + (x_N - \tau_2)^2 &= |x'|^2 + x_N^2 - 2x_N\tau_2 + \tau_2^2 \\ &< |x'|^2 + x_N^2 - 2x_N\tau_1 + \tau_2^2 \\ &= |x'|^2 + (x_N - \tau_1)^2 - \tau_1^2 + \tau_2^2 \\ &< \tau_1^2 - \tau_1^2 + \tau_2^2 = \tau_2^2. \end{aligned}$$

Isso conclui a verificação da afirmativa.

No que segue usamos a notação

$$\lambda B_\tau = \{\lambda x = (\lambda x', \lambda x_N) \in \mathbb{R}^+_N : |x'|^2 + (x_N - \tau)^2 < \tau^2\}$$

AFIRMATIVA 11. *$\lambda B_\tau = B_{\lambda\tau}$ para todos $\lambda, \tau > 0$.*

De fato, seja $y \in \lambda B_\tau$ então $y = \lambda x$ tal que $|x'|^2 + (x_N - \tau)^2 < \tau^2$. Substituindo $x = \frac{y}{\lambda}$, resulta $|y'|^2 + (y_N - \lambda\tau)^2 < \lambda^2\tau^2$. Portanto $y \in B_{\lambda\tau}$.

Por outro lado, se $y \in B_{\lambda\tau}$ então $|y'|^2 + (y_N - \lambda\tau)^2 < \lambda^2\tau^2$ o que implica que $x = \frac{y}{\lambda} \in B_\tau$. Como y pode ser escrito na forma $y = \lambda x$ obtemos que $y \in \lambda B_\tau$. Isso conclui a verificação da afirmativa.

Dado $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, seja $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N_+)$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N_+} |x|^\beta |u_\varepsilon|^{p(\alpha,\beta)} = 1 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N_+} |x|^\alpha |\nabla u_\varepsilon|^p = \overline{S}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^N_+) + \varepsilon. \tag{2.51}$$

Denotando o suporte de u_ε por supp u_ε e usando o fato de que esse conjunto é compacto, dada uma cobertura de supp u_ε por bolas abertas podemos extrair uma subcobertura finita tal que

$$\operatorname{supp} u_\varepsilon \subset \bigcup_{i=1}^k B_{r_i}(x_i),$$

em que $x_i = (x_i', x_N^i) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R}_+$. Por outro lado, dada uma bola qualquer $B_{r_i}(x_i)$ existe $\tau_i \in \mathbb{R}_+$ tal que $B_{r_i}(x_i) \subset B_{\tau_i}$. Assim, definindo $m_\varepsilon = \max\limits_{1\le i\le k}\{\tau_i\}$ temos que $\tau_i \le m_\varepsilon$ para todo i com $1 \le i \le k$. Aplicando a Afirmativa 10 podemos dizer que $B_{\tau_i} \subset B_{m_\varepsilon}$ para cada $1 \le i \le k$. Portanto,

$$\bigcup_{i=1}^k B_{r_i}(x_i) \subset \bigcup_{i=1}^k B_{\tau_i} \subset B_{m_\varepsilon}$$

e, consequentemente, supp $u_\varepsilon \subset B_{m_\varepsilon}$. Assim, se $m > m_\varepsilon$ então $u_\varepsilon \in C_0^\infty(B_m)$ e pelas igualdades (2.51) temos que $\overline{S}_{\alpha,\beta}(B_m) \le \overline{S}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^N_+) + \varepsilon$.

Por outro lado, existe $r > 0$ tal que $B_r \subset \Omega$ e assim $\overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega) \le \overline{S}_{\alpha,\beta}(B_r)$. Da Afirmativa 11 e da invariância por dilatação, obtemos

$$\overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega) \le \overline{S}_{\alpha,\beta}(B_r) = \overline{S}_{\alpha,\beta}(\frac{m}{r}B_r) = \overline{S}_{\alpha,\beta}(B_m) \le \overline{S}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^N_+) + \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, concluímos que $\overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega) = \overline{S}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^N_+)$.

Para verificar que $\overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega)$ não é atingido quando $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^N_+$ argumentamos por contradição. Assim, supondo que o valor é atingido por uma função $u \in D_0^\alpha(\Omega)$, estendemos esta função no complementar de Ω como sendo zero, de forma similar ao que foi feito na demonstração do Corolário 2.9. Usando a teoria de regularidade para equações elípticas quase lineares obtemos que $u \in C^{1,k}(\Omega)$ em que $0 < k < 1$. Portanto pelo Princípio do máximo forte 2.6 devemos ter $0 < u(x)$ para $x \in \mathbb{R}^N_+$ o que é uma contradição com a definição de u. Isso conclui a demonstração do item (a).

Para demonstrar o item (b) faremos uso das afirmativas abaixo.

AFIRMATIVA 12. *Usando a definição do parabolóide P_γ e dado $0 < \lambda < 1$, temos $\lambda P_\gamma = P_{\frac{\gamma}{\lambda}}$ em que $\lambda P_\gamma = \{\lambda x \colon x \in P_\gamma\}$.*

De fato, se $x \in \lambda P_\gamma$ então x é da forma $x = \lambda y$ em que $y_N > \gamma|y'|^2$. Como $y = \frac{x}{\lambda}$, temos $\frac{x_N}{\lambda} > \gamma\frac{|x'|^2}{\lambda^2}$ ou seja, $x_N > \frac{\gamma}{\lambda}|x'|^2$ o que implica que $x \in P_{\frac{\gamma}{\lambda}}$.

Por outro lado, dado $x \in P_{\frac{\gamma}{\lambda}}$ então $x_N > \frac{\gamma}{\lambda}|x'|^2$ ou seja $\frac{x_N}{\lambda} > \frac{\gamma|x'|^2}{\lambda^2}$ e isso implica que $x \in \lambda P_\gamma$. Isso conclui a verificação da afirmativa.

Para a próxima afirmativa definimos $M \equiv \mathbb{R}^N \setminus \{x = (0, x_N);\ x_N \leq 0\}$.

AFIRMATIVA 13. *$M = \bigcup\limits_{0<\lambda<1} \lambda P_\gamma = \bigcup\limits_{0<\lambda<1} P_{\frac{\gamma}{\lambda}}$ para todo $0 < \lambda < 1$.*

Vamos mostrar primeiramente que $M \subset \bigcup\limits_{0<\lambda<1} \lambda P_\gamma$. Para isso, definimos

$$R_1 = \{(x', x_N) \in M \colon x_N \geq 0\}$$
$$R_2 = \{(x', x_N) \in M \colon x \in P_\gamma \text{ e } x_N \leq 0\}$$
$$R_3 = \{(x', x_N) \in M \colon x \notin P_\gamma\}$$

e observamos que $M = R_1 \cup R_2 \cup R_3$.

Se $x \in R_1$, então $x_N \geq 0 \geq \gamma|x'|^2$; portanto, $x \in \lambda P_\gamma$ para qualquer $0 < \lambda < 1$.

Se $x \in R_2$, como $x \in P_\gamma$ e $0 < \lambda < 1$, então $x \in \lambda P_\gamma$.

Por fim, se $x \in R_3$ temos que $x_N \leq \gamma|x'|^2$ e como $\gamma < 0$, resulta que $x_N < 0$; esse fato, juntamente com $x \in M$ implicam que $x' \neq 0$. A reta que une a origem $(0', 0)$ a $x = (x', x_N)$ intercepta o parabolóide em algum ponto, que denotaremos por $y = (y', y_N) = (y', \gamma|y'|^2)$. Podemos dizer que $y' = ax'$ e $y_N = ax_N$ para algum $a \geq 1$. Segue que, $y_N = ax_N = \gamma|y'|^2 = \gamma|ax'|^2$, ou seja, $a = x_N/\gamma|x'|^2$. Esse número está bem definido pois $x' \neq 0$ e $\gamma < 0$. Usando $\lambda = 1/2a$ afirmamos que $x \in \lambda P_\gamma$. De fato,

$$\frac{\gamma}{\lambda}|x'|^2 = 2a\gamma|x'|^2 = 2\frac{x_N}{\gamma|x'|^2}\gamma|x'|^2 = 2x_N < x_N,$$

logo $x \in P_{\frac{\gamma}{\lambda}} = \lambda P_\gamma$. Portanto $x \in \bigcup\limits_{0<\lambda<1} \lambda P_\gamma$. Assim $M \subset \bigcup\limits_{0<\lambda<1} \lambda P_\gamma$.

Vamos mostrar a desigualdade reversa $\bigcup\limits_{0<\lambda<1} \lambda P_\gamma \subset M$. Se $x \in \bigcup\limits_{0<\lambda<1} \lambda P_\gamma$ então $x = (x', x_N) \in \lambda P_\gamma$ para algum $0 < \lambda < 1$ e isso significa que $x' \neq 0$ ou seja, $x \in M$.

A igualdade $\bigcup\limits_{0<\lambda<1} \lambda P_\gamma = \bigcup\limits_{0<\lambda<1} P_{\frac{\gamma}{\lambda}}$ segue diretamente da Afirmativa 12. Isso conclui a verificação da afirmativa.

Prosseguindo, para cada $\gamma \in \mathbb{R}_-$ fixado temos que $P_\gamma \subset M$; logo, $\overline{S}_{\alpha,\beta}(P_\gamma) \geq \overline{S}_{\alpha,\beta}(M)$. Devemos mostrar a desigualdade reversa $\overline{S}_{\alpha,\beta}(P_\gamma) \leq \overline{S}_{\alpha,\beta}(M)$. Fixado $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, seja $u_\varepsilon \in C_0^\infty(M)$ tal que

$$\int_M |x|^\beta |u_\varepsilon|^{p(\alpha,\beta)}\, \mathrm{d}x = 1 \quad \text{e} \quad \int_M |x|^\alpha |\nabla u_\varepsilon|^p\, \mathrm{d}x = \overline{S}_{\alpha,\beta}(M) + \varepsilon.$$

Como o suporte de u_ε é compacto temos que $\operatorname{dist}(\operatorname{supp} u_\varepsilon, \mathbb{R}^N \setminus M) > 0$. Usando esse fato e a Afirmativa 13 garantimos a existência de $\lambda_\varepsilon = \lambda(\varepsilon) \subset \mathbb{R}_+$ tal que, para todo $\lambda \in (0, \lambda_\varepsilon)$ temos que $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\lambda P_\gamma)$ e

$$\overline{S}_{\alpha,\beta}(\lambda P_\gamma) \leq \overline{S}_{\alpha,\beta}(M) + \varepsilon.$$

Além disso, existe $\gamma < \gamma_1 < 0$ tal que $P_{\gamma_1} \subset P_\gamma$; logo $\overline{S}_{\alpha,\beta}(P_\gamma) \leq \overline{S}_{\alpha,\beta}(P_{\gamma_1})$. Usando a Afirmativa 12 e a invariância de $\overline{S}_{\alpha,\beta}(P_\gamma)$ por homotetias (veja Lema 2.4), obtemos

$$\overline{S}_{\alpha,\beta}(P_\gamma) \leq \overline{S}_{\alpha,\beta}(P_{\gamma_1}) = \overline{S}_{\alpha,\beta}(\lambda \frac{\gamma_1}{\gamma} P_{\gamma_1}) = \overline{S}_{\alpha,\beta}(\lambda P_\gamma) \leq \overline{S}_{\alpha,\beta}(M) + \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário, concluímos que $\overline{S}_{\alpha,\beta}(P_\gamma) = \overline{S}_{\alpha,\beta}(M)$. Como M é um subconjunto unidimensional de $\mathbb{R}^N$ e $\operatorname{cap}(M) = 0$ se $N \geq 4$ (Proposição A.19), segue que $\overline{S}_{\alpha,\beta}(M) = \overline{S}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^N)$.

Para verificar que $\overline{S}_{\alpha,\beta}(P_\gamma)$ não é atingida se $P_\gamma \neq \mathbb{R}^N$, usamos os mesmos argumentos apresentados no item (a). Assim completamos a demonstração de (b).

Para demonstrar o item (c) verificamos inicialmente que $C_0^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ é denso em $D_0^\alpha(\mathbb{R}^N)$. Escolhemos uma função $\eta \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$ satisfazendo

$$\eta(x) = \begin{cases} 0, & |x| \leq 1 \\ 1, & |x| \geq 2. \end{cases}$$

Para $f \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ e $\varepsilon > 0$, definimos $g_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ tal que

$$g_\varepsilon(x) = \eta(x/\varepsilon) f(x).$$

Pela desigualdade dada no item 2 da Proposição A.1 resulta que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha |\nabla f - \nabla g_\varepsilon|^p \, dx &= \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha |(1 - \eta(x/\varepsilon)) \nabla f - \frac{1}{\varepsilon} f \nabla \eta|^p \, dx \\
&\leq C \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha |(1 - \eta(x/\varepsilon)) \nabla f|^p \, dx + \frac{C}{\varepsilon^p} \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha |f \nabla \eta|^p \, dx \\
&= C \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{2\varepsilon}(0)} |x|^\alpha |(1 - \eta(x/\varepsilon)) \nabla f|^p \, dx + \frac{C}{\varepsilon^p} \int_{\mathbb{R}^N \setminus B_{2\varepsilon}(0)} |x|^\alpha |f|^p |\nabla \eta|^p \, dx \\
&\quad + C \int_{B_{2\varepsilon}(0)} |x|^\alpha |(1 - \eta(x/\varepsilon)) \nabla f|^p \, dx + \frac{C}{\varepsilon^p} \int_{B_{2\varepsilon}(0)} |x|^\alpha |f|^p |\nabla \eta|^p \, dx \\
&= C \int_{B_{2\varepsilon}(0)} |x|^\alpha |(1 - \eta(x/\varepsilon)) \nabla f|^p \, dx + \frac{C}{\varepsilon^p} \int_{B_{2\varepsilon}(0)} |x|^\alpha |f|^p |\nabla \eta|^p \, dx \\
&\leq C \int_{B_{2\varepsilon}(0)} |x|^\alpha |\nabla f|^p \, dx + \frac{C}{\varepsilon^p} \int_{B_{2\varepsilon}(0)} |x|^\alpha |f|^p \, dx
\end{aligned}$$

em que usamos o fato de que $\eta(x/\varepsilon) = 1$ se $|x| > 2\varepsilon$ e a limitação de $|\eta(x)|$ e $|\nabla \eta(x)|$. Como f tem suporte compacto obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha |\nabla f - \nabla g_\varepsilon|^p \leq C(\varepsilon^{N+\alpha} + \varepsilon^{N+\alpha-p})$$

para alguma constante C. Como $\alpha > N - p$, o lado direito da desigualdade anterior tende a zero quando $\varepsilon \to 0$. Assim concluímos que f pertence ao fecho de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$, como desejado.

Como $\Omega \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ temos que $\overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega) \geq \overline{S}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$. Usando argumento similar aos ítens (a) e (b) vamos mostrar a desigualdade contrária. Dado $\delta > 0$ definimos

$$E_\delta = \{x = (x', x_N) \in \mathbb{R}^{N-1} \times \mathbb{R} : |x'|^2 + x_N^2 > \delta^2\} \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\},$$

o exterior da bola de centro na origem e raio δ. Com relação ao conjunto definido acima temos a seguinte afirmativa,

AFIRMATIVA 14. *Para todo λ e $\delta \in \mathbb{R}_+$ temos que $\lambda E_\delta = E_{\lambda\delta}$.*

De fato, se $y \in \lambda E_\delta$ então $y = \lambda x$ tal que $|x'|^2 + x_N^2 > \delta^2$. Substituindo $x = y/\lambda$ na desigualdade anterior resulta que $|y'|^2 + y_N^2 > \lambda^2\delta^2$ e portanto $y \in E_{\lambda\delta}$.

Se $y \in E_{\lambda\delta}$ então $|y'|^2 + y_N^2 > \lambda^2\delta^2$, ou seja, $\left|\frac{y'}{\lambda}\right|^2 + \frac{y_N^2}{\lambda^2} > \delta^2$, portanto $y \in \lambda E_\delta$. O que demonstra a afirmativa.

Como $E_\delta \subset \mathbb{R}^N \setminus \{0\}$ para todo $\delta > 0$, obtemos que $\overline{S}_{\alpha,\beta}(E_\delta) \geq \overline{S}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$. Dado $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, seja $u_\varepsilon \in C_0^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ tal que

$$\int_{\mathbb{R}^N\setminus\{0\}} |x|^\beta |u_\varepsilon|^{p(\alpha,\beta)} = 1 \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^N\setminus\{0\}} |x|^\alpha |\nabla u_\varepsilon|^p = \overline{S}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) + \varepsilon.$$

Denotando o suporte de u_ε por K e usando o fato de que esse conjunto é compacto existe raio $r(\varepsilon) = r_\varepsilon \in \mathbb{N}$ tal que $K \subset E_{r_\varepsilon}$. Isso significa que para todo $r \in (r_\varepsilon, \infty)$ temos que $K \subset E_{1/r}$, ou seja, $u_\varepsilon \in C_0^\infty(E_{1/r})$ e, portanto,

$$\overline{S}_{\alpha,\beta}(E_{1/r}) \leq \overline{S}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) + \varepsilon.$$

Além disso, como Ω é um domínio exterior, existe $\rho \in \mathbb{R}_+$ tal que $E_\rho \subset \Omega$, logo $\overline{S}_{\alpha,\beta}(E_\rho) \geq \overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega)$. Da afirmativa 14 e da invariância por dilatação, obtemos que

$$\overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega) \leq \overline{S}_{\alpha,\beta}(E_\rho) = \overline{S}_{\alpha,\beta}\Big(\frac{1}{r\rho}\, E_\rho\Big) = \overline{S}_{\alpha,\beta}(E_{1/r}) \leq \overline{S}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^N \setminus \{0\}) + \varepsilon.$$

Como ε é arbitrário temos que $\overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega) \leq \overline{S}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$, consequentemente $\overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega) = \overline{S}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$. Usando que $\mathbb{R}^N \setminus \{0\} = \bigcup_{0<\lambda<1} \lambda\Omega$ e que o fecho de $C_0^\infty(\mathbb{R}^N \setminus \{0\})$ é $D_0^\alpha(\mathbb{R}^N)$, obtemos que

$$\overline{S}_{\alpha,\beta}(\Omega) = \overline{S}_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^N) = S_{\alpha,\beta}.$$

Para verificar que $\overline{S}_{\alpha,\beta}(P_\gamma)$ não é atingida usamos os mesmos argumentos apresentados no item (a). Assim completamos a demonstração do item (c). $\square$

3 Demonstração do teorema para o problema de Neumann

3.1 Resultados Preliminares

Neste capítulo estudamos um resultado de existência de solução para um problema de valor de fronteira com condições do tipo de Neumann. Especificamente, consideramos o problema

$$\begin{cases} -\operatorname{div}(|x|^{\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u) = |x|^{\beta}u^{p(\alpha,\beta)-1} - \lambda|x|^{\gamma}u^{p-1}, & x \in \Omega \\ u(x) > 0, & x \in \Omega, \\ |\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial \eta} = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \tag{1.22}$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com $N \geqslant 3$ é um domínio limitado, $0 \in \partial\Omega$, $1 < p < N$, $\alpha < 0$, $\beta < 0$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$ e η denota o vetor normal unitário exterior. Nosso interesse nesse problema deve-se à presença do expoente crítico de Hardy-Sobolev e a localização do ponto singular na fronteira do domínio.

Como já mencionamos, para estudar esse problema consideramos o espaço de Lebesgue com peso $L^q_\beta(\Omega)$ equipado com a norma

$$\|u\|_{L^q_\beta(\Omega)} \equiv \Big(\int_\Omega |x|^{\beta}|u|^p \,\mathrm{d}x \Big)^{1/p}$$

e também o espaço de Sobolev $W^{1,p}_{\gamma,\alpha}(\Omega)$ definido por

$$W^{1,p}_{\gamma,\alpha}(\Omega) \equiv \Big\{ u \in L^p_\gamma(\Omega) \colon \int_\Omega |x|^{\alpha}|\nabla u|^p \,\mathrm{d}x + \lambda \int_\Omega |x|^{\gamma}|u|^p \,\mathrm{d}x \text{ é finita} \Big\},$$

equipado com a norma

$$\|u\| = \|u\|_{W^{1,p}_{\gamma,\alpha}(\Omega)} \equiv \Big(\int_\Omega |x|^{\alpha}|\nabla u|^p \,\mathrm{d}x + \lambda \int_\Omega |x|^{\gamma}|u|^p \,\mathrm{d}x \Big)^{1/p}.$$

Soluções fracas do problema (1.22) são pontos críticos do funcional $J \colon W^{1,p}_{\gamma,\alpha}(\Omega) \to \mathbb{R}$ que pode ser construído por um procedimento semelhante ao apresentado na Observação 1.3 e que descrevemos a seguir.

Multiplicando a equação diferencial do problema (1.22) por $v \in C^\infty(\Omega)$ e integrando em Ω, obtemos

$$-\int_\Omega \operatorname{div}(|x|^{\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u)v \,\mathrm{d}x = \int_\Omega |x|^{\beta}u^{p(\alpha,\beta)-1}v \,\mathrm{d}x - \lambda \int_\Omega |x|^{\gamma}u^{p-1}v \,\mathrm{d}x\,.$$

Usando a fórmula de integração por partes (Proposição A.9), resulta que

$$
\begin{aligned}
-\int_{\partial\Omega} |x|^{\alpha}|\nabla u|^{p-2}\frac{\partial u}{\partial\eta} v \,d\sigma + \int_{\Omega} |x|^{\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v\,dx \\
= \int_{\Omega}|x|^{\beta}u^{p(\alpha,\beta)-1}v\,dx - \lambda\int_{\Omega}|x|^{\gamma}u^{p-1}v\,dx,
\end{aligned}
$$

e como $|\nabla u|^{p-2}\dfrac{\partial u}{\partial\eta} = 0$ em $\partial\Omega$, segue que

$$
\int_{\Omega} |x|^{\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v\,dx = \int_{\Omega}|x|^{\beta}u^{p(\alpha,\beta)-1}v\,dx - \lambda\int_{\Omega}|x|^{\gamma}u^{p-1}v\,dx\,.
$$

No caso particular em que $v = u$, resulta

$$
\int_{\Omega}|x|^{\alpha}|\nabla u|^{p}\,dx = \int_{\Omega}|x|^{\beta}u^{p(\alpha,\beta)}\,dx - \lambda\int_{\Omega}|x|^{\gamma}u^{p}\,dx\,. \tag{3.1}
$$

Portanto, associado ao problema (1.22) definimos o funcional J pela fórmula

$$
J(u) \equiv \frac{1}{p}\int_{\Omega}|x|^{\alpha}|\nabla u|^{p}\,dx + \frac{\lambda}{p}\int_{\Omega}|x|^{\gamma}|u|^{p}\,dx - \frac{1}{p(\alpha,\beta)}\int_{\Omega}|x|^{\beta}|u_{+}|^{p(\alpha,\beta)}\,dx\,. \tag{3.2}
$$

Temos que $J \in C^{1}(W^{1,p}_{\gamma,\alpha}(\Omega))$ e

$$
J'(u)\cdot v = \int_{\Omega}|x|^{\alpha}|\nabla u|^{p-2}\nabla u\cdot\nabla v\,dx + \lambda\int_{\Omega}|x|^{\gamma}u^{p-1}v\,dx - \int_{\Omega}|x|^{\beta}u^{p(\alpha,\beta)-1}v\,dx
$$

para toda função $v \in W^{1,p}_{\gamma,\alpha}(\Omega)$. Assim, definimos uma solução fraca do problema (1.22) como sendo uma função $u \in W^{1,p}_{\gamma,\alpha}(\Omega)$ tal que $J'(u)\cdot v = 0$ para toda $v \in W^{1,p}_{\gamma,\alpha}(\Omega)$.

Para mostrar que existem funções não negativas que atingem os pontos críticos do funcional J necessitamos de uma noção de compacidade. A condição de compacidade que definimos a seguir foi introduzida por Palais e Smale no estudo de teoria de Morse em dimensões infinitas.

Seja X um espaço de Banach e seja $I\colon X \to \mathbb{R}$ um funcional continuamente diferenciável. Uma sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ é chamada de sequência de Palais-Smale se a sequência númerica $\{I(u_n(x))\}_{n\in\mathbb{N}} \subset \mathbb{R}$ é limitada e $I'(u_n(x)) \to 0$ quando $n \to +\infty$. Se $I(u_n(x)) \to c$ e $I'(u_n(x)) \to 0$ quando $n \to +\infty$, dizemos que $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ é uma sequência $(PS)_c$. Por fim, dizemos que o funcional $I\colon X \to \mathbb{R}$ verifica a condição de Palais-Smale se toda sequência de Palais-Smale $(PS)_c$ possui uma subsequência convergente; nesse caso, escrevemos que o funcional I verifica a condição de Palais-Smale $(PS)_c$. Claramente temos que se uma subsequência de uma sequência de Palais-Smale $(PS)_c$ converge para $u \in X$, então u é um ponto crítico para o funcional I e $c = I(u)$ é um nível crítico.

Como o problema (1.22) envolve o expoente crítico de Hardy-Sobolev, o passo decisivo para contornar a ausência de compacidade é estabelecer que o funcional J verifica a condição de Palais-Smale $(PS)_c$ para todos os níveis $c \in \mathbb{R}$ tais que

$$
c < \frac{\beta + p - \alpha}{2p(N+\beta)}\, S_{\alpha,\beta}^{(N+\beta)/(\beta+p-\alpha)}.
$$

O principal argumento da demonstração desse fato é o uso de um lema de concentração-compacidade (Lema 3.5).

3.1 Observação. Como $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é tal que $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$, usando a hipótese $\alpha - p < \gamma \leq \alpha$ e os dois próximos resultados (Lema 3.2 e Lema 3.3) concluímos que a imersão $W^{1,p}_{\gamma,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow L^{p(\alpha,\beta)}_{\beta}(\Omega)$ é contínua. Assim, o problema (1.22) tem estrutura variacional.

3.2 Lema. *Seja $\Omega \in \mathbb{R}^N$ um domínio limitado tal que $0 \in \partial\Omega$ e seja $S_{\alpha,\beta}(\Omega)$ definido em (1.20). Fixado $\delta \in \mathbb{R}_+$, existe uma constante $C(\delta) \in \mathbb{R}_+$ tal que*

$$\Big(\int_\Omega |x|^\beta u_+^{p(\alpha,\beta)}\Big)^{\frac{p}{p(\alpha,\beta)}} \leq \Big(2^{\frac{p+\beta-\alpha}{N+\beta}} S^{-1}_{\alpha,\beta} + \delta\Big) \int_\Omega |x|^\alpha |\nabla u|^p + C(\delta) \int_\Omega |x|^\alpha |u|^p,$$

para toda função $u \in W^{1,p}_{\gamma,\alpha}(\Omega)$.

Demonstração. Para $z \in \mathbb{R}^N$ denotamos o bola de raio r centrada em z por $B_r(z)$ e $D_h = B_r(z) \cap \{x_N > h(x')\}$, em que $h(x')$ é uma função continuamente diferenciável definida em $\{x' \in \mathbb{R}^{N-1} : |x' - z'| < r\}$ com $z_N = h(x_1, ..., x_{N-1})$ e com o gradiente se anulando em $z' = (z_1, ..., z_{N-1})$.

Afirmativa 15. *Seja $u \in W^{1,p}_{\gamma,\alpha}(\Omega)$ com supp $u \subset B_r(z)$. Para todo $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$, existe $\rho = \rho(\varepsilon) \in \mathbb{R}_+$ tal que vale a desigualdade*

$$\Big(\int_{D_h} |x|^\beta |u|^{p(\alpha,\beta)}\Big)^{\frac{p}{p(\alpha,\beta)}} \leq \Big(2^{\frac{p+\beta-\alpha}{N+\beta}} S^{-1}_{\alpha,\beta} + \varepsilon\Big) \int_{D_h} |x|^\alpha |\nabla u|^p \tag{3.3}$$

sempre que $|\nabla h| \leq \rho$.

Sem perda de generalidade, para verificar a afirmativa podemos considerar $z = 0$. No caso em que $h \equiv 0$ segue que $D_0 = B_r(0) \cap \{x_N > 0\}$ e os valores de $u(x)$ para $x_N < 0$ são irrelevantes, o que nos permite supor u simétrica em relação ao hiperplano $x_N = 0$. Deste fato e pela desigualdade de Caffarelli, Kohn e Nirenberg, resulta que

$$\begin{aligned}
\int_{D_0} |x|^\alpha |\nabla u|^p \,dx &= \frac{1}{2} \int_{B_r(0)} |x|^\alpha |\nabla u|^p \,dx \\
&\geq \frac{1}{2} S_{\alpha,\beta} \Big(\int_{B_r(0)} |x|^\beta |u|^{p(\alpha,\beta)} \,dx\Big)^{\frac{p}{p(\alpha,\beta)}} \\
&= \frac{1}{2} S_{\alpha,\beta} \Big(2\int_{D_0} |x|^\beta |u|^{p(\alpha,\beta)} \,dx\Big)^{\frac{p}{p(\alpha,\beta)}} \\
&= 2^{\frac{p}{p(\alpha,\beta)}-1} S_{\alpha,\beta} \Big(\int_{D_0} |x|^\beta |u|^{p(\alpha,\beta)} \,dx\Big)^{\frac{p}{p(\alpha,\beta)}} \\
&= 2^{-\frac{p+\beta-\alpha}{N+\beta}} S_{\alpha,\beta} \Big(\int_{D_0} |x|^\beta |u|^{p(\alpha,\beta)} \,dx\Big)^{\frac{p}{p(\alpha,\beta)}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\Big(\int_{D_0} |x|^\beta |u|^{p(\alpha,\beta)} \,dx\Big)^{\frac{p}{p(\alpha,\beta)}} \leq 2^{\frac{p+\beta-\alpha}{N+\beta}} S^{-1}_{\alpha,\beta} \int_{D_0} |x|^\alpha |\nabla u|^p \,dx\,. \tag{3.4}$$

No caso em que $h(x') \not\equiv 0$, usamos as substituições $y' = x'$, $y_N = x_N - h(x')$ e $\tilde{u}(y', y_N) = u(x', x_N)$. Então da desigualdade (3.4) obtemos

$$\Big(\int_{D_0} |y|^{\beta} |\tilde{u}|^{p(\alpha,\beta)}\, \mathrm{d}y \Big)^{\frac{p}{p(\alpha,\beta)}} \leq 2^{\frac{p+\beta-\alpha}{N+\beta}} S_{\alpha,\beta}^{-1} \int_{D_0} |y|^{\alpha} |\nabla \tilde{u}|^p\, \mathrm{d}y\,. \tag{3.5}$$

Notamos que

$$\frac{\partial u(x', x_N)}{\partial x_N} = \frac{\partial \tilde{u}(y', y_N)}{\partial y_N} \tag{3.6}$$

e

$$\frac{\partial u(x', x_N)}{\partial x_i} = \frac{\partial \tilde{u}(y', y_N)}{\partial y_i} - \frac{\partial \tilde{u}(y', y_N)}{\partial y_N} \frac{\partial h(x')}{\partial x_i}, \quad 1 \leq i \leq N-1. \tag{3.7}$$

Das igualdades (3.6) e (3.7) resulta que

$$\begin{aligned} |\nabla_y \tilde{u}(y', y_N)|^2 &= |\nabla_x u(x', x_N)|^2 \\ &\quad + \sum_{i=1}^{N-1} \Big(\Big|\frac{\partial u(x', x_N)}{\partial x_N}\Big|^2 \Big|\frac{\partial h(x')}{\partial x_i}\Big|^2 + 2\frac{\partial u(x', x_N)}{\partial x_i} \frac{\partial u(x', x_N)}{\partial x_N} \frac{\partial h(x')}{\partial x_i} \Big) \\ &= |\nabla_x u(x', x_N)|^2 + \Big|\frac{\partial u(x', x_N)}{\partial x_N}\Big|^2 |\nabla h(x')|^2 + 2\frac{\partial u(x', x_N)}{\partial x_N} \nabla_x u(x', x_N) \cdot \nabla h(x'). \end{aligned}$$

Usando a desigualdade de Cauchy-Schwarz e a hipótese $|\nabla h(x')| \leq \rho$, obtemos

$$\begin{aligned} |\nabla_y \tilde{u}(y', y_N)|^2 &\leq |\nabla_x u(x', x_N)|^2 + \Big|\frac{\partial u(x', x_N)}{\partial x_N}\Big|^2 |\nabla h(x')|^2 + 2\frac{\partial u(x', x_N)}{\partial x_N} |\nabla_x u(x', x_N)| |\nabla h(x')| \\ &\leq |\nabla_x u(x', x_N)|^2 + |\nabla_x u(x', x_N)|^2 |\nabla h(x')|^2 + 2|\nabla_x u(x', x_N)|^2 |\nabla h(x')| \\ &\leq |\nabla_x u(x', x_N)|^2 (1+\rho)^2. \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$|\nabla_y \tilde{u}(y', y_N)|^p \leq |\nabla_x u(x', x_N)|^p (1+\rho)^p. \tag{3.8}$$

Além disso, como $h(0') = 0$, $|\nabla h(0')| = 0$ e $|\nabla h(x')| \leq \rho$ para todo $x' \in \mathbb{R}^{N-1}$ tal que $|x'| < r$, resulta da desigualdade do valor médio que

$$|h(x')| \leq \rho |x'|, \quad \forall x' \in \mathbb{R}^{N-1}. \tag{3.9}$$

Das desigualdades (3.5), (3.8) e (3.9), obtemos

$$\begin{aligned} \Big(\int_{D_h} |x|^{\beta} |u|^{p(\alpha,\beta)} \Big)^{\frac{p}{p(\alpha,\beta)}} \mathrm{d}x &= \Big(\int_{D_0} |y|^{\beta} |\tilde{u}|^{p(\alpha,\beta)} \Big)^{\frac{p}{p(\alpha,\beta)}} \mathrm{d}y \\ &\leq 2^{\frac{p-\alpha+\beta}{N+\beta}} S_{\alpha,\beta}^{-1} \int_{D_0} |y|^{\alpha} |\nabla_y \tilde{u}|^p\, \mathrm{d}y \\ &\leq 2^{\frac{p-\alpha+\beta}{N+\beta}} S_{\alpha,\beta}^{-1} (1+\rho)^p \int_{D_h} \big(|x'|^2 + |x_N - h(x')|^2\big)^{\frac{\alpha}{2}} |\nabla_x u|^p\, \mathrm{d}x \\ &\leq 2^{\frac{p-\alpha+\beta}{N+\beta}} S_{\alpha,\beta}^{-1} (1+\rho)^p \int_{D_h} \big(|x|^2 + |h(x')|^2\big)^{\frac{\alpha}{2}} |\nabla_x u|^p\, \mathrm{d}x \\ &\leq 2^{\frac{p-\alpha+\beta}{N+\beta}} S_{\alpha,\beta}^{-1} (1+\rho)^p (1+\rho^2)^{\frac{\alpha}{2}} \int_{D_h} |x|^{\alpha} |\nabla_x u|^p\, \mathrm{d}x\,. \end{aligned} \tag{3.10}$$

Como
$$\lim_{\rho\to 0} 2^{\frac{p-\alpha+\beta}{N+\beta}} S_{\alpha,\beta}^{-1}(1+\rho)^p(1+\rho^2)^{\frac{\alpha}{2}} = 2^{\frac{p-\alpha+\beta}{N+\beta}} S_{\alpha,\beta}^{-1},$$
existe $\rho_1 \in \mathbb{R}_+$ tal que
$$2^{\frac{p-\alpha+\beta}{N+\beta}} S_{\alpha,\beta}^{-1}(1+\rho)^p(1+\rho^2)^{\frac{\alpha}{2}} \leq 2^{\frac{p-\alpha+\beta}{N+\beta}} S_{\alpha,\beta}^{-1} + \varepsilon \quad \text{para todo } \rho \in (0, \rho_1). \tag{3.11}$$
Portanto das desigualdades (3.10) e (3.11) concluímos a verificação da afirmativa.

Prosseguindo seja $\varepsilon \in \mathbb{R}_+$ uma constante a ser determinada posteriormente e seja $(\varphi_k)_{k=1}^m$ partição da unidade para $\overline{\Omega}$ com diam(supp φ_k) $\leq r$ para cada k, em que diam(S) é o diâmetro do conjunto $S \subset \mathbb{R}^N$. Se r é suficientemente pequeno então a desigualdade (3.3) é verdadeira para $u \in W^{1,p}_{\gamma,\alpha}(\Omega)$ com diam(supp u) $< r$. Consequentemente,
$$\left(\int_\Omega |x|^\beta |\varphi_k u|^{p(\alpha,\beta)}\right)^{\frac{p}{p(\alpha,\beta)}} \leq \left(2^{\frac{p+\beta-\alpha}{N+\beta}} S_{\alpha,\beta}^{-1} + \varepsilon\right) \int_\Omega |x|^\alpha |\nabla(\varphi_k u)|^p \tag{3.12}$$
para $u \in W^{1,p}_{\gamma,\alpha}(\Omega)$ e $1 \leq k \leq m$. Usando as desigualdades (A.1) e (3.12), resulta que
$$\begin{aligned}
\left(\int_\Omega |x|^\beta u_+^{p(\alpha,\beta)}\right)^{\frac{p}{p(\alpha,\beta)}} &\leq \left(\int_\Omega |x|^\beta \sum_{k=1}^m (\varphi_k)^{\frac{p(\alpha,\beta)}{p}} u_+^{p(\alpha,\beta)}\right)^{\frac{p}{p(\alpha,\beta)}} \\
&\leq \sum_{k=1}^m \left(\int_\Omega |x|^\beta \varphi_k^{\frac{p(\alpha,\beta)}{p}} u_+^{p(\alpha,\beta)}\right)^{\frac{p}{p(\alpha,\beta)}} \\
&\leq \left(2^{\frac{p+\beta-\alpha}{N+\beta}} S_{\alpha,\beta}^{-1} + \varepsilon\right) \sum_{k=1}^m \left(\int_\Omega |x|^\alpha |\nabla(\varphi_k^{1/p} u)|^p\right) \\
&\leq \left(2^{\frac{p+\beta-\alpha}{N+\beta}} S_{\alpha,\beta}^{-1} + \varepsilon\right) \sum_{k=1}^m \left(\int_\Omega |x|^\alpha (C|\nabla(\varphi_k^{1/p})|^p |u|^p + \varphi_k |\nabla u|^p)\right).
\end{aligned}$$
Como $|\nabla(\varphi_k^{1/p})|$ é limitado, obtemos
$$\begin{aligned}
\left(\int_\Omega |x|^\beta u_+^{p(\alpha,\beta)}\right)^{\frac{p}{p(\alpha,\beta)}} &\leq \left(2^{\frac{p+\beta-\alpha}{N+\beta}} S_{\alpha,\beta}^{-1} + \varepsilon\right) \sum_{k=1}^m \left(\int_\Omega |x|^\alpha (C|u|^p + \varphi_k |\nabla u|^p)\right) \\
&= \left(2^{\frac{p+\beta-\alpha}{N+\beta}} S_{\alpha,\beta}^{-1} + \varepsilon\right) \sum_{k=1}^m \int_\Omega |x|^\alpha \varphi_k (|\nabla u|^p + C|u|^p) \\
&\leq \left(2^{\frac{p+\beta-\alpha}{N+\beta}} S_{\alpha,\beta}^{-1} + \varepsilon\right) \int_\Omega |x|^\alpha (|\nabla u|^p + C u^{\frac{p}{2}} |\nabla u|^{\frac{p}{2}} + C|u|^p).
\end{aligned}$$
Pela desigualdade de Young (Proposição A.2), segue que
$$\left(\int_\Omega |x|^\beta u_+^{p(\alpha,\beta)}\right)^{\frac{p}{p(\alpha,\beta)}} \leq \left(2^{\frac{p+\beta-\alpha}{N+\beta}} S_{\alpha,\beta}^{-1} + \varepsilon\right) \int_\Omega |x|^\alpha \Big(|\nabla u|^p + \varepsilon|\nabla u|^p + C(\varepsilon)|u|^p + C|u|^p\Big).$$
Equivalentemente,
$$\left(\int_\Omega |x|^\beta u_+^{p(\alpha,\beta)}\right)^{\frac{p}{p(\alpha,\beta)}} \leq \left(2^{\frac{p+\beta-\alpha}{N+\beta}} S_{\alpha,\beta}^{-1} + \varepsilon\right) \Big((1+\varepsilon) \int_\Omega |x|^\alpha |\nabla u|^p + C(\varepsilon) \int_\Omega |x|^\alpha |u|^p\Big)$$

Denotando $2^{\frac{p+\beta-\alpha}{N+\beta}} S_{\alpha,\beta}^{-1} = A$, devemos mostrar que $(A+\varepsilon)(1+\varepsilon) < A+\delta$ ou, equivalentemente, que $\varepsilon^2 + \varepsilon(A+1) - \delta < 0$. Notamos que essa última desigualdade é verdadeira no intervalo

$$0 < \varepsilon < \frac{-(A+1) + \sqrt{(A+1)^2 + 4\delta}}{2}.$$

Escolhendo ε verificando essa desigualdade, obtemos

$$\left(\int_\Omega |x|^\beta u_+^{p(\alpha,\beta)} \right)^{\frac{p}{p(\alpha,\beta)}} \leq \left(2^{\frac{p+\beta-\alpha}{N+\beta}} S_{\alpha,\beta}^{-1} + \delta \right) \int_\Omega |x|^\alpha |\nabla u|^p + C(\delta) \int_\Omega |x|^\alpha |u|^p.$$

Isto conclui a demostração do Lema. □

3.3 Lema. *Seja Ω um domínio limitado tal que $0 \in \partial\Omega$. Assumindo α, β e $p(\alpha,\beta)$ satisfazendo (1.21) e $\gamma > \alpha - p$, $\alpha \leq 0$. Então as normas*

$$\left(\int_\Omega |x|^\alpha |\nabla u|^p + \int_\Omega |x|^\alpha |u|^p \right)^{\frac{1}{p}} \quad e \quad \left(\int_\Omega |x|^\alpha |\nabla u|^p + \lambda \int_\Omega |x|^\gamma |u|^p \right)^{\frac{1}{p}}$$

são equivalentes.

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos supor que $\alpha < \gamma$. Dessa forma existe uma constante $C_0 \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$\int_\Omega |x|^\alpha |u|^p \geq C_0 \lambda \int_\Omega |x|^\gamma |u|^p.$$

Assim resta verificar que existe constante $C \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$\int_\Omega |x|^\alpha |u|^p \leq C \int_\Omega \left(|x|^\alpha |\nabla u|^p + \lambda |x|^\gamma |u|^p \right).$$

Para isso, seja $V \in \mathbb{R}^N$ um aberto limitado tal que Ω está compactamente contido em V. Pela Proposição A.18 existe um operador linear limitado $E : W^{1,p}_{\gamma,\alpha}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}_{\gamma,\alpha}(\mathbb{R}^N)$ que associa, a cada $u \in W^{1,p}_{\gamma,\alpha}(\Omega)$, uma função Eu como a propriedade de que $Eu = u$ q.t.p. em Ω. Como $0 \in V$, então para toda $u \in W^{1,p}_{\gamma,\alpha}(\Omega)$

$$\begin{aligned} \int_\Omega |x|^\alpha |u|^p \leq \int_V |x|^\alpha |Eu|^p &\leq C \int_V \left(|x|^\alpha |\nabla (Eu)|^p + \lambda |x|^\gamma |Eu|^p \right) \\ &\leq C \int_\Omega \left(|x|^\alpha |\nabla u|^p + \lambda |x|^\gamma |u|^p \right). \end{aligned}$$

Isso conclui a verificação do lema. □

A seguir enunciamos um resultado de compacidade.

3.4 Lema. *Para $1 \leq q < p(\alpha,\beta)$, a imersão $W^{1,p}_{\gamma,\alpha}(\Omega) \hookrightarrow L^q_\beta(\Omega)$ é compacta.*

Demonstração. Para verificar esse resultado usamos o fato de que o espaço $W^{1,p}_{\gamma,\alpha}(\Lambda)$ esta compactamente imerso em $L_\beta^{p(\alpha,\beta)}(\Omega)$ para todo domínio limitado Λ tal que $0 \notin \overline{\Lambda}$ e a desigualdade de Hölder (Proposição A.4). □

O próximo resultado é crucial para a demonstração do Teorema 1.15.

3.5 Lema. *Seja* $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W^{1,p}_{\gamma,\alpha}(\Omega)$ *satisfazendo* $J(u_n) \to c$ *e* $J'(u_n) \to 0$ *em* $(W^{1,p}_{\gamma,\alpha}(\Omega))'$ *quando* $n \to \infty$. *Suponhamos que* $0 \in \partial\Omega$ *e que*

$$c < \frac{\beta + p - \alpha}{2p(N+\beta)} S_{\alpha,\beta}^{\frac{N+\beta}{\beta+p-\alpha}}. \tag{3.13}$$

Então o problema (1.22) tem solução $u \in W^{1,p}_{\gamma,\alpha}(\Omega)$ *com* $J(u) \le c$.

Demonstração. Seja $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W^{1,p}_{\gamma,\alpha}(\Omega)$ uma sequência $(PS)_c$. O funcional J definido pela fórmula (3.2) é tal que

$$J(u_n) = \frac{1}{p}\int_\Omega (|x|^\alpha |\nabla u_n|^p + \lambda |x|^\gamma |u_n|^p) - \frac{1}{p(\alpha,\beta)}\int_\Omega |x|^\beta u_{n+}^{p(\alpha,\beta)} \tag{3.14}$$

e

$$J'(u_n)\cdot u_n = \int_\Omega (|x|^\alpha |\nabla u_n|^p + \lambda |x|^\gamma |u_n|^p) - \int_\Omega |x|^\beta u_{n+}^{p(\alpha,\beta)}. \tag{3.15}$$

Das igualdades (3.14) e (3.15), obtemos

$$\begin{aligned} J'(u_n)\cdot u_n &= \int_\Omega (|x|^\alpha |\nabla u_n|^p + \lambda |x|^\gamma |u_n|^p) - \frac{p(\alpha,\beta)}{p}\int_\Omega (|x|^\alpha |\nabla u_n|^p + \lambda |x|^\gamma |u_n|^p) + p(\alpha,\beta)J(u_n) \\ &= p(\alpha,\beta)J(u_n) + (1 - \frac{p(\alpha,\beta)}{p})\int_\Omega (|x|^\alpha |\nabla u_n|^p + \lambda |x|^\gamma |u_n|^p) \\ &= p(\alpha,\beta)J(u_n) + (1 - \frac{p(\alpha,\beta)}{p})\|u_n\|_{W^{1,p}_{\gamma,\alpha}}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|u_n\|_{W^{1,p}_{\gamma,\alpha}} = \left(\frac{p}{p - p(\alpha,\beta)}\right)\left(J'(u_n)\cdot u_n - p(\alpha,\beta)J(u_n)\right). \tag{3.16}$$

A igualdade (3.16) nos permite dizer que

$$\begin{aligned} \|u_n\|_{W^{1,p}_{\gamma,\alpha}} &\le \left|\frac{p}{p - p(\alpha,\beta)}\right|\left(|J'(u_n).u_n| + p(\alpha,\beta)|J(u_n)|\right) \\ &\le C\left(\|J'(u_n)\|_{(W^{1,p}_{\gamma,\alpha})'}\|u_n\|_{W^{1,p}_{\gamma,\alpha}} + p(\alpha,\beta)|J(u_n)|\right). \end{aligned}$$

Portanto,

$$1 \le C\|J'(u_n)\|_{(W^{1,p}_{\gamma,\alpha})'} + Cp(\alpha,\beta)\frac{|J(u_n)|}{\|u_n\|_{W^{1,p}_{\gamma,\alpha}}}.$$

Afirmamos que a sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset W^{1,p}_{\gamma,\alpha}(\Omega)$ é limitada. De fato, supondo que essa sequência seja ilimitada, como $J(u_n) \to c$ e $J'(u_n) \to 0$ em $(W^{1,p}_{\gamma,\alpha}(\Omega))'$ quando $n \to \infty$, o lado direito da desigualdade anterior tende a zero e obtemos uma contradição.

Como o espaço $W^{1,p}_{\gamma,\alpha}(\Omega)$ é reflexivo a menos de subsequência podemos supor $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $W^{1,p}_{\gamma,\alpha}(\Omega)$ quando $n \to \infty$. Além disso, pelo Lema 3.4 temos que $u_n \to u$ fortemente em $L^q_\beta(\Omega)$ quando $n \to \infty$ para $1 \le q < p(\alpha,\beta)$. Em particular, para $p = q$ obtemos

$$u_n \to u \;\text{ fortemente em }\; L^p_\beta(\Omega) \tag{3.17}$$

quando $n \to \infty$. Passando ao limite na igualdade

$$J'(u_n) \cdot v = \int_\Omega |x|^\alpha |\nabla u_n|^{p-2} \nabla u_n \cdot \nabla v + \lambda \int_\Omega |x|^\gamma u_n^{p-1} v - \int_\Omega |x|^\beta u_n^{p(\alpha,\beta)-1} v,$$

vemos que u é ponto crítico do funcional J.

Para mostrar que $u \neq 0$ argumentamos por contradição. De fato, suponha que $u \equiv 0$.

AFIRMATIVA 16. *Se $u_n \rightharpoonup 0$ em $W^{1,p}_{\gamma,\alpha}(\Omega)$ quando $n \to \infty$, então* $\lim_{n\to\infty} \int_\Omega |x|^\gamma |u_n|^p = 0$.

De fato, da Desigualdade de Hölder, obtemos

$$\begin{aligned}\int_\Omega |x|^\gamma |u_n|^p &= \int_\Omega |x|^\theta |u_n|^s |x|^{\gamma-\theta} |u_n|^{p-s} \\ &\leq \Big(\int_\Omega |x|^{\theta r} |u_n|^{sr} \Big)^{\frac{1}{r}} \Big(\int_\Omega |x|^{(\gamma-\theta)\frac{r}{r-1}} |u_n|^{(p-s)\frac{r}{r-1}} \Big)^{\frac{r-1}{r}}.\end{aligned}$$

Escolhendo $\theta r = \beta$, $sr = q$, $(\gamma - \theta)r/(r-1) = \alpha$ e $(p-s)r/(r-1) = p$. resulta

$$r = \frac{\beta - \alpha}{\gamma - \alpha}, \quad s = \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} q \quad \theta = \frac{\gamma - \alpha}{\beta - \alpha} \beta, \quad \text{e} \quad q = p.$$

Enfim obtemos

$$\int_\Omega |x|^\gamma |u_n|^p \leq \Big(\int_\Omega |x|^\beta |u_n|^p \Big)^{\frac{\gamma-\alpha}{\beta-\alpha}} \Big(\int_\Omega |x|^\alpha |u_n|^p \Big)^{\frac{\beta-\gamma}{\beta-\alpha}}.$$

Como $\int_\Omega |x|^\alpha |u_n|^p$ é limitada para todo $n \in \mathbb{N}$, usando a convergência forte em (3.17) obtemos que $\int_\Omega |x|^\beta |u_n|^p \to 0$ quando $n \to \infty$. Portanto,

$$\int_\Omega |x|^\gamma |u_n|^p \to 0,$$

quando $n \to \infty$. Isso conclui a verificação da afirmativa.

Prosseguindo, das igualdades (3.14) e (3.15) e da Afirmativa 16 podemos dizer que

$$\int_\Omega |x|^\alpha |\nabla u_n|^p - \int_\Omega |x|^\beta u_{n_+}^{p(\alpha,\beta)} = o(1) \tag{3.18}$$

e

$$\frac{1}{p} \int_\Omega |x|^\alpha |\nabla u_n|^p - \frac{1}{p(\alpha,\beta)} \int_\Omega |x|^\beta u_{n_+}^{p(\alpha,\beta)} = c + o(1) \tag{3.19}$$

quando $n \to \infty$. Substituindo a estimativa (3.18) em (3.19) obtemos

$$\frac{1}{p} \Big(\int_\Omega |x|^\beta u_{n_+}^{p(\alpha,\beta)} + o(1) \Big) - \frac{1}{p(\alpha,\beta)} \int_\Omega |x|^\beta u_{n_+}^{p(\alpha,\beta)} = c + o(1),$$

ou seja,

$$\Big(\frac{1}{p} - \frac{1}{p(\alpha,\beta)} \Big) \int_\Omega |x|^\beta u_{n_+}^{p(\alpha,\beta)} = c + o(1).$$

Observando que

$$\frac{1}{p} - \frac{1}{p(\alpha,\beta)} = \frac{1}{p} - \frac{N-p+\beta}{p(N+\beta)} = \frac{p+\beta-\alpha}{p(N+\beta)},$$

obtemos

$$\int_\Omega |x|^\beta u_{n_+}^{p(\alpha,\beta)} \longrightarrow c\,\frac{p(N+\beta)}{p+\beta-\alpha} \tag{3.20}$$

quando $n \to \infty$. Usando esse limite e a estimativa (3.18), resulta

$$\int_\Omega |x|^\alpha |\nabla u_n|^p \longrightarrow c\,\frac{p(N+\beta)}{p+\beta-\alpha}. \tag{3.21}$$

quando $n \to \infty$.

Do Lema 3.2 e da Afirmativa 16, podemos dizer que

$$\left(\int_\Omega |x|^\beta u_{n_+}^{p(\alpha,\beta)}\right)^{\frac{p}{p(\alpha,\beta)}} \leq \left(2^{\frac{p+\beta-\alpha}{N+\beta}} S_{\alpha,\beta}^{-1} + \delta\right) \int_\Omega |x|^\alpha |\nabla u_n|^p,$$

usando os limites (3.20) e (3.21), obtemos

$$\left(c\,\frac{p(N+\beta)}{p+\beta-\alpha}\right)^{\frac{p}{p(\alpha,\beta)}} \leq \left(2^{\frac{p+\beta-\alpha}{N+\beta}} S_{\alpha,\beta}^{-1} + \delta\right) c\,\frac{p(N+\beta)}{p+\beta-\alpha},$$

ou seja,

$$c \geq \left(\frac{p(N+\beta)}{p+\beta-\alpha}\right)^{-1} \left(2^{\frac{p+\beta-\alpha}{N+\beta}} S_{\alpha,\beta}^{-1} + \delta\right)^{-\frac{N+\beta}{p+\beta-\alpha}}.$$

Portanto

$$c \geq \frac{p+\beta-\alpha}{2p(N+\beta)} S_{\alpha,\beta}^{\frac{N+\beta}{p+\beta-\alpha}} - C\delta.$$

Para $\delta > 0$ suficientemente pequeno obtemos uma contradição com a desigualdade (3.13). Consequentemente temos $u \not\equiv 0$. Isso conclui a demonstração do lema. □

3.2 Estimativas para os erros de aproximação

Dos artigos de Chou e Chu [9], Talenti [22], Aubin [2] e Horiuchi [15] sabemos que a melhor constante $S_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^N)$ em (1.20) é atingida por funções da forma

$$u_\varepsilon(x) = \frac{\varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p(p-\alpha+\beta)}}}{\left(\varepsilon + |x|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}}}. \tag{3.22}$$

em que $\varepsilon > 0$.

Denotando por $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_{N-1}$ as curvaturas principais em $0 \in \partial\Omega$, a curvatura média nesse ponto é dada por

$$H = \frac{1}{N-1} \sum_{j=1}^{N-1} \kappa_j.$$

Como $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$, próximo à origem a fronteira pode ser representada na forma

$$x_N = h(x') \equiv \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N-1} \kappa_j x_j^2 + o(|x'|^2),$$

em que $x' = (x_1, x_2, \ldots, x_{N-1}) \in D_\delta(0)$ para algum $\delta \in \mathbb{R}^+$ e $D_\delta(0) \equiv B_\delta(0) \cap \{x_N = 0\}$.

Sejam

$$K_1(\varepsilon) \equiv \int_\Omega |x|^\alpha |\nabla u_\varepsilon|^p \, dx, \qquad K_2(\varepsilon) \equiv \int_\Omega |x|^\beta u_\varepsilon^{p(\alpha,\beta)} \, dx,$$

$$K_3(\varepsilon) \equiv \int_\Omega |x|^\gamma u_\varepsilon^p \, dx, \qquad g(x') \equiv \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1} \kappa_k x_k^2,$$

e também

$$K_1 \equiv \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha |\nabla u_\varepsilon|^p \, dx, \qquad K_2 \equiv \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\beta u_\varepsilon^{p(\alpha,\beta)} \, dx,$$

$$I_\varepsilon \equiv \int_{\mathbb{R}^{N-1}} dx' \int_0^{g(x')} |x|^\alpha |\nabla u_\varepsilon|^p dx_N, \quad II_\varepsilon \equiv \int_{\mathbb{R}^{N-1}} dx' \int_0^{g(x')} |x|^\beta u_\varepsilon^{p(\alpha,\beta)} dx_N.$$

3.6 Proposição. *As seguintes estimativas são válidas:*

$$K_1(\varepsilon) = \frac{1}{2}K_1 - I_\varepsilon + o(\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}), \tag{3.23}$$

$$K_2(\varepsilon) = \frac{1}{2}K_2 - II_\varepsilon + o(\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}), \tag{3.24}$$

$$K_3(\varepsilon) = \begin{cases} O(\varepsilon^{\frac{p(p-1)+\gamma(p-1)-(p-1)\alpha}{p-\alpha+\beta}}), & \text{se } \alpha - p < \gamma < \frac{N-p^2+p\alpha}{p-1}, \\ O(\varepsilon^{\frac{p(p-1)+\gamma(p-1)-(p-1)\alpha}{p-\alpha+\beta}} |\ln\varepsilon|), & \text{se } \gamma = \frac{N-p^2+p\alpha}{p-1}, \\ O(\varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}}), & \text{se } \gamma > \frac{N-p^2+p\alpha}{p-1}. \end{cases} \tag{3.25}$$

Além disso,

$$\frac{K_1}{K_2^{\frac{N-p+\alpha}{N+\beta}}} = S_{\alpha,\beta}(\mathbb{R}^N), \tag{3.26}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} I_\varepsilon = \frac{1}{2(N-1)}\Big(\frac{N-p+\alpha}{p-1}\Big)^p \Big(\sum_{k=1}^{N-1}\kappa_k\Big) \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|y'|^{\frac{p}{p-1}(1-\alpha+\beta)+\alpha+2}}{\big(1+|y'|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\big)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dy', \tag{3.27}$$

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} II_\varepsilon = \frac{1}{2(N-1)}\Big(\sum_{k=1}^{N-1}\kappa_k\Big) \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|y'|^{2+\beta}}{\big(1+|y'|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\big)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dy'. \tag{3.28}$$

Demonstração. Da definição de u_ε temos

$$\frac{\partial u_\varepsilon}{\partial x_i}(x) = -\frac{N-p+\alpha}{p-1} \varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p(p-\alpha+\beta)}} |x|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}-2} x_i \Big(\varepsilon + |x|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\Big)^{-\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}-1}$$

e, portanto,

$$|\nabla u_\varepsilon|^p = \Big(\frac{N-p+\alpha}{p-1}\Big)^p \frac{\varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}} |x|^{\frac{p(\beta-\alpha+1)}{p-1}}}{\big(\varepsilon + |x|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\big)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}}. \tag{3.29}$$

Inspirados em Wang [25] e usando as definições de $K_1(\varepsilon)$ e de K_1, temos que

$$\begin{aligned}
K_1(\varepsilon) &= \int_{\mathbb{R}^N_+} |x|^\alpha |\nabla u_\varepsilon|^p - \int_{D_\delta(0)} dx' \int_0^{h(x')} |x|^\alpha |\nabla u_\varepsilon|^p dx_N + O(1) \\
&= \frac{1}{2}K_1 - \int_{\mathbb{R}^{N-1}} dx' \int_0^{g(x')} |x|^\alpha |\nabla u_\varepsilon|^p dx_N - \int_{D_\delta(0)} dx' \int_{g(x')}^{h(x')} |x|^\alpha |\nabla u_\varepsilon|^p dx_N + O(1) \\
&\equiv \frac{1}{2}K_1 - I_\varepsilon - I_1(\varepsilon) + O(1),
\end{aligned} \tag{3.30}$$

em que $\mathbb{R}^N_+ = \mathbb{R}^N \cap \{x_N > 0\}$.

Em primeiro lugar verificamos o limite (3.27). Para isso, substituímos a expressão (3.29) para a norma do gradiente na segunda parcela de (3.30) e obtemos

$$\begin{aligned}
I_\varepsilon &\equiv \int_{\mathbb{R}^{N-1}} dx' \int_0^{g(x')} |x|^\alpha |\nabla u_\varepsilon|^p dx_N \\
&= \left(\frac{N-p+\alpha}{p-1}\right)^p \varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} dx' \int_0^{g(x')} \frac{|x|^{\frac{p(\beta-\alpha+1)}{p-1}+\alpha}}{\left(\varepsilon + |x|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dx_N.
\end{aligned} \tag{3.31}$$

Agora fazemos as mudanças de variáveis $x' = \varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} y'$ com $dx' = \varepsilon^{\frac{(N-1)(p-1)}{p-\alpha+\beta}} dy'$ e $x_N = \varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} y_N$ com $dx_N = \varepsilon^{\frac{(p-1)}{p-\alpha+\beta}} dy_N$. Para obtermos o intervalo superior de integração observamos que se $x_N \to g(x')$ então

$$\begin{aligned}
y_N \to \varepsilon^{-\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} g(x') &= \varepsilon^{-\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} \kappa_k x_k^2 = \varepsilon^{-\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} \kappa_k (\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} y_k)^2 \\
&= \varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{N-1} \kappa_k (y_k)^2 = \varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} g(y').
\end{aligned}$$

Substituindo as expressões anteriores na equação (3.31) obtemos

$$I_\varepsilon = \left(\frac{N-p+\alpha}{p-1}\right)^p \int_{\mathbb{R}^{N-1}} dy' \int_0^{\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} g(y')} \frac{|y|^{\frac{p(\beta-\alpha+1)}{p-1}+\alpha}}{\left(1 + |y|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dy_N.$$

Notamos que se ε tende a zero, então I_ε tende a zero. Assim, usando a regra de L'Hôpital obtemos

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} I_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{I'_\varepsilon}{\frac{d}{d\varepsilon}\left(\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}\right)}. \tag{3.32}$$

Usando a regra de Leibniz (Proposição A.12) para avaliar o numerador da expressão (3.32), resulta que

$$\begin{aligned}
I'_\varepsilon &= \left(\frac{N-p+\alpha}{p-1}\right)^p \\
&\times \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left[\int_0^{\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} g(y')} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, y', y_N) dy_N + \frac{d}{d\varepsilon}\left(\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} g(y')\right) f\left(\varepsilon, y', g(y')\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}\right) \right] dy',
\end{aligned}$$

em que

$$f(\varepsilon, y', y_N) = \frac{|y|^{\frac{p(\beta-\alpha+1)}{p-1}+\alpha}}{\left(1+|y|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} = \frac{\left[(|y'|^2+y_N^2)^{1/2}\right]^{\frac{p(\beta-\alpha+1)}{p-1}+\alpha}}{\left\{1+\left[(|y'|^2+y_N^2)^{1/2}\right]^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right\}^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}}.$$

Consequentemente,

$$I'_\varepsilon = \left(\frac{N-p+\alpha}{p-1}\right)^p \frac{d}{d\varepsilon}\left(\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}\right) \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{\left[(|y'|^2+\varepsilon^{\frac{2(p-1)}{p-\alpha+\beta}} g^2(y'))^{1/2}\right]^{\frac{p(\beta-\alpha+1)}{p-1}+\alpha} g(y')}{\left\{1+\left[(|y'|^2+\varepsilon^{\frac{2(p-1)}{p-\alpha+\beta}} g^2(y'))^{1/2}\right]^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right\}^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dy'.$$

Substituindo a expressão anterior no limite (3.32) obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} I_\varepsilon &= \left(\frac{N-p+\alpha}{p-1}\right)^p \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|y'|^{\frac{p(\beta-\alpha+1)}{p-1}+\alpha} g(y')}{\left(1+|y'|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dy' \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{N-p+\alpha}{p-1}\right)^p \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|y'|^{\frac{p(\beta-\alpha+1)}{p-1}+\alpha} \sum_{k=1}^{N-1} \kappa_k y_k^2}{\left(1+|y'|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dy' \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{N-p+\alpha}{p-1}\right)^p \sum_{k=1}^{N-1} \kappa_k \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|y'|^{\frac{p(\beta-\alpha+1)}{p-1}+\alpha} |y_k|^2}{\left(1+|y'|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dy' \\
&= \frac{1}{2}\left(\frac{N-p+\alpha}{p-1}\right)^p \sum_{k=1}^{N-1} \kappa_k A_k
\end{aligned}$$

em que

$$A_k = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|y'|^{\frac{p(\beta-\alpha+1)}{p-1}+\alpha} |y_k|^2}{\left(1+|y'|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dy'.$$

Por simetria, temos que $A_1 = A_2 = ... = A_{N-1}$ e, consequentemente,

$$A \equiv \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|y'|^{\frac{p(\beta-\alpha+1)}{p-1}+\alpha+2}}{\left(1+|y'|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dy' = (N-1)A_{k_0}$$

para qualquer $1 < k_0 < N-1$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} I_\varepsilon &= \frac{1}{2}\left(\frac{N-p+\alpha}{p-1}\right)^p \frac{A}{N-1}\left(\sum_{k=1}^{N-1}\kappa_k\right) \\
&= \frac{1}{2(N-1)}\left(\frac{N-p+\alpha}{p-1}\right)^p \left(\sum_{k=1}^{N-1}\kappa_k\right) \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|y'|^{\frac{p(\beta-\alpha+1)}{p-1}+\alpha+2}}{\left(1+|y'|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dy'.
\end{aligned}$$

Isso conclui a verificação do limite (3.27).

Prosseguindo na análise de $K_1(\varepsilon)$, consideramos agora a terceira parcela da expressão (3.30) e temos

$$\begin{aligned} I_1(\varepsilon) &\equiv \Big| \int_{D_\delta(0)} dx' \int_{g(x')}^{h(x')} |x|^\alpha |\nabla u_\varepsilon|^p dx_N \Big| \\ &= \Big| \Big(\frac{N-p+\alpha}{p-1}\Big)^p \varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}} \int_{D_\delta(0)} dx' \int_{g(x')}^{h(x')} \frac{|x|^{\frac{p(\beta-\alpha+1)}{p-1}+\alpha}}{\big(\varepsilon + |x|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\big)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dx_N \Big| \\ &\le C \Big(\frac{N-p+\alpha}{p-1}\Big)^p \varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}} \int_{D_\delta(0)} \frac{|h(x')-g(x')||x'|^{\frac{p(\beta-\alpha+1)}{p-1}+\alpha}}{\big(\varepsilon + |x'|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\big)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dx' \end{aligned}$$

para alguma constante $C \in \mathbb{R}_+$. Como $h(x') = g(x') + o(|x'|^2)$, segue que para todo $\sigma > 0$ existe $C(\sigma) > 0$ tal que

$$|h(x') - g(x')| \le \sigma |x'|^2 + C(\sigma)|x'|^{5/2} \qquad x' \in D_\delta(0).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} I_1(\varepsilon) &\le C \Big(\frac{N-p+\alpha}{p-1}\Big)^p \varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}} \int_{D_\delta(0)} \frac{(\sigma|x'|^2 + C(\sigma)|x'|^{5/2})|x'|^{\frac{p(\beta-\alpha+1)}{p-1}+\alpha}}{\big(\varepsilon + |x'|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\big)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dx' \\ &= \Big(\frac{N-p+\alpha}{p-1}\Big)^p \varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}} \Big[\int_{D_\delta(0)} \frac{\sigma|x'|^{\frac{p(\beta-\alpha+1)}{p-1}+\alpha+2}}{\big(\varepsilon + |x'|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\big)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dx' + \int_{D_\delta(0)} \frac{C(\sigma)|x'|^{\frac{p(\beta-\alpha+1)}{p-1}+\alpha+\frac{5}{2}}}{\big(\varepsilon + |x'|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\big)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dx' \Big] \\ &= \Big(\frac{N-p+\alpha}{p-1}\Big)^p \varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}} \Big[\varepsilon^{\frac{2p-\alpha-1-N}{p-\alpha+\beta}} \int_{D_\rho(0)} \frac{\sigma|y'|^{\frac{p(\beta-\alpha+1)}{p-1}+\alpha+2}}{\big(1 + |y'|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\big)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dy' \\ &\quad + \varepsilon^{\frac{5p/2-\alpha-N-3/2}{p-\alpha+\beta}} \int_{D_\rho(0)} \frac{C(\sigma)|y'|^{\frac{p(\beta-\alpha+1)}{p-1}+\alpha+\frac{5}{2}}}{\big(1 + |y'|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\big)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dy' \Big] \\ &\le \Big(\frac{N-p+\alpha}{p-1}\Big)^p \varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}} \Big[\varepsilon^{\frac{2p-\alpha-1-N}{p-\alpha+\beta}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{\sigma|y'|^{\frac{p(\beta-\alpha+1)}{p-1}+\alpha+2}}{\big(1 + |y'|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\big)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dy' \\ &\quad + \varepsilon^{\frac{5p/2-\alpha-N-3/2}{p-\alpha+\beta}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{C(\sigma)|y'|^{\frac{p(\beta-\alpha+1)}{p-1}+\alpha+\frac{5}{2}}}{\big(1 + |y'|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\big)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dy' \Big] \end{aligned} \tag{3.33}$$

em que na penúltima passagem usamos $\rho = \delta / \varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}$ e na última passagem apenas substituímos os domínios de integração.

Como as integrais na desigualdade (3.33) não dependem de ε, podemos dizer que

$$I_1(\varepsilon) \le C\Big(\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}\sigma + \varepsilon^{\frac{3p/2-3/2}{p-\alpha+\beta}} C(\sigma)\Big) = C\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}(\sigma + \varepsilon^{3/2}C(\sigma)),$$

em que $C \in \mathbb{R}_+$ depende somente de δ, N, p e α. Assim, concluímos que $I_1(\varepsilon) = o(\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}})$. Substituindo essa expressão na equação (3.30) obtemos

$$K_1(\varepsilon) = \frac{1}{2}K_1 - I_\varepsilon + o(\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}).$$

Isso conclui a demonstração da igualdade (3.23).

Novamente inspirados em Wang [25] e usando as definições de $K_2(\varepsilon)$ e de K_2, temos que

$$\begin{aligned}
K_2(\varepsilon) &= \int_{\mathbb{R}^N_+} |x|^\beta u_\varepsilon^{p(\alpha,\beta)} - \int_{D_\delta(0)} dx' \int_0^{h(x')} |x|^\beta u_\varepsilon^{p(\alpha,\beta)} dx_N + O(1) \\
&= \frac{1}{2}K_2 - \int_{\mathbb{R}^{N-1}} dx' \int_0^{g(x')} |x|^\beta u_\varepsilon^{p(\alpha,\beta)} dx_N - \int_{D_\delta(0)} dx' \int_{g(x')}^{h(x')} |x|^\beta u_\varepsilon^{p(\alpha,\beta)} dx_N + O(1) \\
&\equiv \frac{1}{2}K_2 - II_\varepsilon - II_1(\varepsilon) + O(1). \qquad (3.34)
\end{aligned}$$

Agora vamos verificar o limite (3.28). Para isso substituímos a fórmula (3.22) da função $u_\varepsilon(x)$ na segunda parcela de (3.34) e obtemos

$$\begin{aligned}
II_\varepsilon &\equiv \int_{\mathbb{R}^{N-1}} dx' \int_0^{g(x')} |x|^\beta u_\varepsilon^{p(\alpha,\beta)} dx_N \\
&= \varepsilon^{\frac{N+\beta}{p-\alpha+\beta}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} dx' \int_0^{g(x')} \frac{|x|^\beta}{\left(\varepsilon + |x|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dx_N \\
&= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} dy' \int_0^{\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} g(y')} \frac{|y|^\beta}{\left(1 + |y|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dy_N
\end{aligned}$$

em que na última passagem usamos as mesmas mudanças de variáveis do correspondente cálculo para I_ε, a saber, $x' = \varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} y'$ com $dx' = \varepsilon^{\frac{(N-1)(p-1)}{p-\alpha+\beta}} dy'$ e $x_N = \varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} y_N$ com $dx_N = \varepsilon^{\frac{(p-1)}{p-\alpha+\beta}} dy_N$.

Notamos que se ε tende a zero, então II_ε tende a zero. Assim, usando a regra de L'Hôpital obtemos

$$\lim_{\varepsilon\to 0} \varepsilon^{-\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} II_\varepsilon = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{II'_\varepsilon}{\frac{d}{d\varepsilon}\left(\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}\right)}. \qquad (3.35)$$

Usando a regra de Leibniz (Proposição (A.12)) para avaliar o numerador da expressão (3.35) obtemos

$$II'_\varepsilon = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \left[\int_0^{\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} g(y')} \frac{\partial f}{\partial \varepsilon}(\varepsilon, y', y_N) dy_N + \frac{d}{d\varepsilon}\left(\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} g(y')\right) f(\varepsilon, y', g(y')\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}) \right] dy'$$

em que

$$f(\varepsilon, y', y_N) = \frac{|y|^\beta}{\left(1 + |y|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} = \frac{(|y'|^2 + y_N^2)^{\beta/2}}{\left[1 + (|y'|^2 + y_N^2)^{\frac{p-\alpha+\beta}{2(p-1)}}\right]^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}}.$$

Consequentemente,

$$II'_\varepsilon = \frac{d}{d\varepsilon}\left(\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}\right) \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{\left(|y'|^2 + g^2(y')\varepsilon^{\frac{2(p-1)}{p-\alpha+\beta}}\right)^{\beta/2} g(y')}{\left[1 + \left(|y'|^2 + g^2(y')\varepsilon^{\frac{2(p-1)}{p-\alpha+\beta}}\right)^{\frac{p-\alpha+\beta}{2(p-1)}}\right]^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dy'.$$

Substituindo a expressão anterior no limite (3.35), obtemos

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}II_\varepsilon &= \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|y'|^\beta g(y')}{\left(1+|y'|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}}dy' \\
&= \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|y'|^\beta \sum\limits_{k=1}^{N-1}\kappa_k y_k^2}{\left(1+|y'|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}}dy' \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1}\kappa_k\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|y'|^\beta |y_k|^2}{\left(1+|y'|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}}dy' \\
&= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1}\kappa_k B_k,
\end{aligned}$$

em que

$$B_k = \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|y'|^\beta |y_k|^2}{\left(1+|y'|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}}dy'.$$

Por simetria, temos que $B_1 = B_2 = ... = B_{N-1}$ e, consequentemente,

$$B \equiv \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|y'|^{\beta+2}}{\left(1+|y'|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}}dy' = (N-1)B_{k_0}$$

para qualquer $1 < k_0 < N-1$. Portanto,

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{-\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}II_\varepsilon &= \frac{1}{2}\sum_{k=1}^{N-1}\kappa_k\frac{B}{N-1} \\
&= \frac{1}{2(N-1)}\Big(\sum_{k=1}^{N-1}\kappa_k\Big)\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|y'|^{\beta+2}}{\left(1+|y'|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}}dy'.
\end{aligned}$$

Isso conclui a verificação do limite (3.28).

Prosseguindo na análise de $K_2(\varepsilon)$, consideramos agora a terceira parcela da expressão (3.34) e usando um raciocínio similar ao já apresentado para $I_1(\varepsilon)$, temos

$$II_1(\varepsilon) \equiv \int_{D_\delta(0)} dx' \int_{g(x')}^{h(x')} |x|^\beta u_\varepsilon^{p(\alpha,\beta)} dx_N = o(\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}).$$

Substituindo essa expressão na equação (3.34), obtemos

$$K_2(\varepsilon) = \frac{1}{2}K_2 - II_\varepsilon + o(\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}).$$

Isso conclui a demonstração da igualdade (3.24).

A estimativa para $K_3(\varepsilon)$ pode ser obtida por cálculo direto como no artigo de Brézis e Nirenberg em [5]. De fato,

$$\begin{aligned}
K_3(\varepsilon) &\equiv \int_\Omega |x|^\gamma u_\varepsilon^p dx \\
&= \int_\Omega \frac{|x|^\gamma \varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}}}{\left(\varepsilon + |x|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N-p+\alpha)}{p-\alpha+\beta}}} dx \\
&= \varepsilon^{\frac{p(p-1)+\gamma(p-1)-\alpha(p-1)}{p-\alpha+\beta}} \int_\Omega \frac{|y|^\gamma}{\left(1 + |y|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N-p+\alpha)}{p-\alpha+\beta}}} dy \\
&\le \varepsilon^{\frac{p(p-1)+\gamma(p-1)-\alpha(p-1)}{p-\alpha+\beta}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|y|^\gamma}{\left(1 + |y|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N-p+\alpha)}{p-\alpha+\beta}}} dy.
\end{aligned}$$

Usando agora a fórmula de integração em coordenadas polares (Proposição A.11), seguida da mudança de variáveis $r = s^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}$ com $dr = \frac{p-1}{p-\alpha+\beta} s^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}-1} ds$, obtemos

$$\begin{aligned}
K_3(\varepsilon) &\le \varepsilon^{\frac{p(p-1)+\gamma(p-1)-\alpha(p-1)}{p-\alpha+\beta}} N\omega_N \int_0^\infty \frac{r^{\gamma+N-1}}{\left(1 + r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N-p+\alpha)}{p-\alpha+\beta}}} \,\mathrm{d}r \\
&\le \varepsilon^{\frac{p(p-1)+\gamma(p-1)-\alpha(p-1)}{p-\alpha+\beta}} C \int_0^\infty \frac{s^{\frac{(p-1)(\gamma+N)}{p-\alpha+\beta}-1}}{(1+s)^{\frac{p(N-p+\alpha)}{p-\alpha+\beta}}} ds \qquad (3.36)
\end{aligned}$$

em que C é uma constante positiva.

Agora dividimos a análise da estimativa de $K_3(\varepsilon)$ nos diversos casos identificados em (3.25).

Se $\alpha - p < \gamma < \frac{N-p^2+\alpha p}{p-1}$ então podemos usar as fórmulas da função beta (Equações A.8) com $z = \frac{(p-1)(\gamma+N)}{p-\alpha+\beta}$ e $w = \frac{-p^2+\alpha p+N-\gamma(p-1)}{p-\alpha+\beta} > 0$. Consequentemente,

$$\begin{aligned}
K_3(\varepsilon) &\le C\varepsilon^{\frac{p(p-1)+\gamma(p-1)-\alpha(p-1)}{p-\alpha+\beta}} \int_0^\infty \frac{s^{\frac{(p-1)(\gamma+N)}{p-\alpha+\beta}-1}}{(1+s)^{\frac{p(N-p+\alpha)}{p-\alpha+\beta}}} ds \\
&= C\varepsilon^{\frac{p(p-1)+\gamma(p-1)-\alpha(p-1)}{p-\alpha+\beta}} \int_0^{\pi/2} \frac{(\operatorname{sen} s)^{2z-1}}{(\cos s)^{1-2w}} ds \\
&= C\varepsilon^{\frac{p(p-1)+\gamma(p-1)-\alpha(p-1)}{p-\alpha+\beta}} \int_0^1 \frac{(1-v^2)^{z-1}}{v^{1-2w}} dv
\end{aligned}$$

em que na última passagem usamos a substituição $v = \cos s$ com $dv = -\sin s ds$. Usando a série de Maclaurin da função $f(t) = (1-t)^a$ com $t = v^2$ e $a = z-1$, obtemos

$$\int_0^1 \frac{(1-v^2)^{z-1}}{v^{1-2w}} dv = \int_0^1 \left(\frac{1}{v^{1-2w}} - (z-1)\frac{v^2}{v^{1-2w}} + (z-1)(z-2)\frac{v^4}{2v^{1-2w}} + \ldots \right) dv = O(1).$$

Portanto, $\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{K_3(\varepsilon)}{\varepsilon^{\frac{p(p-1)+\gamma(p-1)-\alpha(p-1)}{p-\alpha+\beta}}}$ é finito. Isso conclui a demonstração da primeira linha de (3.25).

Se $\gamma = \frac{N-p^2+\alpha p}{p-1}$, então usamos o fato de que $1/(1+s) < 1/s$ e obtemos

$$\begin{aligned} K_3(\varepsilon) &\leq C\varepsilon^{\frac{p(p-1)+\gamma(p-1)-\alpha(p-1)}{p-\alpha+\beta}} \int_0^\infty \frac{s^{\frac{p(N-p+\alpha)}{p-\alpha+\beta}-1}}{(1+s)^{\frac{p(N-p+\alpha)}{p-\alpha+\beta}}} ds \\ &\leq C\varepsilon^{\frac{p(p-1)+\gamma(p-1)-\alpha(p-1)}{p-\alpha+\beta}} \int_0^\infty \frac{1}{s} ds. \end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{\varepsilon\to 0} \dfrac{K_3(\varepsilon)}{\varepsilon^{\frac{p(p-1)+\gamma(p-1)-\alpha(p-1)}{p-\alpha+\beta}} |\ln \varepsilon|}$ é finito. Isso conclui a verificação da segunda linha de (3.25).

Se $\gamma > \frac{N-p^2+\alpha p}{p-1}$, então usamos a mesma majoração no caso anterior e obtemos

$$\begin{aligned} K_3(\varepsilon) &\leq C\varepsilon^{\frac{p(p-1)+\gamma(p-1)-\alpha(p-1)}{p-\alpha+\beta}} \int_0^\infty \frac{s^{\frac{(p-1)(\gamma+N)}{p-\alpha+\beta}-1}}{(1+s)^{\frac{p(N-p+\alpha)}{p-\alpha+\beta}}} ds \\ &\leq C\varepsilon^{\frac{p(p-1)+\gamma(p-1)-\alpha(p-1)}{p-\alpha+\beta}} \int_0^\infty s^{\frac{(p-1)(\gamma+N)}{p-\alpha+\beta}-1-\frac{p(N-p+\alpha)}{p-\alpha+\beta}} ds \\ &= C\varepsilon^{\frac{p(p-1)+\gamma(p-1)-\alpha(p-1)}{p-\alpha+\beta}} s^{\frac{(p-1)(\gamma+N)}{p-\alpha+\beta}-\frac{p(N-p+\alpha)}{p-\alpha+\beta}} \Big|_0^{1/\varepsilon} \\ &= C\varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}}. \end{aligned}$$

Portanto, $\lim_{\varepsilon\to 0} \dfrac{K_3(\varepsilon)}{\varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}}}$ é finito. Isso conclui a verificação da terceira linha de (3.25).

Finalmente verificamos a igualdade (3.26). Substituindo a expressão (3.29) para o norma do gradiente de u_ε na definição de K_1, seguido da mudança de variáveis $x = \varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} y$ com $dx = \varepsilon^{\frac{N(p-1)}{p-\alpha+\beta}} dy$, obtemos

$$\begin{aligned} K_1 &\equiv \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha |\nabla u_\varepsilon|^p \, \mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{N-p+\alpha}{p-1}\right)^p \varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^{\frac{p(\beta-\alpha+1)}{p-1}+\alpha}}{\left(\varepsilon+|x|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} \mathrm{d}x \\ &= \left(\frac{N-p+\alpha}{p-1}\right)^p \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|y|^{\frac{p(\beta-\alpha+1)}{p-1}+\alpha}}{\left(1+|y|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} \mathrm{d}y\,. \end{aligned} \tag{3.37}$$

Usando a fórmula de integração em coordenadas polares (Proposição A.11) também podemos escrever K_1 na forma

$$K_1 = N\omega_N \left(\frac{N-p+\alpha}{p-1}\right)^p \int_0^\infty \frac{r^{\frac{p(\beta-\alpha+1)}{p-1}+\alpha+N-1}}{\left(1+r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dr. \tag{3.38}$$

Substituindo a fórmula (3.22) da função u_ε na definição de K_2, obtemos

$$\begin{aligned}
K_2 &\equiv \int_{\mathbb{R}^N} |x|^\beta u_\varepsilon^{p(\alpha,\beta)}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^\beta \varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p(p-\alpha+\beta)}p(\alpha,\beta)}}{\left(\varepsilon+|x|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}p(\alpha,\beta)}}\,\mathrm{d}x \\
&= \varepsilon^{\frac{N+\beta}{p-\alpha+\beta}} \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|x|^\beta}{\left(\varepsilon+|x|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}}\,\mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|y|^\beta}{\left(1+|y|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}}\,\mathrm{d}y\,.
\end{aligned} \tag{3.39}$$

em que na última passagem usamos a mudança de variáveis $x = \varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} y$ com $dx = \varepsilon^{\frac{(p-1)N}{p-\alpha+\beta}} dy$.

Usando a fórmula de integração em coordenadas polares (Proposição A.11) também podemos escrever K_2 na forma

$$K_2 = N\omega_N \int_0^\infty \frac{r^{\beta+N-1}}{\left(1+r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}}dr. \tag{3.40}$$

Ressaltamos que tanto K_1 quanto K_2 são independentes de ε e, usando suas definições juntamente com o fato de que $(N-p+\alpha)/(N+\beta) = p/p(\alpha,\beta)$, obtemos

$$\frac{K_1}{K_2^{\frac{N-p+\alpha}{N+\beta}}} = \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha |\nabla u_\varepsilon|^p}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\beta u_\varepsilon^{p(\alpha,\beta)}\right)^{\frac{N-p+\alpha}{N+\beta}}} = \frac{\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\alpha |\nabla u_\varepsilon|^p}{\left(\int_{\mathbb{R}^N} |x|^\beta u_\varepsilon^{p(\alpha,\beta)}\right)^{\frac{p}{p(\alpha,\beta)}}} = S_{\alpha,\beta}.$$

Isso conclui a demonstração da igualdade (3.26).

A proposição fica demonstrada. □

3.3 Demonstração da existência da solução de energia mínima

1.15 Teorema. *Suponhamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ seja um domínio limitado tal que $\partial\Omega \in \mathcal{C}^2$ e com $0 \in \partial\Omega$. Sejam $\kappa_1, \kappa_2, \ldots, \kappa_{N-1}$ sejam as curvaturas principais em $0 \in \partial\Omega$. Sejam $1 < p < N$, $\lambda \in \mathbb{R}^+$, $\alpha \leqslant 0$ e suponhamos que sejam válidas as desigualdades (1.21). Então o problema (1.22) tem uma solução de energia mínima em cada um dos casos seguintes.*

(a) $\alpha > 2p-1-N$, $\alpha-(p-1) < \gamma \leqslant \alpha$.

(b) $\alpha = 2p-1-N$, $(N-p^2+p\alpha)/(p-1) < \gamma \leqslant \alpha$.

(c) $p-N < \alpha < 2p-1-N$, $(N-p^2+p\alpha)/(p-1) < \gamma \leqslant \alpha$ *e* $\kappa \equiv \min\{\kappa_1,\kappa_2,\ldots,\kappa_{N-1}\} > C^*$ *para alguma constante* $C^* = C^*(\delta,\alpha,\beta,N,p)$ *suficientemente grande.*

Demonstração. Começamos definindo os números

$$c^* = \inf_{\substack{u \in W^{1,p}_{\gamma,\alpha}(\Omega)\\ u \not\equiv 0}} \sup_{t>0} J(tu),$$

e

$$c = \inf_{\psi \in \Psi} \sup_{t\in(0,1)} J(\psi(t)),$$

em que $\Psi = \{\psi \in C([0,1], W^{1,p}_{\gamma,\alpha}(\Omega)) \colon \psi \not\equiv 0, \psi(0) = 0, J(\psi(1)) \leq 0\}$. O número c é usualmente denominado nível do Passo da Montanha.

A idéia da demonstração é aplicarmos o Lema 3.5. Para isso observamos que a existência da sequência (u_n) que satisfaz as hipóteses do Lema 3.5 é garantida como consequência do Teorema do Passo da Montanha A.20. Assim, como claramente $c \leq c^*$, resta mostrar que

$$c^* < \frac{\beta + p - \alpha}{2p(N+\beta)} S_{\alpha,\beta}^{\frac{N+\beta}{\beta+p-\alpha}}. \tag{3.41}$$

Para isso usamos argumentos semelhantes aos usados por Wang em [25]. Dada a função u_ε definida em (3.22) vamos mostrar que, para ε suficientemente pequeno, temos

$$\sup_{t>0} J(tu_\varepsilon) < \frac{\beta + p - \alpha}{2p(N+\beta)} S_{\alpha,\beta}^{\frac{N+\beta}{\beta+p-\alpha}}. \tag{3.42}$$

Começamos demonstrando a desigualdade (3.42) para o item (a).

Assim, suponhamos $2p - 1 - N < \alpha \leq 0$ e $\gamma > \alpha - (p-1)$. Inicialmente demonstramos a seguinte afirmativa.

AFIRMATIVA 17. *Para $2p - 1 - N < \alpha \leq 0$ e $\gamma > \alpha - (p-1)$ temos que $K_3(\varepsilon) = o(\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}})$.*

Para verificar a afirmativa usamos as estimativas (3.25). De acordo com essas estimativas devemos considerar diversos intervalos para o parâmetro γ.

Se $\gamma = \frac{N-p^2+p\alpha}{p-1}$, então usamos a segunda linha da estimativa (3.25), a saber, $K_3(\varepsilon) = O(\varepsilon^{\frac{p(p-1)+\gamma(p-1)-\alpha(p-1)}{p-\alpha+\beta}} |\ln \varepsilon|)$. Assim,

$$\begin{aligned}
\lim_{\varepsilon\to 0} \frac{K_3(\varepsilon)}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}} &= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{K_3(\varepsilon)}{\varepsilon^{\frac{p(p-1)+\gamma(p-1)-\alpha(p-1)}{p-\alpha+\beta}}|\ln\varepsilon|} \frac{\varepsilon^{\frac{p(p-1)+\gamma(p-1)-\alpha(p-1)}{p-\alpha+\beta}}|\ln\varepsilon|}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}} \\
&= \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{K_3(\varepsilon)}{\varepsilon^{\frac{p(p-1)+\gamma(p-1)-\alpha(p-1)}{p-\alpha+\beta}}|\ln\varepsilon|} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|\ln\varepsilon|}{\varepsilon^{\frac{(p-1)(1-\gamma-p+\alpha)}{p-\alpha+\beta}}} \\
&\leq C \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{|\ln\varepsilon|}{\varepsilon^{\frac{(p-1)(1-\gamma-p+\alpha)}{p-\alpha+\beta}}} = 0
\end{aligned}$$

em que na última passagem usamos o fato de que $\gamma > \alpha - (p-1)$ e aplicamos a regra de L'Hôpital. Portanto $K_3(\varepsilon) = o(\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}})$.

Se $\gamma > \frac{N-p^2+p\alpha}{p-1}$, então usamos a terceira linha da estimativa (3.25), a saber, $K_3(\varepsilon) = O(\varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}})$. Usando essa estimativa e o fato de que $2p-1-N<\alpha$, obtemos

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{K_3(\varepsilon)}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{K_3(\varepsilon)}{\varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}}}\frac{\varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}}}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}} \leq C\lim_{\varepsilon\to 0}\varepsilon^{\frac{N-2p+\alpha+1}{p-\alpha+\beta}} = 0.$$

Portanto $K_3(\varepsilon) = o(\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}})$.

Se $\alpha - p < \gamma < \frac{N-p^2+p\alpha}{p-1}$, então usamos a primeira linha da estimativa (3.25), a saber, $K_3(\varepsilon) = O(\varepsilon^{\frac{p(p-1)+\gamma(p-1)-\alpha(p-1)}{p-\alpha+\beta}})$. Usando essa estimativa e o fato de que $\gamma > \alpha - p + 1$, obtemos

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{K_3(\varepsilon)}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}} = \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{K_3(\varepsilon)}{\varepsilon^{\frac{p(p-1)+\gamma(p-1)-\alpha(p-1)}{p-\alpha+\beta}}}\frac{\varepsilon^{\frac{p(p-1)+\gamma(p-1)-\alpha(p-1)}{p-\alpha+\beta}}}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}} \leq \lim_{\varepsilon\to 0}C\varepsilon^{\frac{(p-1)(p+\gamma-\alpha-1)}{p-\alpha+\beta}} = 0.$$

Portanto $K_3(\varepsilon) = o(\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}})$.

Isso conclui a verificação da afirmativa.

Sabemos que

$$\begin{aligned}\sup_{t>0} J(tu_\varepsilon) &= \sup_{t>0}\left\{\frac{t^p}{p}\int_\Omega\Big(|x|^\alpha|\nabla u_\varepsilon|^p + \lambda|x|^\gamma|u_\varepsilon|^p\Big) - \frac{t^{p(\alpha,\beta)}}{p(\alpha,\beta)}\int_\Omega |x|^\beta u_{\varepsilon+}^{p(\alpha,\beta)}\right\}\\ &= \sup_{t>0}\left\{\frac{t^p}{p}\Big(K_1(\varepsilon)+\lambda K_3(\varepsilon)\Big) - \frac{t^{p(\alpha,\beta)}}{p(\alpha,\beta)}K_2(\varepsilon)\right\}.\end{aligned}$$

Da Afirmativa 17 obtemos

$$\sup_{t>0} J(tu_\varepsilon) \leq \sup_{t>0}\left\{\frac{t^p}{p}K_1(\varepsilon) - \frac{t^{p(\alpha,\beta)}}{p(\alpha,\beta)}K_2(\varepsilon)\right\} + o(\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}). \tag{3.43}$$

Denotando $g(t) \equiv \frac{t^p}{p}K_1(\varepsilon) - \frac{t^{p(\alpha,\beta)}}{p(\alpha,\beta)}K_2(\varepsilon)$, temos $g'(t) = t^{p-1}(K_1(\varepsilon) - t^{p(\alpha,\beta)-p}K_2(\varepsilon))$; lembrando que $p(\alpha,\beta) > p$, concluímos que $\tilde{t} = \left(\frac{K_1(\varepsilon)}{K_2(\varepsilon)}\right)^{\frac{1}{p(\alpha,\beta)-p}}$ é ponto de máximo para $g(t)$ e o valor máximo é dado por

$$\begin{aligned}g(\tilde{t}) &= \frac{1}{p}\left(\frac{K_1(\varepsilon)}{K_2(\varepsilon)}\right)^{\frac{p}{p(\alpha,\beta)-p}}K_1(\varepsilon) - \frac{1}{p(\alpha,\beta)}\left(\frac{K_1(\varepsilon)}{K_2(\varepsilon)}\right)^{\frac{p(\alpha,\beta)}{p(\alpha,\beta)-p}}K_2(\varepsilon)\\ &= \frac{p-\alpha+\beta}{p(N+\beta)}\left[\frac{K_1(\varepsilon)}{K_2(\varepsilon)^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}}}\right]^{\frac{N+\beta}{p-\alpha+\beta}},\end{aligned}$$

em que usamos as relações $\frac{p}{p(\alpha,\beta)-p}+1 = \frac{p(\alpha,\beta)}{p(\alpha,\beta)-p}$ e $\frac{p(\alpha,\beta)}{p(\alpha,\beta)-p}-1 = \frac{p}{p(\alpha,\beta)-p}$. Substituindo esse valor na desigualdade (3.43) obtemos

$$\sup_{t>0} J(tu_\varepsilon) \leq \frac{p-\alpha+\beta}{p(N+\beta)}\left[\frac{K_1(\varepsilon)}{K_2(\varepsilon)^{\frac{N-p+\alpha}{N+\beta}}}\right]^{\frac{N+\beta}{p-\alpha+\beta}} + o(\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}).$$

Observamos agora que para verificar a desigualdade (3.42) é suficiente mostrar que

$$\frac{K_1(\varepsilon)}{K_2(\varepsilon)^{\frac{N-p+\alpha}{N+\beta}}} < \left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{p-\alpha+\beta}{N+\beta}} S_{\alpha,\beta} = \frac{\frac{1}{2}K_1}{\left(\frac{1}{2}K_2\right)^{\frac{N-p+\alpha}{N+\beta}}} \tag{3.44}$$

em que igualdade em (3.44) decorre diretamente de (3.26). A desigualdade em (3.44) é equivalente a

$$K_1(\varepsilon)\left(\frac{1}{2}K_2\right)^{\frac{N-p+\alpha}{N+\beta}} < \frac{1}{2}K_1 K_2(\varepsilon)^{\frac{N-p+\alpha}{N+\beta}}. \tag{3.45}$$

Usando as estimativas (3.23) e (3.24) para $K_1(\varepsilon)$ e $K_2(\varepsilon)$, respectivamente, obtemos que a desigualdade (3.45) é equivalente a

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{2}K_1 - I_\varepsilon\right)\left(\frac{1}{2}K_2\right)^{\frac{N-p+\alpha}{N+\beta}} &< \frac{1}{2}K_1\left(\frac{1}{2}K_2 - II_\varepsilon + o(\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}})\right)^{\frac{N-p+\alpha}{N+\beta}} + o(\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}})\\ &< \frac{1}{2}K_1\left[\left(\frac{1}{2}K_2\right)^{\frac{N-p+\alpha}{N+\beta}} - \frac{N-p+\alpha}{N+\beta}\left(\frac{1}{2}K_2\right)^{\frac{\alpha-p-\beta}{N+\beta}} II_\varepsilon\right] + o(\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}})\end{aligned}$$

e essa desigualdade por sua vez é equivalente a

$$\frac{I_\varepsilon}{II_\varepsilon} > \frac{N-p+\alpha}{N+\beta}\frac{K_1}{K_2} + o(1). \tag{3.46}$$

Portanto nosso objetivo agora passa a ser verificar a desigualdade (3.46).

Usando os limites (3.27) e (3.28) da Proposição 3.6 e a Fórmula de integração em Coordenadas Polares (Teorema A.11), resulta

$$\begin{aligned}\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{I_\varepsilon}{II_\varepsilon} &= \lim_{\varepsilon\to 0}\frac{\varepsilon^{-\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} I_\varepsilon}{\varepsilon^{-\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} II_\varepsilon}\\ &= \frac{\dfrac{1}{2(N-1)}\left(\dfrac{N-p+\alpha}{p-1}\right)^p \displaystyle\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|y'|^{\frac{p(\beta-\alpha+1)}{p-1}+\alpha+2}}{\left(1+|y'|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}}dy'}{\dfrac{1}{2(N-1)}\displaystyle\int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|y'|^{\beta+2}}{\left(1+|y'|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}}dy'}\\ &= \left(\frac{N-p+\alpha}{p-1}\right)^p \frac{(N-1)\omega_{N-1}\displaystyle\int_0^\infty \frac{r^{\frac{p(\beta-\alpha+1)}{p-1}+\alpha+2+N-2}}{\left(1+r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}}dr}{(N-1)\omega_{N-1}\displaystyle\int_0^\infty \frac{r^{\beta+2+N-2}}{\left(1+r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}}dr}\\ &= \left(\frac{N-p+\alpha}{p-1}\right)^p \frac{\displaystyle\int_0^\infty \frac{r^{N+\frac{p}{p-1}-\frac{\alpha}{p-1}+\beta\frac{p}{p-1}}}{\left(1+r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}}dr}{\displaystyle\int_0^\infty \frac{r^{\beta+N}}{\left(1+r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}}dr}.\end{aligned} \tag{3.47}$$

Antes de prosseguir apresentamos uma fórmula útil para avaliar integrais do tipo que aparecem no numerador e no denominador da igualdade (3.47).

AFIRMATIVA 18. *Para* $\frac{p}{p-1} \leq k < \frac{p}{p-1}N + \frac{1}{p-1}\alpha + \beta - 1$ *vale a igualdade*

$$\int_0^\infty \frac{r^{k-\frac{\alpha}{p-1}+\frac{\beta}{p-1}}dr}{\left(1+r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} = \frac{(p-1)k-1}{pN+\alpha+(p-1)\beta-(p-1)-(p-1)k}\int_0^\infty \frac{r^{k-\frac{p}{p-1}}dr}{\left(1+r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}}. \tag{3.48}$$

Para demonstrar a afirmativa usamos, na integral dada a seguir, a fórmula de integração por partes com

$$u = \frac{1}{\left(1+r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}-1}} \quad \text{e} \quad dv = r^{k-\frac{p}{p-1}}dr$$

e obtemos

$$\int_0^\infty \frac{r^{k-\frac{p}{p-1}}}{\left(1+r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}-1}}dr = \lim_{A\to\infty} \frac{1}{\left(1+r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}-1}} \frac{(p-1)r^{k-\frac{p}{p-1}+1}}{k(p-1)-1}\Big|_0^A$$
$$+\frac{p(N+\beta)-p+\alpha-\beta}{k(p-1)-1}\int_0^\infty \frac{r^{k-\frac{\alpha}{p-1}+\frac{\beta}{p-1}}}{\left(1+r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}}dr.$$

Usando a hipótese de que $\frac{p}{p-1} \leq k < \frac{p}{p-1}N + \frac{1}{p-1}\alpha + \beta - 1$, o limite na primeira parcela da igualdade anterior é nulo. Portanto,

$$\int_0^\infty \frac{r^{k-\frac{p}{p-1}}}{\left(1+r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}-1}}dr = \frac{pN+\alpha+\beta(p-1)-p}{k(p-1)-1}\int_0^\infty \frac{r^{k-\frac{\alpha}{p-1}+\frac{\beta}{p-1}}}{\left(1+r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}}dr. \tag{3.49}$$

A integral do lado esquerdo da igualdade (3.49) pode ser reescrito na forma

$$\int_0^\infty \frac{r^{k-\frac{p}{p-1}}}{\left(1+r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}-1}}dr = \int_0^\infty \frac{r^{k-\frac{p}{p-1}}\left(1+r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)}{\left(1+r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}}dr$$
$$= \int_0^\infty \frac{r^{k-\frac{p}{p-1}}}{\left(1+r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}}dr + \int_0^\infty \frac{r^{k-\frac{\alpha}{p-1}+\frac{\beta}{p-1}}}{\left(1+r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}}dr$$

e reordenando os termos dessa expressão obtemos

$$\int_0^\infty \frac{r^{k-\frac{\alpha}{p-1}+\frac{\beta}{p-1}}dr}{\left(1+r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} = \int_0^\infty \frac{r^{k-\frac{p}{p-1}}dr}{\left(1+r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}-1}} - \int_0^\infty \frac{r^{k-\frac{p}{p-1}}dr}{\left(1+r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}}. \tag{3.50}$$

Finalmente, substituindo a igualdade (3.49) na primeira parcela do lado direito de (3.50) obtemos a fórmula (3.48). Isso conclui a verificação da afirmativa.

Para simplificar o limite (3.47) usamos a Afirmativa 18 escolhendo $k - \frac{p}{p-1} = N + \beta$, isto é, $k = N + \frac{p}{p-1} + \beta$ e reescrevemos o numerador do limite na forma

$$\int_0^\infty \frac{r^{N+\frac{p}{p-1}-\frac{\alpha}{p-1}+\beta\frac{p}{p-1}}}{\left(1+r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}}dr = \frac{(p-1)(N+1+\beta)}{N+\alpha-(2p-1)}\int_0^\infty \frac{r^{\beta+N}}{\left(1+r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}}dr. \tag{3.51}$$

Substituindo essa relação no limite (3.47) resulta que

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{I_\varepsilon}{II_\varepsilon}=\Big(\frac{N-p+\alpha}{p-1}\Big)^p\frac{\dfrac{(p-1)(N+1+\beta)}{N+\alpha-(2p-1)}\displaystyle\int_0^\infty\frac{r^{\beta+N}}{(1+r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}})^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}}dr}{\displaystyle\int_0^\infty\frac{r^{\beta+N}}{(1+r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}})^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}}dr}$$
$$=\frac{(N-p+\alpha)^p}{(p-1)^{p-1}}\frac{N+1+\beta}{N+\alpha-(2p-1)}. \tag{3.52}$$

Motivados pelas fórmulas (3.38) e (3.40) de K_1 e K_2, respectivamente, aplicamos novamente a Afirmativa 18 escolhendo $k-\frac{p}{p-1}=N+\beta-1$, isto é, $k=N+\frac{1}{p-1}+\beta$, e obtemos

$$\int_0^\infty\frac{r^{\frac{p(1-\alpha+\beta)}{p-1}+\alpha+N-1}}{(1+r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}})^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}}dr=\frac{(p-1)(N+\beta)}{N-p+\alpha}\int_0^\infty\frac{r^{N+\beta-1}}{(1+r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}})^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}}dr.$$

Observamos agora que a integral no lado esquerdo da igualdade anterior é o fator que aparece na fórmula de K_1 e que a integral no lado direito da mesma igualdade é o fator que aparece na fórmula de K_2. Usando esses fatos, obtemos

$$\Big(\frac{N-p+\alpha}{p-1}\Big)^{-p}K_1=\frac{(p-1)(N+\beta)}{N-p+\alpha}K_2,$$

e, portanto,

$$\frac{(N-p+\alpha)^p}{(p-1)^{p-1}}=\frac{K_1}{K_2}\frac{N-p+\alpha}{N+\beta}.$$

Substituindo essa igualdade na equação (3.52) obtemos que

$$\begin{aligned}\frac{I_\varepsilon}{II_\varepsilon}&=\frac{(N-p+\alpha)^p}{(p-1)^{p-1}}\frac{N+1+\beta}{N+\alpha-(2p-1)}+o(1)\\&=\frac{K_1}{K_2}\frac{N-p+\alpha}{N+\beta}\frac{N+1+\beta}{N+\alpha-(2p-1)}+o(1)\\&>\frac{K_1}{K_2}\frac{N-p+\alpha}{N+\beta}+o(1).\end{aligned}$$

em que na última passagem usamos a hipótese de que $\beta>\alpha-p$.

Assim, nesse caso valem as hipóteses do Lema 3.5 e, portanto, o problema (1.22) tem solução não trivial.

Consideramos agora o item (b). Suponhamos $\alpha=2p-1-N$ e $\gamma>\frac{N-p^2+\alpha p}{p-1}$. A demonstração desse caso segue os mesmos argumentos usados por Ghoussoub e Kang em [13].

AFIRMATIVA 19. *Para $\alpha=2p-1-N$ e $\gamma>\frac{N-p^2+\alpha p}{p-1}$ temos*

$$K_1(\varepsilon)\le\frac{1}{2}K_1-C\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}|\ln\varepsilon|+o(\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}) \tag{3.53}$$

e

$$K_2(\varepsilon)=\frac{1}{2}K_2-C\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}+O(\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}). \tag{3.54}$$

Vamos primeiramente demonstrar a desigualdade (3.53). Usando a definição de I_ε dada por (3.31) obtemos

$$\begin{aligned} I_\epsilon &= \left(\frac{N-p+\alpha}{p-1}\right)^p \varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} dx' \int_0^{g(x')} \frac{|x|^{\frac{p(\beta-\alpha+1)}{p-1}+\alpha}}{\left(\varepsilon+|x|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dx_N \\ &\geq C\varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}} \int_{\mathbb{R}^{N-1}} \frac{|x|^{\frac{p(\beta-\alpha+1)}{p-1}+\alpha+2}}{\left(\varepsilon+|x|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dx' \\ &\geq C(N-1)\omega_{N-1}\varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}} \int_0^\infty \frac{r^{\frac{p(\beta-\alpha+1)}{p-1}+\alpha+N}}{\left(\varepsilon+r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dr \\ &\geq C\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} |\ln\varepsilon| \end{aligned} \tag{3.55}$$

em que na última passagem usamos os fatos de que $\alpha = 2p-1-N$, o integrando é limitado e a integral fica da ordem de $|\ln\varepsilon|$. Portanto, a desigualdade (3.53) segue de (3.55).

Segue do limite (3.28) que $K_2(\varepsilon) = \frac{1}{2}K_2 - C\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} + o(\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}})$ que por sua vez implica no limite (3.54). Isso conclui a verificação da afirmativa.

Similarmente ao feito no caso 1, podemos dizer que

$$\begin{aligned} \sup_{t>0} J(tu_\varepsilon) &= \sup_{t>0} \left\{ \frac{t^p}{p}\Big(K_1(\varepsilon)+K_3(\varepsilon)\Big) - \frac{t^{p(\alpha,\beta)}}{p(\alpha,\beta)} K_2(\varepsilon) \right\} \\ &\leq \frac{p-\alpha+\beta}{p(N+\beta)} \left[\frac{K_1(\varepsilon)}{K_2(\varepsilon)^{\frac{N-p+\alpha}{N+\beta}}}\right]^{\frac{N+\beta}{p-\alpha+\beta}} + O(\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}). \end{aligned}$$

Consequentemente, para verificar (3.41) é suficiente demonstrar que

$$\frac{K_1(\varepsilon)}{K_2(\varepsilon)^{\frac{N-p+\alpha}{N+\beta}}} < 2^{-\frac{p-\alpha+\beta}{N+\beta}} S_{\alpha,\beta} - O(\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}). \tag{3.56}$$

Usando os limites (3.53) e (3.54), a desigualdade (3.56) se reduz a

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}K_1 - C\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}|\ln\varepsilon| &\leq 2^{-\frac{p-\alpha+\beta}{N+\beta}} S_{\alpha,\beta}\left[\frac{1}{2}K_2 - C\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} + O(\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}})\right]^{\frac{N-p+\alpha}{N+\beta}} + O(\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}) \\ &\leq \frac{1}{2}K_2^{\frac{N-p+\alpha}{N+\beta}} S_{\alpha,\beta} + O(\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}). \end{aligned}$$

Entretanto, esse resultado segue diretamente da igualdade (3.26), a saber, $K_1/K_2^{\frac{N-p+\alpha}{N+\beta}} = S_{\alpha,\beta}$ e assim obtemos a desigualdade (3.41).

Assim, nesse caso também valem as hipóteses do Lema 3.5 e, portanto, o problema (1.22) tem solução não trivial.

Demonstramos agora a desigualdade (3.42) para o item (c), isto é $p-N < \alpha \leq 2p-1-N$ e $\gamma \geq \frac{N-p^2+\alpha p}{p-1}$.

Nesse caso temos as desigualdades $-N < \beta < \frac{\alpha N}{N-p} < \frac{N(2p-1-N)}{N-p}$. A primeira desigualdade segue das hipóteses do caso presente e do fato de que $\beta > \alpha - p$; segunda desigualdade segue da hipótese $\frac{\alpha}{p} \geq \frac{\beta}{p(\alpha,\beta)}$ já apresentada na desigualdade de Caffarelli, Kohn e Nirenberg.

Pela definição de $K_1(\varepsilon)$ temos

$$
\begin{aligned}
K_1(\varepsilon) &\equiv \int_\Omega |x|^\alpha |\nabla u_\varepsilon|^p \, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\mathbb{R}^N_+} |x|^\alpha |\nabla u_\varepsilon|^p - \int_{D_\delta(0)} dx' \int_0^{h(x')} |x|^\alpha |\nabla u_\varepsilon|^p dx_N \\
&\quad - \left\{ \int_{\mathbb{R}^N_+ \setminus B_\delta(0)} |x|^\alpha |\nabla u_\varepsilon|^p - \int_{\Omega \setminus B_\delta(0)} |x|^\alpha |\nabla u_\varepsilon|^p \right\} \\
&\equiv \frac{1}{2} K_1 - I_\varepsilon + \overline{I}_\varepsilon.
\end{aligned}
$$

Devemos agora analisar as parcelas I_ε e $\overline{I}_\varepsilon$. Lembrando que $\kappa \equiv \min\{\kappa_1, \kappa_2, ..., \kappa_{N-1}\}$ e definindo $\overline{\kappa} \equiv \max\{\kappa_1, \kappa_2, ..., \kappa_{N-1}\}$ podemos escolher uma constante $c_1 \in \mathbb{R}_+$ tal que $\frac{\kappa}{c_1}|x'|^2 \leq h(x') \leq c_1 \overline{\kappa} |x'|^2$ para todo $x' \in D_\delta(0)$. Assim, para I_ε temos

$$
\begin{aligned}
I_\varepsilon &= \int_{D_\delta(0)} dx' \int_0^{h(x')} |x|^\alpha |\nabla u_\varepsilon|^p dx_N \\
&\geq \left(\frac{N-p+\alpha}{p-1} \right)^p \varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}} \int_{D_\delta(0)} dx' \int_0^{\frac{\kappa}{c_1}|x'|^2} \frac{|x|^{\frac{p(\beta-\alpha+1)}{p-1}+\alpha}}{\left(\varepsilon + |x|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dx_N \\
&\geq C \frac{\kappa}{c_1} \left(\frac{N-p+\alpha}{p-1} \right)^p \varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}} \int_{D_\delta(0)} \frac{|x'|^{\frac{p(\beta-\alpha+1)}{p-1}+\alpha+2}}{\left(\varepsilon + |x'|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dx' \\
&= C \frac{\kappa}{c_1} \left(\frac{N-p+\alpha}{p-1} \right)^p \varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}} \int_0^\delta \frac{r^{\alpha+N+\frac{p(\beta-\alpha+1)}{p-1}}}{\left(\varepsilon + r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dr \\
&\geq C \frac{\kappa}{c_1} \left(\frac{N-p+\alpha}{p-1} \right)^p \varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}} \int_0^\delta \frac{r^{\alpha+N+\frac{p(\beta-\alpha+1)}{p-1}}}{\left(a + r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dr \\
&= \kappa C(\delta, \alpha, \beta, N, p) \varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}}
\end{aligned}
\tag{3.57}
$$

em que a é uma constante suficientemente grande.

Para $\overline{I}_\varepsilon$ temos

$$
\begin{aligned}
|\overline{I}_\varepsilon| &\equiv \left| \int_{\mathbb{R}^N_+ \setminus B_\delta(0)} |x|^\alpha |\nabla u_\varepsilon|^p - \int_{\Omega \setminus B_\delta(0)} |x|^\alpha |\nabla u_\varepsilon|^p \right| \\
&\leq \left| \int_{\mathbb{R}^N_+ \setminus B_\delta(0)} |x|^\alpha |\nabla u_\varepsilon|^p \right| + \left| \int_{\Omega \setminus B_\delta(0)} |x|^\alpha |\nabla u_\varepsilon|^p \right|.
\end{aligned}
\tag{3.58}
$$

Analisando a primeira integral da desigualdade (3.58), temos

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N_+\setminus B_\delta(0)} |x|^\alpha |\nabla u_\varepsilon|^p \,\mathrm{d}x &= \left(\frac{N-p+\alpha}{p-1}\right)^p \varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}} \int_{\mathbb{R}^N_+\setminus B_\delta(0)} \frac{|x|^{\frac{p(\beta-\alpha+1)}{p-1}+\alpha}}{\left(\varepsilon+|x|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dx \\ &= \left(\frac{N-p+\alpha}{p-1}\right)^p \int_{\mathbb{R}^N_+\setminus B_\rho(0)} \frac{|y|^{\frac{p(\beta-\alpha+1)}{p-1}+\alpha}}{\left(1+|y|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dy\end{aligned}$$

em que na última passagem usamos a mudança de variáveis $x = \varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} y$ com $dx = \varepsilon^{\frac{N(p-1)}{p-\alpha+\beta}} dy$ e $\rho = \delta/\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}$. Usando a fórmula de integração em coordenadas polares e agrupando as constantes, segue que

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^N_+\setminus B_\delta(0)} |x|^\alpha |\nabla u_\varepsilon|^p \,\mathrm{d}x &= C(\delta,\alpha,\beta,p,N)\int_\rho^\infty \frac{r^{\frac{p(\beta-\alpha+1)}{p-1}+\alpha+N-1}}{\left(1+r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}}\,\mathrm{d}r \\ &\le C(\delta,\alpha,\beta,p,N)\int_\rho^\infty r^{\frac{p(\beta-\alpha+1)}{p-1}+\alpha+N-1-\frac{p(N+\beta)}{p-1}}\,\mathrm{d}r \\ &\le C(\delta,\alpha,\beta,p,N)\int_\rho^\infty r^{\frac{p-N-\alpha}{p-1}-1}\,\mathrm{d}r \\ &= C(\delta,\alpha,\beta,p,N)\left(\frac{\delta}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}}\right)^{\frac{p-N-\alpha}{p-1}} \\ &\le C(\delta,\alpha,\beta,p,N)\varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}} \end{aligned} \tag{3.59}$$

em que no cálculo da integral imprópria usamos o fato de que $\alpha > p-N$.

Analisando agora a segunda integral da desigualdade (3.58), temos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega\setminus B_\delta(0)} |x|^\alpha |\nabla u_\varepsilon|^p &= \left(\frac{N-p+\alpha}{p-1}\right)^p \varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}} \int_{\Omega\setminus B_\delta(0)} \frac{|x|^{\frac{p(\beta-\alpha+1)}{p-1}+\alpha}}{\left(\varepsilon+|x|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dx \\ &= \left(\frac{N-p+\alpha}{p-1}\right)^p \int_{\Omega\setminus B_\rho(0)} \frac{|y|^{\frac{p(\beta-\alpha+1)}{p-1}+\alpha}}{\left(1+|y|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dy \\ &\le C(\delta,\alpha,\beta,p,N)\int_\rho^\infty \frac{r^{\frac{p(\beta-\alpha+1)}{p-1}+\alpha+N-1}}{\left(1+r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dr \\ &\le C(\delta,\alpha,\beta,p,N)\varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}}. \end{aligned} \tag{3.60}$$

Usando as desigualdades (3.59) e (3.60), segue que

$$|\overline{I}_\varepsilon| \le C(\delta,\alpha,\beta,p,N)\varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}}. \tag{3.61}$$

Assim, combinado as desigualdades (3.57) e (3.61) obtemos

$$K_1(\varepsilon) \le \frac{1}{2}K_1 - \kappa C(\delta,\alpha,\beta,N,p)\varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}} + C(\delta,\alpha,\beta,N,p)\varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}}. \tag{3.62}$$

Pela definição de $K_2(\varepsilon)$ temos

$$\begin{aligned}
K_2(\varepsilon) &\equiv \int_\Omega |x|^\beta u_\varepsilon^{p(\alpha,\beta)} \\
&= \int_{\mathbb{R}^N_+} |x|^\beta u_\varepsilon^{p(\alpha,\beta)} - \int_{D_\delta(0)} dx' \int_0^{h(x')} |x|^\beta u_\varepsilon^{p(\alpha,\beta)} dx_N \\
&\quad - \left\{ \int_{\mathbb{R}^N_+ \setminus B_\delta(0)} |x|^\beta u_\varepsilon^{p(\alpha,\beta)} - \int_{\Omega \setminus B_\delta(0)} |x|^\beta u_\varepsilon^{p(\alpha,\beta)} \right\} \\
&\equiv \frac{1}{2} K_2 - II_\varepsilon + \overline{II}_\varepsilon.
\end{aligned}$$

Devemos agora analisar as parcelas II_ε e $\overline{II}_\varepsilon$. Para II_ε temos

$$\begin{aligned}
II_\varepsilon &= \int_{D_\delta(0)} dx' \int_0^{h(x')} |x|^\beta u_\varepsilon^{p(\alpha,\beta)} dx_N \\
&\le \varepsilon^{\frac{N+\beta}{p-\alpha+\beta}} \int_{D_\delta(0)} dx' \int_0^{c_1 \overline{\kappa} |x'|^2} \frac{|x|^\beta}{\left(\varepsilon + |x|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dx_N \\
&\le C c_1 \overline{\kappa} \varepsilon^{\frac{N+\beta}{p-\alpha+\beta}} \int_{D_\delta(0)} \frac{|x'|^{\beta+2}}{\left(\varepsilon + |x'|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dx' \\
&= C c_1 \overline{\kappa} \varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} \int_{D_\rho(0)} \frac{|y'|^{\beta+2}}{\left(1 + |y'|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dy' \\
&= C(\delta,\alpha,\beta,p,N) c_1 \overline{\kappa} \varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} \int_0^\rho \frac{r^{\beta+N}}{\left(1 + r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dr.
\end{aligned}$$

Agora dividimos a análise em três casos. Se $\beta > p-1-N$, então

$$\begin{aligned}
II_\varepsilon &\le C(\delta,\alpha,\beta,p,N) c_1 \overline{\kappa} \varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} \int_0^\rho \frac{r^{\beta+N}}{\left(1 + r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} \mathrm{d}r \\
&\le \overline{\kappa} C(\delta,\alpha,\beta,p,N) \varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} \int_0^\infty \frac{r^{\beta+N}}{\left(1 + r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} \mathrm{d}r \\
&= \overline{\kappa} C(\delta,\alpha,\beta,p,N) \varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} \int_0^\infty \frac{s^{\frac{(p-1)(N+\beta+1)}{p-\alpha+\beta}-1}}{(1+s)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} \mathrm{d}s,
\end{aligned}$$

em que na última passagem usamos a mudança de variáveis $s = r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}$ e, consequentemente, $\mathrm{d}r = \dfrac{p-1}{p-\alpha+\beta} s^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}-1} \mathrm{d}s$. Como $\beta > p-1-N$ usamos as fórmulas para a função beta (Equações A.3) com $z = \dfrac{(p-1)(N+\beta+1)}{p-\alpha+\beta}$ e $w = \dfrac{-p+N+\beta+1}{p-\alpha+\beta}$. Assim

$$\begin{aligned}
II_\varepsilon &\le \overline{\kappa} C(\delta,\alpha,\beta,p,N) \varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(\operatorname{sen} s)^{2z-1}}{(\cos s)^{1-2w}} ds \\
&= \overline{\kappa} C(\delta,\alpha,\beta,p,N) \varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} \int_0^1 \frac{(1-v^2)^{z-1}}{v^{1-2w}} dv \\
&\le \overline{\kappa} C(\delta,\alpha,\beta,p,N) \varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}},
\end{aligned}$$

em que na penúltima passagem usamos a mudança de variáveis $v = \operatorname{sen} s$ e na última passagem usamos a série de Maclaurin da função $f(t) = (1-t)^a$ com $t = v^2$ e $a = z-1$ e obtemos

$$\int_0^1 \frac{(1-v^2)^{z-1}}{v^{1-2w}} dv = \int_0^1 \Big(\frac{1}{v^{1-2w}} - (z-1)\frac{v^2}{v^{1-2w}} + (z-1)(z-2)\frac{v^4}{2v^{1-2w}} + \ldots \Big) dv = O(1).$$

Se $\beta = p-1-N$, então $\beta + N - \frac{p(N+\beta)}{p-1} = -1$ e

$$\begin{aligned} II_\varepsilon &\leq C(\delta,\alpha,\beta,p,N) c_1 \overline{\kappa} \varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} \int_0^\rho \frac{r^{\beta+N}}{\big(1 + r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\big)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dr \\ &\leq C(\delta,\alpha,\beta,p,N) c_1 \overline{\kappa} \varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} \int_0^\rho r^{\beta+N-\frac{p(N+\beta)}{p-1}} dr \\ &\leq C(\delta,\alpha,\beta,p,N) \overline{\kappa} \varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} |\ln \varepsilon|. \end{aligned}$$

Se $\beta < p-1-N$, então $\beta + N - \frac{p(N+\beta)}{p-1} > -1$ e

$$\begin{aligned} II_\varepsilon &\leq C(\delta,\alpha,\beta,p,N) c_1 \overline{\kappa} \varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} \int_0^\rho \frac{r^{\beta+N}}{\big(1 + r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\big)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dr \\ &\leq C(\delta,\alpha,\beta,p,N) c_1 \overline{\kappa} \varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} \int_0^\rho r^{\beta+N-\frac{p(N+\beta)}{p-1}} dr \\ &= C(\delta,\alpha,\beta,p,N) \overline{\kappa} \varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} r^{\beta+N-\frac{p(N+\beta)}{p-1}+1} \Big|_0^\rho \\ &= C(\delta,\alpha,\beta,p,N) \overline{\kappa} \varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} \rho^{\beta+N-\frac{p(N+\beta)}{p-1}+1} \\ &= C(\delta,\alpha,\beta,p,N) \overline{\kappa} \varepsilon^{\frac{N+\beta}{p-\alpha+\beta}}. \end{aligned}$$

Em resumo, temos as desigualdades

$$II_\varepsilon \leq \begin{cases} \overline{\kappa} C(\delta,\alpha,\beta,p,N) \varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} & \text{se } \beta > p-1-N \\ \overline{\kappa} C(\delta,\alpha,\beta,p,N) \varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} |\ln \varepsilon| & \text{se } \beta = p-1-N \\ \overline{\kappa} C(\delta,\alpha,\beta,p,N) \varepsilon^{\frac{N+\beta}{p-\alpha+\beta}} & \text{se } -N < \beta < p-1-N. \end{cases} \tag{3.63}$$

Para $\overline{II_\varepsilon}$ temos

$$\begin{aligned} |\overline{II}_\varepsilon| &\equiv \left| \int_{\mathbb{R}^N_+ \setminus B_\delta(0)} |x|^\beta u_\varepsilon^{p(\alpha,\beta)} \, \mathrm{d}x - \int_{\Omega \setminus B_\delta(0)} |x|^\beta u_\varepsilon^{p(\alpha,\beta)} \, \mathrm{d}x \right| \\ &\leq \left| \int_{\mathbb{R}^N_+ \setminus B_\delta(0)} |x|^\beta u_\varepsilon^{p(\alpha,\beta)} \, \mathrm{d}x \right| + \left| \int_{\Omega \setminus B_\delta(0)} |x|^\beta u_\varepsilon^{p(\alpha,\beta)} \, \mathrm{d}x \right|. \end{aligned} \tag{3.64}$$

Analisando a primeira integral de (3.64), temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N_+ \setminus B_\delta(0)} |x|^\beta u_\varepsilon^{p(\alpha,\beta)} \, \mathrm{d}x &= \varepsilon^{\frac{N+\beta}{p-\alpha+\beta}} \int_{\mathbb{R}^N_+ \setminus B_\delta(0)} \frac{|x|^\beta}{\big(\varepsilon + |x|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\big)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} \, \mathrm{d}x \\ &= \int_{\mathbb{R}^N_+ \setminus B_\rho(0)} \frac{|y|^\beta}{\big(1 + |y|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\big)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} \, \mathrm{d}y, \end{aligned}$$

em que na última passagem usamos a mudança de variáveis $x = \varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} y$ com $dx = \varepsilon^{\frac{N(p-1)}{p-\alpha+\beta}} dy$ e $\rho = \delta/\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}$. Usando a fórmula de integração em coordenadas polares e agrupando as constantes, segue que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^N_+\setminus B_\delta(0)} |x|^\beta u_\varepsilon^{p(\alpha,\beta)}\, \mathrm{d}x &= N\omega_N \int_\rho^\infty \frac{r^{\beta+N-1}}{\left(1+r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dr \\
&\leq N\omega_N \int_\rho^\infty \frac{r^{\beta+N-1}}{\left(r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}} dr \\
&\leq N\omega_N \int_\rho^\infty r^{\beta+N-\frac{p(N+\beta)}{p-1}-1} dr \\
&= N\omega_N \left(\frac{\delta}{\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}}\right)^{\frac{-N-\beta}{p-1}} \\
&= C(\delta,\alpha,\beta,p,N)\varepsilon^{\frac{N+\beta}{p\alpha+\beta}}
\end{aligned} \tag{3.65}
$$

em que usamos o fato de que $-N < \beta$.

Analisando agora a segunda integral da desigualdade (3.64) temos

$$
\begin{aligned}
\int_{\Omega\setminus B_\delta(0)} |x|^\beta u_\varepsilon^{p(\alpha,\beta)}\, \mathrm{d}x &= \varepsilon^{\frac{N+\beta}{p-\alpha+\beta}} \int_{\Omega\setminus B_\delta(0)} \frac{|x|^\beta}{\left(\varepsilon+|x|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}}\, \mathrm{d}x \\
&= \int_{\Omega\setminus B_\rho(0)} \frac{|y|^\beta}{\left(1+|y|^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}}\, \mathrm{d}y \\
&\leq \int_\rho^\infty \frac{r^{\beta+N-1}}{\left(1+r^{\frac{p-\alpha+\beta}{p-1}}\right)^{\frac{p(N+\beta)}{p-\alpha+\beta}}}\, \mathrm{d}r \\
&= C(\delta,\alpha,\beta,p,N)\varepsilon^{\frac{N+\beta}{p-\alpha+\beta}}.
\end{aligned} \tag{3.66}
$$

Usando as desigualdades (3.65) e (3.66) temos

$$
|\overline{II}_\varepsilon| \leq C(\delta,\alpha,\beta,p,N)\varepsilon^{\frac{N+\beta}{p-\alpha+\beta}}. \tag{3.67}
$$

Assim, combinando as desigualdades (3.63) e (3.67) obtemos

$$
K_2(\varepsilon) \geq \frac{1}{2}K_2 - C(\delta,\alpha,\beta,p,N)\varepsilon^{\frac{N+\beta}{p-\alpha+\beta}} - \begin{cases} \overline{\kappa}C(\delta,\alpha,\beta,p,N)\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} & \text{se } \beta > p-1-N \\ \overline{\kappa}C(\delta,\alpha,\beta,p,N)\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}|\ln\varepsilon| & \text{se } \beta = p-1-N \\ \overline{\kappa}C(\delta,\alpha,\beta,p,N)\varepsilon^{\frac{N+\beta}{p-\alpha+\beta}} & \text{se } -N < \beta < p-1-N. \end{cases} \tag{3.68}
$$

Observando que $\gamma \geq \frac{N-p^2-p\alpha}{p-1}$ e usando argumentos similares aos apresentados na demonstração do item (a), das desigualdades (3.62), (3.68) e (3.25) para $K_1(\varepsilon)$, $K_2(\varepsilon)$ e $K_3(\varepsilon)$, respectivamente, deduzimos que

$$\begin{aligned}\sup_{t>0} J(tu_\varepsilon) &\leq \sup_{t>0}\left\{\frac{t^p}{p}K_1(\varepsilon) - \frac{t^{p(\alpha,\beta)}}{p(\alpha,\beta)}K_2(\varepsilon)\right\} + C(\delta,\alpha,\beta,p,N)\varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}}\\ &= \frac{p-\alpha+\beta}{p(N+\beta)}\left[\frac{K_1(\varepsilon)}{K_2(\varepsilon)^{\frac{N-p+\alpha}{N+\beta}}}\right]^{\frac{N+\beta}{p-\alpha+\beta}} + C(\delta,\alpha,\beta,p,N)\varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}}.\end{aligned}$$

Para verificarmos a desigualdade (3.41) é suficiente demonstrar que

$$\frac{K_1(\varepsilon)}{K_2(\varepsilon)^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}}} + C(\delta,\alpha,\beta,N,p)\varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}} \leq \frac{\frac{1}{2}K_1}{(\frac{1}{2}K_2)^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}}}.$$

Da desigualdade (3.62) e da primeira linha da desigualdade (3.68) temos

$$\begin{aligned}\frac{K_1(\varepsilon)}{K_2(\varepsilon)^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}}} &\leq \frac{\dfrac{1}{2}K_1 - \kappa C(\delta,\alpha,\beta,N,p)\varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}} + C(\delta,\alpha,\beta,N,p)\varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}}}{\left(\dfrac{1}{2}K_2 - C(\delta,\alpha,\beta,p,N)\varepsilon^{\frac{N+\beta}{p-\alpha+\beta}} - \overline{\kappa}C(\delta,\alpha,\beta,p,N)\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}\right)^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}}}\\ &= \frac{\frac{1}{2}K_1}{(\frac{1}{2}K_2)^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}}}\left(1 - \kappa C(\delta,\alpha,\beta,N,p)\varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}} + C(\delta,\alpha,\beta,N,p)\varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}}\right)\\ &\quad\times \frac{1}{\left(1 - C(\delta,\alpha,\beta,p,N)\varepsilon^{\frac{N+\beta}{p-\alpha+\beta}} - \overline{\kappa}C(\delta,\alpha,\beta,p,N)\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}\right)^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}}}\\ &= \frac{\frac{1}{2}K_1}{(\frac{1}{2}K_2)^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}}}\left(1 - \kappa C(\delta,\alpha,\beta,N,p)\varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}} + C(\delta,\alpha,\beta,N,p)\varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}}\right)\\ &\quad\times\left(1 + C(\delta,\alpha,\beta,p,N)\varepsilon^{\frac{N+\beta}{p-\alpha+\beta}} + \overline{\kappa}C(\delta,\alpha,\beta,p,N)\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}\cdots\right)^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}},\end{aligned} \tag{3.69}$$

em que na última passagem usamos a série geometrica.

Como $\beta > p-1-N$, o termo $\overline{\kappa}C(\delta,\alpha,\beta,p,N)\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}$ domina o termo $C(\delta,\alpha,\beta,p,N)\varepsilon^{\frac{N+\beta}{p-\alpha+\beta}}$. Usando agora a série de Maclaurin da função $f(x) = (1+x)^q$, a desigualdade (3.69) pode ser reescrita na forma

$$\begin{aligned}\frac{K_1(\varepsilon)}{K_2(\varepsilon)^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}}} \leq &\frac{\frac{1}{2}K_1}{(\frac{1}{2}K_2)^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}}}\Big(1 + \overline{\kappa}C(\delta,\alpha,\beta,p,N)\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} - \kappa C(\delta,\alpha,\beta,N,p)\varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}}\\ &+ C(\delta,\alpha,\beta,N,p)\varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}} - \kappa\overline{\kappa}C(\delta,\alpha,\beta,p,N)\varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}}\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}\\ &+ \overline{\kappa}C(\delta,\alpha,\beta,p,N)\varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}}\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}\cdots\Big).\end{aligned}$$

Como $p-N < \alpha < 2p-1-N$ e $\beta > \alpha - p$, temos que $N-p+\alpha < p-1$. E como o termo $\overline{\kappa}C(\delta,\alpha,\beta,p,N)\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}$ domina $\overline{\kappa}C(\delta,\alpha,\beta,p,N)\varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}}\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}}$ existe uma constante $C^* = C^*(\delta,\alpha,\beta,p,N)$ tal que para $0<\varepsilon<1$ suficientemente pequeno e para $\kappa > C^*$ vale

$$-\kappa C(\delta,\alpha,\beta,N,p)\varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}} + \overline{\kappa}C(\delta,\alpha,\beta,p,N)\varepsilon^{\frac{p-1}{p-\alpha+\beta}} + C(\delta,\alpha,\beta,N,p)\varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}} < 0.$$

Isso implica que

$$\frac{K_1(\varepsilon)}{K_2(\varepsilon)^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}}} + C(\delta, \alpha, \beta, N, p)\varepsilon^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}} \leq \frac{\frac{1}{2}K_1}{(\frac{1}{2}K_2)^{\frac{N-p+\alpha}{p-\alpha+\beta}}},$$

e, portanto vale a desiguadade (3.41).

Da desigualdade (3.62) e da segunda ou terceira linhas da desigualdade (3.68) também obtemos a desiguadade (3.41) usando argumentos similares aos que apresentamos.

Assim, nesse caso também valem as hipóteses do Lema 3.5 e, portanto, o problema (1.22) tem solução não trivial.

O teorema fica demonstrado. □

3.7 Observação. Fazendo $\beta = 0$ nas fórmulas (2.4) e usando a transformação (2.5) obtemos os resultados de Han e Liu em [14]. Além disso, da condição $0 \geq \alpha > 2 - N$ e das fórmulas (2.4) deduzimos que $0 \leq \mu < (N-2)^2/4$, que é o intervalo máximo para o parâmetro μ. Entretanto, o intervalo obtido por Han e Liu é $0 \leq \mu < ((N-2)^2/4) - 1$. Mais ainda o Teorema 1.15 continua válido nos casos em que $N = 3$ e $N = 4$, o que generaliza os resultados de Han e Liu, que consideraram $N \geq 5$.

3.8 Observação. Se $\alpha > 0$ ou se $p \neq 2$ não podemos obter resultados de simetria para as funções extremas; assim, não existe uma fórmula explícita para as funções extremas. De fato, mesmo no caso $p = 2$ e com $\alpha > 0$, Catrina e Wang em [7] demonstraram que as funções extremas não são radialmente simétricas em algumas situações. Portanto, não temos resultados para esses casos.

A Resultados auxiliares

A.1 Notação de Bachman-Landau

Diversas demonstrações desta monografia envolvem o uso da notação de Bachman-Landau, cujos significados são os seguintes:

1. A notação $f(x) = o(g(x))$ quando $x \to x_0$ significa que $\lim_{x \to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$.

2. A notação $f(x) = O(g(x))$ quando $x \to x_0$ significa que $\limsup_{x \to x_0} \left|\dfrac{f(x)}{g(x)}\right|$ é finito.

Consulte o livro de Evans [10, Appendix A.5, pág. 620] para mais detalhes.

A.2 Desigualdades analíticas

A.1 Proposição. 1. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}$, se $0 < p \leq 1$ então $|a+b|^p \leq |a|^p + |b|^p$.*

2. *Sejam $a, b \in \mathbb{R}_+$ e sejam p e p' expoentes conjugados, isto é, $1/p + 1/p' = 1$ então*

$$(a+b)^p \leq 2^{p-1}(a^p + b^p).$$

A.2 Proposição. *(Desigualdades de Young) Dados os números $a, b \in \mathbb{R}^+$ e dados $p, p' \in \mathbb{R}$ com $p > 1$ e $1/p + 1/p' = 1$, vale a desigualdade*

$$ab \leqslant \frac{a^p}{p} + \frac{b^{p'}}{p'}. \tag{A.1}$$

Além disso, dado $\epsilon \in \mathbb{R}^+$, existe uma constante $C_p(\epsilon)$ tal que

$$ab \leqslant \epsilon a^p + C_p(\epsilon) b^{p'}. \tag{A.2}$$

Referência. Veja o livro de Evans [10, Appendix B.2, letra (d), pág. 622]. □

A.3 Lema. *Sejam $x,y \in \mathbb{R}^N$. Então existe uma constante $C = C(p)$, tal que*

$$\langle |x|^{p-2}x - |y|^{p-2}y, x-y \rangle \geq \begin{cases} C\dfrac{|x-y|^2}{(|x|+|y|)^{2-p}} & \text{se } \ 1 < p < 2, \\ C|x-y|^p & \text{se } \ p \geq 2. \end{cases} \tag{A.3}$$

No caso em que $p \geq 2$ podemos escolher $C = 1/2^{p-1}$.

Referência. Consulte o livro Chipot [8, Proposição 17.3, pág. 235]. □

A.4 Proposição (Desigualdade de Hölder). *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um domínio qualquer e sejam* $p, p' \in \mathbb{R}^+$ *tais que* $1/p + 1/p' = 1$. *Suponhamos que* $f \in L^p(\Omega)$ *e que* $g \in L^{p'}(\Omega)$. *Então* $fg \in L^1(\Omega)$ *e*

$$\int_\Omega |f(x)g(x)|\,\mathrm{d}x \leqslant \Big(\int_\Omega |f(x)|^p\,\mathrm{d}x\Big)^{1/p}\Big(\int_\Omega |g(x)|^{p'}\,\mathrm{d}x\Big)^{1/p'}. \tag{A.4}$$

Referência. Consulte o livro de Brézis [4, Théorème IV.6, pág. 56]. □

A.5 Corolário (Desigualdade de Interpolação). *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um subconjunto aberto e seja* $u \in L^p(\Omega) \cap L^q(\Omega)$ *em que* $1 \leqslant p \leqslant q \leqslant \infty$. *Então* $u \in L^r(\Omega)$ *para todo* $p \leqslant r \leqslant q$ *e vale a desigualdade de interpolação*

$$\|u\|_{L^r(\Omega)} \leqslant \|u\|^{\alpha}_{L^p(\Omega)}\,\|u\|^{1-\alpha}_{L^q(\Omega)} \tag{A.5}$$

em que $0 < \alpha < 1$ *e* $1/r = \alpha/p + (1-\alpha)/q$.

Referência. Consulte o livro de Brézis [4, Nota 2, pág. 57]. □

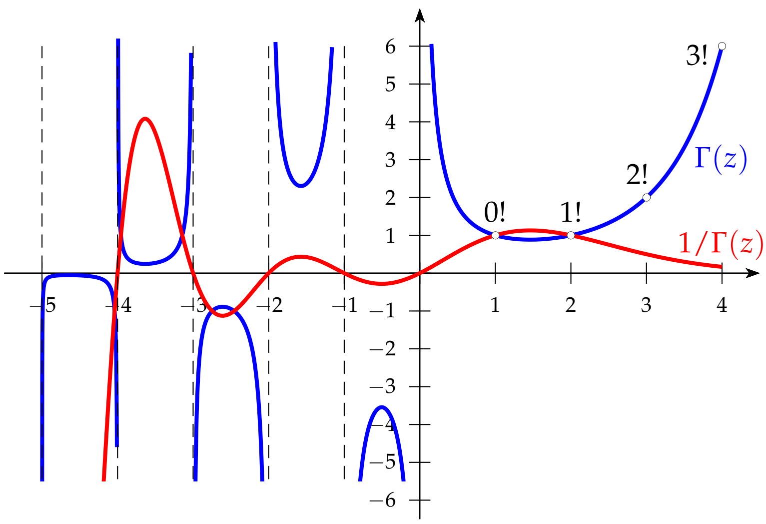
A.3 Funções gama e beta

A função gama é definida pela fórmula

$$\Gamma(z) \equiv \int_0^\infty t^{z-1}e^{-t}\mathrm{d}t.$$

Essa função generaliza o conceito de número fatorial para o conjunto dos números reais. De fato, $\Gamma(1) = 1$ e $\Gamma(z+1) = z\Gamma(z)$; logo, $\Gamma(z+1) = z!$. Além disso, $\Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}$.

$$\Gamma(1) = 1, \qquad \Gamma(z+1) = z\Gamma(z) = z!, \qquad \Gamma(1/2) = \sqrt{\pi}.$$



Entre outras aplicações, a função gama aparece nas fórmulas para o volume ω_N de bolas N-dimensionais e nas fórmulas para a área σ_{N-1} de superfície de esferas $(N-1)$-dimensionais. Especificamente, temos

$$\omega_N(a) = \frac{\pi^{N/2}a^N}{\Gamma(1+N/2)} \qquad \text{e} \qquad \sigma_{N-1}(a) = \frac{N\pi^{N/2}a^{N-1}}{\Gamma(1+N/2)} = \frac{N}{a}\,\omega_N(a).$$

Além disso, a função gama também aparece nas expressões das melhores constantes para imersões de Sobolev. Especificamente, dado $p \in \mathbb{R}_+$ tal que $1 < p < N$, existe uma constante $S(p,N) \in \mathbb{R}_+$ tal que

$$\Big(\int_{\mathbb{R}^N} |u|^{p^*}\,\mathrm{d}x\Big)^{p/p^*} \leqslant \frac{1}{S(p,N)} \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^p\,\mathrm{d}x \tag{A.6}$$

para toda função $u \in \mathcal{C}_0^1(\mathbb{R}_N)$. A melhor constante para a desigualdade (A.6) vale

$$S(p,N) \equiv 2^{p/N}\pi^{p/2}N\Big(\frac{N-p}{p-1}\Big)^{p-1}\Big(\frac{p-1}{p}\Big)^{p/N}\Big[\frac{\Gamma(N/p)\Gamma(N(1-1/p))}{\Gamma(N/2)\Gamma(N)}\Big]^{p/N} \tag{A.7}$$

e ocorre a igualdade em (A.6) para funções da forma $u(x) \equiv [a+b|x|^{p/(p-1)}]^{1-N/p}$ em que a e b são constantes positivas.

A função beta é definida a partir da função gama através da fórmula $B(z,w) \equiv \dfrac{\Gamma(z)\Gamma(w)}{\Gamma(z+w)}$ em que $z, w \in \mathbb{R}_+$. Essa função também pode ser reescrita nas formas

$$B(z,w) = \int_0^1 t^{z-1}(1-t)^{w-1}\,\mathrm{d}t = \int_0^\infty \frac{t^{z-1}}{(1+t)^{z+w}}\,\mathrm{d}t = 2\int_0^{\pi/2} [\mathrm{sen}(t)]^{2z-1}[\cos(t)]^{2w-1}\,\mathrm{d}t. \tag{A.8}$$

A.4 Resultados de Análise

A.6 Proposição (Teorema da convergência dominada de Lebesgue)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado. Seja $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$ uma sequência tal que $f_n \to f$ em quase todo ponto de Ω quando $n \to +\infty$. Suponhamos que existe uma função $g \in L^1(\Omega)$ tal que para todo $n \in \mathbb{N}$ vale a desigualdade $|f_n(x)| \leqslant g(x)$ em quase todo ponto de Ω. Então $f \in L^1(\Omega)$ e também*

$$\lim_{n\to+\infty} \|f_n - f\|_{L_1(\Omega)} = 0 \qquad e \qquad \int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{n\to+\infty}\int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Referência. Consulte o livro de Kavian [16, Théoreme 4.3, pág. 9]. □

A.7 Lema (Lema de Fatou)**.** *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e seja a sequência de funções $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$. Suponhamos que as condições seguintes são válidas.*

1. *Para cada $n \in \mathbb{N}$ vale $f_n(x) \geqslant 0$ em quase todo ponto $x \in \Omega$.*
2. $\sup_{n\in\mathbb{N}} \int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x < \infty$.

Definindo $f(x) = \liminf_{n\to+\infty} f_n(x)$ *temos que* $f \in L^1\Omega$ *e*

$$\int_\Omega f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \liminf \int_\Omega f_n(x)\,\mathrm{d}x\,.$$

Referência. Consulte o livro de Kavian [16, Lemme de Fatou 4.2, pág. 9]. □

A.8 Proposição (Teorema do valor médio para integrais). *Sejam* $f, p : [a,b] \to \mathbb{R}$, f *contínua,* p *integrável, com* $p(x) \geq 0$ *para todo* $x \in [a,b]$. *Existe um número* $c \in [a,b]$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)p(x)\,\mathrm{d}x = f(c)\int_a^b p(x)\,\mathrm{d}x\,. \tag{A.9}$$

Em particular se $p \equiv 1$, *existe um número* $c \in [a,b]$ *tal que*

$$\int_a^b f(x)\,\mathrm{d}x = f(c)(b-a). \tag{A.10}$$

Referência. Consulte o livro de Lima [19]. □

A.9 Proposição (Fórmula de integração por partes). *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto com fronteira* $\partial\Omega$ *de classe* C^1. *Se* $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N)$ *é uma função real, então para* $i \in \mathbb{N}$ *tal que* $1 \leqslant i \leqslant N$ *temos a Fórmula de integração por partes*

$$\int_\Omega \frac{\partial u(x)}{\partial x_i}\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,. \tag{A.11}$$

em que $\mathrm{d}\sigma$ *denota a medida* $(N-1)$*-dimensional. De forma equivalente, se* $u \in C_c^1(\mathbb{R}^N, \mathbb{R}^N)$ *é uma função vetorial, denotando* $\operatorname{div} u \equiv \sum_{i=1}^N \partial u_i(x)/\partial x_i$, *temos*

$$\int_\Omega \operatorname{div}(u(x))\,\mathrm{d}x = \int_{\partial\Omega} u(\sigma)\cdot\nu(\sigma)\,\mathrm{d}\sigma\,. \tag{A.12}$$

Referência. Consulte o livro de Kavian [16, Théorème 7.2, pág. 20]. □

A.10 Proposição (Fórmula de Green). *Seja* $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ *um aberto com fronteira* $\partial\Omega$ *de classe* C^1 *e* $u, v \in C_c^2(\mathbb{R}^N)$. *Então*

$$-\int_\Omega v(x)\Delta u(x)\,\mathrm{d}x = \int_\Omega \nabla u(x)\cdot\nabla v(x)\,\mathrm{d}x - \int_{\partial\Omega} v(\sigma)\nabla u\cdot\nu\,\mathrm{d}\sigma\,.$$

Referência. Consulte o livro de Kavian [16, Corollaire 7.3, pág. 23]. □

A.11 Proposição (Integração em coordenadas polares). *Seja* $f : \mathbb{R}^N \longrightarrow \mathbb{R}$ *uma função contínua e mensurável. Então*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x)\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B_r(x_0)} f(x)\,\mathrm{d}\sigma\right)\mathrm{d}r,$$

para cada ponto $x_0 \in \mathbb{R}^N$. *Em particular, se* f *é uma função radial* $f(x) = f(|x|)$, *então*

$$\int_{B_R(0)} f(x)\,\mathrm{d}x = N\omega_N \int_0^R f(r)r^{N-1}\,\mathrm{d}r$$

Referência. Consulte o livro de Evans [10, Teorema 4, pág. 628]. □

A.12 Proposição (Regra de Leibniz). *Dado $U \subset \mathbb{R}^N$, aberto, seja $f : U \times [a,b] \to \mathbb{R}$ contínua, com derivadas parciais contínuas $\frac{\partial f}{\partial x_1}, \cdots, \frac{\partial f}{\partial x_N} : U \times [a,b] \to \mathbb{R}$. Seja $g : U \to [a,b]$ de classe C^1. Então a função $\varphi : U \to \mathbb{R}$, definida por $\varphi(x) = \int_a^{g(x)} f(x,t)dt$, é de classe C^1, e suas derivadas são expressas pela fórmula:*

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x_i}(x) = \int_a^{g(x)} \frac{\partial}{\partial x_i} f(x,t)dt + \frac{\partial g}{\partial x_i}(x) f(x, g(x)).$$

Referência. Consulte o livro de Lima [19, Exemplo 12a, pág. 145]. □

A.13 Proposição. *Sejam $h : U \to V$ um difeomorfismo de classe C^1 entre abertos $U, V \subset \mathbb{R}^m$, $X \subset U$ um compacto J-mensurável e $f : h(X) \to \mathbb{R}$ uma função integrável. Então $f \circ h : X \to \mathbb{R}$ é integrável e*

$$\int_{h(X)} f(y)dy = \int_X f(h(x)) |\det h'(x)| dx.$$

Referência. Consulte o livro de Lima [19, Teorema, pág. 386]. □

A.5 Resultados de Análise Funcional

A.14 Lema. *(Desigualdade de Poincaré) Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto limitado em uma direção. Então para todo número real $p \in \mathbb{R}$ tal que $1 \leqslant p < +\infty$, existe uma constante $C(p,N)$ que depende apenas de p, de N e de Ω, tal que*

$$\Big(\int_\Omega |v(x)|^p \, dx \Big)^{1/p} \leqslant C(p,N) \Big(\int_\Omega \sum_{i=1}^N \Big| \frac{\partial v(x)}{\partial x_i} \Big|^p \, \mathrm{d}x \Big)^{1/p} \qquad \textit{para toda } v \in W_0^{1,p}(\Omega). \tag{A.13}$$

Referência. Consulte o livro de Attouch, Buttazzo e Michaille [1, Teorema 5.3.1, pág. 168]. □

A.15 Proposição (Teorema de Rellich-Kondrachov). *Suponhamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ seja um domínio limitado de classe C^1. Então as seguintes afirmativas são válidas.*

1. *Se $p < N$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para $1 \leqslant q < p^*$ em que $1/p^* \equiv 1/p - 1/N$.*

2. *Se $p = N$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow L^q(\Omega)$ para $1 \leqslant q < +\infty$.*

3. *Se $p > N$, então $W^{1,p}(\Omega) \hookrightarrow C(\overline{\Omega})$.*

Além disso, as imersões são compactas.

Referência. Consulte o livro de Brézis [4, Théorème IX.16, pág. 169]. □

A.16 Lema (Lema de Brézis-Lieb, 1983). *Seja Ω um subconjunto aberto de $\mathbb{R}^N$ e seja $(u_n) \subset L^p(\Omega)$, $1 \leq p < \infty$. Se*

1. *(u_n) é limitada em $L^p(\Omega)$,*

2. *$u_n \to u$ q.t.p em Ω.*

Então

$$\lim_{n\to\infty}(|u_n|_p^p - |u_n - u|_p^p) = |u|_p^p.$$

Referência. Consulte o livro de Willem [24, Lemma 1.32, pág. 21]. □

A.17 Proposição. *Sejam f e g duas funções reais em $W^{1,p}(\Omega)$. Então o mínimo de $(f(x), g(x))$ e o máximo de $(f(x), g(x))$ são funções em $W^{1,p}(\Omega)$ e seus gradientes são dados por*

$$\nabla \max(f(x), g(x)) = \begin{cases} \nabla f(x) & \text{se } f(x) > g(x), \\ \nabla g(x) & \text{se } f(x) < g(x), \\ \nabla f(x) = \nabla g(x) & \text{se } f(x) = g(x), \end{cases} \tag{A.14}$$

$$\nabla \min(f(x), g(x)) = \begin{cases} \nabla g(x) & \text{se } f(x) > g(x), \\ \nabla f(x) & \text{se } f(x) < g(x), \\ \nabla f(x) = \nabla g(x) & \text{se } f(x) = g(x). \end{cases} \tag{A.15}$$

Referência. Consulte o livro de Lieb e Loss [18, Corolário 6.18, pág. 145]. □

A.18 Proposição. *Seja $U \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto limitado e com fronteira $\partial U \in C^1$. Seja $V \subset \mathbb{R}^N$ um domínio tal que U esta compactamente contido em V. Então existe um operador linear limitado*

$$E : W^{1,p}(U) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

tal que, para cada $u \in W^{1,p}(U)$, temos

(a) *$Eu = u$ q.t.p. em U,*

(b) *E tem suporte em V e*

(c) *$\|Eu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq C\,\|u\|_{W^{1,p}(U)}$,*

em que C é uma constante que depende de p, U e V. Chamamos Eu de uma Extensão de u para $\mathbb{R}^N$.

Referência. Consulte o livro de Evans [10, Teorema 1, pág. 254]. □

A.6 Capacidade

A capacidade de um conjunto $E \subset \mathbb{R}^N$ é definida da forma seguinte. Sejam $Q, Q' \subset \mathbb{R}^N$ cubos tais que Q está contido no interior de Q'. Seja $E \subset Q$ um subconjunto fechado. Então

$$\operatorname{cap}(E) \equiv \Big\{ \int_{Q'} |\nabla\phi|^2 \,\mathrm{d}x \colon \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(Q') \text{ e } \phi(x) \geqslant 1 \text{ se } x \in E \Big\}.$$

Se $E \subset Q$ é um conjunto arbitrário e não necessáriamente fechado, definimos a capacidade de E por

$$\operatorname{cap}(E) \equiv \sup\{\mathrm{K}\colon K \subset E \text{ e } K \text{ é fechado}\}.$$

Também podemos definir a p-capacidade do conjunto fechado $E \subset Q$ por

$$\operatorname{cap}_p(E) \equiv \Big\{ \int_{Q'} |\nabla\phi|^p \, dx \colon \phi \in \mathcal{C}_0^\infty(Q') \text{ e } \phi(x) \geqslant 1 \text{ se } x \in E \Big\}.$$

e estender a definição a conjuntos arbitrários conforme o procedimento acima. Notamos que a capacidade de um ponto $x \in \mathbb{R}^N$ vale zero se $N \geqslant 2$.

Se $u \in W^{1,2}(\Omega)$, então toda sequência de Cauchy $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in u$ tem a propriedade de que converge para uma função $\tilde{u}$ a menos de um conjunto de capacidade zero. Um representante diferente de u pode convergir par outra função $\tilde{\tilde{u}}$ a menos de um conjunto de capacidade zero, e $\tilde{u}$ e $\tilde{\tilde{u}}$ diferem no máximo em um conjunto de capacidade zero. Portanto, o espaço $W^{1,2}(\Omega)$ pode ser considerado uma classe de equivalência de funções de quadrado integrável que diferem apenas em conjuntos de capacidade zero e aos quais podemos associar derivadas pertencentes ao espaço $L^2(\Omega)$.

A.19 Proposição. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto qualquer e seja $1 < p < N$. Denotamos a medida de Hausdorff d-dimensional do conjunto Ω por $H^d(\Omega)$. Então são válidas as seguintes propriedades.*

(a) Existe uma constante C tal que $\operatorname{cap}_p(\Omega) \leqslant CH^{N-p}(\Omega)$.

(b) Se $H^{N-p}(\Omega)$ é finita, então $\operatorname{cap}_p(\Omega) = 0$.

(c) Se $\operatorname{cap}_p(\Omega) = 0$, então $H^s(\Omega) = 0$ para todo $s \in \mathbb{R}_+$ tal que $s > N - p$.

Referência. Consulte o livro de Malý e Ziemer [20, Theorem 2.8, pág. 68; Theorem 2.52, pág. 86; Theorem 2.53, pág. 87] para os ítens (a), (b) e (c), respectivamente. □

A.7 Teorema do Passo da Montanha

O nome dado a este resultado deriva da seguinte analogia geometrica: suponha que alguém, que se encontra no ponto A a uma altura h_0 acima do nível do mar, deseja viajar de A até um ponto B a uma altura $h_1 < h_0$, sendo estes dois pontos separados por uma cadeia de montanhas de alturas superiores ou iguais a h_0 . Naturalmente, esta deverá atravessar a cadeia de montanhas e busca encontrar o "caminho ideal". Um procedimento para determiná-lo é considerar, entre todos os caminhos que unem os pontos A e B, aquele que possui a mínima altura. Mais especificamente, avaliamos a máxima altura de cada caminho unindo os pontos A e B e tomamos o mínimo entre esses valores máximos. Este valor é denominado valor de minimax. É fundamental considerar alguma hipótese de compacidade sobre essa classe de caminhos, pois, o melhor caminho pode escapar para o infinito e o valor de minimax pode não ser atingido.

A.20 Teorema (Teorema do passo da montanha). *Seja X um espaço de Banach e seja $J\colon X \to \mathbb{R}$ um funcional continuamente diferenciável e verificando a condição de Palais-Smale. Suponhamos que $J(0) = 0$ e que sejam válidas as condições seguintes:*

1. *Existem números $R, a \in \mathbb{R}^+$ tais que sobre a esfera $\|u\| = R$ vale a desigualdade $J(u) \geqslant a$.*

2. *Existe $u_0 \in X$ tal que $\|u_0\| > R$ e $J(u_0) < a$.*

Então o funcional J possui um valor crítico c tal que $c \geqslant a$ e caracterizado por

$$c \equiv \inf_{\gamma\in\Gamma} \max_{t\in[0,1]} J(v(t)) \qquad \text{em que} \qquad \Gamma \equiv \Big\{\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R} \,\big|\, \gamma \in \mathcal{C}^1([0,1], \mathbb{R}), \gamma(0) = 0, \gamma(1) = u_0\Big\}.$$

Referência. Consulte o livro de Willem [24, Theorem 2.10, pág.42] □

Enunciamos agora um princípio geral de minimax, cuja demonstração baseia-se no livro de Willem [24, Theorem 2.8, pág. 41].

A.21 Proposição. *Seja X um espaço de Banach. Seja M_0 um subespaço fechado de um espaço métrico M e seja $\Gamma_0\colon M_0 \to X$ uma aplicação contínua. Definimos*

$$\Gamma \equiv \{\gamma\colon M \to X\,;\, \gamma\big|_{M_0} \in \Gamma_0\}.$$

Seja $\phi\colon X \to \mathbb{R}$ um funcional continuamente diferenciável e sejam

$$c \equiv \inf_{\gamma\in\Gamma} \sup_{u\in M} \phi(\gamma(u)) \qquad e \qquad a \equiv \sup_{\gamma_0\in\Gamma_0} \sup_{u\in M_0} \phi(\gamma_0(u)).$$

Se $c, a \in \mathbb{R}$ e $c > a$, então para todo $\epsilon \in \mathbb{R}^+$ tal que $0 < \epsilon < (c-a)/2$, para todo $\delta \in \mathbb{R}^+$ e para qualquer caminho $\gamma \in \Gamma$ tal que $\sup_{u\in M} \phi(\gamma(u)) \leqslant c + \epsilon$ existe $u \in X$ tal que

1. *$c - 2\epsilon \leqslant \phi(u) \leqslant c + 2\epsilon$.*

2. *$\operatorname{dist}(u), \gamma(M)) \leqslant 2\delta$.*

3. *$\|\phi'(u)\| \leqslant 8\epsilon/\delta$.*

Como consequência temos o seguinte resultado, em cujo enunciado utilizamos a notação da Proposição A.21.

A.22 Proposição. *Se $c > a$, então existe uma sequência $\{u_n\}_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ tal que $\phi(u_n) \to c$ e $\phi'(u_n) \to 0$ quando $n \to +\infty$. Em particular, se o funcional ϕ verifica a condição de Palais-Smale $(PS)_c$, então c é um valor crítico de ϕ.*

Bibliografia

[1] H. Attouch, G. Buttazzo, G. Michaille, *Variational Analysis in Sobolev and BV Spaces. Applications to PDEs and Optimization.* Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 2006.

[2] T. Aubin, *Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev*, J. Diff. Geom. 11 (1976) 573–598.

[3] T. Bartsch, S. Peng, Z. Zhang, *Existence and non-existence of solutions to elliptic equations related to the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities.* Calc. Var. Partial Differential Equations 30 (2007), no. 1, 113–136.

[4] H. Brézis, *Análisis funcional: teoría e aplicaciones*. Alianza Editorial S.A., Madrid, 1984.

[5] H. Brézis, L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical exponents*, Comm. Pure Appl. Math. 36 (1983), n. 4, 437–477.

[6] L. Caffarelli, R. Kohn, L. Nirenberg, *First order interpolation inequalities with weights.* Compositio Math. 53 (1984), no. 3, 259–275.

[7] F. Catrina, Z.-Q. Wang, *On the Caffarelli-Kohn-Nirenberg inequalities: sharp constants, existence (and nonexistence), and symmetry of extremal unctions*, Comm. Pure Appl. Math. 54 (2001) 229–258.

[8] M. Chipot, *Elliptic Equations: An Introductory Course*, Birkhäuser Advanced Texts, Birkhäuser Basel, Inc., Basel, 2009.

[9] K. S. Chou, W. S. Chu, *On the best constant for a weighted Sobolev-Hardy inequality*, J. London Math. Soc. (2) 48 (1993), n. 1, 137–151.

[10] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, Providence, 1998.

[11] V. Felli, M. Schneider, *Compactness and Existence Results for Degenerete Critical Elliptic Equations.* Commun. Comtemp. Math. 7, 37–73, 2005.

[12] J. Frehse, *Lecture notes on direct methods ans regularity in the calculus of variations.* Notas de Aula.

[13] N. Ghoussoub, X. Kang, *Hardy-Sobolev Critical Elliptic Equations with Boundary Singularities.* Ann. Inst. Henri Poincaré Anal. Non Linéaire, 21, (2004), 767–793.

[14] P. Han, Z. Liu, *Positive solutions for elliptic equations involving critical Sobolev exponents and Hardy terms with Neumann boundary conditions.* Nonlinear Anal. 55, (2003) 167–186.

[15] T. Horiuchi, *Best Constantes in Weihgted Sobolev Inequality with Weights Being Powers of Distance from the Origin.* J. Inequal. Appl., 1: 275–292 (1997).

[16] O. Kavian, *Introduction à la Théorie des Points Critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques.*

[17] B. Kou, S. Peng, *Quasilinear elliptic equations with Neumann boundary and singularity.* Acta Mathematicae Applicatae Sinica, English Series, vol. 25, (2009) n. 4, 631–646.

[18] E. H. Lieb, M. Loss, *Analysis*, Graduate Studies in Mathematics, 14. American Mathematical Society, Providence, RI, 1997.

[19] E. L. Lima, *Curso de Análise, vol.2* , Projeto Euclides, IMPA, 2000.

[20] J. Malý, W. P. Ziemer, *Fine Regularity of Solutions of Elliptic Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Mathematical Surveys and Monographs, vol. 51, Rhode Island, 1997.

[21] M. Struwe, *Variational Methods. Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*, Second edition, 34, Springer-Verlag, Berlin, 1996.

[22] G. Talenti, *Best constants in Sobolev inequality,* Ann. Mat. Pura Appl. (4) 110 (1976), 353-372.

[23] J. L. Vázquez, *A strong maximum principle for some quasilinear elliptic equations*, Appl. Math. Optim. 12 (1984), 191–202.

[24] M. Willem, *Minimax Theorems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 24, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, 1996.

[25] X. J. Wang, *Neumann Problem of Semilinear Elliptic Equations Involving Critical Sobolev Exponents*, J. Differential Equations, 93, (1991), 283–310.

Índice Remissivo