Universidade Federal de Minas Gerais

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

O σ_k-Problema de Yamabe sobre Variedades CR

Luiz Gustavo de Oliveira Carneiro

Orientador: Prof. Marcos da Silva Montenegro

Co-Orientador: Prof. Ezequiel Rodrigues Barbosa

Belo Horizonte - 25/11/2011

Agradecimentos

Ao Prof. Marcos e ao Prof. Ezequiel pela excelente orientação.
Aos membros da banca de defesa da tese pela participação, leitura e sugestões. Em especial ao Prof. Mário Jorge pela participação em todas as bancas examinadoras para quais apresentei: Mestrado, Qualificação e Doutorado.
À minha amada esposa Nátaly pela paciência, carinho e dedição.
Aos meus queridos Kal-El, Lanna e Chewbacca.
Aos meus grandes amigos de Ouro Preto, em especial à Geraldo, Gil, Josué, Rodrigo, Rogério, Sebastião e Thiago.
Aos meus queridos amigos Flávio, Gustavo e Rogério, por me acompanharem por todos esses anos.
À todos os professores do Departamento de Matemática da UFMG que direta ou indiretamente contribuíram para minha formação. Em especial ao Prof. Francisco Dutenhefner e ao Prof. Nikolay Goussevskii.
À todos os funcionários do Departamento de Matemática da UFMG. Em especial à Andréia, Kelly, Valdinei e Cristina.
À todos os funcionários e professores do Departamento de Matemática da UFOP.
Aos órgão de fomento (CNPq e FAPEMIG) e à PROPP/UFOP pelo apoio financeiro.
Finalmente, à todos que porventura eu não tenha mencionado, mas que de alguma forma contribuíram para a concretização desse projeto.

Introdução

No final dos anos 70 e início dos anos 80, a geometria das variedades CR, modelo abstrato de hipersuperfícies reais em variedades complexas, atraiu a atenção de importantes matemáticos tais como Chern, Moser, Fefferman, Jacobowitz, D. Jerison, J. Lee, Tanaka, Webster, entre outros. Essa geometria é particularmente rica quando a variedade CR é estritamente pseudoconvexa. Nesse caso, existe uma estreita relação entre sua geometria e a geometria das variedades Riemannianas. Uma estrutura pseudohermitiana para uma variedade M munida de uma CR-estrutura $T_{1,0}(M)$ é uma forma de contato θ que aniquila a distribuição de Levi $H(M) = \mathrm{Re}\{T_{1,0} + T_{0,1}\}$, onde $T_{0,1} = \overline{T}_{1,0}$. Tal estrutura determina uma forma Hermitiana natural sobre a CR-estrutura $T_{1,0}(M)$, denominada forma de Levi e denotada por L_θ. A forma de Levi é bem definida (para cada CR-estrutura) módulo multiplicação por uma função suave, exatamente como ocorre na geometria Riemanniana conforme. Quando L_θ é uma forma definida, dizemos que (M, θ) é uma variedade pseudohermitiana estritamente pseudoconvexa. Nesse caso, se M é orientável, o fibrado de aniquiladores da distribuição de Levi $H(M)^\perp = \{\theta \in T^*(M) : H(M) \subset ker\theta\}$ é trivial. Portanto, $H(M)^\perp$ admite uma orientação natural na qual dizemos que uma estrutura pseudohermitiana θ é positiva, se a forma de Levi associada é positiva definida.

Uma estratégia comum na geometria conforme é determinar um representante particular na classe conforme de uma métrica Riemanniana fixada g, de modo que esse representante simplifique algum aspecto da geometria. Por exemplo, temos:

O Problema de Yamabe. Dada uma variedade Riemanniana compacta (M, g) de dimensão $n \geq 3$, encontrar uma métrica conforme a g com curvatura escalar constante.

A solução desse problema faz com que questões topológicas possam ser reduzidas à questões geométricas sobre modelos de curvaturas constantes. Para variedades compactas de dimensão 2, temos como conseqüencia do Teorema de Uniformização (da Análise Complexa), que todas admitem uma métrica com curvatura (Gaussiana) constante. Dessa maneira, cada classe de homeomorfismos de superfícies compactas possui um representante de curvatura constante. O problema de Yamabe pode ser visto como uma tentativa de generalizar esse resultado.

Em 1960, Yamabe [47] tentou solucionar esse problema usando técnicas de equações diferenciais elípticas e cálculo variacional. Ele afirmou que toda variedade Riemanniana compacta possuia uma métrica conforme de curvatura escalar constante. Entretanto, sua prova continha um erro, descoberto em 1968 por N. Trudinger [40]. Trudinger foi capaz de corrigir a prova, mas com uma restrição sobre a variedade. Para compreendermos tal restrição, descreveremos agora a abordagem de Yamabe.

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 3$. Qualquer métrica conforme a g pode ser escrita como $\widetilde{g} = e^{-2u}g$, onde u é uma função real suave de M. Se S e $\widetilde{S}$ denotam a curvatura escalar de g e $\widetilde{g}$, respectivamente, elas satisfazem a seguinte transformação

$$\widetilde{S} = e^{-2u}\left(S + 2(n-1)\Delta u - (n-1)(n-2)\|\nabla u\|_g^2\right).$$

onde Δu é o Laplaciano de u e ∇u é sua derivada covariante, definida com respeito à métrica Riemanniana g. Fazendo a mudança de variável $e^{-2u} = \varphi^{p-2}$, onde $p = 2n/(n-2)$, a fórmula acima se torna consideravelmente mais simples:

$$\widetilde{S} = \varphi^{1-p}\left(4\frac{n-1}{n-2}\,\Delta\varphi + S\varphi\right).$$

Dessa maneira, a métrica $\widetilde{g} = \varphi^{p-2}g$ terá curvatura escalar constante λ se, e somente se, φ satisfizer a equação diferencial parcial

$$4\frac{n-1}{n-2}\,\Delta\varphi + S\varphi = \lambda\varphi^{p-1} \quad \text{sobre} \quad M\ . \tag{1}$$

Esta equação é denominada **equação de Yamabe**. Yamabe observou que essa equação é a equação de Euler-Lagrange para o funcional

$$Y(\widetilde{g}) = \frac{\int_M \widetilde{S}dV_{\widetilde{g}}}{\left(\int_M dV_{\widetilde{g}}\right)^{2/p}}, \tag{2}$$

também denominado **funcional de Yamabe**. Uma conseqüência da desigualdade de Hölder é que, para variedades compactas, o funcional Y é limitado inferiormente. Portanto, podemos considerar

$$\lambda(M) = \inf\left\{Y(\widetilde{g}) : \widetilde{g} \text{ é conforme à } \ g\right\}\ . \tag{3}$$

A constante $\lambda(M)$ é um invariante na classe conforme de (M, g) chamado **invariante de Yamabe**. O valor dessa constante é crucial na resolução do problema de Yamabe.

Podemos sintetizar essa solução em três grandes resultados devidos a Yamabe, Trudinger, Aubin e Schoen.

Teorema 1 (**Yamabe [47], Trudinger [40], Aubin [1]**). *Seja S^n a esfera unitária com a métrica usual. Se (M, g) é uma variedade Riemanniana compacta com invariante de Yamabe $\lambda(M) < \lambda(S^n)$, então existe uma métrica para M na classe conforme de g com curvatura escalar constante.*

Teorema 2 (**Aubin [1]**). *Se (M, g) é uma variadade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 6$ não localmente conformemente plana, então $\lambda(M) < \lambda(S^n)$.*

Teorema 3 (**Schoen [38]**). *Se (M, g) é uma variadade Riemanniana compacta de dimensão 3, 4 ou 5, ou ainda, se (M, g) é localmente conformemente plana, então $\lambda(M) < \lambda(S^n)$.*

Em 1987, um problema análogo ao problema de Yamabe, porém num contexto da geometria pseudohermitiana, foi proposto por D. Jerison e J. Lee [28]. Precisamente, temos

O Problema de Yamabe sobre Variedades CR. Dada uma variedade pseudohermitiana (M, θ) compacta, estritamente pseudoconvexa, encontrar uma estrutura pseudohermitiana $\widetilde{\theta}$ com mesma orientação de θ tal que sua curvatura escalar pseudohermitiana seja constante.

A curvatura escalar pseudohermitiana (ou curvatura escalar de Webster), foi introduzida de maneira independente e com abordagens distintas pelos dois matemáticos S. Webster [46] e N. Tanaka [39]. Webster introduziu uma conexão linear sobre $T_{1,0}(M)$ associada a cada estrutura pseudohermitiana. Esssa conexão determina o tensor curvatura pseudohermitiano, análogo ao tensor curvatura de Riemann. Contrações desse tensor fornecem o tensor de Ricci pseudohermitiano e a curvatura escalar pseudohermitiana.

O problema de Yamabe sobre variedades CR compactas, orientáveis, estritamente pseudoconvexas, foi completamente resolvido por D. Jerison, J. Lee ([27], [28], [29], [30]), N. Gamarra e J. Yacoub ([18], [19]). A seguir, descreveremos seus resultados.

Seja (M, θ) uma variedade pseudohermitiana compacta, orientável, estritamente pseudoconvexa, de dimensão $2n + 1 \geq 3$. Qualquer estrutura pseudohermitiana sobre M com mesma orientação de θ pode ser escrita como $\widetilde{\theta} = e^{2u}\theta$, onde u é uma função suave de M. Se $\widetilde{R}$ e R denotam a curvatura escalar (pseudohermitiana) de $\widetilde{\theta}$ e θ, respectivamente, teremos a transformação

$$\widetilde{R} = e^{-u}\,(R + 2(n+1)\Delta_b u - 2n(n+1)\|\nabla u\|_\theta^2).$$

em que $\Delta_b u$ é o sublaplaciano de u e ∇u sua derivada covariante, definida com respeito à estrutura pseudohermitiana θ. Fazendo a mudança de variável $e^{2u} = u^{p-2}$, onde $p = 2 + 2/n$, a fórmula acima se torna consideravelmente mais simples:

$$\widetilde{R} = u^{1-p}\left(p\,\Delta_b u + Ru\right).$$

Dessa maneira, a estrutura pseudohermitiana $\widetilde{\theta} = u^{p-2}\theta$ terá curvatura escalar constante λ se, e somente se, u satisfazer a equação

$$p\,\Delta_b u + Ru = \lambda u^{p-1}. \tag{4}$$

Essa equação é denominada **equação de Yamabe CR**. Jerison e Lee observaram que essa equação é a equação de Euler-Lagrange para o funcional

$$Y(\widetilde{\theta}) = \frac{\int_M \widetilde{R} dV_{\widetilde{\theta}}}{\left(\int_M dV_{\widetilde{\theta}}\right)^{2/p}}, \tag{5}$$

onde $dV_{\widetilde{\theta}} = \theta \wedge d\theta^n$ é o elemento de volume CR. Esse funcional é também denominado **funcional de Yamabe CR**. Uma conseqüência da desigualdade de Hölder é que, para variedades compactas, o funcional Y é limitado inferiormente. Portanto podemos considerar

$$\lambda(M) = \inf\left\{Y(\widetilde{\theta}) : \widetilde{\theta} \text{ é conforme a } \theta\right\}. \tag{6}$$

A constante $\lambda(M)$ é um CR-invariante, isto é, depende exclusivamente da estrutura CR e não da escolha da estrutura pseudohermitiana, chamado **invariante de Yamabe CR**. Exatamente como no caso Riemanniano, o valor dessa constante é crucial na resolução do problema de Yamabe CR. Podemos sintetizar essa solução de acordo com os resultados obtidos por Jerison, Lee, Gamarra e Yacoub.

Teorema 4 (**Jerison, Lee [28]**). *Seja S^{2n+1} a esfera unitária com CR-estrutura induzida de $\mathbb{C}^{n+1}$ e estrutura pseudohermitiana canônica $\theta = i(\overline{\partial} - \partial)|z|^2$. Se (M,θ) é uma variedade pseudohermitiana compacta com invariante de Yamabe $\lambda(M)$, então*

(i) *$\lambda(M)$ depende somente da CR-estrutura de M;*

(ii) *$\lambda(M) \leq \lambda(S^{2n+1})$;*

(iii) *se $\lambda(M) < \lambda(S^{2n+1})$, existe uma estrutura pseudohermitiana para M, com mesma orientação de θ, com curvatura escalar constante.*

Teorema 5 (**Jerison, Lee [30]**). *Se (M,θ) é uma variedade pseudohermitiana compacta de dimensão $2n+1 > 3$ não localmente CR-equivalente à esfera S^{2n+1}, então $\lambda(M) < \lambda(S^n)$.*

Dessa maneira, Jerison e Lee solucionaram o problema de Yamabe no contexto CR, para os casos onde a variedade não é localmente CR-equivalente à esfera e sua dimensão é diferente de 3. O casos restantes foram solucionados em 2001 por Gamarra e Yacoub. Eles obtiveram

Teorema 6 (**Gamarra [18]**). *Se (M,θ) é uma variedade pseudohermitiana compacta de dimensão $2n+1$ CR-equivalente à esfera, então existe uma estrutura pseudohermitiana para M, com mesma orientação de θ, com curvatura escalar constante.*

Teorema 7 (**Gamarra, Yacoub [19]**). *Se (M,θ) é uma variadade pseudohermitiana compacta de dimensão 3 não CR-equivalente à esfera, então existe uma estrutura pseudohermitiana para M, com mesma orientação de θ, com curvatura escalar constante.*

Seja (M,g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 3$. Como é bem conhecido. o tensor curvatura de Riemann Rm pode ser decomposto como

$$Rm = W + S_g \odot g \ ,$$

onde W é tensor Weyl, S_g é o **tensor de Schouten**

$$S_g = \frac{1}{n-2}\left(Ric_g - \frac{R_g}{2(n-1)}g\right) \ ,$$

em que Ric_g e R_g denotam, respectivamente, o tensor de Ricci e a curvatura escalar de g, e $\odot$ representa o produto de Kulkarni-Nomizu (veja [6]). O tensor de Weyl é um tensor invariante na geometria conforme e é identicamete nulo se, e somente se, $n = 3$ ou $n \geq 4$ com M localmente conformemente plana.

Seja σ_k a k-ésima função elementar simétrica. Para cada matriz simétrica A de ordem n, denotaremos o espectro de A por $\Lambda(A) = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, onde $\{\lambda_n \leq \ldots \leq \lambda_1\}$. Como a função σ_k é invariante pela conjugação $A \mapsto P^tAP$, onde P é uma matrix ortogonal, σ_k pode ser expressa por

$$\sigma_k(A) = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_k} \ .$$

Além disso $\sigma_1(A) = \mathrm{trace}(A)$ e $\sigma_n(A) = \det(A)$.

A **σ_k-curvatura** de g é definida como

$$\sigma_k(g) := \sigma_k(g^{-1}S_g) \ ,$$

onde $g^{-1}S_g$ é dada localmente por $(g^{-1}S_g)^i_j = g^{ik}(S_g)_{kj}$. Para $k = 1$, temos

$$\sigma_1(g) = \frac{R_g}{2(n-1)} \ ,$$

ou seja, a σ_1-curvatura é um múltiplo constante da curvatura escalar R_g. Portanto, é natural colocarmos o seguinte problema:

O σ_k-Problema de Yamabe. Dada uma variedade Riemanniana compacta (M,g) de dimensão $n \geq 3$, encontrar uma métrica conforme à g com σ_k-curvatura constante.

Esse problema foi introduzido no inicio de 2000 de maneira independente pelos matemáticos J. Viaclovisky [41], A. , M. Gursky e P. Yang [11]. Desde então, resultados importantes têm sido estabelecidos na série de trabalhos centrais [11], [21], [22], [24], [34], [37], [43].

Dada uma variedade Riemanniana compacta (M,g) de dimensão $n \geq 3$, considere uma métrica conforme a g escrita como $\tilde{g} = e^{-2u}g$ para alguma função suave u. Se $S_{\tilde{g}}$ e S_g denotam os tensores de Schouten de $\widetilde{g}$ e g, respectivamente, eles satisfazem a seguinte transformação

$$S_{\tilde{g}} = \nabla^2 u + du \otimes du - \frac{|\nabla u|^2}{2} g + S_g \ .$$

Solucionar o σ_k-problema de Yamabe consiste em encontrar uma métrica $\widetilde{g}$ tal que $\sigma_k(\tilde{g}) = c$ para alguma constante c. Essa equação é equivalente à

$$\sigma_k(\nabla^2 u + du \otimes du - \frac{|\nabla u|^2}{2} g + S_g) = ce^{-2ku} \ , \tag{7}$$

e é denominada **σ_k-equação de Yamabe**.

Fazendo a substituição $e^{-2u} = v^{p-2}$, onde $p = 2n/(n-2)$, obtemos

$$\sigma_k\left(\frac{2}{(n-2)}\frac{V}{v}\right) = cv^k, \tag{8}$$

onde

$$V = -\nabla^2 v + \frac{n}{n-2}\frac{\nabla v \otimes \nabla v}{v} - \frac{1}{n-2}\frac{\|\nabla v\|_g^2}{v} g + \frac{n-2}{2}\, vS_g.$$

Observe que nas equações (7) e (8) estamos considerando esses tensores como do tipo $(1,1)$.

Se $\widetilde{g}$ tem σ_k-curvatura constante, então v satisfaz a equação

$$L_k[v] := v^{(1-k)\frac{n+2}{n-2}} \sigma_k\left(\Lambda(V)\right) = cv^{\frac{n+2}{n-2}} \tag{9}$$

para alguma constante c. O operador L_k é denominado **σ_k-operador de Yamabe**. Note que quando $k = 1$, o operador L_1 é um múltiplo constante do operador de Yamabe e a equação (9) recupera a equação de Yamabe clássica descrita no início desta seção. Quando $k > 1$, (7) é uma equação completamente não-linear do tipo k-Hessiana. A equação (7) foi estudada inicialmente por Viaclovsky em dois trabalhos pioneiros [41] e

[42]. Destacaremos abaixo alguns de seus resultados. O primeiro se refere à propriedade variacional satisfeita por (7).

Teorema 8 (Viaclovsky [41]). *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão n e denote por $\mathcal{M} = \{\tilde{g} \in [g] : \int_M dv_{\tilde{g}} = 1\}$ o conjunto das métricas conformes a g e de volume unitário. Se $k \neq \frac{n}{2}$ e (M, g) é localmente conformemente plana, então uma métrica $\tilde{g} \in \mathcal{M}$ é um ponto crítico do funcional*

$$\mathcal{F}_k : \tilde{g} \mapsto \int_M \sigma_k \left(Ric_{\tilde{g}} - \frac{R_{\tilde{g}}}{2(n-1)} \tilde{g} \right) dv_{\tilde{g}}$$

restrito à $\mathcal{M}$ se, e somente se,

$$\sigma_k \left(Ric_{\tilde{g}} - \frac{R_{\tilde{g}}}{2(n-1)} \tilde{g} \right) = c_k$$

para alguma constante c_k. Se $n = 1$ ou $n = 2$, o resultado ainda é verdadeiro mesmo que M não seja localmente conformemente plana.

Considere o **cone de Gärding** em $\mathbb{R}^n$

$$\Gamma_k^+ = \{\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : \sigma_j(\Lambda) > 0 \text{ for all } j \leq k\} .$$

Uma métrica g sobre M é dita k-positiva se $\sigma_j(g)(x) > 0$ para todo $x \in M$ e $1 \leq j \leq k$. Nesse caso, denotaremos simplesmente $g \in \Gamma_k^+$. Se $\tilde{g} = e^{-2u} g$ e g são duas métricas k-positivas, diremos que u é k-admissível. Denotaremos por $[g]_+$ o conjunto das métricas k-positivas conformes à g.

Em [41], Viaclovsky ainda provou que a equação (7) é elíptica em qualquer solução k-admissível. Com o objetivo de aplicar a teoria elíptica, o σ_k-problema de Yamabe será considerado sobre métricas k-positivas. Precisamente, dada uma métrica k-positiva g, o σ_k-problema de Yamabe consiste em encontrar uma métrica $\tilde{g} \in [g]_+$ tal que $\sigma_k(\tilde{g})$ é constante. Viaclovsky estabeleceu o seguinte resultado sobre unicidade de soluções do σ_k-problema de Yamabe.

Teorema 9 (Viaclovsky [41]). *Seja (M, g) uma variedade Riemanianna compacta de dimensão n de volume unitário e curvatura seccional constante não-nula. Então para qualquer $k \in \{1, \ldots, n-1\}$, $g \in \mathcal{M}$ é a única solução de volume unitário da equação $\sigma_k(\tilde{g}) = c$ na classe conforme de g, a menos que (M, g) seja isométrica à esfera S^n com a métrica usual. Nesse caso, teremos uma família de soluções à $(n+1)$-parâmetros que são as métricas induzidas da canônica por difeomorfismos conformes de S^n.*

Existem muitos trabalhos relacionados à equação completamente não-linear (7). Mencionaremos alguns resultados diretamente relacionados com a existência do σ_k-problema de Yamabe. Quando $k = n$, sob uma determinada condição, Viaclovsky provou a existência de solução em [43]. Quando $n = 2k = 4$, que é um caso importante, o problema foi resolvido por Chang-Gursky-Yang em [11]. Quando a variedade Riemanniana é localmente conformemente plana, o problema foi resolvido independentemente por Guan-Wang [22] e por Li-Li [34]. Quando $k > n/2$, o σ_k-problema de Yamabe foi solucionado por Gursky-Viaclovski em [24]. Quando $k = 2$ e a variedade não é localmente conformemente plana, Ge-Wang resolveram o problema em [21]. Uma estratégia para solucionar os casos restantes $2 \leq k \leq n/2$ para variedades não-conformemente planas foi apresentada por Sheng-Trudinger-Wang em [37], onde eles obtiveram a solução sob a hipótese do problema ser variacional. Infelizmente, justo nesse caso o problema não é variacional, conforme mostrado por Branson-Gover em [8].

Nesta tese, percorreremos o caminho traçado por J. Viaclovsky com a intenção de generalizar o σ_k-problema de Yamabe Riemanniano para o contexto da geometria CR, assim como fizeram D. Jerison e J. Lee na década de 80 com o problema de Yamabe clássico.

Seja (M, θ) uma variedade pseudohermitiana estritamente pseudoconvexa de dimensão $2n + 1 \geq 3$. O tensor pseudoconforme de Chern [12] é um tensor invariante na geometria CR que é nulo se, e somente se, $n = 1$ ou se M é localmente CR-equivalente à esfera S^{2n+1}. Essa semelhança fez com que pensássemos numa possível definição de um tensor análogo ao tensor de Schouten. Em [46], Webster observou que o tensor curvatura de Webster, o tensor curvatura pseudohermitiano visto como um tensor do tipo $(4, 0)$, pode ser decomposto como

$$R = Ch + S_\theta \boxdot L_\theta \tag{10}$$

onde Ch é o tensor curvatura pseudoconforme de Chern, $\boxdot$ é um produto similar ao produto de Kulkarni-Nomizu e S_θ é o tensor dado por

$$S_\theta = \frac{1}{n+2}\left(Ric_\theta - \frac{R_\theta}{2(n+1)} L_\theta\right) , \tag{11}$$

onde Ric_θ e R_θ são, respectivamente, o tensor de Ricci pseudohermitino e a curvatura escalar pseudohermitiana de θ. Chamaremos o tensor S_θ de tensor de Schouten pseudohermitiano associado a θ. Assim como no contexto Riemanniano, acreditamos que esse tensor desempenha um papel importante na geometria CR. Como S_θ é um tensor Hermitiano sobre $T_{1,0}(M)$, podemos considerar o σ_k-invariante associado a S_θ, isto é, as k-ésimas funções elementares simétricas de autovalores $\sigma_k(S_\theta)$. Definimos a σ_k-curvatura pseudohermitiana de θ por

$$\sigma_k(\theta) := \sigma_k({L_\theta}^{-1} S_\theta) ,$$

onde ${L_\theta}^{-1} S_\theta$ é dado localmente por ${S_\alpha}^{\beta} := h^{\beta\bar\gamma}(S_\theta)_{\alpha\bar\gamma}$. Para $k=1$, temos

$$\sigma_1(\theta) = \frac{R_\theta}{2(n+1)}\ ,$$

ou seja, a σ_1-curvatura pseudohermitiana é um múltiplo constante da curvatura escalar R_θ. Um problema natural que surge é encontrar uma estrutura pseudohermitiana $\widetilde{\theta}$, com mesma orientação de θ, tal que $\sigma_k(\widetilde{\theta})$ seja constante. A mudança $\widetilde{\theta} = e^{2u}\theta$ fornece a seguinte transformação sobre o tensor de Schouten pseudohermitiano

$$S_{\widetilde{\theta}} = -2\,\nabla^2 u + \big(iTu - \|du\|_\theta^2\big)L_\theta + S_\theta\ , \tag{12}$$

onde $\nabla^2 u$ é a $(1,1)$-Hessiana complexa de u e T é a direção característica associada à $d\theta$. A equação $\sigma_k(\widetilde{\theta}) = c$ é equivalente a

$$\sigma_k(-2\,\nabla^2 u + \big(iTu - \|du\|_\theta^2\big)L_\theta + S_\theta) = ce^{2ku} \tag{13}$$

para alguma constante c. Fazendo a substituição $e^{2u} = v^{p-2}$, onde $p = 2 + 2/n$, obtemos

$$\sigma_k\left(\frac{2}{n}\frac{V}{v}\right) = cv^k, \tag{14}$$

em que

$$V = -\nabla^2 v + \frac{n}{n-2}\frac{\nabla v \otimes \nabla v}{v} + \frac{1}{2}\left(iTv - \frac{\|\nabla v\|_\theta^2}{nv}\right)L_\theta + \frac{n}{2}\,vS_\theta.$$

Observe que estamos considerando esses tensores como tensores do tipo $(1,1)$.

Se $\widetilde{\theta} = v^{p-2}\theta$ é solução da equação $\sigma_k(\widetilde{\theta}) = c$ para alguma constante c, então v satisfaz a equação

$$L_k[v] := v^{(1-k)\frac{n+2}{n}}\sigma_k\left(\Lambda(V)\right) = \lambda v^{\frac{n+2}{n}} = \lambda v^{p-1} \quad \text{sobre} \quad M \tag{15}$$

para alguma constante λ. Observe que L_1 é um múltiplo constante do operador de Yamabe CR introduzido por Jerison e Lee [28].

Considerando novamente o cone de Gärding Γ_k^+, diremos que uma estrutura pseudohermitiana θ é k-positiva se $\sigma_j(\theta)(x) > 0$ para qualquer ponto $x \in M$ e todo $1 \le j \le k$. Se $\widetilde{\theta} = e^{2u}\theta$, diremos que u é k-admissível se θ e $\widetilde{\theta}$ são k-positivas. Denotaremos por $[\theta]_+$ o conjunto das estruturas pseudohermitianas k-positivas compatíveis com θ. Podemos considerar agora:

O σ_k-problema de Yamabe sobre variedades CR. Seja (M,θ) uma variedade CR, compacta, orientável, estritamente pseudoconvexa e com estrutura pseudohermitiana k-positiva. O σ_k-problema de Yamabe CR consiste em encontrar uma estrutura pseudohermitiana k-positiva, compatível com a orientação de θ, com σ_k-curvatura pseudohermitiana constante.

Exatamente como no caso Riemanniano, a busca pela solução desse problema está fortemente relacionado com a procura de extremais para o funcional

$$Y_k : \widetilde{\theta} \mapsto \frac{\int_M \sigma_k(\widetilde{\theta})\, dV_{\widetilde{\theta}}}{\left(\int_M dV_{\widetilde{\theta}}\right)^{\frac{2}{p}\left(1-\frac{1}{n}(1-k)\right)}} \tag{16}$$

Observe que $Y_1(\widetilde{\theta}) = \frac{1}{2(n+1)} Y(\widetilde{\theta})$, onde Y é o funcional de Yamabe CR apresentado anteriormente.

Um dos resultados obtidos nesta tese é:

Teorema A. *Seja (M, θ) uma variedade pseudohermitiana compacta de dimensão $2n+1$ e estritamente pseudoconvexa. Se a torção pseudohermitiana $\widetilde{\tau}$ associada à estrutura pseudohermitiana $\widetilde{\theta}$ for paralela em relação à conexão ($\nabla\widetilde{\tau} = 0$), então uma estrutura pseudohermitiana de volume unitário $\tilde{\theta}$ é um ponto crítico do funcional*

$$Y_k : \widetilde{\theta} \mapsto \frac{\int_M \sigma_k(\widetilde{\theta})\, dV_{\widetilde{\theta}}}{\left(\int_M dV_{\widetilde{\theta}}\right)^{\frac{2}{p}\left(1-\frac{1}{n}(1-k)\right)}}$$

se, e somente se, $\sigma_k(\widetilde{\theta}) = c_k$ para alguma constante c_k.

Provaremos ainda nesta tese que a equação (13) é elíptica em qualquer solução k-admissível.

A estratégia de demonstração do **Teorema A** fez com que definíssemos um tensor associado a cada estrutura pseudohermitiana θ, análogo ao tensor de Cotten da geometria Riemanniana. O chamaremos de tensor de Cotten pseudohermitiano e o denotaremos por C_θ. Esse tensor mede uma certa simetria nas derivadas covariantes do tensor de Schouten pseudohermitiano. Veremos adiante que usando tal definição, poderemos enfraquecer a hipótese do **Teorema A** pedindo simplesmente que o tensor de Cotten $C_{\widetilde{\theta}}$ seja nulo.

Uma estrutura pseudohermitiana é dita pseudo-Einstein se, restrito a $T_{1,0}$, tivermos $Ric_\theta = \frac{R_\theta}{n} L_\theta$. Neste trabalho também provamos o seguinte resultado.

Teorema B. *Seja $(M, \widetilde{\theta})$ uma variedade pseudohermitiana com estrutura pseudo-Einstein. Suponha que $\theta \in [\widetilde{\theta}]_+$ tenha σ_k-curvatura constante e, além disso, C_θ seja nulo. Então, θ também é pseudo-Einstein*

Na tentativa de obter todas as soluções do σ_k-problema de Yamabe sobre a esfera CR, fomos levados a considerar uma classe especial de funções denominadas Cotten-admissíveis. Uma função u será dita Cotten-admissível se satisfizer

$$u_\alpha u_{\bar{\beta}\sigma} - u_\sigma u_{\bar{\beta}\alpha} = 0 \text{ para quaisquer } \alpha, \beta, \sigma \in \{1, ..., n\}.$$

Denotaremos

$$C[\theta]_+ = \left\{ \widetilde{\theta} = e^{2u}\theta : u \text{ é } k\text{-admissível e Cotten-admissível} \right\}$$

e chamaremos $\widetilde{\theta} \in C[\theta]_+$ uma estrutura pseudohermitiana Cotten-admissível. Uma classe bem conhecida de funções Cotten-admissíveis é a classe das funções CR-pluriharmônicas [32], isto é, funções que são parte real de uma função CR. Com essas definições, podemos enunciar o seguinte resultado de classificação de soluções do σ_k-problema de Yamabe sobre a esfera CR.

Teorema C. *Se $\theta = e^{2u}\hat{\theta}$ é uma estrutura pseudohermitana k-positiva, Cotten-admissível, com σ_k-curvatura constante para a esfera $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$, então θ é obtida de um múltiplo escalar da forma canônica $\hat{\theta}$ por um CR-automorfismo da esfera.*

Acreditamos que esse teorema possa ser refinado, retirando a hipótese de Cotten-admissibilidade. Propomos, portanto, a seguinte conjectura:

Conjectura A. *Se $\theta = e^{2u}\hat{\theta}$ é uma estrutura pseudohermitana k-positiva e com σ_k-curvatura constante para a esfera $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$, então θ é obtida de um múltiplo escalar da forma canônica $\hat{\theta}$ por um CR-automorfismo da esfera.*

Quando a variedade pseudohermitiana (M, θ) é compacta, podemos considerar algumas constantes associadas a M definidas por

$$\lambda_k(M) = \inf \left\{ Y_k(\widetilde{\theta}) : \widetilde{\theta} \in [\theta] \right\},$$

$$\lambda_k^+(M) = \inf \left\{ Y_k(\widetilde{\theta}) : \widetilde{\theta} \in [\theta]_+ \right\}$$

e

$$\lambda_k^C(M) = \inf \left\{ Y_k(\widetilde{\theta}) : \widetilde{\theta} \in C[\theta]_+ \right\}.$$

Observe que

$$\lambda_k(M) \leq \lambda_k^+(M) \leq \lambda_k^C(M).$$

A constante $\lambda_k(M)$ será denominda σ_k-constante de Yamabe. Uma questão natural é se existe alguma variedade pseudohermitiana compacta tal que a desigualdade acima é estrita. Infelizmente ainda não sabemos nada sobre essa questão.

Como uma consequência do **Teorema A** e do **Teorema C**, temos que a σ_k-constante de Yamabe da esfera $\lambda_k(S^{2n+1})$ é atingida por um múltiplo constante de imagem por um CR-automorfismo de $\hat{\theta}$. Com isso, obtemos o valor exato de $\lambda_k(S^{2n+1})$:

$$\lambda_k(S^{2n+1}) = C(n,k)\pi^k \quad ,$$

onde $C(n,k)$ denota o coeficiente binomial de Newton.

Utilizando a transformação de Cayley, que é uma CR-equivalência entre a esfera menos um ponto $S^{2n+1} - \{(0, -1)\}$ e o grupo de Heisenberg $\mathbb{H}^n$, obtemos o seguinte resultado:

Teorema D. *Seja* $(\mathbb{H}^n, \Theta)$ *o grupo de Heisenberg usual e* $1 \leq k \leq n$ *um inteiro. Então, existe uma constante* $C > 0$ *tal que a desigualdade do tipo Sobolev*

$$\left(\int_{\mathbb{H}^n} v^p dV_\Theta\right)^{\frac{2}{p}(1+\frac{1}{n}(1-k))} \leq C\int_{\mathbb{H}^n} v^{1+\frac{(1-k)(n+2)}{2}}\sigma_k(V)dV_\Theta$$

é satisfeita para toda função u *suave com suporte compacto em* $\mathbb{H}^n$*. Além disso, a melhor constante dessa desigualdade é* $C = 1/C(n,k)\pi^k$ *com igualdade atingida pelas funções*

$$u(z,t) = K|w + z.\overline{\mu} + \lambda|^{-n}$$

onde $K > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $Im\lambda > \dfrac{|\mu|^2}{4}$ *e* $\mu \in \mathbb{C}^n$*. Mais ainda, restrito à classe de funções Cotten-admissíveis, a igualdade é atingida somente por essas funções. Tais funções são obtidas de* $K|w + i|^{-n}$ *por translações e dilatações de Heisenberg.*

Se a **Conjectura A** for verdadeira, então essas serão as únicas funções que atingem a igualdade na desigualdade acima.

Acreditamos que a solução do σ_k-problema de Yamabe sobre uma variedade CR compacta M, como em todos os outros casos, parte de uma análise cuidadosa da constante $\lambda_k(M)$. Nesta tese, mostraremos que $\lambda_k(S^{2n+1})$ é uma cota superior para toda variedade pseudohermitiana compacta. Além disso, esse valor é atingido somente quando a variedade é localmente CR-equivalente a esfera. Esse é o conteúdo do nosso último resultado.

Teorema E. *Seja* (M, θ) *uma variedade pseudohermitiana compacta de dimensão* $2n + 1$ *e estritamente pseudoconvexa. Então,*

$$\lambda_k^+(M) \leq \lambda_k^+(S^{2n+1}).$$

Além disso, a igualdade é atingida somente se M *localmente CR-equivalente a esfera.*

Finalmente, em paralelo com o contexto Riemanniano (veja [37]), propomos a seguinte conjectura:

Conjectura B. *Seja* (M, θ) *uma variedade pseudohermitiana compacta de dimensão* $2n+1$ *e estritamente pseudoconvexa. Se*

$$\lambda_k^+(M) < \lambda_k^+(S^{2n+1}).$$

então $\lambda_k^+(M)$ *é atingido por uma função* u *suave e positiva. Em particular, o* σ_k*-problema de Yamabe CR terá solução quando for variacional e* $\lambda_k^+(M) < \lambda_k^+(S^{2n+1})$.

Organizamos esta tese em quatro capítulos.

No Capítulo 1, apresentamos as definições básicas necessárias para um bom entendimento dessa tese. Definimos o que é uma variedade CR do tipo hipersuperfície e mostramos que essas variedades são modelos abstratos de hipersuperfícies de $\mathbb{C}^{n+1}$. Introduzimos o conceito de estrutura pseudohermitiana para uma variedade CR. Mostramos que tal estrutura fornece uma forma bilinear denominada forma de Levi que, de certo modo, desempenha um papel semelhante às formas Hermitianas sobre variedades complexas. Quando essa forma é não-degenerada, a estrutura pseudohermitiana é uma 1-forma de contato. Desse modo, uma escolha de tal 1-forma determina uma direção característica no fibrado tangente e um elemento de volume natural para a variedade CR.

No Capítulo 2, fazemos uma breve apresentação da geometria diferencial das variedades pseudohermitianas. Associada a cada estrutura pseudohermitiana, existe uma conexão linear denominada conexão pseudohermitiana. Essa conexão foi introduzida de maneira diferente e com abordagens distintas por Tanaka e por Webster no final da década de 70 e início da década de 80. Mostramos também nesse capítulo que, de fato, as duas abordagens dizem respeito à mesma conexão. Ao contrário da conexão de Levi-Civita, a conexão pseudohermitiana não é livre de torção. Essa torção é completamente determinada pela forma de Levi, pela direção característica e pela torção pseudohermitiana, a qual exerce grande influência na geometria diferencial das variedades pseudohermitianas, como verificamos ao observar as simetrias das segundas derivadas covariantes de uma função suave. Além disso, mostramos que as formas de curvatura da conexão pseudohermitiana é determinada pela torção pseudohermitiana e por um tensor do tipo $(3, 1)$ denominado curvatura pseudohermitiana. Contrações desse tensor fornecem o tensor curvatura de Webster, o tensor de Ricci pseudohermitiano e a curvatura escalar pseudohermitiana. Relembramos aínda as identidades de Bianchi apresentadas em [32] por J. Lee. Os cálculos são exaustivos, porém necessários, pois utilizaremos essas identidades posteriormente nos resultados inéditos desta tese. Em seguida, provamos como deformações conformes de estruturas pseudohermitianas transformam as 1-formas de conexão e as 1-formas de torção da conexão pseudohermitiana. Com isso, obtemos as leis de transformação do tensor de Ricci pseudohermitiano e da curvatura escalar pseudohermitiana. Por fim, encerramos o capítulo apresentando dois exemplos de variedades CR do tipo hipersuperfície: a esfera CR e o grupo de Heisenberg. Calculamos os invariantes geométricos dessas variedades até aqui considerados, tais como a torção pseudohermitiana e a curvatura escalar pseudohermitiana. Apresentamos também a transformação de Cayley, que é uma CR-equivalência entre o grupo de Heisenberg e a esfera CR sem um de seus pontos.

No Capítulo 3, definimos o tensor de Schouten pseudohermitiano. Esse tensor pode ser visto como a parcela do tensor curvatura de Webster que não é CR-invariante. Dessa maneira, ele desempenha um grande papel no estudo de deformações conformes de estruturas pseudohermitianas. Derivamos também nesse capítulo, a lei de transformação do tensor de Schouten pseudohermitiano sob deformações conformes de estruturas pseudohermitianas. Introduzimos ainda o conceito de σ_k-curvatura pseudohermitiana e mostramos que essa curvatura coincide, a menos de um fator constante, com a curvatura escalar pseudohermitiana no caso $k = 1$. Apresentamos também a noção de divergentes de tensores do tipo $(1, 1)$ e obtemos uma fórmula de integração por partes envolvendo esses tensores. Essa fórmula é análoga à formula de integrações por partes da geometria Riemanniana.

Finalmente, o Capítulo 4 é dedicado aos principais resultados dessa tese. Começamos o capítulo propondo o σ_k-problema de Yamabe sobre variedades CR e mostrando que, para $k = 1$, ele é exatamente o problema de Yamabe sobre variedades CR, totalmente solucionado por D. Jerison, J. Lee, Gamarra e Yacoub. Mostramos que a solução desse problema envolve a solução de uma equação diferencial completamente não-linear do tipo k-Hessiana complexa, a qual denominamos σ_k-equação de Yamabe CR. A propriedade variacional dessa equação está fortemente ligada a um tensor do tipo $(3, 0)$, o qual denominamos tensor de Cotten pseudohermitiano. Mostramos que se a torção pseudohermitiana é paralela em relação à conexão, então o tensor de Cotten pseudohermitiano é nulo. Definimos o σ_k-funcional de Yamabe CR, que é definido sobre estruturas pseudohermitianas de volume unitário. Mostramos que seus pontos críticos, nos quais o tensor de Cotten pseudohermitiano associado é nulo, são soluções do σ_k-problema de Yamabe. Provamos ainda que a σ_k-equação de Yamabe CR é elíptica quando consideramos somente funções k-admissíveis. Derivamos também um resultado de classificação de soluções do σ_k-problema de Yamabe sobre a esfera CR. Para isso, mostramos que deformações conformes de estruturas pseudo-Einstein que tenham σ_k-curvatura pseudohermitiana constante e cujo tensor de Cotten pseudohermitiano associado é nulo são também pseudo-Einstein. Em seguida, calculamos o valor exato da σ_k-constante de Yamabe da esfera CR e, conseqüentemente, usando a transformação de Cayley, obtemos uma desigualdade do tipo Sobolev sobre o grupo de Heisenberg. Mostramos que tal desigualdade é uma generalização da bem conhecida desigualdade de Folland-Stein sobre o grupo de Heisenberg. Finalizaremos o capítulo provando uma desigualdade crítica envolvendo as constantes $\lambda_k^+(S^{2n+1})$, precisamente que $\lambda_k^+(S^{2n+1})$ é uma cota superior sobre toda variedade pseudohermitiana, compacta e estritamente pseudoconvexa. Além disso, essa cota é atingida somente se a variedade é localmente CR-equivalente a esfera.

Sumário

1 Variedades CR do tipo hipersuperfícies **1**

1.1 Estrutura CR 1

1.2 Estruturas pseudohermitianas 5

2 Geometria diferencial das variedades pseudohermitianas **11**

2.1 Conexões pseudohermitianas 11

2.2 Curvatura pseudohermitiana 20

2.3 Mudanças na estrutura pseudohermitiana 26

2.4 Hipersuperfícies em $\mathbb{C}^{n+1}$ 32

2.4.1 A esfera CR 37

2.4.2 O grupo de Heisenberg 39

2.4.3 A transformação de Cayley 41

3 A σ_k-curvatura pseudohermitiana **43**

3.1 O tensor de Schouten pseudohermitiano 44

3.2 A σ_k-curvatura pseudohermitana 47

3.3 Divergente de $(1,1)$-tensores 51

4 O σ_k-problema de Yamabe sobre variedades CR **55**

4.1 O problema de Yamabe sobre variedades CR 55

4.2 O tensor de Cotten pseudohermitiano 59

4.3 A propriedade variacional 61

4.4 Elipticidade 66

4.5 O σ_k-problema de Yamabe sobre a esfera CR 68

4.6 Desigualdades do tipo Sobolev sobre o grupo de Heisenberg 72

4.7 A desigualdade crítica 80

Referências Bibliográficas **83**

Índice Remissivo **86**

Capítulo

1

Variedades CR do tipo hipersuperfícies

Observações de Poincaré: Seja $U \subset \mathbb{C}$ um domínio simplesmente conexo. O teorema de aplicação de Riemann diz que se $U \neq \mathbb{C}$, existe um biholomorfismo $f : D \to U$, no qual $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ é o disco unitário. Poincaré levantou a mesma questão em $\mathbb{C}^2$: dado um domínio simplesmente conexo $U \subset \mathbb{C}^2$, com $U \neq \mathbb{C}^2$, existe um biholomorfismo $f : D^2 \to U$, em que $D^2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 < 1\}$? Na investigação desse problema, Poincaré observou que devido ao teorema da aplicação de Riemann, quaisquer duas curvas simples e analíticas em $\mathbb{C}$ são localmente equivalentes, isto é, se Γ_1 e Γ_2 são duas curvas simples e analíticas em $\mathbb{C}$, dados $p_1 \in \Gamma_1$ e $p_2 \in \Gamma_2$, existe um biholomorfismo $f : U_1 \to U_2$, no qual U_1 e U_2 são vizinhanças abertas, respectivamente, de p_1 e p_2, tal que $f(\Gamma_1 \cap U_1) = \Gamma_2 \cap U_2$. Dessa maneira, se o teorema da aplicação de Riemann pudesse ser generalizado para dimensões maiores, duas hipersuperfícies em $\mathbb{C}^2$ seriam localmente equivalentes. Porém, Poincaré observou que nem todas hipersuperfícies em C^2 são localmente equivalentes, constatando que o teorema de aplicação de Riemann não pode ser generalizado para dimensões maiores. Portanto, existem invariantes geométricos, herdados da estrutura complexa de $\mathbb{C}^2$, que distinguem certas classes de hipersuperfícies. Um desses invariantes é a estrutura CR que definiremos a seguir. O problema de encontrar invariantes em $\mathbb{C}^2$ foi solucionado por Cartan [9] e, de uma maneira completamente diferente, por Moser e então generalizado para dimensões maiores por Chern e Moser [12].

1.1 Estrutura CR

Em toda tese, M denotará uma variedade suave, conexa e de dimensão $2n+1$ com $n \geq 1$.

Definição 1.1.1. *Uma **CR-estrutura** para M (ou **estrutura CR**) é um subfibrado complexificado $T_{1,0} := T_{1,0}(M) \subset \mathbb{C} \otimes T(M)$ satisfazendo:*

(i) $dim_{\mathbb{C}} T_{1,0} = m$;

(ii) $T_{1,0} \cap T_{0,1} = \{0\}$, *em que* $T_{0,1} = \overline{T}_{1,0}$.

Uma ***variedade CR*** *é uma variedade M munida de uma CR-estrutura $T_{1,0}$. Referiremos a m como dimensão CR de $(M, T_{1,0})$ e quando $m = n$ diremos que $(M, T_{1,0})$ é do tipo hipersuperfície. Diremos ainda que uma variedade CR $(M, T_{1,0})$ é* ***integrável*** *se $T_{1,0}$ é involutível, isto é, $\Gamma^\infty(T_{1,0})$ satisfaz a condição formal de Frobenius*

(iii) $[\Gamma^\infty(T_{1,0}), \Gamma^\infty(T_{1,0})] \subset \Gamma^\infty(T_{1,0})$,

em que $\Gamma^\infty(T_{1,0})$ denota a álgebra das seções suaves de $T_{1,0}$ e $[\,,]$ denota a extensão $\mathbb{C}$-bilinear o colchete de Lie.

Assumiremos que as variedades CR consideradas são integráveis e do tipo hipersuperfície. Além disso, a álgebra das seções suaves $M \to \mathbb{C} \otimes T(M)$ normalmente denotada por $\Gamma^\infty(\mathbb{C} \otimes T(M))$ será denotada simplesmente por $\mathbb{C} \otimes T(M)$ quando não houver perigo de confusão. Da mesma forma faremos para seções de $T_{1,0}$ e seções de $T_{0,1}$.

A estrutura CR determina uma distribuição de $2n$-planos reais defina por

$$H(M) = \mathrm{Re}\{\, T_{1,0} \oplus T_{0,1}\}$$

e denominada **distribuição de Levi**. $H(M)$ é gerado por campos da forma $Z + \overline{Z}$, em que $Z \in T_{1,0}$. A estrutura complexa de $\mathbb{C} \otimes T(M)$ induz um automorfismo involutivo $J : H(M) \to H(M)$, denominado **estrutura complexa** , definido por

$$J(Z + \overline{Z}) = i(Z - \overline{Z}) \tag{1.1}$$

Reciprocamente, um par (H, J), no qual H é um subfibrado real de posto $2n$ de $T(M)$ e $J : H \to H$ é um automorfismo involutivo, determina uma única CR-estrutura $T_{1,0}(M)$ tal que $H = H(M)$ e $J(Z + \overline{Z}) = i(Z - \overline{Z})$ para todo $Z \in T_{1,0}(M)$. Basta tomar

$$T_{1,0} = \{Z \in \mathbb{C} \otimes H(M) : J_{\mathbb{C}}(Z) = iZ\}$$

em que $J_{\mathbb{C}}$ denota a extensão $\mathbb{C}$-linear de J. Note que nesse caso

$$T_{0,1} = \{Z \in \mathbb{C} \otimes H(M) : J_{\mathbb{C}}(Z) = -iZ\}$$

e que

$$\mathbb{C} \otimes H = T_{1,0} \oplus T_{0,1}$$

A condição de integrabilidade para $(M, T_{1,0})$ é equivalente à

(i) $[JX, Y] + [X, JY] \in H$,

(ii) $J\,[JX, Y] + [X, JY] = [JX, JY] - [X, Y]$

para todo $X, Y \in H$.

Um morfismo na categoria das variedades CR é uma aplicação suave que preserva a estrutura CR.

Definição 1.1.2. *Uma aplicação suave* $\varphi : (M, T_{1,0}(M)) \to (N, T_{1,0}(N))$ *é dita uma* ***aplicação CR****, se*

$$d\varphi\,(T_{1,0}(M)) \subset T_{1,0}(N).$$

Equivalentemente, se $H(M)$, $H(N)$, J *e* J' *são as distribuições de Levi e as estruturas complexas de* M *e* N*, respectivamente, então* φ *é uma aplicação CR se, e somente se,*

$$d\varphi\,(H(M)) \subset H(N)$$

e

$$d\varphi \circ J = J' \circ d\varphi\ .$$

Uma **CR-equivalência** (ou CR-isomorfismo) é um difeomorfismo CR. Dizemos ainda que uma função suave complexa $f : (M, T_{1,0}) \to \mathbb{C}$ é uma **função CR-holomorfa** se $\bar{Z}f = 0$ para todo $Z \in T_{1,0}$.

O estudo de variedades CR é feito via referenciais e correferenciais locais.

Definição 1.1.3. *Um* ***referencial local*** *em* $T_{1,0}$ *é um conjunto de seções locais* $T_\alpha : U \subset M \to \mathbb{C} \otimes T(M)$*, em que* $\alpha = 1, \ldots, n$ *tal que para cada* $p \in U$, $\{T_\alpha(p) : \alpha = 1, \ldots, n\}$ *é uma base de* $T_{1,0}(p)$*. Um* ***correferencial local*** *é um conjunto de seções locais* $\theta^\alpha : U \to \mathbb{C} \otimes T^*(M)$ *que aniquilam* $T_{0,1}$ *((1,0)-formas complexas) e cujas restrições à* $T_{1,0}$ *formam uma base para* $T^*_{1,0}$*.*

Suponha que o fibrado tangente complexificado $\mathbb{C} \otimes T(M)$ admita a decomposição

$$\mathbb{C} \otimes T(M) = T_{1,0} \oplus T_{0,1} \oplus \mathbb{C}T$$

para algum campo $T \in T(M)$. Se $\{\theta^\alpha\}$ é um correferencial local tal que $T \rfloor \theta^\alpha = 0$ para qualquer $\alpha = 1, \ldots, n$, diremos que $\{\theta^\alpha\}$ é um **correferencial admissível** . Se θ é uma 1-forma real tal que $\theta(T) = 1$ e $\theta(H(M)) = 0$, então o conjunto $\left\{\theta, \theta^1, \ldots, \theta^n, \theta^{\bar{1}}, \ldots, \theta^{\bar{n}}\right\}$ é um conjunto de correferenciais para $\mathbb{C} \otimes T(M)$, no qual $\theta^{\bar{\alpha}} = \overline{\theta^\alpha}$. Denotaremos o seu referencial dual por $\{T, T_1, \ldots . T_n, T_{\bar{1}}, \ldots, T_{\bar{n}}\}$.

Adotaremos as seguintes convenções para índices:
Os Gregos $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ variam em $\{1, \ldots, n\}$, enquanto que os índices Latinos $A, B, C, \ldots$ variam em $\{0, 1, \ldots, n, \bar{1}, \ldots, \bar{n}\}$ com as convenções $T_0 = T$, $\theta^0 = \theta$ e $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$.

Um referencial (local) $\{T_\alpha\}$ determina $2n$ seções (locais) linearmente independentes em $H(M)$ definidas por

$$X_\alpha = T_\alpha + T_{\bar{\alpha}} \qquad \text{e} \qquad Y_\alpha = i\,(T_\alpha - T_{\bar{\alpha}})\,. \tag{1.2}$$

Seja $M \subset \mathbb{C}^{n+1}$ uma hipersuperfície suave. Denotemos as coordenadas de $\mathbb{C}^{n+1}$ por $z = (z^1, \ldots, z^{n+1})$, em que $z^k = x^k + iy^k$. Um referencial para $T(\mathbb{C}^{n+1})$ é dado por

$$\left\{ \frac{\partial}{\partial x^k}\,, \frac{\partial}{\partial y^k} : k = 1, \ldots, n+1 \right\}.$$

Esses referenciais induzem referenciais em $\mathbb{C} \otimes T(\mathbb{C}^{n+1})$ dados por

$$\frac{\partial}{\partial z^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^k} - i\frac{\partial}{\partial y^k}\right), \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^k} + i\frac{\partial}{\partial y^k}\right)$$

os coeficientes $1/2$ são escolhidos de tal maneira que

$$dz^l \frac{\partial}{\partial z^k} = \delta_{lk}\ ,\ d\bar{z}^l \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} = \delta_{lk}$$

onde $dz^l = dx^l + idy^l$.
Defina

$$T_{1,0} = \mathbb{C} \otimes T(M) \cap \mathrm{span}_{\mathbb{C}} \left\{\frac{\partial}{\partial z^k}\right\}$$

Claramente $T_{1,0} \cap T_{0,1} = \{0\}$. Para mostrar que $T_{1,0}$ é uma CR-estrutura para M, exibiremos explicitamente um referencial local em $T_{1,0}$.

Seja $F : U \subset \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa com $U \cap M \neq \emptyset$. Pelo teorema da função implícita, podemos supor sem perda de generalidade que

$$U \cap M = \{(z, u + iv) :\ v = \varphi(z, \bar{z}, u))\ ,\ z = (z^1, \ldots, z^n)\}$$

para alguma função suava φ. Denote por f a restrição de F à M, isto é,

$$f(z, \bar{z}, u) = F\,(\,z, u + i\varphi(z, \bar{z}, u))$$

Temos

$$\frac{\partial f}{\partial z^\alpha} = \frac{\partial F}{\partial z^\alpha} + i\frac{\partial F}{\partial z^{n+1}}\varphi_{z^\alpha}\ , \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^\alpha} = i\frac{\partial F}{\partial z^{n+1}}\varphi_{\bar{z}^\alpha} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial u} = i\frac{\partial F}{\partial z^{n+1}}\,(1 + i\varphi_u)$$

Agora seja $Z \in T_{1,0}$. Por definição, $\overline{Z}$ é uma restrição de um operador de Cauchy-Riemann gerado por $\left\{\frac{\partial f}{\partial \bar{z}^l}\right\}$ e, portanto, $\overline{Z}f = 0$. Escrevendo

$$\overline{Z} = a^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha} + a^{\bar{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha} + c\frac{\partial}{\partial u},$$

obtemos

$$\overline{Z}f = a^\alpha \frac{\partial F}{\partial z^\alpha} + \left[\,ia^\alpha \varphi_{z^\alpha} + ia^{\bar{\alpha}}\varphi_{\bar{z}^\alpha} + c(1 + i\varphi_u)\right] \frac{\partial F}{\partial u} = 0,$$

concluíndo que

$$a^\alpha = 0 \qquad \text{e} \qquad ia^{\bar{\alpha}}\varphi_{\bar{z}^\alpha} + c(1 + i\varphi_u) = 0, \text{ para todo } \alpha = 1, \ldots, n.$$

Tomando $a^{\bar{\alpha}} = 1 + i\varphi_u$, teremos $c = -i\varphi_{\bar{z}^\alpha}$. Assim, para cada $\alpha = 1, \ldots, n$,

$$Z_{\bar{\alpha}} = (1 + i\varphi_u)\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha} - i\varphi_{\bar{z}^\alpha}\frac{\partial}{\partial u} \in T_{0,1}$$

formam um conjunto linearmente independente. Portanto,

$$Z_\alpha = (1 - i\varphi_u)\frac{\partial}{\partial z^\alpha} + i\varphi_{z^\alpha}\frac{\partial}{\partial u}$$

é um referencial (local) para $(M, T_{1,0})$.

Observações:

1. O termo CR se refere a Cauchy-Riemann. Uma função suave $f : M \subset \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ que é uma restrição de uma função holomorfa satisfaz $T_{0,1}f = 0$, isto é, f é uma função CR-holomorfa. A recíproca não é verdadeira.

2. Se $f : M \to N$ é uma restrição de uma aplicação holomorfa $F : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{m+1}$, então f é uma aplicação CR. Dessa maneira, hipersuperfícies que são localmente biholomorfas, são localmente CR-equivalentes. A mesma propriedade vale globalmente e, novamente, não vale a recíproca.

3. Da identidade
$$\left[a^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha}, b^\beta \frac{\partial}{\partial z^\beta}\right] = \left(a^\alpha \frac{\partial b^\beta}{\partial z^\alpha} - b^\alpha \frac{\partial a^\beta}{\partial z^\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial z^\beta}$$
e do fato que $\mathbb{C} \otimes T(M)$ é involutivo, temos que $T_{1,0} = \mathbb{C} \otimes T(M) \cap \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\left\{\frac{\partial}{\partial z^k}\right\}$ também é involutivo. Portanto, hipersuperfícies em $\mathbb{C}^{n+1}$ são integráveis.

1.2 Estruturas pseudohermitianas

A partir deste momento suporemos que M é uma variedade CR do tipo hipersuperfície, orientável.

Seja

$$H^\perp = \{\theta \in T^*(M) : H(M) \subset \ker\theta\}.$$

$H^\perp \to M$ é um subfibrado vetorial do fibrado cotangente $T^*(M)$, denominado **fibrado de aniquiladores** da distribuição de Levi $H(M)$. Como $\dim_{\mathbb{R}} H(M) = 2n$, $H^\perp \to M$ tem posto 1 e, além disso,

$$H^\perp \cong T(M)/H(M) \quad \text{(isomorfismo de fibrados vetoriais).}$$

Como M é orientável e $H(M)$ é orientado pela estrutura complexa $J : H(M) \to H(M)$, segue que $H^\perp$ é orientável. Do fato que $H^\perp$ tem posto 1 e como M é conexa, obtemos que $H^\perp$ é trivial. Portanto, existe uma seção nunca nula $\theta : M \to T^*(M)$ tal que $\theta(H(M)) = 0$ e, nesse caso, teremos $H(M) = \ker\theta$.

Definição 1.2.1. *Uma escolha de uma 1-forma real $\theta : M \to T^*(M)$ tal que $\ker\theta = H(M)$ é denominada uma* ***estrutura pseudohermitiana*** *sobre M. Uma variedade CR munida de uma estrutura pseudohermitiana, denotada por (M, θ), é chamada uma* ***variedade pseudohermitiana****.*

Dessa maneira toda variedade CR do tipo hipersuperfície, orientável e conexa possui uma estrutura pseudohermitiana. Tal estrutura permite definir um tensor do tipo $(2,0)$ sobre $\mathbb{C}\otimes H(M)$ que, em certo sentido, desempenha sobre variedades CR um papel análogo à métrica Hermitiana para variedades complexas.

Definição 1.2.2. *A* ***forma de Levi*** *associada a θ é o 2-tensor covariante*

$$L_\theta : \mathbb{C}\otimes H(M) \times \mathbb{C}\otimes H(M) \to \mathbb{C},$$

definido por $L_\theta(X,\overline{Y}) = 2d\theta(X \wedge J_{\mathbb{C}}\overline{Y})$, no qual $J_{\mathbb{C}}$ é a extensão $\mathbb{C}$-linear da estrutura complexa $J : H(M) \to H(M)$.

Proposição 1.2.1. *A forma de Levi L_θ é simétrica sobre $\mathbb{C}\otimes H(M)$ e Hermitiana sobre $T_{1,0}(M)$.*
DEMONSTRAÇÃO*:*

1. L_θ é simétrica sobre $\mathbb{C}\otimes H(M)$. Sejam $X, Y \in T_{1,0}$. Então

$$L_\theta(X,\overline{Y}) = 2d\theta(X\wedge J_{\mathbb{C}}\overline{Y}) = -2id\theta(X\wedge\overline{Y}) = 2d\theta(\overline{Y}\wedge iX) = 2d\theta(\overline{Y}\wedge J_{\mathbb{C}}X) = L_\theta(\overline{Y},X).$$

$$L_\theta(X,Y) = 2d\theta(X\wedge J_{\mathbb{C}}Y) = 2id\theta(X\wedge Y) = 2i(X\theta Y - Y\theta X - \theta[X,Y]) = 0.$$

$$L_\theta(\overline{X},\overline{Y}) = 0.$$

2. L_θ é Hermitiana sobre $T_{1,0}(M)$. Sejam $X, Y \in T_{1,0}$. Então

$$L_\theta(X,\overline{Y}) = 2d\theta(X\wedge J_{\mathbb{C}}\overline{Y}) = 2id\theta(\overline{Y}\wedge X) = \overline{-2id\theta(Y\wedge\overline{X})} = \overline{2d\theta(Y\wedge J_{\mathbb{C}}\overline{X})} = \overline{L_\theta(Y,\overline{X})}.$$

∎

Fixado um referencial $\{T_\alpha\}$ em $(M, T_{1,0})$, denotaremos as componentes da forma de Levi associada à θ por

$$h_{AB} = L_\theta(T_A, T_B)$$

em que $A, B \in \{1,\ldots,n,\bar{1},\ldots,\bar{n}\}$. Com relação à esse referencial, L_θ possui a seguinte representação matricial

$$L_\theta : \begin{bmatrix} 0 & h_{\bar{\alpha}\beta} \\ h_{\alpha\bar{\beta}} & 0 \end{bmatrix}$$

que é uma matriz simétrica com blocos Hermitianos $h_{\alpha\bar{\beta}}$ e $h_{\bar{\alpha}\beta}$. Observe que

$$\overline{L_\theta(X,\overline{Y})} = L_\theta(Y,\overline{X}) = L_\theta(\overline{X},Y), \forall\, X, Y \in T_{1,0}.$$

Dizemos que um tensor K do tipo $(2,0)$ é um **tensor real** se ele satisfaz $\overline{K(X,Y)} = K(\overline{X},\overline{Y})$ e denotamos $\overline{K} = K$. Assim, a forma de Levi L_θ é um tensor real. Como

$h_{\alpha\bar\beta}=\overline{h_{\bar\alpha\beta}}$ e $h_{\alpha\beta}=h_{\bar\alpha\bar\beta}=0$, a geometria de L_θ fica completamente determinada quando consideramos

$$\begin{array}{rcl} L_\theta : T_{1,0}\times T_{1,0} & \rightarrow & \mathbb{C} \\ (X,\overline{Y}) & \mapsto & L_\theta(X,\overline{Y}) = -2id\theta(X\wedge\overline{Y}) \end{array}$$

cuja representação matricial é dada pelo bloco $h_{\alpha\bar\beta}$.

Se θ e $\widetilde{\theta}$ são estruturas pseudohermitianas sobre M, então $\widetilde{\theta}=f\theta$ para alguma função suave nunca nula f. Qualquer propriedade que dependa exclusivamente da CR-estrutura $T_{1,0}(M)$ e não de uma determinada escolha de uma estrutura pseudohermitiana é dita **CR-invariante**.

Definição 1.2.3. *Diremos que M é* ***estritamente pseudoconvexa*** *se existir uma estrutura pseudohermitiana θ tal que a forma de Levi sssociada L_θ é definida.*

A forma de Levi L_θ ser definida é uma propriedade CR-invariante. Com efeito, se $\widetilde{\theta}=f\theta$ é uma outra estrutura pseudohermitiana para M, então

$$d\widetilde{\theta}=df\wedge\theta+fd\theta=fd\theta \pmod{\theta}.$$

Portanto,

$$L_{\widetilde{\theta}}=fL_\theta, \tag{1.3}$$

donde $\widetilde{h}_{\alpha\bar\beta}=fh_{\alpha\bar\beta}$. Como f nunca se anula, $\widetilde{h}_{\alpha\bar\beta}$ é uma matriz definida.

Quando M é estritamente pseudoconvexa é natural orientar o fibrado $H^\perp$ dizendo que uma seção θ é positiva se L_θ é positiva definida. O $\mathbb{R}_+$-subfibrado de $H^\perp$ formado pelas seções positivas será denotado por

$$H^\perp_+=\{f\,\theta : f>0,\ \text{e } \theta \text{ positivo}\}$$

Iremos assumir daqui por diante que M é estritamente pseudoconvexa e que θ é positiva. Dessa maneira, a classe conforme de θ considerada é dada por $[\theta]=\{f\,\theta : f>0\}$. Uma estrutura pseudohermitiana $\widetilde{\theta}$ para M será dita compatível com θ (ou de mesma orientação) quando $\widetilde{\theta}\in[\theta]$.

Sejam (M,θ) e $(\widetilde{M},\widetilde{\theta})$ duas variedades pseudohermitianas. Se $\varphi: M\rightarrow\widetilde{M}$ é uma CR-equivalência, então $\varphi^*\widetilde{\theta}=f\theta$ para alguma função f. Se $f>0$, diremos que φ preserva orientação, caso contrário diremos que φ inverte a orientação. Se $\varphi^*\widetilde{\theta}=c\theta$, para alguma constante c, diremos que φ é uma **aplicação pseudohermitiana** . Quando $c=1$, diremos que φ é **isopseudohermitana**. CR-equivalências desempenham um papel semelhante ao das aplicações conformes em variedades Riemannianas. Da mesma maneira, as aplicações isopseudohermitianas são análogas às isometrias Riemannianas.

Proposição 1.2.2. *Associado à cada variedade pseudohermitiana (M, θ), existe um único campo vetorial $T : M \to T(M)$ denominado **direção característica** de $d\theta$ tal que*

$$\theta(T) = 1 \;,\; T \rfloor d\theta = 0 \tag{1.4}$$

Dessa maneira, T é transverso à distribuição de Levi $H(M)$.

Demonstração: Sejam $X_\alpha = T_\alpha + T_{\bar{\alpha}}$ e $Y_\alpha = i(T_\alpha - T_{\bar{\alpha}})$, no qual $\{T_\alpha\}$ é um referencial local de $(M, T_{1,0})$. Temos

$$L_\theta(X_\alpha, X_\alpha) = L_\theta(T_\alpha + T_{\bar{\alpha}}, T_\alpha + T_{\bar{\alpha}}) = 2h_{\alpha\bar{\alpha}},$$

$$L_\theta(Y_\alpha, Y_\alpha) = L_\theta(i(T_\alpha - T_{\bar{\alpha}}), -i(T_\alpha - T_{\bar{\alpha}})) = 2h_{\alpha\bar{\alpha}}.$$

Como L_θ é definida, segue que L_θ é não degenerada sobre $H(M)$. Esse fato garante a existência de um campo T satisfazendo

$$\theta(T) = 1 \;,\; T \rfloor d\theta = 0.$$

∎

Como conseqüência dessa proposição, obtemos as decomposições em soma direta

$$T(M) = H(M) \oplus \mathbb{R}T,$$

$$\mathbb{C} \otimes T(M) = T_{1,0}(M) \oplus T_{0,1}(M) \oplus \mathbb{C}T.$$

A forma de Levi se estende à $\mathbb{C} \otimes T(M)$ de duas maneiras naturais. Uma maneira é uma extensão à um (2,0)-tensor degenerado definido por

$$L_\theta(T, \overline{Z}) = d\theta(T \wedge J_{\mathbb{C}}\overline{Z}) = 0,$$

$$L_\theta(Z, T) = d\theta(X \wedge J(T)) = 0$$

para qualquer $Z \in \mathbb{C} \otimes T(M)$, no qual definimos $J(T) = 0$. A outra maneira é a extensão definida por

$$g_\theta(T, T) = 1,$$

$$g_\theta(Z, T) = g_\theta(T, Z) = 0$$

para todo $Z \in \mathbb{C} \otimes H(M)$.

Definição 1.2.4. *A extensão g_θ determina uma métrica Riemanniana sobre M denominada **métrica de Webster**. Se $\pi_H : T(M) \to H(M)$ é a projeção dada pela decom-*

posição $T(M) = H(M) \oplus \mathbb{R}T$, *podemos escrever*

$$g_\theta = \pi_H L_\theta + \theta \otimes \theta.$$

A métrica de Webster não é CR-invariante, isto é, se $\widetilde{\theta}$ e θ estão na mesma classe conforme, $g_{\widetilde{\theta}}$ e g_θ não são necessariamente conformes.

Proposição 1.2.3. *Se* $\{\theta^\alpha\}$ *é um correferencial admissível para* (M, θ)*, então*

$$d\theta = ih_{\alpha\bar{\beta}}\,\theta^\alpha \wedge \theta^{\bar{\beta}} \tag{1.5}$$

Demonstração: Podemos escrever

$$d\theta = a_{0B}\theta \wedge \theta^B + a_{\alpha\beta}\theta^\alpha \wedge \theta^\beta + a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\theta^{\bar{\alpha}} \wedge \theta^{\bar{\beta}} + a_{\alpha\bar{\beta}}\theta^\alpha \wedge \theta^{\bar{\beta}}$$

Se $\{T_\alpha\}$ é o referencial dual à $\{\theta^\alpha\}$, então

$$d\theta(T \wedge T_A) = a_{0A} = 0,$$

$$d\theta(T_\gamma \wedge T_\sigma) = a_{\gamma\sigma} = 0,$$

$$d\theta(T_{\bar{\gamma}} \wedge T_{\bar{\sigma}}) = a_{\bar{\gamma}\bar{\sigma}} = 0,$$

donde

$$d\theta = a_{\alpha\bar{\beta}}\theta^\alpha \wedge \theta^\beta.$$

Agora,

$$L_\theta(T_\gamma, T_{\bar{\sigma}}) = -2id\theta(T_\gamma \wedge T_{\bar{\sigma}}) = -ia_{\gamma\bar{\sigma}}.$$

Portanto,

$$a_{\gamma\bar{\sigma}} = ih_{\gamma\bar{\sigma}}.$$

∎

Proposição 1.2.4. *Se* (M, θ) *é estritamente pseudoconvexa,* θ *é uma forma de contato.*

Demonstração: Da proposição anterior,

$$d\theta = ih_{\alpha\bar{\beta}}\theta^\alpha \wedge \theta^{\bar{\beta}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned} d\theta^n &= i^n h_{\alpha_1\bar{\beta}_1} \ldots h_{\alpha_n\bar{\beta}_n}\theta^{\alpha_1} \wedge \theta^{\bar{\beta}_1} \ldots \theta^{\alpha_n} \wedge \theta^{\bar{\beta}_n} \\ &= i^n(-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} h_{\alpha_1\bar{\beta}_1} \ldots h_{\alpha_n\bar{\beta}_n}\theta^{\alpha_1} \wedge \theta^{\alpha_n} \ldots \theta^{\bar{\beta}_1} \wedge \theta^{\bar{\beta}_n} \\ &= i^n i^{n(n-1)} n! \det(h_{\alpha\bar{\beta}})\theta^1 \wedge \theta^n \ldots \theta^{\bar{1}} \wedge \theta^{\bar{n}}. \end{aligned}$$

Logo

$$\theta \wedge d\theta^n = i^{n^2} n! \det(h_{\alpha\bar{\beta}}) \theta \wedge \theta^1 \wedge \theta^n \ldots \theta^{\bar{1}} \wedge \theta^{\bar{n}}.$$

Como $h_{\alpha\bar{\beta}}$ é definida, $\det(h_{\alpha\bar{\beta}}) \neq 0$. Consequentemente, $\theta \wedge d\theta^n \neq 0$. ∎

Definição 1.2.5. *O **elemento de volume** da variedade pseudohermitiana (M, θ) é a forma*

$$dV_\theta = \theta \wedge d\theta^n$$

e seu volume é denotado por

$$Vol(M, \theta) = \int_M dV_\theta$$

O elemento de volume é CR-invariante. De fato, se $\widetilde{\theta} = f\theta$, então

$$d\widetilde{\theta} = f d\theta \mod \theta.$$

Logo,

$$d\widetilde{\theta}^n = f^n d\theta^n \mod \theta.$$

Assim,

$$\widetilde{\theta} \wedge d\widetilde{\theta}^n = f\theta \wedge f^n d\theta^n \mod \theta,$$

portanto,

$$dV_{\widetilde{\theta}} = f^{n+1} dV_\theta. \tag{1.6}$$

Capítulo

2

Geometria diferencial das variedades pseudohermitianas

2.1 Conexões pseudohermitianas

Seja (M, θ) uma variedade pseudohermitiana (estritamente pseudoconvexa). Considere a decomposição em soma direta

$$\mathbb{C} \otimes T(M) = T_{1,0} \oplus T_{0,1} \oplus \mathbb{C}T$$

com projeções associadas

$$\pi_+ : \mathbb{C} \otimes T(M) \to T_{1,0} \qquad \text{e} \qquad \pi_- : \mathbb{C} \otimes T(M) \to T_{0,1}$$

Dada uma conexão linear $\nabla : \mathbb{C} \otimes T(M) \times \mathbb{C} \otimes T(M) \to \mathbb{C} \otimes T(M)$, denote por T_∇ sua torção, isto é,

$$T_\nabla(Z, W) = \nabla_Z W - \nabla_W Z - [Z, W], \ \forall\ Z, W \in \mathbb{C} \otimes T(M).$$

Note que T_∇ é um tensor do tipo (2,1) com $T_\nabla(Z, W) = -T_\nabla(W, Z)$. Diremos que a torção T_∇ é **pura** se

$$\pi_+ T_\nabla(Z, W) = 0, \ \forall\ Z \in T_{1,0}\ ,\ W \in \mathbb{C} \otimes T(M).$$

O matemático N. Tanaka, em seu trabalho [39], mostrou que associada à uma estrutura pseudohermitiana não-degenerada θ, existe uma única conexão linear ∇ real ($\overline{\nabla} = \nabla$) que satisfaz os seguintes axiomas:

(T1) A distribuição de Levi é paralela com respeito à∇; isto é, $\nabla H(M) \subset H(M)$

(T2) $\nabla J = 0;$

(T3) $\nabla g_\theta = 0;$

(T4) T_∇ é pura.

Definição 2.1.1. *A conexão linear real $\nabla : \mathbb{C} \otimes T(M) \times \mathbb{C} \otimes T(M) \to \mathbb{C} \otimes T(M)$ que satisfaz os axiomas **(T1)-(T4)** é denominada **conexão pseudohermitiana** (associada à θ).*

Proposição 2.1.1. *Se ∇ é a conexão pseudohermitiana de (M, θ), então*

(2.1) $\nabla T_{1,0} \subset T_{1,0}\ ,\ \nabla T_{0,1} \subset T_{0,1}.$

(2.2) $\nabla T = 0.$

DEMONSTRAÇÃO:

1. Seja $Z \in T_{1,0}$. Então, $Z = X - iJX$ para algum $X \in H(M)$. Assim, para qualquer $W \in \mathbb{C} \otimes T(M)$, temos

$$\nabla_W Z = \nabla_W (X - iJX) = \nabla_W X - i\nabla_W JX.$$

Por **(T2)**,

$$\nabla J(X, W) = \nabla_W JX - J\nabla_W X = 0,$$

donde

$$\nabla_W Z = \nabla_W X - iJ\nabla_W X.$$

Por **(T1)**, obtemos que $\nabla_W Z \in T_{1,0}$. Como $\overline{\nabla} = \nabla$, segue também que $\nabla_W \overline{Z} \in T_{0,1}$.

2. A condição **(T3)** implica que

$$Xg_\theta(T, Y) = g_\theta(\nabla_X T, Y) + g_\theta(T, \nabla_X Y)$$

para quaisquer $X, Y \in T(M)$. Se $Y \in H(M)$, então

$$g_\theta(\nabla_X T, Y) = -g_\theta(T, \nabla_X Y) + Xg_\theta(T, Y) = -\theta(\nabla_X Y)T$$

Por **(T1)**, obtemos $g_\theta(\nabla_X T, Y) = 0$. Logo, $\pi_H \nabla_X T = 0$. Por outro lado, tomando $Y = T$, obtemos

$$Xg_\theta(T, T) = g_\theta(\nabla_X T, T) + g_\theta(T, \nabla_X T)$$

donde
$$\theta(\nabla_X T) = 0.$$
Logo, $\nabla_X T = 0$ para qualquer X. ∎

Como conseqüência dessa proposição podemos fazer a seguinte definição.

Definição 2.1.2. *Seja $\{T_\alpha\}$ um referencial em (M,θ). Existem únicas 1-formas complexas $\omega_\alpha{}^\beta : T^*(M) \to \mathbb{C}$ tais que*

$$\nabla T_\alpha = \omega_\alpha{}^\beta \otimes T_\beta \tag{2.3}$$

*denominadas **1-formas de conexão** de ∇. Analogamente, definimos*

$$\nabla T_{\bar{\alpha}} = \omega_{\bar{\alpha}}{}^{\bar{\beta}} \otimes T_{\bar{\beta}}. \tag{2.4}$$

Como $\overline{\nabla} = \nabla$, temos que $\overline{\omega_\alpha{}^\beta} = \omega_{\bar{\alpha}}{}^{\bar{\beta}}$. Para facilitar a notação, definimos ainda as 1-formas triviais

$$\omega_0{}^A = \omega_\alpha{}^{\bar{\beta}} = \omega_{\bar{\alpha}}{}^\beta = 0. \tag{2.5}$$

*Definimos também os **símbolos de Christoffel** da conexão ∇ por*

$$\begin{aligned} \Gamma^\gamma_{A\beta} &= \omega_\beta{}^\gamma(T_A), \\ \Gamma^{\bar{\gamma}}_{A\bar{\beta}} &= \omega_{\bar{\beta}}{}^{\bar{\gamma}}(T_A), \\ \Gamma^B_{A0} &= \Gamma^\gamma_{A\bar{\beta}} = \Gamma^{\bar{\gamma}}_{A\beta} = 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Em particular,

$$\begin{aligned} \nabla_{T_A} T_\beta &= \omega_\beta{}^\gamma(T_A) T_\gamma = \Gamma^\gamma_{A\beta} T_\gamma, \\ \nabla_{T_A} T_{\bar{\beta}} &= \omega_{\bar{\beta}}{}^{\bar{\gamma}}(T_A) T_\gamma = \Gamma^{\bar{\gamma}}_{A\bar{\beta}} T_\gamma, \\ \nabla_{T_A} T &= 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Observe que a existência das 1-formas de conexão independe do axioma **(T4)**. Esse axioma, como já é de se esperar, está fortemente ligado à torção da conexão pseudohermitiana. Essa conexão, ao contrário da conexão de Levi-Cevita associada à uma métrica Riemanniana, não é livre de torção.

Proposição 2.1.2. *Para quaisquer $Z, W \in T_{1,0}$, temos*

$$T_\nabla(Z, W) = 0; \tag{2.8}$$

$$T_\nabla(Z, \overline{W}) = -\frac{i}{2} L_\theta(Z, \overline{W}) T. \tag{2.9}$$

Além disso, definindo $\tau(Z) = T_\nabla(T, Z)$, $\forall\, Z \in \mathbb{C} \otimes T(M)$, *obtemos*

$$\tau \circ J_{\mathbb{C}} + J_{\mathbb{C}} \circ \tau = 0, \tag{2.10}$$

no qual $J_{\mathbb{C}}$ *denota a extensão* $\mathbb{C}$*-linear de* $J : H(M) \to H(M)$ *com* $J(T) = 0$.

Demonstração: Sejam $Z, W \in T_{1,0}$

1. De **(T4)** e (2.1), temos

$$0 = \pi_+ T_\nabla(Z, W) = \pi_+(\nabla_Z W - \nabla_W Z - [Z, W]) = \nabla_Z W - \nabla_W Z - [Z, W] = T_\nabla(Z, W)$$

2. Agora,

$$\begin{aligned}
T_\nabla(Z, \overline{W}) &= \nabla_Z \overline{W} - \nabla_{\overline{W}} Z - [Z, \overline{W}] \\
&= \nabla_Z \overline{W} - \nabla_{\overline{W}} Z - \big(\pi_+[Z, \overline{W}] + \pi_-[Z, \overline{W}] + \theta[Z, \overline{W}]T\big) \\
&= \big(\nabla_Z \overline{W} - \pi_-[Z, \overline{W}]\big) + \big(-\nabla_{\overline{W}} Z - \pi_-[Z, \overline{W}]\big) - \theta[Z, \overline{W}]T \\
&= \pi_-(\nabla_Z \overline{W} - [Z, \overline{W}]) + \pi_+(-\nabla_{\overline{W}} Z - [Z, \overline{W}]) + d\theta(Z \wedge \overline{W})T \\
&= \pi_- T_\nabla(Z, \overline{W}) + \pi_+ T_\nabla(Z, \overline{W}) + d\theta(Z \wedge \overline{W})T.
\end{aligned}$$

Como

$$\pi_- T_\nabla(Z, \overline{W}) = -\pi_- T_\nabla(\overline{W}, Z) = -\pi_- \overline{T_\nabla(W, \overline{Z})} = -\pi_+ T_\nabla(W, \overline{Z}),$$

novamente de **(T4)**, encontramos

$$T_\nabla(Z, \overline{W}) = d\theta(Z \wedge \overline{W})T.$$

3. Sejam $X \in H(M)$ e $Y \in T(M)$. De **(T4)**, temos

$$\pi_+ T_\nabla(X - iJX, Y) = \pi_+ \left(T_\nabla(X, Y) - iT_\nabla(JX, Y)\right) = 0,$$

donde

$$\begin{aligned}
\pi_+ \left(JT_\nabla(X, Y) + T_\nabla(JX, Y)\right) &= \pi_+ JT_\nabla(X, Y) + \pi_+ T_\nabla(JX, Y) \\
&= \pi_+ iT_\nabla(X, Y) + \pi_+ T_\nabla(JX, Y) \\
&= i\pi_+(T_\nabla(X, Y) - iT_\nabla(JX, Y)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Analogamente, temos

$$\pi_-(JT_\nabla(X, Y) + T_\nabla(JX, Y)) = 0.$$

Note também que

$$\begin{aligned} \theta(JT_\nabla(X,Y)+T_\nabla(JX,Y)) &= \theta(JT_\nabla(X,Y))+\theta(T_\nabla(JX,Y)) \\ &= \theta(T_\nabla(JX,Y))\,. \end{aligned}$$

Portanto,

$$JT_\nabla(X,Y)+T_\nabla(JX,Y)=\theta(T_\nabla(JX,Y))T.$$

Tomando $Y=T$, obtemos

$$JT_\nabla(T,X)+T_\nabla(T,JX)=\theta(T_\nabla(T,JX))T,$$

donde

$$\tau\circ J+J\circ\tau=\theta(T_\nabla(T,JX))T.$$

Mas de (2.1) e (2.2) deduzimos que

$$\begin{aligned} \theta(T_\nabla(T,JX)) &= \theta(\nabla_T JX-\nabla_{JX}T-[\,T,JX]) \\ &= \theta(\nabla_T JX-[\,T,JX]) \\ &= -\theta[T,JX] \\ &= d\theta(T\wedge JX) \\ &= 0. \end{aligned}$$

∎

Definição 2.1.3. *O tensor $\tau:\mathbb{C}\otimes T(M)\to\mathbb{C}\otimes T(M)$ definido por $\tau(Z)=T_\nabla(T,Z)$ é denominado* ***torção pseudohermitiana*** *(associada à θ).*

Segue de (2.10) que

$$J(\tau(Z))=-\tau(J_{\mathbb{C}}(Z))=-i\tau(Z),\ \forall\ Z\in T_{1,0}.$$

Portanto, $\tau(Z)\in T_{0,1}$. Analogamente, temos $\tau(\overline{Z})\in T_{1,0}$. Dessa maneira, se $\{\,\theta^\alpha\}$ é um correferencial admissível para (M,θ) com dual $\{\,T_\alpha\}$, podemos escrever

$$\tau=A^\gamma{}_{\bar\alpha}\theta^{\bar\alpha}\otimes T_\gamma+A^{\bar\gamma}{}_\alpha\theta^\alpha\otimes T_{\bar\gamma} \tag{2.11}$$

Como τ é real, temos $\overline{A^\gamma{}_{\bar\alpha}}=A^{\bar\gamma}{}_\alpha$.

Definição 2.1.4. *As 1-formas complexas $\tau^\gamma=A^\gamma{}_{\bar\alpha}\theta^{\bar\alpha}$ são denominadas* ***1-formas de torção*** *da conexão pseudohermitiana ∇.*

Como usualmente é feito na geometria Riemanniana, utilizaremos as matrizes Hermitianas $h_{\alpha\bar{\beta}}$ e $h^{\alpha\bar{\beta}} := [h_{\alpha\bar{\beta}}]^{-1}$ para subir e descer índices. Por exemplo:

$$\tau_\alpha = \tau^{\bar{\gamma}} h_{\alpha\bar{\gamma}} = A^{\bar{\gamma}}{}_{\beta} h_{\alpha\bar{\gamma}} \theta^\beta = A_{\alpha\beta}\theta^\beta$$

$$\tau_{\bar{\alpha}} = \tau^{\gamma} h_{\gamma\bar{\alpha}} = A^{\gamma}{}_{\bar{\beta}} h_{\gamma\bar{\alpha}} \theta^{\bar{\beta}} = A_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\theta^{\bar{\beta}}$$

Observe que novamente $\overline{A_{\alpha\beta}} = A_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$.

Vamos agora caracterizar as 1-formas de conexão e 1-formas de torção de uma conexão pseudohermitiana conforme Webster [46].

Proposição 2.1.3. *Seja $\{\theta^\alpha\}$ um correferencial admissível para (M,θ). As 1-formas de conexão $\omega_\alpha{}^\beta$ e as 1-formas de torção τ^α satisfazem as equações*

$$\begin{array}{ll} \textbf{\textit{(W1)}} & d\theta^\alpha = \theta^\gamma \wedge \omega_\gamma{}^\alpha + \theta \wedge \tau^\alpha; \\ \textbf{\textit{(W2)}} & dh_{\alpha\bar{\beta}} = \omega_{\alpha\bar{\beta}} + \omega_{\bar{\beta}\alpha}. \end{array}$$

Demonstração:

(W1). Dados $X, Y \in \mathbb{C} \otimes T(M)$, temos

$$d\theta^\alpha(X \wedge Y) = X\theta^\alpha Y - Y\theta^\alpha X - \theta^\alpha[X,Y].$$

Como $T_\nabla(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$, obtemos

$$d\theta^\alpha(X \wedge Y) = X\theta^\alpha Y - Y\theta^\alpha X - \theta^\alpha \nabla_X Y + \theta^\alpha \nabla_Y X + \theta^\alpha T_\nabla(X,Y).$$

Escrevendo $X = X^A T_A,\ Y = Y^B T_B$, encontramos

$$\nabla_X Y = X^A Y^B \omega_B{}^C(T_A) T_C + X\theta^B Y T_B,$$

$$\nabla_Y X = X^A Y^B \omega_A{}^C(T_B) T_C + Y\theta^A X T_A,$$

donde

$$\theta^\alpha \nabla_X Y = X^A Y^B \omega_B{}^\alpha(T_A) + X\theta^\alpha Y,$$

$$\theta^\alpha \nabla_Y X = X^A Y^B \omega_A{}^\alpha(T_B) + Y\theta^\alpha X.$$

Assim,

$$\begin{aligned} d\theta^\alpha(X \wedge Y) &= X^A Y^B \omega_A{}^\alpha(T_B) - X^A Y^B \omega_B{}^\alpha(T_A) + \theta^\alpha T_\nabla(X,Y) \\ &= X^\gamma Y^B \omega_\gamma{}^\alpha(T_B) - X^A Y^\gamma \omega_\gamma{}^\alpha(T_A) + \theta^\alpha T_\nabla(X,Y) \\ &= \theta^\gamma(X)\omega_\gamma{}^\alpha(Y) - \theta^\gamma(Y)\omega_\gamma{}^\alpha(X) + \theta^\alpha T_\nabla(X,Y) \\ &= \theta^\gamma \wedge \omega_\gamma{}^\alpha(X \wedge Y) + \theta^\alpha T_\nabla(X,Y). \end{aligned}$$

Como $T_\nabla(Z,W)=0$, para todo $Z,W\in T_{1,0}$, obtemos

$$\begin{aligned}
T_\nabla(X,Y) &= X^AY^BT_\nabla(T_A,T_B)\\
&= X^0Y^\beta T_\nabla(T,T_\beta)+X^0Y^{\bar\beta}T_\nabla(T,T_{\bar\beta})+X^\alpha Y^0T_\nabla(T_\alpha,T)\\
&\quad +X^\alpha Y^{\bar\beta}T_\nabla(T_\alpha,T_{\bar\beta})+X^{\bar\alpha}Y^0T_\nabla(T_{\bar\alpha},T)+X^{\bar\alpha}Y^\beta T_\nabla(T_{\bar\alpha},T_\beta).
\end{aligned}$$

Como $T_\nabla(Z,\overline{W})=-\frac{i}{2}L_\theta(Z,\overline{W})T$, para todo $Z,W\in T_{1,0}$, derivamos

$$\begin{aligned}
\theta^\alpha T_\nabla(X,Y) &= X^0Y^\beta\theta^\alpha T_\nabla(T,T_\beta)+X^0Y^{\bar\beta}\theta^\alpha T_\nabla(T,T_{\bar\beta})\\
&\quad +X^\alpha Y^0\theta^\alpha T_\nabla(T_\alpha,T)+X^{\bar\alpha}Y^0\theta^\alpha T_\nabla(T_{\bar\alpha},T)\\
&= \theta(X)\theta^\alpha(\tau(Y))-\theta(Y)\theta^\alpha(\tau(X))\\
&= \theta(X)\tau^\alpha(Y)-\theta(Y)\tau^\alpha(X)\\
&= \theta\wedge\tau^\alpha(X\wedge Y).
\end{aligned}$$

Logo, $d\theta^\alpha=\theta^\gamma\wedge\omega_\gamma{}^\alpha+\theta\wedge\tau^\alpha$.
(W2). Da condição **(T3)**, obtemos

$$T_Cg_\theta(T_\alpha,T_{\bar\beta})=g_\theta(\nabla_{T_C}T_\alpha,T_{\bar\beta})+g_\theta(T_\alpha,\nabla_{T_C}T_{\bar\beta})$$

Daí,

$$\begin{aligned}
dh_{\alpha\bar\beta}(T_C) &= T_Ch_\theta(T_\alpha,T_{\bar\beta})\\
&= L_\theta(\nabla_{T_C}T_\alpha,T_{\bar\beta})+L_\theta(T_\alpha,\nabla_{T_C}T_{\bar\beta})\\
&= L_\theta(\omega_\alpha{}^\gamma(T_C)T_\gamma,T_{\bar\beta})+L_\theta(T_\alpha,\omega_{\bar\beta}{}^{\bar\gamma}(T_C)T_{\bar\gamma})\\
&= \omega_\alpha{}^\gamma(T_C)h_{\gamma\bar\beta}+\omega_{\bar\beta}{}^{\bar\gamma}(T_C)h_{\alpha\bar\gamma}\\
&= \omega_{\bar\beta\alpha}(T_C)+\omega_{\alpha\bar\beta}(T_C)\\
&= (\omega_{\bar\beta\alpha}+\omega_{\alpha\bar\beta})(T_C).
\end{aligned}$$

Logo, $dh_{\alpha\bar\beta}=\omega_{\bar\beta\alpha}+\omega_{\alpha\bar\beta}$. ∎

Em [46], Webster mostrou que existem únicas 1-formas complexas $\omega_\alpha{}^\beta$ e τ^α satisfazendo **(W1)** e **(W2)**. Webster mostrou que essas 1-formas determinam uma conexão linear em $T_{1,0}$. Por unicidade, as conexões obtidas por Tanaka e por Webster coincidem. Alguns autores se referem à conexão pseudohermitiana como conexão de Tanaka-Webster, conexão de Tanaka ou conexão de Webster.

Proposição 2.1.4. *As componentes da 1-forma de torção $\tau_\alpha=A_{\alpha\beta}\theta^\beta$ satisfazem*

(2.12) $$A_{\alpha\beta}=A_{\beta\alpha}.$$

Demonstração: Sabemos que

$$-id\theta = h_{\alpha\bar{\beta}}\theta^{\alpha} \wedge \theta^{\bar{\beta}}$$

Daí,

$$0 = -id^2\theta = dh_{\alpha\bar{\beta}} \wedge \theta^{\alpha} \wedge \theta^{\bar{\beta}} + h_{\alpha\bar{\beta}}\, d\theta^{\alpha} \wedge \theta^{\bar{\beta}} - h_{\alpha\bar{\beta}}\, \theta^{\alpha} \wedge d\theta^{\bar{\beta}}$$

Substituindo **(W1)** e **(W2)** nessa identidade obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= (\omega_{\alpha\bar{\beta}} + \omega_{\bar{\beta}\alpha}) \wedge \theta^{\alpha} \wedge \theta^{\bar{\beta}} + h_{\alpha\bar{\beta}}(\theta^{\gamma} \wedge \omega_{\gamma}{}^{\alpha} + \theta \wedge \tau^{\alpha}) \wedge \theta^{\bar{\beta}} \\ &\quad -h_{\alpha\bar{\beta}}\, \theta^{\alpha} \wedge (\theta^{\bar{\gamma}} \wedge \omega_{\bar{\gamma}}{}^{\bar{\beta}} + \theta \wedge \tau^{\bar{\beta}}) \\ &= \omega_{\alpha\bar{\beta}} \wedge \theta^{\alpha} \wedge \theta^{\bar{\beta}} - \omega_{\bar{\gamma}\alpha} \wedge \theta^{\alpha} \wedge \theta^{\bar{\gamma}} + \omega_{\bar{\beta}\alpha} \wedge \theta^{\alpha} \wedge \theta^{\bar{\beta}} \\ &\quad -\omega_{\gamma\bar{\beta}} \wedge \theta^{\gamma} \wedge \theta^{\bar{\beta}} + \tau_{\bar{\beta}} \wedge \theta^{\bar{\beta}} \wedge \theta - \tau_{\alpha} \wedge \theta^{\alpha} \wedge \theta \\ &= A_{\bar{\beta}\bar{\gamma}} \wedge \theta^{\bar{\gamma}} \wedge \theta^{\bar{\beta}} \wedge \theta - A_{\beta\gamma} \wedge \theta^{\gamma} \wedge \theta^{\beta} \wedge \theta \end{aligned}$$

Assim,

$$A_{\beta\gamma} \wedge \theta^{\gamma} \wedge \theta^{\beta} \wedge \theta = A_{\bar{\beta}\bar{\gamma}} \wedge \theta^{\bar{\gamma}} \wedge \theta^{\bar{\beta}} \wedge \theta$$

Calculando em (T_σ, T_ρ, T), obtemos

$$A_{\sigma\rho} - A_{\rho\sigma} = 0,$$

como queríamos demonstrar. ∎

Se $T^{A_1 \ldots A_n}_{B_1 \ldots B_n}$ são as componentes de um tensor T do tipo (k, l), sua r-ésima derivada covariante $\nabla^r T$ é o tensor do tipo $(k + r, l)$ com componentes que denotaremos por $T^{A_1 \ldots A_n}_{B_1 \ldots B_n; C_1 \ldots C_r}$. Para derivadas de funções escalares omitiremos o ponto e vírgula.

Alguns cálculos envolvendo derivadas covariantes se tornam razoavelmente simples quando escolhemos um correferencial especial em uma vizinhança de um ponto $P \in M$.

Proposição 2.1.5. *Existe um correferencial $\{\theta^\alpha\}$ em uma vizinhança de qualquer ponto $P \in M$ que satisfaz $\omega^\beta_\alpha = 0$ em P.*

Demonstração: Se tomarmos um correferencial qualquer $\{\theta^\alpha_P\}$ em P e estendermos paralelamente ao longo das geodésicas da conexão pseudohermitiana, obteremos um correferencial local $\{\theta^\alpha\}$ suave em uma vizinhança de P que satisfaz $\omega^\beta_\alpha = 0$ em P. Se $\{\theta^\alpha_P\}$ for admissível em P, então $\{\theta^\alpha\}$ será admissível, pois $\nabla T = 0$ e $\nabla J = 0$. Além disso, como $\nabla g_\theta = 0$, teremos $\nabla d\theta = 0$. Como $d\theta = ih_{\alpha\bar{\beta}}\theta^\alpha \wedge \theta^\beta$, a matriz $h_{\alpha\bar{\beta}}$ é constante nesse referencial. ∎

Definição 2.1.5. *Um referencial local $\{T_\alpha\}$ em torno de um ponto $P \in M$ tal que*

1. *$\omega^\beta_\alpha = 0$ em P;*

2. $h_{\alpha\bar\beta} = \delta_{\alpha\bar\beta}$.

será denominado ***referencial pseudohermitiano*** *em torno de P. O correferencial admissível dual $\{\theta^\alpha\}$ será denominado* ***correferencial pseudohermitiano*** *(em torno de P).*

A proposição anterior afirma que existe um referencial e um correferencial pseudohermitiano em torno de qualquer ponto $P \in M$. A partir deste momento fica subtendido que todo referencial e todo correferencial considerado será pseudohermitiano, salvo mencionado o contrário.

Para uma função real f sobre M, denotaremos

$$f_\alpha = T_\alpha f,\ f_{\bar\alpha} = T_{\bar\alpha} f,\ f_0 = Tf$$

de modo que

$$\nabla f = df = f_\alpha \theta^\alpha + f_{\bar\alpha}\theta^{\bar\alpha} + f_0\theta. \tag{2.13}$$

A segunda derivada covariante de f, denotada $\nabla^2 f$ e também denominada $(1,1)$-**Hessiana complexa**, é um $(2,0)$-tensor com componentes

$$\begin{aligned}
f_{\alpha\beta} &= T_\beta T_\alpha f - \omega_\alpha{}^\gamma(T_\beta)T_\gamma f;\\
f_{\bar\alpha\bar\beta} &= \overline{f_{\alpha\beta}};\\
f_{\alpha\bar\beta} &= T_{\bar\beta} T_\alpha f - \omega_\alpha{}^\gamma(T_{\bar\beta})T_\gamma f;\\
f_{\bar\alpha\beta} &= \overline{f_{\alpha\bar\beta}};\\
f_{\alpha 0} &= TT_\alpha f - \omega_\alpha{}^\gamma(T)T_\gamma f;\\
f_{\bar\alpha 0} &= \overline{f_{\alpha 0}};\\
f_{0\beta} &= T_\beta T f;\\
f_{0\bar\beta} &= \overline{f_{0\beta}};\\
f_{00} &= T^2 f.
\end{aligned}$$

Observe que em relação à um referencial pseudohermitiano em torno de P, as derivadas covariantes em P são iguais às derivadas ordinárias. Iremos utilizar esse fato para obter algumas identidades.

Proposição 2.1.6. *As componentes da segunda derivada covariante $\nabla^2 f$ satisfazem:*

$$f_{\alpha\bar\beta} = f_{\bar\beta\alpha} + ih_{\alpha\bar\beta}f_0, \tag{2.14}$$

$$f_{\alpha\beta} = f_{\beta\alpha}, \tag{2.15}$$

$$f_{0\alpha} = f_{\alpha 0} + A_{\alpha\gamma}f^\gamma. \tag{2.16}$$

Demonstração: Derivando $df = f_\alpha \theta^\alpha + f_{\bar\alpha}\theta^{\bar\alpha} + f_0\theta$, obtemos

$$0 = d^2 f = df_\alpha \wedge \theta^\alpha + f_\alpha d\theta^\alpha + df_{\bar\alpha} \wedge \theta^{\bar\alpha} + f_{\bar\alpha} d\theta^{\bar\alpha} + df_0 \wedge \theta + f_0 d\theta.$$

Em P, temos

$$\begin{aligned} df_\alpha &= f_{\alpha 0}\theta + f_{\alpha\gamma}\theta^\gamma + f_{\alpha\bar\gamma}\theta^{\bar\gamma}, \\ d\theta^\alpha &= \theta \wedge A^\alpha{}_{\bar\gamma}\theta^{\bar\gamma}, \\ df_{\bar\alpha} &= f_{\bar\alpha 0}\theta + f_{\bar\alpha\gamma}\theta^\gamma + f_{\bar\alpha\bar\gamma}\theta^{\bar\gamma}, \\ d\theta^{\bar\alpha} &= \theta \wedge A^{\bar\alpha}{}_\gamma \theta^\gamma, \\ df_0 &= f_{00}\theta + f_{0\gamma}\theta^\gamma + f_{0\bar\gamma}\theta^{\bar\gamma}, \\ d\theta &= i h_{\alpha\bar\beta}\theta^\alpha \wedge \theta^{\bar\beta}. \end{aligned}$$

Substituindo essas igualdades na derivada acima, encontramos

$$\begin{aligned} 0 &= (f_{\alpha 0}\theta \wedge \theta^\alpha + f_{\alpha\gamma}\theta^\gamma \wedge \theta^\alpha + f_{\alpha\bar\gamma}\theta^{\bar\gamma} \wedge \theta^\alpha) + (f_\alpha A^\alpha{}_{\bar\gamma}\theta \wedge \theta^{\bar\gamma}) \\ &\quad +(f_{\bar\alpha 0}\theta \wedge \theta^{\bar\alpha} + f_{\bar\alpha\gamma}\theta^\gamma \wedge \theta^{\bar\alpha} + f_{\bar\alpha\bar\gamma}\theta^{\bar\gamma} \wedge \theta^{\bar\alpha}) + (f_{\bar\alpha} A^{\bar\alpha}{}_\gamma \theta \wedge \theta^\gamma) \\ &\quad +(f_{00}\theta \wedge \theta + f_{0\gamma}\theta^\gamma \wedge \theta + f_{0\bar\gamma}\theta^{\bar\gamma} \wedge \theta) + (i f_0 h_{\alpha\bar\beta}\theta^\alpha \wedge \theta^{\bar\beta}). \end{aligned}$$

Observando que $f_\alpha A^\alpha{}_{\bar\gamma} = f^{\bar\beta} h_{\alpha\bar\beta} A^\alpha{}_{\bar\gamma} = A_{\bar\beta\bar\gamma} f^{\bar\beta}$ e que $f_{\bar\alpha} A^{\bar\alpha}{}_\gamma = A_{\beta\gamma} f^\beta$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= (f_{\alpha 0} - f_{0\alpha} + A_{\gamma\alpha} f^\gamma)\theta \wedge \theta^\alpha + f_{\alpha\beta}\theta^\beta \wedge \theta^\alpha \\ &\quad +(f_{\alpha\bar\beta} - f_{\bar\beta\alpha} - i h_{\alpha\bar\beta} f_0)\theta^{\bar\beta} \wedge \theta^\alpha \\ &\quad +(f_{\bar\alpha 0} - f_{0\bar\alpha} + A_{\bar\alpha\bar\gamma} f^{\bar\gamma})\theta \wedge \theta^{\bar\gamma} + f_{\bar\alpha\bar\gamma}\theta^{\bar\gamma} \wedge \theta^{\bar\alpha} \end{aligned}$$

donde segue o resultado. ∎

2.2 Curvatura pseudohermitiana

As **formas de curvatura** da conexão pseudohermitiana ∇, expressas em termos de um correferencial admissível $\{\theta^\alpha\}$, são dadas por

(2.17) $$\Pi_\beta{}^\alpha = d\omega_\beta{}^\alpha - \omega_\beta{}^\gamma \wedge \omega_\gamma{}^\beta,$$

(2.18) $$\Pi_{\bar\beta}{}^{\bar\alpha} = \overline{\Pi_\beta{}^\alpha},$$

(2.19) $$\Pi_0{}^\alpha = \Pi_\beta{}^0 = \Pi_0{}^{\bar\alpha} = \Pi_{\bar\beta}{}^0 = 0.$$

mostrou em [46] que a forma de curvatura $\Pi_\beta{}^\alpha$ satisfaz a seguinte **equação de estru-**

tura :

$$(2.20)\quad \Pi_\beta{}^\alpha = R_\beta{}^\alpha{}_{\rho\bar\sigma}\theta^\rho\wedge\theta^{\bar\sigma} + W_\beta{}^\alpha{}_\rho\theta^\rho\wedge\theta - W^\alpha{}_{\beta\bar\rho}\theta^{\bar\rho}\wedge\theta + i\theta_\beta\wedge\tau^\alpha - i\tau_\beta\wedge\theta^\alpha$$

em que os coeficientes possuem as seguintes simetrias

$$(2.21)\qquad R_{\beta\bar\alpha\rho\bar\sigma} = R_{\rho\bar\alpha\beta\bar\sigma} = R_{\bar\alpha\beta\bar\sigma\rho} = \overline{R_{\alpha\bar\beta\sigma\bar\rho}}\,,$$

$$(2.22)\qquad W_{\beta\bar\alpha\gamma} = W_{\gamma\bar\sigma\beta}.$$

Proposição 2.2.1.

$$(2.23)\qquad W_\beta{}^\alpha{}_\rho = A_{\beta\rho;}{}^\alpha$$

$$(2.24)\qquad W^\alpha{}_{\beta\bar\rho} = A^\alpha{}_{\bar\rho;\beta}$$

Demonstração: Primeiro observe que $\tau_\alpha\wedge\theta^\alpha = 0$ é equivalente à (2.12), donde

$$\theta^\beta\wedge\Pi_\beta{}^\alpha = R_\beta{}^\alpha{}_{\rho\bar\sigma}\theta^\beta\wedge\theta^\rho\wedge\theta^{\bar\sigma} + W_\beta{}^\alpha{}_\rho\theta^\beta\wedge\theta^\rho\wedge\theta - W^\alpha{}_{\beta\bar\rho}\theta^\beta\wedge\theta^{\bar\rho}\wedge\theta$$

De $\Pi_\beta{}^\alpha = d\omega_\beta{}^\alpha - \omega_\beta{}^\gamma\wedge\omega_\gamma{}^\beta$, obtemos em P,

$$\Pi_\beta{}^\alpha = d\omega_\beta{}^\alpha$$

Por outro lado, derivando $d\theta^\alpha = \theta^\beta\wedge\omega_\beta{}^\alpha + \theta\wedge\tau^\alpha$, encontramos em P

$$\theta^\beta\wedge d\omega_\beta{}^\alpha = d\theta\wedge\tau^\alpha - \theta\wedge d\tau^\alpha$$

Agora,

$$d\theta\wedge\tau^\alpha = ih_{\alpha\bar\beta}\theta^\alpha\wedge\theta^{\bar\beta}\wedge\tau^\alpha = i\theta^\alpha\wedge\theta^{\bar\beta}\wedge\tau_{\bar\beta} = 0.$$

Assim

$$-\theta\wedge d\tau^\alpha = R_\beta{}^\alpha{}_{\rho\bar\sigma}\theta^\beta\wedge\theta^\rho\wedge\theta^{\bar\sigma} + W_\beta{}^\alpha{}_\rho\theta^\beta\wedge\theta^\rho\wedge\theta - W^\alpha{}_{\beta\bar\rho}\theta^\beta\wedge\theta^{\bar\rho}\wedge\theta.$$

Mas,

$$-\theta\wedge d\tau^\alpha = -\theta\wedge dA^\alpha{}_{\bar\rho}\wedge\theta^{\bar\rho} - A^\alpha{}_{\bar\rho}\theta\wedge d\theta^{\bar\rho} = -A^\alpha{}_{\bar\rho;\beta}\theta\wedge\theta^\beta\wedge\theta^{\bar\rho} - A^\alpha{}_{\bar\rho;\bar\beta}\theta\wedge\theta^{\bar\beta}\wedge\theta^{\bar\rho}.$$

Comparando os coeficientes de $\theta\wedge\theta^\beta\wedge\theta^{\bar\rho}$, obtemos

$$W^\alpha{}_{\beta\bar\rho} = A^\alpha{}_{\bar\rho;\beta}.$$

Daí,

$$W_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\rho} = W^{\bar{\sigma}\alpha}{}_{\rho} h_{\beta\bar{\sigma}} = W^{\bar{\sigma}}{}_{\bar{\gamma}\rho} h_{\beta\bar{\sigma}} h^{\alpha\bar{\gamma}} = \overline{W^{\sigma}{}_{\gamma\bar{\rho}} h_{\bar{\beta}\sigma} h^{\bar{\alpha}\gamma}} = \overline{A^{\sigma}{}_{\bar{\rho};\gamma} h_{\bar{\beta}\sigma} h^{\bar{\alpha}\gamma}} = \overline{A_{\bar{\beta}\bar{\rho};}{}^{\bar{\alpha}}} = A_{\beta\rho;}{}^{\alpha},$$

provando o resultado. ∎

Essa proposição diz que a forma de curvatura da conexão pseudohermitiana é completamente determinada pela torção pseudohermitiana e pelo tensor cujas componentes são $R_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\rho\bar{\sigma}}$.

Definição 2.2.1. *A* ***curvatura pseudohermitiana*** *da conexão ∇ é o tensor do tipo $(3,1)$ cujas componentes são dadas por $R_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\rho\bar{\sigma}}$.*

Definição 2.2.2. *A contração da curvatura pseudohermitiana com a forma de Levi L_{θ} fornece um tensor do tipo $(4,0)$ denominado* ***tensor curvatura de Webster*** *cujo as componentes são $R_{\beta\bar{\gamma}\rho\bar{\sigma}}$.*

Definição 2.2.3. *A contração $R_{\alpha}{}^{\alpha}{}_{\rho\bar{\sigma}}$ fornece um tensor do tipo $(2,0)$ denominado* ***tensor de Ricci pseudohermitiano*** *cujo as componentes são $R_{\rho\bar{\sigma}} := R_{\alpha}{}^{\alpha}{}_{\rho\bar{\sigma}}$.*

Definição 2.2.4. *A contração do tensor de Ricci pseudohermitiano com respeito à forma de Levi é denominada* ***curvatura escalar pseudohermitiana*** *e denotada por $R = R_{\rho}{}^{\rho} = R_{\rho\bar{\sigma}} h^{\rho\bar{\sigma}}$.*

Em [32], J. Lee apresentou algumas identidades envolvendo derivadas covariantes da curvatura escalar, do tensor de Ricci e da torção pseudohermitiana. Tais identidades foram denominadas **identidades de Bianchi** .

Lema 2.2.1 (Identidades de Bianchi). *A curvatura pseudohermitiana e a torção satisfazem*

$$R_{\rho\bar{\sigma};\gamma} - R_{\gamma\bar{\sigma};\rho} = iA_{\alpha\gamma;}{}^{\alpha} h_{\rho\bar{\sigma}} - iA_{\alpha\rho;}{}^{\alpha} h_{\gamma\bar{\sigma}} \tag{2.25}$$

$$R_{;\gamma} - R_{\gamma\bar{\sigma};}{}^{\bar{\sigma}} = -i(n-1)A_{\alpha\gamma;}{}^{\alpha} \tag{2.26}$$

$$R_{\rho\bar{\sigma};0} = A_{\alpha\rho;}{}^{\alpha}{}_{\bar{\sigma}} + A_{\bar{\beta}\bar{\sigma};}{}^{\bar{\beta}}{}_{\rho} \tag{2.27}$$

$$R_{;0} = A_{\alpha\rho;}{}^{\alpha\rho} + A_{\bar{\beta}\bar{\sigma};}{}^{\bar{\beta}\bar{\sigma}} \tag{2.28}$$

Demonstração: Pela proposição (2.2.1), temos

$$\Pi_{\alpha}{}^{\alpha} = d\omega_{\alpha}{}^{\alpha} = R_{\rho\bar{\sigma}}\theta^{\rho}\wedge\theta^{\bar{\sigma}} + A_{\alpha\gamma;}{}^{\alpha}\theta^{\gamma}\wedge\theta - A^{\alpha}{}_{\bar{\gamma};\alpha}\theta^{\bar{\gamma}}\wedge\theta.$$

Derivando, obtemos

$$\begin{aligned}
& dR_{\rho\bar\sigma}\theta^\rho\wedge\theta^{\bar\sigma}+R_{\rho\bar\sigma}d(\theta^\rho\wedge\theta^{\bar\sigma})+dA_{\alpha\gamma;}{}^{\alpha}\theta^\gamma\wedge\theta\\
& +A_{\alpha\gamma;}{}^{\alpha}d(\theta^\gamma\wedge\theta)-dA^{\alpha}{}_{\bar\gamma;\,\alpha}\theta^{\bar\gamma}\wedge\theta-A^{\alpha}{}_{\bar\gamma;\,\alpha}d(\theta^{\bar\gamma}\wedge\theta)\\
= \; & R_{\rho\bar\sigma;\,\gamma}\theta^\gamma\wedge\theta^\rho\wedge\theta^{\bar\sigma}+R_{\rho\bar\sigma;\,\bar\gamma}\theta^{\bar\gamma}\wedge\theta^\rho\wedge\theta^{\bar\sigma}+R_{\rho\bar\sigma;\,0}\theta\wedge\theta^\rho\wedge\theta^{\bar\sigma}\\
& +R_{\rho\bar\sigma}d\theta^\rho\wedge\theta^{\bar\sigma}+R_{\rho\bar\sigma}\theta^\rho\wedge d\theta^{\bar\sigma}+A_{\alpha\gamma;}{}^{\alpha}{}_{\sigma}\theta^\sigma\wedge\theta^\gamma\wedge\theta+A_{\alpha\gamma;}{}^{\alpha}{}_{\bar\sigma}\theta^{\bar\sigma}\wedge\theta^\gamma\wedge\theta\\
& +A_{\alpha\gamma;}{}^{\alpha}d\theta^\gamma\wedge\theta+A_{\alpha\gamma;}{}^{\alpha}\theta^\gamma\wedge d\theta-A^{\alpha}{}_{\bar\gamma;\,\alpha\rho}\theta^\rho\wedge\theta^{\bar\gamma}\wedge\theta\\
& -A^{\alpha}{}_{\bar\gamma;\,\alpha\bar\rho}\theta^{\bar\rho}\wedge\theta^{\bar\gamma}\wedge\theta-A^{\alpha}{}_{\bar\gamma;\,\alpha}d\theta^{\bar\gamma}\wedge\theta-A^{\alpha}{}_{\bar\gamma;\,\alpha}\theta^{\bar\gamma}\wedge d\theta=0.
\end{aligned}$$

Substituindo as identidades

$$d\theta=ih_{\rho\bar\sigma}\theta^\rho\wedge\theta^{\bar\sigma},$$

$$d\theta^\beta=\theta^\gamma\wedge\omega_\gamma{}^\beta+\theta\wedge\tau^\beta=\theta^\gamma\wedge\omega_\gamma{}^\beta+A^\beta{}_{\bar\gamma}\theta\wedge\theta^{\bar\gamma}$$

e calculando em P, obtemos

$$\begin{gathered}
(R_{\rho\bar\sigma;\,\gamma}-iA_{\alpha\gamma;}{}^{\alpha}h_{\rho\bar\sigma})\theta^\gamma\wedge\theta^\rho\wedge\theta^{\bar\sigma}+(R_{\rho\bar\sigma;\,\bar\gamma}-iA^{\alpha}{}_{\bar\gamma;\,\alpha}h_{\rho\bar\sigma})\theta^{\bar\gamma}\wedge\theta^\rho\wedge\theta^{\bar\sigma}\\
+(R_{\rho\bar\sigma;\,0}-A_{\alpha\rho;}{}^{\alpha}{}_{\bar\sigma}-A^{\alpha}{}_{\bar\sigma;\,\alpha\rho})\theta\wedge\theta^\rho\wedge\theta^{\bar\sigma}+(R_{\rho\bar\sigma}A^{\bar\sigma}{}_{\gamma}-A_{\alpha\gamma;}{}^{\alpha}{}_{\rho})\theta\wedge\theta^\rho\wedge\theta^\gamma\\
+(R_{\rho\bar\sigma}A^{\rho}{}_{\bar\gamma}+A^{\alpha}{}_{\bar\gamma;\,\alpha\bar\sigma})\theta\wedge\theta^{\bar\gamma}\wedge\theta^{\bar\sigma}=0.
\end{gathered}$$

Notando que os coeficientes de $\theta^\gamma\wedge\theta^\rho\wedge\theta^{\bar\sigma}$ e de $\theta\wedge\theta^\rho\wedge\theta^{\bar\sigma}$ satisfazem

$$\begin{aligned}
R_{\rho\bar\sigma;\,\gamma}-iA_{\alpha\gamma;}{}^{\alpha}h_{\rho\bar\sigma} &= R_{\gamma\bar\sigma;\,\rho}-iA_{\alpha\rho;}{}^{\alpha}h_{\gamma\bar\sigma}\\
R_{\rho\bar\sigma;\,0} &= A_{\alpha\rho;}{}^{\alpha}{}_{\bar\sigma}+A^{\alpha}{}_{\bar\sigma;\,\alpha\rho}
\end{aligned}$$

e que

$$A^{\alpha}{}_{\bar\sigma;\,\alpha\rho}=A^{\alpha}{}_{\bar\sigma;}{}^{\bar\beta}{}_{\rho}h_{\alpha\bar\beta}=A_{\bar\beta\bar\sigma;}{}^{\bar\beta}{}_{\rho}$$

derivamos as identidades (2.25) e (2.27). Agora, de (2.25), deduzimos que

$$\begin{aligned}
R_{;\,\gamma}-R_{\gamma\bar\sigma;}{}^{\bar\sigma} &= R_{\rho}{}^{\rho}{}_{;\,\gamma}-R_{\gamma\bar\sigma;}{}^{\bar\sigma}\\
&= (R_{\rho\bar\sigma;\,\gamma}-R_{\gamma\bar\sigma;\,\rho})\,h^{\rho\bar\sigma}\\
&= (iA_{\alpha\gamma;}{}^{\alpha}h_{\rho\bar\sigma}-iA_{\alpha\rho;}{}^{\alpha}h_{\gamma\bar\sigma})\,h^{\rho\bar\sigma}\\
&= iA_{\alpha\gamma;}{}^{\alpha}-iA_{\alpha\rho;}{}^{\alpha}\delta^\rho_\gamma\\
&= iA_{\alpha\gamma;}{}^{\alpha}-inA_{\alpha\gamma;}{}^{\alpha}\\
&= -i(n-1)A_{\alpha\gamma;}{}^{\alpha}
\end{aligned}$$

o que prova (2.26). Finalmente, (2.28) segue de (2.27), pois

$$R_{;\,0}=R_{\rho}{}^{\rho}{}_{,\,0}=R_{\rho\bar\sigma;\,0}\,h^{\bar\sigma\rho}=(A_{\alpha\rho;}{}^{\alpha}{}_{\bar\sigma}+A_{\bar\beta\bar\sigma;}{}^{\bar\beta}{}_{\rho})\,h^{\bar\sigma\rho}=A_{\alpha\rho;}{}^{\alpha\rho}+A_{\bar\beta\bar\sigma;}{}^{\bar\beta\bar\sigma}.$$

∎

O tensor curvatura da conexão pseudohermitiana é o tensor do tipo $(3,1)$ definido em todo $\mathbb{C} \otimes T(M)$ por

$$R^{\nabla}(Y,Z)X = [\nabla_Y, \nabla_Z]X - \nabla_{[Y,Z]}X.$$

Em relação à um referencial local $\{T_\alpha\}$, podemos escrever

$$R^{\nabla}(T_B, T_C)T_A = R^{\nabla}{}_A{}^D{}_{BC}T_D = R^{\nabla}{}_A{}^\sigma{}_{BC}T_\sigma + R^{\nabla}{}_A{}^{\bar\sigma}{}_{BC}T_{\bar\sigma} + R^{\nabla}{}_A{}^0{}_{BC}T_0.$$

Como $T_{1,0}$ e $T_{0,1}$ são paralelos com respeito à conexão ∇, temos

$$R^{\nabla}{}_\alpha{}^{\bar\sigma}{}_{BC} = R^{\nabla}{}_\alpha{}^0{}_{BC} = 0,$$

$$R^{\nabla}{}_{\bar\alpha}{}^\sigma{}_{BC} = R^{\nabla}{}_{\bar\alpha}{}^0{}_{BC} = 0.$$

Além disso, de $\nabla T = 0$, obtemos

$$R^{\nabla}{}_0{}^D{}_{BC} = 0.$$

Dragomir mostrou em sua tese de doutorado que (veja também [14])

$$d\omega_\beta{}^\alpha - \omega_\beta{}^\gamma \wedge \omega_\gamma{}^\beta = R^{\nabla}{}_\beta{}^\alpha{}_{\rho\bar\sigma}\theta^\rho \wedge \theta^{\bar\sigma} + W_\beta{}^\alpha{}_\rho\theta^\rho \wedge \theta - W^\alpha{}_{\beta\bar\rho}\theta^{\bar\rho} \wedge \theta + i\theta_\beta \wedge \tau^\alpha - i\tau_\beta \wedge \theta^\alpha.$$

Portanto R^{∇} é uma extensão natural do tensor curvatura pseudohermitiano.

Definição 2.2.5. *O tensor de Ricci da conexão pseudohermitiana ∇ é definido por*

$$Ric^{\nabla} = C_2^1 R^{\nabla},$$

ou seja,

$$Ric^{\nabla}(Y,Z) = traço\{X \mapsto R(X,Z)Y\}.$$

Dado um referencial $\{T_\alpha\}$, temos

$$Ric^{\nabla}(T_\alpha, T_{\bar\beta}) = R^{\nabla}{}_\alpha{}^D{}_{D\bar\beta} = R^{\nabla}{}_\alpha{}^\gamma{}_{\gamma\bar\beta} = R_{\alpha\bar\sigma\gamma\bar\beta}h^{\gamma\bar\sigma} = R_{\gamma\bar\sigma\alpha\bar\beta}h^{\gamma\bar\sigma} = R_\gamma{}^\gamma{}_{\alpha\bar\beta} = R_{\alpha\bar\beta}.$$

Isso mostra que o tensor de Ricci pseudohermitiano $R_{\alpha\bar\beta}$ é apenas um fragmento do tensor de Ricci Ric^{∇} da conexão pseudohermitiana. Uma questão natural é se o tensor de Ricci pseudohermitiano $R_{\alpha\bar\beta}$ determina Ric^{∇}. Dragomir mostrou que a menos que a torção pseudohermitiana seja nula, a resposta é negativa. Existem outras componentes não triviais de Ric^{∇} que dependem da torção pseudohermitiana τ e de suas derivadas covariantes. Por outro lado, ele mostrou que a curvatura escalar pseudohermitiana é igual a curvatura escalar da conexão pseudohermitiana (a menos de um fator constante 1/2). Precisamente, temos:

Teorema 2.2.1 (Dragomir). *Seja (M, θ) uma variedade pseudohermitiana não-degenerada. Então*

$$R^{\nabla}{}_{\alpha\beta} = i(n-1)A_{\alpha\beta}, \tag{2.29}$$

$$R^{\nabla}{}_{\alpha\bar{\beta}} = R_{\alpha\bar{\beta}}, \tag{2.30}$$

$$R^{\nabla}{}_{0\beta} = A_{\sigma\beta;}{}^{\sigma}, \tag{2.31}$$

$$R^{\nabla}{}_{\alpha 0} = 0. \tag{2.32}$$

Além disso,

$$R = \tfrac{1}{2}\, \textit{traço}(Ric^{\nabla})$$

As demonstrações desses resultados podem ser vistas em [14]. No entanto, convém fazer algumas observações sobre os tensores $R_{\alpha\bar{\beta}}$ e Ric^{∇}.

1. $R_{\alpha\bar{\beta}}$ é Hermitiano (sobre $T_{1,0}$):

$$R_{\alpha\bar{\beta}} = R_{\sigma}{}^{\sigma}{}_{\alpha\bar{\beta}} = R_{\sigma\bar{\rho}\alpha\bar{\beta}}\, h^{\bar{\rho}\sigma} = \overline{R_{\rho\bar{\sigma}\beta\bar{\alpha}}\, h^{\rho\bar{\sigma}}} = \overline{R_{\rho}{}^{\rho}{}_{\beta\bar{\alpha}}} = \overline{R_{\beta\bar{\alpha}}}.$$

2. $\overline{R_{\alpha\bar{\beta}}} = Ric^{\nabla}{}_{\bar{\alpha}\beta}$:

$$\overline{R_{\alpha\bar{\beta}}} = \overline{R_{\rho}{}^{\rho}{}_{\alpha\bar{\beta}}} = \overline{R_{\rho\bar{\sigma}\alpha\bar{\beta}}\, h^{\rho\bar{\sigma}}} = \overline{R_{\alpha\bar{\sigma}\rho\bar{\beta}}}\, h^{\sigma\bar{\rho}} = R_{\bar{\alpha}\sigma\bar{\rho}\beta}\, h^{\sigma\bar{\rho}} = \overline{R_{\bar{\alpha}}{}^{\bar{\rho}}{}_{\bar{\rho}\beta}} = Ric^{\nabla}{}_{\bar{\alpha}\beta}.$$

3. Ric é simétrico sobre $\mathbb{C}\otimes T(M)$:

$$\begin{aligned} Ric^{\nabla}{}_{\alpha\beta} &= i(n-1)A_{\alpha\bar{\beta}} = i(n-1)A_{\beta\alpha} = Ric^{\nabla}{}_{\beta\alpha}, \\ Ric^{\nabla}{}_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} &= \overline{Ric^{\nabla}{}_{\alpha\beta}} = \overline{Ric^{\nabla}{}_{\beta\alpha}} = Ric^{\nabla}{}_{\bar{\beta}\bar{\alpha}}, \\ Ric^{\nabla}{}_{\bar{\beta}\alpha} &= \overline{R_{\beta\bar{\alpha}}} = R_{\alpha\bar{\beta}} = Ric^{\nabla}{}_{\alpha\bar{\beta}}. \end{aligned}$$

A partir desse momento denotaremos $R_{AB} := Ric^{\nabla}{}_{AB}$. Em relação ao referencial $\{T, T_{\alpha}, T_{\bar{\alpha}}\}$, o tensor de Ricci da conexão pseudohermitiana ∇ possui a seguinte representação matricial:

$$Ric : \begin{bmatrix} i(n-1)A_{\alpha\beta} & R_{\bar{\alpha}\beta} & A_{\sigma\beta;}{}^{\sigma} \\ R_{\alpha\bar{\beta}} & -i(n-1)A_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} & A_{\bar{\sigma}\bar{\beta};}{}^{\bar{\sigma}} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.3 Mudanças na estrutura pseudohermitiana

Seja (M, θ) uma variedade pseudohermitiana (estritamente pseudoconvexa). Se $\widetilde{\theta}$ é uma estrutura pseudohermitiana para M compatível com θ, então $\widetilde{\theta} = e^{2u}\theta$ para alguma função real $u \in C^\infty(M)$. Nesta seção, iremos expressar os invariantes pseudohermitianos de $\widetilde{\theta}$ em termos dos invariantes de θ. Primeiro, precisaremos determinar a lei de transformação das formas de conexão. Os resultados apresentados aqui foram obtidos por J. Lee em [31] e [32].

Lema 2.3.1. *O correferencial $\{\widetilde{\theta}^\alpha := \theta^\alpha + 2iu^\alpha\theta\}$ satisfaz a identidade*

$$d\widetilde{\theta} = i\widetilde{h}_{\alpha\bar{\beta}}\widetilde{\theta}^\alpha \wedge \widetilde{\theta}^{\bar{\beta}},$$

no qual $\widetilde{\theta} = e^{2u}\theta$. Em particular, $\{\widetilde{\theta}^\alpha\}$ é um correferencial admissível para $(M, \widetilde{\theta})$ com referencial dual $\widetilde{T}_\alpha = T_\alpha$. Além disso, a direção caracterísitica de $d\widetilde{\theta}$ é

$$\widetilde{T} = e^{-2u}(-2iu^\gamma T_\gamma + 2iu^{\bar{\gamma}}T_{\bar{\gamma}} + T)\,.$$

Demonstração: Temos,

$$\begin{aligned}
d\widetilde{\theta} &= d(e^{2u}\theta) \\
&= e^{2u}(d\theta + 2du \wedge \theta) \\
&= e^{2u}(ih_{\alpha\bar{\beta}}\theta^\alpha \wedge \theta^{\bar{\beta}} + (2u_\alpha\theta^\alpha + 2u_{\bar{\beta}}\theta^{\bar{\beta}}) \wedge \theta) \\
&= e^{2u}(ih_{\alpha\bar{\beta}}\theta^\alpha \wedge \theta^{\bar{\beta}} + ih_{\alpha\bar{\beta}}(-2iu^{\bar{\beta}}\theta^\alpha - 2iu^\alpha\theta^{\bar{\beta}}) \wedge \theta) \\
&= ie^{2u}h_{\alpha\bar{\beta}}(\theta^\alpha \wedge \theta^{\bar{\beta}} - 2iu^{\bar{\beta}}\theta^\alpha \wedge \theta - 2iu^\alpha\theta^{\bar{\beta}} \wedge \theta) \\
&= i\widetilde{h}_{\alpha\bar{\beta}}\widetilde{\theta}^\alpha \wedge \widetilde{\theta}^{\bar{\beta}}.
\end{aligned}$$

Seja $\widetilde{T} = a^\alpha T_\alpha + a^{\bar{\alpha}}T_{\bar{\alpha}} + aT$ a direção caracterísitca de $d\widetilde{\theta}$. Do fato que $\widetilde{\theta}(\widetilde{T}) = 1$, obtemos

$$e^{2u}\theta(\widetilde{T}) = e^{2u}a = 1,$$

donde $a = e^{-2u}$. Como $\widetilde{\theta}^\gamma(\widetilde{T}) = 0$, encontramos

$$\widetilde{\theta}^\gamma(a^\alpha T_\alpha + a^{\bar{\alpha}}T_{\bar{\alpha}} + aT) = (\theta^\gamma + 2iu^\gamma\theta)(a^\alpha T_\alpha + a^{\bar{\alpha}}T_{\bar{\alpha}} + e^{-2u}T) = a^\gamma + 2iu^\gamma e^{-2u} = 0,$$

donde $a^\alpha = -2iu^\gamma e^{-2u}$. Analogamente, obtemos $a^{\bar{\alpha}} = 2iu^{\bar{\gamma}}e^{-2u}$. ∎

Considere M munida da nova estrutura pseudohermitiana $\{\widetilde{\theta} = e^{2u}\theta\}$ e com correferencial admissível $\{\widetilde{\theta}^\alpha = \theta^\alpha + 2iu^\alpha\theta\}$. Nosso objetivo é determinar as 1-formas de conexão $\widetilde{\omega}_\alpha{}^\beta$ e 1-formas de torção $\widetilde{\tau}^\alpha$ de $(M, \widetilde{\theta})$. Tais 1-formas são determinadas unicamente pelas equações

(W1) $d\widetilde{\theta}^\alpha = \widetilde{\theta}^\gamma \wedge \widetilde{\omega}_\alpha{}^{\bar{\beta}} + \widetilde{\theta} \wedge \widetilde{\tau}^\alpha$;

(W2) $d\widetilde{h}^{\alpha\bar{\beta}} = \widetilde{\omega}_{\alpha\bar{\beta}} + \widetilde{\omega}_{\bar{\beta}\alpha}$;

(W3) $\widetilde{A}_{\gamma\bar{\beta}} = \widetilde{A}_{\bar{\beta}\gamma}$, em que $\widetilde{\tau}_\gamma = \widetilde{A}_{\gamma\bar{\beta}}\widetilde{\theta}^{\bar{\beta}}$.

Derivando $\widetilde{\theta}^\alpha$, temos

$$\begin{aligned} d\widetilde{\theta}^\alpha &= d\theta^\alpha + 2idu^\alpha \wedge \theta + 2iu^\alpha d\theta \\ &= \theta^\gamma \wedge \omega_\gamma{}^\alpha + \theta \wedge \tau^\alpha + (T_\gamma u^\alpha \theta^\gamma + T_{\bar{\gamma}} u^\alpha \theta^{\bar{\gamma}}) \wedge \theta - 2u^\alpha h_{\gamma\bar{\beta}} \theta^\gamma \wedge \theta^{\bar{\beta}}. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Agora,

$$\begin{aligned} u^\alpha{}_B &= u_{\bar{\sigma}B} h^{\alpha\bar{\sigma}} \\ &= (T_B u_{\bar{\sigma}} - \omega_{\bar{\sigma}}{}^{\bar{\rho}}(T_B) u_{\bar{\rho}}) h^{\alpha\bar{\sigma}} \\ &= T_B u_{\bar{\sigma}} h^{\alpha\bar{\sigma}} - \omega^{\alpha\bar{\rho}}(T_B) u_{\bar{\rho}} \\ &= (-u_{\bar{\sigma}} T_B h^{\alpha\bar{\sigma}} + T_B u^\alpha) - \omega^\alpha{}_\beta(T_B) u^\beta. \end{aligned}$$

Como

$$\omega_\beta{}^\alpha + \omega^\alpha{}_\beta = dh_{\beta\bar{\sigma}} h^{\alpha\bar{\sigma}},$$

considerando $\{T_\alpha\}$ pseudohermtiano ($h_{\alpha\bar{\beta}} =$ constante), obtemos

$$u^\alpha{}_B = T_B u^\alpha + u^\beta \omega_\beta{}^\alpha(T_B),$$

donde

$$\begin{aligned} T_\gamma u^\alpha \theta^\gamma + T_{\bar{\gamma}} u^\alpha \theta^{\bar{\gamma}} &= u^\alpha{}_\gamma \theta^\gamma - u^\beta \omega_\beta{}^\alpha(T_\gamma)\theta^\gamma + u^\alpha{}_{\bar{\gamma}} \theta^{\bar{\gamma}} - u^\beta \omega_\beta{}^\alpha(T_{\bar{\gamma}})\theta^{\bar{\gamma}} \\ &= u^\alpha{}_\gamma \theta^\gamma + u^\alpha{}_{\bar{\gamma}} \theta^{\bar{\gamma}} - u^\beta \omega_\beta{}^\alpha + u^\beta \omega_\beta{}^\alpha(T)\theta. \end{aligned}$$

Substituindo em (2.33), chegamos à

$$\begin{aligned} d\widetilde{\theta}^\alpha &= \theta^\gamma \wedge \omega_\gamma{}^\alpha + \theta \wedge \tau^\alpha + 2i(u^\alpha{}_\gamma \theta^\gamma + u^\alpha{}_{\bar{\gamma}} \theta^{\bar{\gamma}} \\ &\quad - u^\beta \omega_\beta{}^\alpha + u^\beta \omega_\beta{}^\alpha(T)\theta) \wedge \theta - 2u^\alpha h_{\gamma\bar{\beta}} \theta^\gamma \wedge \theta^{\bar{\beta}} \\ &= \theta^\beta \wedge (\omega_\beta{}^\alpha + 2iu^\alpha{}_\beta \theta - 2u^\alpha h_{\beta\bar{\gamma}} \theta^{\bar{\gamma}}) - 2iu^\beta \omega_\beta{}^\alpha \wedge \theta + (A^\alpha{}_{\bar{\gamma}} - 2iu^\alpha{}_{\bar{\gamma}})\theta \wedge \theta^{\bar{\gamma}}. \end{aligned}$$

Fazendo a substituição $\theta^\beta = \widetilde{\theta}^\beta - 2iu^\beta\theta$, derivamos

$$\begin{aligned} d\widetilde{\theta}^\alpha &= \widetilde{\theta}^\beta \wedge (\omega_\beta{}^\alpha + 2iu^\alpha{}_\beta \theta - 2u^\alpha h_{\beta\bar{\gamma}} \theta^{\bar{\gamma}}) \\ &\quad - 2iu^\beta \theta \wedge \omega_\beta{}^\alpha + 4iu^\beta u^\alpha h_{\beta\bar{\gamma}} \theta \wedge \theta^{\bar{\gamma}} - 2iu^\beta \omega_\beta{}^\alpha \wedge \theta + (A^\alpha{}_{\bar{\gamma}} - 2iu^\alpha{}_{\bar{\gamma}})\theta \wedge \theta^{\bar{\gamma}} \\ &= \widetilde{\theta}^\beta \wedge (\omega_\beta{}^\alpha + 2iu^\alpha{}_\beta \theta - 2u^\alpha h_{\beta\bar{\gamma}} \theta^{\bar{\gamma}}) + \widetilde{\theta} \wedge [e^{-2u}(A^\alpha{}_{\bar{\gamma}} - 2iu^\alpha{}_{\bar{\gamma}} + 4iu_{\bar{\gamma}} u^\alpha)]\theta^{\bar{\gamma}}. \end{aligned}$$

Defina
$$\widetilde{\tau}^{\alpha} = e^{-2u}(A^{\alpha}{}_{\bar{\gamma}} - 2iu^{\alpha}{}_{\bar{\gamma}} + 4iu_{\bar{\gamma}}u^{\alpha})\theta^{\bar{\gamma}}.$$

Temos

$$\begin{aligned}
\widetilde{A}_{\bar{\beta}\bar{\gamma}} &= \widetilde{A}^{\alpha}{}_{\bar{\gamma}}\widetilde{h}_{\alpha\bar{\beta}} \\
&= (A^{\alpha}{}_{\bar{\gamma}} - 2iu^{\alpha}{}_{\bar{\gamma}} + 4iu_{\bar{\gamma}}u^{\alpha})h_{\alpha\bar{\beta}} \\
&= A_{\bar{\beta}\bar{\gamma}} - 2iu_{\bar{\beta}\bar{\gamma}} + 4iu_{\bar{\beta}}u_{\bar{\gamma}} \\
&= A_{\bar{\gamma}\bar{\beta}} - 2iu_{\bar{\gamma}\bar{\beta}} + 4iu_{\bar{\gamma}}u_{\bar{\beta}} \\
&= \widetilde{A}_{\bar{\gamma}\bar{\beta}}.
\end{aligned}$$

Agora, considere
$$\widetilde{\omega}_{\beta}{}^{\alpha} = \omega_{\beta}{}^{\alpha} + 2iu^{\alpha}{}_{\beta}\theta - 2u^{\alpha}h_{\beta\bar{\gamma}}\theta^{\bar{\gamma}} + F\widetilde{\theta}^{\beta}.$$

Observe que, por construção, $\widetilde{\omega}_{\beta}{}^{\alpha}$ satisfaz [**W1**]. Resta então determinar F de tal maneira que $\widetilde{\omega}_{\beta}{}^{\alpha}$ satisfaça [**W2**]. Escrevendo

$$\begin{aligned}
\widetilde{\omega}_{\beta}{}^{\alpha} &= \omega_{\beta}{}^{\alpha} + 2iu^{\alpha}{}_{\beta}\theta - 2u^{\alpha}h_{\beta\bar{\gamma}}\theta^{\bar{\gamma}} + F\theta^{\beta} + 2iu^{\beta}F\theta \\
&= \omega_{\beta}{}^{\alpha} + F\theta^{\beta} - 2u^{\alpha}h_{\beta\bar{\gamma}}\theta^{\bar{\gamma}} + 2i(u^{\alpha}{}_{\beta} + u^{\beta}F)\theta,
\end{aligned}$$

temos

$$\widetilde{\omega}_{\beta\bar{\sigma}} = \widetilde{\omega}_{\beta}{}^{\alpha}\widetilde{h}_{\alpha\bar{\sigma}} = e^{2u}(\omega_{\beta\bar{\sigma}} + Fh_{\alpha\bar{\sigma}}\theta^{\beta} - 2u_{\bar{\sigma}}h_{\beta\bar{\gamma}}\theta^{\bar{\gamma}} + 2i(u_{\bar{\sigma}\beta} + u^{\beta}h_{\alpha\bar{\sigma}}F)\theta),$$

donde
$$\widetilde{\omega}_{\bar{\sigma}\beta} = e^{2u}(\omega_{\bar{\sigma}\beta} + \overline{F}h_{\beta\bar{\alpha}}\theta^{\bar{\beta}} - 2u_{\beta}h_{\gamma\bar{\sigma}}\theta^{\gamma} - 2i(u_{\beta\bar{\sigma}} + u^{\bar{\sigma}}h_{\beta\bar{\alpha}}\overline{F})\theta)\,.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\widetilde{\omega}_{\beta\bar{\sigma}} + \widetilde{\omega}_{\bar{\sigma}\beta} &= e^{2u}(\omega_{\beta\bar{\sigma}} + \omega_{\bar{\sigma}\beta} + (Fh_{\alpha\bar{\sigma}}\delta^{\gamma}_{\beta} - 2u_{\beta}h_{\gamma\bar{\sigma}})\theta^{\gamma} + (\overline{F}h_{\beta\bar{\alpha}}\delta^{\gamma}_{\beta} - 2u_{\bar{\sigma}}h_{\beta\bar{\gamma}})\theta^{\bar{\gamma}} \\
&\quad + 2i(u_{\bar{\sigma}\beta} - u_{\beta\bar{\sigma}} + u^{\beta}h_{\alpha\bar{\sigma}}F - u^{\bar{\sigma}}h_{\beta\bar{\alpha}}\overline{F})\theta).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
d\widetilde{h}_{\beta\bar{\sigma}} &= d(e^{2u}h_{\beta\bar{\sigma}}) \\
&= e^{2u}(dh_{\beta\bar{\sigma}} + 2h_{\beta\bar{\sigma}}du) \\
&= e^{2u}(\omega_{\beta\bar{\sigma}} + \omega_{\bar{\sigma}\beta} + 2u_{\gamma}h_{\beta\bar{\sigma}}\theta^{\gamma} + 2u_{\bar{\gamma}}h_{\beta\bar{\sigma}}\theta^{\bar{\gamma}} + 2u_{0}h_{\beta\bar{\sigma}}\theta).
\end{aligned}$$

Mas F satisfaz necessariamente

$$Fh_{\alpha\bar{\sigma}}\delta^{\gamma}_{\beta} - 2u_{\beta}h_{\gamma\bar{\sigma}} = 2u_{\gamma}h_{\beta\bar{\sigma}},$$

donde

$$F\delta_\beta^\gamma = 2u_\beta h_{\gamma\bar\sigma}h^{\alpha\bar\sigma} + 2u_\gamma h_{\beta\bar\sigma}h^{\alpha\bar\sigma} = 2u_\beta\delta_\gamma^\alpha + 2u_\gamma\delta_\beta^\alpha.$$

Fazendo uma substituição direta pode-se verificar que F ainda satisfaz

$$\overline{F}h_{\beta\bar\alpha}\delta_\beta^\gamma - 2u_{\bar\sigma}h_{\beta\bar\gamma} = 2u_{\bar\gamma}h_{\beta\bar\sigma}$$

e

$$2i(u_{\bar\sigma\beta} - u_{\beta\bar\sigma} + u^\beta h_{\alpha\bar\sigma}F - u^{\bar\sigma}h_{\beta\bar\alpha}\overline{F}) = 2u_0 h_{\beta\bar\sigma}.$$

Portanto,

$$\widetilde{\omega}_\beta{}^\alpha = \omega_\beta{}^\alpha + 2i(u^\alpha{}_\beta + 2u^\beta u_\beta\delta_\gamma^\alpha + 2u^\beta u_\gamma\delta_\beta^\alpha)\theta - 2u^\alpha h_{\beta\bar\gamma}\theta^{\bar\gamma} + (2u_\beta\delta_\gamma^\alpha + 2u_\gamma\delta_\beta^\alpha)\theta^\gamma.$$

∎

Podemos resumir esses resultados no seguinte lema:

Lema 2.3.2. *Seja (M,θ) uma variedade pseudohermitiana. Se $\widetilde{\theta} = e^{2u}\theta$ e $\widetilde{\theta^\alpha} = \theta^\alpha + 2iu^\alpha\theta$, então*

$$\begin{aligned}
\widetilde{\omega}_\beta{}^\alpha &= \omega_\beta{}^\alpha + 2i(u^\alpha{}_\beta + 2u^\beta u_\beta\delta_\gamma^\alpha + 2u^\beta u_\gamma\delta_\beta^\alpha)\theta - 2u^\alpha h_{\beta\bar\gamma}\theta^{\bar\gamma} + (2u_\beta\delta_\gamma^\alpha + 2u_\gamma\delta_\beta^\alpha)\theta^\gamma,\\
\widetilde{\tau}^\alpha &= \widetilde{A}^\alpha{}_{\bar\gamma}\theta^{\bar\gamma},
\end{aligned}$$

em que $\widetilde{A}_{\beta\gamma} = A_{\beta\gamma} + 2iu_{\beta\gamma} - 4iu_\beta u_\gamma$.

Corolario 2.3.1. *Seja $\widetilde{\theta} = e^{2u}\theta$. Com relação ao correferencial $\{\widetilde{\theta^\alpha} := \theta^\alpha + 2iu^\alpha\theta\}$, os símbolos de Christoffel da conexão pseudohermitiana $\widetilde{\nabla}$ são dados por*

$$\widetilde{\Gamma}^\alpha_{\gamma\beta} = \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} + 2u_\beta\delta_\gamma^\alpha + 2u_\gamma\delta_\beta^\alpha, \tag{2.34}$$

$$\widetilde{\Gamma}^\alpha_{\bar\gamma\beta} = \Gamma^\alpha_{\bar\gamma\beta} - 2u^\alpha h_{\beta\bar\gamma}, \tag{2.35}$$

$$\widetilde{\Gamma}^\alpha_{0\beta} = e^{-2u}\left(\Gamma^\alpha_{0\beta} - 2iu^\rho\Gamma^\alpha_{\rho\beta} + 2iu^{\bar\rho}\Gamma^\alpha_{\bar\rho\beta} + 2iu^\alpha{}_\beta - 4iu^\alpha u_\beta\right). \tag{2.36}$$

Demonstração: Temos

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Gamma}^\alpha_{\gamma\beta} &= \widetilde{\omega}_\beta{}^\alpha(T_\gamma)\\
&= \omega_\beta{}^\alpha(T_\gamma) + 2u_\beta\delta_\gamma^\alpha + 2u_\gamma\delta_\beta^\alpha\\
&= \Gamma^\alpha_{\gamma\beta} + 2u_\beta\delta_\gamma^\alpha + 2u_\gamma\delta_\beta^\alpha;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{\bar{\gamma}\beta} &= \widetilde{\omega}_{\beta}{}^{\alpha}(T_{\bar{\gamma}}) \\
&= \omega_{\beta}{}^{\alpha}(T_{\bar{\gamma}}) - 2u^{\alpha}h_{\beta\bar{\gamma}} \\
&= \Gamma^{\alpha}_{\bar{\gamma}\beta} - 2u^{\alpha}h_{\beta\bar{\gamma}};
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{0\beta} &= \widetilde{\omega}_{\beta}{}^{\alpha}(\widetilde{T}) \\
&= \widetilde{\omega}_{\beta}{}^{\alpha}(e^{-2u}(-2iu^{\gamma}T_{\gamma} + 2iu^{\bar{\gamma}}T_{\bar{\gamma}} + T)) \\
&= e^{-2u}(-2iu^{\gamma}\widetilde{\omega}_{\beta}{}^{\alpha}(T_{\gamma}) + 2iu^{\bar{\gamma}}\widetilde{\omega}_{\beta}{}^{\alpha}(T_{\bar{\gamma}}) + \widetilde{\omega}_{\beta}{}^{\alpha}(T)) \\
&= e^{-2u}\left(\Gamma^{\alpha}_{0\beta} - 2iu^{\rho}\Gamma^{\alpha}_{\rho\beta} + 2iu^{\bar{\rho}}\Gamma^{\alpha}_{\bar{\rho}\beta} + 2iu^{\alpha}{}_{\beta} - 4iu^{\alpha}u_{\beta}\right).
\end{aligned}$$

∎

Corolario 2.3.2. *Seja* $\widetilde{\theta} = e^{2u}\theta$. *Com relação ao correferencial* $\{\widetilde{\theta}^{\alpha} := \theta^{\alpha} + 2iu^{\alpha}\theta\}$, *temos*

$$\widetilde{R}_{\alpha\bar{\beta}} = R_{\alpha\bar{\beta}} - (n+2)(u_{\alpha\bar{\beta}} + u_{\bar{\beta}\alpha}) - (u_{\gamma}{}^{\gamma} + u_{\bar{\gamma}}{}^{\bar{\gamma}} + 4(n+1)u_{\gamma}u^{\gamma})h_{\alpha\bar{\beta}}; \tag{2.37}$$

$$\widetilde{R} = e^{-2u}(R - 2(n+1)(u_{\gamma}{}^{\gamma} + u_{\bar{\gamma}}{}^{\bar{\gamma}}) - 4n(n+1)u_{\gamma}u^{\gamma}). \tag{2.38}$$

Demonstração: Da equação de estrutura

$$\Pi_{\beta}{}^{\alpha} = R_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\gamma\bar{\sigma}}\theta^{\gamma}\wedge\theta^{\bar{\sigma}} + W_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\gamma}\theta^{\gamma}\wedge\theta - W^{\alpha}{}_{\beta\bar{\gamma}}\theta^{\bar{\gamma}}\wedge\theta + i\theta_{\beta}\wedge\tau^{\alpha} - i\tau_{\beta}\wedge\theta^{\alpha},$$

obtemos

$$\begin{aligned}
\Pi_{\alpha}{}^{\alpha} &= R_{\alpha}{}^{\alpha}{}_{\gamma\bar{\sigma}}\theta^{\gamma}\wedge\theta^{\bar{\sigma}} + W_{\alpha}{}^{\alpha}{}_{\gamma}\theta^{\gamma}\wedge\theta - W^{\alpha}{}_{\alpha\bar{\gamma}}\theta^{\bar{\gamma}}\wedge\theta + i\theta_{\alpha}\wedge\tau^{\alpha} - i\tau_{\alpha}\wedge\theta^{\alpha} \\
&= R_{\gamma\bar{\sigma}}\theta^{\gamma}\wedge\theta^{\bar{\sigma}} + W_{\alpha}{}^{\alpha}{}_{\gamma}\theta^{\gamma}\wedge\theta - W^{\alpha}{}_{\alpha\bar{\gamma}}\theta^{\bar{\gamma}}\wedge\theta.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$d\omega_{\alpha}{}^{\alpha} = d\omega_{\alpha}{}^{\alpha} + \omega_{\alpha}{}^{\gamma}\wedge\omega_{\gamma}{}^{\alpha} = \Pi_{\alpha}{}^{\alpha} = R_{\gamma\bar{\sigma}}\theta^{\gamma}\wedge\theta^{\bar{\sigma}} \mod \theta.$$

Temos de (2.3.2)

$$\begin{aligned}
\widetilde{\omega}_{\alpha}{}^{\alpha} &= \omega_{\alpha}{}^{\alpha} + 2i(u^{\alpha}{}_{\alpha} + 2u^{\alpha}u_{\alpha}\delta^{\alpha}_{\gamma} + 2u^{\alpha}u_{\gamma}\delta^{\alpha}_{\alpha})\theta - 2u^{\alpha}h_{\alpha\bar{\gamma}}\theta^{\bar{\gamma}} + (2u_{\alpha}\delta^{\alpha}_{\gamma} + 2u_{\gamma}\delta^{\alpha}_{\alpha})\theta^{\gamma} \\
&= \omega_{\alpha}{}^{\alpha} + 2i(u^{\gamma}{}_{\gamma} + 2(n+1)u_{\gamma}u^{\gamma})\theta + 2(n+1)2u_{\gamma}\theta^{\gamma} - 2u_{\bar{\gamma}}\theta^{\bar{\gamma}}.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
d\widetilde{\omega}_{\alpha}{}^{\alpha} &= d\omega_{\alpha}{}^{\alpha} + 2id(u^{\gamma}{}_{\gamma} + 2(n+1)u_{\gamma}u^{\gamma})\wedge\theta + 2i(u^{\gamma}{}_{\gamma} + 2(n+1)u_{\gamma}u^{\gamma})d\theta \\
&\quad + 2(n+1)2du_{\gamma}\wedge\theta^{\gamma} + 2(n+1)2u_{\gamma}d\theta^{\gamma} - 2du_{\bar{\gamma}}\wedge\theta^{\bar{\gamma}} - 2u_{\bar{\gamma}}d\theta^{\bar{\gamma}}.
\end{aligned}$$

Considerando o referencial pseudohermitiano e calculando em seu centro P, obtemos

$$d\theta^\gamma = 0 \mod \theta,$$

donde

$$\begin{aligned} d\widetilde{\omega}_\alpha{}^\alpha &= d\omega_\alpha{}^\alpha + 2(n+1)u_{\gamma\bar{\sigma}}\theta^{\bar{\sigma}} \wedge \theta^\gamma - 2u_{\bar{\gamma}\sigma}\theta^\sigma \wedge \theta^{\bar{\gamma}} \\ &\quad -2(u^\rho{}_\rho + 2(n+1)u_\rho u^\rho)h_{\gamma\bar{\sigma}}\theta^\gamma \wedge \theta^{\bar{\sigma}} \mod \theta \\ &= d\omega_\alpha{}^\alpha + (-2(n+1)u_{\gamma\bar{\sigma}} - 2u_{\bar{\sigma}\gamma} - (2u^\rho{}_\rho + 4(n+1)u_\rho u^\rho)h_{\gamma\bar{\sigma}})\theta^\gamma \wedge \theta^{\bar{\sigma}} \mod \theta \end{aligned}$$

Agora,

$$2u^\rho{}_\rho = u^\rho{}_\rho + u^\rho{}_\rho = u_{\bar{\rho}}{}^{\bar{\rho}} + u_{\bar{\beta}\rho}h^{\rho\bar{\beta}} = u_{\bar{\rho}}{}^{\bar{\rho}} + (u_{\rho\bar{\beta}} - iu_0 h_{\rho\bar{\beta}})h^{\rho\bar{\beta}} = u_\rho{}^\rho + u_{\bar{\rho}}{}^{\bar{\rho}} - inu_0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} d\widetilde{\omega}_\alpha{}^\alpha &= d\omega_\alpha{}^\alpha + (-2(n+1)u_{\gamma\bar{\sigma}} - 2u_{\bar{\sigma}\gamma} \\ &\quad -(u_\rho{}^\rho + u_{\bar{\rho}}{}^{\bar{\rho}} - inu_0 + 4(n+1)u_\rho u^\rho)h_{\gamma\bar{\sigma}}\big)\,\theta^\gamma \wedge \theta^{\bar{\sigma}} \mod \theta \\ &= d\omega_\alpha{}^\alpha + (-2(n+1)u_{\gamma\bar{\sigma}} - 2u_{\bar{\sigma}\gamma} + inu_0 h_{\gamma\bar{\sigma}} \\ &\quad -(u_\rho{}^\rho + u_{\bar{\rho}}{}^{\bar{\rho}} + 4(n+1)u_\rho u^\rho)h_{\gamma\bar{\sigma}}\big)\,\theta^\gamma \wedge \theta^{\bar{\sigma}} \mod \theta \\ &= d\omega_\alpha{}^\alpha + (-2(n+1)u_{\gamma\bar{\sigma}} - 2u_{\bar{\sigma}\gamma} + n(u_{\gamma\bar{\sigma}} - u_{\bar{\sigma}\gamma}) \\ &\quad -(u_\rho{}^\rho + u_{\bar{\rho}}{}^{\bar{\rho}} + 4(n+1)u_\rho u^\rho)h_{\gamma\bar{\sigma}}\big)\,\theta^\gamma \wedge \theta^{\bar{\sigma}} \mod \theta \\ &= d\omega_\alpha{}^\alpha + (-(n+2)(u_{\gamma\bar{\sigma}} + u_{\bar{\sigma}\gamma}) \\ &\quad -(u_\rho{}^\rho + u_{\bar{\rho}}{}^{\bar{\rho}} + 4(n+1)u_\rho u^\rho)h_{\gamma\bar{\sigma}}\big)\,\theta^\gamma \wedge \theta^{\bar{\sigma}} \mod \theta. \end{aligned}$$

Como

$$\widetilde{R}_{\gamma\bar{\sigma}}\widetilde{\theta}^\gamma \wedge \widetilde{\theta}^{\bar{\sigma}} = \widetilde{R}_{\gamma\bar{\sigma}}\theta^\gamma \wedge \theta^{\bar{\sigma}} \mod \theta,$$

obtemos

$$\begin{aligned} \widetilde{R}_{\gamma\bar{\sigma}}\theta^\gamma \wedge \theta^{\bar{\sigma}} = (R_{\gamma\bar{\sigma}} - (n+2)(u_{\gamma\bar{\sigma}} + u_{\bar{\sigma}\gamma}) \\ -(u_\rho{}^\rho + u_{\bar{\rho}}{}^{\bar{\rho}} + 4(n+1)u_\rho u^\rho)h_{\gamma\bar{\sigma}}\big)\,\theta^\gamma \wedge \theta^{\bar{\sigma}} \mod \theta. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\widetilde{R}_{\gamma\bar{\sigma}} = R_{\gamma\bar{\sigma}} - (n+2)(u_{\gamma\bar{\sigma}} + u_{\bar{\sigma}\gamma}) - \big(u_\rho{}^\rho + u_{\bar{\rho}}{}^{\bar{\rho}} + 4(n+1)u_\rho u^\rho\big)\, h_{\gamma\bar{\sigma}}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\widetilde{R} &= \widetilde{R}_{\gamma}{}^{\gamma} = \widetilde{R}_{\gamma\bar{\sigma}}\widetilde{h}^{\gamma\bar{\sigma}} = e^{-2u}\widetilde{R}_{\gamma\bar{\sigma}}h^{\gamma\bar{\sigma}} \\
&= e^{-2u}\left(R_{\gamma\bar{\sigma}} - (n+2)(u_{\gamma\bar{\sigma}} + u_{\bar{\sigma}\gamma}) - (u_{\rho}{}^{\rho} + u_{\bar{\rho}}{}^{\bar{\rho}} + 4(n+1)u_{\rho}u^{\rho})h_{\gamma\bar{\sigma}}\right)h^{\gamma\bar{\sigma}} \\
&= e^{-2u}\left(R - (n+2)(u_{\gamma}{}^{\gamma} + u_{\bar{\gamma}}{}^{\bar{\gamma}}) - n(u_{\rho}{}^{\rho} + u_{\bar{\rho}}{}^{\bar{\rho}} + 4(n+1)u_{\rho}u^{\rho})\right) \\
&= e^{-2u}\left(R - 2(n+1)(u_{\gamma}{}^{\gamma} + u_{\bar{\gamma}}{}^{\bar{\gamma}}) - 4n(n+1)u_{\gamma}u^{\gamma})\right)
\end{aligned}$$

∎

2.4 Hipersuperfícies em $\mathbb{C}^{n+1}$

Iremos calcular a torção e a curvatura de uma hipersuperfície em $\mathbb{C}^{n+1}$ definida como o conjunto de zeros de uma dada função real r. Como caso particulares, estudaremos a esfera CR e o grupo de Heisenberg. Esse último é identificado com a fronteira do Domínio de Siegel em $\mathbb{C}^{n+1}$. Apresentaremos também a transformação de Cayley, que é um biholomorfismo entre o Domínio de Siegel e a bola unitária.

Denote as coordenadas de $\mathbb{C}^{n+1}$ por

$$z = (z_1, ..., z_n)\ ,\ w = z^{n+1}$$

Seja $r : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{R}$ uma função suave. Considere os conjuntos

$$\Omega = \{(z,w) : r(z,w) < 0\}$$

$$M = \{(z,w) : r(z,w) = 0\}$$

e suponha que $\nabla r \neq 0$ sobre M.
Como vimos anteriormente, M admite uma CR-estrutura induzida da estrutura complexa de $\mathbb{C}^{n+1}$. Tal estrutura é definida por

$$T_{1,0} = \mathbb{C} \otimes T(M) \cap \mathrm{span}_{\mathbb{C}}\left\{\frac{\partial}{\partial z^i} : i = 1, ..., n+1\right\}.$$

Considere a 1-forma real

$$\theta = j^*[i(\overline{\partial} - \partial)r],$$

em que $j : M \to \mathbb{C}^{n+1}$ é a inclusão e $\partial = \frac{\partial}{\partial z^i}dz^i + \frac{\partial}{\partial w}dw$ é o operador de Cauchy-Riemann de $\mathbb{C}^{n+1}$.

Proposição 2.4.1. *A 1-forma real $\theta = j^*[i(\overline{\partial} - \partial)r]$ é uma estrutura pseudohermitiana para $(M, T_{1,0})$ denominada estrutura canônica.*

Demonstração: Seja $X \in H(M)$. Então, $X = Z + \overline{Z}$ para um certo $Z \in T_{1,0}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\theta(X) &= \theta(Z + \overline{Z}) \\
&= j^*[i(\overline{\partial} - \partial)r](Z + \overline{Z}) = [i(\overline{\partial} - \partial)r]j_*(Z + \overline{Z}) \\
&= i(\overline{\partial}r(\overline{Z}) - \partial r(Z)) = 2\mathrm{Im}\{\partial r(Z)\}.
\end{aligned}$$

Agora,

$$\partial r(Z) = \frac{\partial r}{\partial z^i} dz^i(Z) + \frac{\partial r}{\partial w} dw(Z) = Zr = 0,$$

pois $Z \in \mathbb{C} \otimes T(M)$. Para $z^j = x^j + iy^j, j = 1, ..., n$ e $w = x^{n+1} + iy^{n+1}$, temos

$$\theta = \sum \left(\frac{\partial r}{\partial y^j} dx^j + \frac{\partial r}{\partial x^j} dy^j \right).$$

Como $\nabla r \neq 0$, segue que $\theta \neq 0$. Portanto, θ é uma estrutura pseudohermitiana. ∎

A partir desse momento, denotaremos θ simplesmente por $\theta = i(\overline{\partial} - \partial)r$.

Para nosso propósito, suponha que as variáveis z e w sejam separáveis em r. Ou seja,

$$r(z, w, \overline{z}, \overline{w}) = p(z, \overline{z}) + q(w, \overline{w})$$

para certas funções reais p e q. Denote

$$\begin{array}{ccc}
p_\alpha = \dfrac{\partial p}{\partial z^\alpha}, & p_{\bar{\alpha}} = \dfrac{\partial p}{\partial z^{\bar{\alpha}}}, & p_{\alpha\bar{\beta}} = \dfrac{\partial^2 p}{\partial z^\alpha \partial z^{\bar{\beta}}} = p_{\bar{\beta}\alpha}, \\
q_w = \dfrac{\partial q}{\partial w}, & q_{\overline{w}} = \dfrac{\partial q}{\partial \overline{w}}, & q_{w\overline{w}} = \dfrac{\partial^2 q}{\partial w \partial \overline{w}} = q_{\overline{w}w}.
\end{array}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\partial r &= p_\alpha dz^\alpha + q_w dw, \\
\overline{\partial} r &= p_{\bar{\alpha}} dz^{\bar{\alpha}} + q_{\overline{w}} d\overline{w},
\end{aligned}$$

donde

$$\theta = i(\overline{\partial} - \partial)r = i(p_{\bar{\alpha}} dz^{\bar{\alpha}} + q_{\overline{w}} d\overline{w} - p_\alpha dz^\alpha - q_w dw).$$

Para calcular a curvatura e a torção de (M, θ), primeiramente devemos determinar um correferencial admissível $\{\theta^\alpha\}$. Para isso, vamos supor ainda que $q_w \neq 0$ e que θ é não-degenerada.

A seguir, forneceremos um correferencial admissível para (M, θ).
Derivando θ, temos

$$d\theta = 2i(p_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge dz^{\bar{\beta}} + q_{w\overline{w}} dw \wedge d\overline{w}). \tag{2.39}$$

Agora,

$$dw \wedge d\overline{w} = \frac{1}{q_w q_{\overline{w}}} q_w dw \wedge q_{\overline{w}} d\overline{w} = \frac{1}{q_w q_{\overline{w}}} (\partial r - p_\alpha dz^\alpha) \wedge (\overline{\partial} r - p_{\bar{\beta}} dz^{\bar{\beta}}),$$

donde

$$q_{w\overline{w}} dw \wedge d\overline{w} = \frac{q_{w\overline{w}}}{q_w q_{\overline{w}}} \left(\partial r \wedge \overline{\partial} r - \partial r \wedge p_{\bar{\alpha}} dz^{\bar{\alpha}} - p_\alpha dz^\alpha \wedge \overline{\partial} r + p_\alpha p_{\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge dz^{\bar{\beta}} \right).$$

Como $(\partial + \overline{\partial})r = \nabla r$, dado $X \in T(M)$, temos

$$(\partial r + \overline{\partial} r)X = \nabla r(X) = Xr = 0.$$

Logo, $\partial r = -\overline{\partial} r$ e, assim,

$$\theta = i(\overline{\partial} - \partial)r = 2i\overline{\partial} r = -2i\partial r.$$

Denotando $Q = q_{w\overline{w}}/q_w q_{\overline{w}}$, encontramos

$$\begin{aligned} 2iq_{w\overline{w}} dw \wedge d\overline{w} &= Q \left(-2i\partial r \wedge p_{\bar{\alpha}} dz^{\bar{\alpha}} - p_\alpha dz^\alpha \wedge 2i\overline{\partial} r + 2ip_\alpha p_{\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge dz^{\bar{\beta}} \right) \\ &= Q \left(\theta \wedge p_{\bar{\alpha}} dz^{\bar{\alpha}} + \theta \wedge p_\alpha dz^\alpha r + 2ip_\alpha p_{\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge dz^{\bar{\beta}} \right). \end{aligned}$$

Substituindo em (2.39), obtemos

$$\begin{aligned} d\theta &= 2ip_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge dz^{\bar{\beta}} + Q \left(\theta \wedge p_{\bar{\alpha}} dz^{\bar{\alpha}} + \theta \wedge p_\alpha dz^\alpha r + 2ip_\alpha p_{\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge dz^{\bar{\beta}} \right) \\ &= 2i(p_{\alpha\bar{\beta}} + Qp_\alpha p_{\bar{\beta}}) dz^\alpha \wedge dz^{\bar{\beta}} + \theta \wedge Qp_\alpha dz^\alpha + \theta \wedge Qp_{\bar{\alpha}} dz^{\bar{\alpha}}. \end{aligned}$$

Defina

$$h_{\alpha\bar{\beta}} = 2(p_{\alpha\bar{\beta}} + Qp_\alpha p_{\bar{\beta}}), \quad \eta_\alpha = -Qp_\alpha, \quad \eta_{\bar{\alpha}} = \overline{\eta_\alpha} = -\overline{Q} p_{\bar{\alpha}} = -Qp_{\bar{\alpha}}.$$

Então,

$$d\theta = ih_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge dz^{\bar{\beta}} + \eta_\alpha dz^\alpha \wedge \theta + \eta_{\bar{\alpha}} dz^{\bar{\alpha}} \wedge \theta.$$

Definindo

$$\theta^\alpha = dz^\alpha + i\eta^\alpha \theta,$$

temos

$$d\theta = ih_{\alpha\bar{\beta}} \theta^\alpha \wedge \theta^{\bar{\beta}}.$$

Portanto, $\{\theta^\alpha = dz^\alpha + i\eta^\alpha \theta\}$ é um correferencial admissível para (M, θ). Observe ainda que a forma de Levi associada a θ tem representação matricial

$$h_{\alpha\bar{\beta}} = 2(p_{\alpha\bar{\beta}} + Qp_\alpha p_{\bar{\beta}}).$$

Para obter o referencial dual à $\{\theta^\alpha\}$, observe que ele satisfaz

$$df = T_\alpha f \theta^\alpha + T_{\bar{\alpha}} f \theta^{\bar{\alpha}} + Tf\theta$$

para qualquer função suave f de M. Logo,

$$T_\alpha = \frac{\partial}{\partial z^\alpha} - \frac{p_\alpha}{q_w}\frac{\partial}{\partial w}\ , \quad T = \frac{i}{2}\left(\eta^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha} + \frac{1 - p_\gamma \eta^\gamma}{q_w}\frac{\partial}{\partial w} - \eta^{\bar{\alpha}}\frac{\partial}{\partial z^{\bar{\alpha}}} - \frac{1 - p_{\bar{\gamma}}\eta^{\bar{\gamma}}}{q_{\overline{w}}}\frac{\partial}{\partial \overline{w}}\right),$$

em que T é a direção característica de $d\theta$.

Agora, podemos calcular as 1-formas de conexão e 1-formas de torção de (M, θ) com relação ao correferencial admissível $\{\theta^\alpha\}$.

Derivando $\theta^\alpha = dz^\alpha + i\eta^\alpha\theta$, temos

$$\begin{aligned} d\theta^\alpha &= id\eta^\alpha \wedge \theta + i\eta^\alpha d\theta \\ &= i(T_\beta \eta^\alpha \theta^\beta \wedge \theta + T_{\bar{\beta}}\eta^\alpha\theta^{\bar{\beta}} \wedge \theta) - \eta^\alpha h_{\beta\bar{\gamma}}\theta^\beta \wedge \theta^{\bar{\gamma}} \\ &= \theta^\beta \wedge (iT_\beta \eta^\alpha \theta - \eta^\alpha h_{\beta\bar{\gamma}}\theta^{\bar{\gamma}}) + \theta \wedge (-iT_{\bar{\gamma}}\eta^\alpha\theta^{\bar{\gamma}}). \end{aligned}$$

Seja

$$\omega_\beta{}^\alpha = iT_\beta\eta^\alpha\theta - \eta^\alpha h_{\beta\bar{\gamma}}\theta^{\bar{\gamma}} + F\theta^\beta,$$

na qual F será escolhida adequadamente de modo que $dh_{\beta\bar{\sigma}} = \omega_{\beta\bar{\sigma}} + \omega_{\bar{\sigma}\beta}$. Temos,

$$\begin{aligned} \omega_{\beta\bar{\sigma}} &= iT_\beta\eta^\alpha h_{\alpha\bar{\sigma}}\theta - \eta_{\bar{\sigma}} h_{\beta\bar{\gamma}}\theta^{\bar{\gamma}} + Fh_{\alpha\bar{\sigma}}\theta^\beta, \\ \omega_{\bar{\sigma}\beta} &= iT_{\bar{\sigma}}\eta^{\bar{\alpha}} h_{\beta\bar{\alpha}}\theta - \eta_\beta h_{\gamma\bar{\sigma}}\theta^\gamma + \overline{F}h_{\beta\bar{\alpha}}\theta^{\bar{\sigma}}, \end{aligned}$$

daí

$$dh_{\beta\bar{\sigma}} = (iT_\beta\eta^\alpha h_{\alpha\bar{\sigma}} + iT_{\bar{\sigma}}\eta^{\bar{\alpha}}h_{\beta\bar{\alpha}})\theta + (-\eta_\beta h_{\gamma\bar{\sigma}} + F\delta^\gamma_\beta h_{\alpha\bar{\sigma}})\theta^\gamma + (-\eta_{\bar{\sigma}}h_{\beta\bar{\gamma}} + \overline{F}\delta^\gamma_\beta h_{\sigma\bar{\alpha}})\theta^{\bar{\gamma}}.$$

Portanto, F necessariamente satisfaz

$$T_\gamma h_{\beta\bar{\sigma}} = -\eta_\beta h_{\gamma\bar{\sigma}} + F\delta^\gamma_\beta h_{\alpha\bar{\sigma}},$$

ou seja,

$$F\delta^\gamma_\beta h_{\alpha\bar{\sigma}} = \eta_\beta h_{\gamma\bar{\sigma}} + T_\gamma h_{\beta\bar{\sigma}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\omega_{\beta\bar{\sigma}} &= iT_\beta\eta^\alpha h_{\alpha\bar{\sigma}}\theta - \eta_{\bar{\sigma}}h_{\beta\bar{\gamma}}\theta^{\bar{\gamma}} + Fh_{\alpha\bar{\sigma}}\theta^\beta \\
&= iT_\beta\eta^\alpha h_{\alpha\bar{\sigma}}\theta - \eta_{\bar{\sigma}}h_{\beta\bar{\gamma}}\theta^{\bar{\gamma}} + F\delta_\beta^\gamma h_{\alpha\bar{\sigma}}\theta^\gamma \\
&= (\eta_\beta h_{\gamma\bar{\sigma}} + T_\gamma h_{\beta\bar{\sigma}})\theta^\gamma - \eta_{\bar{\sigma}}h_{\beta\bar{\gamma}}\theta^{\bar{\gamma}} + iT_\beta\eta^\alpha h_{\alpha\bar{\sigma}}\theta.
\end{aligned}$$

Além disso, as 1-formas de torção são dadas por $\tau^\alpha = -iT_{\bar{\gamma}}\eta^\alpha\theta^{\bar{\gamma}}$. Podemos resumir esses resultados na seguinte proposição:

Proposição 2.4.2. *Seja M a hipersuperfície de $\mathbb{C}^{n+1}$ munida da CR-estrutura induzida da estrutura complexa dada por*

$$M = \{(z, w) : r(z, w) = 0\},$$

onde r é uma função suave. Se $\nabla r \neq 0$, então $\theta = i(\overline{\partial} - \partial)r$ é uma estrutura pseudohermitiana para M. Além disso, se $r(z, w, \overline{z}, \overline{w}) = p(z, \overline{z}) + q(w, \overline{w})$ com $q_w \neq 0$ e θ é não-degenerada, então

$$\theta^\alpha = dz^\alpha + i\eta^\alpha\theta$$

é um correferencial admissível para (M, θ) com referencial dual

$$T_\alpha = \frac{\partial}{\partial z^\alpha} - \frac{p_\alpha}{q_w}\frac{\partial}{\partial w}$$

e direção característica

$$T = \frac{i}{2}\left(\eta^\alpha\frac{\partial}{\partial z^\alpha} + \frac{1 - p_\gamma\eta^\gamma}{q_w}\frac{\partial}{\partial w} - \eta^{\bar{\alpha}}\frac{\partial}{\partial z^{\bar{\alpha}}} - \frac{1 - p_{\bar{\gamma}}\eta^{\bar{\gamma}}}{q_{\overline{w}}}\frac{\partial}{\partial \overline{w}}\right)$$

em que $\eta_\alpha = -Qp_\alpha,\ Q = q_{w\overline{w}}/q_w q_{\overline{w}}$.
Com relação à esse correferencial a forma de Levi é dada por

$$h_{\alpha\bar{\beta}} = 2(p_{\alpha\bar{\beta}} + Qp_\alpha p_{\bar{\beta}})$$

e as 1-formas de conexão e as 1-formas de torção são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned}
\omega_\beta{}^\alpha &= (\eta_\beta\delta_\gamma^\alpha + T_\gamma h_{\beta\bar{\sigma}}h^{\alpha\bar{\sigma}})\theta^\gamma - \eta^\alpha h_{\beta\bar{\gamma}}\theta^{\bar{\gamma}} + iT_\beta\eta^\alpha\theta, \\
\tau^\alpha &= -iT_{\bar{\gamma}}\eta^\alpha\theta^{\bar{\gamma}}.
\end{aligned}$$

Esses resultados possibilitam obter a curvatura de Webster $R_{\beta\bar{\alpha}\rho\bar{\sigma}}$ de (M, θ). Como vimos anteriormente, as 1-formas de conexão e 1-formas de torção satisfazem

$$d\omega_{\beta\bar{\sigma}} - \omega_\beta{}^\gamma \wedge \omega_\gamma{}^\alpha = R_\beta{}^\alpha{}_{\rho\bar{\sigma}}\theta^\rho \wedge \theta^{\bar{\sigma}} + i\theta_\beta \wedge \tau^\alpha - \tau_\beta \wedge \theta^\alpha \mod \theta.$$

Após uma longa conta, comparamos os coeficientes de $\theta^\rho \wedge \theta^{\bar\sigma}$ e obtemos

$$\begin{aligned} R_{\beta\bar\alpha\rho\bar\sigma} &= -T_{\bar\sigma}T_\rho h_{\beta\bar\gamma} + h^{\gamma\bar\mu}T_\rho h_{\beta\bar\mu}T_{\bar\sigma}h_{\bar\alpha\gamma} + h_{\rho\bar\sigma}\eta^\gamma T_\beta h_{\bar\alpha\gamma} - h_{\rho\bar\sigma}\eta^\gamma T_\gamma h_{\beta\bar\alpha} - h_{\bar\alpha\rho}T_{\bar\sigma}\eta_\beta \\ &\quad -h_{\beta\bar\rho}T_\rho\eta_{\bar\alpha} - h_{\rho\bar\sigma}T_\beta\eta_{\bar\alpha} - \eta_\beta\eta_{\bar\alpha}h_{\rho\bar\sigma} - \eta_\gamma\eta^\gamma h_{\beta\bar\sigma}h_{\rho\bar\alpha}. \end{aligned}$$

2.4.1 A esfera CR

A esfera S^{2n+1} pode ser vista como o conjunto de zeros da função

$$r : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{R}\,,$$
$$r(z,\overline{z},w,\overline{w}) = z^\alpha z^{\bar\alpha} + w\overline{w} - 1.$$

Como $\nabla r \neq 0$, a 1-forma real

$$\hat\theta = i(\overline{\partial} - \partial)r = i(z^\gamma dz^{\bar\gamma} - z^{\bar\gamma}dz^\gamma + wd\overline{w} - \overline{w}dw)$$

é uma estrutura pseudohermitiana (canônica) para S^{2n+1}. Além disso, observe que podemos definir

$$p(z,\overline{z}) = z^\alpha z^{\bar\alpha} \quad , \quad q(w,\overline{w}) = w\overline{w} - 1,$$

donde

$$p_\alpha = z^{\bar\alpha}, \quad p_{\bar\alpha} = z^\alpha, \quad p_{\alpha\bar\beta} = \delta_{\alpha\bar\beta}$$
$$q_w = \overline{w}, \quad q_{\overline{w}} = w, \quad q_{w\overline{w}} = 1.$$

Considerando a vizinhança da esfera onde $w \neq 0$, teremos

$$Q = \frac{1}{|w|^2}\,, \quad \eta_\alpha = -\frac{z^{\bar\alpha}}{|w|^2}.$$

A forma de Levi é dada por

$$h_{\alpha\bar\beta} = 2\delta_{\alpha\bar\beta} + 2\frac{z^{\bar\alpha}z^\beta}{|w|^2}$$

que é uma forma não-degenerada. Portanto, o correferencial admissível para $(S^{2n+1},\hat\theta)$ definido em $w \neq 0$ é

$$\theta^\alpha = dz^\alpha - i\frac{z^\sigma}{|w|^2}h^{\alpha\bar\sigma}\theta$$

com referencial dual

$$T_\alpha = \frac{\partial}{\partial z^\alpha} - \frac{z^{\bar\alpha}}{\overline{w}}\frac{\partial}{\partial w}$$

e direção característica

$$T = \frac{i}{2}(z^\gamma \frac{\partial}{\partial z^\gamma} + w\frac{\partial}{\partial w} - z^{\bar\gamma}\frac{\partial}{\partial z^{\bar\gamma}} - \overline{w}\frac{\partial}{\partial \overline{w}}).$$

Em $z = 0$, temos

$$h_{\alpha\bar\beta} = 2\delta_{\alpha\bar\beta}\ ,\ \ T_\gamma h_{\alpha\bar\beta} = T_{\bar\gamma} h_{\alpha\bar\beta} = 0.$$

Além disso,

$$T_\gamma \eta^\alpha = T_\gamma \eta_{\bar\sigma} h^{\alpha\bar\sigma}\ ,\quad T_\gamma \eta^{\bar\sigma} = T_\gamma \eta_\alpha h^{\alpha\bar\sigma}.$$

Como

$$T_\gamma \eta_{\bar\sigma} = T_\gamma\left(-\frac{z^\sigma}{|w|^2}\right) = \frac{-|w|^2 T_\gamma z^\sigma + z^\sigma T_\gamma |w|^2}{|w|^4} = \frac{-|w|^2\delta_{\gamma\sigma} - z^\sigma z^{\bar\gamma}}{|w|^4} = -\frac{\delta_{\gamma\sigma}}{|w|^2},$$

$$T_\gamma \eta_\alpha = T_\gamma\left(-\frac{z^{\bar\alpha}}{|w|^2}\right) = \frac{-|w|^2 T_\gamma z^{\bar\alpha} + z^{\bar\alpha} T_\gamma |w|^2}{|w|^4} = \frac{-z^{\bar\alpha}z^{\bar\gamma}}{|w|^2} = 0,$$

em $z = 0$, encontramos

$$\tau^\alpha = -iT_{\bar\gamma}\eta^\alpha\theta^{\bar\gamma} = 0,$$

$$R_{\beta\bar\alpha\rho\bar\sigma} = h_{\beta\bar\alpha}h_{\rho\bar\sigma} + h_{\rho\bar\alpha}h_{\beta\bar\sigma}.$$

Conseqüentemente,

$$R_{\rho\bar\sigma} = h_{\rho\bar\sigma} + \delta_\rho^\beta h_{\beta\bar\sigma} = (n+1)h_{\rho\bar\sigma},$$

$$R = R_\rho{}^\rho = n(n+1).$$

Para ver que $\tau^\alpha = 0$ e que $R_{\rho\bar\sigma} = (n+1)h_{\rho\bar\sigma}$ em toda esfera, observe que o grupo unitário $U(n+1)$ age transitivamente sobre S^{2n+1} e preserva a estrutura pseudohermitiana $\hat\theta$. Além disso, o grupo de isotropia em $(0,1)$ é $U(n)\times U(1) \subset U(n+1)$. Portanto, S^{2n+1} pode ser vista como a variedade homogênea

$$S^{2n+1} \approx U(n+1)/U(n)\times U(1)$$

e, conseqüentemente, como $\tau^\alpha = 0$ e $R_{\rho\bar\sigma} = (n+1)h_{\rho\bar\sigma}$ em $(0,1)$, segue que $\tau^\alpha = 0$ e $R_{\rho\bar\sigma} = (n+1)h_{\rho\bar\sigma}$ em toda esfera.

Definição 2.4.1. *Uma estrutura pseudohermitiana θ é dita **pseudo-Einstein** , se*

$$R_{\alpha\bar\beta} = \frac{R}{n}h_{\alpha\bar\beta}.$$

Em resumo, temos:

Proposição 2.4.3. *A esfera CR $(S^{2n+1},\hat\theta)$ é uma variedade pseudohermitiana estritamente pseudoconvexa com torção pseudohermitiana identicamente nula e com curvatura* *escalar constante $R = n(n+1)$. Além disso, a estrutura pseudohermitiana canônica $\hat{\theta}$ é pseudo-Einstein.*

2.4.2 O grupo de Heisenberg

O **domínio de Siegel** é o domínio

$$\Omega = \{(z,w) \in \mathbb{C}^{n+1} : z^\alpha z^{\bar{\alpha}} + \tfrac{i}{2}(w - \overline{w}) < 0\}.$$

Sua fronteira $\partial\Omega$ é a variedade

$$M = \{(z,w) : r(z,\overline{z},w,\overline{w}) = 0\},$$

em que $r(z,\overline{z},w,\overline{w}) = z^\alpha z^{\bar{\alpha}} + \frac{i}{2}(w-\overline{w})$. Temos

$$\nabla r = z^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha} + z^{\bar{\alpha}} \frac{\partial}{\partial z^{\bar{\alpha}}} + \frac{i}{2}(\frac{\partial}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial \overline{w}}) \neq 0 \text{ em } M.$$

Portanto,

$$\theta = i(\overline{\partial} - \partial)r = i(z^\gamma dz^{\bar{\gamma}} - z^{\bar{\gamma}} dz^\gamma - \frac{i}{2}(dw - d\overline{w})) = i(z^\gamma dz^{\bar{\gamma}} - z^{\bar{\gamma}} dz^\gamma) + \frac{dw - d\overline{w}}{2}$$

é uma estrutura pseudohermitiana (canônica) para M. Além disso, observe que podemos definir

$$p(z,\overline{z}) = z^\alpha z^{\bar{\alpha}}\ , \quad q(w,\overline{w}) = \tfrac{i}{2}(w - \overline{w}),$$

donde

$$\begin{array}{lll} p_\alpha = z^{\bar{\alpha}}, & p_{\bar{\alpha}} = z^\alpha & , p_{\alpha\bar{\beta}} = \delta_{\alpha\bar{\beta}} \\ q_w = i/2, & q_{\overline{w}} = -i/2 & , q_{w\overline{w}} = 0 \end{array}$$

Também temos

$$Q = 0\ , \quad \eta_\alpha = 0.$$

A forma de Levi é dada por

$$h_{\alpha\bar{\beta}} = 2\delta_{\alpha\bar{\beta}},$$

que é uma forma não-degenerada. Portanto, o correferencial admissível para (M,θ) definido em todo M é

$$\theta^\alpha = dz^\alpha$$

com referencial dual

$$T_\alpha = \frac{\partial}{\partial z^\alpha} + 2iz^{\bar{\alpha}} \frac{\partial}{\partial w}$$

e direção característica
$$T = \frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial \overline{w}}.$$
As 1-formas de conexão e 1-formas de torção são identicamente nulas. Portanto, a curvatura de Webster $R_{\beta\bar{\alpha}\rho\bar{\sigma}}$ também é identicamente nula.

A fronteira do domínio de Siegel é o modelo plano da geometria pseudohermitiana. Identificaremos esse modelo com o grupo de Heisenberg $\mathbb{H}^n$.

Definição 2.4.2. *O* ***grupo de Heisenberg*** $\mathbb{H}^n$ *é a variedade* $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ *munida do produto*

$$(z,t).(z',t') = (z + z', t + t' + Im\{\, z.\overline{z'}\})$$

em que $z, z' \in \mathbb{C}^n$ *e* $t, t' \in \mathbb{R}$.

Se $(z, w) \in M$, então $z^\alpha z^{\bar{\alpha}} = \mathrm{Im}\{w\}$. Assim, $w = \mathrm{Re}\{w\} + iz^\alpha z^{\bar{\alpha}}$ e, portanto, M é parametrizado por $C^n \times \mathbb{R}$ via a parametrização

$$\begin{array}{rcl} f : C^n \times \mathbb{R} & \to & M \\ (z,t) & \mapsto & (z, t + iz^\alpha z^{\bar{\alpha}}) \end{array}$$

cuja inversa é

$$\begin{array}{rcl} f^{-1} : M & \to & C^n \times \mathbb{R} \\ (z,w) & \mapsto & (z, \dfrac{w + \overline{w}}{2}) \end{array}$$

A parametrização f é um difeomorfismo suave que permite transportar a estrutura pseudohermitiana de M e sua geometria para $\mathbb{H}^n$, tornando-o o modelo plano padrão da geometria pseudohermitiana. Temos

$$f^* dz^\alpha = dz^\alpha, \ \alpha = 1, ..., n,$$
$$f^* \left(\frac{dw + d\overline{w}}{2} \right) = dt.$$

Portanto,
$$\Theta := f^*\theta = i(z^\alpha dz^{\bar{\alpha}} - z^{\bar{\alpha}} dz^\alpha) + dt$$

é a estrutura pseudohermitiana canôninca de $\mathbb{H}^n$. O correferencial admissível canônico para $(\mathbb{H}^n, \Theta)$ é $\{\theta^\alpha = dz^\alpha\}$ com referencial dual $\{Z_\alpha\}$ caracterizado por

$$df = Z_\gamma \theta^\gamma + Z_{\bar{\gamma}} \theta^{\bar{\gamma}} + Zf\theta$$

para toda função suave $f : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$. Logo,

$$Z_\alpha = \frac{\partial}{\partial z^\alpha} + i z^{\bar{\alpha}} \frac{\partial}{\partial t} \,, \quad Z = \frac{\partial}{\partial t}.$$

2.4.3 A transformação de Cayley

A **transformação de Cayley** $C : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ é definida por

$$C(z,w) = \left(\frac{z}{1+w}, i\frac{1-w}{1+w} \right).$$

Temos,

$$\frac{z.\overline{z}}{|1+w|^2} + \frac{i}{2}\left(\left(i\frac{1-w}{1+w} \right) - \left(-i\frac{1-\overline{w}}{1+\overline{w}} \right) \right) = \frac{z.\overline{z} + w\overline{w} - 1}{|1+w|^2}.$$

Em particular, C leva a bola unitária $B^{n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ biholomorficamente sobre o domínio de Siegel Ω. Com CR-estruturas induzidas da estrutura complexa de $\mathbb{C}^{n+1}$, C fornece um CR-isomorfismo de $S_*^{2n+1} := S^{2n+1} - \{(0,-1)\}$ sobre a fronteira do domínio de Siegel $M := \partial\Omega$. Usando a parametrização $f : \mathbb{H}^n \to M$, obtemos um CR-isomorfismo

$$F : S_*^{2n+1} \to \mathbb{H}^n$$

definido como a composta $F = f^{-1} \circ C$. Denominaremos tal CR-isomorfismo também como transformação de Cayley. Nas coordenadas (z,w), a expressão de F é dada por

$$F(z,w) = \left(\frac{z}{1+w}, -i\frac{w-\overline{w}}{|1+w|^2} \right). \tag{2.40}$$

Como F é um CR-isomorfismo, existe uma função $\eta \neq 0$ sobre S_*^{2n+1} tal que

$$F^*\Theta = \eta\hat{\theta}.$$

Seja T a direção característica de $d\hat{\theta}$. Então,

$$\eta = \eta\hat{\theta}(T) = F^*\Theta(T) = \Theta F_*(T).$$

Para determinar F_*T, observe que

$$C_*\frac{\partial}{\partial z^\alpha} = \frac{1}{1+w}\frac{\partial}{\partial z^\alpha} \,, \qquad C_*\frac{\partial}{\partial w} = -\frac{1}{(1+w)^2}\left(z^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha} + 2i\frac{\partial}{\partial w} \right),$$
$$f_*^{-1}\frac{\partial}{\partial z^\alpha} = \frac{\partial}{\partial z^\alpha} \,, \qquad f_*^{-1}\frac{\partial}{\partial w} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}.$$

Como
$$T=\frac{i}{2}(z^{\gamma}\frac{\partial}{\partial z^{\gamma}}+w\frac{\partial}{\partial w}-z^{\bar{\gamma}}\frac{\partial}{\partial z^{\bar{\gamma}}}-\overline{w}\frac{\partial}{\partial \overline{w}}),$$
encontramos
$$C_*T=\frac{i}{2}\left(\frac{z^{\gamma}}{(1+w)^2}\frac{\partial}{\partial z^{\gamma}}-\frac{z^{\bar{\gamma}}}{(1+\overline{w})^2}\frac{\partial}{\partial z^{\bar{\gamma}}}\right)+\frac{w}{(1+w)^2}\frac{\partial}{\partial w}+\frac{\overline{w}}{(1+\overline{w})^2}\frac{\partial}{\partial \overline{w}},$$
donde
$$F_*(T)=f_*^{-1}C_*(T)=\frac{iz^{\gamma}}{2(1+w)^2}Z_{\gamma}-\frac{iz^{\bar{\gamma}}}{2(1+\overline{w})^2}Z_{\bar{\gamma}}+\frac{1}{|1+w|^2}Z.$$
Portanto,
$$\eta=\Theta F_*(T)=\frac{1}{|1+w|^2}.$$
Denotaremos os elementos de volumes naturais associados as estruturas pseudohermitianas canônicas Θ e $\hat{\theta}$, respectivamente, por

$$dV_{\Theta}=\Theta\wedge d\Theta^n \quad \text{e} \quad dV_{\hat{\theta}}=\hat{\theta}\wedge d\hat{\theta}^n.$$

Temos,

$$\begin{aligned} F^*dV_{\Theta} &= F^*\Theta\wedge d\Theta^n \\ &= F^*\Theta\wedge(F^*d\Theta)^n \\ &= F^*\Theta\wedge(dF^*\Theta)^n \\ &= \eta^{n+1}\hat{\theta}\wedge d\hat{\theta}^n \\ &= |1+w|^{-2(n+1)}dV_{\hat{\theta}}. \end{aligned}$$

Assim, derivamos

$$F^*\Theta = |1+w|^{-2}\hat{\theta}, \tag{2.41}$$
$$F^*dV_{\Theta} = |1+w|^{-2(n+1)}dV_{\hat{\theta}}. \tag{2.42}$$

Observe, pela identidade (2.41), que a transformação de Cayley não é pseudohermitiana.

Capítulo

3

A σ_k-curvatura pseudohermitiana

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 3$. O tensor curvatura de Riemann será denotado por Rm_g e visto como um tensor do tipo $(4,0)$. Denotaremos também o tensor de Ricci e a curvatura escalar por Ric_g e R_g, respectivamente. Existe uma decomposição de Rm_g como a soma

$$Rm_g = W_g + S_g \odot g \ ,$$

na qual W_g é tensor Weyl de g, S_g é um tensor do tipo $(2,0)$ denominado tensor de Schouten de g e $\odot$ representa o produto de Kulkarni-Nomizu. É bem conhecido que o tensor de Weyl é conformemente invariante. Portanto, para estudar deformações conformes de métricas podemos nos concentrar no estudo do tensor de Schouten.

Um estudo das k-ésimas funções elementares simétricas do tensor de Schouten foi iniciado por Viaclovsky em [41]. Ele definiu a σ_k-curvatura de g como

$$\sigma_k(g) := \sigma_k(g^{-1}S_g) \ ,$$

onde $g^{-1}S_g$ é dada localmente por $(g^{-1}S_g)^i_j = g^{ik}(S_g)_{kj}$. Do fato de $g^{-1}S_g$ ser uma matriz simétrica e de σ_k ser invariante por mudanças de coordenadas, temos que σ_k está bem definida sobre o espectro de $g^{-1}S_g$. Denotando o espectro de $g^{-1}S_g$ por $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$, em que $\{\lambda_n \leq \ldots \leq \lambda_1\}$. Assim,

$$\sigma_k(g) = \sum_{i_1 < \ldots < i_k} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_k} \ .$$

Para $k = 1$, temos

$$\sigma_1(g) = \frac{R_g}{2(n-1)} \ ,$$

ou seja, a σ_1-curvatura é um múltiplo constante da curvatura escalar R_g. Portanto σ_k é uma boa generalização da curvatura escalar.

Nesse capítulo faremos sobre variedades CR, uma construção análoga à feita por Viaclovsky em [41] sobre variedades Riemannianas. A primeira coisa que precisamos fazer é encontrar um tensor que na geometria CR desempenha o mesmo papel do tensor de Schouten. Denominaremos tal tensor como tensor de Schouten pseudohermitiano.

3.1 O tensor de Schouten pseudohermitiano

Seja (M, θ) uma variedade pseudohermitiana. O **tensor curvatura pseudoconforme** (ou **tensor de Chern**), introduzido por Chern e Moser em [12], é o tensor Ch do tipo $(3,1)$ com componentes

$$(3.1)\quad \begin{aligned} C_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\lambda\bar{\sigma}} = R_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\lambda\bar{\sigma}} &- \frac{1}{n+2}\left\{R_{\beta}{}^{\alpha}h_{\lambda\bar{\sigma}} + R_{\lambda}{}^{\alpha}h_{\beta\bar{\sigma}} + \delta^{\alpha}_{\beta}R_{\lambda\bar{\sigma}} + \delta^{\alpha}_{\lambda}R_{\beta\bar{\sigma}}\right\} \\ &+ \frac{R}{(n+1)(n+2)}\left\{\delta^{\alpha}_{\beta}h_{\lambda\bar{\sigma}} + \delta^{\alpha}_{\lambda}h_{\beta\bar{\sigma}}\right\}, \end{aligned}$$

em que $R_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\lambda\bar{\sigma}}$ é a curvatura pseudohermitiana, $R_{\beta\overline{\mu}}$ o tensor de Ricci pseudohermitiano, R a curvatura escalar pseudohermitiana e $h_{\alpha\bar{\beta}}$ é a forma de Levi (todos estão associados à estrutura θ).

Observe que $C_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\lambda\bar{\sigma}}$ é similar ao tensor curvatura conforme (ou tensor de Weyl) introduzido por Weyl (veja [15]), porém visto como um tensor do tipo $(3,1)$.

Sejam $C_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\lambda\bar{\sigma}}$ e $\widetilde{C}_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\lambda\bar{\sigma}}$ os tensores de Chern associados à θ e $\widetilde{\theta}$, respectivamente. Se $\widetilde{\theta} = f\theta$, então

$$\widetilde{C}_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\lambda\bar{\sigma}} = fC_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\lambda\bar{\sigma}}.$$

Além disso, $C_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\lambda\bar{\sigma}} = 0$ quando $n = 1$ e, para $n > 1$, temos que $C_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\lambda\bar{\sigma}} = 0$ se, e somente se, M é localmente CR-equivalente à esfera $(S^{2n+1}, \hat{\theta})$. Portanto é natural buscar um tensor análogo ao tensor de Schouten, porém no contexto da geometria CR, na decomposição do tensor de Chern.

Fazendo uma contração de (3.1) com a forma de Levi $h_{\alpha\overline{\mu}}$, obtemos

$$\begin{aligned} C_{\beta\overline{\mu}\lambda\bar{\sigma}} = C_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\lambda\bar{\sigma}}h_{\alpha\overline{\mu}} = R_{\beta\overline{\mu}\lambda\bar{\sigma}} &- \frac{1}{n+2}\left\{R_{\beta\overline{\mu}}h_{\lambda\bar{\sigma}} + R_{\lambda\overline{\mu}}h_{\beta\bar{\sigma}} + R_{\lambda\bar{\sigma}}h_{\beta\overline{\mu}} + R_{\beta\bar{\sigma}}h_{\lambda\overline{\mu}}\right\} \\ &+ \frac{R}{(n+1)(n+2)}\left\{h_{\lambda\bar{\sigma}}h_{\beta\overline{\mu}} + h_{\beta\bar{\sigma}}h_{\lambda\overline{\mu}}\right\}. \end{aligned}$$

Defina o produto $\boxdot$ sobre $(2,0)$ tensores por

$$\begin{aligned} (K \boxdot S)(X,Y,Z,W) &= K(X,Y)S(Z,W) + S(X,Y)K(Z,W) \\ &\quad + K(X,W)S(Z,Y) + S(X,W)K(Z,Y). \end{aligned}$$

Observe a analogia entre esse produto e o produto de Kulkarni-Nomizu

$$\begin{aligned}(K \odot S)(X,Y,Z,W) = &K(X,Y)S(Z,W) + S(X,Y)K(Z,W)\\ &-K(X,W)S(Z,Y) - S(X,W)K(Z,Y).\end{aligned}$$

Dado um referencial $\{T_\alpha\}$ para (M,θ), temos

$$\begin{aligned}(Ric_\theta \boxdot L_\theta)(T_\beta, T_{\overline{\mu}}, T_\lambda, T_{\bar\sigma}) &= R_{\beta\overline{\mu}}h_{\lambda\bar\sigma} + R_{\lambda\overline{\mu}}h_{\beta\bar\sigma} + R_{\lambda\bar\sigma}h_{\beta\overline{\mu}} + R_{\beta\bar\sigma}h_{\lambda\overline{\mu}}\,,\\ (L_\theta \boxdot L_\theta)(T_\beta, T_{\overline{\mu}}, T_\lambda, T_{\bar\sigma}) &= 2\left\{h_{\lambda\bar\sigma}h_{\beta\overline{\mu}} + h_{\beta\bar\sigma}h_{\lambda\overline{\mu}}\right\}.\end{aligned}$$

Portanto, podemos escrever

$$C_{\beta\overline{\mu}\lambda\bar\sigma} = R_{\beta\overline{\mu}\lambda\bar\sigma} - \left[\frac{1}{n+2}\left(Ric_\theta - \frac{R}{2(n+1)}L_\theta\right)\right] \boxdot L_\theta(T_\beta, T_{\overline{\mu}}, T_\lambda, T_{\bar\sigma}).$$

Definindo

$$S_\theta = \frac{1}{n+2}\left(Ric_\theta - \frac{R}{2(n+1)}L_\theta\right),$$

obtemos

$$R = C + S_\theta \boxdot L_\theta.$$

Como o tensor de Chern é CR-invariante, para estudar deformações conformes de estruturas pseudohermitianas, podemos nos concentrar no estudo do tensor S_θ.

Definição 3.1.1. *O **tensor de Schouten pseudohermitiano** associado à θ é o tensor do tipo $(2,0)$ definido por*

$$S_{\alpha\bar\beta} = \frac{1}{n+2}\left(R_{\alpha\bar\beta} - \frac{R}{2(n+1)}h_{\alpha\bar\beta}\right). \tag{3.2}$$

Claramente $S_{\alpha\bar\beta}$ é Hermitiano sobre $T_{1,0}(M)$. Utilizando as extensões naturais de $R_{\alpha\bar\beta}$ e $h_{\alpha\bar\beta}$ apresentadas anteriormente, podemos estender $S_{\alpha\bar\beta}$ à todo $\mathbb{C}\otimes T(M)$. Com essas extensões, S_θ herda as seguintes propriedades

$$S_{\alpha\bar\beta} = S_{\bar\beta\alpha} \quad , \quad \overline{S_{\alpha\bar\beta}} = S_{\bar\alpha\beta}.$$

Sobre $\mathbb{C}\otimes T(M)$, o tensor S_θ possui a seguinte representação matricial (com relação à um referencial fixado)

$$S_\theta : \begin{bmatrix} i\left(\frac{n-1}{n+2}\right)A_{\alpha\beta} & S_{\bar\alpha\beta} & \frac{1}{n+2}A_{\alpha\beta;}{}^{\sigma} \\ S_{\alpha\bar\beta} & -i\left(\frac{n-1}{n+2}\right)A_{\bar\alpha\bar\beta} & \frac{1}{n+2}A_{\alpha\beta;}{}^{\bar\sigma} \\ 0 & 0 & 0\end{bmatrix}.$$

Novamente, como no caso do tensor de Ricci pseudohermitiano, $S_{\alpha\bar{\beta}}$ não determina S_θ, salvo quando a torção pseudohermitana é nula.

Veremos agora como o tensor de Schouten pseudohermitiano se comporta sob deformações conformes de estruturas pseudohermitianas. Sejam $\widetilde{\theta} = e^{2u}\theta$, onde $u \in C^\infty(M)$, e $\{\widetilde{\theta}^\alpha = \theta^\theta + 2iu^\alpha\theta\}$ o correferencial admissível para $(M, \widetilde{\theta})$ introduzido anteriormente. Como vimos

$$
\begin{aligned}
\widetilde{R}_{\alpha\bar{\beta}} &= R_{\alpha\bar{\beta}} - (n+2)(u_{\alpha\bar{\beta}} + u_{\bar{\beta}\alpha}) - (u_\gamma{}^\gamma + u_{\bar{\gamma}}{}^{\bar{\gamma}} + 4(n+1)u_\gamma u^\gamma)h_{\alpha\bar{\beta}}, \\
\widetilde{R} &= e^{-2u}(R - 2(n+1)(u_\gamma{}^\gamma + u_{\bar{\gamma}}{}^{\bar{\gamma}}) - 4n(n+1)u_\gamma u^\gamma), \\
\widetilde{h}_{\alpha\bar{\beta}} &= e^{2u}h_{\alpha\bar{\beta}}.
\end{aligned}
$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
\widetilde{S}_{\alpha\bar{\beta}} &= \frac{1}{n+2}\left(\widetilde{R}_{\alpha\bar{\beta}} - \frac{\widetilde{R}}{2(n+1)}\widetilde{h}_{\alpha\bar{\beta}}\right) \\
&= \frac{1}{n+2}\left(R_{\alpha\bar{\beta}} - (n+2)(u_{\alpha\bar{\beta}} + u_{\bar{\beta}\alpha}) - (u_\gamma{}^\gamma + u_{\bar{\gamma}}{}^{\bar{\gamma}} + 4(n+1)u_\gamma u^\gamma)h_{\alpha\bar{\beta}}\right) \\
&\quad - \frac{1}{n+2}\left(\frac{e^{-2u}(R - 2(n+1)(u_\gamma{}^\gamma + u_{\bar{\gamma}}{}^{\bar{\gamma}}) - 4n(n+1)u_\gamma u^\gamma)}{2(n+1)}\right)e^{2u}h_{\alpha\bar{\beta}} \\
&= \frac{1}{n+2}R_{\alpha\bar{\beta}} - (u_{\alpha\bar{\beta}} + u_{\bar{\beta}\alpha}) - \frac{u_\gamma{}^\gamma + u_{\bar{\gamma}}{}^{\bar{\gamma}} + 4(n+1)u_\gamma u^\gamma}{n+2}h_{\alpha\bar{\beta}} \\
&\quad - \frac{R}{2(n+1)(n+2)}h_{\alpha\bar{\beta}} + \frac{u_\gamma{}^\gamma + u_{\bar{\gamma}}{}^{\bar{\gamma}} + 2nu_\gamma u^\gamma}{n+2}h_{\alpha\bar{\beta}} \\
&= \frac{1}{n+2}\left(R_{\alpha\bar{\beta}} - \frac{R}{2(n+1)}h_{\alpha\bar{\beta}}\right) - (u_{\alpha\bar{\beta}} + u_{\bar{\beta}\alpha}) + \frac{(-2n-4)u_\gamma u^\gamma}{n+2}h_{\alpha\bar{\beta}}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$\widetilde{S}_{\alpha\bar{\beta}} = S_{\alpha\bar{\beta}} - (u_{\alpha\bar{\beta}} + u_{\bar{\beta}\alpha}) - 2u_\gamma u^\gamma h_{\alpha\bar{\beta}}.$$

Convém introduzir agora o seguinte produto sobre $\mathbb{C} \otimes T^*(M)$. Se $\{\theta, \theta^\alpha, \theta^{\bar{\alpha}}\}$ é um correferencial em $\mathbb{C} \otimes T^*(M)$, definimos

$$L^*_\theta(\theta^A, \theta^B) := h^{AB}$$

e estendemos linearmente à todo $\mathbb{C} \otimes T^*(M)$. Dessa maneira,

$$
\begin{aligned}
&L^*_\theta(\theta^\alpha, \theta^{\bar{\beta}}) = h^{\alpha\bar{\beta}}, \\
&L^*_\theta(\theta^{\bar{\alpha}}, \theta^\beta) = h^{\bar{\alpha}\beta} = \overline{h^{\alpha\bar{\beta}}} = h^{\beta\bar{\alpha}}, \\
&L^*_\theta(\theta^\alpha, \theta^\beta) = L^*_\theta(\theta^{\bar{\alpha}}, \theta^{\bar{\beta}}) = L^*_\theta(\theta, \theta^B) = L^*_\theta(\theta^A, \theta) = 0.
\end{aligned}
$$

Portanto, para qualquer função suave u definida em M, temos

$$\begin{aligned}
\|du\|_\theta^2 &= L_\theta^*(du, du) \\
&= L_\theta^*(u_\alpha\theta^\alpha + u_{\bar\alpha}\theta^{\bar\alpha} + u_0\theta, u_\beta\theta^\beta + u_{\bar\beta}\theta^{\bar\beta} + u_0\theta) \\
&= u_\alpha u_{\bar\beta} h^{\alpha\bar\beta} + u_{\bar\alpha} u_\beta h^{\bar\alpha\beta} \\
&= 2u_\alpha u_{\bar\beta} h^{\alpha\bar\beta} \\
&= 2u_\alpha u^\alpha.
\end{aligned}$$

Usando ainda a identidade $u_{\alpha\bar\beta} - u_{\bar\beta\alpha} = iu_0 h_{\alpha\bar\beta}$, podemos enunciar:

Proposição 3.1.1. *Seja $\widetilde\theta = e^{2u}\theta$. Em relação ao correferencial admissível $\{\widetilde\theta^\alpha = \theta^\alpha + 2u^\alpha\theta\}$ de $(M, \widetilde\theta)$, temos*

$$\widetilde S_{\alpha\bar\beta} = S_{\alpha\bar\beta} - u_{\alpha\bar\beta} - u_{\bar\beta\alpha} - \|du\|_\theta^2 h_{\alpha\bar\beta}, \tag{3.3}$$

$$\widetilde S_{\alpha\bar\beta} = S_{\alpha\bar\beta} - 2u_{\alpha\bar\beta} + (iu_0 - \|du\|_\theta^2) h_{\alpha\bar\beta}. \tag{3.4}$$

Portanto, sobre $T_{1,0}(M)$, temos

$$S_{\widetilde\theta} = S_\theta - 2\nabla^2 u + (iTu - \|du\|_\theta^2) L_\theta. \tag{3.5}$$

3.2 A σ_k-curvatura pseudohermitana

Os tensores do tipo $(2,0)$ definidos sobre $\mathbb{C}\otimes T(M)$ introduzidos até o momento, são tensores que satizfazem certas propriedades especiais que caracterizaremos agora.

Definição 3.2.1. *Seja (M,θ) uma variedade pseudohermitiana. Um tensor*

$$\begin{aligned}
K : \mathbb{C}\otimes T(M) \times \mathbb{C}\otimes T(M) &\to \mathbb{C} \\
(X, Y) &\mapsto K(X, \overline{Y})
\end{aligned}$$

será denominado pseudohermiano se, em relação a qualquer referencial $\{T_\alpha\}$, satisfizer

1. *$K_{AB} = K_{\bar A\bar B}$, (K é real)*
2. *$\overline{K_{\alpha\bar\beta}} = K_{\beta\bar\alpha}$, (K é Hermitiano sobre $T_{1,0}$)*
3. *$K_{AB} = K_{BA}, \forall A, B \in \{1, ..., n, \bar 1, ..., \bar n\}$ (K é simétrico sobre $\mathbb{C}\otimes H(M)$)*

em que $K_{AB} = K(T_A, T_B)$.

A forma de Levi associada à uma estrutura pseudohermitiana é um tensor pseudohermitiano com $h_{\alpha\beta} = 0$. O tensor de Ricci associado a conexão pseudohermitiana, Ric_θ :

$\mathbb{C} \otimes T(M) \times \mathbb{C} \otimes T(M) \to \mathbb{C}$, é um tensor pseudohermitiano com $R_{\alpha\beta} = i(n-1)A_{\alpha\beta}$. Analogamente, o tensor de Schouten $S_\theta : \mathbb{C} \otimes T(M) \times \mathbb{C} \otimes T(M) \to \mathbb{C}$ é um tensor pseudohermitiano com $S_{\alpha\beta} = i\frac{n-1}{n+2}A_{\alpha\beta}$.

Seja K um tensor pseudohermitiano. Como L_θ é não degenerada sobre $\mathbb{C} \otimes H(M)$, para cada $X \in \mathbb{C} \otimes H(M)$, existe um único $X^* \in \mathbb{C} \otimes H(M)$ tal que

$$K(X, \overline{Y}) = L_\theta(X^*, \overline{Y}), \forall\ Y \in \mathbb{C} \otimes H(M).$$

Além disso, a aplicação $X \to X^*$ é uma aplicação $\mathbb{C}$-linear. Portanto, associado à K, existe um tensor do tipo $(1,1)$ denotado por adK e definido em todo $\mathbb{C} \otimes T(M)$ por

$$\begin{aligned} &adK(X) = X^*, \forall\ X \in \mathbb{C} \otimes H(M),\\ &adK(T) = 0. \end{aligned}$$

Definição 3.2.2. *O tensor adK é denominado **representação adjunta** de K em relação à forma de Levi L_θ.*

Em relação à um referencial $\{T_\alpha\}$, temos

$$\begin{aligned} K_{\alpha\bar{\beta}} &= K(T_\alpha, T_{\bar{\beta}}) = L_\theta(adK(T_\alpha), T_{\bar{\beta}}),\\ K_{\alpha\beta} &= K(T_\alpha, T_\beta) = L_\theta(adK(T_\alpha), T_\beta). \end{aligned}$$

Escrevendo

$$adK(T_\alpha) = (adK)_\alpha{}^A T_A,$$

obtemos

$$(adK)_\alpha{}^A h_{A\bar{\beta}} = K_{\alpha\bar{\beta}}\ ,\ \ (adK)_\alpha{}^A h_{A\beta} = K_{\alpha\beta}.$$

Donde

$$(adK)_\alpha{}^\gamma h_{\gamma\bar{\beta}} = K_{\alpha\bar{\beta}}\ ,\ \ (adK)_\alpha{}^{\bar{\gamma}} h_{\bar{\gamma}\beta} = K_{\alpha\beta}.$$

Portanto,

$$(adK)_\alpha{}^\gamma = K_{\alpha\bar{\beta}} h^{\gamma\bar{\beta}}\ ,\ \ (adK)_\alpha{}^{\bar{\gamma}} = K_{\alpha\beta} h^{\bar{\gamma}\beta}.$$

Como $adK(T_\alpha) \in \mathbb{C} \otimes H(M)$, temos $(adK)_\alpha{}^0 = 0$. Logo,

$$adK(T_\alpha) = K_{\alpha\bar{\beta}} h^{\gamma\bar{\beta}} T_\gamma + K_{\alpha\beta} h^{\bar{\gamma}\beta} T_{\bar{\gamma}}.$$

Analogamente,

$$adK(T_{\bar{\alpha}}) = K_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}h^{\gamma\bar{\beta}}T_{\gamma} + K_{\bar{\alpha}\beta}h^{\bar{\gamma}\beta}T_{\bar{\gamma}} = \overline{adK(T_{\alpha})}.$$

Às vezes identificaremos K com sua representação adjunta adK. Quando fizermos essa identificação diremos que o tensor do tipo $(2,0)$ é visto como um tensor do tipo $(1,1)$ e denotaremos $(adK)_A{}^B = K_A{}^B$. A representação matricial de adK em relação ao referencial $\{T_\alpha, T_{\bar{\alpha}}, T\}$ é

$$adK : \begin{bmatrix} K_\alpha{}^\gamma & K_{\bar{\alpha}}{}^\gamma & 0 \\ K_\alpha{}^{\bar{\gamma}} & K_{\bar{\alpha}}{}^{\bar{\gamma}} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Observe que a torção peudohermitiana τ é a representação adjunta do tensor

$$A : \mathbb{C} \otimes T(M) \times \mathbb{C} \otimes T(M) \to \mathbb{C}$$

definido por

$$A_{\alpha\beta} = A^{\bar{\gamma}}{}_{\beta}h_{\alpha\bar{\gamma}} \ \ , \ \ A_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = \overline{A_{\alpha\beta}} \ \ , \ \ A_{\alpha\bar{\beta}} = A_{\bar{\alpha}\beta} = A_{0C} = A_{C0} = 0.$$

onde $\tau^{\bar{\gamma}} = A^{\bar{\gamma}}{}_{\beta}\theta^{\beta}$ são as 1-formas de torção introduzidas por Webster [46]. Claramente, como $A_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}$, A é um tensor pseudohermitiano.

Suponha que $\{T_\alpha\}$ seja um referencial pseudohermitiano. Então

$$K_\alpha{}^\gamma = K_{\alpha\bar{\beta}}h^{\gamma\bar{\beta}} = K_{\alpha\bar{\gamma}}.$$

Como $K_{\alpha\bar{\gamma}}$ é uma matriz Hermitiana, segue também que $K_{\alpha\bar{\gamma}}$ é uma matriz Hermitiana. Em todo trabalho, iremos concentrar nossa atenção no bloco Hermitiano $K_\alpha{}^\gamma$ da representação adjunta de K. Convém agora definir os invariantes associados à matrizes Hermitianas que vamos considerar.

Definição 3.2.3. *Seja A uma matriz Hermitiana de ordem n. Para $k \in \{0, 1, ..., n\}$, definimos o **k-ésimo invariante** $\sigma_k(A)$ **associado à matriz** A como a k-ésima função elementar simétrica dos autovalores de A, $\Lambda(A) = (\lambda_1, ..., \lambda_n)$, em que $\lambda_n \leq ... \leq \lambda_1$. Isto é,*

$$\sigma_k(A) = \sum_{i_1 < ... < i_k} \lambda_{i_1} \dots \lambda_{i_k} \ ,$$

*Além disso, a **k-ésima tranformação de Newton** associada à matriz A é definida por*

$$T_k(A) = \sigma_k(A)I - \sigma_{k-1}(A)A + ... + (-1)^k A^k.$$

Observações:

1. Sejam A e B matrizes Hermitianas. Então AB é uma matriz Hermitiana se, e somente

se, $AB = BA$. Potanto, $T_k(A)$ é uma matriz Hermitiana.
2. Se U é uma matriz unitária, então $\sigma_k(U^*AU) = \sigma_k(A)$.
3. Se $k = 1$, então $\sigma_k(A) = \text{traço}(A)$. Se $k = n$, então $\sigma_k(A) = \det(A)$.

Resumiremos agora os principais fatos à respeito de $\sigma_k(A)$ e $T_k(A)$ em uma única proposição. A prova pode ser vista em [36]. Seja $1 \leq k \leq n$, $1 \leq i_1, ...i_k \leq n$, o símbolo generalizado de Kronecker é definido por

$$\delta^{i_1...i_k}_{j_1...j_k} = \begin{cases} 1, & \text{se } i_1, ..., i_k \text{ são distintos e } (j_1, ..., j_k) \text{ é uma permutação par de } (i_1, ..., i_k), \\ -1, & \text{se } i_1, ..., i_k \text{ são distintos e } (j_1, ..., j_k) \text{ é uma permutação ímpar de } (i_1, ..., i_k), \\ 0, & \text{nos outros casos.} \end{cases}$$

Proposição 3.2.1. *Seja $A = \left(A_i^{\ j}\right)$ uma matriz Hermitiana. Então*

$$\sigma_k(A) = \frac{1}{k!}\sum \delta^{i_1...i_k}_{j_1...j_k} A_{i_1}^{\ j_1}...A_{i_k}^{\ j_k}, \tag{3.6}$$

$$T_k(A)_j^{\ i} = \frac{1}{k!}\sum \delta^{i_1...i_k i}_{j_1...j_k j} A_{i_1}^{\ j_1}...A_{i_k}^{\ j_k}, \tag{3.7}$$

$$\sigma_1(T_k(A) \circ A) = (k+1)\sigma_{k+1}(A), \tag{3.8}$$

$$T_k(A) = \sigma_k(A)I - T_{k-1}(A)A, \tag{3.9}$$

$$\sigma_1(T_k(A)) = (n-k)\sigma_k(A). \tag{3.10}$$

Voltemos a atenção para o tensor de Schouten pseudohermitiano S_θ. Em relação a um referencial $\{T_\alpha\}$, a representação adjunta de S_θ é dada por

$$S_\theta : \begin{bmatrix} S_\alpha^{\ \gamma} & S_{\bar\alpha}^{\ \gamma} & 0 \\ S_\alpha^{\ \bar\gamma} & S_{\bar\alpha}^{\ \bar\gamma} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},$$

em que

$$S_\alpha^{\ \gamma} = S_{\alpha\bar\beta}h^{\gamma\bar\beta} = \frac{1}{n+2}\left(R_\alpha^{\ \gamma} - \frac{1}{2(n+1)}R\delta_\alpha^\gamma\right) \quad \text{e} \quad S_\alpha^{\ \bar\gamma} = S_{\alpha\beta}h^{\beta\bar\gamma} = i\frac{n-1}{n+2}A_\alpha^{\ \bar\gamma}.$$

Note que

$$\sigma_1(S_\alpha^{\ \gamma}) = S_\alpha^{\ \alpha} = \frac{1}{n+2}\left(R_\alpha^{\ \alpha} - \frac{1}{2(n+1)}R\delta_\alpha^\alpha\right) = \frac{1}{n+2}\left(\frac{2(n+1)R - Rn}{2(n+1)}\right).$$

Portanto,

$$\sigma_1(S_\alpha^{\ \gamma}) = \frac{R}{2(n+1)},$$

mostrando que o k-ésimo invariante σ_k de $S_\alpha^{\ \gamma}$ é uma boa generalização da curvatura escalar pseudohermitiana R associada à estrutura pseudohermitiana θ.

Definição 3.2.4. *Seja (M,θ) uma variedade pseudohermitiana. A **σ_k-curvatura pseudohermitiana** de (M,θ) é definida por*

$$\sigma_k(\theta) = \sigma_k(S_\alpha{}^\gamma),$$

em que $S_{\alpha\bar{\beta}}$ é o tensor de Schouten pseudohermitiano associado à estrutura pseudohermitiana θ.

3.3 Divergente de $(1,1)$-tensores

Finalizaremos essa capítulo definindo certos operadores sobre $(1,1)$-tensores em $\mathbb{C}\otimes T(M)$ que aparecerão posteriormente nas demonstrações dos resultados principais. Apresentaremos também uma fórmula de integração por partes envolvendo divergente de $(1,1)$-tensores, análoga à fórmula de integração por partes que aparece no caso Riemanniano.

Definição 3.3.1. *Seja K um tensor do tipo $(1,1)$ em $\mathbb{C}\otimes T(M)$. O divergente de K é o tensor do tipo $(1,0)$ definido por*

$$divK = -C_1^2(\nabla K)$$

em ∇ é a conexão pseudohermitiana de (M,θ) e C_1^2 denota a contração de tensores.

Em relação à um correferencial admissível $\{\theta^\alpha\}$ com referencial dual $\{T_\alpha\}$, as componentes do tensor $divK$ podem ser calculadas da seguinte maneira:

Seja $K = K_B{}^A T_A\otimes\theta^B$. Então

$$\begin{aligned}
(\nabla K)(T_C,T_D) &= \nabla_{T_D}(K(T_C)) - K(\nabla_{T_D}T_C) = \nabla_{T_D}(K_C{}^A T_A) - K(\nabla_{T_D}T_C)\\
&= K_C{}^E{}_{;D}T_E + K_C{}^A\nabla_{T_D}T_A - K_B{}^A T_A\otimes\theta^B(\nabla_{T_D}T_C)\\
&= K_C{}^E{}_{;D}T_E + K_C{}^A\Gamma^E_{DA}T_E - K_B{}^E\Gamma^B_{DC}T_E.
\end{aligned}$$

Se $\{T_\alpha\}$ é um referencial pseudohermitiano centrado em $P\in M$, então em P, temos

$$(\nabla K)(T_C,T_D) = K_C{}^A{}_{;D}T_A.$$

Donde

$$divK = -C_1^2(K_C{}^A{}_{;D}T_A\otimes\theta^C\otimes\theta^D) = -K_C{}^A{}_{;A}\theta^C.$$

Definição 3.3.2. *Seja (M,θ) uma variedade pseudohermitiana e $\{\theta^\alpha\}$ um correferencial admissível. Se K é um tensor do tipo $(1,1)$ sobre $\mathbb{C}\otimes T(M)$, definimos*

$$\delta_b(K) = K_\alpha{}^\gamma{}_{;\gamma}\theta^\alpha$$

e

$$\overline{\delta}_b(K) = K_{\bar\alpha}{}^{\bar\gamma}{}_{;\bar\gamma}\theta^{\bar\alpha} = \overline{\delta_b(K)},$$

em que $K = K_A{}^B T_A \otimes \theta^B$. O operador δ_b será denominado ***operador divergente*** *.*

Em [31], J. Lee definiu um operador denominado operador divergente e denotado por δ_b que associa funções reais à $(1,0)$-formas complexas. Com relação à um correferencial admissível $\{\theta^\alpha\}$, se $\sigma = \sigma_\alpha\theta^\alpha$, então

$$\delta_b\sigma = \sigma_{\alpha;}{}^\alpha.$$

Quando σ tem suporte compacto, o Teorema de Stokes aplicado à $2n$-forma $\theta\wedge\sigma\wedge d\theta^{n-1}$ implica na fórmula da divergência

$$\int_M \delta_b\sigma\theta\wedge d\theta^n = 0. \tag{3.11}$$

Analogamente, definindo $\overline{\delta}_b\bar\sigma = \sigma_{\bar\alpha;}{}^{\bar\alpha}$, onde $\bar\sigma = \sigma_{\bar\alpha}\theta^{\bar\alpha}$, temos

$$\int_M \overline{\delta}_b\bar\sigma\theta\wedge d\theta^n = 0. \tag{3.12}$$

Utilizando esse resultado, conseguimos a seguinte fórmula de integração por partes:

Proposição 3.3.1 (Integração por Partes)**.** *Sejam K um tensor do tipo $(1,1)$ definido em $\mathbb{C}\otimes T(M)$ e u uma função suave de M. Se K e u possuem suporte compacto, então*

$$\int_M K_\beta{}^\alpha{}_{;\alpha}u^\beta\theta\wedge d\theta^n \;=\; -\int_M K_\beta{}^\alpha u_\alpha{}^\beta\theta\wedge d\theta^n + i\int_M K_\alpha{}^\alpha u_0\theta\wedge d\theta^n \tag{3.13}$$

Se além disso $K_\alpha{}^\gamma$ é Hermitiano, então

$$\int_M \sigma_1(K\circ(-2\nabla^2 u + iTuI))dV_\theta \;=\; -2Re\int_M K_\gamma{}^\alpha{}_{;\alpha}u^\gamma dV_\theta. \tag{3.14}$$

Demonstração: Considere a $(0,1)$-forma complexa

$$\overline{\sigma} = K_\beta{}^\alpha u^\beta\theta^{\bar\alpha}.$$

Temos

$$\overline{\delta}_b\overline{\sigma} = (K_\beta{}^\alpha u^\beta)_;{}^{\bar\alpha}.$$

Supondo $\{T_\alpha\}$ pseudohermitiano, obtemos

$$\overline{\delta}_b\overline{\sigma} = K_\beta{}^\alpha{}_;{}^{\bar\alpha} u^\beta + K_\beta{}^\alpha u^{\beta\bar\alpha} = K_\beta{}^\alpha{}_{;\alpha} u^\beta + K_\beta{}^\alpha u^\beta{}_\alpha.$$

Da identidade $u_{\alpha\bar\gamma} - u_{\bar\gamma\alpha} = iu_0 h_{\alpha\bar\gamma}$, conseguimos

$$u_\alpha{}^\beta - u^\beta{}_\alpha = (u_{\alpha\bar\gamma} - u_{\bar\gamma\alpha})h^{\beta\bar\gamma} = iu_0\delta_\alpha^\beta.$$

Donde

$$\begin{aligned}\overline{\delta}_b\overline{\sigma} &= K_\beta{}^\alpha{}_{;\alpha} u^\beta + K_\beta{}^\alpha u_\alpha{}^\beta - iu_0 K_\beta{}^\alpha \delta_\alpha^\beta \\ &= K_\beta{}^\alpha{}_{;\alpha} u^\beta + K_\beta{}^\alpha u_\alpha{}^\beta - iu_0 K_\alpha{}^\alpha.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_M K_\beta{}^\alpha{}_{;\alpha} u^\beta \theta \wedge d\theta^n = -\int_M K_\beta{}^\alpha u_\alpha{}^\beta \theta \wedge d\theta^n + i\int_M K_\alpha{}^\alpha u_0 \theta \wedge d\theta^n.$$

Suponha agora que $K_\alpha{}^\gamma$ Hermitiano, isto é, $K_\alpha{}^\gamma = \overline{K_\gamma{}^\alpha}$. Então,

$$\begin{aligned}\int_M \sigma_1(K\circ(-2\nabla^2 u + iTuI))dV_\theta &= \int_M \text{traço}(K\circ(-2\nabla^2 u + iTuI))dV_\theta \\ &= \int_M K_\gamma{}^\alpha(-2(\nabla^2 u)_\alpha{}^\gamma + iu_0\delta_\alpha{}^\gamma)dV_\theta \\ &= \int_M K_\gamma{}^\alpha(-2(\nabla^2 u)_{\alpha\bar\beta} + iu_0 h_{\alpha\bar\beta})h^{\gamma\bar\beta}dV_\theta \\ &= \int_M K_\gamma{}^\alpha(-u_{\alpha\bar\beta} - u_{\bar\beta\alpha})h^{\gamma\bar\beta}dV_\theta \\ &= -\int_M K_\gamma{}^\alpha u_\alpha{}^\gamma dV_\theta - \int_M K_\gamma{}^\alpha u^\gamma{}_\alpha dV_\theta \\ &= -\int_M K_\gamma{}^\alpha u_\alpha{}^\gamma dV_\theta - \int_M \overline{K_\alpha{}^\gamma} u_{\bar\gamma}{}^{\bar\alpha} dV_\theta \\ &= -\int_M K_\gamma{}^\alpha u_\alpha{}^\gamma dV_\theta - \overline{\int_M K_\gamma{}^\alpha u_\alpha{}^\gamma dV_\theta}.\end{aligned}$$

Logo,

$$\int_M \sigma_1(K\circ(-2\nabla^2 u + iTuI))dV_\theta = -2\text{Re}\int_M K_\gamma{}^\alpha{}_{;\alpha} u^\gamma dV_\theta.$$

∎

Capítulo

4

O σ_k-problema de Yamabe sobre variedades CR

Introduzido o conceito de σ_k-curvatura pseudohermitiana, podemos propor a seguinte questão:

Dada uma variedade pseudohermitiana (M, θ), compacta, orientável e estritamente pseudoconvexa, existe uma estrutura pseudohermitiana compatível com θ, com σ_k-curvatura pseudohermitiana constante?

Na tentativa de responder a essa questão, introduziremos alguns objetos e conceitos análogos aos que surgem no contexto Riemanniano. Começaremos verificando que, quando $k = 1$, a resposta dessa questão é afirmativa e foi resolvida no caso em que M não é localmente conformemente plana e com dimensão maior que 3 por D. Jerison e J. Lee ([27], [28], [29], [30]). O restante dos casos foi resolvido por N. Gamarra e R. Yacoub ([18], [19]).

4.1 O problema de Yamabe sobre variedades CR

Dada uma variedade pseudohermitiana estritamente pseudoconvexa (M, θ), o elemento de volume $dV_\theta = \theta \wedge d\theta^n$ induz um produto interno L^2 sobre funções definido por:

$$\langle u, v \rangle_\theta = \int_M uv \, dV_\theta.$$

A forma L_θ^* também induz um produto interno L^2 sobre seções de $H^*(M)$ definido por:

$$\langle \omega, \eta \rangle_\theta = \int_M L_\theta^*(\omega, \eta) \, dV_\theta.$$

Se $r : T^*(M) \to H^*(M)$ denota a restrição e $u \in C^\infty(M)$, podemos definir uma seção $d_b u$

de $H^*(M)$ por

$$d_b u := r \circ du.$$

Definição 4.1.1. *O operador real Δ_b, definido sobre funções $u \in C_0^\infty(M)$ por*

$$\langle \Delta_b u, v \rangle_\theta = \langle d_b u, d_b v \rangle_\theta \,, \forall \;\; v \in C_0^\infty(M),$$

é denominado ***operador sublaplaciano*** *. Ou seja,*

$$\int_M \Delta_b uv \, dV_\theta = \int_M L_\theta^*(du, dv) \, dV_\theta, \forall \;\; v \in C_0^\infty(M),$$

pois $\theta \rfloor L_\theta^*$.

Em relação à um correferencial admissível $\{\theta^\alpha\}$, o sublaplaciano possui uma expressão particularmente simples em termos das derivadas covariantes [31]:

$$\Delta_b u = -(u_\gamma{}^\gamma + u_{\bar{\gamma}}{}^{\bar{\gamma}}). \tag{4.1}$$

Como vimos na seção 2.3, uma mudança de estrutura pseudohermitiana $\widetilde{\theta} = e^{2u}\theta$ fornece a seguinte transformação na curvatura escalar

$$\widetilde{R} = e^{-2u}(R - 2(n+1)(u_\gamma{}^\gamma + u_{\bar{\gamma}}{}^{\bar{\gamma}}) - 4n(n+1)u_\gamma u^\gamma),$$

que pode ser reescrita como

$$e^{2u}\widetilde{R} = R + 2(n+1)\Delta_b u - 2n(n+1)\|du\|_\theta^2.$$

Fazendo a mudança de variável $e^{2u} = v^{2c}$, em que c é uma constante e v é uma função positiva, obtemos $u = c \ln v$. Como pode-se verificar, temos

$$\Delta_b(\ln v) = \frac{1}{v}\,\Delta_b v \quad \text{e} \quad \|du\|_\theta^2 = \frac{c^2}{v^2}\,\|dv\|_\theta^2.$$

Daí,

$$\begin{aligned} v^{2c}\widetilde{R} \;\; &= \;\; R + 2c(n+1)\frac{\Delta_b v}{v} + 2c(n+1)\frac{\|dv\|_\theta^2}{v^2} - 2n(n+1)c^2\frac{\|dv\|_\theta^2}{v^2} \\ &= \;\; R + 2c(n+1)\frac{\Delta_b v}{v} + 2c(n+1)\frac{\|dv\|_\theta^2}{v^2}(1 - nc). \end{aligned}$$

Tomando $c = 1/n$, obtemos

$$v^{\frac{2}{n}}\widetilde{R} = R + (2 + \frac{2}{n})\frac{\Delta_b v}{v}.$$

Denotando $p = 2 + \dfrac{2}{n}$, temos

$$\widetilde{R} = v^{1-p}(p\,\Delta_b + R)v.$$

Dessa maneira, se θ é uma estrutura pseudohermitiana fixada e v é uma função suave e positiva de M, então uma condição necessária e suficiente para que a estrutura pseudohermitiana $\widetilde{\theta} = v^{p-2}\theta$ tenha curvatura escalar constante $\widetilde{R} \equiv \lambda$ é que v satisfaça

$$p\,\Delta_b v + Rv = \lambda v^{p-1}. \tag{4.2}$$

Essa equação é denominada **equação de Yamabe CR** e o operador

$$L[v] := (p\,\Delta_b + R)v \tag{4.3}$$

é denominado **operador de Yamabe CR** .

Como ocorre no problema de Yamabe clássico, a equação de Yamabe CR é a equação de Euler-Lagrange para o problema variacional

$$\lambda(M) = \inf\{A_\theta(v) : B_\theta(v) = 1\},$$

em que

$$A_\theta(v) := \int_M vL[v]\,dV_\theta = \int_M (p\,\|dv\|_\theta^2 + Rv^2)\,dV_\theta$$

e

$$B_\theta(v) := \int_M dV_{\widetilde{\theta}} = \int_M |v|^p dV_\theta.$$

Quando M é compacta, a desigualdade de Hölder garante que $\lambda(M) > -\infty$. Em [28], Jerison e Lee provaram o seguinte resultado.

Teorema 4.1.1. *Seja M uma variedade CR de dimensão $2n+1$, CR-integrável, compacta, orientável, estritamente pseudoconvexa e seja θ uma estrutura pseudohermitiana para M. Então*

(a) $\lambda(M)$ depende somente da CR-estrutura de M, e não de uma escolha de θ;

(b) $\lambda(M) \leq \lambda(S^{2n+1})$, onde $S^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ é a esfera CR;

(c) Se $\lambda(M) < \lambda(S^{2n+1})$, então o ínfimos $\lambda(M)$ é atingido por uma função suave u positiva, solução da equação de Yamabe CR. Portanto $\widetilde{\theta} = u^{p-2}\theta$ tem curvatura pseudohermitiana constante $\widetilde{R}$.

Além desse resultado, Jerison e Lee mostraram em [30] que quando (M, θ) não é localmente conformemente plana e $n > 1$, então $\lambda(M) < \lambda(S^{2n+1})$. Ou seja, existe uma estrutura pseudohermitiana $\widetilde{\theta}$ para M tal que $(M, \widetilde{\theta})$ tem curvatura escalar pseudohermitiana constante.

Seja (M, θ) uma variedade pseudohermitiana, orientável, compacta, estritamente pseudoconvexa. Dada $\widetilde{\theta} = e^{2u}\theta$, temos a seguinte transformação sobre o tensor de Schouten

$$\widetilde{S} = S - 2\nabla^2 u + (iTu - \|du\|_\theta^2)L_\theta,$$

em que $\widetilde{S} = S_{\widetilde{\theta}}$ e $S = S_\theta$. Suponha que $\widetilde{\theta}$ tenha σ_k-curvatura pseudohermitiana constante, ou seja,

$$\sigma_k(\widetilde{\theta}) = \lambda$$

para alguma constante λ. Como

$$\begin{aligned} \sigma_k(\widetilde{\theta}) &= \sigma_k(\widetilde{S}_\alpha{}^\gamma) = \sigma_k(\widetilde{h}^{\gamma\bar{\beta}}\widetilde{S}_{\alpha\bar{\beta}}) \\ &= e^{-2ku}\sigma_k(h^{\gamma\bar{\beta}}\widetilde{S}_{\alpha\bar{\beta}}) \\ &= e^{-2ku}\sigma_k(S_\alpha{}^\gamma - 2u_\alpha{}^\gamma + (iTu - \|du\|_\theta^2)\delta_\alpha{}^\gamma). \end{aligned}$$

Portanto $\widetilde{\theta} = e^{2u}\theta$ tem σ_k-curvatura pseudohermitiana constante se, e somente se, u satisfaz a equação

$$\sigma_k(S - 2\nabla^2 u + (iTu - \|du\|_\theta^2)L_\theta) = \lambda e^{2ku}$$

para alguma constante λ. Nessa equação $S - 2\nabla^2 u + (iTu - \|du\|_\theta^2)L_\theta$ é visto como um tensor do tipo $(1,1)$

Definição 4.1.2. *A equação*

$$\sigma_k(S - 2\nabla^2 u + (iTu - \|du\|_\theta^2)L_\theta) = \lambda e^{2ku} \tag{4.4}$$

*em que λ é uma constante e $S - 2\nabla^2 u + (iTu - \|du\|_\theta^2)L_\theta$ é visto como um tensor do tipo $(1,1)$, é denominada **σ_k-equação de Yamabe CR**.*

Quando $k = 1$, obtemos

$$\begin{aligned} \sigma_1\left(S - 2\nabla^2 u + (iTu - \|du\|_\theta^2)L_\theta\right) &= \text{traço}\left((S_{\alpha\bar{\beta}} - 2u_{\alpha\bar{\beta}} + (iu_0 - \|du\|_\theta^2)h_{\alpha\bar{\beta}})h^{\gamma\bar{\beta}}\right) \\ &= \text{traço}\left((S_{\alpha\bar{\beta}} - 2u_{\alpha\bar{\beta}} + iu_0 h^{\gamma\bar{\beta}} - \|du\|_\theta^2 h_{\alpha\bar{\beta}}h^{\gamma\bar{\beta}}\right) \\ &= \text{traço}\left(S_\alpha{}^\gamma - u_\alpha{}^\gamma - u^\gamma{}_\alpha - \|du\|_\theta^2\delta_\alpha{}^\gamma\right) \\ &= S_\alpha{}^\alpha - u_\alpha{}^\alpha - u_{\bar{\alpha}}{}^{\bar{\alpha}} - \|du\|_\theta^2\delta_\alpha{}^\alpha \\ &= \frac{R}{2(n+1)} + \Delta_b u - n\|du\|_\theta^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\frac{e^{-2u}}{2(n+1)}\left(R+2(n+1)\Delta_b u-2n(n+1)\|du\|_\theta^2\right)=\lambda.$$

Como vimos anteriormente, fazendo a substituição $e^{2u}=v^{p-2}$, obtemos

$$e^{-2u}\left(R+2(n+1)\Delta_b u-2n(n+1)\|du\|_\theta^2\right)=v^{1-p}(p\,\Delta_b v+Rv).$$

Portanto, se $\widetilde{\theta}=v^{p-2}\theta$, a σ_1-equação de Yamabe é dada por

$$p\,\Delta_b v+Rv=2(n+1)\lambda v^{p-1},$$

que é a menos de constante, a equação de Yamabe CR. Portanto, quando $k=1$, a resposta da questão colocada no início dessa seção é afirmativa, pois esse é exatamente o problema de Yamabe sobre variedades CR que foi resolvido completamente por Jerison, Lee, Gamarra e Yacoub.

4.2 O tensor de Cotten pseudohermitiano

Associado à uma variedade Riemanniana (M,g), o tensor de Weyl W_g, quando $n>3$, é a única obstrução para a propriedade localmente conformemente plana. Isto é, (M,g) com $\dim M>3$ é localmente conformemente plana se, e somente se, $W_g=0$. Quando $n=3$, necessariamente $W_g=0$. Porém, neste caso, existe uma outra obstrução para a propriedade localmente conformemente plana. Tal obstrução é dada pelo tensor de Cotten C_g. A variedade (M,g) é localmente conformemente plana se, e somente se, $C_g=0$. Além disso, para $n>3$, $W_g=0$ somente se $C_g=0$.

O tensor de Cotten é definido localmente por

$$C_g=(\nabla S_g)_{ijk}-(\nabla S_g)_{jik}\,,$$

em que S_g é o tensor de Schouten (Riemanniano). Em certo sentido, C_g mede uma simetria na derivada covariante do tensor de Schouten. Sob a hipótese que $C_g=0$, Viaclovsky [41] mostrou que o σ_k-problema de Yamabe Riemanniano é variacional.

Definiremos um tensor análogo ao tensor de Cotten que, da mesma forma que no caso Riemanniano, mede uma certa simetria na derivada covariante do tensor de Schouten pseudohermitiano.

Definição 4.2.1. *Seja (M,θ) uma variedade pseudohermitiana. O* ***tensor de Cotten pseudohermitiano*** *é o tensor do tipo $(3,0)$, denotado por C_θ e definido localmente por*

$$C_{\rho\bar{\sigma}\gamma}=S_{\rho\bar{\sigma};\gamma}-S_{\gamma\bar{\sigma};\rho} \tag{4.5}$$

em que $S_{\rho\bar{\sigma}}$ são as componente do tensor de Schouten pseudohermitiano S_θ.

Claramente, uma condição suficiente para que o tensor de Cotten pseudohermitiano seja identicamente nulo é que o tensor de Schouten seja paralelo em relação à conexão pseudohermitiana. Uma outra condição suficiente para que o tensor de Cotten se anule, que abrange em particular as formas espaciais pseudohermitianas apresentadas por Webster em [46], é que a torção pseudohermitiana seja paralela em relação a conexão. Precisamente temos o seguinte resultado.

Proposição 4.2.1. *Seja (M,θ) uma variedade pseudohermitiana com torção pseudohermitiana τ. Se $\nabla\tau = 0$, então $C_\theta = 0$.*

Demonstração: Seja $\{\theta^\alpha\}$ um correferencial admissível com referencial dual $\{T_\alpha\}$ pseudohermitiano. Nesse referencial.

$$C_{\rho\bar{\sigma}\gamma} = S_{\rho\bar{\sigma};\gamma} - S_{\gamma\bar{\sigma};\rho},$$

em que

$$S_{\rho\bar{\sigma};\gamma} = \frac{1}{n+2}\left(R_{\rho\bar{\sigma};\gamma} - \frac{R_\gamma}{2(n+1)}h_{\rho\bar{\sigma}}\right)$$

e

$$S_{\gamma\bar{\sigma};\rho} = \frac{1}{n+2}\left(R_{\gamma\bar{\sigma};\rho} - \frac{R_\rho}{2(n+1)}h_{\gamma\bar{\sigma}}\right).$$

Daí,

$$2(n+1)(n+2)(S_{\rho\bar{\sigma};\gamma} - S_{\gamma\bar{\sigma};\rho}) = 2(n+1)(R_{\rho\bar{\sigma};\gamma} - R_{\gamma\bar{\sigma};\rho}) - (R_\gamma h_{\rho\bar{\sigma}} - R_\rho h_{\gamma\bar{\sigma}}). \tag{4.6}$$

Usando a identidade de Bianchi

$$R_{;\gamma} - R_{\gamma\bar{\sigma};}{}^{\bar{\sigma}} = -i(n-1)A_{\alpha\gamma;}{}^{\alpha}$$

obtemos

$$\begin{aligned}
R_\gamma h_{\rho\bar{\sigma}} - R_\rho h_{\gamma\bar{\sigma}} &= R_{\gamma\bar{\beta};}{}^{\bar{\beta}} h_{\rho\bar{\sigma}} - i(n-1)A_{\alpha\gamma;}{}^{\alpha} h_{\rho\bar{\sigma}} - R_{\rho\bar{\beta};}{}^{\bar{\beta}} h_{\gamma\bar{\sigma}} + i(n-1)A_{\alpha\rho;}{}^{\alpha} h_{\gamma\bar{\sigma}} \\
&= R_{\gamma\bar{\beta};}{}^{\bar{\beta}} h_{\rho\bar{\sigma}} - R_{\rho\bar{\beta};}{}^{\bar{\beta}} h_{\gamma\bar{\sigma}} - (n-1)(iA_{\alpha\gamma;}{}^{\alpha} h_{\rho\bar{\sigma}} - iA_{\alpha\rho;}{}^{\alpha} h_{\gamma\bar{\sigma}}) \\
&= R_{\gamma\bar{\beta};}{}^{\bar{\beta}} \delta_{\sigma}^{\beta} h_{\rho\bar{\beta}} - R_{\gamma\bar{\beta};}{}^{\bar{\beta}} \delta_{\sigma}^{\beta} h_{\gamma\bar{\beta}} - (n-1)(iA_{\alpha\gamma;}{}^{\alpha} h_{\rho\bar{\sigma}} - iA_{\alpha\rho;}{}^{\alpha} h_{\gamma\bar{\sigma}}) \\
&= R_{\gamma\bar{\beta};\rho}\delta_{\sigma}^{\beta} - R_{\rho\bar{\beta};\gamma}\delta_{\sigma}^{\beta} - (n-1)(iA_{\alpha\gamma;}{}^{\alpha} h_{\rho\bar{\sigma}} - iA_{\alpha\rho;}{}^{\alpha} h_{\gamma\bar{\sigma}}) \\
&= R_{\gamma\bar{\sigma};\rho} - R_{\rho\bar{\sigma};\gamma} - (n-1)(iA_{\alpha\gamma;}{}^{\alpha} h_{\rho\bar{\sigma}} - iA_{\alpha\rho;}{}^{\alpha} h_{\gamma\bar{\sigma}}).
\end{aligned}$$

Voltando em (4.6), temos

$$\begin{aligned} 2(n+1)(n+2)(S_{\rho\bar{\sigma};\gamma} - S_{\gamma\bar{\sigma};\rho}) &= 2(n+1)(R_{\rho\bar{\sigma};\gamma} - R_{\gamma\bar{\sigma};\rho}) + (R_{\rho\bar{\sigma};\gamma} - R_{\gamma\bar{\sigma};\rho}) \\ &\quad + (n-1)(iA_{\alpha\gamma;}{}^{\alpha} h_{\rho\bar{\sigma}} - iA_{\alpha\rho;}{}^{\alpha} h_{\gamma\bar{\sigma}}). \end{aligned}$$

usando a identidade de Bianchi

$$R_{\rho\bar{\sigma};\,\gamma} - R_{\gamma\bar{\sigma};\,\rho} = iA_{\alpha\gamma;}{}^{\alpha} h_{\rho\bar{\sigma}} - iA_{\alpha\rho;}{}^{\alpha} h_{\gamma\bar{\sigma}},$$

obtemos

$$\begin{aligned} 2(n+1)(n+2)(S_{\rho\bar{\sigma};\gamma} - S_{\gamma\bar{\sigma};\rho}) &= 2(n+1)(iA_{\alpha\gamma;}{}^{\alpha} h_{\rho\bar{\sigma}} - iA_{\alpha\rho;}{}^{\alpha} h_{\gamma\bar{\sigma}}) \\ + (iA_{\alpha\gamma;}{}^{\alpha} h_{\rho\bar{\sigma}} - iA_{\alpha\rho;}{}^{\alpha} h_{\gamma\bar{\sigma}}) &+ (n-1)(iA_{\alpha\gamma;}{}^{\alpha} h_{\rho\bar{\sigma}} - iA_{\alpha\rho;}{}^{\alpha} h_{\gamma\bar{\sigma}}) \\ &= i(3n+2)(A_{\alpha\gamma;}{}^{\alpha} h_{\rho\bar{\sigma}} - A_{\alpha\rho;}{}^{\alpha} h_{\gamma\bar{\sigma}}) \end{aligned}$$

Portanto

$$C_{\rho\bar{\sigma}\gamma} = i\frac{3n+2}{2(n+1)(n+2)}(A_{\alpha\gamma;}{}^{\alpha} h_{\rho\bar{\sigma}} - A_{\alpha\rho;}{}^{\alpha} h_{\gamma\bar{\sigma}}).$$

Quando $\nabla\tau = 0$, temos $A_{\alpha\gamma;}{}^{\alpha} = 0$ e, conseqüentemente, $C_{\rho\bar{\sigma}\gamma} = 0$. ∎

4.3 A propriedade variacional

Vamos provar agora um dos resultados principais deste capítulo.

Teorema 4.3.1. *Seja (M, θ) uma variedade pseudohermitiana, compacta e estritamente pseudoconvexa. Denote por*

$$\mathcal{M} = \{\widetilde{\theta} \in [\theta] : \int_M dV_{\widetilde{\theta}} = 1\}$$

o subespaço das estruturas pseudohermitianas compatíveis com θ e de volume unitário, e considere o funcional

$$F_k : \widetilde{\theta} \to \int_M \sigma_k(\widetilde{\theta}) dV_{\widetilde{\theta}}. \tag{4.7}$$

Se $C_{\widetilde{\theta}} = 0$, então $\widetilde{\theta} \in \mathcal{M}$ é um ponto crítico de F_k se, e somente se, $\sigma_k(\widetilde{\theta}) = c$ para alguma constante c.

Demonstração: Escrevendo $\widetilde{\theta} = e^{2u}\theta$, obtemos

$$\sigma_k(\widetilde{\theta}) = e^{-2ku}\sigma_k(S - 2\nabla^2 u + (iTu - \|du\|_{\theta}^2)L_{\theta}),$$

em que S é o tensor de Schouten associado à θ e $S - 2\nabla^2 u + (iTu - \|du\|^2_\theta)L_\theta$ é visto como um tensor do tipo $(1,1)$. O funcional F_k pode ser escrito como

$$F_k(u) = \int_M e^{-2(n+k+1)u} \sigma_k(S - 2\nabla^2 u + (iTu - \|du\|^2_\theta)L_\theta) dV_\theta,$$

pois $dV_{\widetilde{\theta}} = e^{-2(n+1)u} dV_\theta$. Tomemos uma curva $u(t)$ em $C^\infty(M)$ com $u(0) = u$ e $\dot{u}(0) = \phi$. Temos

$$\begin{aligned} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F_k(u(t)) &= -2(n+k+1) \int_M \phi e^{-2(n+k+1)u} \sigma_k(S - 2\nabla^2 u + (iTu - \|du\|^2_\theta)L_\theta) dV_\theta \\ &+ \int_M e^{-2(n+k+1)} \left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \sigma_k(S - 2\nabla^2 u(t) + (iTu(t) - \|du(t)\|^2_\theta)L_\theta) dV_\theta. \end{aligned}$$

Usando o fato que

$$\frac{d}{dt}\sigma_k(A(t)) = T_{k-1}(A(t))_\beta{}^\alpha \frac{d}{dt}A(t)_\alpha{}^\beta = \sigma_1\left(T_{k-1}(A(t)) \circ \frac{d}{dt}A(t)\right),$$

obtemos

$$\begin{aligned} &\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \sigma_k\left(S - 2\nabla^2 u(t) + (iTu(t) - L^*_\theta(du(t), du(t)))\, L_\theta\right) \\ &= \sigma_1\left(T_{k-1}(e^{2u}\widetilde{S}) \circ \frac{d}{dt}(S - 2\nabla^2 u(t) + (iTu(t) - L^*_\theta(du(t), du(t)))L_\theta)\right) \\ &= \sigma_1\left(e^{(k-1)u} T_{k-1}(\widetilde{S}) \circ (-2\nabla^2\phi + (iT\phi - L^*_\theta(du, d\phi) - L^*_\theta(d\phi, du))L_\theta)\right). \end{aligned}$$

Note que

$$\begin{aligned} &(-2\nabla^2\phi + (iT\phi - L^*_\theta(du, d\phi) - L^*_\theta(d\phi, du))L_\theta)_{\alpha\bar{\beta}} \\ &= (-2\phi_{\alpha\bar{\beta}} + i\phi_0 h_{\alpha\bar{\beta}}) - (L^*_\theta(du, d\phi) + L^*_\theta(d\phi, du))h_{\alpha\bar{\beta}}. \end{aligned}$$

Como

$$-2\phi_{\alpha\bar{\beta}} + i\phi_0 h_{\alpha\bar{\beta}} = -\phi_{\alpha\bar{\beta}} - \phi_{\bar{\beta}\alpha},$$

e

$$L^*_\theta(du, d\phi) \;=\; u_\alpha \phi_{\bar{\beta}} h^{\alpha\bar{\beta}} + u_{\bar{\alpha}} \phi_\beta h^{\beta\bar{\alpha}} = u^{\bar{\beta}}\phi_{\bar{\beta}} + u^\beta \phi_\beta = L^*_\theta(d\phi, du),$$

encontramos

$$\begin{aligned} &(-2\nabla^2\phi + (iT\phi - L^*_\theta(du, d\phi) - L^*_\theta(d\phi, du))L_\theta)_{\alpha\bar{\beta}} \\ &= -\phi_{\alpha\bar{\beta}} - \phi_{\bar{\beta}\alpha} - (2u^\gamma\phi_\gamma + 2u^{\bar{\gamma}}\phi_{\bar{\gamma}})h_{\alpha\bar{\beta}} \\ &= -(\phi_{\alpha\bar{\beta}} + 2u^\gamma\phi_\gamma h_{\alpha\bar{\beta}}) - (\phi_{\bar{\beta}\alpha} + 2u^{\bar{\gamma}}\phi_{\bar{\gamma}} h_{\alpha\bar{\beta}}). \end{aligned}$$

De
$$\widetilde{\Gamma}^{\gamma}_{\bar{\beta}\alpha} = \Gamma^{\gamma}_{\bar{\beta}\alpha} - 2u^{\gamma} h_{\alpha\bar{\beta}},$$
obtemos
$$(\widetilde{\nabla}^2\phi)_{\alpha\bar{\beta}} = T_{\bar{\beta}}T_{\alpha}\phi - \widetilde{\Gamma}^{\gamma}_{\bar{\beta}\alpha}T_{\gamma}\phi = (\nabla^2\phi)_{\alpha\bar{\beta}} + 2u^{\gamma}h_{\alpha\bar{\beta}} = \phi_{\alpha\bar{\beta}} + 2u^{\gamma}\phi_{\gamma}h_{\alpha\bar{\beta}}.$$
Analogamente,
$$(\widetilde{\nabla}^2\phi)_{\bar{\beta}\alpha} = \phi_{\bar{\beta}\alpha} + 2u^{\bar{\gamma}}\phi_{\bar{\gamma}}h_{\alpha\bar{\beta}}.$$
Portanto,
$$\begin{aligned}
&\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \sigma_k(S - 2\nabla^2 u(t) + (iTu(t) - L^*_{\theta}(du(t), du(t)))L_{\theta}) \\
&= \sigma_1\left(e^{2(k-1)u}T_{k-1}(\widetilde{S}) \circ (-e^{2u}((\widetilde{\nabla}^2\phi)_{\alpha}{}^{\gamma} + (\widetilde{\nabla}^2\phi)^{\gamma}{}_{\alpha}))\right) \\
&= -e^{2ku}\sigma_1\left(T_{k-1}(\widetilde{S}) \circ ((\widetilde{\nabla}^2\phi)_{\alpha}{}^{\gamma} + (\widetilde{\nabla}^2\phi)^{\gamma}{}_{\alpha})\right),
\end{aligned}$$
temos também que
$$\begin{aligned}
(\widetilde{\nabla}^2\phi)_{\alpha}{}^{\gamma} + (\widetilde{\nabla}^2\phi)^{\gamma}{}_{\alpha} &= ((\widetilde{\nabla}^2\phi)_{\alpha\bar{\beta}} + (\widetilde{\nabla}^2\phi)_{\bar{\beta}\alpha})\widetilde{h}^{\gamma\bar{\beta}} \\
&= (2(\widetilde{\nabla}^2\phi)_{\alpha\bar{\beta}} - i\widetilde{T}\phi\widetilde{h}_{\alpha\bar{\beta}})\widetilde{h}^{\gamma\bar{\beta}} \\
&= 2(\widetilde{\nabla}^2\phi)_{\alpha}{}^{\gamma} - i\widetilde{T}\phi\,\delta_{\alpha}{}^{\gamma}.
\end{aligned}$$
Assim,
$$\begin{aligned}
&\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \sigma_k(S - 2\nabla^2 u(t) + (iTu(t) - L^*_{\theta}(du(t), du(t)))L_{\theta}) \\
&= -e^{ku}\sigma_1\left(T_{k-1}(\widetilde{S}) \circ (2\widetilde{\nabla}^2\phi - i\widetilde{T}\phi I)\right)
\end{aligned}$$
em que $\widetilde{\nabla}^2\phi$ é visto como um tensor do tipo $(1,1)$. Logo,
$$\begin{aligned}
&\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F_k(u(t)) = -2(n+k+1)\int_M \phi e^{-2(n+k+1)}\sigma_k(S - 2\nabla^2 u + (iTu - \|du\|^2_{\theta})L_{\theta})dV_{\theta} \\
&+ \int_M e^{-2(n+k+1)u}\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} \sigma_k(S - 2\nabla^2 u(t) + (iTu(t) - \|du(t)\|^2_{\theta})L_{\theta})dV_{\theta} \\
&= -2(n+k+1)\int_M \phi\sigma_k(\widetilde{S})dV_{\widetilde{\theta}} - \int_M e^{-2(n+k+1)u}e^{2ku}\sigma_1\left(T_{k-1}(\widetilde{S}) \circ (2\widetilde{\nabla}^2\phi - i\widetilde{T}\phi I)\right)dV_{\theta} \\
&= -2(n+k+1)\int_M \phi\sigma_k(\widetilde{S})dV_{\widetilde{\theta}} - \int_M \sigma_1\left(T_{k-1}(\widetilde{S}) \circ (2\widetilde{\nabla}^2\phi - i\widetilde{T}\phi I)\right)dV_{\widetilde{\theta}}.
\end{aligned}$$

Como $T_{k-1}(\widetilde{S})$ é Hermitiano, segue pela fórmula de integração por partes que

$$\int_M \sigma_1(T_{k-1}(\widetilde{S}) \circ (-2\nabla^2 u + iTuI))dV_\theta = -2\mathrm{Re}\int_M T_{k-1}(\widetilde{S})_{\gamma\ \ ;\alpha}^{\ \alpha} u^\gamma dV_\theta.$$

Donde obtemos

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F_k(u(t)) = -2(n+k+1)\int_M \phi\sigma_k(\widetilde{S})dV_{\widetilde{\theta}} - 2\mathrm{Re}\int_M T_{k-1}(\widetilde{S})_{\gamma\ \ ;\alpha}^{\ \alpha} u^\gamma dV_\theta.$$

Do fato que $C_{\widetilde{\theta}} = 0$, encontramos

$$\widetilde{S}_{\beta\ \ ;\alpha}^{\ \gamma} - \widetilde{S}_{\alpha\ \ ;\beta}^{\ \gamma} = (\widetilde{S}_{\beta\bar{\sigma};\alpha} - \widetilde{S}_{\alpha\bar{\sigma};\beta})\widetilde{h}^{\gamma\bar{\sigma}} = \widetilde{C}_{\beta\bar{\sigma}\alpha}\widetilde{h}^{\gamma\bar{\sigma}} = 0.$$

Como

$$\begin{aligned} T_{k-1}(\widetilde{S})_{\gamma\ \ ;\alpha}^{\ \alpha} &= \frac{1}{(k-1)!}\,\delta^{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\alpha}_{\gamma_1\ldots\gamma_{k-1}\gamma}(\widetilde{S}_{\alpha_1}^{\ \ \gamma_1}\ldots\widetilde{S}_{\alpha_{k-1}}^{\ \ \gamma_{k-1}})_{;\alpha} \\ &= \frac{1}{(k-2)!}\,\delta^{\alpha_1\ldots\alpha_{k-1}\alpha}_{\gamma_1\ldots\gamma_{k-1}\gamma}\widetilde{S}_{\alpha_1\ \ ;\alpha}^{\ \ \gamma_1}\ldots\widetilde{S}_{\alpha_{k-1}}^{\ \ \gamma_{k-1}}, \end{aligned}$$

temos

$$T_{k-1}(\widetilde{S})_{\gamma\ \ ;\alpha}^{\ \alpha} = 0.$$

Portanto,

$$\left.\frac{d}{dt}\right|_{t=0} F_k(u(t)) = -2(n+k+1)\int_M \phi\sigma_k(\widetilde{S})dV_{\widetilde{\theta}}.$$

O resultado segue observando que a restrição às estruturas pseudohermitianas com volume unitário fornece um multiplicador de Lagrange. ∎

Gostaríamos que a condição $C_{\widetilde{\theta}} = 0$ fosse CR-invariante, pois poderíamos fazer tal hipótese sobre a estrutura pseudohermitiana θ fixada. Se C_θ e $C_{\widetilde{\theta}}$ são os tensores de Cotten pseudohermitianos associados à θ e $\widetilde{\theta}$, respectivamente, então eles satisfazem

$$\widetilde{C}_{\alpha\bar{\beta};\sigma} = C_{\alpha\bar{\beta};\sigma} - 2iu^\rho(h_{\sigma\bar{\beta}}A_{\alpha\rho} + h_{\alpha\bar{\beta}}A_{\sigma\rho}) - 2(u_\alpha u_{\bar{\beta}\sigma} - u_\sigma u_{\bar{\beta}\alpha}). \tag{4.8}$$

Com efeito,

$$\begin{aligned} \widetilde{C}_{\alpha\bar{\beta};\sigma} &= \widetilde{S}_{\alpha\bar{\beta};\sigma} - \widetilde{S}_{\sigma\bar{\beta};\alpha} \\ &= (S_{\alpha\bar{\beta}} - u_{\alpha\bar{\beta}} - u_{\bar{\beta}\alpha} - 2u_\gamma u^\gamma h_{\alpha\bar{\beta}})_{;\sigma} - (S_{\sigma\bar{\beta}} - u_{\sigma\bar{\beta}} - u_{\bar{\beta}\sigma} - 2u_\gamma u^\gamma h_{\sigma\bar{\beta}})_{;\alpha} \\ &= (S_{\alpha\bar{\beta};\sigma} - u_{\alpha\bar{\beta};\sigma} - u_{\bar{\beta}\alpha;\sigma} - 2u_{\gamma;\sigma}u^\gamma h_{\alpha\bar{\beta}} - 2u_\gamma u^\gamma_{\ ;\sigma}h_{\alpha\bar{\beta}}) \\ &\quad -(S_{\sigma\bar{\beta};\alpha} - u_{\sigma\bar{\beta};\alpha} - u_{\bar{\beta}\sigma;\alpha} - 2u_{\gamma;\alpha}u^\gamma h_{\sigma\bar{\beta}} - 2u_\gamma u^\gamma_{\ ;\alpha}h_{\sigma\bar{\beta}}), \end{aligned}$$

daí

$$\begin{aligned}
\widetilde{C}_{\alpha\bar{\beta};\sigma} &= C_{\alpha\bar{\beta};\sigma} - ((u_{\alpha\bar{\beta};\sigma} - u_{\sigma\bar{\beta};\alpha}) + (u_{\bar{\beta}\alpha;\sigma} - u_{\bar{\beta}\sigma;\alpha})) \\
&\quad -2(u_{\bar{\beta}}u_{\gamma\sigma} + u_{\gamma}u_{\bar{\beta}\sigma})h^{\gamma\bar{\beta}}h_{\alpha\bar{\beta}} + 2(u_{\bar{\beta}}u_{\gamma\alpha} + u_{\gamma}u_{\bar{\beta}\alpha})h^{\gamma\bar{\beta}}h_{\sigma\bar{\beta}} \\
&= C_{\alpha\bar{\beta};\sigma} - ((u_{\alpha\bar{\beta};\sigma} - u_{\sigma\bar{\beta};\alpha}) + (u_{\bar{\beta}\alpha;\sigma} - u_{\bar{\beta}\sigma;\alpha})) \\
&\quad -2(u_{\bar{\beta}}u_{\gamma\sigma} + u_{\gamma}u_{\bar{\beta}\sigma})\delta_{\alpha}{}^{\gamma} + 2(u_{\bar{\beta}}u_{\gamma\alpha} + u_{\gamma}u_{\bar{\beta}\alpha})\delta_{\sigma}{}^{\gamma} \\
&= C_{\alpha\bar{\beta};\sigma} - ((u_{\alpha\bar{\beta};\sigma} - u_{\sigma\bar{\beta};\alpha}) + (u_{\bar{\beta}\alpha;\sigma} - u_{\bar{\beta}\sigma;\alpha})) \\
&\quad -2(u_{\bar{\beta}}u_{\alpha\sigma} + u_{\alpha}u_{\bar{\beta}\sigma}) + 2(u_{\bar{\beta}}u_{\sigma\alpha} + u_{\sigma}u_{\bar{\beta}\alpha}) \\
&= C_{\alpha\bar{\beta};\sigma} - \big((u_{\alpha\bar{\beta};\sigma} - u_{\sigma\bar{\beta};\alpha}) + (u_{\bar{\beta}\alpha;\sigma} - u_{\bar{\beta}\sigma;\alpha}) - 2(u_{\alpha}u_{\bar{\beta}\sigma} - u_{\sigma}u_{\bar{\beta}\alpha})\big)\,.
\end{aligned}$$

Assim, o resultado segue das identidades (veja [4] , [32]).

$$u_{\alpha\bar{\beta};\sigma} - u_{\sigma\bar{\beta};\alpha} = iu^{\rho}(h_{\sigma\bar{\beta}}A_{\alpha\rho} - h_{\alpha\bar{\beta}}A_{\sigma\rho}),$$

$$u_{\bar{\beta}\alpha;\sigma} - u_{\bar{\beta}\sigma;\alpha} = -iu^{\rho}(h_{\alpha\bar{\beta}}A_{\sigma\rho} - h_{\sigma\bar{\beta}}A_{\alpha\rho}).$$

∎

Como vimos anteriormente, se a torção pseudohermitiana é paralela com relação à conexão, então $C_{\alpha\bar{\beta}\gamma} = 0$. Assim, da equação (4.8), obtemos

$$\widetilde{C}_{\alpha\bar{\beta};\sigma} = -2iu^{\rho}(h_{\sigma\bar{\beta}}A_{\alpha\rho} + h_{\alpha\bar{\beta}}A_{\sigma\rho}) - 2(u_{\alpha}u_{\bar{\beta}\sigma} - u_{\sigma}u_{\bar{\beta}\alpha}).$$

Agora, se a torção pseudohermitiana é nula, obtemos

$$\widetilde{C}_{\alpha\bar{\beta};\sigma} = -2(u_{\alpha}u_{\bar{\beta}\sigma} - u_{\sigma}u_{\bar{\beta}\alpha}).$$

Isso sugere a seguinte definição.

Definição 4.3.1. *Uma função $u \in C^{\infty}(M)$ é dita* ***Cotten-admissível*** *se satisfizer*

$$u_{\alpha}u_{\bar{\beta}\sigma} - u_{\sigma}u_{\bar{\beta}\alpha} = 0, \text{ para quaisquer } \alpha, \beta, \sigma \in \{1, ..., n\}.$$

Denotaremos

$$\mathcal{C}[\theta] = \{e^{2u}\theta : u \text{ é Cotten-admissível}\}$$

e diremos que uma estrutura pseudohermitiana $\widetilde{\theta} \in \mathcal{C}[\theta]$ é Cotten-admissível.

Uma classe de funções $u \in C^{\infty}(M)$ que são Cotten-admissíveis é a classe das funções CR-pluriharmônicas. Um função u é dita CR-pluriharmônica se

$$f = u + iv$$

para alguma função CR-holomorfa f e alguma $v \in C^\infty(M)$. Portanto se u é CR-pluriharmônica e $\{T_\alpha\}$ é um referencial de (M,θ), então

$$T_{\bar\beta} f = T_{\bar\beta} u + i T_{\bar\beta} v = u_{\bar\beta} + i v_{\bar\beta} = 0.$$

Logo $u_{\bar\beta} = 0$ e, portanto, $u_{\bar\beta\alpha} = u_{\bar\beta\sigma} = 0$ para quaisquer $\alpha, \sigma \in \{1, ..., n\}$.

Uma conseqüência imediata da proposição 4.2.1 e do teorema 4.3.1 é o seguinte resultado.

Teorema 4.3.2. *Seja (M,θ) uma variedade pseudohermitiana, compacta e estritamente pseudoconvexa com torção pseudohermitiana nula. Denote por*

$$\mathcal{M} = \{\widetilde{\theta} \in \mathcal{C}[\theta] : \int_M dV_{\widetilde{\theta}} = 1\}$$

o subespaço das estruturas pseudohermitianas compatíveis com θ, Cotten-admissíveis e de volume unitário. Considere o funcional

$$F_k : \widetilde{\theta} \to \int_M \sigma_k(\widetilde{\theta}) dV_{\widetilde{\theta}}. \tag{4.9}$$

Então, $\widetilde{\theta} \in \mathcal{M}$ é um ponto crítico de F_k se, e somente se, $\sigma_k(\widetilde{\theta}) = c$ para alguma constante c.

4.4 Elipticidade

Mostraremos nesta seção que, sob certas condições, a σ_k-equação de Yamabe CR

$$\sigma_k(S - 2\nabla^2 u + (iTu - \|du\|^2_\theta)L_\theta) = \lambda e^{2ku}$$

é elíptica em qualquer solução.

Seja $(\lambda_1, ..., \lambda_n) \in \mathbb{R}^n$. As funções elementares simétricas podem ser vistas como funções de $\mathbb{R}^n$, definidas por

$$\sigma_k(\lambda_1, ..., \lambda_n) = \sum_{i_1 \leq \ldots \leq i_k} \lambda_{i_1} \ldots \lambda_{i_k}.$$

O cone de Gärding é conjunto aberto de $\mathbb{R}^n$ definido por

$$\Gamma_k^+ = \{\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \mathbb{R}^n : \ \sigma_j(\Lambda) > 0 \text{ for all } j \leq k\}\ .$$

Se $A : V \to V$ é um operador Hermitiano, em que V é um espaço Hermitiano n-

dimensional, denotaremos $A \in \Gamma_k^+$ quando os autovalores $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n)$ de A, com $\lambda_n \leq \ldots \leq \lambda_1$, pertencerem à Γ_k^+. O lema seguinte fornece algumas propriedades importantes do cone de Gärding. A prova pode ser encontrada em [10], [20], [45].

Lema 4.4.1. *Cada conjunto Γ_k^+ é um cone convexo aberto com vértice na origem e satisfaz a seqüência de inclusões*

$$\Gamma_k^+ \subset \Gamma_{k-1}^+ \subset \ldots \subset \Gamma_1^+.$$

Para dois operadores Hermitianos $A, B \in \Gamma_k^+$ e para $t \in [0,1]$, temos a seguinte desigualdade

$$\{\sigma_k((1-t)A + tB)\}^{\frac{1}{k}} \geq (1-t)\{\sigma_k(A)\}^{\frac{1}{k}} + t\{\sigma_k(B)\}^{\frac{1}{k}}$$

Além disso, se $A \in \Gamma_k^+$, então $T_{k-1}(A)$ é positiva definida.

Definição 4.4.1. *Diremos que uma estrutura pseudohermitiana θ é k-**positiva** se*

$$\sigma_j(\theta)(x) > 0 \text{ para qualquer } 1 \leq j \leq k \text{ e todo ponto } x \in M.$$

*Se $\widetilde{\theta} = e^{2u}\theta$, diremos que u é k-**admissível** se θ e $\widetilde{\theta}$ são k-positivas. Denotaremos por $[\theta]_+$ o conjunto das estruturas pseudohermitianas k-positivas compatíveis com θ.*

Com essa definição, podemos enunciar a seguinte proposição:

Proposição 4.4.1. *Se (M, θ) é uma variedade pseudohermitiana compacta com estrutura pseudohermitina k-positiva, então as equações*

$$\sigma_k(S - 2\nabla^2 u + (iTu - \|du\|_\theta^2)L_\theta) = \lambda e^{2ku}$$

são elípticas em qualquer solução.

Demonstração: Seja $\widetilde{\theta} = e^{-2u}\theta$ uma estrutura pseudohermitiana com σ_k-curvatura constante λ. Como vimos anteriormente, nesse caso, u satisfaz a equação

$$\sigma_k\left(S_\theta + 2\nabla^2 u - (iTu + \|du\|_\theta^2)L_\theta\right) = \lambda e^{-2ku}.$$

Se θ é k-positiva, temos por definição que $S_\theta \in \Gamma_k^+$. Como M é compacta, no ponto de mínimo da função u, obtemos

$$\sigma_k(S_\theta + 2\nabla^2 u) = \lambda e^{2ku},$$

em que $\nabla^2 u$ é positiva semidefinida. Da identidade

$$S_{\widetilde{\theta}} = S_\theta + 2\nabla^2 u - (iTu + \|du\|_\theta^2)L_\theta,$$

temos que no ponto de mínimo, $S_{\widetilde{\theta}} \in \Gamma_k^+$. Agora, como os cones da Gärding são conexos, por continuidade concluímos que $S_{\widetilde{\theta}} \in \Gamma_k^+$ em todo ponto de M. Agora seja

$$F[u, \nabla u, \nabla^2 u] = \sigma_k \left(S_\theta + 2\nabla^2 u - (iTu + \|du\|_\theta^2) L_\theta \right) - \lambda e^{-2ku}.$$

A linearização em qualquer solução u na direção ϕ é dada por

$$F'[u, \nabla u, \nabla^2 u](\phi) = \sigma_1 \left(\widetilde{T}_{k-1}(S_{\widetilde{\theta}}) \circ \widetilde{\nabla}^2 \phi \right) + 2k\lambda e^{-2ku}\phi.$$

O resultado segue do fato que $S_{\widetilde{\theta}} \in \Gamma_k^+$. ∎

4.5 O σ_k-problema de Yamabe sobre a esfera CR

Seja (M, θ) uma variedade pseudohermitiana estritamente pseudoconvexa. Como vimos anteriormente, dizemos que θ é pseudo-Einstein se $R_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{R}{n} h_{\alpha\bar{\beta}}$. Ao contrário do caso Riemanniano, a condição de pseudo-Einstein não é suficiente para garantir que a curvatura escalar seja constante ([32]). Por outro lado, quando θ é pseudo-Einstein, $\sigma_k(\theta)$ é constante se, e somente se, a curvatura escalar pseudohermitiana é constante. De fato,

$$S_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{1}{n+2} \left(R_{\alpha\bar{\beta}} - \frac{R}{2(n+1)} h_{\alpha\bar{\beta}} \right) = \frac{1}{n+2} \left(\frac{1}{n} - \frac{1}{2(n+1)} \right) R h_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{R}{2n(n+1)} h_{\alpha\bar{\beta}},$$

donde

$$\sigma_k(\theta) = \sigma_k(S_\alpha{}^\gamma) = \sigma_k \left(\frac{R}{2n(n+1)} \delta_\alpha{}^\gamma \right) = C(n,k) \frac{R^k}{(2n(n+1))^k}.$$

em que $C(n,k)$ denota o coeficiente binomial de Newton.

Uma questão natural que surge é se as soluções do σ_k-problema de Yamabe sobre variedades pseudo-Einstein coincidem com as soluções do σ_1-problema de Yamabe. Na tentativa de responder a essa questão somos levados a analisar o efeito da deformação $\theta = e^{-2u}\widetilde{\theta}$ de uma estrutura pseudo-Einstein fixada $\widetilde{\theta}$. Em [32], J. Lee mostrou que se $\widetilde{\theta}$ é pseudo-Einstein, uma condição necessária e suficiente para que θ seja pseudo-Einstein é que u seja CR-pluriharmônica. Dessa maneira, se $(M, \widetilde{\theta})$ é pseudo-Einstein e se $\theta = e^{-2u}\widetilde{\theta}$ é uma deformação conforme de $\widetilde{\theta}$ com u sendo CR-pluriharmônica, então θ é uma solução do problema de Yamabe se, e somente se, é solução do σ_k-problema de Yamabe. Iremos mostrar agora que se θ é uma solução do σ_k-problema de Yamabe e, além disso, seu tensor de Cotten C_θ é nulo, então θ é pseudo-Einstein. Logo $\sigma_1(\theta)$ também é constante e, portanto, as soluções do σ_k-problema de Yamabe são soluções do σ_1-problema de Yamabe.

Precisaremos do seguinte lema (veja [41]).

Lema 4.5.1. *Seja A uma matriz Hermitiana de ordem n. Se $A \in \Gamma_k^+$, então*

$$\sigma_{k+1}(A) \leq \frac{n-k}{n(k+1)}\sigma_k(A)\sigma_1(A).$$

Além disso,

$$\sigma_{k+1}(A) = \frac{n-k}{n(k+1)}\sigma_k(A)\sigma_1(A)$$

se, e somente se, $A = \lambda I$ para alguma constante λ.

Teorema 4.5.1. *Seja $(M, \widetilde{\theta})$ uma variedade pseudohermitiana com estrutura pseudo-Einstein. Suponha que $\theta \in [\widetilde{\theta}]_+$ tenha σ_k-curvatura pseudohermitiana constante e, além disso, $C_\theta = 0$. Então θ é pseudo-Einstein.*

DEMONSTRAÇÃO: Escreva $\theta = e^{-2u}\widetilde{\theta}$. Como $\widetilde{\theta}$ é pseudo-Einstein, temos

$$\widetilde{S} = \frac{\widetilde{R}}{2n(n+1)}L_{\widetilde{\theta}}.$$

Substituíndo as identidades

$$\widetilde{R} = e^{-2u}(R + 2(n+1)(\Delta_b u) - 2n(n+1)\|du\|_\theta^2)$$

e

$$L_{\widetilde{\theta}} = e^{2u}L_\theta,$$

obtemos

$$\widetilde{S} = \left(\frac{R}{2n(n+1)} + \frac{\Delta_b u}{n} - \|du\|_\theta^2\right) L_\theta.$$

Substituíndo ainda

$$\widetilde{S} = S - 2\nabla^2 u + (iTu - \|du\|_\theta^2)L_\theta,$$

temos

$$\left(\frac{R}{2n(n+1)} + \frac{\Delta_b u}{n} - \|du\|_\theta^2\right) L_\theta = S - 2\nabla^2 u + (iTu - \|du\|_\theta^2)L_\theta,$$

ou seja,

$$2\nabla^2 u = S - \frac{\sigma_1(S)}{n}L_\theta + \left(iTu - \frac{\Delta_b u}{n}\right) L_\theta$$

Olhando os tensores $\nabla^2 u$ e S como tensores do tipo $(1,1)$, encontramos

$$\int_M \sigma_1(T_k(S) \circ (2\nabla^2 u))dV_\theta = \int_M \sigma_1 \left(T_k(S) \circ \left(S - \frac{\sigma_1(S)}{n}I + \left(iTu - \frac{\Delta_b u}{n}\right) I\right)\right) dV_\theta$$

em que I denota a matriz identidade. Daí

$$\begin{aligned}
&\int_M \sigma_1(T_k(S)\circ(2\nabla^2 u))dV_\theta \\
&= \int_M \sigma_1\left(T_k(S)\circ S - \frac{\sigma_1(S)}{n}T_k(S) + \left(iTu - \frac{\Delta_b u}{n}\right)T_k(S)\right)dV_\theta \\
&= \int_M \left(\sigma_1\left(T_k(S)\circ S\right) - \frac{\sigma_1(S)}{n}\sigma_1\left(T_k(S)\right) + \left(iTu - \frac{\Delta_b u}{n}\right)\sigma_1\left(T_k(S)\right)\right)dV_\theta.
\end{aligned}$$

Usando as identidades (veja a proposição 3.2.1)

$$\sigma_1(T_k(S)\circ S) = (k+1)\sigma_{k+1}(S) \quad \text{e} \quad \sigma_1(T_k(S)) = (n-k)\sigma_k(S),$$

obtemos

$$\begin{aligned}
&\int_M \sigma_1(T_k(S)\circ(2\nabla^2 u))dV_\theta \\
&= \int_M \left((k+1)\sigma_{k+1}(S) - \frac{\sigma_1(S)}{n}(n-k)\sigma_k(S) + \left(iTu - \frac{\Delta_b u}{n}\right)(n-k)\sigma_k(S)\right)dV_\theta \\
&= (k+1)\int_M \left(\sigma_{k+1}(S) - \frac{n-k}{n(k+1)}\sigma_k(S)\sigma_1(S)\right)dV_\theta \\
&\qquad + \int_M iTu(n-k)\sigma_k(S)dV_\theta - \frac{1}{n}\int_M \Delta_b u\sigma_k(S)dV_\theta.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
&\int_M \sigma_1(T_k(S)\circ(2\nabla^2 u))dV_\theta - \int_M iTu\sigma_1(T_k(S))dV_\theta \\
&= (k+1)\int_M \left(\sigma_{k+1}(S) - \frac{n-k}{n(k+1)}\sigma_k(S)\sigma_1(S)\right)dV_\theta - \frac{1}{n}\int_M \Delta_b u\sigma_k(S)dV_\theta
\end{aligned}$$

Como $\sigma_k(S)$ é constante, temos

$$\int_M \Delta_b u\sigma_k(S)dV_\theta = \sigma_k(S)\int_M \Delta_b u dV_\theta = 0.$$

Observando que

$$\int_M \sigma_1(T_k(S)\circ(2\nabla^2 u))dV_\theta - i\int_M Tu\sigma_1(T_k(S))dV_\theta = \int_M \sigma_1(T_k(S)\circ(2\nabla^2 u - iTuI))dV_\theta$$

e aplicando a fórmula de integração por partes, obtemos

$$-2\mathrm{Re}\int_M T_{k-1}(S)_{\gamma\ ;\alpha}^{\ \alpha} u^\gamma dV_\theta = (k+1)\int_M \left(\sigma_{k+1}(S) - \frac{n-k}{n(k+1)}\sigma_k(S)\sigma_1(S)\right)dV_\theta.$$

Usando a hipótese que $C_\theta = 0$, obtemos $T_{k-1}(S)_{\gamma\ \ ;\alpha}^{\ \alpha} = 0$. Logo,

$$\int_M \left(\sigma_{k+1}(S) - \frac{n-k}{n(k+1)} \sigma_k(S)\sigma_1(S) \right) dV_\theta = 0.$$

Como θ é k-positiva, podemos aplicar o lema 4.5.1. Assim,

$$\sigma_{k+1}(S) - \frac{n-k}{n(k+1)} \sigma_k(S)\sigma_1(S) \leq 0,$$

donde concluímos que

$$\sigma_{k+1}(S) - \frac{n-k}{n(k+1)} \sigma_k(S)\sigma_1(S) = 0.$$

Portanto $S = \lambda I$, para alguma função λ. Daí,

$$\sigma_1(S) = \frac{R}{2(n+1)} = n\lambda.$$

Donde

$$\lambda = \frac{R}{2n(n+1)}.$$

Finalmente, para ver que θ é pseudo-Einstein, note que

$$\begin{aligned} R_{\alpha\bar\beta} &= (n+2)S_{\alpha\bar\beta} + \frac{R}{2(n+1)} h_{\alpha\bar\beta} \\ &= (n+2)(S_\alpha{}^\gamma) h_{\gamma\bar\beta} + \frac{R}{2(n+1)} h_{\alpha\bar\beta} \\ &= (n+2)\left(\frac{R}{2n(n+1)} \delta_\alpha{}^\gamma \right) h_{\gamma\bar\beta} + \frac{R}{2(n+1)} h_{\alpha\bar\beta} \\ &= \left(\frac{n+2}{2n(n+1)} + \frac{1}{2(n+1)} \right) R h_{\alpha\bar\beta} \end{aligned}$$

Portanto,

$$R_{\alpha\bar\beta} = \frac{R}{n} h_{\alpha\bar\beta}.$$

∎

Como conseqüencia imediata desse teorema e da proposição 4.2.1 temos o seguinte corolário:

Corolario 4.5.1. *Seja $(M, \widetilde{\theta})$ uma variedade pseudo-Einstein livre de torção. Denote por $\mathcal{C}[\widetilde{\theta}]_+ := [\widetilde{\theta}]_+ \cap \mathcal{C}[\widetilde{\theta}]$ a classe de estruturas pseudohermitianas compatíveis com $\widetilde{\theta}$, k-positivas e Cotten-admissíveis. Se $\theta \in \mathcal{C}[\widetilde{\theta}]_+$ tem σ_k-curvatura pseudohermitiana constante, então θ é pseudo-Einstein.*

A esfera $(S^{2n+1}, \hat{\theta})$ é uma variedade pseudo-Einstein livre de torção. Portanto se

$\theta \in \mathcal{C}[\hat{\theta}]_+$ tem σ_k-curvatura pseudohermitiana constante, então θ é pseudo-Einstein. Pela observação inicial dessa seção, θ tem curvatura escalar pseudohermitiana constante. Em [29], D. Jerison e J. Lee caracterizaram essas estruturas pseudohermitianas. Além disso, eles mostraram que se θ tem curvatura escalar pseudohermitiana constante, então θ é pseudo-Einstein e livre de torção (em particular $C_\theta = 0$). Nesse caso, θ tem σ_k-curvatura pseudohermitiana constante. Enunciamos esse resultado.

Teorema 4.5.2. *Considere a esfera $(S^{2n+1}, \hat{\theta})$ e seja $\theta \in \mathcal{C}[\hat{\theta}]_+$. Então θ tem σ_k-curvatura pseudohermitiana constante se, e somente se, tem curvatura escalar pseudohermitiana constante. Nesse caso, θ é obtida de um múltiplo escalar da forma canônica $\hat{\theta}$ por um CR-automorfismo da esfera. Ou seja,*

$$\theta = K\phi^*\hat{\theta}$$

para alguma constante K e algum CR-automorfismo da esfera ϕ.

Podemos fazer a seguinte pergunta: existe uma estrutura pseudohermitiana para S^{2n+1} compatível com a estrutura canônica com σ_k-curvatura pseudohermitiana constante diferente dessas apresentadas acima? Ou seja, existem outras estruturas pseudohermitianas compatíveis com $\hat{\theta}$ fora de $\mathcal{C}[\hat{\theta}]_+$ que tenham σ_k-curvatura pseudohermitiana constante? Acreditamos que não e propomos a seguinte conjectura.

Conjecura 4.5.1. *Considere a esfera $(S^{2n+1}, \hat{\theta})$. Então θ tem σ_k-curvatura pseudohermitiana constante se, e somente se, tem curvatura escalar pseudohermitiana constante. Portanto, todas as soluções do σ_k-problema de Yamabe na esfera são obtidas de um múltiplo escalar da forma canônica $\hat{\theta}$ por um CR-automorfismo da esfera.*

4.6 Desigualdades do tipo Sobolev sobre o grupo de Heisenberg

Seja (M, θ) uma variedade pseudohermitiana estritamente pseudoconvexa. Se $\widetilde{\theta} = e^{2u}\theta$, então, como já sabemos,

$$\widetilde{S} = S - 2\nabla^2 u + (iTu - \|du\|_\theta^2)L_\theta.$$

Fazendo a substituição $e^{2u} = v^{2/n}$ $(= v^{p-2})$, em que $v > 0$, obtemos

$$\begin{aligned}
&\nabla^2 u(T_\alpha, T_{\bar{\beta}}) = u_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{1}{n}\left(\frac{v_{\alpha\bar{\beta}}}{v} - \frac{v_\alpha v_{\bar{\beta}}}{v^2}\right),\\
&Tu = \frac{1}{n}\frac{Tv}{v},\\
&\|du\|_\theta^2 = L_\theta^*(du, du) = L_\theta^*\left(\frac{dv}{nv}, \frac{dv}{nv}\right) = \frac{1}{n^2v^2}\|dv\|_\theta^2\,.
\end{aligned}$$

Donde,

$$\widetilde{S} = S - \frac{2}{n}\frac{\nabla^2 v}{v} + \frac{2}{n}\frac{\nabla v \otimes \nabla v}{v^2} + \frac{2}{n}\left(\frac{i}{2}\frac{Tv}{v} - \frac{\|dv\|_\theta^2}{2nv^2}\right) L_\theta. \tag{4.10}$$

Seja

$$V := V[v] = -\nabla^2 v + \frac{\nabla v \otimes \nabla v}{v} + \frac{1}{2}\left(iTv - \frac{\|dv\|_\theta^2}{nv}\right) L_\theta + \frac{nv}{2}S. \tag{4.11}$$

Assim $\widetilde{S} = \dfrac{2}{n}\dfrac{V}{v}$. Daí,

$$\sigma_k(\widetilde{\theta}) = \sigma_k\left(v^{-2/n} h^{\gamma\bar{\beta}}\frac{2}{n}\frac{V_{\alpha\bar{\beta}}}{v}\right) = \left(\frac{2}{n}\right)^k v^{-k(1+2/n)}\sigma_k({V_\alpha}^\gamma).$$

Logo

$$\sigma_k(\widetilde{\theta}) \;=\; \left(\frac{2}{n}\right)^k v^{-2k/n}\sigma_k\left(\frac{V}{v}\right), \tag{4.12}$$

$$\sigma_k(\widetilde{\theta}) \;=\; \left(\frac{2}{n}\right)^k v^{-\frac{k(n+2)}{n}}\sigma_k\left(V\right). \tag{4.13}$$

em que V é visto como um tensor do tipo $(1,1)$. Dessa maneira, se $\widetilde{\theta} = v^{2/n}\theta$ é uma solução da equação $\sigma_k(\widetilde{\theta}) = c$, para alguma constante c, então v satisfaz a equação

$$v^{(1-k)\frac{n+2}{n}}\sigma_k(V) = \lambda v^{\frac{n+2}{n}} = \lambda v^{p-1}, \tag{4.14}$$

na qual $\lambda = \left(\frac{n}{2}\right)^k c$. O operador

$$L_k[v] := v^{(1-k)\frac{n+2}{n}}\sigma_k(V) \tag{4.15}$$

será denominado **σ_k-operador de Yamabe** . Observe que quando $k = 1$ a equação (4.14), a menos da constante, é exatamente a equação de Yamabe CR. Além disso, o σ_1-operador de Yamabe é exatamente o operador de Yamabe CR (veja [28]).

Podemos associar um invariante numérico à cada par $(M, [\theta])$, em que (M, θ) é uma variedade pseudohermitiana estritamente pseudoconvexa compacta e $[\theta]$ é a classe de estrutura pseudohermitianas de M compatíveis com θ.

Definição 4.6.1. *Seja (M, θ) uma variedade pseudohermitiana compacta, estritamente pseudoconvexa. Sejam*

$$F_k(\widetilde{\theta}) = \int_M \sigma(\widetilde{\theta})dV_{\widetilde{\theta}} \quad e \quad Vol(\widetilde{\theta}) = \int_M dV_{\widetilde{\theta}}\,.$$

A constante

$$\lambda_k(M) = \inf\left\{F_k(\widetilde{\theta}) : \widetilde{\theta} \in [\theta] \ e \ Vol(\widetilde{\theta}) = 1\right\} \tag{4.16}$$

*é denominda σ_k-**constante de Yamabe** .*

Podemos definir também as constantes

$$\lambda_k^+(M) = \inf\left\{F_k(\widetilde{\theta}) : \widetilde{\theta} \in [\theta]_+ \text{ e } \mathrm{Vol}\,(\widetilde{\theta}) = 1\right\} , \tag{4.17}$$

$$\lambda_k^C(M) = \inf\left\{F_k(\widetilde{\theta}) : \widetilde{\theta} \in \mathcal{C}[\theta]_+ \text{ e } \mathrm{Vol}\,(\widetilde{\theta}) = 1\right\} . \tag{4.18}$$

Claramente,

$$\lambda_k(M) \leq \lambda_k^+(M) \leq \lambda_k^C(M).$$

Questão: Existe alguma variedade compacta na qual vale a desigualdade estrita? Essa questão ainda é um mistério.
Pelo Teorema 4.3.1, se $C_{\widetilde{\theta}} = 0$ e $\mathrm{Vol}\,(\widetilde{\theta}) = 1$ então

$$\lambda_k(M) = F_k(\widetilde{\theta}) \quad \text{se, e somente se,} \quad \sigma_k(\widetilde{\theta}) = c$$

para alguma constante c. Mais tarde usaremos esse fato para obter o valor exato de $\lambda_k(S^{2n+1})$. Dessa observação e do teorema 4.5.2, obtemos imediatamente o seguinte corolário.

Corolario 4.6.1. *As constantes $\lambda_k(S^{2n+1})$ são atingidas por múltiplos constantes de $\hat{\theta}$ e de suas imagens por CR-automorfismos. Além disso, $\lambda_k^C(M)$ são atingidos somente por essas estruturas.*

Fixemos nossa atenção no funcional $F_k(\widetilde{\theta})$. Como

$$\sigma_{\widetilde{\theta}} = \left(\frac{2}{n}\right)^k v^{-2k/n}\sigma_k\left(\frac{V}{v}\right)$$

e

$$dV_{\widetilde{\theta}} = v^{\frac{2(n+1)}{n}} dV_\theta = v^p dV_\theta,$$

podemos escrever

$$F_k(v) = \left(\frac{2}{n}\right)^k \int_M v^{p-\frac{2k}{n}}\sigma_k\left(\frac{V}{v}\right) dV_\theta.$$

Considere agora a normalização

$$u = \frac{v}{\left(\int_M v^p dV_\theta\right)^{1/p}}.$$

Como

$$\frac{V[u]}{u} = \frac{V[v]}{v},$$

obtemos

$$F_k(u) = \left(\frac{2}{n}\right)^k \frac{\int_M v^{p-\frac{2k}{n}} \sigma_k\left(\frac{V}{v}\right) dV_\theta}{\left(\int_M v^p dV_\theta\right)^{1-2k/np}}.$$

Definição 4.6.2. *Seja (M,θ) uma variedade pseudohermitiana compacta, estritamente pseudoconvexa. O funcional*

$$Y_k(v) := \frac{\int_M v^{p-\frac{2k}{n}} \sigma_k\left(\frac{V}{v}\right) dV_\theta}{\left(\int_M v^p dV_\theta\right)^{1-2k/np}} \tag{4.19}$$

é denominado σ_k***-funcional de Yamabe CR*** *.*

Observe que $Y_k(v)$ pode ser escrito como

$$Y_k(v) = \frac{\int_M v^{p(1-k)+k} \sigma_k(V)\, dV_\theta}{\left(\int_M v^p dV_\theta\right)^{\frac{2}{p}\left(1-\frac{1}{n}(1-k)\right)}}.$$

Portanto

$$Y_1(v) = \frac{\int_M v\sigma_1(V)\, dV_\theta}{\left(\int_M v^p dV_\theta\right)^{\frac{2}{p}}},$$

que a menos de um fator constante é o funcional de Yamabe CR (veja [30]). Observe ainda que

$$\lambda_k(M) = \inf\left\{\left(\frac{2}{n}\right)^k Y_k(v) : v \in C^\infty(M)\ ,\ v > 0\right\}.$$

Portanto, se $\widetilde{\theta} = v^{p-2}\theta$ satisfaz $C_{\widetilde{\theta}} = 0$, então $\widetilde{\theta}$ tem σ_k curvatura pseudohermitiana constante se, e somente se, v é um ponto crítico do σ_k-funcional de Yamabe $Y_k(v)$.

Voltemos nossa atenção à esfera $(S^{2n+1}, \hat{\theta})$. Na seção 3.4.3, vimos que

$$S_*^{2n+1} := S^{2n+1} - \{(0,-1)\}$$

pode ser identificada, via Transformação de Cayley, com o grupo de Heisenberg $\mathbb{H}^n$. Precisamente, se

$$F : S_*^{2n+1} \to \mathbb{H}^n$$

é a Transformação de Cayley, consideraremos funções $u \in C^\infty(S_*^{2n+1})$ como funções em $C^\infty(\mathbb{H}^n)$ fazendo $u = u \circ F$. Além disso, com essa identificação, podemos considerar a estrutura canônica de $\mathbb{H}^n$ como uma estrutura sobre S_*^{2n+1} dada por $\Theta = F^*\Theta$. Dessa maneira, a aplicação

$$F : (S_*^{2n+1}, \Theta) \to (\mathbb{H}^n, \Theta)$$

é uma aplicação isopseudohermitiana. A σ_k-constante de Yamabe de S^{2n+1} pode ser dada por

$$\lambda_k(S^{2n+1}) = \inf \left\{ \left(\frac{2}{n}\right)^k \frac{\int_{\mathbb{H}^n} v^{p-\frac{2k}{n}} \sigma_k\left(\frac{V}{v}\right) dV_\Theta}{\left(\int_{\mathbb{H}^n} v^p dV_\Theta\right)^{1-2k/np}} : v \in C^\infty(\mathbb{H}^n)\ ,\ v > 0 \right\}.$$

Considere agora a função $v \in C^\infty(\mathbb{H}^n)$ definida por

$$v = v(z,t) = |w+i|^{-n},$$

em que $w = t + i|z|^2$. Podemos escrever

$$v^{2/n}\Theta = |w+i|^{-2}\Theta.$$

Denotando

$$b(z,t) = |w+i|^{-2},$$

obtemos

$$F^*(b\Theta) = (b \circ F)F^*\Theta.$$

Mas

$$\begin{aligned} b \circ F(z, z^{n+1}) &= b\left(\frac{z}{1+z^{n+1}}, -i\frac{z^{n+1} - \overline{z}^{n+1}}{|1+z^{n+1}|^2}\right) \\ &= |1+z^{n+1}|^2. \end{aligned}$$

De (2.41), encontramos

$$F^*\Theta = |1+z^{n+1}|^{-2}\hat{\theta}.$$

Logo

$$v^{2/n}\Theta = F^*(v^{2/n}\Theta) = F^*(|w+i|^{-2}\Theta) = \hat{\theta}.$$

Como $\hat{\theta}$ tem σ_k-curvatura pseudohermitiana constante e é livre de torção, a função v é um extremal do σ_k-funcional de Yamabe

$$Y_k(v) = \frac{\int_{\mathbb{H}^n} v^{p-\frac{2k}{n}} \sigma_k\left(\frac{V}{v}\right) dV_\Theta}{\left(\int_{\mathbb{H}^n} v^p dV_\Theta\right)^{1-2k/np}}.$$

Portanto, temos a igualdade

$$\lambda_k(S^{2n+1}) = \left(\frac{2}{n}\right)^k \frac{\int_{\mathbb{H}^n} v^{p-\frac{2k}{n}} \sigma_k\left(\frac{V}{v}\right) dV_\Theta}{\left(\int_{\mathbb{H}^n} v^p dV_\Theta\right)^{1-2k/np}}. \tag{4.20}$$

em que $v = |w+i|^{-n}$ com $w = t + i|z|^2$. Com isso, obtemos a seguinte proposição:

Proposição 4.6.1. *O valor exato da σ_k-constante de Yamabe da esfera CR é*

$$\lambda_k(S^{2n+1}) = C(n,k)\pi^k.$$

DEMONSTRAÇÃO: Seja $v = |w+i|^{-n}$ com $w = t + i|z|^2$. Como acabamos de ver

$$\begin{aligned}
\lambda_k(S^{2n+1}) &= \frac{\int_{\mathbb{H}^n} \left(\frac{2}{n}\right)^k v^{p-\frac{2k}{n}} \sigma_k\left(\frac{V}{v}\right) dV_\Theta}{\left(\int_{\mathbb{H}^n} v^p dV_\Theta\right)^{1-2k/np}} \\
&= \frac{\int_{\mathbb{H}^n} \sigma_k(v^{2/n}\Theta) dV_{v^{2/n}\Theta}}{\left(\int_{\mathbb{H}^n} dV_{v^{2/n}\Theta}\right)^{1-2k/np}} \\
&= \frac{\int_{S^{2n+1}} \sigma_k(\hat{\theta}) dV_{\hat{\theta}}}{\left(\int_{S^{2n+1}} dV_{\hat{\theta}}\right)^{1-2k/np}}.
\end{aligned}$$

Mas $\sigma_k(\hat{\theta})$ é constante, daí

$$\lambda_k(S^{2n+1}) = \sigma_k(\hat{\theta}) \frac{\int_{S^{2n+1}} dV_{\hat{\theta}}}{\left(\int_{S^{2n+1}} dV_{\hat{\theta}}\right)^{1-2k/np}} = \sigma_k(\hat{\theta}) \left(\int_{S^{2n+1}} dV_{\hat{\theta}}\right)^{2k/np}.$$

Como $\hat{\theta}$ é pseudo-Eisntein, temos

$$\sigma_k(\widetilde{\theta}) = C(n,k) \frac{\hat{R}^k}{(2n(n+1))^k} ,$$

em que $\hat{R}$ é a curvatura escalar pseudohermitiana associada à $\hat{\theta}$. Logo

$$\lambda_k(S^{2n+1}) = \frac{C(n,k)}{(2n(n+1))^k} \left(\hat{R} \left(\int_{S^{2n+1}} dV_{\hat{\theta}} \right)^{2/np} \right)^k.$$

Observando que

$$\frac{2}{np} = \frac{2}{n(2+2/n)} = \frac{1}{n+1} = \frac{1+n-n}{n+1} = 1 - \frac{n}{n+1} = 1 - \frac{2}{p}$$

podemos escrever

$$\lambda_k(S^{2n+1}) = \frac{C(n,k)}{(2n(n+1))^k} \left(\hat{R} \frac{\int_{S^{2n+1}} dV_{\hat{\theta}}}{\left(\int_{S^{2n+1}} dV_{\hat{\theta}}\right)^{2/p}} \right)^k.$$

Novamente, como $\hat{R}$ é constante, temos

$$\lambda_k(S^{2n+1}) = \frac{C(n,k)}{(2n(n+1))^k} \left(\frac{\int_{S^{2n+1}} \hat{R} dV_{\hat{\theta}}}{\left(\int_{S^{2n+1}} dV_{\hat{\theta}}\right)^{2/p}} \right)^k.$$

Mas

$$Y(\theta) = \frac{\int_{S^{2n+1}} R_\theta \, dV_\theta}{\left(\int_{S^{2n+1}} dV_\theta\right)^{2/p}},$$

em que R_θ é a curvatura escalar pseudohermitiana de θ, é o funcional de Yamabe CR . Em [29] D. Jerison e J. Lee mostraram que $\hat{\theta}$ é um extremal desse funcional e que

$$\lambda(S^{2n+1}) = \inf \frac{\int_{S^{2n+1}} R_\theta \, dV_\theta}{\left(\int_{S^{2n+1}} dV_\theta\right)^{2/p}} = 2\pi n(n+1).$$

Portanto,

$$\lambda_k(S^{2n+1}) = \frac{C(n,k)}{(2n(n+1))^k}(2\pi n(n+1))^k = C(n,k)\pi^k.$$

∎

Uma conseqüencia imediata dessa proposição é que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\frac{\int_{\mathbb{H}^n} \left(\frac{2}{n}\right)^k v^{p-\frac{2k}{n}} \sigma_k\left(\frac{V}{v}\right) dV_\Theta}{\left(\int_{\mathbb{H}^n} v^p dV_\Theta\right)^{1-2k/np}} \geq \frac{1}{C}$$

para toda função $v \in C^\infty(\mathbb{H}^n)$. Ou seja, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\left(\int_{\mathbb{H}^n} v^p dV_\Theta\right)^{\frac{2}{p}\left(1-\frac{1}{n}(1-k)\right)} \leq C \int_{\mathbb{H}^n} \left(\frac{2}{n}\right)^k v^{1-(1-k)(1-p)} \sigma_k\left(V\right) dV_\Theta \tag{4.21}$$

para toda função $v \in C^\infty(\mathbb{H}^n)$. Observe que para $k = 1$, teremos

$$\left(\int_{\mathbb{H}^n} v^p dV_\Theta\right)^{\frac{2}{p}} \leq C \int_{\mathbb{H}^n} \frac{2}{n} v \sigma_1\left(V\right) dV_\Theta.$$

De (4.13), temos

$$v^p \sigma_1(\widetilde{\theta}) = \frac{2}{n} v \sigma_1(V),$$

em que $\widetilde{\theta} = v^{2/n}\Theta$. Mas

$$\begin{aligned} \sigma_1(\widetilde{\theta}) &= \frac{1}{2(n+1)} \widetilde{R} \\ &= \frac{1}{2(n+1)} v^{1-p}(p\Delta_b v + Rv), \end{aligned}$$

em que R é a curvatura de Θ. Como $R = 0$, obtemos

$$\frac{2}{n} v \sigma_1(V) = \frac{p}{2(n+1)} v \Delta_b v.$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{H}^n} \frac{2}{n} v\sigma_1 (V)\, dV_\Theta = \int_{\mathbb{H}^n} \frac{p}{2(n+1)} v\Delta_b v dV_\Theta = \frac{p}{2(n+1)} \int_{\mathbb{H}^n} v\Delta_b v dV_\Theta.$$

Agora

$$\int_{\mathbb{H}^n} v\Delta_b v dV_\Theta = \int_{\mathbb{H}^n} \|dv\|_\Theta^2 dV_\Theta = \int_{\mathbb{H}^n} \sum_{j=1}^{n} |Z_j v|^2 dV_\Theta$$

e

$$p = 2(n+1)/n.$$

Daí concluímos que

$$\left(\int_{\mathbb{H}^n} v^p dV_\Theta\right)^{\frac{2}{p}} \leq \frac{C}{n} \int_{\mathbb{H}^n} \sum_{j=1}^{n} |Z_j v|^2 dV_\Theta.$$

Essa desigualdade é conhecidas como a desigualdade de Folland-Stein (veja [17]). Em [29], D. Jerison e J. Lee mostraram que e melhor contante nessa desigualdade é dada por $1/(\pi n^2)$, ou seja, $C = 1/(n\pi)$. Observe que ao obtermos a desigualdade

$$\left(\int_{\mathbb{H}^n} v^p dV_\Theta\right)^{\frac{2}{p}\left(1-\frac{1}{n}(1-k)\right)} \leq C \int_{\mathbb{H}^n} \left(\frac{2}{n}\right)^k v^{1-(1-k)(1-p)} \sigma_k (V)\, dV_\Theta,$$

tivemos imediatamte que as melhores constantes são dadas por $C = 1/\lambda_k(S^{2n+1})$. Ou seja,

$$C = \frac{1}{C(n,k)\pi^k}.$$

Assim para $k = 1$, temos $C = 1/n\pi$, que coincide com o resultado obtido por D. Jerison e J. Lee em [29]. Essa desigualde pode ser pensada como uma extensão , ou uma generalização, da desigualdade de Folland-Stein no grupo de Heisenberg.

Seja θ uma estrutura pseudohermitiana para S^{2n+1}, compatível com $\hat{\theta}$, k-positiva e Cotten-admissível. Se θ tem σ-curvatura pseudohermitiana constante, pelo corolário 4.6.1, existe uma constante K e um CR-automorfismo ϕ de S^{2n+1} tal que

$$\theta = K\phi^*\hat{\theta}.$$

Considerando a transformação de Cayley $F : S_*^{2n+1} \to \mathbb{H}^n$, podemos escrever

$$\theta = F_*\theta = v^{2/n}\Theta$$

e considerar θ como uma estrutura em $\mathbb{H}^n$. Quando $K = 1$ e $\phi = id$, vimos que $u = |w + i|^{-n}$, no qual $w = t + i|z|^2$. No caso geral, $v \in C^\infty(\mathbb{H}^n)$ é da forma (veja

[28])

$$v(z,t) = K|w + z.\overline{\mu} + \lambda|^{-n}$$

em que $K > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{C}^n$ e $\mathrm{Im}\{\lambda\} > |\mu|^2/4$. Em resumo, obtemos o seguinte resultado.

Teorema 4.6.1. *Existe uma constante $C > 0$ tal que a desigualdade do tipo Sobolev*

$$\left(\int_{\mathbb{H}^n} v^p dV_\Theta\right)^{\frac{2}{p}(1+\frac{1}{n}(1-k))} \leq C\int_{\mathbb{H}^n} v^{1+\frac{(1-k)(n+2)}{2}}\sigma_k(V)dV_\Theta$$

é satisfeita para toda função suave com suporte $u \in C^\infty(\mathbb{H}^n)$ e para qualquer $1 \leq k \leq n$. Além disso, a melhor constante dessa desigualdade é $C = 1/C(n,k)\pi^k$ com igualdade atingida pelas funções

$$v(z,t) = K|w + z.\overline{\mu} + \lambda|^{-n}$$

em que $K > 0$, $\lambda \in \mathbb{C}$, $\mu \in \mathbb{C}^n$ e $Im\{\lambda\} > |\mu|^2/4$. Restrito à classe de funções Cotten-admissíveis, a igualdade é atingida somente por essas funções. Tais funções são obtidas de $K|w + i|^{-n}$ por translações e dilatações de Heisenberg.

4.7 A desigualdade crítica

Finalizaremos esse capítulo mostrando que para qualquer variedade pseudohermitiana compacta, estritamente pseudoconvexa (M,θ), temos

$$\lambda_k^+(M) \leq \lambda_k^+(S^{2n+1}).$$

Além disso, se (M,θ) não é localmente CR-equivalente à esfera S^{2n+1}, então

$$\lambda_k^+(M) < \lambda_k^+(S^{2n+1}).$$

Necessitamos do seguinte lema (veja [10]):

Lema 4.7.1. *Seja $\Lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_n) \in \Gamma_k^+$ em que $\lambda_n \leq \ldots \leq \lambda_n$. Então*

$$\sigma_{k-1}(\Lambda) \geq \frac{k}{n-k+1}C(n,k)^{1/k}[\sigma_k(\Lambda)]^{(k-1)/k}.$$

Podemos agora enunciar um dos nossos resultados principais.

Teorema 4.7.1. *Seja (M,θ) uma variedade pseudohermitiana compacta, estritamente pseudoconvexa. Suponha ainda que θ seja k-positiva. Então*

$$\lambda_k^+(M) \leq \lambda_k^+(S^{2n+1}).$$

Além disso, se (M,θ) não é localmente CR-equivalente à esfera S^{2n+1}, então

$$\lambda_k^+(M) < \lambda_k^+(S^{2n+1}).$$

Demonstração: Seja $\widetilde{\theta} = v^{2/n}\theta$ uma estrutura pseudohermitiana k-positiva. Como $\sigma_1(\widetilde{\theta}) > 0$, a curvatura escalar pseudohermitiana de $(M,\widetilde{\theta})$ é positiva. Assim, vale o princípio de comparação para o operador $\sigma_1(\lambda(S_\theta))$ sobre M.

Seja v_1 uma solução do problema de Yamabe CR . Como já é conhecido, v_1 satisfaz $Y_1(v_1) \leq \lambda_1(S^{2n+1})$, em que

$$Y_k(v) = \frac{\int_M v^{p(1-k)+k}\sigma_k\left(V\right)dV_\theta}{\left(\int_M v^p dV_\theta\right)^{\frac{2}{p}\left(1-\frac{1}{n}(1-k)\right)}}\,.$$

Observe que, quando (M,θ) não é localmente conformemente plana, temos a desigualdade estrita $Y_1(v_1) < \lambda_1(S^{2n+1})$. Seja v_k uma solução de

$$\sigma_k(V) = C_{n,\,k}v^{(p-1)k}$$

sobre M, em que $C_{n,k} = C(n,k)n^k$.

Pelo lema (4.7.1), obtemos

$$-p\Delta_b v_k + Rv_k = \sigma_1\left(\lambda(V_k)\right) \geq n^2 v_1^{p-1},$$

pelo princípio da comparação, concluímos que

$$v_k \geq v_1.$$

Para ver que

$$\lambda_k^+(M) \leq \lambda_k^+(S^{2n+1}),$$

basta observar que

$$Y_k(v_k) \leq \lambda_k^+(S^{2n+1}).$$

Como

$$p(1-k) + k = p - k(p-1) < 0, \forall\ \ k \geq 2,$$

temos

$$v_1^{p(1-k)+k} \geq v_k^{p(1-k)+k},$$

donde

$$\begin{aligned}
\int_M v_k^{p(1-k)+k}\sigma_k\left(V_k\right)dV_\theta &\leq C_{n,k}\int_M v_1^{p(1-k)+k}v_1^{(p-1)k}dV_\theta\\
&\leq C_{n,k}\int_{B_\rho} v_1^{p(1-k)+k}v_1^{(p-1)k}dV_\theta\\
&= C_{n,k}\int_{B_\rho} v_1^p dV_\theta.
\end{aligned}$$

em que B_ρ denota uma bola em M de raio ρ. Temos também

$$\int_M v_k^p dV_\theta \geq \int_{B_\rho} v_1^p dV_\theta.$$

Portanto

$$Y_k(v_k) = \frac{\int_M v_k^{p(1-k)+k}\sigma_k\left(V_k\right)dV_\theta}{\left(\int_M v_k^p dV_\theta\right)^{\frac{2}{p}\left(1-\frac{1}{n}(1-k)\right)}} \leq C_{n,k}\left(\int_M v_1^p dV_\theta\right)^{2k/np}.$$

Agora

$$Y_k(v_k) \leq \lambda_k^+(S^{2n+1})$$

segue do fato que

$$\lambda_k(S^{2n+1}) = \frac{C(n,k)}{2n(n+1)}\left(\lambda(S^{2n+1})\right)^k.$$

∎

Referências Bibliográficas

[1] T. Aubin - *Equations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire*, J. Math. Pure Appl. 55 (1976) 269-296.

[2] E. R. Barbosa, L. G. Carneiro, M. Montenegro - *The σ_k-Yamabe problem on CR manifolds*, Preprint (2011).

[3] E. R. Barbosa, L. G. Carneiro, M. Montenegro - *Extremal functions for the σ_k-Sobolev inequality on the Heisenberg group*, Preprint (2011).

[4] E. Barletta and S. Dragomir - *On the spectrum of a strictly pseudoconvex CR manifold*, Abhandlungen Math. Sem. Univ. Hamburg, 67(1997), 143-153

[5] E. Barletta and S. Dragomir - *Pseudohermitian immersions, pseudo-Einstein structures, and the Lee class of a CR manifold*, Kodai Math. J., 19(1996), 62-86.

[6] A. L. Besse - *Einstein Manifolds*, Spring-Verlag, Berlin, 1987.

[7] A. Boggess - *CR manifolds and the tangential Cauchy-Riemann complex*, Studies in Advanced Math., CRC Press, Inc., Boca Raton-Ann Arbor-Boston-London, 1991.

[8] T. P. Branson, A. R. Gover - *Variational status of a class of fully nonlinear curvature prescription problems*, Calc. Var. Partial Differential Equations 32 (2008), no. 2, 253-262.

[9] E. Cartan- *Sur equivalence pseudo-conforme des hypersurfaces de espace de deux variables complex I*, Ann. Mat. 11 (1932) 17-90; II, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 1 (1932) 333-354.

[10] L. Caffarelli, L. Nirenberg, and J. Spruck- *The Dirichlet problem for nonlinear secondorder elliptic equations, III: Functions of the eigenvalues of the Hessian*, Acta Math. 155 (1985), 261-301.

[11] A. Chang, M. Gursky, P. Yang - *An a priori estimate for a fully nonlinear equation on four-manifolds*, J. Anal. Math, 87 (2002) 151-186.

[12] S. S. Chern, J. K. Moser - *Real hypersurfaces in complex manifolds*, Ann. of Math. (2) 133 (1974) 219-271.

[13] S. Dragomir - *Pseudohermitian immersions between strictly pseudoconvex CR manifolds*, American J. Math., (1)117(1995), 169-202.

[14] S. Dragomir, G. Tomassini - *Differential Geometry and Analysis on CR Manifolds*, Vol. 246 of Progress in Mathematics, Birkhauser, Boston, 2006.

[15] L.P. Eisenhart - *Riemannian geometry*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1966.

[16] C. Fefferman - *Monge-Ampère equations, the Bergman kernel, and geometry of pseudoconvex domains*, Ann. of Math. (2) 103 (1976), 395-416; correction, 104 (1976), 393-394.

[17] G.B. Folland and E.M. Stein - *Estimates for the $\overline{\partial}_b$-complex and analysis on the Heisenberg group*, Comm. Pure Appl. Math., 27(1974), 429-522.

[18] N. Gamara - *The CR Yamabe conjecture: the case* $n = 1$, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 3 (2001) 105-137.

[19] N. Gamara, R. Yacoub - *CR Yamabe conjecture: the conformally flat case*, Pacific J. Math. 201 (2001) 121-175.

[20] L. Garding - *An inequality for hyperbolic polynomials*, J. Math. Mech. 8 (1959) 957-965.

[21] Y. Ge, G. Wang - *On a fully nonlinear Yamabe problem*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 39 (2006) 569-598.

[22] P. Guan, G. Wang - *A fully nonlinear conformal flow on locally conformally flat manifolds*, J. Reine Angew. Math. 557 (2003) 219-238.

[23] P. Guan, J. Viaclovsky, G. Wang - *Some properties of the Schouten tensor and applications to conformal geometry* Trans. Amer. Math. Soc. 355 (2003), no. 3, 925-933.

[24] M. Gursky, J. Viaclovsky - *Prescribing symmetric functions of the eigenvalues of the Ricci tensor*, Annals of Mathematics 166 (2007) no. 2, 475-531.

[25] R. A. Horn and C. R. Johnson - *Matrix Analysis*, Cambridge University Press (1991).

[26] H. Jacobowitz - *An introduction to CR structures*, Mathem. Surveys and Monographs, No. 32, Providence, RI, 1990.

[27] D. Jerison, J. M. Lee - *A subelliptic, nonlinear eigenvalue problem and scalar curvatures on CR manifolds*, Contemporary Math, No. 27, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1984, 57-63.

[28] D. Jerison, J. M. Lee - *Yamabe problem on CR manifolds*, J. Differential Geom., 25 (1987), 167-197.

[29] D. Jerison, J. M. Lee - *Extremals for the Sobolev inequality on the Heisenberg group and the CR Yamabe problem*, J. Amer. Math. Soc., 1 (1988), no. 1, 1-13.

[30] D. Jerison, J. M. Lee - *Intrinsic CR normal coordinates and the CR Yamabe problem*, J. Differential Geom., 29 (1989), 303-343.

[31] J. M. Lee - *The Fefferman metric and pseudohermitian invariants*, Trans. Amer. Math. Soc., 296 (1986), 411-429.

[32] J. M. Lee - *Pseudo-Einstein structures on CR manifolds*, Amer. J. Math. 110 (1988), 157-178.

[33] J.M. Lee and T.H. Parker - *The Yamabe problem*, Bull. AMS 17 (1987), 37-91.

[34] A. Li, Y.Y. Li - *On some conformally invariant fully nonlinear equations*, Comm. Pure Appl. Math. 56 (2003) 1416-1464.

[35] S. Kobayashi and K. Nomizu - *Foundations of Differential Geometry, vols. I, II*, New York, Wiley-Interscience, 1963.

[36] R. C. Reilly - *On the Hessian of a function and the curvatures of its graph*, Michigan Math. J. 20 (1973), 373-383.

[37] W.M. Sheng, N.S. Trudinger,J. Wang - *The Yamabe problem for higher order curvatures*, J. Diff. Geom., 77 (2007), 515-553.

[38] R. Schoen - *Conformal deformation of a riemannian metric to constant scalar curvature*, J. Differential Geom. 20 (1984) 479-495.

[39] N. Tanaka - *A differential geometric study on strongly pseudo-convex manifolds*, Kinokuniya, Tokyo, 1975.

[40] N. S. Trudinger - *Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian estructures on compact manifolds*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 22 (1968) 265-274.

[41] J. Viaclovsky - *Conformal geometry, contact geometry, and the calculus of variations*, Duke Math. J. 101 (2000) 283-316.

[42] J. Viaclovsky - *Some fully nonlinear equations in conformal geometry*, Diferential equations and mathematical physics (Birmingham, AL, 1999) (Providence, RI), American Mathematical Society, Providence, RI, 2000, pp. 425-433.

[43] J. Viaclovsky - *Estimates and existence results for some fully nonlinear elliptic equations on Riemannian mani folds*, Communications in Analysis and Geometry 10 (2002) no.4, 815-846.

[44] J. Viaclovsky - *Conformal geometry and fully nonlinear equations, Inspired by S. S. Chern*, Nankai Tracts Math 11, World Scientific, 2006, pages 435-460.

[45] X. J. Wang - *A class of fully nonlinear elliptic equations and related functionals*, Indiana Univ. Math. J. 43 (1994), no. 1, 25-54.

[46] S. M. Webster - *Pseudohermitian structures on a real hypersurface*, J. Differential Geom. 13 (1978), 25-41.

[47] H. Yamabe - *On a deformation of Riemannian estructures on compact manifolds*, Osaka Math. J. 12 (1960) 21-37.

Índice Remissivo

$(1,1)$-Hessiana complexa, 19
σ_k-constante de Yamabe, 74
σ_k-curvatura pseudohermitiana, 51
σ_k-equação de Yamabe CR, 58
σ_k-equação de Yamabe, x
σ_k-funcional de Yamabe CR, 75
σ_k-operador de Yamabe, x, 73
σ_k-curvatura, ix
1-formas de conexão, 13
1-formas de torção, 15

aplicação CR, 3
aplicação isopseudohermitana, 7
aplicação pseudohermitana, 7

cone de Gärding, xi
conexão pseudohermitiana, 12
correferencial admissível, 3
correferencial local, 3
correferencial pseudohermitiano, 19
CR-equivalência, 3
curvatura escalar pseudohermitiana, 22
curvatura pseudohermitiana, 22

direção característica, 8
distribuição de Levi, 2
domínio de Siegel, 39

elemento de volume, 10
equação de estrutura, 21
equação de Yamabe CR, 57
equação de Yamabe, vi
equação de Yamabe CR, viii
estrutura complexa, 2
estrutura k-positiva, 67
estrutura pseudo-Einstein, 38
estrutura pseudohermitiana, 5

forma de Levi, 6
formas de curvatura, 20
função Cotten-admissível, 65
função CR-pluriharmônica, 65
função k-admissível, 67
função CR-holomorfa, 3
funcional de Yamabe, vi
funcional de Yamabe CR, viii

grupo de Heisenberg, 40

identidades de Bianchi, 22
invariante de Yamabe, vi
invariante de Yamabe CR, viii

k-ésima tranformação de Newton, 49

métrica de Webster, 8

operador de Yamabe CR, 57
operador divergente, 52
operador sublaplaciano, 56

referencial local, 3
referencial pseudohermitiano, 19

símbolos de Christoffel, 13

tensor curvatura de Webster, 22
tensor de Chern, 44
tensor de Cotten pseudohermitiano, 59
tensor de Ricci pseudohermitiano, 22
tensor de Schouten, ix
tensor de Schouten pseudohermitiano, 45

torção pseudohermitiana, 15
tranformação de Cayley, 41

variedade CR, 1
variedade CR estritamente pseudoconvexa, 7
variedade pseudohermitiana, 5