Geraldo César Gonçalves Ferreira

Bilhares em Ovais com Simetria de Rotação

Belo Horizonte
2012

Geraldo César Gonçalves Ferreira

Bilhares em Ovais com Simetria de Rotação

Este exemplar corresponde à redação final da tese defendida por Geraldo César Gonçalves Ferreira. Tese apresentada ao departamento de matemática da Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de doutor em matemática.

Orientadora: Sylvie Oliffson Kamphorst
Coorientadora: Sônia Pinto de Carvalho

Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática
Universidade Federal de Minas Gerais

Belo Horizonte
2012

Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Secretaria de Pós-Graduação em Matemática
(31) 3409.5963 FAX 3409.5797
e-mail: pgmat@mat.ufmg.br // www.mat.ufmg.br/pgmat

FOLHA DE APROVAÇÃO

Bilhares em ovais com simetria de rotação

GERALDO CÉSAR GONÇALVES FERREIRA

Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

Prof^a^. Sylvie Marie O. K. Leal da Silva
UFMG

Prof^a^. Sônia Pinto de Carvalho
UFMG

Prof. Mário Jorge Dias Carneiro
UFMG

Prof. José Antônio Gonçalves Miranda
UFMG

Prof. Rafael Oswaldo Ruggiero Rodriguez
PUC-Rio

Prof. Salvador Addas Zanata
USP

Belo Horizonte, 29 de fevereiro de 2012.

Resumo

Estudaremos bilhares em ovais e analisaremos algumas consequências da simetria de rotação do bordo na dinâmica. A simetria simplifica alguns cálculos, auxiliando na obtenção de determinados resultados. Provaremos que bilhares em ovais simétricas possuem órbitas periódicas estáveis.

Bilhares em ovais suficientemente diferenciáveis possuem curvas rotacionais invariantes, mas há somente dois tipos de ovais com círculos horizontais invariantes: As ovais de largura constante e algumas curvas com uma simetria especial. Estudaremos a dinâmica da aplicação do bilhar perto dos círculos horizontais e mostraremos que estes círculos horizontais são aproximados por outras curvas rotacionais invariantes por ambos os lados.

Abstract

We study billiards on ovals and investigate some consequences of a rotational symmetry of the boundary on the dynamics. As it simplifies some calculations, the symmetry helps to obtain some results. We prove that symmetric oval billiards have stable periodic orbits.
Sufficiently differentiable oval billiards always have invariant rotational curves, but there are only two types of ovals with an invariant horizontal circle in its phase-space: the constant width ovals and some very special symmetric curves. we study the dynamics near the horizontal circles of the billiard map on these ovals, and show that these horizontal circles are approached, from both sides, by other invariant rotational curves.

Aos meus pais, Antônio e Suely.
Ao meu filho, Guilherme,
À minha amada companheira, Jéssica.

Agradecimentos

Agradeço a Deus pelo dom da vida, saúde, paz e sabedoria.
Aos meus pais e avós, exemplos de perseveranąa e sapiência.
À minha querida companheira Jéssica e ao meu filho Guilherme que sempre estiveram ao meu lado incentivando e apoiando.
As mães acadêmicas Sylvie Oliffson Kamphorst e Sônia Pinto de Carvalho, que foram muito mais do que orientadoras e ao professor Mário Jorge pelos excelentes cursos de Sistemas Dinâmicos.
Às agências de fomento CAPES e CNPq pelo suporte financeiro
Aos demais colegas, amigos e professores que fizeram parte desta jornada, os meus sinceros mais agradecimentos.

Conteúdo

Introdução

Uma curva plana Γ é uma oval se Γ é C^k, $k \geq 2$, fechada, regular e com curvatura estritamente positiva. Parametrizamos as ovais por comprimento de arco s, ou pelo ângulo φ entre o vetor tangente e o eixo x positivo.

Se o traço de Γ é invariante por rotação de $\frac{2\pi}{n}$ em torno de um ponto $q_c \in \mathbb{R}^2$ então dizemos que a oval é n-simétrica. O ponto q_c é chamado centro de simetria.

A menos de translação, supondo $q_c = (0,0)$ teremos uma bijeção entre o conjunto das ovais n-simétricas e as funções $\mathcal{A} = \left\{ g \in C^2 \left(\frac{\mathbb{R}}{\frac{2\pi}{n}\mathbb{Z}}, \mathbb{R} \right) \ /g(\varphi) + g''(\varphi) > 0, \ g(\varphi) > 0 \right\}$, onde $g(\varphi) = \langle \Gamma(\varphi), -\eta(\varphi) \rangle$ é a função suporte de uma oval n-simétrica Γ, com $\eta(\varphi) = (-\text{sen}\varphi, \cos\varphi)$ o vetor normal. Tomando em $\mathcal{A}$ a topologia C^2 teremos uma topologia no espaço das ovais n-simétricas induzida por essa bijeção.

Afim de definirmos a aplicação do bilhar consideremos o movimento livre de uma partícula na região limitada pelo traço de uma oval Γ com colisão elástica na fronteira. O movimento é completamente determinado pelo ponto de reflexão em Γ e a direção do movimento imediatamente após cada reflexão. Utilizaremos os parâmetros φ ou s, para localizarmos o ponto de reflexão, e a componente tangencial do momento $p = \cos\beta$ para determinarmos a direção do movimento, onde β é o ângulo entre a direção do movimento e o vetor tangente a Γ.

Tomando o parâmetro $\varphi \in \mathbb{R}$, com $\Gamma(\varphi + 2\pi) = \Gamma(\varphi)$ teremos a aplicação do bilhar T correspondendo a Γ que associa para cada (φ_1, p_1) no cilindro $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times (-1, 1)$ o próximo ponto de impacto e componente tangencial do momento (φ_2, p_2).

A órbita de um ponto (φ_0, p_0) é o conjunto $\{T^j(\varphi_0, p_0), j \in \mathbb{N}\}$ e a órbita é periódica de período m se m é o menor número natural tal que $T^m(\varphi_0, p_0) = (\varphi_0, p_0)$. As trajetórias são poligonais na região limitada pelo traço da oval correspondendo as órbitas.

Como a aplicação do bilhar preserva a medida de Lesbegue $ds \wedge dp$ nas coordenadas (s, p) ([1], [3], [15], [18], [21]), a órbita periódica será hiperbólica se os autovalores λ e $1/\lambda$ de $DT^m(\varphi_0, p_0)$ forem reais e distintos. Geometricamente isto significa que existem duas direções distintas no espaço tangente, uma onde a derivada é uma expansão e outra onde é uma contração. Se a órbita for hiperbólica o Teorema de Hartman-Grobman [1] nos dá uma conjugação local entre T^m e $DT^m(\varphi_0, p_0)$ na vizinhança dos respectivos pontos (φ_0, p_0) e $(0,0)$, o que caracteriza completamente a dinâmica na vizinhança dos pontos da órbita periódica.

Uma situação oposta a essa ocorre quando cada ponto da órbita possui ilhas elípticas invariantes, ou seja, existem uma infinidade de curvas invariantes por T^m rodeando cada ponto da órbita periódica. Para que isto ocorra a órbita periódica deve ser elíptica ou parabólica, isto é, os autovalores λ e $1/\lambda$ de $DT^m(\varphi_0, p_0)$ são imaginários puro ou reais iguais a 1 ou -1. Este procedimento é mais esperado quando a órbita periódica é elíptica, uma vez que neste caso a derivada $DT^m(\varphi_0, p_0)$ é uma rotação.

Em [16] podemos ver que o subconjunto das ovais com pelo menos uma órbita periódica elíptica e uma órbita periódica hiperbólica, ambas de período 2 é um subconjunto aberto no conjunto das ovais em uma topologia definida por pertubações normais no traço destas. Inspirado neste trabalho obtivemos os resultados.

Teorema 1 *Dado $1 \leq m \leq n-1$, qualquer oval n-simétrica pode ser aproximada por uma oval deste mesmo conjunto tal que a aplicação do bilhar T associada a esta oval possua pelo menos $2d$ órbitas periódicas de período $n_1 = n/d$, com $d = mdc(m,n)$. Destas órbitas, d são hiperbólicas e d são tais que cada ponto da órbita possuem ilhas elípticas invariantes.*

Teorema 2 *O subconjunto das ovais n-simétricas, com $n \geq 4$, tal que para no mínimo $n-2$ valores de $1 \leq m \leq n-1$, a aplicação do bilhar associada T possui pelo menos $2d = 2mdc(n,m)$ órbitas periódicas de período $n_1 = n/mdc(n,m)$, com d hiperbólicas e d com ilhas elípticas invariantes em cada ponto da órbita é aberto e denso no conjunto das ovais n-simétricas.*

Estes resultados encontram-se no final do capítulo 2, para demonstra-los utilizamos fortemente a topologia induzida no conjunto das ovais n-simétricas pelo conjunto $\mathcal{A}$ das funções suporte. As boas propriedades da topologia de $\mathcal{A}$ foram fundamentais, como por exemplo que o subconjunto das funções de Morse é um subconjunto aberto e denso em $\mathcal{A}$. Também foram necessários para demonstrarmos esses resultados o Teorema da Forma Normal de Birkhoff [15] e o Teorema do Twist de Moser [5]. Para utilizarmos estes Teoremas, fixado $1 \leq m \leq n-1$, associamos as $2d$ órbitas periódicas a pontos fixos de uma aplicação no espaço quociente $\frac{\mathbb{R}}{2\pi\frac{m}{n}\mathbb{Z}} \times (-1,1)$ induzida pela relação $T\left(\varphi + 2\pi\frac{m}{n}, p\right) = T(\varphi, p) + \left(2\pi\frac{m}{n}, 0\right)$ e calculamos o Primeiro Coeficiente de Birkhoff destes pontos fixos utilizando o software Maple. Mostramos que a existência ilhas elípticas invariantes para os pontos fixos, equivalem a existência de ilhas elípticas invariantes para cada ponto das órbitas periódicas correspondentes.

Os resultados necessários para o desenvolvimento da tese foram discutidos no capítulo 1. Neste capítulo, utilizando resultados de Tabachnikov [18], classificamos todas as ovais cuja a aplicação do bilhar T possui retas invariantes, ou seja, cujas trajetórias fazem ângulos constantes com o vetor tangente. Mostramos que só podem ocorrer 3 casos:

Ou Γ é um círculo e T preserva a reta $\{p = p_0\}$ para todo $p_0 \in (-1, 1)$, ou Γ tem raio de curvatura na forma $R(\varphi) = a + b\cos(n\varphi)$ para $n \geq 4$ e T preserva $(n-2)$ retas sendo que se n é par todas são da forma $p_0 = \cos\alpha$, com α é solução da equação $n\tan\alpha = \tan n\alpha$ e se n é ímpar $(n-3)$ são da forma $p_0 = \cos\alpha$ e uma é da forma $p_0 = 0$, ou por fim, Γ é uma oval de largura constante com $R(\varphi) \neq a + b\cos(n\varphi)$ para n ímpar e T preserva apenas a reta $\{p = 0\}$.

Retas invariantes são exemplos particulares de curvas rotacionais invariantes, que são curvas invariantes pela aplicação do bilhar e homotopicamente não triviais. Estas curvas são gráficos pelo Teorema da Curva Invariante de Birkhoff ([1], [15]).

Quando a reta invariante é a reta $\{p = 0\}$ o número de rotação ω da aplicação do bilhar restrita a reta é $1/2$. Suponto oval Γ C^k, com $k > 7$ fazendo uma boa mudança de coordenadas e aplicando o Teorema 3.1.1 de R. Douady [12], obtivemos o resultado.

Teorema 3 *Se Γ é uma oval de largura constante e de classe C^k*, com $k > 7$. *Então para todo $\gamma > 0$ e todo $k' < k - 4$, existe $\varepsilon > 0$ tal que se*

$$B = \left\{ a \in \mathbb{R} / \left| a - 1/2 \right| \leq \varepsilon \text{ e para todo } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \ \left| a - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{|a - 1/2|}{q^2} \right\},$$

existe uma aplicação $G : S^1 \times B \to S^1 \times (-\delta, \delta)$ contínua, injetiva, isótopica a injeção natural tal que $f \circ G = G \circ Tr_a$, onde *$Tr_a : S^1 \times B \to S^1 \times B$ é dada por $(x, a) \to (x + a, a)$. Além disso $G_a(x) = G(x, a) \in C^{k'}$ e $\lim\limits_{x \to a} ||G_a - G_\omega|| = 0$, com $G_\omega(x) = (x, 0)$.*

Quando a reta invariante é a reta $\{p = p_0\}$ com $p_0 \neq 0$, o número de rotação ω é irracional por [20], se fosse diofantino, isto é, se $|n\omega - m| \geq \frac{K}{n^{\rho+1}}$ para todo m, $n \in \mathbb{Z}$, com $n > 0$, o resultado seguiriá também do Teorema 3.1.1. Contudo como não podemos afirmar isto, este argumento não procede.

Em [8] Levi-Moser demonstra um resultado para encontrarmos curvas rotacionais invariantes com número de rotação diofantino. Mesmo sem sabermos o número de rotação da reta $\{p = p_0\}$ com $p_0 \neq 0$, inspirados na técnica desenvolvida por eles [8] conseguimos demonstrar um resultado análogo.

Teorema 4 *Seja Γ uma oval de classe C^k, com $k \geq 2$, tal que a aplicação do bilhar associada tenha reta invariante $\{p_0 \neq 0\}$. Então em toda vizinhança (faixa aberta) da reta invariante no cilindro existem curvas analíticas rotacionais invariantes pela a aplicação do bilhar conjugada a rotação em S^1 por um número de rotação diofantino. Ainda a união dessas curvas tem medida positiva no cilindro.*

Em ambos os casos os números de rotação do bilhar restrito as curvas rotacionais invariantes que se acumulam nas retas são diofantinos e ficam suficientemente próximos dos números de rotação do bilhar restrito à estas retas a medida que as curvas invariantes se aproximam destas.

As ovais cujos bilhares possuem retas invariantes $\{p = p_0\}$, com $p_0 \neq 0$, são ovais n-simétricas com raio de curvatura dado por $R(\varphi) = a + b\cos(n\varphi)$ para $n \geq 4$. Neste caso mostramos

Teorema 5 *Seja Γ uma oval n-simétricas com raio de curvatura dado por $R(\varphi) = a + b\cos(n\varphi)$ com $n \geq 4$ e $a \neq \frac{n^2+1}{n^2-1}|b|$. Fixado $a > 0$ para exceto quatro valores de b a região entre duas retas invariantes possui duas $2d = 2\mathrm{mdc}(n,m)$ órbitas periódicas de período $n_1 = n/\mathrm{mdc}(n,m)$ para algum $1 \leq m \leq n-1$ que é determinado pela região escolhida. Destas 2d órbitas d são hiperbólicas e para no mínimo $n-2$ valores de m, d possuem ilhas elípticas invariantes em cada ponto da órbita.*

Estendemos os resultados obtidos na vizinhança de retas invariantes do bilhar para vizinhança de curvas rotacionais invariantes de Aplicações Twist em $S^1 \times \mathbb{R}$.

Uma curva rotacional invariante γ de uma Aplicação Twist F em $\mathbb{R}/\mathbb{Z} \times \mathbb{R}$ é conjugada a rotação ω no círculo $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ se existe uma aplicação η tal que $F \circ \eta_{|\gamma} = \eta \circ R_{\omega|_\gamma}$ onde $R_\omega(x) = x + \omega$. Por ([12] e [14]) se a aplicação F e a conjugação η são C^k com $k > 5$ e $\omega \in \mathbb{Q}$, ou F e η são C^∞e ω é diofantino então teremos outras curvas rotacionais invariantes com número de rotação diofantino próximo de ω se acumulando em γ. Complementamos em parte esse resultado mostrando que se F e a conjugação η são analíticos então indepentende do número de rotação, teremos também neste caso curvas rotacionais invariantes com número de rotação diofantino próximo de ω se acumulando em γ.

Regiões de instabilidade são regiões sem curvas rotacionais invariantes, todavia o bordo destas é formado por duas curvas rotacionais invariantes. Finalizaremos a tese e o 3^o capítulo obtendo condições para uma curva rotacional invariante não ser bordo de uma região de instabilidade.

Capítulo 1

Aplicação do Bilhar

Neste capítulo introduziremos os conceitos e resultados que utilizaremos ao longo da tese. Definiremos bilhares em ovais, e listaremos suas principais propriedades. As principais refêrencias usadas neste capítulo são [1], [3], [15], [18], [21].

1.1 Ovais

Definição 1.1.1 *Uma oval Γ é uma curva plana de classe C^k, com $k \geq 2$, fechada, regular e com curvatura estritamente positiva.*

Denotaremos por $\Gamma(s)$ a oval parametrizada pelo parâmetro comprimento de arco e por $\tau(s)$ o vetor tangente unitário a Γ no ponto s. Como Γ é C^k, com $k \geq 2$, podemos reparametrizá-la pelo ângulo φ que o vetor tangente faz com o eixo x positivo de maneira que $\tau(\varphi) = (\cos(\varphi), \mathrm{sen}(\varphi))$. Os parâmetros s e φ estão relacionados por $ds/d\varphi = R(\varphi)$, onde $R(\varphi)$ é o raio de curvatura da oval. $\Gamma(\varphi)$ é dada por:

$$
\begin{aligned}
x(\varphi) &= \int_0^{\varphi} \cos(t)\, R(t)\, dt + x_0 && (1.1)\\
y(\varphi) &= \int_0^{\varphi} \mathrm{sen}(t)\, R(t)\, dt + y_0.
\end{aligned}
$$

Como Γ é fechada, regular e C^k, com $k \geq 2$, R é periódica e contínua e logo possui uma série de Fourier:

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_j \cos(j\varphi) + b_j \mathrm{sen}(j\varphi).$$

Novamente como Γ é fechada, $x(2\pi) = x(0) = x_0$ e $y(2\pi) = y(0) = y_0$ logo $a_1 = \int_0^{2\pi} R(\beta)\cos(\beta)\, d\beta = 0$ e $b_1 = \int_0^{2\pi} R(\beta)\mathrm{sen}(\beta)\, d\beta = 0$. Se $R(\varphi)$ for de classe C^1 então a série de Fourier converge uniformemente, consequentemente:

$$R(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=2}^{\infty} a_j \cos(j\varphi) + b_j \mathrm{sen}(j\varphi)$$

O Teorema dos quatro vértices nos diz que se a oval Γ for de classe C^k com $k \geq 3$, então $R'(\varphi)$ se anula em pelo menos quatro pontos. O Teorema 1.1.1 demonstrado em [3] é de certa forma uma recíproca deste resultado.

Teorema 1.1.1 (Gluch [3]) *Seja $R : [0, 2\pi] \to \mathbb{R}$ uma função contínua, estritamente positiva, com $R(0) = R(2\pi)$. Se R é constante ou possui pelo menos dois pontos de máximo e dois pontos de mínimo então existe uma oval Γ dada pela equação 1.1 tal que R é o raio de curvatura desta oval. Ainda o raio de curvatura de Γ no ponto φ é $R(\varphi)$, com φ o ângulo entre o vetor tangente e o eixo x positivo.*

Definição 1.1.2 *Sejam Γ uma oval parametrizada pelo ângulo φ entre o vetor tangente e o eixo x positivo, $\eta(\varphi)$ a normal unitária em $\Gamma(\varphi)$ e q um ponto qualquer pertencente ao plano $\mathbb{R}^2$. A função*

$$g(\varphi) = \langle \Gamma(\varphi) - q, -\eta(\varphi) \rangle,$$

é denominada função suporte da oval Γ.

Notemos que assim como o raio de curvatura, a função suporte satisfaz $g(\varphi + 2\pi) = g(\varphi)$.

A função suporte mede a projeção do vetor $\Gamma(\varphi) - q$ no vetor $-\eta(\varphi)$. Como $-\eta(\varphi)$ é a normal apontando para a região complementar a região limitada pela oval, segue diretamente da definição 1.1.2 a proposição a seguir.

Proposição 1.1.1 *A função suporte $g(\varphi)$ é estritamente positiva se e somente se o ponto q pertence a região limitada pela oval.*

Como $\tau'(\varphi) = \eta(\varphi)$, $\eta'(\varphi) = -\tau(\varphi)$ e $\Gamma'(\varphi) = R(\varphi)\tau(\varphi)$ obtemos:

$$\begin{aligned} g'(\varphi) &= \langle \Gamma'(\varphi), -\eta(\varphi) \rangle + \langle \Gamma(\varphi) - q, -\eta'(\varphi) \rangle = \langle \Gamma(\varphi) - q, \tau(\varphi) \rangle, \\ g''(\varphi) &= \langle \Gamma'(\varphi), \tau(\varphi) \rangle - \langle \Gamma(\varphi) - q, \tau'(\varphi) \rangle = R(\varphi) - g(\varphi). \end{aligned}$$

Logo o raio de curvatura e a função suporte estão relacionados por:

$$R(\varphi) = g(\varphi) + g''(\varphi) \tag{1.2}$$

Substituindo 1.2 na equação 1.1 e integrando por partes, a equação da oval pode ser reescrita em função de $g(\varphi)$ como:

$$\begin{aligned} x(\varphi) &= \int_0^{\varphi} \cos(t)\, R(t)\, dt + x_0 = g(\varphi)\operatorname{sen}(\varphi) + g'(\varphi)\cos(\varphi) + \tilde{x}_0, \\ y(\varphi) &= \int_0^{\varphi} \operatorname{sen}(t)\, R(t)\, dt + y_0 = -g(\varphi)\cos(\varphi) + g'(\varphi)\operatorname{sen}(\varphi) + \tilde{y}_0, \end{aligned}$$

com $\tilde{x}_0 = x_0 - g'(0)$ e $\tilde{y}_0 = y_0 + g(0)$.

1.2 Ovais de largura constante

Nesta seção definiremos ovais de largura constante, e obteremos uma caracterização destas ovais através do raio de curvatura.

Dada uma oval Γ parametrizada pelo ângulo φ entre o vetor tangente e o eixo x positivo, a função $l(\varphi_1, \varphi_2) = ||\Gamma(\varphi_2) - \Gamma(\varphi_1)||$ mede a distância entre dois pontos desta oval. Em particular a distância entre dois pontos com tangentes paralelas é dada por $\ell(\varphi) = l(\varphi, \varphi + \pi) = ||\Gamma(\varphi + \pi) - \Gamma(\varphi)||$.

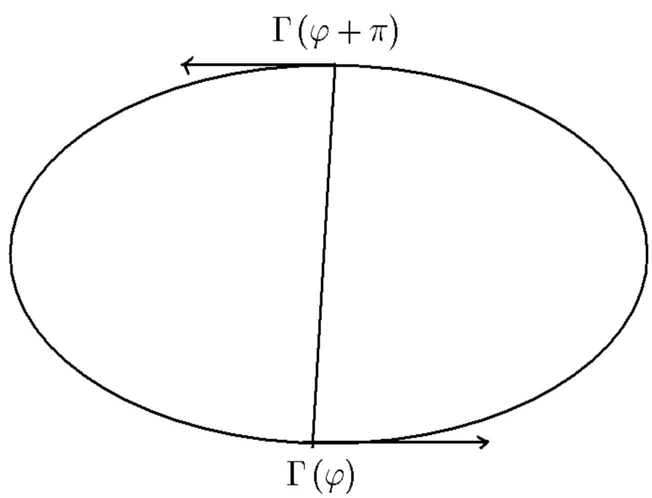

Figura 1.1: Tangentes paralelas em uma oval.

Como $\ell(\varphi + 2\pi) = \ell(\varphi)$, a função $\ell(\varphi)$ possui pelo menos dois pontos críticos em $[0, 2\pi)$ correspondendo aos pontos de máximo e mínimo, uma vez que essa função é da mesma classe de diferenciabilidade da oval Γ.

Lema 1.2.1 *Sejam Γ uma oval parametrizada pelo ângulo φ entre o vetor tangente e o eixo x positivo e $\ell(\varphi) = ||\Gamma(\varphi+\pi) - \Gamma(\varphi)||$. φ_0 é um ponto crítico de $\ell(\varphi)$ se e somente se o vetor $\Gamma(\varphi_0+\pi) - \Gamma(\varphi_0)$ é paralelo aos vetores normais $\eta(\varphi)$ e $\eta(\varphi+\pi)$. Além disto $\Gamma(\varphi_0+\pi) = \Gamma(\varphi_0) + \ell(\varphi_0)\,\eta(\varphi_0)$.*

Prova: Como $\ell^2(\varphi) = ||\Gamma(\varphi+\pi) - \Gamma(\varphi)||^2 = \langle \Gamma(\varphi+\pi) - \Gamma(\varphi), \Gamma(\varphi+\pi) - \Gamma(\varphi)\rangle$, φ_0 é um ponto crítico de $\ell(\varphi)$ se e somente se:

$2\ell(\varphi_0)\frac{d}{d\varphi}\ell(\varphi_0) = 2\langle \Gamma(\varphi_0+\pi) - \Gamma(\varphi_0), \Gamma'(\varphi_0+\pi) - \Gamma'(\varphi_0)\rangle =$

$2\langle \Gamma(\varphi_0+\pi) - \Gamma(\varphi_0), \tau(\varphi_0+\pi)\,R(\varphi_0+\pi) - \tau(\varphi_0)\,R(\varphi_0)\rangle = 0.$

Todavia como $\tau(\varphi_0) = -\tau(\varphi_0+\pi)$, a condição de φ_0 ser ponto crítico equivale a:

$$(R(\varphi_0+\pi) + R(\varphi_0))\,\langle \Gamma(\varphi_0+\pi) - \Gamma(\varphi_0), \tau(\varphi_0+\pi)\rangle = 0.$$

$$(R(\varphi_0+\pi) + R(\varphi_0))\,\langle \Gamma(\varphi_0+\pi) - \Gamma(\varphi_0), \tau(\varphi_0)\rangle = 0$$

Como Γ é uma estritamente convexa então $R(\varphi+\pi) + R(\varphi) > 0$ e portanto $\Gamma(\varphi_0+\pi) - \Gamma(\varphi_0)$ é paralelo aos vetores normais $\eta(\varphi_0)$ e $\eta(\varphi_0+\pi)$.

Logo $\Gamma(\varphi_0+\pi) - \Gamma(\varphi_0) = ||\Gamma(\varphi_0+\pi) - \Gamma(\varphi_0)||\,\eta(\varphi_0)$, ou, $\Gamma(\varphi_0+\pi) = \ell(\varphi_0)\,\eta(\varphi) + \Gamma(\varphi_0)$.
■

Definição 1.2.1 *Diremos que uma oval Γ possui largura constante quando a função $\ell(\varphi) = ||\Gamma(\varphi+\pi) - \Gamma(\varphi)||$ for constante para todo φ. O valor de $\ell(\varphi) = \tilde{\ell}$ é chamado largura de Γ.*

Proposição 1.2.1 *Uma oval Γ possui largura constante se e somente se o raio de curvatura $R(\varphi)$ desta oval satisfaz a condição:*

$$R(\varphi+\pi) + R(\varphi) = R(\pi) + R(0) \ \textit{ para todo } \varphi.$$

Neste caso a largura da oval será $\tilde{\ell} = R(\varphi+\pi) + R(\varphi) = R(\pi) + R(0)$.

Prova: Se Γ possui largura constante $\tilde{\ell}$, então pelo Lema 1.2.1,

$$\Gamma(\varphi+\pi) = \Gamma(\varphi) + \tilde{\ell}\eta(\varphi).$$

Consequentemente:

$$\tilde{\ell}\eta(\varphi) = \Gamma(\varphi+\pi) - \Gamma(\varphi) = \int_{\varphi}^{\varphi+\pi} \Gamma'(t)\,dt = \int_{\varphi}^{\varphi+\pi} R(t)\,\tau(t)\,dt.$$

Como $\eta'(\varphi) = -\tau(\varphi)$ e $\tau(\varphi + \pi) = -\tau(\varphi)$, derivando a expressão anterior obtemos:

$$-\tilde{\ell}\tau(\varphi) = -\tau(\varphi)\left(R(\varphi + \pi) + R(\varphi)\right),$$

implicando que a largura $\tilde{\ell} = R(\varphi + \pi) + R(\varphi)$ para todo φ e logo $R(\varphi + \pi) + R(\varphi) = R(\pi) + R(0)$.

Reciprocamente suponhamos que valha a igualdade $R(\varphi + \pi) + R(\varphi) = R(\pi) + R(0)$, e tomemos φ_0 um ponto de máximo da função $\ell(\varphi)$. Pelo Lema 1.2.1 $\ell(\varphi_0) =< \Gamma(\varphi_0 + \pi) - \Gamma(\varphi_0), \eta(\varphi_0) >$. Como $\ell(\varphi) = \ell(\varphi + \pi)$, o ponto $\varphi_0 + \pi$ também é um ponto de máximo da função ℓ, logo:

$2\ell(\varphi_0) = \ell(\varphi_0) + \ell(\varphi_0 + \pi) = \left\langle \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\pi} R(t)\tau(t)\,dt, \eta(\varphi_0)\right\rangle + \left\langle \int_{\varphi_0+\pi}^{\varphi_0+2\pi} R(t)\tau(t)\,dt, \eta(\varphi_0 + \pi)\right\rangle$.
Como $\eta(\varphi_0) = -\eta(\varphi_0 + \pi)$.

$2\ell(\varphi_0) = \left\langle \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\pi} R(t)\tau(t)\,dt, \eta(\varphi_0)\right\rangle - \left\langle \int_{\varphi_0+\pi}^{\varphi_0+2\pi} R(t)\tau(t)\,dt, \eta(\varphi_0)\right\rangle =$

$\left\langle \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\pi} R(t)\tau(t)\,dt, \eta(\varphi_0)\right\rangle + \left\langle \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\pi} R(t+\pi)\tau(t)\,dt, \eta(\varphi_0)\right\rangle$, onde a última igualdade segue de $\tau(\varphi + \pi) = -\tau(\varphi)$.

Novamente de $\eta'(\varphi_0) = -\tau(\varphi_0)$ teremos:

$2\ell(\varphi_0) = \left\langle \int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\pi} \left(R(t) + R(t+\pi)\right)\tau(t)\,dt, \eta(\varphi_0)\right\rangle = -\left\langle R(0) + R(\pi)\int_{\varphi_0}^{\varphi_0+\pi} -\eta'(t)\,dt, \eta(\varphi_0)\right\rangle$

$= -\left(R(0) + R(\pi)\right)\langle \eta(\varphi_0 + \pi) - \eta(\varphi_0), \eta(\varphi_0)\rangle = 2\left(R(0) + R(\pi)\right)$, o que nos dá $\ell(\varphi_0) = R(0) + R(\pi)$.

Analogamente se tomarmos φ_1 um ponto de mínimo de $\ell(\varphi_1)$ teremos $\ell(\varphi_1) = R(0) + R(\pi)$.

Consequentemente como os pontos de máximos e minímos de $\ell(\varphi)$ são iguais a $R(0) + R(\pi)$ então a função é constante com $\ell(\varphi) = R(0) + R(\pi)$, o que conclui a prova. ■

Corolário 1.2.1 *Uma oval* Γ *possui largura constante se e somente se a série de Fourier do seu raio de curvatura* $R(\varphi)$ *possui somente termos ímpares, ou seja, se e somente se*

$$R(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=1}^{\infty} a_{2j+1}\cos\left((2j+1)\varphi\right) + b_{2j+1} sen\left((2j+1)\varphi\right)$$

Prova: Tomando $R(\varphi) = \frac{a_0}{2} + \sum_{j=2}^{\infty} a_j\cos(j\varphi) + b_j \mathrm{sen}(j\varphi)$ teremos:

$R(\varphi + \pi) + R(\varphi) = a_0 + \sum_{j=2}^{\infty} a_{2j}\cos(2j\varphi) + b_{2j}\mathrm{sen}(2j\varphi)$ e $R(\pi) + R(0) = a_0 + \sum_{j=2}^{\infty} a_{2j}$.

Logo $R(\varphi + \pi) + R(\varphi) = R(\pi) + R(0)$ se e somente se $a_{2j} = b_{2j} = 0$, o que por sua vez implica que a série de Fourier de $R(\varphi)$ possui apenas termos ímpares. ∎

1.3 Ovais n-simétricas

Definição 1.3.1 *Diremos que uma oval* Γ *é* n*-simétrica, com* $n \geq 2$*, se existe um ponto* q_c *pertencente à região do plano limitada pela oval, chamado centro de simetria, tal que o traço da oval* Γ *é invariante por rotação de* $\frac{2\pi}{n}$ *em torno do ponto* q_c*.*

Se Γ estiver parametrizada pelo ângulo φ entre o vetor tangente e o eixo x positivo, então a condição de Γ ser n-simétrica equivale a

$$\Gamma\left(\varphi + \frac{2\pi}{n}\right) - q_c = \mathrm{Rot}_{\frac{2\pi}{n}}\left[\Gamma(\varphi) - q_c\right], \tag{1.3}$$

onde $\mathrm{Rot}_{\frac{2\pi}{n}}$ é a rotação no sentido anti-horário de $\frac{2\pi}{n}$.

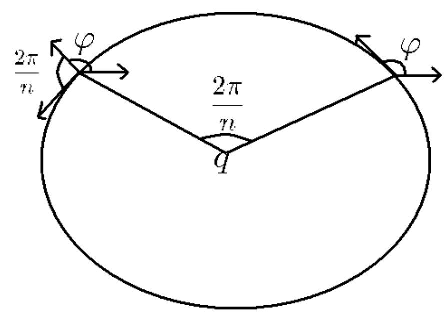

Figura 1.2: Oval n-simétrica .

Analogamente se o perímetro de Γ for l e Γ estiver parametrizada por comprimento de arco s então Γ ser n-simétrica equivale a

$$\Gamma\left(s + \frac{l}{n}\right) - q_c = \mathrm{Rot}_{\frac{2\pi}{n}}\left[\Gamma(s) - q_c\right].$$

Lema 1.3.1 *São equivalentes:*

(*i*) Γ *é uma oval* n*-simétrica;*

(*ii*) $\Gamma\left(\varphi + \frac{2\pi}{n}\right) - \Gamma\left(\frac{2\pi}{n}\right) = Rot_{\frac{2\pi}{n}}\left[\Gamma(\varphi) - \Gamma(0)\right]$*;*

(iii) $R\left(\varphi+\frac{2\pi}{n}\right)=R(\varphi)$.

Prova:

Primeiramente demostraremos que $(i)\Leftrightarrow(ii)$. Se Γ é n-simétrica então:

$$\begin{aligned}\Gamma\left(\varphi+\frac{2\pi}{n}\right)-q_c &= \mathrm{Rot}_{\frac{2\pi}{n}}\left[\Gamma(\varphi)-q_c\right],\\ \Gamma\left(\frac{2\pi}{n}\right)-q_c &= \mathrm{Rot}_{\frac{2\pi}{n}}\left[\Gamma(0)-q_c\right].\end{aligned}$$

Subtraindo as duas equações obtemos (ii).

Reciprocamente suponhamos que vale (ii), como a aplicação

$$\begin{aligned}G &: \mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2\\ (x,y) &\to (x,y)+\mathrm{Rot}_{\frac{2\pi}{n}}\left[\Gamma(0)-(x,y)\right]\end{aligned}$$

é uma bijeção existe $q_c\in\mathbb{R}^2$ tal que $G(q_c)=\Gamma\left(\frac{2\pi}{n}\right)$, o que nos dá $q_c+\mathrm{Rot}_{\frac{2\pi}{n}}\left[\Gamma(0)-q_c\right]=\Gamma\left(\frac{2\pi}{n}\right)$. Subtraindo esta nova expressão em (ii) obtemos (i).

Agora demonstraremos que $(ii)\Leftrightarrow(iii)$.

Escrevendo (ii) na forma $\Gamma(\varphi)-\Gamma(0)=\mathrm{Rot}^{-1}_{\frac{2\pi}{n}}\left[\Gamma\left(\varphi+\frac{2\pi}{n}\right)-\Gamma\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]$ e supondo sem perda de generalidade que $\Gamma(0)=0$, obtemos:

$$\begin{pmatrix} x(\varphi)\\ y(\varphi)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\cos\frac{2\pi}{n} & \mathrm{sen}\frac{2\pi}{n}\\ -\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi}{n}\right) & \cos\frac{2\pi}{n}\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x\left(\varphi+\frac{2\pi}{n}\right)-x\left(\frac{2\pi}{n}\right)\\ y\left(\varphi+\frac{2\pi}{n}\right)-y\left(\frac{2\pi}{n}\right)\end{pmatrix}$$

onde

$$\begin{aligned}x(\varphi) &= \int_0^{\varphi}R(t)\cos(t)\,dt\\ y(\varphi) &= \int_0^{\varphi}R(t)\,\mathrm{sen}(t)\,dt.\end{aligned}$$

Desenvolvendo a expressão para $x(\varphi)$:

$$\int_0^{\varphi}R(t)\cos(t)\,dt=\int_{\frac{2\pi}{n}}^{\varphi+\frac{2\pi}{n}}R(t)\cos\left(t-\frac{2\pi}{n}\right)dt$$

Fazendo $u=\beta-\frac{2\pi}{n}$ na integral da direita temos que a última igualdade equivale a:

$$\int_0^{\varphi}\left[R\left(t\right)-R\left(t+\frac{2\pi}{n}\right)\right]\cos\left(t\right)dt=0.$$

Como o raio de curvatura é contínuo, obtemos $R\left(\varphi\right)=R\left(\varphi+\frac{2\pi}{n}\right)$.

Reciprocamente se $R\left(\varphi\right)=R\left(\varphi+\frac{2\pi}{n}\right)$ com $n\geq 2$, ou $R\left(\varphi\right)$ é constante, ou possui pelo menos dois pontos de máximo e dois pontos de mínimo em $[0,2\pi]$. Como $R\left(\varphi\right)>0$ segue do Teorema 1.1.1 que $R\left(\varphi\right)$ é o raio de curvatura de uma oval dada por

$$\begin{aligned} x\left(\varphi\right) &= \int_0^{\varphi}R\left(t\right)\cos\left(t\right)dt+x_0,\\ y\left(\varphi\right) &= \int_0^{\varphi}R\left(t\right)\operatorname{sen}\left(t\right)dt+y_{0.}\end{aligned}$$

com $\Gamma\left(\varphi\right)-\Gamma\left(0\right)=\mathrm{Rot}_{\frac{2\pi}{n}}^{-1}\left[\Gamma\left(\varphi+\frac{2\pi}{n}\right)-\Gamma\left(\frac{2\pi}{n}\right)\right]$. ■

COROLÁRIO 1.3.1 *Se Γ é uma oval n-simétrica então a série de Fourier do seu raio de curvatura $R\left(\varphi\right)$ é dada por:*

$$R\left(\varphi\right)=\frac{a_0}{2}+\sum_{j=1}^{\infty}a_j\cos\left(jn\varphi\right)+b_j sen\left(jn\varphi\right). \qquad (1.4)$$

Onde $a_j=\frac{n}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{n}}R\left(\varphi\right)\cos\left(jn\varphi\right)d\varphi$ e $b_j=\frac{n}{2\pi}\int_0^{\frac{2\pi}{n}}R\left(\varphi\right)sen(jn\varphi)\,d\varphi$ são os coeficientes de Fourier. Reciprocamente se $R\left(\varphi\right)$ é uma função C^1, contínua, estritamente positiva, com expansão em série de Fourier dada por 1.4, então existe uma oval Γ tal que o raio de curvatura em $\Gamma\left(\varphi\right)$ é $R\left(\varphi\right)$.

PROVA:

Pelo Lema 1.3.1 $R\left(\varphi\right)$ possui período $2\pi/n$, o que nos dá 1.4. Reciprocamente se $R\left(\varphi\right)$ é uma função C^1, com expansão em série de Fourier dada por 1.4 temos que a série de Fourier de $R\left(\varphi\right)$ converge uniformemente para $R\left(\varphi\right)$ e portanto $R\left(\varphi\right)$ tem período $2\pi/n$. Como $R\left(\varphi\right)$ é estritamente positiva, então pelo Lema 1.3.1, $R\left(\varphi\right)$ é o raio de curvatura de uma oval n-simétrica. ■

LEMA 1.3.2 *Sejam $\Gamma\left(\varphi\right)$ uma oval n-simétrica e $\tau\left(\varphi\right)=\left(\cos\varphi,sen\varphi\right)$ o vetor unitário tangente em $\Gamma\left(\varphi\right)$. Valem as igualdades:*

(*i*) $\tau\left(\varphi+\frac{2\pi}{n}\right)=Rot_{\frac{2\pi}{n}}\left[\tau\left(\varphi\right)\right]$.

(*ii*) $\Gamma\left(\varphi+\frac{4\pi}{n}\right)-\Gamma\left(\varphi+\frac{2\pi}{n}\right)=Rot_{\frac{2\pi}{n}}\left[\Gamma\left(\varphi+\frac{2\pi}{n}\right)-\Gamma\left(\varphi\right)\right].$

(*iii*) $\Gamma\left(\varphi+\frac{4\pi m}{n}\right)-\Gamma\left(\varphi+\frac{2\pi m}{n}\right)=Rot_{\frac{2\pi m}{n}}\left[\Gamma\left(\varphi+\frac{2\pi m}{n}\right)-\Gamma\left(\varphi\right)\right]$, *para* $m=1,...,n-1$.

(*iv*) $\left\langle\Gamma\left(\varphi+\frac{4\pi m}{n}\right)-\Gamma\left(\varphi+\frac{2\pi m}{n}\right),\tau\left(\varphi+\frac{2\pi m}{n}\right)\right\rangle=\left\langle\Gamma\left(\varphi+\frac{2\pi m}{n}\right)-\Gamma\left(\varphi\right),\tau\left(\varphi\right)\right\rangle$, *para* $m=1,...,n-1$.

Prova:

(*i*) Derivando 1.3 temos $\Gamma'\left(\varphi+\frac{2\pi}{n}\right)=\mathrm{Rot}_{\frac{2\pi}{n}}\Gamma'\left(\varphi\right)$, logo $\tau\left(\varphi+\frac{2\pi}{n}\right)=\frac{\Gamma'\left(\varphi+\frac{2\pi}{n}\right)}{\left|\Gamma'\left(\varphi+\frac{2\pi}{n}\right)\right|}=\mathrm{Rot}_{\frac{2\pi}{n}}\left[\frac{\Gamma'(\varphi)}{|\Gamma'(\varphi)|}\right]=\mathrm{Rot}_{\frac{2\pi}{n}}\left[\tau\left(\varphi\right)\right].$

(*ii*) Substituindo φ por $\varphi+\frac{2\pi}{n}$ em 1.3 e subtraindo a expressão resultante novamente de 1.3 obtemos a expressão desejada.

(*iii*) Escrevendo $\Gamma\left(\varphi+\frac{4\pi m}{n}\right)-\Gamma\left(\varphi+\frac{2\pi m}{n}\right)=\sum_{j=m+1}^{2m}\Gamma\left(\varphi+\frac{2\pi j}{n}\right)-\Gamma\left(\varphi+\frac{2\pi(j-1)}{n}\right)$ e aplicando (ii) sucessivamente obtemos:

$\sum_{j=m+1}^{2m}\Gamma\left(\varphi+\frac{2\pi j}{n}\right)-\Gamma\left(\varphi+\frac{2\pi(j-1)}{n}\right)=\sum_{j=1}^{m}\mathrm{Rot}_{\frac{2\pi m}{n}}\left[\Gamma\left(\varphi+\frac{2\pi j}{n}\right)-\Gamma\left(\varphi+\frac{2\pi(j-1)}{n}\right)\right]$, o que nos da $\Gamma\left(\varphi+\frac{4\pi m}{n}\right)-\Gamma\left(\varphi+\frac{2\pi m}{n}\right)=\mathrm{Rot}_{\frac{2\pi m}{n}}\left[\Gamma\left(\varphi+\frac{2\pi m}{n}\right)-\Gamma\left(\varphi\right)\right].$

(*iv*) Usando as propriedades (i) e (iii) temos:
$\left\langle\Gamma\left(\varphi+\frac{4\pi m}{n}\right)-\Gamma\left(\varphi+\frac{2\pi m}{n}\right),\tau\left(\varphi+\frac{2\pi m}{n}\right)\right\rangle=\left\langle\mathrm{Rot}_{\frac{2\pi m}{n}}\left[\Gamma\left(\varphi+\frac{2\pi m}{n}\right)-\Gamma\left(\varphi\right)\right],\mathrm{Rot}_{\frac{2\pi m}{n}}\left[\tau\left(\varphi\right)\right]\right\rangle$, como a rotação é uma isometria linear $\left\langle\mathrm{Rot}_{\frac{2\pi m}{n}}\left[\Gamma\left(\varphi+\frac{2\pi m}{n}\right)-\Gamma\left(\varphi\right)\right],\mathrm{Rot}_{\frac{2\pi m}{n}}\left[\tau\left(\varphi\right)\right]\right\rangle=\left\langle\Gamma\left(\varphi+\frac{2\pi m}{n}\right)-\Gamma\left(\varphi\right),\tau\left(\varphi\right)\right\rangle.$ ■

Seja Γ uma oval n-simétrica. Pelo Lema 1.3.2 temos para cada $\varphi\in[0,2\pi]$ um polígono regular com n lados inscrito em Γ, com vértices nos pontos $\Gamma\left(\varphi\right),\Gamma\left(\varphi+\frac{2\pi}{n}\right),\Gamma\left(\varphi+\frac{4\pi}{n}\right),...,\Gamma\left(\varphi+\frac{2\pi}{n}\left(n-1\right)\right)$ e lados $\Gamma\left(\varphi+\frac{2\pi}{n}j\right)-\Gamma\left(\varphi+\frac{2\pi}{n}\left(j-1\right)\right)$, onde $j=1,\cdots,n-1$.

Podemos generalizar essa idéia para obtermos polígonos regulares inscritos em Γ com n_1 lados, para qualquer n_1 dividindo n. Para isso tomemos m um número natural com $1\leq m\leq n-1$. Pelo teorema fundamental da aritimética todo número natural maior do que 1 possui uma única decomposição em produto de fatores primos. Utilizando este resultado obtemos que o menor número natural k para o qual o número $k\frac{m}{n}$ é natural é $k=n/d$ com $d=$mdc(n,m). Desta maneira para cada $\varphi\in[0,2\pi]$ temos um polígono regular $P_{n,m}\left(\varphi\right)$ de n_1 lados, onde $n_1=n/d$, com vértices nos pontos $\Gamma\left(\varphi\right),\ \Gamma\left(\varphi+\frac{2m\pi}{n}\right),\ \Gamma\left(\varphi+\frac{4m\pi}{n}\right),...,\Gamma\left(\varphi+\frac{2\pi m}{n}\left(n_1-1\right)\right)$ e lados $\Gamma\left(\varphi+\frac{2\pi m}{n}j\right)-\Gamma\left(\varphi+\frac{2\pi m}{n}\left(j-1\right)\right)$, onde $j=1,\cdots,n_1-1$.

Uma vez que $P_{n,m}\left(\varphi\right)$ e $P_{n,m}\left(\varphi+\frac{2m\pi}{n}\right)$ são exatamente o mesmo polígono, podemos definir

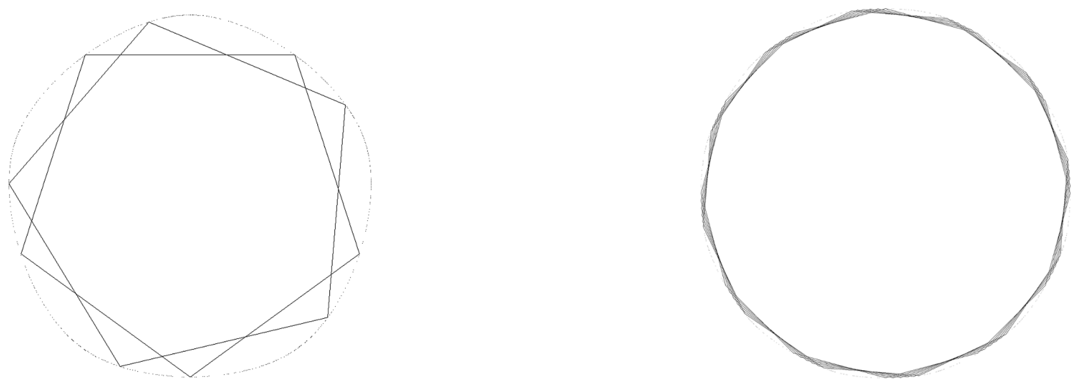

Figura 1.3: Polígonos em ovais n-simétricas para $n = 5$ e $n = 12$.

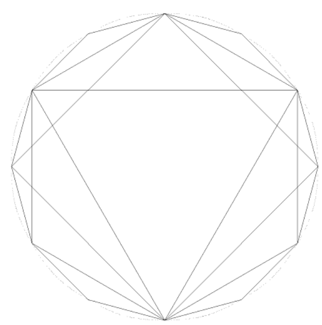

Figura 1.4: Alguns polígonos regulares em uma oval 12-simétrica.

a classe de equivavência destes polígonos.

Definição 1.3.2 *Seja $\Gamma(\varphi)$ uma oval n-simétrica. Para cada $1 \leq m \leq n-1$ seja:*

$$\Lambda_{n,m} = \{P_{n,m}(\varphi), \varphi \in [0, 2\pi m/n)\},$$

o conjunto dos polígonos regulares inscritos em $\Gamma(\varphi)$ com vértices nos pontos $\Gamma(\varphi)$, $\Gamma\left(\varphi + \frac{2m\pi}{n}\right)$, $\Gamma\left(\varphi + \frac{4m\pi}{n}\right)$, ..., $\Gamma\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}(n_1 - 1)\right)$ e lados $\Gamma\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n} j\right) - \Gamma\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}(j-1)\right)$, onde $j = 1, \cdots, n_1 - 1$; e $n_1 = \frac{n}{mdc(n,m)}$ é o número de lados dos polígonos.

A cada rotação de $2\pi/n$ obtemos polígonos congruentes, ou seja $P_{n,m}(\varphi)$ é congruente a $P_{n,m}\left(\varphi + \frac{2\pi}{n}\right)$, e como já dissemos, quando a rotação é de $2\pi m/n$, estes polígonos são iguais,

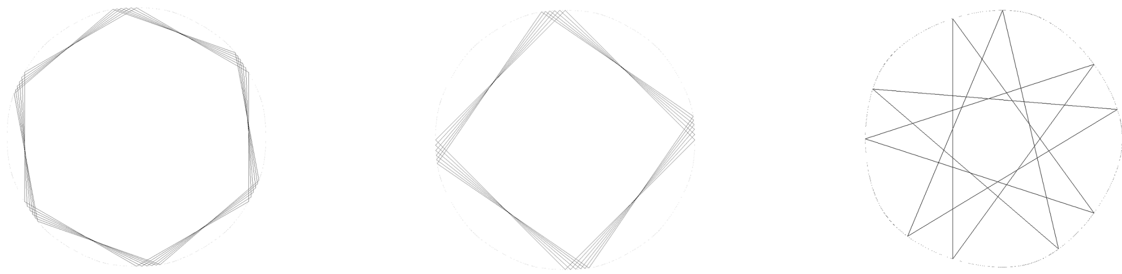

Figura 1.5: Polígonos dos conjuntos $\Lambda_{12,2}$, $\Lambda_{12,3}$ $\Lambda_{12,5}$ em uma oval 12-simétrica.

isto é, os polígonos possuem os mesmos vértices e lados. Isto pode ser reescrito como:

$$P_{n,m}(\varphi) = P_{n,m}\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right),$$

Observação: Se o ângulo φ for maior do que $2\pi m/n$ então o polígono $P_{n,m}(\varphi)$ será representado por $P_{n,m}(\tilde{\varphi})$ sendo $\Gamma(\tilde{\varphi})$ o vertice tal que $\tilde{\varphi} \in [0, 2\pi m/n)$.

Lema 1.3.3 *Fixado m, $1 \leq m \leq n-1$, e $\varphi \in [0, \frac{2\pi m}{n})$, existem $d-1$ polígonos regulares no conjunto $\Lambda_{n,m}$, congruentes ao polígono $P_{n,m}(\varphi)$.*

Prova:

Os polígonos congruentes ao polígono $P_{n,m}(\varphi)$ no conjunto $\Lambda_{n,m}$ são os polígonos da forma $P_{n,m}\left(\varphi + \frac{2\pi}{n}a\right)$, para $a \in \mathbb{N}$.

Para determinarmos o número de polígonos congruentes a $P_{n,m}(\varphi)$ em $\Lambda_{n,m}$ precisamos encontrar o menor número natural a tal que $P_{n,m}\left(\varphi + \frac{2\pi}{n}a\right) = P_{n,m}(\varphi)$, ou seja, o menor número natural a tal que os polígonos coincidem. Para isso basta determinarmos o menor número natural a para o qual $\Gamma\left(\varphi + \frac{2\pi}{n}a\right)$ é vértice do polígono $P_{n,m}(\varphi)$, o que equivale a encontrarmos o menor natural a tal que a equação $\Gamma\left(\varphi + \frac{2\pi}{n}a\right) = \Gamma\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}b\right)$ possui solução para algum número natural b e para qualquer valor de φ. Isto equivale a encontrarmos o menor natural a tal que $(mb - a)$ é divisível por n. Utilizando a relação de congruência $c = d \mathrm{mod} n$ se e somente se n divide $(c - d)$ obtemos então que a equação $\Gamma\left(\varphi + \frac{2\pi}{n}a\right)$ $= \Gamma\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}b\right)$ equivale a $mb \equiv a \mathrm{mod} n$, que possui solução se e somente se $d = mdc(n, m)$ divide a. Logo o menor valor para o qual a equação possui solução é $a = d$. Consequentemente os polígonos em $\Lambda_{n,m}$, congruentes ao polígono $P_{n,m}(\varphi)$ são os $d - 1$ polígonos $P_{n,m}\left(\varphi + \frac{2\pi}{n}\right), ..., P_{n,m}\left(\varphi + \frac{2\pi}{n}(d-1)\right)$. ■

Observação: Se Γ estiver parametrizada por comprimento de arco s, então os vértices dos poligonos em $\Lambda_{n,m}$ estão sob os pontos $s_j = \frac{(j-1)m}{n} l + s$, com $s \in [0, lm/n]$, $j = 1, ..., n_{1.}$ Como consequência temos $\frac{d}{ds} s_j = 1$.

1.4 Bilhares em ovais

Nesta seção definiremos e listaremos as principais propriedades dos bilhares em ovais.

O problema do bilhar em uma oval Γ consiste no estudo do movimento livre de uma partícula na região limitada pela curva, com colisão elástica na fronteira, isto é, o ângulo de entrada é igual ao ângulo de saída. O movimento é completamente determinado pelo ponto de reflexão em Γ e a direção do movimento imediatamente após cada reflexão. As trajetórias são poligonais na região.

Se Γ estiver parametrizada por um parâmetro $t \in [0, l)$, podemos usar esse paramêtro para localizarmos o ponto de reflexão, e a componente tangencial do momento $p = \cos \beta$ para determinarmos a direção do movimento, onde β é o ângulo entre a direção do movimento e o vetor tangente a Γ.

Tomando o parâmetro $t \in \mathbb{R}$, com $\Gamma(t + l) = \Gamma(l)$ teremos uma aplicação T que associa para cada (t_1, p_1) no cilindro $\mathbb{R}/l\mathbb{Z} \times (-1, 1)$ o próximo ponto de impacto e componente tangencial do momento (t_2, p_2).

$$T : \mathbb{R}/(l\mathbb{Z}) \times (-1, 1) \to \mathbb{R}/(l\mathbb{Z}) \times (-1, 1)$$

$$(t_1, p_1) \longrightarrow (t_2(t_1, p_1), p_2(t_1, p_1)).$$

A aplicação T é a aplicação do bilhar associada a oval Γ.

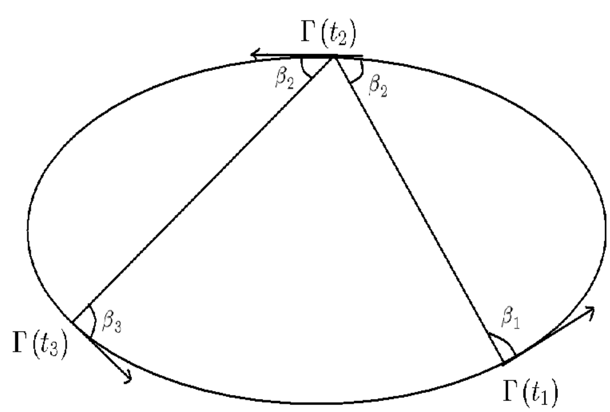

Figura 1.6: Aplicação do bilhar em uma oval Γ.

Como a partícula pode percorrer a mesma poligonal em ambos os sentidos, temos que se $T(t_1, p_1) = (t_2, p_2)$, então a $T(t_2, -p_2) = (t_1, -p_1)$. Deste modo a aplicação do bilhar é inversível, com T^{-1} satisfazendo a relação:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \circ T(t_1, p_1) = T^{-1} \circ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} t_1 \\ p_1 \end{pmatrix} \tag{1.5}$$

Birkhoff demonstrou em 1927 [2] que se Γ é uma oval de classe C^k, parametrizada pelo parâmetro comprimento de arco s e com perímetro l, então aplicação do bilhar nas coordenadas

$$T : \mathbb{R}/l\mathbb{Z} \times (-1,1) \to \mathbb{R}/l\mathbb{Z} \times (-1,1)$$
$$(s_1, p_1) \longrightarrow (s_2(s_1, p_1), p_2(s_1, p_1)).$$

é um difeomorfismo de classe C^{k-1}, preservando a medida $ds \wedge dp$ e satisfazendo:

$$\begin{aligned} \frac{\partial s_2}{\partial s_1} &= \frac{l(s_1, p_1) - R(s_1)\,\mathrm{sen}\beta(p_1)}{R(s_1)\,\mathrm{sen}\beta(p_2)} \\ \frac{\partial s_2}{\partial p_1} &= \frac{l(s_1, p_1)}{\mathrm{sen}\beta(p_1)\,\mathrm{sen}\beta(p_2)} \\ \frac{\partial p_2}{\partial s_1} &= \frac{l(s_1, p_1) - R(s_1)\,\mathrm{sen}\beta(p_1) - R(s_2)\,\mathrm{sen}\beta(p_2)}{R(s_1)\,R(s_2)} \\ \frac{\partial p_2}{\partial p_1} &= \frac{l(s_1, p_1) - R(s_2)\,\mathrm{sen}\beta(p_2)}{R(s_2)\,\mathrm{sen}\beta(p_1)} \end{aligned} \tag{1.6}$$

onde $l(s_1, p_1) = ||\Gamma(s_2(s_1, p_1)) - \Gamma(s_1)||$, e $\beta(p_j) = \cos^{-1} p_j$, $j = 1, 2$.

A aplicação do bilhar $T : \frac{\mathbb{R}}{l\mathbb{Z}} \times (-1,1) \to \frac{\mathbb{R}}{l\mathbb{Z}} \times (-1,1)$ nas coordenadas (s,p) possui um único levantamento $\tilde{T} : \mathbb{R} \times (-1,1) \to \mathbb{R} \times (-1,1)$ satisfazendo:

$$\begin{aligned} \tilde{T}(s+l, p) &= \tilde{T}(s,p) + (l, 0) \\ \tilde{T}(0,p) &\in [0, l) \times (-1,1). \end{aligned}$$

Se denotarmos também por (s,p) as coordenadas em $\mathbb{R} \times (-1,1)$, e tomarmos a relação de equivalência:

$$\{(s_1, p_1) \sim (s_2, p_2) \iff \exists\, k \in \mathbb{Z}, \text{ tal que } s_2 = s_1 + kl \text{ e } p_1 = p_2\},$$

teremos do mesmo modo que aplicação do bilhar é a aplicação no espaço quociente $\frac{\mathbb{R}}{l\mathbb{Z}} \times (-1,1)$ induzida por $\tilde{T}$. O levantamento $\tilde{T}$ é um difeomorfismo preservando a medida $ds \wedge dp$ da mesma classe de diferenciabilidade da aplicação do bilhar T.

Se a oval estiver parametrizada pelo ângulo φ entre o vetor tangente e o eixo x positivo, obtemos analogamente a aplicação do bilhar:

$$T : \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\times(-1,1) \to \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\times(-1,1)$$

$$(\varphi_1, p_1) \longrightarrow (\varphi_2(\varphi_1, p_1), p_2(\varphi_1, p_1)).$$

Nestas coordenadas a aplicação do bilhar também é um difeomorfismo preservando a medida $R(\varphi)\, d\varphi \wedge dp$, e não mais a medida de Lesbegue $d\varphi \wedge dp$. Apesar disto, nessas coordenadas a aplicação do bilhar goza de outra boa propriedade. Se φ_1 e φ_2 são dois pontos de impacto consecultivos, então eles estão relacionados por:

$$\varphi_2 - \beta_2 = \varphi_1 + \beta_1 \tag{1.7}$$

Ainda nestas coordenadas temos:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial \varphi_2}{\partial \varphi_1} &= \frac{l(\varphi_1, p_1) - R(\varphi_1)\,\mathrm{sen}\beta(p_1)}{R(\varphi_1)\,\mathrm{sen}\beta(p_2)} \\
\frac{\partial \varphi_2}{\partial p_1} &= \frac{l(\varphi_1, p_1)}{R(\varphi_1)\,\mathrm{sen}\beta(p_1)\,\mathrm{sen}\beta(p_2)} \\
\frac{\partial p_2}{\partial \varphi_1} &= \frac{l(\varphi_1, p_1) - R(\varphi_1)\,\mathrm{sen}\beta(p_1) - R(\varphi_2)\,\mathrm{sen}\beta(p_2)}{R(\varphi_1)} \\
\frac{\partial p_2}{\partial p_1} &= \frac{l(\varphi_1, p_1) - R(\varphi_2)\,\mathrm{sen}\beta(p_2)}{R(\varphi_2)\,\mathrm{sen}\beta(p_1)}
\end{aligned} \tag{1.8}$$

Algumas propriedades são mais facilmente trabalhadas se a oval estiver parametrizada por comprimento de arco, e outras se tiver o ângulo φ como parâmetro, desta modo, a menos que se mencione o contrário denotaremos por T a aplicação do bilhar em ambas as coordenadas (φ, p), (s, p). Salvo a seção 2.2 denotaremos também por T a aplicação do bilhar nos respectivos levantamentos.

Dada uma oval Γ, a aplicação do bilhar nas ovais obtidas a partir de Γ por translações é exatamente igual a aplicação do bilhar em Γ. Ainda rotações e homotetias no traço de Γ não alteram a dinâmica da aplicação do bilhar.

Desta maneira, sempre que necessário podemos fazer translações, e supor que a oval tenha perímetro 1, isto é, $l = 1$.

Lema 1.4.1 *Seja $\Gamma(s)$ uma oval parametrizada pelo comprimento de arco s. Se $T(s_1, p_1) = (s_2, p_2)$, então a função $h(s_1, s_2) = ||\Gamma(s_2) - \Gamma(s_1)||$ satisfaz:*

$$\begin{aligned}
\partial h_1(s_1, s_2) &= -p_1, \\
\partial_2 h(s_1, s_2) &= p_2.
\end{aligned}$$

Prova: Derivando $h^2(s_1, s_2) = \langle \Gamma(s_2) - \Gamma(s_1), \Gamma(s_2) - \Gamma(s_1) \rangle$, obtemos:

$$\begin{aligned}
\partial h_1(s_1, s_2) &= -\frac{\langle \Gamma'(s_1), \Gamma(s_2) - \Gamma(s_1) \rangle}{h(s_1, s_2)} = -\cos\beta_1 = -p_1 \\
\partial h_2(s_1, s_2) &= \frac{\langle \Gamma'(s_2), \Gamma(s_2) - \Gamma(s_1) \rangle}{h(s_1, s_2)} = \cos\beta_2 = p_{2.}
\end{aligned}$$

∎

Note que $l(s_1, p_1) = h(s_1, s_2(s_1, p_1))$. A função $h(s_1, s_2)$ é chamada função geradora.

Se denotarmos também por $h(\varphi_1, \varphi_2) = ||\Gamma(\varphi_2) - \Gamma(\varphi_1)||$, não teremos mais $\partial h_1(\varphi_1, \varphi_2) = -p_1$, $\partial h_2(\varphi_1, \varphi_2) = p_2$ e $h(\varphi_1, \varphi_2)$ não será chamada função geradora neste caso, contudo ainda teremos uma boa propriedade como mostra o lema a seguir.

Lema 1.4.2 *Seja $\Gamma(\varphi)$ é uma oval parametrizada pelo ângulo φ entre o vetor tangente e o eixo x positivo. Se $T(\varphi_1, p_1) = (\varphi_2, p_2)$, então a função $h(\varphi_1, \varphi_2) = ||\Gamma(\varphi_2) - \Gamma(\varphi_1)||$ satisfaz:*

$$\begin{aligned}
\partial h_1(\varphi_1, \varphi_2) &= -R(\varphi_1)\, p_1, \\
\partial_2 h(\varphi_1, \varphi_2) &= R(\varphi_2)\, p_2.
\end{aligned}$$

Onde $R(\varphi)$ é o raio de curvatura de Γ no ponto φ.

Prova: Derivando $h(\varphi_1, \varphi_2) = h(s_1(\varphi_1), s_2(\varphi_2))$ obtemos:

$$\begin{aligned}
\partial h_1(\varphi_1, \varphi_2) &= \partial h_1(s_1, s_2) \frac{ds}{d\varphi}(\varphi_1) = -R(\varphi_1)\, p_1, \\
\partial_2 h(\varphi_1, \varphi_2) &= \partial h_2(s_1, s_2) \frac{ds}{d\varphi}(\varphi_2) = R(\varphi_2)\, p_2.
\end{aligned}$$

∎

1.5 Órbitas periódicas do bilhar

Seja $\Gamma(s)$ uma oval parametrizada pelo comprimento de arco s. Nesta seção discutiremos a relação entre uma órbita periódica do bilhar $\{(s_1, p_1), \ldots, (s_n, p_n)\}$ e os pontos críticos do funcional $H_n(s_1, \ldots, s_n) = \sum_{k=1}^{n} ||\Gamma(s_{k+1}) - \Gamma(s_k)||$.

O problema de encontrar órbitas periódicas para a aplicações do bilhar pode ser colocado como um problema variacional. Tomemos Γ uma oval parametrizada por comprimento de arco s, e $T : \mathbb{R}/l\mathbb{Z}\times(-1,1) \to \mathbb{R}/l\mathbb{Z}\times(-1,1)$ a aplicação do bilhar nas coordenadas (s,p). Consideremos o conjunto:

$$D_n = \left\{(s_1,\ldots,s_n) \in \left(\frac{\mathbb{R}}{l\mathbb{Z}}\right)^n : s_k \neq s_{k+1} \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}_n\right\}$$

onde $\mathbb{Z}_n$ é o anel dos inteiros módulo n, e $\left(\frac{\mathbb{R}}{l\mathbb{Z}}\right)^n$ é o produto cartesiano de $\frac{\mathbb{R}}{l\mathbb{Z}}$ n vezes.

A cada ponto $(s_1,\ldots,s_n) \in D_n$ associaremos um polígono fechado de n lados, com vértices nos pontos $\Gamma(s_k)$, e lados dados pelos segmentos $\Gamma(s_{k+1}) - \Gamma(s_k)$, com $k \in \mathbb{Z}_n$. O perímetro de cada um destes polígonos é a soma da norma dos segmentos $||\Gamma(s_{k+1}) - \Gamma(s_k)||$, que pode ser reescrito como $\sum_{k=1}^{n} h(s_k, s_{k+1})$, onde $h(s_k, s_{k+1}) = ||\Gamma(s_{k+1}) - \Gamma(s_k)||$ é a função geradora do bilhar introduzida na seção anterior.

Tomemos o funcional $H_n : D_n \to \mathbb{R}$ que associa a cada um desses polígonos, o seu perímetro:

$$H_n(s_1,\ldots,s_n) = \sum_{k=1}^{n} h(s_k, s_{k+1}).$$

Uma trajetória de periódo n pela aplicação do bilhar é o polígono fechado associado a uma órbita periódica de periodo n $\{(s_1,p_1),\ldots,(s_n,p_n)\}$ com vértices nos pontos s_k com $k = 1,\ldots,n$. No entanto observemos que nem todo polígono corresponde a uma trajetória periódica, ja que os ângulos de reflexão e incidências que os lados dos polígonos fazem com o vetor tangente à oval nos respectivos vértices podem não ser iguais.

A próxima Proposição que se encontra em [1] é bem conhecida, ela associa trajetórias de periódo n aos pontos críticos do funcional H_n.

Proposição 1.5.1 *Seja Γ uma oval parametrizada por comprimento de arco s, e $T : \mathbb{R}/l\mathbb{Z}\times(-1,1) \to \mathbb{R}/l\mathbb{Z}\times(-1,1)$ a aplicação do bilhar nas coordenadas (s,p). A qualquer trajetória periódica de periódo n da aplicação do bilhar corresponde (não unicamente) um ponto crítico do funcional H_n no domínio D_n. Reciprocamente qualquer ponto crítico de H_n em D_n define uma única trajetória de periódo n da aplicação do bilhar.*

Prova:

Pelo Lema 1.4.1 o conjunto $\{(s_1,p_1),\ldots,(s_n,p_n)\}$ é uma órbita periódica de período n do bilhar associado a Γ se e somente se:

$$-\partial h_1(s_k, s_{k+1}) = p_k = \partial h_2(s_{k-1}, s_k) \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}_n,$$

onde $h(s_k, s_{k+1}) = ||\Gamma(s_{k+1}) - \Gamma(s_k)||$.

A derivada de H_n é dada por:

$DH_n\left(s_1,\ldots,s_n\right)=$

$\left(\partial h_1\left(s_1,s_2\right)+\partial h_2\left(s_n,s_1\right),\partial h_1\left(s_2,s_3\right)+\partial h_2\left(s_1,s_2\right),\ldots,\partial h_1\left(s_n,s_1\right)+\partial h_2\left(s_{n-1},s_n\right)\right).$

Desta maneira, $(s_1,\ldots,s_n)$ associa uma trajetória de periódo n se e somente se $\partial h_1\left(s_k,s_{k+1}\right)+\partial h_2\left(s_{k-1},s_k\right)=0$, ou seja, se e somente se $(s_1,\ldots,s_n)$ é um ponto crítico do funcional H_n. ■

Analogamente se Γ é uma oval parametrizada pelo ângulo φ, e $T:\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\times(-1,1)\to\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\times(-1,1)$ é a aplicação do bilhar nas coordenadas (φ,p), tomando

$$D_n=\left\{(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)\in\left(\frac{\mathbb{R}}{l\mathbb{Z}}\right)^n:\varphi_k\neq\varphi_{k+1}\text{ para todo }k\in\mathbb{Z}_n\right\}$$

e

$$H_n\left(\varphi_1,\ldots,\varphi_n\right)=\sum_{k=1}^{n}h\left(\varphi_k,\varphi_{k+1}\right)$$

obteremos:

PROPOSIÇÃO 1.5.2 *Sejam Γ é uma oval parametrizada pelo ângulo φ entre o vetor tangente e o eixo x positivo, e $T:\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\times(-1,1)\to\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}\times(-1,1)$ a aplicação do bilhar nas coordenadas (φ,p). A qualquer trajetória de periódo n da aplicação do bilhar corresponde (não unicamente) um ponto crítico do funcional H_n no domínio D_n. Reciprocamente para qualquer ponto crítico de H_n em D_n corresponde uma única trajetória de periódo n da aplicação do bilhar.*

PROVA:

$DH_n\left(\varphi_1,\ldots,\varphi_n\right)=$

$\left(\partial h_1\left(\varphi_1,\varphi_2\right)+\partial h_2\left(\varphi_n,\varphi_1\right),\partial h_1\left(\varphi_2,\varphi_3\right)+\partial h_2\left(\varphi_1,\varphi_2\right),\ldots,\partial h_1\left(\varphi_n,\varphi_1\right)+\partial h_2\left(\varphi_{n-1},\varphi_n\right)\right).$

Como na proposição 1.5.1, pelo Lema 1.4.2, $(\varphi_1,\ldots,\varphi_n)$ associa um trajetória de periódo n se e somente se:

$$-\partial h_1\left(\varphi_k,\varphi_{k+1}\right)=R\left(\varphi_k\right)p_k=\partial h_2\left(\varphi_{k-1},\varphi_k\right),$$

ou equivalentemente:

$$\partial h_1\left(\varphi_k,\varphi_{k+1}\right)+\partial h_2\left(\varphi_{k-1},\varphi_k\right)=0\text{ para todo }k\in\mathbb{Z}_n.$$

O que conclui a prova. ■

DEFINIÇÃO 1.5.1 *Diremos que uma órbita periódica $\{(s_1,p_1),\ldots,(s_n,p_n)\}$ da aplicação do* *bilhar associada a uma oval* Γ *de perímetro* l *é do tipo* (m,n) *se para todo* $j = 1, \cdots, n$ *no levantamento* $\mathbb{R} \times (-1,1)$ *temos:*

$$T^n(s_j, p_j) = (s_j, p_j) + (ml, 0).$$

Similarmente se $\varphi_j = \varphi(s_j)$ *então* $\{(\varphi_1, p_1), \ldots, (\varphi_n, p_n)\}$ *ser do tipo* (m,n) *equivale a no levantamento* $\mathbb{R} \times (-1,1)$ *termos:*

$$T^n(\varphi_j, p_j) = (\varphi_j, p_j) + (2\pi m, 0).$$

Geometricamente uma órbita ser do tipo (m,n) significa que a órbita é de período n, e dá m voltas no cilindo $\mathbb{R}/l\mathbb{Z} \times (-1,1)$ (respectivamente $\mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z} \times (-1,1)$).

TEOREMA 1.5.1 (Órbita Periódica de Birkhoff) *Sejam* m *e* n *naturais, relativamente primos, com* $m/n < 1$*. A aplicação do bilhar em uma oval* Γ *possui pelo menos duas órbitas periódicas geometricamente distintas do tipo* (m,n)*.*

A demonstração do Teorema da Órbita Periódica de Birkhoff [1] consiste basicamente em encontrar dois pontos críticos para o funcional $H_n : D_n \to \mathbb{R}$. Um ponto crítico corresponde ao máximo do funcional H_n, e o outro ao máximo dentre todos os mínimos desta função (Princípio do Minimax).

Na seção 2.1 demonstraremos uma versão do Teorema da Órbita Periódica de Birkhoff para encontrarmos órbitas periódicas do tipo (m,n) associadas a polígonos regulares em $\Lambda_{n,m}$ do bilhar em uma oval n-simétrica. Encontraremos órbitas periódicas de período $n_1 = n/\mathrm{mdc}(m,n)$, para cada $1 \leq m \leq n-1$ correspondendo aos polígonos de perímetro máximo e mínimo em $\Lambda_{n,m}$.

1.6 Classificação das órbitas periódicas

Tomemos $\{(s_1, p_1), \ldots, (s_n, p_n)\}$ uma órbita periódica do bilhar de período n. Como a aplicação do bilhar preserva a medida $ds \wedge dp$, então os autovalores de $DT^n(s_1, p_1)$ são da forma λ e λ^{-1}. Estes autovalores independem das coordenadas escolhidas, e só dependem da órbita. Em particular colocando $\varphi_j = \varphi(s_j)$ com $j = 1, \ldots, n$, temos a órbita periódica $\{(\varphi_1, p_1), \ldots, (\varphi_n, p_n)\}$ equivalente nas coordenadas (φ, p), com $\mathrm{Det} DT^n(\varphi_1, p_1) = \mathrm{Det} DT^n(s_1, p_1) = 1$, e também com autovalores λ e λ^{-1}.

DEFINIÇÃO 1.6.1 *Seja* $\{(\varphi_1, p_1), \ldots, (\varphi_n, p_n)\}$ *uma órbita periódica de período* n *da aplicação do bilhar associada a uma oval* Γ*, com* λ *e* λ^{-1} *autovalores de* $DT^n(\varphi_1, p_1)$*. Diremos que a órbita é:*

1. *Hiperbólica se os autovalores* λ *e* λ^{-1} *são reais e distintos.*

2. *Elíptica se os autovalores de* $DT^n(\varphi_1, p_1)$ *são complexos conjugados com parte imaginária não nula.*

3. *Parabólica se os autovalores são 1 ou -1.*

Se a órbita for hiperbólica a dinâmica local na vizinhança de cada ponto da órbita por T^n é a mesma dinâmica de $DT^n(\varphi_1, p_1)$ em uma vizinhança da origem pelo Teorema de Hartman-Grobman [1]. Isto caracteriza completamente a dinâmica neste caso.

TEOREMA 1.6.1 (Hartman-Grobman [1]) *Sejam* $U \subset \mathbb{R}^n$ *um aberto,* $F : U \to \mathbb{R}^n$ *uma aplicação de classe* C^k*,* $k \geq 1$ *e* x_0 *um ponto fixo hiperbólico desta aplicação. Então existem vizinhanças* U_1 *e* U_2 *de* x_0*,* V_1 *e* V_2 *da origem em* $\mathbb{R}^n$ *e um homeomorfismo* $G : U_1 \cup U_2 \to V_1 \cup V_2$ *tal que*

$$F = G^{-1} \circ DF(x_0)\, G.$$

Quando a órbita periódica é elíptica quase nunca podemos garantir que a aplicação T^n é localmente conjugada a rotação $DT^n(\varphi_1, p_1)$, o que nos daria um anel invariante por T^n ao redor de cada ponto da órbita. Um modo clássico de resolvermos esse problema é através do Teorema da Forma Normal de Birkhoff e do Teorema do Twist de Moser ([15] e [5]).

TEOREMA 1.6.2 (Forma normal de Birkhoff [15]) *Seja* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *um difeomorfismo de classe* C^k *preservando área, com um ponto fixo elíptico na origem. Se para algum* $m \leq k$ *o autovalor* λ *de* $DF(0,0)$ *é tal que* $\lambda^j \neq 1$ *para* $j = 1, \ldots, m$*, então existe um difeomorfismo* G *de classe* C^∞*, preservando a medida de Lesbegue, tal que, se* $z = x + iy$ *e* $\bar{z} = x - iy$ *são coordenadas complexas em uma vizinhança* U *de* $\mathbb{R}^2$ *então:*

$$G \circ F \circ G^{-1}(z) = \lambda e^{2\pi i P\left(|z|^2\right)} + O\left(|z|^m\right),$$

onde $P(x) = a_1 x + \cdots a_r x^r$ *é um polinomio de grau* r *com* $2r + 1 < m$*.*

TEOREMA 1.6.3 (Twist de Moser [5]) *Sejam* $F : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ *um difeomorfismo de classe* C^k *preservando área com um ponto fixo elíptico na origem e* λ *o autovalor de* $DF(0,0)$ *tal que* $\lambda^j \neq 1$ *para* $j = 1, \ldots, m$ *com* $m \leq k$*. Se a forma normal de Birkoff de* F *em coordenadas complexas* $(z, \bar{z})$ *se escreve como* $\lambda e^{2\pi i P\left(|z|^2\right)} + O\left(|z|^m\right)$*, com* $P(x)$ *um polínomio de grau menor que* $(m-1)/2$ *e não nulo, então o ponto fixo é estável, ou seja, para todo* $\varepsilon > 0$ *suficientemente pequeno existe uma curva fechada* $\gamma(t)$ *bordo de uma região contendo a origem tal que* $F(\gamma) = \gamma$ *e* $\sup_{t \in \mathbb{R}} |\gamma(t)| < \varepsilon$*.*

1.7 Bilhares com reta invariante

Nesta seção caracterizaremos todas as ovais, cuja a aplicação do bilhar associada possui uma reta invariante.

Seja Γ uma oval parametrizada pelo ângulo φ entre o vetor tangente e o eixo x positivo.

Definição 1.7.1 *Uma reta $\{p = p_0\}$ é invariante por T se $T(\varphi_1, p_0) = (\varphi_2, p_0)$ para todo $\varphi_1 \in \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$.*

Como $\varphi_2 - \beta_2 = \varphi_1 + \beta_1$ aplicação do bilhar ao longo de uma reta invariante satisfaz:

$$T(\varphi_1, p_0) = (\varphi_1 + 2\alpha, p_0), \tag{1.9}$$

com $\alpha = \cos^{-1} p_0$.

Proposição 1.7.1 *O bilhar T em uma oval Γ possui uma reta invariante se e somente se acontece uma das 3 opções:*

1. *Γ é um círculo e preserva a reta $\{p = p_0\}$ para todo $p_0 \in (-1, 1)$.*
2. *Γ tem raio de curvatura na forma $R(\varphi) = a + b\cos(n\varphi)$ para $n \geq 4$. Neste caso T preserva $(n-2)$ retas se n é par e $(n-3)$ retas se n é ímpar, todas na forma $p_0 = \cos\alpha$, onde α é solução da equação $n\tan\alpha = \tan n\alpha$.*
3. *Γ é uma curva de largura constante com $R(\varphi) \neq a + b\cos(n\varphi)$ para n ímpar. Neste caso T preserva apenas a reta $\{p = 0\}$.*

A prova da Proposição 1.7.1 seguirá de uma serie de 8 lemas que demonstraremos a seguir.

Lema 1.7.1 (Tabachnikov [18]) *O bilhar em uma oval Γ possui $\{p = p_0\}$ como reta invariante se e somente se $(R(\varphi+\alpha) - R(\varphi-\alpha))cos\alpha = (R'(\varphi+\alpha) + R'(\varphi-\alpha))sen\alpha$, onde $\alpha = cos^{-1}p_0$.*

Prova: Se $p = p_0$ é reta invariante então $T(\varphi_1, p_0) = (\varphi_1 + 2\alpha, p_0)$, com $\alpha = \cos^{-1}p_0$. O segmento de reta, contido na região limitada pela oval, unindo os pontos $\Gamma(\varphi_1) = (x(\varphi_1), y(\varphi_1))$ e $\Gamma(\varphi_1 + \alpha)$ faz ângulo $\varphi_1 + \alpha$ com o eixo x.

Deste modo:

$$\cos(\varphi_1 + \alpha)[y(\varphi_1 + 2\alpha) - y(\varphi_1)] = \frac{[x(\varphi_1 + 2\alpha) - x(\varphi_1)][y(\varphi_1 + 2\alpha) - y(\varphi_1)]}{||\Gamma(\varphi_1 + 2\alpha) - \Gamma(\varphi_1)||} =$$

$$= \text{sen}\,(\varphi_1 + \alpha)\,[x\,(\varphi_1 + 2\alpha) - x\,(\varphi_1)]\,.$$

Reescrevendo $\varphi = \varphi_1 + \alpha$ temos:

$$\cos(\varphi)\,[y\,(\varphi + \alpha) - y\,(\varphi - \alpha)] = \text{sen}\,(\varphi)\,[x\,(\varphi + \alpha) - x\,(\varphi - \alpha)]\,. \tag{1.10}$$

Derivando esta expressão obtemos:

$$-\text{sen}\,(\varphi)\,[y\,(\varphi + \alpha) - y\,(\varphi - \alpha)] + \cos(\varphi)\,[y'\,(\varphi + \alpha) - y'\,(\varphi - \alpha)] =$$

$$=\cos(\varphi)\,[x\,(\varphi + \alpha) - x\,(\varphi - \alpha)] + \text{sen}(\varphi)\,[x'\,(\varphi + \alpha) - x'\,(\varphi - \alpha)]\,.$$

Substituindo $x'\,(\varphi) = R\,(\varphi)\cos\varphi$ e $y'\,(\varphi) = R\,(\varphi)\text{sen}\varphi$:

$$\text{sen}\,(\varphi)\,[y\,(\varphi + \alpha) - y\,(\varphi - \alpha)] + \cos(\varphi)\,[x\,(\varphi + \alpha) - x\,(\varphi - \alpha)] =$$

$$= R\,(\varphi + \alpha)\,[\text{sen}\,(\varphi + \alpha)\cos(\varphi) - \cos(\varphi + \alpha)\,\text{sen}\,(\varphi)]$$

$$-R\,(\varphi - \alpha)\,[\text{sen}\,(\varphi - \alpha)\cos(\varphi) \text{-} \cos(\varphi - \alpha)\,\text{sen}\,(\varphi)]$$

$$= \text{sen}\alpha\,[R\,(\varphi + \alpha) - R\,(\varphi - \alpha)]\,.$$

Derivando mais uma vez:

$$\cos(\varphi)\,[y\,(\varphi + \alpha) - y\,(\varphi - \alpha)] - \text{sen}(\varphi)\,[x\,(\varphi + \alpha) - x\,(\varphi - \alpha)] +$$

$$+ \cos(\varphi)\,[R\,(\varphi + \alpha)\cos(\varphi + \alpha) - R\,(\varphi - \alpha)\cos(\varphi - \alpha)] +$$

$$+\text{sen}\,(\varphi)\,[R\,(\varphi + \alpha)\,\text{sen}\,(\varphi + \alpha) - R\,(\varphi - \alpha)\,\text{sen}\,(\varphi - \alpha)] = \text{sen}\alpha\,[R'\,(\varphi + \alpha) - R'\,(\varphi - \alpha)]\,.$$

Por 1.10 $\cos(\varphi)\,[y\,(\varphi + \alpha) - y\,(\varphi - \alpha)] - \text{sen}(\varphi)\,[x\,(\varphi + \alpha) - x\,(\varphi - \alpha)] = 0$, logo:

$$\text{sen}\alpha\,[R'\,(\varphi + \alpha) + R'\,(\varphi - \alpha)] =$$

$$+ \cos(\varphi)\,[R\,(\varphi + \alpha)\cos(\varphi + \alpha) - R\,(\varphi - \alpha)\cos(\varphi - \alpha)] +$$

$$\text{sen}(\varphi)\,[R\,(\varphi + \alpha)\,\text{sen}\,(\varphi + \alpha) - R\,(\varphi - \alpha)\,\text{sen}\,(\varphi - \alpha)] =$$

$$= R\,(\varphi + \alpha)\,[\cos(\varphi + \alpha)\cos(\varphi - \alpha) + \text{sen}\,(\varphi + \alpha)\,\text{sen}\,(\varphi - \alpha)]$$

$$-R(\varphi-\alpha)\left[\cos(\varphi+\alpha)\cos(\varphi-\alpha)+\text{sen}(\varphi+\alpha)\,\text{sen}(\varphi-\alpha)\right] =$$

$$= \cos\alpha\left[R(\varphi+\alpha)-R(\varphi-\alpha)\right].$$

Para obtermos a recíproca basta desfazermos a conta com uma condição inicial $x(0) = x_0$, $y(0) = y_0$ e $(x'(0), y'(0)) = R(0)(1,0)$. Desta maneira obteremos uma oval cujo bilhar associado possui uma reta invariante $p = p_0$, com $p_0 = \cos\alpha$. ■

Afim de encontramos bilhares associado com reta invariante, buscaremos as ovais cujo raio de curvatura satisfaz a equação:

$$(R(\varphi+\alpha)-R(\varphi-\alpha))\cos\alpha = (R'(\varphi+\alpha)+R'(\varphi-\alpha))\,\text{sen}\alpha \tag{1.11}$$

para algum α.

Lema 1.7.2 *A aplicação do bilhar em uma oval Γ preserva a reta $\{p = p_0\}$ para todo $p_0 \in (-1,1)$ se e somente se Γ é um círculo.*

Prova: A aplicação do bilhar em Γ preserva as retas $\{p = p_0\}$ para todo $p_0 \in (-1,1)$ se e somente se $R(\varphi)$ satisfaz a equação 1.11 para todo $\alpha \in (0,\pi)$. Todavia isso ocorre se e somente se $R(\varphi)$ for constante, o que conclui a prova. ■

Lema 1.7.3 *A aplicação do bilhar em uma oval Γ preserva a reta $p_0 = 0$ se e somente se Γ é uma oval de largura constante.*

Prova: $\alpha = \pi/2$ satisfaz a equação 1.11 se e somente se $R'(\varphi+\pi/2)+R'(\varphi-\pi/2) = 0$, ou equivalentemente, $R'(\varphi+\pi)+R'(\varphi) = 0$. Mas isso ocorre se e somente se $R(\varphi+\pi)+R(\varphi) = c$, com $c = R(\pi)+R(0)$.

Mas pela Proposição 1.2.1 uma oval é de largura constante se e somente se $R(\varphi+\pi)+R(\varphi) = R(\pi)+R(0)$, o que conclui o resultado. ■

Se $\{p = p_0\}$ é uma reta invariante, com $p_0 = \cos\alpha$, então, pela reversibilidade do bilhar, $\{p = -p_0\}$ também é uma reta invariante. Deste modo para estudarmos as ovais e os bilhares com retas invariantes $p_0 \neq 0$, iremos supor sem perda de generalidade que $p_0 \in (0,1)$, ou equivalentemente $\alpha \in (0,\pi/2)$, com $p_0 = \cos\alpha$.

Lema 1.7.4 (Tabachnikov [18]) *A aplicação do bilhar em uma oval Γ não circular com raio de curvatura $R(\varphi) = R_0 + \sum_{n=2}^{\infty} a_n\cos n\varphi + b_n\sin n\varphi$ preserva a reta $p = \cos\alpha$ com $\alpha \neq \pi/2$ se e somente se para todo n tal que $(a_n, b_n) \neq (0,0)$*

$$n\tan\alpha = \tan n\alpha. \tag{1.12}$$

Prova: Neste caso $R(\varphi)$ satisfaz à equação 1.11 se e somente se

$$\cos\alpha\left[\sum_{n=2}^{\infty} a_n\cos n(\varphi+\varphi) - a_n\cos n(\varphi-\varphi) + b_n\mathrm{sen}n(\varphi+\varphi) - b_n\mathrm{sen}n(\varphi-\varphi)\right] =$$

$=\mathrm{sen}\alpha\left[\sum_{n=2}^{\infty} -na_n\mathrm{sen}n(\varphi+\varphi) - na_n\mathrm{sen}n(\varphi-\varphi) + nb_n\cos n(\varphi+\varphi) - nb_n\cos n(\varphi-\varphi)\right]$, que equivale a

$$\cos\alpha\left[\sum_{n=2}^{\infty} -2a_n\mathrm{sen}(n\varphi)\,\mathrm{sen}(n\varphi) + 2b_n\mathrm{sen}(n\varphi)\cos(n\varphi)\right] =$$

$=\mathrm{sen}\alpha\left[\sum_{n=2}^{\infty} -2na_n\mathrm{sen}(n\varphi)\cos(n\varphi) + 2b_n\cos(n\varphi)\cos(n\varphi)\right].$

Ou seja

$\sum_{n=2}^{\infty}[\mathrm{sen}(n\alpha)\cos\alpha - n\,\mathrm{sen}(\alpha)\cos(n\alpha)][a_n\mathrm{sen}(n\varphi) - b_n\cos(n\varphi)] = 0$ para todo φ.

Para cada n tal que $(a_n, b_n) \neq (0,0)$ teremos $n\tan\alpha = \tan n\alpha$. ■

Observação: A equação 1.12 também aparece no problema das curvas de bicicleta [19].

Para caracterizarmos os bilhares com reta invariante $\{p = p_0 \neq 0\}$ precisamos determinar para quais valores de n e α a equação $n\tan\alpha = \tan n\alpha$ é satisfeita. Essa equação equivale a $\frac{1}{n}\tan n\alpha = \tan\alpha$, que por sua vez equivale a $\arctan\left(\frac{1}{n}\tan n\alpha\right) = \alpha$. Logo o estudo das soluções de $n\tan\alpha = \tan n\alpha$ será feito através da análise dos pontos fixos da função

$$f(x) = \arctan\left(\frac{1}{n}\tan nx\right) \text{ para } 0 < x < \frac{\pi}{2} \text{ e } n > 1.$$

A função f tem período $\frac{\pi}{n}$ e saltos nos pontos $x = (2k+1)\frac{\pi}{2n}$. Em cada intervalo da forma $\left((2k-1)\frac{\pi}{2n}, (2k+1)\frac{\pi}{2n}\right)$ temos que

$$f'(x) = \frac{1+\tan^2 nx}{1+\frac{1}{n^2}\tan^2 nx} > 1$$

e portanto f é estritamente crescente variando de 0 a $\frac{\pi}{2}$ nos intervalos da forma $\left(k\frac{\pi}{n}, (2k+1)\frac{\pi}{2n}\right)$. Os pontos fixos de f são os zeros da função $g(x) = f(x) - x$ em cada intervalo $\left(k\frac{\pi}{n}, (2k+1)\frac{\pi}{2n}\right) \subset \left(0, \frac{\pi}{2}\right)$.

Lema 1.7.5 *Seja $N = (n-2)/2$ se n é par, e $N = (n-3)/2$ se n é ímpar. Então $g(x) = \arctan\left(\frac{1}{n}\tan nx\right) - x = 0$ tem exatamente uma solução em cada intervalo $\left(k\frac{\pi}{n}, (2k+1)\frac{\pi}{2n}\right)$,*

$k=1,2,...,N$; e não possui solução nos intervalos $\left(0,\frac{\pi}{2n}\right)$ e $\left((2N+1)\frac{\pi}{2n},\frac{\pi}{2}\right)$.

Prova: Em cada intervalo $\left(k\frac{\pi}{n},(2k+1)\frac{\pi}{2n}\right)$ para $k=0,1,2,...,N+1$, $g(x)$ é estritamente crescente pois $g'(x)=f'(x)-1>0$.

No intervalo $\left(0,\frac{\pi}{2n}\right)$, $g(x)>0$, pois $g(0)=0$ e $g(x)$ é estritamente crescente.

Nos intervalos $\left(k\frac{\pi}{n},(2k+1)\frac{\pi}{2n}\right)$, com $k=1,2,...,N$; $g(x)$ varia de $-k\frac{\pi}{n}$ a $\frac{\pi}{2}-(2k+1)\frac{\pi}{2n}$ e portanto novamente como $g(x)$ é estritamente crescente existe uma única solução para $g(x)=0$ em cada um desses intervalos.

Por fim no intervalo $\left((2N+1)\frac{\pi}{2n},\frac{\pi}{2}\right)$, $g(x)$ varia de $-\frac{\pi}{2}-(2N+1)\frac{\pi}{2n}$ a $-\frac{\pi}{2}$ se n é par, e varia de $-\frac{\pi}{2}-(2N+1)\frac{\pi}{2n}$ a 0 se n é impar, e portanto não possui solução neste intervalo. ∎

Corolário 1.7.1 *As equações $2\tan x=\tan 2x$ e $3\tan x=\tan 3x$ não possuem solução no intervalo $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$. Além disto, para todo $n\geq 4$, a equação $n\tan x=\tan nx$ possui exatamente N soluções em $\left(0,\frac{\pi}{2}\right)$ com $N=(n-2)/2$ se n é par, e $N=(n-3)/2$ se n é ímpar.*

Lema 1.7.6 *As equações $n_1\tan\alpha=\tan n_1\alpha$ e $n_2\tan\alpha=\tan n_2\alpha$ não tem raízes em comum se $n_1\neq n_2$.*

Prova: Para $k\frac{\pi}{n}<x<(2k+1)\frac{\pi}{2n}$, $k=1,2,...,N$ temos $k\pi<nx<(2k+1)\frac{\pi}{2}$ e $\arctan(\tan(nx))=nx-k\pi$. Deste modo, neste intervalo a equação $n\tan x=\tan nx$ é equivalente a $x=\frac{1}{n}\arctan(n\tan x)+k\frac{\pi}{n}$.

Fixado $k>0$ inteiro, tomemos $f(x,y)=\frac{1}{y}\arctan(y\tan x)+k\frac{\pi}{y}$ definida em $(0,\pi/2)\times(0,\infty)$. Notemos que

$$\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)=-\frac{1}{y^2}\left(\arctan(y\tan x)-\frac{y\tan x}{1+(y\tan x)^2}+k\pi\right)$$

Afim de verificarmos que $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)<0$ tomemos $h(z)=\arctan(z)-\frac{z}{1+z^2}+k\pi$ com $z\in\mathbb{R}$. Como $h'(z)=\frac{1}{1+z^2}-\frac{z}{(1+z^2)^2}=\frac{2z^2}{(1+z^2)^2}>0$ e $h(0)=k\pi$ obtemos que $h(z)>0$ se $z\in(0,\infty)$. Fazendo $z=y\tan x$, como $0<x<\frac{\pi}{2}$ e $y>0$ temos $z>0$, o que nos dá $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y)<0$ para $(x,y)\in(0,\pi/2)\times(0,\infty)$.

Tomemos n_1 e n_2 dois números naturais com $n_1\neq n_2$, e fixemos k natural, com $1\leq k\leq N_1$, onde $N_1=(n_1-2)/2$ se n_1 é par, e $N_1=(n_1-3)/2$ se n_1 é ímpar.

Pelo Lema 1.7.5 existe um único x_1 é tal que $f(x_1,n_1)=x_1$, ou seja, existe um único $x_1\in\left(k\frac{\pi}{n_1},(2k+1)\frac{\pi}{2n_1}\right)$ tal que $n_1\tan x_1=\tan n_1x_1$.

Se $x_1 = (2m+1)\frac{\pi}{2n_2}$ para algum m inteiro, com $m \le (n_2+1)/2$ então claramente $n_1 \tan x_2 \neq \tan n_2 x_1$, pois neste caso $\tan n_2 x_1$ não está definido. Por outro lado, se $x_1 \neq (2m+1)\frac{\pi}{2n_2}$ então $x_1 \in \left(k\frac{\pi}{n_1}, (2k+1)\frac{\pi}{2n_1}\right) - \cup_{m \le (n_2+1)/2} \left\{(2m+1)\frac{\pi}{2n_2}\right\}$. Como $\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) < 0$, a condição $f(x_1, n_1) = x_1$ implica $f(x_1, n_2) \neq x_1$, o que equivale a $n_1 \tan x_2 \neq \tan n_2 x_1$.

Variando k no conjunto $\{1, 2, \ldots, N_1\}$, e repetindo o mesmo argumento, obtemos que todas as soluções da equação $n_1 \tan\alpha = \tan n_1\alpha$, não satisfazem a equação $n_2 \tan\alpha = \tan n_2\alpha$, o que conclui a prova. ∎

Lema 1.7.7 *O bilhar em uma oval Γ deixa a reta $\{p = p_0\}$ invariante, com $p_0 \neq 0$ se e somente se $p_0 = \cos\alpha$, $0 < \alpha < \pi/2$, e o raio de curvatura da oval é dado por $R(\varphi) = R_0 + a_n \cos n\varphi$, onde $n \ge 4$ satisfaz $n\tan\alpha = \tan n\alpha$, e $R_0 > a_n$.*

Prova: Pelo Corolário 1.7.1 a equação $n\tan\alpha = \tan n\alpha$ possui solução apenas para $n \ge 4$. Pelo Lema 1.7.6 as equações $n_1\tan\alpha = \tan n_1\alpha$ e $n_2 \tan\alpha = \tan n_2\alpha$ não tem raízes em comum se $n_1 \neq n_2$, e pelo Lema 1.7.4 para todo n tal que$(a_n, b_n) \neq (0,0)$ devemos ter $n\tan\alpha = \tan n\alpha$. Consequentemente o raio de curvatura da oval é dado por $R(\varphi) = R_0 + \tilde{a}_n \cos n\varphi + \tilde{b}_n \sin n\varphi$, onde $n \ge 4$ e $n\tan\alpha = \tan n\alpha$. Tomando um ponto pertencente a região limitada pelo traço da oval, e aplicando uma rotação no traço da oval, afim de obtermos a mudança de fase $\varphi - \varphi_0$, onde φ_0 é tal que $\cos\varphi_0 = \tilde{a}_n / \left(\tilde{a}_n^2 + \tilde{b}_n^2\right)^{1/2}$ e $\text{sen}\varphi_0 = \tilde{a}_n / \left(\tilde{a}_n^2 + \tilde{b}_n^2\right)^{1/2}$ obteremos que o raio de curvatura da oval é dado por $R(\varphi) = R_0 + a_n \cos n\varphi$ onde $n \ge 4$ e $n\tan\alpha = \tan n\alpha$. ∎

Lema 1.7.8 *Sejam Γ é uma oval com raio de curvatura na forma $R(\varphi) = a + bcos(n\varphi)$ para $n \ge 4$ e T a aplicação do bilhar associada Ocorre uma das duas opções:*

1. *n é par e T preserva $(n-2)$ retas, todas na forma $p_0 = \cos\alpha$, onde α é solução da equação $ntan\alpha = tann\alpha$, e $a > b$.*
2. *n é ímpar e T preserva a reta $p_0 = 0$ e também $(n-3)$ retas na forma $p_0 = \cos\alpha$, onde α é solução da equação $ntan\alpha = tann\alpha$, e $a > b$*

Prova: Pelo Lema 1.7.5 a aplicação do bilhar T preserva $(n-2)/2$ retas se n é par, e $N = (n-3)/2$ retas se n é ímpar todas com $-1 < p_0 < 0$, ou equivalentemente $\pi/2 < \alpha < \pi$, onde $p_0 = \cos\alpha$ e $n\tan\alpha = \tan n\alpha$. Como $\{p = -p_0\}$ também é uma reta invariante pela reversibilidade do bilhar, então T preservar $n-2$ retas se n é par e $N = (n-3)$ retas se n é ímpar, ainda se n é ímpar a oval é de largura constante e o bilhar deixa a reta $p_0 = 0$ invariante, o que conclui a prova. ∎

1.8 Número de rotação e curvas rotacionais invariantes

Nesta seção estudaremos o número de rotação juntamente com algumas de suas propriedades. Calcularemos o número de rotação da aplicação do bilhar restrita às retas invariantes, e definiremos curvas rotacionais invariantes.

Dado um homeomorfismo $f : \mathbb{R}/l\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/l\mathbb{Z}$, denotemos por $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ o levantamento de f. Por definição a função F satisfaz:

$$\begin{aligned} F(x+l) &= F(x) + l, \\ \mathrm{Pr} \circ F &= f \circ \mathrm{Pr}, \end{aligned}$$

onde Pr: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}/l\mathbb{Z}$ é a projeção natural que leva o ponto x na classe $[x + l\mathbb{Z}]$. Claramente a função F é um homeomorfismo. Diremos que o homeomorfismo f preserva orientação se, dada qualquer orientação em $\mathbb{R}/l\mathbb{Z}$, f leva qualquer conjunto de pontos na sua imagem, sem alterar a ordem.

A condição de f ser um homeomorfismo preservando orientação é equivalente ao levantamento de F ser estritamente crescente.

Definiremos número de rotação para homeomorfismos $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ preservando orientação.

Definição 1.8.1 *Seja $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ um homeomorfismo preservando orientação, e $F : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ um levantamento de f satisfazendo $Pr{\circ}F_1 = f{\circ}Pr$. O número de rotação de f é o número ω pertencente a $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, dado por $\omega(F) = \lim_{|m| \to \infty} \frac{1}{m}(F^m(x) - x)$.*

Poincaré [1] demonstrou que o número de rotação é bem definido em $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$, não dependendo do ponto x e levantamento escolhidos. Intuitivamente o número de rotação mede a rotação média das órbitas de f. Poincaré [1] demonstrou também que se o número de rotação é racional igual a m/n, então existe pelo menos uma órbita periódica. Ainda neste caso, todas as órbitas periódicas possuem periódo m/n, ou seja, se x é um ponto periódico então no levantamento $F^n(x) = x + m$.

Na próxima proposição veremos que o número de rotação é invariante por homeomorfismos preservando orientação.

Proposição 1.8.1 (Poincaré [1]) *Sejam $f : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ e $h : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$ homeomorfismos preservando orientação. Então $\omega(h^{-1} \circ f \circ h) = \omega(f)$.*

A proposição 1.8.1 nos permite definir número de rotação para qualquer homeomorfismo $f : \mathbb{R}/l\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/l\mathbb{Z}$ preservando orientação.

Definição 1.8.2 *Se $f : \mathbb{R}/l\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/l\mathbb{Z}$ é um homeomorfismo preservando orientação, então o número de rotação de f é definido como o número de rotação de $h^{-1} \circ f \circ h$, onde $h : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/l\mathbb{Z}$ é um homeomorfismo preservando orientação, ou seja, o levantamento $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ de h é uma função estritamente crescente satisfazendo $H(x+1) = H(x) + l$.*

Segue diretamente da definição o seguinte resultado.

Lema 1.8.1 *Se $f : \mathbb{R}/l\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/l\mathbb{Z}$ é um homeomorfismo preservando orientação. O número de rotação de f é o número de rotação de $g : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z}$, onde $g(x) = f(xl)$.*

Seja Γ uma oval parametrizada pelo ângulo φ entre o vetor tangente e uma direção fixa, tal que o bilhar associado possua uma reta invariante $\{p = p_0\}$. A invariância da reta $\{p = p_0\}$ não depende do parâmetro φ. Tomando um segmento em Γ tal que no ponto inicial tenhamos ângulo $\alpha = \cos^{-1} p_0$ com o vetor tangente, todas as poligonais da trajetória associadas a esse segmento também farão ângulo α com o vetor tangente, deste modo se reparametrizarmos Γ por um parâmetro qualquer $t \in [0, l)$, e denotarmos também por T a aplicação do bilhar nas coordenadas (t, p) teremos:

$$T(t_1, p_0) = (t_2, p_0)$$

Em particular a aplicação do bilhar nas coordenadas (φ, p), restrita a reta invariante $\{p = p_0\}$ é um homemorfismo preservando orientação, ja que $T(\varphi_1, p_0) = (\varphi_1 + 2\alpha, p_0)$, com $\alpha = \cos^{-1} p_0$. Reparametrizando a oval Γ pelo parâmetro $t = \varphi/2\pi$, teremos ainda que a aplicação do bilhar nas coordenadas (t, p) restrita a reta $\{p = p_0\}$ é um homeomorfismo preservando orientação satisfazendo:

$$\begin{aligned} T|_{\{p=p_0\}} &: \mathbb{R}/\mathbb{Z} \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \\ T(t_1, p_0) &= (t_1 + \alpha/\pi, p_0), \end{aligned} \tag{1.13}$$

com $\alpha = \cos^{-1} p_0$. Neste caso $T|_{\{p=p_0\}}$ é uma rotação de α/π, onde $\alpha = \cos^{-1} p_0$.

Consequentemente o número de rotação da aplicação do bilhar restrita a reta invariante $\{p = p_0\}$ é $\omega = \alpha/\pi$, onde $\alpha = \cos^{-1} p_0$.

Nas ovais de largura constante o número de rotação da aplicação do bilhar restrita à reta invariante $\{p_0 = 0\}$ é $1/2$, logo neste caso $T(t_1, p_0) = (t_1 + 1/2, p_0)$, o que implica que $T|_{\{p=p_0\}}$ é uma rotação de $1/2$ e todas as órbitas são periódicas com período 2.

Nos bilhares com reta invariante $\{p_0 \neq 0\}$ ocorre um procedimento diferente.Van Cyr demonstrou [20], que se α é solução da equação $n \tan \alpha = \tan n\alpha$ então $\omega = \alpha/\pi$ é irracional.

Consequentemente $T|_{\{p=p_0\}}$ é uma rotação irracional e a reta invariante $\{p = p_0\}$, é composta de órbitas densas.

Definição 1.8.3 *Seja Ω o traço de uma curva parametrizada contínua, fechada, simples, e homotopicamente não trivial contida no cilindro $\mathbb{R}/l\mathbb{Z} \times (-1, 1)$. Diremos que Ω é uma curva rotacional invariante pela aplicação do bilhar $T : \mathbb{R}/l\mathbb{Z} \times (-1, 1) \to \mathbb{R}/l\mathbb{Z} \times (-1, 1)$ se $T(\Omega) = \Omega$.*

Pelo Teorema da Curva Invariante de Birkhoff ([1] e [15]) toda curva invariante, homotopicamente não trivial pela aplicação do bilhar é um gráfico de uma função Lipschtiz. Curvas rotacionais invariantes são particularmente interessantes, pois o complementar de uma curva rotacional invariante possui duas componentes conexas, homeomorfas ao cilindro, e invariantes pela aplicação T. Como consequência as órbitas ficam confinadas a essas regiões.

Nas coordenadas (s, p) a aplicação do bilhar $T : \mathbb{R}/l\mathbb{Z}\times(-1, 1) \to \mathbb{R}/l\mathbb{Z}\times(-1, 1)$, com $T(s_1, p_1) = (s_2(s_1, p_1), p_2(s_1, p_1))$, satisfaz $\frac{\partial s_2}{\partial p_1} > 0$. Consequentemente T restrita a qualquer curva invariante induz um homemorfismo do círculo que preserva orientação.

Em particular, se equação da curva rotacional invariante no recobrimento for $s = s(\theta), p = p(\theta)$ e existir um número real $\tilde{\omega} \in [0, l)$ tal que

$$T(s(\theta), p(\theta)) = (s(\theta + \tilde{\omega}), p(\theta + \tilde{\omega})) \tag{1.14}$$

então $T_{|\Omega}$ é conjugada a rotação por $\omega = \tilde{\omega}/l$ em $S^1 = \mathbb{R}/\mathbb{Z}$. Ainda se $\gamma(\theta) = (s(\theta), p(\theta))$ é uma curva rotacional invariante pela aplicação to bilhar, então $\tilde{\gamma}(t) = (s(\theta), -p(\theta))$ também o é. Com efeito se $T(s(\theta_1), p(\theta_1)) = (s(\theta_2), p(\theta_2))$ então pela relação 1.5, $T(s(\theta_2), -p(\theta_2)) = (s(\theta_1), -p(\theta_1))$.

Capítulo 2

Bilhares em ovais n-simétricas

Buscaremos órbitas periódicas da aplicação do bilhar nas ovais n-simétricas, cujas trajetórias estão associadas aos polígonos do conjunto $\Lambda_{n,m}$ definido em 1.3. Mostraremos que em uma boa topologia, fixado $1 \leq m \leq n-1$, qualquer oval n-simétrica Γ pode ser aproximada por outra oval n-simétrica tal que a aplicação do bilhar T possua pelo menos $d =$mdc(n,m) órbitas periódicas estáveis de período $n_1 = n/\text{mdc}(n,m)$ correspondendo aos polígonos de perímetro mínimo em $\Lambda_{n,m}$, ou seja, em qualquer vizinhança dos pontos desta órbita existem curvas invariantes por T^{n_1} e que estas ovais que se aproximam de Γ possuem pelo menos $d =$mdc(n,m) órbitas periódicas hiperbólicas de período $n_1 = n/\text{mdc}(n,m)$ correspondendo aos polígonos de perímetro máximo em $\Lambda_{n,m}$.

Finalizaremos o capítulo mostrando que o subconjunto das ovais n-simétricas, com $n \geq 4$, para as quais no máximo, exceto dois valores de m, $1 \leq m \leq n-1$, a aplicação do bilhar associada T possui pelo menos $d =$mdc(n,m) órbitas periódicas estáveis de período $n_1 = n/\text{mdc}(n,m)$ é um subconjunto aberto e denso no conjunto das ovais simétricas.

2.1 Órbitas periódicas em $\Lambda_{n,m}$

Nesta seção, mostraremos que os polígonos de perímetro máximo e mínimo em $\Lambda_{n,m}$ correspondem a órbitas periódicas do bilhar em uma oval n-simétrica Γ. Obteremos uma relação entre esses polígonos e os pontos críticos da função suporte $g(\varphi) = \langle \Gamma(\varphi) - q_c, -\eta(\varphi) \rangle$ da oval, onde φ é o ângulo entre o vetor tangente e o eixo x positivo, $\eta(\varphi)$ é o vetor normal, e q_c é o centro de simetria da oval Γ. A menos de menção em contrário suporemos que uma oval n-simétrica estará sempre parametrizada pelo ângulo φ.

Proposição 2.1.1 *Seja Γ uma oval n-simétrica. Dado $1 \leq m \leq n-1$ existem pelo menos* *duas órbitas periódicas do bilhar geometricamente distintas de período $n_1 = n/mdc(m,n)$ correspondendo aos polígonos de perímetro máximo e mínimo no conjunto $\Lambda_{n,m}$.*

Prova: Sejam $h(\varphi_1, \varphi_2) = ||\Gamma(\varphi_2) - \Gamma(\varphi_1)||$, $H_{n_1}(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n_1}) = \sum_{k=1}^{n_1} h(\varphi_k, \varphi_{k+1})$ e $\Lambda_{n,m} = \{P_{n,m}(\varphi), \varphi \in [0, 2\pi m/n)\}$ o conjunto dos polígonos regulares inscritos em $\Gamma(\varphi)$ com vértices nos pontos $\Gamma(\varphi)$, $\Gamma\left(\varphi + \frac{2m\pi}{n}\right)$, $\Gamma\left(\varphi + \frac{4m\pi}{n}\right)$, ..., $\Gamma\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}(n_1 - 1)\right)$ e lados $\Gamma\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n} j\right) - \Gamma\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}(j-1)\right)$, onde $j = 1, \cdots, n_1 - 1$. A restrição do funcional H_{n_1} aos polígonos do conjunto $\Lambda_{n,m}$ possui pelo menos dois pontos críticos correspondendo aos polígonos de perímetros máximo e mínimo deste conjunto.

Pela Proposição 1.5.2 basta demonstrarmos que os pontos críticos desta restrição também são pontos críticos de H_{n_1} no conjunto dos polígonos associados aos pontos de $D_{n_1} = \left\{(\varphi_1, \ldots, \varphi_{n_1}) \in \left(\frac{\mathbb{R}}{l\mathbb{Z}}\right)^{n_1} : \varphi_k \neq \varphi_{k+1} \text{ para todo } k \in \mathbb{Z}_{n_1}\right\}$.

Se $(\varphi_1(\varphi_0), ..., \varphi_{n_1}(\varphi_0))$ é um ponto crítico de H_{n_1} restrito a $\Lambda_{n,m}$, então:

$$\sum_{k=1}^{n_1} \frac{\partial}{\partial \varphi_k} H_{n_1}(\varphi_1(\varphi_0), ..., \varphi_{n_1}(\varphi_0)) \frac{d\varphi_k}{d\varphi}(\varphi_0) = 0.$$

Pela simetria da oval todas as n_1 componentes do vetor gradiente $\text{grad} H_{n_1}$ no ponto

$(\varphi_1(\varphi_0), ..., \varphi_{n_1}(\varphi_0))$ são iguais e como $\varphi_k = \varphi_0 + 2\pi \frac{m(k-1)}{n}$, obtemos$\frac{d\varphi_j}{d\varphi} = 1$.

Consequentemente todas as componentes do vetor $\text{grad} H_{n_1}(\varphi_1(\varphi_0), ..., \varphi_{n_1}(\varphi_0))$ são nulas o que nos dá $\text{grad} H_{n_1}(\varphi_1(\varphi_0), ..., \varphi_{n_1}(\varphi_0)) = 0$.

Portanto o ponto $(\varphi_1(\varphi_0), ..., \varphi_{n_1}(\varphi_0))$ também é ponto crítico de H_{n_1} no conjunto dos polígonos associados aos pontos de D_{n_1}.Logo pela Proposição 1.5.2 temos pelos menos duas órbitas periódicas geometricamente distintas correspondendo aos polígonos de perímetro máximo e mínimo em $\Lambda_{n,m}$. ■

Observação: Na Proposição 2.1.1 garantimos pelo menos duas trajetórias periódicas de período $n_1 = n/d$ correspondendo aos polígonos de perímetro máximo e mínimo em $\Lambda_{n,m}$, com $d = \text{mdc}(n,m)$. Contudo, se para um determinado φ_0 o perímetro de $P_{n,m}(\varphi_0)$ for localmente máximo ou mínimo em $\Lambda_{n,m}$, isto é, $H_{n_1}(\varphi_1(\varphi_0), ..., \varphi_{n_1}(\varphi_0)) \geq H_{n_1}(\varphi_1(\varphi), ..., \varphi_{n_1}(\varphi))$ (respectivamente menor) para $|\varphi - \varphi_0| < \varepsilon$, então $P_{n,m}(\varphi_0)$ também corresponderá a uma órbita periódica do bilhar em Γ.

Corolário 2.1.1 *Seja Γ uma oval n-simétrica. Dado $1 \leq m \leq n-1$, seja $d = \text{mdc}(n,m)$. Então existem pelo menos $2d$ trajetórias periódicas de período $n_1 = n/d$, sendo d com perímetro máximo em $\Lambda_{n,m}$ e d com perímetro mínimo.*

Prova: Pela Proposição 2.1.1 existem pelo menos duas órbitas periódicas geometricamente distintas associadas aos polígonos de perímetro máximo e mínimo em $\Lambda_{n,m}$. Pelo Lema 1.3.3 existem $d-1$ polígonos congruentes ao polígono de perímetro máximo, e $d-1$ congruentes ao polígono de perímetro mínimo. Isso nos dá d órbitas periódicas correspondendo aos polígonos de perímetro máximo e d órbitas periódicas correspondendo aos polígonos de perímetro em $\Lambda_{n,m}$. ■

Corolário 2.1.2 *Seja Γ uma oval n-simétrica. Dado $1 \leq m \leq n-1$, o ângulo β que os segmentos das trajetórias periódicas correspondendo a polígonos em $\Lambda_{n,m}$ fazem com o vetor tangente à oval nos vértices do polígono é constante e igual a $\dfrac{m\pi}{n}$.*

Prova: Tomemos a oval Γ parametrizada pelo ângulo φ. Como todos os polígonos em $\Lambda_{n,m}$ são regulares o perímetro de um polígono $P_{n,m}(\varphi)$ neste conjunto é dado por $n_1 L(\varphi)$, onde $L(\varphi)$ é dado por:

$$L(\varphi) = \left\| \Gamma\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right) - \Gamma(\varphi) \right\|.$$

Logo $P_{n,m}(\varphi)$ possui perímetro (global ou local) máximo, ou mínimo, dentre os polígonos de $\Lambda_{n,m}$ se e somente se φ é um ponto crítico de $L(\varphi)$. Todavia como $L(\varphi) > 0$ os pontos críticos de $L(\varphi)$ também são pontos críticos de $L^2(\varphi) = \left\langle \Gamma\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right) - \Gamma(\varphi), \Gamma\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right) - \Gamma(\varphi) \right\rangle$. Como $\Gamma'(\varphi) = R(\varphi)\tau(\varphi)$, com $R(\varphi)$ o raio de curvatura e $\tau(\varphi) = (\cos\varphi, \mathrm{sen}\varphi)$ o vetor tangente da oval Γ, da periodicidade $R(\varphi) = R\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right)$ obtemos:

$$\frac{dL^2(\varphi)}{d\varphi} = R(\varphi)\left\langle \Gamma\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right) - \Gamma(\varphi), \tau\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right) - \tau(\varphi) \right\rangle.$$

Porém para todo φ:

$$\begin{aligned}
\Gamma\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right) - \Gamma(\varphi) &= \|L(\varphi)\| \left(\cos(\beta + \varphi), \mathrm{sen}(\beta + \varphi)\right), \\
\tau\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right) - \tau(\varphi) &= \left(\cos\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right) - \cos(\varphi), \mathrm{sen}\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right) - \mathrm{sen}(\varphi)\right).
\end{aligned}$$

O que nos dá:

$$\frac{dL^2(\varphi)}{d\varphi} = R(\varphi)\|L(\varphi)\| \left(\cos\left(\frac{2\pi m}{n} - \beta\right) - \cos(\beta)\right).$$

Logo φ_0 é um ponto crítico de $L(\varphi)$ se e somente se o ângulo que os lados do polígono $P_{n,m}(\varphi_0)$ fazem o vetor tangente a oval Γ em cada vértices deste polígono satisfazem à relação:

$$\cos\left(\frac{2\pi m}{n}-\beta\right)-\cos\left(\beta\right)=0$$

O que nos dá

$$\left|\frac{2\pi m}{n}-\beta\right|=\left|\beta\right|.$$

Mas a única solução desta equação é $\frac{2\pi m}{n}-\beta=\beta$, o que implica $\beta=\frac{\pi m}{n}$. ■

O Lema adiante relaciona as órbitas periódicas do bilhar em uma oval Γ n-simétrica, associadas aos polígonos de perímetro máximo e mínimo no conjunto $\Lambda_{n,m}$, com os pontos críticos da função suporte $g\left(\varphi\right)=\left\langle \Gamma\left(\varphi\right)-q_c,-\eta\left(\varphi\right)\right\rangle$, relativa ao centro de simetria q_c.

Lema 2.1.1 *Sejam Γ uma oval n-simétrica com centro de simetria q_c e $g\left(\varphi\right)=\left\langle \Gamma\left(\varphi\right)-q_c,-\eta\left(\varphi\right)\right\rangle$ a função suporte. O perímetro de um polígono $P_{n,m}\left(\varphi\right)$ é dado por*

$$2n_1 sen\left(m\pi/n\right)\left[\left(g\left(\varphi\right)\right)^2+\left(g'\left(\varphi\right)\right)^2\right]^{1/2}$$

e um polígono $P_{n,m}\left(\varphi_0\right)$ tem perímetro máximo (respectivamente mínimo) (global ou local) dentre os polígonos do conjunto $\Lambda_{n,m}$ se e somente se φ_0 é um ponto de máximo (respectivamente mínimo) (global ou local) da função suporte $g\left(\varphi\right)$.

Prova: Como vimos no Capítulo 1, a função suporte satisfaz $R\left(\varphi\right)=g\left(\varphi\right)+g''\left(\varphi\right)$ e a oval $\Gamma\left(\varphi\right)=\left(x\left(\varphi\right),y\left(\varphi\right)\right)$ é dada por:

$$\begin{aligned} x\left(\varphi\right) &= \int_0^{\varphi}\cos\left(t\right)R\left(t\right)dt+x_0=g\left(\varphi\right)\operatorname{sen}\left(\varphi\right)+g'\left(\varphi\right)\cos\left(\varphi\right)+\tilde{x}_0, \qquad (2.1)\\ y\left(\varphi\right) &= \int_0^{\varphi}\operatorname{sen}\left(t\right)R\left(t\right)dt+y_0=-g\left(\varphi\right)\cos\left(\varphi\right)+g'\left(\varphi\right)\operatorname{sen}\left(\varphi\right)+\tilde{y}_0. \end{aligned}$$

Com $\tilde{x}_0=x_0-g'\left(0\right)$ e $y_0=y_0+g\left(0\right)$.

Como na prova do Corolário 2.1.2, um polígono $P_{n,m}\left(\varphi_0\right)$ possui perímetro máximo ou mínimo em $\Lambda_{n,m}$ se e somente se φ_0 é um ponto crítico de $L\left(\varphi\right)=\left\|\Gamma\left(\varphi+\frac{2\pi m}{n}\right)-\Gamma\left(\varphi\right)\right\|$ uma vez que o perímetro de $P_{n,m}\left(\varphi\right)$ é $n_1 L\left(\varphi\right)$. Desta maneira basta estudarmos os pontos críticos de $L\left(\varphi\right)$.

Substituindo $x\left(\varphi\right)$ e $y\left(\varphi\right)$ obtemos da equação 2.1 :

$$L^2\left(\varphi\right)=\left[x\left(\varphi+\frac{2\pi m}{n}\right)-x\left(\varphi\right)\right]^2+\left[y\left(\varphi+\frac{2\pi m}{n}\right)-y\left(\varphi\right)\right]^2=$$

$= g^2\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right)\mathrm{sen}^2\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right) + g^2\left(\varphi\right)\mathrm{sen}^2\left(\varphi\right) + [g'\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right)]^2\cos^2\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right) + [g'\left(\varphi\right)]^2\cos(\varphi)$

$-2g\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right)g\left(\varphi\right)\mathrm{sen}\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right)\mathrm{sen}(\varphi) + 2g\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right)g'\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right)\mathrm{sen}\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right)\cos\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right)$

$-2g\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right)g\left(\varphi\right)\mathrm{sen}\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right)\cos(\varphi) - 2g\left(\varphi\right)g'\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right)\mathrm{sen}(\varphi)\cos\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right)$

$+2g\left(\varphi\right)g'\left(\varphi\right)\mathrm{sen}(\varphi)\cos(\varphi) - 2g'\left(\varphi\right)g'\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right)\cos(\varphi)\cos\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right)$

$+g^2\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right)\cos^2\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right) + g^2\left(\varphi\right)\cos^2\left(\varphi\right) + [g'\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right)]^2\mathrm{sen}^2\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right) + [g'\left(\varphi\right)]^2\mathrm{sen}^2\left(\varphi\right)$

$-2g\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right)g\left(\varphi\right)\cos\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right)\cos(\varphi) - 2g\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right)g'\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right)\mathrm{sen}\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right)\cos\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right)$

$+2g\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right)g\left(\varphi\right)\cos\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right)\mathrm{sen}(\varphi) + 2g\left(\varphi\right)g'\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right)\cos(\varphi)\mathrm{sen}\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right)$

$-2g\left(\varphi\right)g'\left(\varphi\right)\mathrm{sen}(\varphi)\cos(\varphi) - 2g'\left(\varphi\right)g'\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right)\mathrm{sen}(\varphi)\mathrm{sen}\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right).$

A simetria da oval implica que $g\left(\varphi + \frac{2\pi}{n}\right) = g\left(\varphi\right)$, logo substituindo $g\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right)$ por $g\left(\varphi\right)$, e fazendo as somas de arcos das funções seno e cosseno obtemos:

$$L^2\left(\varphi\right) = 2g^2\left(\varphi\right) + 2\left[g'\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right)\right]^2 - 2\cos\left(\frac{2\pi m}{n}\right)\left(g^2\left(\varphi\right) + \left[g'\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right)\right]^2\right)$$

$= 2\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi m}{n}\right)\right)\left(g^2\left(\varphi\right) + \left[g'\left(\varphi + \frac{2\pi m}{n}\right)\right]^2\right).$

Consequentemente:

$$L^2\left(\varphi\right) = 4\mathrm{sen}^2\left(m\pi/n\right)\left[\left(g\left(\varphi\right)\right)^2 + \left(g'\left(\varphi\right)\right)^2\right]. \tag{2.2}$$

O que nos dá:

$$L'\left(\varphi\right) = 4\mathrm{sen}^2\left(m\pi/n\right)\left[g\left(\varphi\right) + g''\left(\varphi\right)\right]g'\left(\varphi\right)/L\left(\varphi\right). \tag{2.3}$$

Como $g\left(\varphi\right) + g''\left(\varphi\right) = R\left(\varphi\right) > 0$, $L'\left(\varphi_0\right) = 0$ se e somente se $g'\left(\varphi_0\right) = 0$. Ainda da equação 2.3 concluímos que φ_0 é um ponto de máximo (respectivamente mínimo) de $g\left(\varphi\right)$ se e somente se φ_0 é um máximo (respectivamente mínimo) de $L\left(\varphi\right)$. ∎

Corolário 2.1.3 *Sejam Γ uma oval n-simétrica com centro de simetria q_c e $1 \leq m \leq n-1$. As órbitas periódicas do bilhar associadas aos polígonos em $\Lambda_{n,m}$ são formadas pelos pontos $(\varphi_0, p_{\frac{m}{n}})$, $(\varphi_0 + \frac{2\pi m}{n},\ p_{\frac{m}{n}})$, $\ldots$, $(\varphi_0 + \frac{2\pi m(n_1-1)}{n},\ p_{\frac{m}{n}})$, onde φ_0 é tal que $g'\left(\varphi_0\right) = 0$, com $g\left(\varphi\right) = \langle \Gamma\left(\varphi\right) - q_c, -\eta\left(\varphi\right)\rangle$ a função suporte da oval Γ e $p_{\frac{m}{n}} = \cos\left(\frac{\pi m}{n}\right)$.*

Prova: Pelo Lema 2.1.1 o polígono $P_{n,m}\left(\varphi_0\right) \in \Lambda_{n,m}$ associa uma órbita periódica do bilhar se e somente se $g'\left(\varphi_0\right) = 0$. Pelo Corolário 2.1.2 o ângulo que os segmentos das trajetórias periódicas correspondendo a polígonos em $\Lambda_{n,m}$ fazem com o vetor tangente a oval nos vértices do polígono é constante igual a $\dfrac{m\pi}{n}$. Deste modo a órbita periódica é formada pelos pontos $\left(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}\right),\ \left(\varphi_0 + \frac{2\pi m}{n},\ p_{\frac{m}{n}}\right), \ldots, \left(\varphi_0 + \frac{2\pi m(n_1-1)}{n},\ p_{\frac{m}{n}}\right)$. ■

COROLÁRIO 2.1.4 *Seja Γ uma oval n-simétrica. Se para algum m, $1 \leq m \leq n-1$, todos os polígonos de $\Lambda_{n,m}$ correspondem a uma trajetória periódica então Γ é um círculo.*

PROVA: Se para algum $1 \leq m \leq n-1$ todos os polígonos de $\Lambda_{n,m}$ correspondem a uma trajetória periódica obteremos pelo lema 2.1.1 que $g'(\varphi) \equiv 0$, o que nos dá $R(\varphi) = g(\varphi) = C > 0$, onde C é uma constante. ■

Em [10] N. Innami exibe uma oval de classe C^∞ tal que todo ponto desta oval é vértice de um triângulo, correspondendo a uma trajetória de período 3 da aplicação do bilhar associada a esta oval e demonstra também que se todos os triângulos forem equiláteros então a única oval satisfazendo essa condição é o círculo.

2.2 Órbitas periódicas e aplicação quociente

Nesta seção definiremos a aplicação $T_{n,m}$ em uma oval n-simétrica e relacionaremos as órbitas periódicas do bilhar T correspondendo aos polígonos de $\Lambda_{n,m}$, com pontos fixos desta aplicação. A menos de translação definiremos uma topologia no conjunto das ovais n-simétricas e mostraremos que nesta topologia, o subconjunto das ovais n-simétricas para os quais existem pelo menos $2d$ pontos fixos da aplicação $T_{n,m}$ contidos na reta $p = \cos(m\pi/n)$, sendo d hiperbólicos e d elípticos é aberto e denso.

Como introduzido na seção 1.4, dada uma oval Γ, denotaremos nesta seção por $\tilde{T} : \mathbb{R} \times (-1,1) \to \mathbb{R} \times (-1,1)$ o levantamento da aplicação do bilhar $T : \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}} \times (-1,1) \to \frac{\mathbb{R}}{2\pi\mathbb{Z}} / \times (-1,1)$ nas coordenadas (φ, p) satisfazendo:

$$\begin{aligned} \tilde{T}(\varphi + 2\pi, p) &= \tilde{T}(\varphi, p) + (2\pi, 0) \\ \tilde{T}(0, p) &\in [0, 2\pi) \times (-1,1), \end{aligned} \tag{2.4}$$

onde denotaremos também por (φ, p) as coordenadas em $\mathbb{R} \times (-1,1)$.

Se Γ for uma oval n-simétrica, além da equação 2.4 o levantamento $\tilde{T}$ satisfaz:

$$\tilde{T}\left(\varphi + 2\pi\frac{m}{n}, p\right) = \tilde{T}(\varphi, p) + \left(2\pi\frac{m}{n}, 0\right). \tag{2.5}$$

Esta relação induz uma aplicação no cilindro $\frac{\mathbb{R}}{2\pi\frac{m}{n}\mathbb{Z}} \times (-1,1)$

$$\overbrace{(\varphi_0, p_0)} \to \overbrace{T(\varphi_0, p_0)},$$

onde $\overbrace{(\varphi, p)}$ denota a classe do ponto (φ, p). $T_{n,m}$ é um difeomorfismo da mesma classe de diferenciabilidade da aplicação $\tilde{T}$ e da aplicação do bilhar T na topologia quociente. Nas coordenadas globais (φ, p) de $\mathbb{R} \times (-1,1)$ a derivada $\frac{\partial}{\partial\hat{\varphi}^i \partial p^j} T_{n,m}$ em um ponto $\overbrace{(\varphi, p)}$ é dada por $\frac{\partial}{\partial\varphi^i \partial p^j} \tilde{T}(\varphi, p)$, onde (φ, p) é um ponto qualquer da classe de equivalência de $\overbrace{(\varphi, p)}$. Denotaremos por Pr a projeção que associa a cada ponto de $\mathbb{R} \times (-1,1)$ sua classe de equivalência em $\frac{\mathbb{R}}{2\pi\frac{m}{n}\mathbb{Z}} \times (-1,1)$, ou seja:

$$\mathrm{Pr} : \mathbb{R} \times (-1,1) \to \frac{\mathbb{R}}{2\pi\frac{m}{n}\mathbb{Z}} \times (-1,1)$$

$$(\varphi, p) \to (\varphi, p) + \left(2\pi\frac{m}{n}\mathbb{Z}, p\right).$$

Notemos que a projeção Pr satisfaz a seguinte relação:

$$\mathrm{Pr} \circ \tilde{T}(\varphi, p) = T_{n,m} \circ \mathrm{Pr}(\varphi, p)$$

Certamente, podemos repetir o mesmo raciocínio se a oval Γ estiver parametrizada por comprimento de arco s, pois neste caso a aplicação $\tilde{T}$ satisfaz:

$$\tilde{T}\left(s + l\frac{m}{n}, p\right) = \tilde{T}(s, p) + \left(l\frac{m}{n}, 0\right),$$

onde l é o perímetro da oval Γ.

Denotaremos também por $T_{n,m}$ a aplicação induzida pela aplicação do bilhar nas coordenadas (s, p). Nestas coordenadas, além de $T_{n,m}$ ser um difeomorfismo da mesma classe de diferenciabilidade de T, essa aplicação também preserva a medida $ds \wedge dp$.

Lema 2.2.1 *Sejam Γ uma oval n-simétrica e $p_{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m}{n}\pi$. Se o ponto $\left(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}\right)$ pertence a uma órbita periódica associada a um polígono de $\Lambda_{n,m}$ então $Pr\left(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}\right)$ é um ponto fixo de $T_{n,m}$. Reciprocamente se $Pr\left(\varphi_0, p\frac{m}{n}\right)$ é um ponto fixo de $T_{n,m}$ então $\left(\varphi_0, p_{\frac{m}{n}}\right)$ pertence a uma órbita periódica associada a um polígono em $\Lambda_{n,m}$.*

Prova: Se $\left(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}\right)$ pertence a uma órbita periódica associada a um polígono de $\Lambda_{n,m}$ então a órbita periódica é formada pelos pontos:

$$\left\{\left(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}\right),\left(\varphi_0+\frac{2\pi m}{n},\ p_{\frac{m}{n}}\right),\ldots,\left(\varphi_0+\frac{2\pi m\left(n_1-1\right)}{n},\ p_{\frac{m}{n}}\right)\right\}$$

com $n_1 = n/\mathrm{mdc}(n,m)$. Como os pontos desta órbita correspondem ao mesmo ponto no espaço quociente $\frac{\mathbb{R}}{2\pi\frac{m}{n}\mathbb{Z}} \times (-1,1)$, obtemos:

$$T_{n,m}\left(\Pr\left(\varphi_0, p_{\frac{m}{n}}\right)\right) = \Pr\left(\varphi_0, p_{\frac{m}{n}}\right).$$

Reciprocamente se $\Pr\bigl(\varphi_0, p_{\frac{m}{n}}\bigr)$ é um ponto fixo da aplicação quociente $T_{n,m}$, então por 2.5 existe um $k \in \mathbb{Z}$ tal que:

$$\tilde{T}^j\left(\varphi_0, p_{\frac{m}{n}}\right) = \left(\varphi_0 + jk\frac{2\pi m}{n}, p_{\frac{m}{n}}\right).$$

Isto implica que $\left(\varphi_0, p_{\frac{m}{n}}\right)$ pertence a uma órbita periódica do bilhar associada a um polígono em $\Lambda_{n,km}$, mas como $p_{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m}{n}\pi$, temos pelo Corolário 2.1.2 que $k=1$, ou seja, $\left(\varphi_0, p_{\frac{m}{n}}\right)$ pertence a uma órbita periódica do bilhar associada a um polígono em $\Lambda_{n,m}$. ∎

Corolário 2.2.1 *Dada uma oval Γ n-simétrica e $1 \le m \le n-1$, existem pelo menos $2d$ pontos fixos da aplicação quociente $T_{n,m}$ contidos na reta $p_0 = p_{\frac{m}{m}} = \cos\frac{m}{n}\pi$, com $d=$mdc(m,n). Metade do número de pontos fixos corresponde ao(s) polígono(s) de perímetro máximo no conjunto $\Lambda_{n,m}$ e metade corresponde aos polígonos de perímetro mínimo também neste conjunto.*

Prova: Pelo Lema 2.2.1 cada ponto fixo $\Pr\bigl(\varphi_0, p_{\frac{m}{n}}\bigr)$ da aplicação quociente $T_{n,m}$ corresponde a uma órbita periódica da aplicação T associada a um polígono do conjunto $\Lambda_{n,m}$. Pelo Corolário 2.1.1, existem pelo menos d órbitas periódicas da aplicação T correspondendo aos polígonos de perímetro máximo em $\Lambda_{n,m}$ e d órbitas periódicas correspondendo aos polígonos de perímetro mínimo também neste conjunto (global ou local), o que conclui a prova. ∎

A dinâmica local em uma vizinhança das órbitas periódicas $\{(\varphi_0, p_{\frac{m}{n}}), (\varphi_0+\frac{2\pi m}{n},\ p_{\frac{m}{n}}), \ldots, (\varphi_0+\frac{2\pi m(n_1-1)}{n},\ p_{\frac{m}{n}})\}$ está associada a estabilidade dos pontos fixos $\Pr\bigl(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}\bigr)$ de $T_{n,m}$.

Lema 2.2.2 *Sejam Γ uma oval n-simétrica e $L(\varphi_0) = \left\|\Gamma\left(\varphi_0 + 2\pi\frac{m}{n}\right) - \Gamma(\varphi_0)\right\|$. Um ponto fixo $Pr\bigl(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}\bigr)$ de $T_{n,m}$ é hiperbólico se e somente se $L(\varphi_0) > 2R(\varphi_0)sen\bigl(\frac{\pi m}{n}\bigr)$, parabólico se e somente se $L(\varphi_0) = 2R(\varphi_0)sen\bigl(\frac{\pi m}{n}\bigr)$, e elíptico se e somente se $L(\varphi_0) < 2R(\varphi_0)sen\bigl(\frac{\pi m}{n}\bigr)$.*

Prova: Pela definição de $T_{n,m}$, a matriz de derivada de $T_{n,m}$ no ponto $\mathrm{Pr}\big(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}\big)$ coincide com a matriz de derivada da aplicação do bilhar T no ponto $\big(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}\big)$, uma vez que essas aplicações possuem o mesmo levantamento $\tilde{T}$ em $\mathbb{R}\times(-1,1)$. Logo denotando por Tr o traço, os autovalores de $DT_{n,m}\left(\mathrm{Pr}\left(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}\right)\right)$ satisfazem a seguinte equação

$$\lambda^2 - \mathrm{Tr}\left[DT\left(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}\right)\right]\lambda + \det\left[DT\left(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}\right)\right] = 0,$$

e são dados por:

$$\frac{\mathrm{Tr}\left[DT\left(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}\right)\right] \pm \sqrt{\mathrm{Tr}\left[DT\left(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}\right)\right]^2 - 4\det\left[DT\left(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}\right)\right]}}{2}.$$

Consequentemente a classificação do ponto fixo depende apenas do sinal de $\mathrm{Tr}\big[DT\left(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}\right)\big]^2 - 4\det\big[DT_{n,m}\left(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}\right)\big]$. Por 1.8, temos neste caso $\det\big[DT\left(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}\right)\big] = 1$, e $\mathrm{Tr}\big[DT\left(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}\right)\big] = \frac{2L(\varphi_0)}{R(\varphi_0)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi m}{n}\right)} - 2$, o que nos dá:

$$\mathrm{Tr}\left[DT\left(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}\right)\right]^2 - 4\det\left[DT_{n,m}\left(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}\right)\right] = 4\frac{L(\varphi_0)}{R(\varphi_0)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi m}{n}\right)}\left(\frac{L(\varphi_0)}{R(\varphi_0)\,\mathrm{sen}\left(\frac{\pi m}{n}\right)} - 2\right).$$

Segue então do fato que $\frac{L(\varphi_0)}{R(\varphi_0)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi m}{n}\right)} > 0$ o seguinte resultado:

Os autovalores λ e λ^{-1} são reais e distintos se e somente se $\frac{L(\varphi_0)}{R(\varphi_0)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi m}{n}\right)} > 2$, reais e iguais a 1 se e somente se $\frac{L(\varphi_0)}{R(\varphi_0)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi m}{n}\right)} = 2$, e complexos conjugados com norma igual a 1 e somente se $\frac{L(\varphi_0)}{R(\varphi_0)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi m}{n}\right)} < 2$, o que conclui a prova. ∎

Como consequência da prova do Lema 2.2.2 obtemos o Corolário 2.2.2.

Corolário 2.2.2 *Sejam Γ uma oval n-simétrica e m, $1 \leq m \leq n-1$. Uma órbita periódica da aplicação do bilhar $\{(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}), (\varphi_0 + \frac{2\pi m}{n},\ p_{\frac{m}{n}}), \ldots, (\varphi_0 + \frac{2\pi m(n_1-1)}{n},\ p_{\frac{m}{n}})\}$ correspondendo a polígonos em $\Lambda_{n,m}$ é hiperbólica se e somente se o ponto fixo $Pr\big(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}\big)$ da aplicação $T_{n,m}$ é hiperbólico.*

Prova: Pela regra da cadeia:

$$DT^{n_1}\left(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}\right) =$$
$$= DT\left(\varphi_0 + \frac{2\pi m\,(n_1-1)}{n},\ p_{\frac{m}{n}}\right) DT\left(\varphi_0 + \frac{2\pi m\,(n_1-2)}{n},\ p_{\frac{m}{n}}\right)\cdots DT\left(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}\right).$$

A simetria da oval implica que $DT\left(\varphi_0 + \frac{2\pi m}{n}j,\ p_{\frac{m}{n}}\right) = DT\left(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}\right)$, para $j = 0, \ldots n_1$.

Logo:
$$DT^{n_1}\left(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}\right) = \left[DT\left(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}\right)\right]^{n_1}.$$
Consequentemente os autovalores de $DT^{n_1}\left(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}\right)$ são reais e diferentes de 1 se e somente se os autovalores de $DT\left(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}\right)$ também o são. Em outras palavras, a órbita periódica $\left\{\left(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}\right), \left(\varphi_0 + \frac{2\pi m}{n},\ p_{\frac{m}{n}}\right), \ldots, \left(\varphi_0 + \frac{2\pi m(n_1-1)}{n},\ p_{\frac{m}{n}}\right)\right\}$ da aplicação do bilhar é hiperbólica se e somente se os autovalores de $DT\left(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}\right)$ são reais e diferentes de 1.

Como a matriz de derivada de $T_{n,m}$ no ponto $\Pr\left(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}\right)$ coincide com a matriz de derivada da aplicação do bilhar T no ponto $\left(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}\right)$, isso ocorre se e somente se o ponto fixo $\Pr\left(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}\right)$ de $T_{n,m}$ é hiperbólico. ■

Proposição 2.2.1 *Seja Γ uma oval n-simétrica com centro de simetria q_c. φ_0 é um ponto de máximo (respectivamente mínimo) não degenerado da função suporte $g(\varphi) = \langle \Gamma(\varphi) - q_c, -\eta(\varphi)\rangle$ da oval Γ se e somente se $Pr\left(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}\right)$ é um ponto fixo hiperbólico de $T_{n,m}$ (respectivamente elíptico).*

Prova: Pelo Lema 2.2.2 basta demonstrarmos que se φ_0 é um máximo não degenerado da função suporte então $R(\varphi_0) < L(\varphi_0)/2\text{sen}\left(\frac{\pi m}{n}\right)$. Mas se φ_0 é um máximo não degenerado então $g'(\varphi_0) = 0$, $g''(\varphi_0) < 0$, desta maneira obtemos:

$R(\varphi_0) = g(\varphi_0) + g''(\varphi_0) < g(\varphi_0) = \dfrac{2\text{sen}(m\pi/n)\left[g(\varphi_0) + g'(\varphi_0)\right]}{2\text{sen}(m\pi/n)} = \dfrac{L(\varphi_0)}{2\text{sen}(m\pi/n)}$, onde a penúltima igualdade segue da equação 2.2. Reciprocamente se $R(\varphi_0) < L(\varphi_0)/2\text{sen}\left(\frac{\pi m}{n}\right)$ substituindo a função suporte nas expressões do raio de curvatura e de $L(\varphi_0)$ obtemos:

$g(\varphi_0) + g''(\varphi_0) < \dfrac{2\text{sen}(m\pi/n)\left[g(\varphi_0) + g'(\varphi_0)\right]}{2\text{sen}(m\pi/n)} = g(\varphi_0)$ já que $g'(\varphi_0) = 0$. Consequentemente $g''(\varphi_0) < 0$ e φ_0 é um máximo não degenerado. O caso quando φ_0 é mínimo não degenerado, e $g''(\varphi_0) > 0$ é análogo. ■

Corolário 2.2.3 *Seja Γ uma oval n-simétrica com centro de simetria q_c. Se a função suporte $g(\varphi) = \langle \Gamma(\varphi) - q_c, -\eta(\varphi)\rangle$ é uma função de Morse, então para cada $1 \leq m \leq n-1$, existem pelo menos $2d$ pontos fixos da aplicação $T_{n,m}$ contidos na reta $p = p_{\frac{m}{n}} = \cos(m\pi/n)$, sendo d hiperbólicos e d elípticos, onde d $=$mdc(m,n).*

Prova: Pelo Corolário 2.1.1 existem pelo menos $2d$ trajetórias periódicas da aplicação do bilhar, com d correspondendo aos polígonos de maior perímetro e d correspondendo aos polígonos de menor perímetro em $\Lambda_{n,m}$, sendo $d =$mdc(n,m).

Pelo Lema 2.1.1 $P_{n,m}(\varphi_0)$ tem perímetro máximo ou mínimo (global ou local) se e somente se φ_0 é um ponto de máximo ou mínimo de $g(\varphi)$ (global ou local). Consequentemente a função suporte $g(\varphi)$ possui pelo menos d pontos de máximo e d pontos de mínimo. Como por hipótese $g(\varphi)$ é de Morse, então os máximos e mínimos são não degenerados. Da Proposição 2.2.1 concluímos que existem pelo menos d pontos fixos hiperbólicos e d pontos fixos elípticos.

O fato dos pontos fixos estarem na reta $p = \cos(m\pi/n)$ segue do Corolário 2.1.2. ∎

Tomemos $M = \frac{\mathbb{R}}{\frac{2\pi}{n}\mathbb{Z}}$, como M é uma variedade compacta difemorfa ao círculo S^1, o conjunto $C^k(M, \mathbb{R})$ das funções $g : M \to \mathbb{R}$ é um espaço de Banach com a norma $||g||_2 = \sup_{\varphi \in M} \{|g(\varphi)|, |g'(\varphi)|, |g''(\varphi)|\}$, para $k \geq 2$ [9].

No restante desta seção, a menos que se mencione o contrário Denotaremos por $g(\varphi)$ tanto a função $g : M \to \mathbb{R}$, quando a função no levantamento $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ satisfazendo $g\left(\varphi + \frac{2\pi}{n}\right) = g(\varphi)$.

Como dissemos na seção 1.4 a aplicação do bilhar associada a uma oval Γ é exatamente igual à aplicação do bilhar associada às ovais obtidas de Γ por translações no plano. Por essa razão trabalharemos com as ovais n-simétricas com centro de simetria no ponto $q_c = (0, 0)$.

Denotaremos por $\mathcal{N}$ o conjunto das ovais n-simétrica de classe C^2, com o centro de simetria no ponto $q_c = (0, 0)$ e parametrizada pelo ângulo φ entre o vetor tangente e o eixo x positivo.

Lema 2.2.3 *A aplicação que associa a cada oval do conjunto $\mathcal{N}$, a função suporte $g(\varphi) = \langle \Gamma(\varphi), -\eta(\varphi) \rangle$ é uma bijeção no conjunto $\mathcal{A} = \{g \in C^2(M, \mathbb{R}) \ / g(\varphi) + g''(\varphi) > 0, \ g(\varphi) > 0\}$.*

Prova: A aplicação é injetora pois dada uma oval Γ n-simétrica em $\mathcal{N}$ a função $g(\varphi) = \langle \Gamma(\varphi), -\eta(\varphi) \rangle$ é positiva e satisfaz $R(\varphi) = g(\varphi) + g''(\varphi) > 0$. Portanto duas ovais possuem a mesma imagem se e somente se possuem o mesmo raio de curvatura. A condição de todas possuirem o mesmo centro de simetria $q_c = (0, 0)$, e $\Gamma'(0) = R(0)(1, 0)$ nos dá uma única oval.

Reciprocamente dada $g \in \mathcal{A}$, tomemos $R(\varphi) = g(\varphi) + g''(\varphi)$. Pelo Lema 1.3.1, como $R\left(\varphi + \frac{2\pi}{n}\right) = R(\varphi)$ e $R(\varphi) > 0$ então $R(\varphi)$ é o raio de curvatura de uma oval Γ n-simétrica dada por:

$$
\begin{aligned}
x(\varphi) &= g(\varphi)\,\mathrm{sen}(\varphi) + g'(\varphi)\cos(\varphi) \\
y(\varphi) &= -g(\varphi)\cos(\varphi) + g'(\varphi)\,\mathrm{sen}(\varphi)
\end{aligned}
\tag{2.6}
$$

e satisfazendo $g(\varphi) = \langle \Gamma(\varphi), -\eta(\varphi) \rangle$. A condição $g(\varphi) > 0$ implica que o ponto $(0, 0)$ pertence à região do plano limitada pela oval e de 2.6 temos que $\Gamma\left(\varphi + \frac{2\pi}{n}\right) = \mathrm{Rot}_{\frac{2\pi}{n}}[\Gamma(\varphi)]$, o que implica que o ponto $q = (0, 0)$ é o centro de simetria de Γ. Tomando $\Gamma'(0) = R(0)(1, 0)$, obtemos que φ é o ângulo entre o vetor tangente e o eixo x. Obtemos desta maneira que Γ pertence ao conjunto $\mathcal{N}$ e portanto a aplicação que associa a cada oval no conjunto $\mathcal{N}$ sua função suporte é sobrejetora em $\mathcal{A}$, o que conclui a prova. ■

Lema 2.2.4 *O conjunto* $\mathcal{A} = \{g \in C^2(M, \mathbb{R}) \ / g(\varphi) + g''(\varphi) > 0,\ g(\varphi) > 0\}$ *é aberto em* $C^2(M, \mathbb{R})$ *com a topologia* $(C^2(M, \mathbb{R}), || \ ||_2)$.

Prova: Se $g \in \mathcal{A}$, então $g(\varphi) + g''(\varphi) > 0$ e $g(\varphi) > 0$ para todo $\varphi \in M$. Como M é compacta e a função $g(\varphi) + g''(\varphi)$ é contínua, existe um $\varepsilon > 0$ tal que $g(\varphi) + g''(\varphi) > \varepsilon > 0$ e $g(\varphi) > \varepsilon$ para todo $\varphi \in M$ o que implica que se $||\tilde{g} - g||_2 < \frac{\varepsilon}{2}$ então $\tilde{g}(\varphi) + \tilde{g}''(\varphi) > 0$ e $\tilde{g}(\varphi) > 0$ para todo $\varphi \in M$. Portanto $\tilde{g}(\varphi) \in \mathcal{A}$, o que mostra que $\mathcal{A}$ é aberto. ■

Lema 2.2.5 *As funções de Morse formam um conjunto aberto e denso em*

$\mathcal{A} = \{g \in C^2(M, \mathbb{R}) \ / g(\varphi) + g''(\varphi) > 0,\ g(\varphi) > 0\}$ *com a topologia induzida por*

$(C^2(M, \mathbb{R}), || \ ||_2)$.

Prova: As funções de Morse formam um subconjunto aberto e denso em $C^2(M, \mathbb{R})$ com a topologia gerada pela norma $||g||_2$ [9]. Como $\mathcal{A}$ é aberto pela lema 2.2.4, a interseção do subconjunto das funções de Morse com o conjunto $\mathcal{A}$ é um subconjunto aberto em $C^2(M, \mathbb{R})$, e que é aberto e denso em $\mathcal{A}$. ■

Como temos uma bijeção entre o conjunto $\mathcal{N}$ e o conjunto $\mathcal{A}$ tomaremos em $\mathcal{N}$ a topologia induzida por $\mathcal{A}$, obtendo desta maneira um homeomorfismo entre estes dois conjuntos.

Nesta topologia o conjunto $\mathcal{N}$ é um espaço métrico com a norma $||\Gamma||_2 = ||g||_2$, onde g é a função em $\mathcal{A}$ correspondendo a oval Γ em $\mathcal{N}$.

A próxima Proposição segue dos Lema 2.2.5 e do Corolário 2.2.3.

Proposição 2.2.2 *O subconjunto das ovais no conjunto* $\mathcal{N}$ *tal que para todo* $1 \leq m \leq n-1$, *existem pelo menos* $2d$ *pontos fixos das aplicações* $T_{n,m}$ *contidos na reta* $p = \cos(m\pi/n)$, *sendo* d *hiperbólicos e* d *elípticos é aberto e denso em* $\mathcal{N}$ *com a topologia induzida por* $\mathcal{A} = \{g \in C^2(M, \mathbb{R}) \ / g(\varphi) + g''(\varphi) > 0,\ g(\varphi) > 0\}$.

Segue diretamente do Corolário 2.2.2 e da Proposição 2.2.2 o Corolário.

Corolário 2.2.4 *O subconjunto das ovais no conjunto* $\mathcal{N}$ *tal que para todo* $1 \leq m \leq n-1$ *existem pelo menos* $d =$*mdc*(n, m) *órbitas periódicas hiperbólicas* $\{(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}),\ (\varphi_0 + \frac{2\pi m}{n},\ p_{\frac{m}{n}}),\ \ldots,\ (\varphi_0 + \frac{2\pi m(n_1-1)}{n},\ p_{\frac{m}{n}})\}$ *da aplicação do bilhar* T *é aberto e denso em* $\mathcal{N}$ *com a topologia induzida por* $\mathcal{A} = \{g \in C^2(M, \mathbb{R}) \ / g(\varphi) + g''(\varphi) > 0,\ g(\varphi) > 0\}$.

2.3 Ressonância

Nesta seção mostraremos que o subconjunto da ovais em $\mathcal{N}$ cuja a aplicação $T_{n,m}$ possui pelo menos $d=$mdc(n,m) pontos fixos elípticos não ressonantes é um subconjunto aberto e denso em $\mathcal{N}$.

Pelo Lema 2.2.1 um ponto $\left(\varphi_0, p_{\frac{m}{n}}\right)$ pertence a uma órbita periódica do bilhar, associada a um polígono de $\Lambda_{n,m}$ se e somente se $\Pr\left(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}\right)$ é um ponto fixo de $T_{n,m}$. Pela simetria da oval, as derivadas de todas as ordens coincidem em todos os $d=$mdc(m,n) pontos fixos $\Pr\left(\varphi_0, p_{\frac{m}{n}}\right)$, $\Pr\left(\varphi_0+\frac{2\pi}{n}, p_{\frac{m}{n}}\right)$,...,$\Pr\left(\varphi_0+\frac{2\pi}{n}\left(d-1\right), p_{\frac{m}{n}}\right)$ da aplicação $T_{n,m}$.

Definição 2.3.1 *Um ponto fixo elíptico* $Pr\left(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}\right)$ *de* $T_{n,m}$ *é ressonante de ordem* 4 *se os autovalores* $\lambda=e^{\pm i\zeta}$ *da derivada de* $T_{n,m}$ *no ponto* $Pr\left(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}\right)$ *satisfazem* $\left(e^{\pm i\zeta}\right)^j=1$, *para algum* $j=1,2,3,4$*; isto é, se* ζ *assume algum dos valores* $\frac{\pi}{2}$, $\frac{2\pi}{3}$, $\frac{4\pi}{3}$, *ou,*$\frac{3\pi}{2}$. *Caso contrário o ponto fixo é não ressonante.*

Lema 2.3.1 *Seja* Γ *uma oval* n*-simétrica. Um ponto fixo elíptico* $Pr\left(\varphi_0, p_{\frac{m}{n}}\right)$ *de* $T_{n,m}$ *é não ressonante, se e somente se* $3g\left(\varphi_0\right)-g''\left(\varphi_0\right)\neq 0$ *e* $g\left(\varphi_0\right)-g''\left(\varphi_0\right)\neq 0$.

Prova: Denotemos por $\lambda = e^{\pm i\zeta}$ os autovalores de $T_{n,m}\Pr\left(\varphi_0, p_{\frac{m}{n}}\right)$. Pelo Lema 2.2.2 os autovalores são dados por

$$\frac{\mathrm{Tr}\left[DT\left(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}\right)\right]\pm\sqrt{\mathrm{Tr}\left[DT\left(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}\right)\right]^2-4\det\left[DT_{n,m}\left(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}\right)\right]}}{2}$$

o que implica que $\cos\zeta=\frac{Tr\left[DT\left(\varphi_0,\ p_{\frac{m}{n}}\right)\right]}{2}$. Substituindo em 1.8 obtemos:

$$\cos\zeta=\frac{L\left(\varphi_0\right)}{R\left(\varphi_0\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi m}{n}\right)}-1.$$

Notemos que $\lambda^j\neq 1$ se e somente se $\cos(j\zeta)\neq 1$. Logo λ é não ressonante se e somente se $\cos(j\zeta)\neq 1$ para $j=1,2,3$ e 4, que equivale a $\cos\zeta\neq\pm 1,0,-1/2$. Deste modo λ é não ressonante se e somente se

$$2L\left(\varphi_0\right)\neq R\left(\varphi_0\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi m}{n}\right)\text{ ou }L\left(\varphi_0\right)\neq R\left(\varphi_0\right)\mathrm{sen}\left(\frac{\pi m}{n}\right),$$

desde que as outras condições $L\left(\varphi_0\right)\neq 0$ e $L\left(\varphi_0\right)\neq 2R\left(\varphi_0\right)sen\left(\frac{\pi m}{n}\right)$ são automaticamente satisfeitas.

Pelos Lema 2.1.1 e equação 2.2, $L(\varphi_0) = 2\mathrm{sen}\,(m\pi/n)\, g(\varphi_0)$. Utilizando a relação $R(\varphi_0) = g(\varphi_0) + g''(\varphi_0)$ podemos reescrever a condição de não ressonância como

$$3g(\varphi_0) - g''(\varphi_0) \neq 0 \text{ e } g(\varphi_0) - g''(\varphi_0) \neq 0.$$

$\blacksquare$

Lema 2.3.2 *O subconjunto das ovais em $\mathcal{N}$ tal que para todo $1 \leq m \leq n-1$ as aplicações $T_{n,m}$ possuem pelo menos d =mdc(m,n) pontos fixos elípticos não ressonantes contidos nas reta $p = p_{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m}{n}\pi$ é denso em $\mathcal{N}$ com a topologia induzida por $\mathcal{A} = \{g \in C^2(M,\mathbb{R}) \ / g(\varphi) + g''(\varphi) > 0,\ g(\varphi) > 0\}$.*

Prova: Afim de demonstrarmos a densidade desde subconjunto em $\mathcal{N}$ tomemos uma função $g \in \mathcal{A} = \left\{g \in C^k(M,\mathbb{R}) \text{ com } k \geq 2 \text{ tal que } g(\varphi) + g''(\varphi) > 0,\ g(\varphi) > 0\right\}$. Pelo Lema 2.2.5 as funções de Morse formam um subconjunto aberto e denso em $\mathcal{A}$. Deste modo para todo $\delta > 0$ dado podemos tomar uma função de Morse $\tilde{g}(\varphi) \in \mathcal{A}$, tal que $||\tilde{g} - g||_2 < \delta/2$.

Como $\tilde{g}(\varphi)$ é de Morse então todos os seus pontos críticos são não degenerados. Em particular, como os pontos de mínimo são não degenerados, existem um número finito destes pontos, que denotamos $\varphi_0, \ldots, \varphi_k$.

Sejam $\lambda_0, \ldots, \lambda_k$ funções em $M = \frac{\mathbb{R}}{\frac{2\pi}{n}\mathbb{Z}}$ de classe C^∞ tal que $\lambda_j \equiv 1$ em uma vizinhança de φ_j contida na bola de raio igual a $\min\limits_{j,i=0,\ldots k} \frac{\{|\varphi_j - \varphi_i|\}}{2}$ com centro em φ_j, e zero fora desta bola. Podemos supor ainda que $0 \leq \lambda_j \leq 1$ e que os únicos máximos e mínimos de λ_j, são 0 e 1 localizados fora e dentro da respectiva vizinhança. Essas funções são bem conhecidas, sendo fundamentais em resultados que utilizam o processo de construção da partição da unidade.

Tomemos $g_\varepsilon(\varphi) = \tilde{g}(\varphi) + \frac{\varepsilon\lambda_0}{n^2}\cos(n(\varphi - \varphi_0)) + \ldots + \frac{\varepsilon\lambda_k}{n^2}\cos(n(\varphi - \varphi_k))$. Os pontos $\varphi_0, \ldots, \varphi_k$ também são pontos de mínimo local da função g_ε pois $g'_\varepsilon(\varphi_j) = 0$ e $g''_\varepsilon(\varphi_j) > 0$. Dado $\delta > 0$ podemos escolher $\varepsilon > 0$ tal que $||g_\varepsilon - \tilde{g}||_2 < \delta/2$, $3g_\varepsilon(\varphi_j) - g''_\varepsilon(\varphi_j) \neq 0$ e $g_\varepsilon(\varphi_j) - g''_\varepsilon(\varphi_j) \neq 0$, $j = 0, \ldots, k$. Ainda para $\varepsilon > 0$ suficientemente pequeno $g_\varepsilon \in \mathcal{A}$.

Consequentemente obtemos que dado $\delta > 0$ existe $g_\varepsilon \in \mathcal{A}$ tal que $||g_\varepsilon - g||_2 < \delta$, os pontos de mínimo de g_ε, $\varphi_0, \ldots, \varphi_k$ são não degenerados, e ainda neste pontos $3g_\varepsilon(\varphi_j) - g''_\varepsilon(\varphi_j) \neq 0$ e $g_\varepsilon(\varphi_j) - g''_\varepsilon(\varphi_j) \neq 0$.

Denotemos por Γ_ε a oval no conjunto $\mathcal{N}$ associada à função suporte g_ε do conjunto $\mathcal{A}$. Como os pontos de mínimo de g_ε são não degenerados, temos pela Proposição 2.2.1 e pelo Corolário 2.2.3 que a aplicação $T_{n,m}$ associada à oval Γ_ε possui pelo menos d =mdc(n,m) pontos fixos elípticos contidos na reta $p = p_{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m}{n}\pi$. Pelo Lema 2.3.1 todos os pontos fixos elípticos são não ressonantes. Tomando Γ a oval em $\mathcal{N}$ associada a $g \in \mathcal{A}$ obtemos $||\Gamma_\varepsilon - \Gamma||_2 = ||g_\varepsilon - g||_2 < \delta$, o que conclui a prova. $\blacksquare$

Lema 2.3.3 *O subconjunto das ovais em $\mathcal{N}$ tal que para todo $1 \leq m \leq n-1$, as aplicações $T_{n,m}$ possuem pelo menos d =mdc(m,n) pontos fixos elípticos não ressonantes, contidos nas reta $p = p_{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m}{n}\pi$, é aberto em $\mathcal{N}$ com a topologia induzida por $\mathcal{A} = \{g \in C^2(M,\mathbb{R})\ /g(\varphi) + g''(\varphi) > 0,\ g(\varphi) > 0\}$.*

Prova: Sejam $\Gamma \in \mathcal{N}$ uma oval tal que todos os pontos fixos elípticos da aplicação $T_{n,m}$, contidos na reta $p = p_{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m}{n}\pi$ são não ressonantes e $g \in \mathcal{A}$ a função suporte desta oval Γ. Pela Proposição 2.2.1 todos os pontos de mínimo φ_j de g, correspondendo aos pontos fixos elípticos não ressonantes $\Pr\left(\varphi_j, p_{\frac{m}{n}}\right)$ são não degenerados, e pelo Lema 2.3.1 $3g(\varphi_j) - g''(\varphi_j) \neq 0$ e $g(\varphi_j) - g''(\varphi_j) \neq 0$ com $j = 0, \ldots, k$, e $k \geq d$ =mdc(m,n)

Se $\varepsilon > 0$ for suficientemente pequeno, como os pontos φ_j de g são não degenerados, então toda função $\tilde{g} \in C^k(M,\mathbb{R})$ com $||\tilde{g} - g||_2 < \varepsilon$, possui pelo menos k pontos de mínimo de g não denegerados, satisfazendo as desigualdades $3\tilde{g}(\tilde{\varphi}_j) - \tilde{g}''(\tilde{\varphi}_j) \neq 0$ e $\tilde{g}(\tilde{\varphi}_j) - \tilde{g}''(\tilde{\varphi}_j) \neq 0$.

Denotando por $\tilde{\Gamma}$ a oval em $\mathcal{N}$ associada $\tilde{g}$, teremos novamente pela proposição 2.2.1, e o Corolário 2.2.3, que a aplicação $T_{n,m}$ associada à oval $\tilde{\Gamma}$ possui pelo menos d =mdc(n,m) pontos fixos elípticos contidos na reta $p = p_{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m}{n}\pi$. Por fim pelo Lema 2.3.1 todos os pontos fixos elípticos são não ressonantes. ∎

Corolário 2.3.1 *O subconjunto das ovais em $\mathcal{N}$ tal que para todo $1 \leq m \leq n-1$, as aplicações $T_{n,m}$ possuem pelo menos d =mdc(m,n) pontos fixos elípticos não ressonantes contidos na reta $p = p_{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m}{n}\pi$ é aberto e denso em $\mathcal{N}$ com a topologia induzida por $\mathcal{A} = \{g \in C^2(M,\mathbb{R})\ /g(\varphi) + g''(\varphi) > 0,\ g(\varphi) > 0\}$.*

2.4 Primeiro Coeficiente de Birkhoff

Tomemos Γ uma oval n-simétrica, C^k, $k \geq 5$. Então a aplicação do bilhar e a aplicação $T_{n,m}$ são pelo menos C^4. Afim de estudarmos a estabilidade dos pontos fixos elípticos de $T_{n,m}$ é necessário tomarmos a aplicação $T_{n,m}$ nas coordenadas (s,p), uma vez que nestas coordenadas a aplicação preserva a medida de Lesbegue $ds \wedge dp$. O ponto fixo elíptico nestas coordenadas será $\Pr\left(s_0, p_{\frac{m}{n}}\right)$, onde $s_0 = s(\varphi_0)$. Tomemos também sem perda de generalidade uma translação que leve o ponto $\Pr\left(s_0, p_{\frac{m}{n}}\right)$ no ponto $\Pr(0,0)$. Denotaremos também por $T_{n,m}$ a aplicação conjugada a essa translação e por $\overbrace{(s,p)} = (\hat{s},\hat{p})$ o ponto $\Pr(s,p)$ em $\frac{\mathbb{R}}{2\pi\frac{m}{n}\mathbb{Z}} \times (-1,1)$. A expansão da aplicação $T_{n,m}$ na vizinhança do ponto fixo $\Pr(0,0)$ até os termos de ordem 3é denotada por:

$$T_{n,m}\Pr(s,p) = T_{n,m}(\hat{s},\hat{p})$$

$$= \left(a_{10}\hat{s} + a_{01}\hat{p} + a_{20}\hat{s}^2 + \ldots + a_{03}\hat{p}^3, b_{10}\hat{s} + b_{01}\hat{p} + b_{20}\hat{s}^2 + \ldots + b_{03}\hat{p}^3\right) + O\left(|(\hat{s},\hat{p})|^4\right).$$

Como a aplicação do bilhar T e a aplicação quociente $T_{n,m}$ possuem o mesmo levantamento $\tilde{T}$ em $\mathbb{R}\times(-1,1)$, denotando este levantamento também por T, teremos que nas coordenadas globais (s,p) de $\mathbb{R}\times(-1,1)$ os coeficientes a_{ij} e b_{ij} são tais que:

$$T(s,p) =$$
$$= \left(lm/n + a_{10}s + a_{01}p + a_{20}s^2 + \ldots + a_{03}p^3, b_{10}s + b_{01}p + b_{20}s^2 + \ldots + b_{03}p^3\right) + O\left(|(s,p)|^4\right).$$

Como o ponto fixo é elíptico os autovalores são da forma $\lambda = \cos\zeta \pm i\mathrm{sen}\zeta$, fazendo uma mudança linear de coordenadas complexas que preserva área e diagonaliza a parte linear, podemos reescrever a aplicação como $T_{n,m}$ em uma vizinhança do ponto fixo como:

$$z \to \lambda\left(z + c_{20}z^2 + c_{11}z\bar{z} + c_{02}\bar{z}^2 + c_{30}z^3 + c_{21}z^2\bar{z} + c_{12}z\bar{z}^2 + c_{03}\bar{z}^3\right) + O\left(|z|^4\right) \qquad (2.7)$$

Como vimos na seção 1.5, se $\lambda^j \neq 1$ para $j = 1, 2, 3$ e 4, Pela Teorema da Forma Normal de Birkhoff existe uma mudança de coordenadas C^∞ que transforma a aplicação em:

$$z \to e^{i\left(\zeta + \tau_1|z|^2\right)}z + O\left(|z|^4\right).$$

Pelo Teorema do Twist de Moser, também visto nesta seção, se o Primeiro Coeficiente de Birkhoff τ_1 for não nulo existe uma infinidade de curvas invariantes por $T_{n,m}$, rodeando o ponto $\mathrm{Pr}\left(s_{0,}p_{\frac{m}{n}}\right)$, o que por sua vez implica que existem ilhas elípticas de medida positiva contendo o ponto fixo $\left(s_0, p_{\frac{m}{n}}\right)$ e logo o ponto fixo é estável.

O primeiro coeficiente de Birkhoff τ_1 ([13] e [17]) é dado por :

$$\tau_1 = \mathrm{Im}\,(c_{21}) + \frac{\mathrm{sen}\zeta}{\cos\zeta - 1}\left(3\,|c_{20}|^2 + \frac{2\cos\zeta - 1}{2\cos\zeta + 1}\,|c_{02}|^2\right) \qquad (2.8)$$

No cálculo de τ_1 utiliza se fortemente que a aplicação nestas coordenadas preserva a medida de Lesbegue.

Utilizando o software Maple[1] calculamos os coeficientes do jato de ordem 3 de $T_{n,m}$ em $\left(s_0, p_{\frac{m}{n}}\right)$ e obtivemos os coeficientes c_{ij} da equação 2.7. Substituindo em 2.8 obtivemos:

[1]Ver apêndice

$$
\begin{aligned}
\tau_1 \;=\; & -\frac{1}{8R\left(s_0\right)\operatorname{sen}^3\left(\pi m/n\right)}+\frac{3\cos^2\left(\pi m/n\right)}{8\operatorname{sen}^2\left(\pi m/n\right)\left(2L\left(s_0\right)-R\left(s_0\right)\operatorname{sen}\left(\pi m/n\right)\right)} \qquad (2.9)\\
& -\frac{L\left(s_0\right)\left(7L\left(s_0\right)-4R\left(s_0\right)\operatorname{sen}\left(\pi m/n\right)\right)}{8\left(L\left(s_0\right)-2R\left(s_0\right)\operatorname{sen}\left(\pi m/n\right)\right)^2\left(2L\left(s_0\right)-R\left(s_0\right)\operatorname{sen}\left(\pi m/n\right)\right)}\left(R'\left(s_0\right)\right)^2\\
& -\frac{L\left(s_0\right)}{8\operatorname{sen}\left(\pi m/n\right)\left(L\left(s_0\right)-2R\left(s_0\right)\operatorname{sen}\left(\pi m/n\right)\right)}R''\left(s_0\right).
\end{aligned}
$$

Onde $R\left(s_0\right)$ é o raio de curvatura da oval Γ no ponto s_0, e $L\left(s_0\right)=\left|\left|\Gamma\left(s_0\right)-\Gamma\left(s_0+l\frac{m}{n}\right)\right|\right|$.

As derivadas de todas as ordens da aplicação $T_{n,m}\left(s,p\right)$ coincidirão nos pontos fixos $\Pr\left(s_0,p_{\frac{m}{n}}\right)$, $\Pr\left(s_0+\frac{l}{n},p_{\frac{m}{n}}\right),\ldots,\quad \Pr\left(s_0+\left(d-1\right)\frac{l}{n},p_{\frac{m}{n}}\right)$. Como consequência teremos que estes pontos fixos elípticos possuem exatamente o mesmo coeficiente de Birkhoff.

Nosso objetivo no restante desta seção é mostrarmos que o subconjunto das ovais n-simétrica no conjunto $\mathcal{N}$ tal que a aplicação quociente $T_{n,m}$ possui d pontos fixos elípticos $\Pr\left(s_0,p_{\frac{m}{n}}\right)$, $\Pr\left(s_0+l\frac{m}{n},p_{\frac{m}{n}}\right)$, $\ldots$, $\Pr\left(s_0+\left(d-1\right)l\frac{m}{n},p_{\frac{m}{n}}\right)$ não ressonantes e satisfazendo $\tau_1\neq 0$, é um subconjunto denso em $\mathcal{N}$.

Proposição 2.4.1 *Seja Γ uma oval n-simétrica em $\mathcal{N}$ de classe C^k, $k\geq 5$, tal que existe m, $1\leq m\leq n-1$ cujo o primeiro coeficiente de Birkhoff τ_1 de d =mdc(n,m) pontos fixos elípticos não ressonantes $Pr\left(s_0,p_{\frac{m}{n}}\right)$, $Pr\left(s_0+\frac{l}{n},p_{\frac{m}{n}}\right),\ldots,$ $Pr\left(s_0+\left(d-1\right)\frac{l}{n},p_{\frac{m}{n}}\right)$ da aplicação quociente $T_{n,m}$ seja nulo. Então existe uma oval n-simétrica em $\mathcal{N}$ de classe C^k, suficientemente próxima de Γ, tal que a aplicação quociente $T_{n,m}$ associada possui d pontos fixos elípticos não ressonantes contidos na reta $p=p_{\frac{m}{n}}=\cos\frac{m}{n}\pi$, com o primeiro coeficiente de Birkhoff τ_1 não nulo.*

Prova: Seja $g\left(\varphi\right)=\left\langle\Gamma\left(\varphi\right),\eta\left(\varphi\right)\right\rangle$ a função suporte de $\Gamma\left(\varphi\right)$, onde $\varphi=\varphi\left(s\right)$ é o ângulo entre a tangente unitária $\tau\left(s\right)$ e o eixo x positivo. A função g tem a mesma classe de diferenciabilidade de Γ, isto é, g é C^k, com $k\geq 5$.

Dado $\delta>0$ tomemos $g_\delta\in C^2\left(M,\mathbb{R}\right)$ de classe C^k com $k\geq 5$ tal que $\left|\left|g_\delta-g\right|\right|_2<\delta$, com contato de terceira ordem com g em $\varphi_0=\varphi\left(s_0\right)$, isto é, $g_\delta\left(\varphi_0\right)=g\left(\varphi_0\right)$, $g_\delta'\left(\varphi_0\right)=g'\left(\varphi_0\right)=0$, $g_\delta''\left(\varphi_0\right)=g''\left(\varphi_0\right)>0$, e $g_\delta'''\left(\varphi_0\right)=g'''\left(\varphi_0\right)$.

Para $\delta>0$ suficientemente pequeno g_δ também satisfaz às condições $g_\delta\left(\varphi\right)+g_\delta''\left(\varphi\right)>0$, $g_\delta\left(\varphi\right)>0$ e portanto pertence ao conjunto $\mathcal{A}$.

Seja Γ_δ a oval em $\mathcal{N}$ correspondendo à função suporte g_δ. Como φ_0 é um ponto crítico não degenerado de g satisfazendo $3g\left(\varphi_0\right)-g''\left(\varphi_0\right)\neq 0$, $g\left(\varphi_0\right)-g''\left(\varphi_0\right)\neq 0$ e g_δ tem contato de ordem 3 com g em φ_0 então φ_0 também é um ponto crítico não degenerado de g_δ satisfazendo

$3g_\delta(\varphi_0) - g''_\delta(\varphi_0) \neq 0$. Pela Proposição 2.2.1 e o Lema 2.3.1, $\Pr\big(\varphi_0, p_{\frac{m}{n}}\big)$ é um ponto fixo elíptico não ressontante da aplicação induzida $T_{n,m}$ associada a Γ_δ. Como $g\left(\varphi + \frac{2\pi}{n}\right) = g(\varphi)$ obtemos d pontos fixos $\Pr\big(\varphi_0, p_{\frac{m}{n}}\big)$, $\Pr\big(\varphi_0 + \frac{2\pi}{n}, p_{\frac{m}{n}}\big)$, ..., $\Pr\big(\varphi_0 + \frac{2\pi}{n}(d-1), p_{\frac{m}{n}}\big)$ não ressonantes, com $d =$mdc(n,m).

Denotemos por σ o comprimento de arco da oval Γ_δ e por $\sigma_0 = \sigma(\varphi_0)$.

Denotemos ainda por R_δ o raio de curvatura de Γ_δ, l_δ o perímetro de Γ_δ e $L_\delta(\sigma_0) = \big|\big|\Gamma(\sigma_0) - \Gamma\left(\sigma_0 + l_\delta \frac{m}{n}\right)\big|\big|$.

Como consequência do contato de ordem 3 em φ_0 entre g e g_δ obtemos:

$$\begin{aligned} R_\delta(\varphi_0) &= g_\delta(\varphi_0) + g''_\delta(\varphi_0) = g(\varphi_0) + g''(\varphi_0) = R(\varphi_0) \\ \frac{dR_\delta}{d\varphi}(\varphi_0) &= g'_\delta(\varphi_0) + g'''_\delta(\varphi_0) = g'(\varphi_0) + g'''(\varphi_0) = \frac{dR}{d\varphi}(\varphi_0) \end{aligned}$$

Pela Equação 2.2:

$$L_\delta(\sigma_0) = L_\delta(\sigma(\varphi_0)) = L_\delta(\varphi_0) = \operatorname{sen}(m\pi/n)(g_\delta(\varphi_0)) = \operatorname{sen}(m\pi/n)(g(\varphi_0)) = L(\varphi_0) = L(s_0),$$

Ainda nos parâmetros comprimento de arco σ e s:

$$R(s_0) = R(s_0(\varphi_0)) = R(\varphi_0) = R_\delta(\varphi_0) = R_\delta(\sigma(\varphi_0)) = R_\delta(\sigma_0),$$

$$\frac{dR}{ds}(s_0) = \frac{dR}{d\varphi}(\varphi_0)\frac{d\varphi}{ds}(s_0) = \frac{dR}{d\varphi}(\varphi_0)\frac{1}{R(s_0)} = \frac{1}{R_\delta(\sigma_0)}\frac{dR_\delta}{d\varphi}(\varphi_0) = \frac{dR_\delta}{d\varphi}(\varphi_0)\frac{d\varphi}{d\sigma}(\sigma_0) = \frac{dR_\delta}{ds}(\sigma_0).$$

Deste modo denotando por $\tau_1(\Gamma)$ o primeiro coeficiente dos pontos fixos elípticos não ressonantes $\big(s_0, p_{\frac{m}{n}}\big), \big(s_0 + l\frac{m}{n}, p_{\frac{m}{n}}\big), \ldots, \big(s_0 + (d-1)\,l\frac{m}{n}, p_{\frac{m}{n}}\big)$ da aplicação quociente associada a Γ e por $\tau_1(\Gamma_\delta)$ o primeiro coeficiente dos pontos fixos elípticos não ressonantes $(\sigma_0, p_{\frac{m}{n}}), (\sigma_0 + l\frac{m}{n}, p_{\frac{m}{n}})$ $, \ldots, \big(\sigma_1 + (d-1)\,l_\delta\frac{m}{n}, p_{\frac{m}{n}}\big)$ da aplicação quociente associada a Γ_δ obtemos por 2.9:

$$\tau_1(\Gamma_\delta) - \tau_1(\Gamma) = -\frac{L(s_0)}{8\operatorname{sen}(\pi m/n)(L(s_0) - 2R(s_0)\operatorname{sen}(\pi m/n))}\left(R''_\delta(\sigma_0) - R''(s_0)\right).$$

Como $-\frac{L(s_0)}{8\operatorname{sen}(\pi m/n)(L(s_0)-2R(s_0)\operatorname{sen}(\pi m/n))} \neq 0$, escolhendo g_δ inicial tal que $g''''_\delta(\varphi_0) \neq g''''(\varphi_0)$, obteremos:

$$\frac{d^2R_\delta}{d\varphi^2}(\varphi_0) = g''_\delta(\varphi_0) + g''''_\delta(\varphi_0) \neq g''(\varphi_0) + g'''(\varphi_0) = \frac{dR}{d\varphi}(\varphi_0).$$

O que nos dará:

$$R''_\delta(\sigma_0) - R''(s_0) =$$

$$= \tfrac{d^2R_\delta}{d\varphi^2}(\varphi_0)\left(\tfrac{d\varphi}{d\sigma}(\sigma_0)\right)^2 + \tfrac{dR_\delta}{d\varphi}(\varphi_0)\tfrac{d^2\varphi}{d\sigma^2}(\sigma_0) - \tfrac{d^2R_\delta}{ds^2}(\varphi_0)\left(\tfrac{d\varphi}{ds}(s_0)\right)^2 - \tfrac{dR_\delta}{d\varphi}(\varphi_0)\tfrac{d^2\varphi}{ds^2}(s_0).$$

Como $\frac{d\varphi}{d\sigma}(\sigma_0) = \frac{1}{R_\delta(\sigma_0)} = \frac{1}{R_\delta(s_0)} = \frac{d\varphi}{ds}(s_0)$,

e $\frac{d^2\varphi}{d\sigma^2}(\sigma_0) = \left(\frac{1}{R_\delta(\sigma_0)}\right)^2 R'_\delta(\varphi_0)\frac{d\varphi}{d\sigma}(\sigma_1) = \left(\frac{1}{R_\delta(s_0)}\right)^2 R'(\varphi_0)\frac{d\varphi}{ds}(s_0) = \frac{d^2\varphi}{ds^2}(s_0)$, teremos:

$$R''_\delta(\sigma_0) - R''(s_0) = \left(\frac{d^2R_\delta}{d\varphi^2}(\varphi_0)\left(\frac{d\varphi}{ds}(s_0)\right)^2 + \frac{dR_\delta}{d\varphi}(\varphi_0)\frac{d^2\varphi}{ds^2}(s_0)\right)\left(\frac{d^2R_\delta}{d\varphi^2}(\varphi_0) - \frac{d^2R}{d\varphi^2}(\varphi_0)\right) \neq 0.$$

Como por hipótese $\tau_1(\Gamma) = 0$, então $\tau_1(\Gamma_\delta) \neq 0$, o que conclui a prova da proposição. ■

Teorema 2.4.1 *Seja Γ uma oval n-simétrica em $\mathcal{N}$ de classe C^k, $k \geq 5$, tal que existe m, $1 \leq m \leq n-1$, cujo o primeiro coeficiente de Birkhoff τ_1 de um ponto fixo elíptico não ressonante $\left(s_0, p_{\frac{m}{n}}\right)$, da aplicação quociente $T_{n,m}$, seja não nulo. Então para cada ponto $\left(s_0 + jl\frac{m}{n}, p_{\frac{m}{n}}\right)$ da órbita periódica $\left\{\left(s_0, p_{\frac{m}{n}}\right), \left(s_0 + l\frac{m}{n}, p_{\frac{m}{n}}\right), \ldots, \left(s_0 + (n_1-1)\, l\frac{m}{n}, p_{\frac{m}{n}}\right)\right\}$ da aplicação do bilhar T, existem uma infinidade de curvas invariantes por T^{n_1} rodeando o ponto $\left(s_0 + jl\frac{m}{n}, p_{\frac{m}{n}}\right)$, onde $j = 1, \ldots, n_1 - 1$ e $n_1 = n/mdc(n,m)$. Isto por sua vez implica que existem ilhas elípticas de medida positiva contendo cada um destes pontos.*

Prova: Por hipótese como $\tau_1 \neq 0$ existem uma infinidades de curvas invariantes pela aplicação $T_{n,m}$ rodeando o ponto fixo $\mathrm{Pr}\left(s_0, p_{\frac{m}{n}}\right)$. Denotemos então por γ uma destas curvas invariantes. O levantamento da aplicação do bilhar satisfaz $\tilde{T}\left(s + l\frac{m}{n}, p\right) = \tilde{T}(s,p) + \left(l\frac{m}{n}, 0\right)$, e $\mathrm{Pr}\circ\tilde{T}(s,p) = T_{n,m}\circ\mathrm{Pr}(s,p)$, onde $\mathrm{Pr} : \mathbb{R}\times(-1,1) \to \frac{\mathbb{R}}{l\frac{m}{n}\mathbb{Z}}/\times(-1,1)$ é a projeção natural. Tomando $\mathrm{Pr}^{-1}(\gamma)$, obteremos curvas $\tilde{\gamma}_j$ em $\mathbb{R}\times(-1,1)$, tal que a região limitada por $\tilde{\gamma}_j$ contém o ponto $\left(s_0 + jl\frac{m}{n}, p_{\frac{m}{n}}\right)$, e $\tilde{\gamma}_j(t) = \left(s(t) + jl\frac{m}{n}, p(t)\right)$ com $\tilde{\gamma}_1(t) = (s(t), p(t))$, e $j \in \mathbb{Z}$.

Tomando a aplicação do bilhar T em $\frac{\mathbb{R}}{l\mathbb{Z}}\times(-1,1)$, teremos uma órbita periódica de periódo n_1 formada pelos pontos $\left(s_0 + jl\frac{m}{n}, p_{\frac{m}{n}}\right)$, com $j \in \mathbb{Z}_{n_1}$. Tomando γ_j as curvas em $\frac{\mathbb{R}}{l\mathbb{Z}}\times(-1,1)$ obtidas das curvas $\tilde{\gamma}_j$, obteremos n_1 curvas $\gamma_1, \ldots, \gamma_{n_1}$, tal que a região limitada por γ_j contém o ponto $\left(s_0 + jl\frac{m}{n}, p_{\frac{m}{n}}\right)$, e $\gamma_j(t) = \left(s(t) + jl\frac{m}{n}, p(t)\right)$ com $\gamma_1(t) = (s(t), p(t))$.

Ainda $T(\gamma_j) = T(\gamma_{j+1})$ e $T^{n_1}(\gamma_j) = \gamma_j$, o que implica que as curvas γ_j são invariantes por T^{n_1}. Isto conclui a prova da proposição. ■

2.5 Estabilidade global das ilhas elípticas

Como já dissemos em 1.4 a aplicação do bilhar associada a Γ é exatamente igual a aplicação do bilhar associada a cada uma das ovais obtidas de Γ por translações. Isto define uma relação de equivalência no conjunto das ovais.

Nos restringiremos ao conjunto $\tilde{\mathcal{N}}$ das ovais n-simétricas de classe C^k, $k \geq 5$, e denotaremos por $[\Gamma]$ a classe de equivalência da oval n-simétrica Γ.

Pelo Lema 2.2.3 temos uma bijeção entre as funções do conjunto

$\mathcal{A} = \{g \in C^2(M, \mathbb{R})\ /g(\varphi) + g''(\varphi) > 0,\ g(\varphi) > 0\}$ e as ovais n-simétricas com centro de simetria no ponto $(0, 0)$. Isso nos motiva a definir.

Definição 2.5.1 *A norma de $[\Gamma]$ é a norma da oval Γ n-simétrica da classe $[\Gamma]$ contida no conjunto $\mathcal{N}$. Equivalentemente, $||[\Gamma]|| = ||\Gamma||_2 = ||g||_2$, onde $g(\varphi) = \langle \Gamma(\varphi), -\eta(\varphi) \rangle$ é a função suporte.*

Uma oval é de classe C^k, se e somente se a função suporte associa pertencente ao conjunto $\mathcal{A}$ também o for. Como já dissemos, no restante deste capítulo, nos restringiremos ao conjunto $\tilde{\mathcal{N}}$ das ovais n-simétricas de classe C^k, $k \geq 5$, ou equivalentemente as funções em $\mathcal{A}$ de classe C^k, $k \geq 5$.

Neste contexto Proposição 2.2.2 pode ser reformulado como:

Proposição 2.5.1 *O subconjunto $\mathcal{E} \subset \tilde{\mathcal{N}}$ das ovais tal que para todo $1 \leq m \leq n-1$ existem pelo menos d =mdc(n, m) pontos fixos elípticos e d pontos fixos hiperbólicos da aplicação quociente $T_{n,m}$ contidos na reta $p = p_{\frac{m}{n}} = \cos \frac{m}{n}\pi$ é um subconjunto aberto e denso em $\tilde{\mathcal{N}}$.*

O Corolário 2.3.1 também equivale a:

Proposição 2.5.2 *O subconjunto $\mathcal{R} \subset \tilde{\mathcal{N}}$ das ovais tal que para todo $1 \leq m \leq n-1$ existem pelo menos d =mdc(n, m) pontos fixos elípticos não ressonantes da aplicação quociente $T_{n,m}$ contidos na reta $p = p_{\frac{m}{n}} = \cos \frac{m}{n}\pi$ é um subconjunto aberto e denso em $\tilde{\mathcal{N}}$.*

Teorema 2.5.1 *Dado $1 \leq m \leq n-1$, qualquer oval n-simétrica pertencente a uma das classe de equivalência do conjunto $\tilde{\mathcal{N}}$ das ovais n-simétricas, pode ser aproximada por uma oval deste mesmo conjunto tal que a aplicação quociente $T_{n,m}$ associada a esta oval possua pelo menos d =mdc(m, n) pontos fixos elípticos não ressonantes, contidos na reta $p = p_{\frac{m}{n}} = \cos \frac{m}{n}\pi$, com o primeiro coeficiente de Birkhoof τ_1 não nulo.*

Prova: Pelo Corolário 2.2.1, dada uma oval $\tilde{\Gamma}$ n-simétrica a aplicação $T_{n,m}$ possui pelo menos $2d$ pontos fixos contidos na reta $p = p_{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m}{n}\pi$, com d correspondendo aos polígonos de perímetro máximo no conjunto $\Lambda_{n,m}$ e d aos polígonos de perímetro mínimo também neste conjunto.

Tomemos a oval Γ na mesma classe de $\tilde{\Gamma}$ tal que o centro de simetria de Γ seja o ponto $(0,0)$ e φ seja o ângulo entre o vetor tangente e o eixo x positivo. Podem ocorrer as seguintes situações com os d pontos fixos correspondendo aos polígonos de perímetro mínimo em $\Lambda_{n,m}$:

1. São elípticos não ressonantes com o $\tau_1 \neq 0$.
2. São elípticos não ressonantes com $\tau_1 = 0$.
3. São elípticos ressonantes.
4. São parabólicos.

Se ocorrer a primeira situação não há nada a demonstrar.

Se ocorrer a segunda situação então pela Proposição 2.4.1, Γ pode ser aproximada por uma sequência de ovais tal que a aplicação induzida possua d pontos fixos não ressonantes com $\tau_1 \neq 0$.

Se ocorrer a terceira situação, então pelo Corolário 2.3.1 podemos aproximar Γ por uma sequência de ovais tal que os d pontos fixos da aplicação induzida são não ressonante e depois repetimos o passo do segundo caso.

Por fim se não existirem pontos fixos elípticos, então pelo Corolário 2.2.2 podemos aproximar Γ por uma sequências tal que a aplicação quociente possua ao menos d pontos fixos elípticos e d pontos fixos hiperbólicos. Neste caso repetimos as duas situações anteriores. ∎

Ainda neste contexto obtemos o Teorema 1.

Teorema 1 *Dado $1 \leq m \leq n-1$, qualquer oval n-simétrica pertencente a uma das classe de equivalência do conjunto $\tilde{\mathcal{N}}$, pode ser aproximada por uma oval deste mesmo conjunto tal que a aplicação do bilhar T associada a esta oval possua pelo menos $2d$ órbitas periódicas de periódo $n_1 = n/d$, contidas na reta $p = p_{\frac{m}{n}} = \cos\frac{m}{n}\pi$, com $d =$mdc(m,n). Destas órbitas, d são hiperbólicas, e d são tais que cada ponto da órbita é rodeado por curvas invariantes de T^{n_1}.*

Prova: Segue do Corolário 2.2.2, dos Teoremas 2.4.1 e 2.5.1 ∎

Finalizaremos esta seção mostrando que o subconjunto das ovais n-simétricas em $\tilde{\mathcal{N}}$ cujo bilhar associado possui ilhas elípticas é um subconjunto aberto e denso em $\tilde{\mathcal{N}}$.

Teorema 2.5.2 *O subconjunto das ovais n-simétricas em $\tilde{\mathcal{N}}$, com $n \geq 4$, tal que para no mínimo $n-2$ valores de $1 \leq m \leq n-1$, a aplicação do bilhar associada T possui pelo menos $d =$mdc(n,m) órbitas periódicas de período $n_1 = n/mdc(n,m)$, e ainda em qualquer vizinhança de cada ponto da órbita existem curvas invariantes por T^{n_1} é igual ao subconjunto das ovais tal que a aplicação quociente $T_{n,m}$ possui pelo menos d pontos fixos elípticos. Ainda este subconjunto é aberto e denso em $\tilde{\mathcal{N}}$.*

Prova: Pela Proposição 2.5.2 o subconjunto $\mathcal{R} \subset \tilde{\mathcal{N}}$ das ovais tal que para todo $1 \leq m \leq n-1$ existem $d =$mdc(m,n) pontos fixos elípticos não ressonantes da aplicaçõe quociente $T_{n,m}$ contido na reta $p = p_{\frac{m}{n}} = \cos \frac{m}{n}\pi$ é um subconjunto aberto e denso em $\tilde{\mathcal{N}}$. Calculando o primeiro coeficiente de Birkhoff em um destes pontos fixos não ressonante $\Pr\left(s_0, p_{\frac{m}{n}}\right)$ obtemos:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= -\frac{1}{8R(s_0)\operatorname{sen}^3(\pi m/n)} + \frac{3\cos^2(\pi m/n)}{8\operatorname{sen}^2(\pi m/n)\left(2L(s_0) - R(s_0)\operatorname{sen}(\pi m/n)\right)} \\
&\quad -\frac{L(s_0)\left(7L(s_0) - 4R(s_0)\operatorname{sen}(\pi m/n)\right)}{8\left(L(s_0) - 2R(s_0)\operatorname{sen}(\pi m/n)\right)^2\left(2L(s_0) - R(s_0)\operatorname{sen}(\pi m/n)\right)}\left(R'(s_0)\right)^2 \\
&\quad -\frac{L(s_0)}{8\operatorname{sen}(\pi m/n)\left(L(s_0) - 2R(s_0)\operatorname{sen}(\pi m/n)\right)}R''(s_0).
\end{aligned}$$

Denotando por φ o ângulo entre o vetor tangente e o eixo x e $s_0 = s(\varphi_0)$ reescrevemos:

$$\begin{aligned}
\tau_1 &= -\frac{1}{8R(\varphi_0)\operatorname{sen}^3(\pi m/n)} + \frac{3\cos^2(\pi m/n)}{8\operatorname{sen}^2(\pi m/n)\left(2L(\varphi_0) - R(\varphi_0)\operatorname{sen}(\pi m/n)\right)} \\
&\quad -\frac{L(\varphi_0)\left(7L(\varphi_0) - 4R(\varphi_0)\operatorname{sen}(\pi m/n)\right)}{8\left(L(\varphi_0) - 2R(\varphi_0)\operatorname{sen}(\pi m/n)\right)^2\left(2L(\varphi_0) - R(\varphi_0)\operatorname{sen}(\pi m/n)\right)}\left(R'(s_0)\right)^2 \\
&\quad -\frac{L(\varphi_0)}{8\operatorname{sen}(\pi m/n)\left(L(\varphi_0) - 2R(\varphi_0)\operatorname{sen}(\pi m/n)\right)}R''(s_0).
\end{aligned}$$

Substituindo $L(\varphi_0) = 2\operatorname{sen}(\pi m/n)\, g(\varphi_0)$, e $R(\varphi_0) = g(\varphi_0) + g''(\varphi_0)$ obtemos:

$$\begin{aligned}
8\operatorname{sen}^3(\pi m/n)\,\tau_1 &= -\frac{1}{g(\varphi_0) + g''(\varphi_0)} + \frac{3\cos^2(\pi m/n)}{3g(\varphi_0) - g''(\varphi_0)} \\
&\quad -\frac{\operatorname{sen}^2(\pi m/n)\, g(\varphi_0)}{g''(\varphi_0)\left(3g(\varphi_0) - g''(\varphi_0)\right)}\left(R'(s_0)\right)^2 \\
&\quad -\frac{\operatorname{sen}^2(\pi m/n)\, g(\varphi_0)}{g''(\varphi_0)}R''(s_0).
\end{aligned}$$

Logo $\tau_1 = 0$ se e somente se:

$$-\frac{1}{g(\varphi_0)+g''(\varphi_0)} + \frac{3\cos^2(\pi m/n)}{3g(\varphi_0)-g''(\varphi_0)} - \frac{\operatorname{sen}^2(\pi m/n)g(\varphi_0)}{g''(\varphi_0)(3g(\varphi_0)-g''(\varphi_0))}\left(R'(s_0)\right)^2 - \frac{\operatorname{sen}^2(\pi m/n)g(\varphi_0)}{g''(\varphi_0)}R''(s_0) = 0,$$

ou $-\frac{1}{g(\varphi_0)+g''(\varphi_0)}+\frac{3}{3g(\varphi_0)-g''(\varphi_0)}$

$-\operatorname{sen}^2(\pi m/n)\left(\frac{3}{3g(\varphi_0)-g''(\varphi_0)}+\frac{g(\varphi_0)}{g''(\varphi_0)(3g(\varphi_0)-g''(\varphi_0))}\left(R'(s_0)\right)^2+\frac{g(\varphi_0)}{g''(\varphi_0)}R''(s_0)\right)=0.$

O que equivale a:

$$\operatorname{sen}^2(\pi m/n)=$$

$$\left(-\frac{1}{g(\varphi_0)+g''(\varphi_0)}+\frac{3}{3g(\varphi_0)-g''(\varphi_0)}\right)/\left(\frac{3}{3g(\varphi_0)-g''(\varphi_0)}+\frac{g(\varphi_0)}{g''(\varphi_0)(3g(\varphi_0)-g''(\varphi_0))}\left(R'(s_0)\right)^2+\frac{g(\varphi_0)}{g''(\varphi_0)}R''(s_0)\right).$$

Como $0<\pi m/n<\pi$ para $1\leq m\leq n-1$, então $\operatorname{sen}(\pi m/n)>0$, e ainda $\operatorname{sen}^2(\pi m_1/n)=\operatorname{sen}^2(\pi m_2/n)$ para $1\leq m_1<m_2\leq n-1$ se e somente se $m_2=n-m_1$.

Desta maneira, para exceto, no máximo dois valores de m, o primeiro coeficiente de Birkhoff do ponto fixo elíptico não ressonante $\Pr\left(s_0,p_{\frac{m}{n}}\right)$ da aplicação quociente $T_{n,m}$ é não nulo. Da Proposição 2.4.1 obtemos as curvas invariantes por T^{n_1} ao redor de cada ponto da órbita periódica $\left\{\left(s_0,p_{\frac{m}{n}}\right),\left(s_0+l\frac{m}{n},p_{\frac{m}{n}}\right),\ldots,\left(s_0+(n_1-1)\,l\frac{m}{n},p_{\frac{m}{n}}\right)\right\}$, com $n_1=n/\text{mdc}(n,m)$, para os valores de m tal que o primeiro coeficiente é não nulo.

Novamente da Proposição 2.5.2,as ovais n-simetricas tal que todos os pontos fixos elípticos da aplicação $T_{n,m}$ são não ressonantes é um subconjunto aberto e denso em $\tilde{\mathcal{N}}$, e ainda o número de pontos fixos elípticos é no mínimo d, onde $d=$mdc(m,n) é o número de polígonos em $\Lambda_{n,m}$ de perímetro mínimo.

Como já vimos, o primeiro coeficiente de Birkhoff de todos os d pontos fixos elípticos não ressonates $\Pr\left(s_0,p_{\frac{m}{n}}\right)$, $\Pr\left(s_0+l\frac{m}{n},p_{\frac{m}{n}}\right)$, $\ldots$, $\Pr\left(s_0+(d-1)\,l\frac{m}{n},p_{\frac{m}{n}}\right)$ que correspondem aos polígonos de perímetro mínimo em $\Lambda_{n,m}$, são todos iguais, uma vez que a derivada de todas as ordens da aplicação $T_{n,m}$ em cada um destes pontos é a mesma pela simetria da oval Γ. Isso nos dá as $d=$mdc(n,m) órbitas periódicas da aplicação do bilhar T de período $n_1=n/d$ com curvas invariantes por T^{n_1} ao redor de cada ponto da órbita.

Mais uma vez, pela Proposição 2.5.2 isso ocorre em um subconjunto aberto denso de ovais n-simétricas em $\tilde{\mathcal{N}}$, o que conclui o resultado. ■

Teorema 2 *O subconjunto das ovais n-simétricas em $\tilde{\mathcal{N}}$, com $n\geq 4$, tal que para no mínimo $n-2$ valores de $1\leq m\leq n-1$, a aplicação do bilhar associada T possui pelo menos $2d$ órbitas periódicas de período $n_1=n/mdc(n,m)$ contidas na reta $p=p_{\frac{m}{n}}=\cos\frac{m}{n}\pi$ com d hiperbólicas e d tais que cada ponto da órbita é rodeado por curvas invariantes de T^{n_1} é aberto e denso no conjunto $\tilde{\mathcal{N}}$.*

Prova: Segue diretamente do Teorema 2.5.2 ■

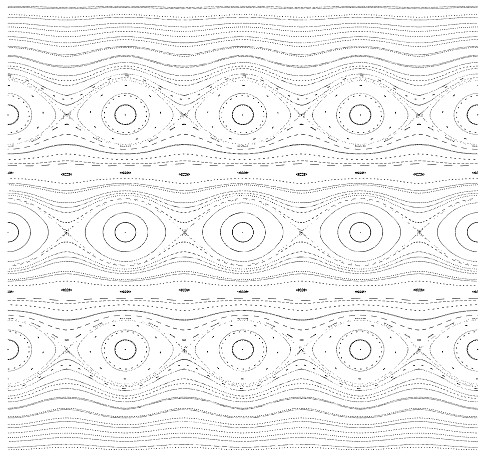

Figura 2.1: Espaço espaço de fase da aplicação do bilhar em uma oval 4-simétrica com raio de curvatura $R(\varphi) = 1+0{,}2\cos(4\varphi)+0{,}01\mathrm{sen}(4\varphi)$.

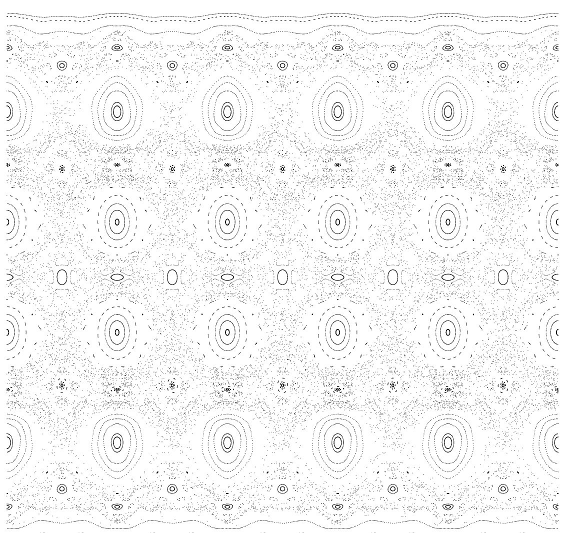

Figura 2.2: Espaço de fase da aplicação do bilhar em uma oval 5-simétrica com raio de curvatura $R(\varphi) = 1+0{,}4\cos(5\varphi)+0{,}25\mathrm{sen}(5\varphi)$.

Capítulo 3

Curvas rotacionais invariantes

Os jatos da aplicação do bilhar ficam "próximos"dos jatos de um sistema integrável em uma vizinhança de cada reta invariante. Mostraremos que existe um conjunto com medida de Lesbegue positiva, formado por curvas rotacionais invariantes pela aplicação do bilhar, se acumulando nos dois lados da reta. Utilizaremos o resultado de R. Douady [12] no caso de rotaçao racional, e o de Levi-Moser [8] no caso de rotação irracional.

Finalizaremos o capítulo estendendo os resultados obtidos, para estudarmos a vizinhança de curvas rotacionais invariantes de Aplicações Twist em $S^1 \times \mathbb{R}$, com $S^1 = \frac{\mathbb{R}}{\mathbb{Z}}$.

3.1 Curva invariante na vizinhança da reta invariante $\{p_0 = 0\}$

Pela Proposição 1.7.1 quando a oval é um círculo, toda reta horizontal é invariante, e a aplicação restrita às retas é uma rotação.

Se a oval é uma elípse existe um sub-anel no espaço de fase totalmente folheado por curvas rotacionais invariantes, restrita às quais a aplicação do bilhar também é uma rotação. Nestes dois casos existem um conjunto de medida positiva de curvas invariantes.

Nosso objetivo nesta Seção e demonstrarmos que se a oval for de classe C^k, com $k > 7$, então existe uma vizinhança da reta $\{p = p_0 = 0\}$, ou um sub-anel contendo esta, com um conjunto de medida positiva, formado por curvas invariantes, conjugadas a rotação em $\mathbb{R}/l\mathbb{Z}$ por um número irracional.

Antes de enunciamor o próximo teorema precisamos de duas definições.

DEFINIÇÃO 3.1.1 *Um difeomorfismo $F : \mathbb{R}/l\mathbb{Z}\times(-\delta,\delta) \to \mathbb{R}/l\mathbb{Z}\times(-\delta,\delta)$ satisfaz a propriedade da interseção se para toda curva γ homotopicamente não trivial temos $F(\gamma)\cap\gamma \neq 0$.*

Claramente se uma aplicação $F : \mathbb{R}/l\mathbb{Z} \times (-\delta,\delta) \to \mathbb{R}/l\mathbb{Z} \times (-\delta,\delta)$ preserva área, então F satisfaz a propriedade da interseção.

DEFINIÇÃO 3.1.2 *Um número ω é diofantino se existem constantes $K, \rho > 0$ tal que $|n\omega - m| \geq \frac{K}{n^{\rho+1}}$ para todo m, $n \in \mathbb{Z}$, com $n > 0$.*

TEOREMA 3.1.1 (R. Douady [12]) *Seja $F \in C^k\left(S^1 \times (-\delta,\delta), S^1 \times I\right)$ um difeomorfismo admitindo em uma vizinhança de $S^1 \times \{0\}$ um desenvolvimento da forma:*

$$F(x,y) = \left(x + \omega + \zeta(x)\, y + O\left(y^2\right), y + O\left(y^2\right)\right)$$

Onde $\omega \in \mathbb{R}$, $\zeta \in C^{k-1}\left(S^1, \mathbb{R}_+^*\right)$, $(-\delta,\delta) \subset I$.

Suponha ainda que F satisfaça a propriedade da interseção e, ou $\omega \in \mathbb{Q}$ e $k > 5$, ou ω é irracional diofantino e $k = \infty$.

Então para todo $\gamma > 0$ e todo $k' < k - 4$, existe $\varepsilon > 0$ tal que se

$$B = \left\{a \in \mathbb{R}/\, |a-\omega| \leq \varepsilon \text{ e para todo } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q},\ \left|a - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{|a-\omega|}{q^2}\right\}$$

existe uma aplicação $G : S^1\times B \to S^1\times(-\delta,\delta)$ contínua, injetiva, isótopica a injeção natural tal que $f \circ G = G \circ Tr_a$, onde $Tr_a : S^1 \times B \to S^1 \times B$ é dada por $(x,a) \to (x+a,a)$.

Além disso $G_a(x) = G(x,a) \in C^{k'}$ e $\lim\limits_{x\to a} ||G_a - G_\omega|| = 0$, com $G_\omega(x) = (x,0)$.

LEMA 3.1.1 *Sejam Γ uma oval de largura constante de classe C^{k+2}, com $k \geq 3$; e T a aplicação do bilhar nessa curva nas coordenadas (s,p). Então existe uma mudança de coordenadas que transforma T em um mapa C^k tal que em uma vizinhança da reta $y = 0$ a aplicação é dada por:*

$$\begin{aligned} X(x,y) &= x + 1/2 + \zeta(x)y + o(y^2) \\ Y(x,y) &= y + o(y^2) \end{aligned}$$

onde $\zeta(x)$ é tal que $\zeta_2 \geq \zeta(x) \geq \zeta_1 > 0$.

PROVA: Consideremos $T : \mathbb{R}/l\mathbb{Z} \times (-1,1) \to \mathbb{R}/l\mathbb{Z} \times (-1,1)$ a aplicação do bilhar nas coordenadas (s,p). Seja $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por:

$$g(x) = s\left(2\pi x\right) = \int_0^{2\pi x} R(\beta) d\beta.$$

Como $g\left(x+1\right) = g\left(x\right) + l$, g induz uma aplicação de $\mathbb{R}/\mathbb{Z}$ em $\mathbb{R}/l\mathbb{Z}$, a qual também denotaremos por g.

Por 1.9 $T(s(\varphi),0) = T(s(\varphi+\pi),0)$, ou equivalentemente, $T\left(s\left(2\pi x\right),0\right) = \left(s\left(2\pi x + \pi\right),0\right)$.

Logo:

$$T(g(x),0) = T\left(s\left(2\pi x\right),0\right) = \left(s\left(2\pi x+\pi\right),0\right) = \left(g\left(x+1/2\right),0\right). \tag{3.1}$$

Podemos supor que $\max\limits_{\varphi\in[0,2\pi]} \frac{1}{2\pi R(\varphi)} = 1$, pois caso contrário, como o bilhar é invariante por homotetia, bastaria tomarmos $\tilde{R}(\varphi) = \frac{R(\varphi)}{2\pi R_1}$ com $R_1 = \min\limits_{\varphi\in[0,2\pi]} R(\varphi)$ e teriamos $\max\limits_{\varphi\in[0,2\pi]} \frac{1}{2\pi \tilde{R}(\varphi)} = \max\limits_{\varphi\in[0,2\pi]} \frac{2\pi R_1}{2\pi R(\varphi)} = 1$.

Tomemos $G : \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times (-1,1) \to \mathbb{R}/l\mathbb{Z} \times (-1,1)$ dada por:

$$G\left(x,y\right) = \left(g(x), \frac{y}{g'(x)}\right) = \left(g(x), \frac{y}{2\pi R(2\pi x)}\right)$$

e façamos a seguinte mudança de coordenadas:

$$\begin{aligned} \tilde{T} &: \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times (-1,1) \to \mathbb{R}/\mathbb{Z} \times (-1,1) \\ \tilde{T} &= G^{-1} \circ T \circ G(x,y) \end{aligned}$$

Notemos que:

$$\tilde{T}(x,0) = G^{-1} \circ T(g(x),0) = G^{-1}(g(x+\omega),0) = (x+\omega,0)$$

Denotando $\tilde{T}(x,y) = (X,Y)$, temos que em uma vizinhança $U_\delta = \{(x,y)/x \in [0,1] \text{ e } \mid y \mid < \delta\}$ da reta invariante a aplicação é dada por:

$$\begin{aligned} X(x,y) &= X(x,0) + \frac{\partial X}{\partial y}(x,0)y + o(y) \\ Y(x,y) &= Y(x,0) + \frac{\partial Y}{\partial y}(x,0)y + o(y) \end{aligned}$$

que pode ser escrito do seguinte modo:

$$\begin{aligned} X &= x + \omega + \zeta(x)y + o(y^2) \\ Y &= a(x)y + o(y^2) \end{aligned}$$

onde $\zeta(x) = \frac{\partial X}{\partial y}(x,0)$, e $a(x) = \frac{\partial Y}{\partial y}(x,0)$.

Antes de proseguir observemos que $dG(x,y) = \begin{pmatrix} g'(x) & 0 \\ * & \frac{1}{g'(x)} \end{pmatrix}$, o que nos dá $\det dG(x,y) = 1$. Consequentemente como T nas coordenadas (s,p) preserva a medida de Lebesgue $ds \wedge dp$ temos que $\tilde{T}$ preserva a medida $dx \wedge dy$.

Pelo Teorema da função inversa

$$dG^{-1}(T \circ G)(x,y) = [dG(G^{-1} \circ T \circ G)(x,y)]^{-1} = [dG(\tilde{T}(x,y))]^{-1} = [dG(X,Y)]^{-1}.$$

Logo:

$$\begin{aligned} d\tilde{T}(x,y) &= d(G^{-1} \circ T \circ G)(x,y) = dG^{-1}(T \circ G)(x,y) dT(G(x,y)) dG(x,y) \\ &= \begin{pmatrix} \frac{1}{g'(X)} & 0 \\ * & g'(X) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{\partial s_2}{\partial s_1}(G(x,y)) & \frac{\partial p_2}{\partial s_1}(G(x,y)) \\ \frac{\partial s_2}{\partial p_1}(G(x,y)) & \frac{\partial p_2}{\partial p_1}(G(x,y)) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \frac{1}{g'(x)} & 0 \\ * & g'(x) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} * & \frac{\partial p_2}{\partial s_1}(G(x,y)) \frac{1}{g(X)g(x)} \\ * & * \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Como a aplicação do bilhar $T(s,p)$ satisfaz $\frac{\partial p_2}{\partial s_1} > 0$,temos que $\frac{\partial p_2}{\partial s_1}(G(x,y)) > 0$. Por construção $g' > 0$ o que implica que $\frac{\partial X}{\partial Y}(x,y) = \frac{\partial p_2}{\partial s_1}(G(x,y)) \frac{1}{g(X)g(x)} > 0$.

A derivada de $\tilde{T}\,(x,y)$ satisfaz:

$$d\tilde{T}(x,y) = \begin{pmatrix} 1 + \zeta'(x)y + o(y^2) & \zeta(x) + o(y) \\ a'(x)y + o(y^2) & a(x) + o(y) \end{pmatrix} \text{ e em particular } d\tilde{T}(x,0) = \begin{pmatrix} 1 & \zeta(x) \\ 0 & a(x) \end{pmatrix}.$$

O fato de $\tilde{T}$ preservar área nos dá $a(x) = 1$ e a condição $\frac{\partial X}{\partial Y}(x,y) > 0$ que existe $\zeta_2 \geq \zeta_1 > 0$ tal que $\zeta_2 \geq \zeta(x) \geq \zeta_1$. ■

Podemos agora formular o seguinte resultado.

Teorema 3 *Se Γ é uma oval de largura constante e de classe C^k, com $k > 7$.*

Então para todo $\gamma > 0$ e todo $k' < k - 4$, existe $\varepsilon > 0$ tal que se

$$B = \left\{ a \in \mathbb{R} / \, |a - 1/2| \leq \varepsilon \text{ e para todo } \frac{p}{q} \in \mathbb{Q}, \ \left| a - \frac{p}{q} \right| \geq \frac{|a-1/2|}{q^2} \right\},$$

existe uma aplicação $G : S^1 \times B \to S^1 \times (-\delta, \delta)$ contínua, injetiva, isótopica a injeção natural tal que $f \circ G = G \circ Tr_a$, onde $Tr_a : S^1 \times B \to S^1 \times B$ é dada por $(x,a) \to (x+a, a)$.

Além disso $G_a\,(x) = G\,(x,a) \in C^{k'}$ e $\lim_{x \to a} ||G_a - G_\omega|| = 0$, com $G_\omega\,(x) = (x, 0)$.

Prova: Essa Proposição é consequência direta do Lema 3.1.1 e do Teorema 3.1.1. ∎

Observação: O Teorema 3 pode ser reformulado da seguinte maneira:

Existe um $\varepsilon > 0$, e conjunto de cantor $\mathbb{k}$, com medida de Lebesgue positiva, formado por irracionais diofantinos de $(1/2-\varepsilon, 1/2+\varepsilon)$ tal que para todo número $a \in \mathbb{k}$ existe uma curva rotacional invariante γ_a de classe $C^{1+\epsilon}$ conjugada à rotação R_a.

3.2 Curva invariante na vizinhança da reta $\{p_0 \neq 0\}$

Nesta Seção demonstraremos também que se Γ é uma oval tal que o bilhar associado deixa a reta $\{p = p_0 \neq 0\}$ invariante então existe uma vizinhança desta, ou um sub-anel que à contém, com um conjunto de medida positiva, formado por curvas invariantes, conjugadas a rotação em $\mathbb{R}/l\mathbb{Z}$ por um número irracional diofantino.

Como vimos na Seção 1.7 o número de rotação do bilhar restrita à reta é $\omega = \alpha/\pi$. Assim como no Lema 3.1.1 também é possível fazermos uma mudança de coordenadas, analítica neste caso, tal que a aplicação do bilhar na vizinhança da reta invariante seja

$$\begin{aligned} X(x,y) &= x + \omega + \zeta(x)y + o(y^2) \\ Y(x,y) &= y + o(y^2) \end{aligned}$$

onde $\zeta(x)$ é tal que $\zeta_2 \geq \zeta(x) \geq \zeta_1 > 0$. Todavia não poderemos mais aplicar o Teorema 3.1.1 pois neste caso não sabemos afirmar se o número de rotação da reta α/π é ou não diofantino, ja que não é racional por [20].

Afim de utilizarmos a técnica de Levi Moser [8] para buscarmos as curvas rotacionais invariantes, tomemos W_r o espaço das funções analíticas na faixa $|\mathrm{Im}\theta| \leq r$, e $\hat{W}_r \subset W_r$ o subespaço formado pelas funções periódicas de periódo 1. Tomamos em W_r a norma do sup, isto é, se $g \in W_r$, então $|g|_r = \sup_{|\mathrm{Im}\theta| \leq r} |g(\theta)|$. Como as funções em $g \in \hat{W}_r$ são analiticas e periodicas de periodo 1 sua série de Fourier é dada por $g(\theta) = \sum g_k e^{-2\pi i\theta}$, onde $g_k = \int_0^1 g(\theta) e^{-2\pi k i\theta} d\theta$.

Lema 3.2.1 *Os coeficientes de Fourier das funções $g \in \hat{W}_r$ possuem decaimento exponencial, ou seja:*

$$|g_k| \leq |g|_r \, e^{-2\pi|k|r}.$$

Prova: Como $g(\theta)$ é analítica em $|\mathrm{Im}\theta| \leq r$ então a integral $\int_0^1 g(\theta) e^{-2\pi k i\theta} d\theta$ independe do caminho. Deste modo iremos mudar o caminho de integração para a curva $\chi = \chi_1 \circ \chi_2 \circ \chi_3$, onde $\chi_1 = \{\delta t i\}_{0 \leq t \leq 1}, \chi_2 = \{t + \delta i\}_{0 \leq t \leq 1}, \chi_3 = \{1 + (1-t)\delta i\}_{0 \leq t \leq 1}$ com $|\delta| < r$.

Logo $g_k = \int\limits_{\chi} g(\theta)\, e^{-2\pi k i\theta} d\theta$. Contudo como $\int\limits_{\chi_2} g(\theta)\, e^{-2\pi i\theta} d\theta = -\int\limits_{\chi_3} g(\theta)\, e^{-2\pi i\theta} d\theta$ obtemos:

$g_k = \int\limits_{\chi_1} g(\theta)\, e^{-2\pi i\theta} d\theta = \int_0^1 g(t+\delta i)\, e^{2\pi k\delta} e^{2\pi i t} dt.$

Deste modo:

$$|g_k| \leq \int_0^1 |g(t+\delta i)|\, e^{2\pi k\delta} dt.$$

Seja σ, um número real com $0 < \sigma < r$. Se $k > 0$ tomemos $\delta = \sigma - r$, e se $k < 0$ tomemos $\delta = r - \sigma$, de maneira que $e^{2\pi k\delta} = e^{-2\pi|k|(r-\sigma)}$ e $|g_k| \leq |g|_r\, e^{-2\pi|k|(r-\sigma)}$. Fazendo $\sigma \to 0$ obtemos:

$$|g_k| \leq |g|_r\, e^{-2\pi|k|r}.$$

■

Observação: Se definirmos a função $g(z)$ por sua série de Fourier, ou seja $g(z) = \sum g_k e^{-2\pi i z}$, então essa função será analítica em um domínio $|\mathrm{Im}(z)| < r'$ com $0 < r' < r$ pois

$|g_k e^{-2\pi i z}| = |g_k| \left|e^{-2\pi k y}\right| \leq |g|_r\, e^{-2\pi(|k|r+ky)}$, contudo

$|k|\, r + ky > |k|\, r - |k|\, r' = |k|\,(r - r')$ para $|y| < r'$.

Logo:

$|g_k e^{-2\pi i z}| \leq |g|_r\, e^{-2\pi(r-r')|k|}$ e portanto a série é uniformemente convergente.

Seja Γ uma oval com reta invariante $\{p = p_0\}$, com $p_0 \neq 0$. A menos de homotetia podemos supor que o raio de curvatura de Γ é dado por $R(\varphi) = a + b\cos n\varphi$ com $n \geq 4$, $a > b$, $a = \frac{1}{2\pi}$ para que a oval tenha perímetro 1.

Inspirados no caso $p_0 = 0$ tomemos:

$$u(\theta) = \int_0^{2\pi\theta} R(\beta)\, d\beta. \tag{3.2}$$

Como naquele caso:

$$T(u(\theta), p_0) = T(s(2\pi\theta), p_0) = (s(2\pi\theta + 2\alpha), p_0) = (u(\theta+\omega), p_0), \tag{3.3}$$

onde $\omega = \alpha/\pi$, é o número de rotação da reta invariante, com $\tan n\alpha = $ntan$\alpha$ e $\alpha = \cos^{-1} p_0.$

Lema 3.2.2 *$u(\theta) \in W_r$, e $u(\theta) - \theta \in \hat{W}_r$ para todo $r > 0$.*

Prova: Por definição $u(\theta) = \theta + \frac{b}{n}\sin 2\pi n\theta$, logo $u(\theta+1) = u(\theta) + 1$. Como $u(\theta)$ é analítica e limitada em $|\text{Im}\theta| \leq r$ para qualquer $r > 0$ fixo, então $u(\theta) \in \tilde{W}_r$ e $u(\theta) - \theta \in W_r$ para todo $r > 0$. ■

Lema 3.2.3 *Dado* $N_0 > \max\left\{\frac{1}{1-2\pi b}, 1 + 2\pi b\right\}$ *existe* $r_0 > 0$ *tal que* $|u'|_r < N_0$ *e* $|(u')|_r^{-1} < N_0$ *para todo* $r \leq r_0$.

Prova: $u'(\theta) = 1 + 2\pi b \cos 2\pi n\theta$, e portanto $1 - 2\pi b \leq u'(\theta) \leq 1 + 2\pi b$ para $\theta \in \mathbb{R}$. Como $a > b$ e $a = \frac{1}{2\pi}$ temos $1 - 2\pi b > 0$ o que nos dá $|u'|_r < N_0$ e $|(u')|_r^{-1} < N_0$ para $N_0 > \max\left\{\frac{1}{1-2\pi b}, 1 + 2\pi b\right\}$ e $\theta \in \mathbb{R}$. O resultado segue então da continuidade de $u(\theta)$ em $\mathbb{C}$. ■

Como o raio de curvatura de Γ é analítico, a função geradora $h(s_1, s_2)$ também é analítica, e podemos estende-la via série de Taylor a $h(z_1, z_2)$ em um domínio $D \subset \mathbb{C}^2$.

Lema 3.2.4 *O domínio* D *pode ser escolhido de tal forma que* $\min|\partial_{12}h(z_1, z_2)| > \kappa$, *e* $|h|_{C^3} < M$ *em* D, *com* $\kappa > 0$ *e* $M > 0$.

Prova: Ao longo da reta invariante temos:

$$T(u(\theta), p_0) = (u(\theta + \omega), p_0).$$

Derivando a função geradora e aplicando no ponto $(u(\theta), u(\theta + \omega))$ obtemos:

$$|\partial_{12}h((u(\theta), u(\theta + \omega)))| = \frac{\sin^2 \alpha}{h((u(\theta), u(\theta + \omega)))}.$$

Como $u(\theta + 1) = u(\theta) + 1$, e $h(s_1 + 1, s_2 + 1) = h(s_1, s_2)$, existe um $k_0 > 0$ tal que $h((u(\theta), u(\theta + \omega))) \leq \frac{1}{k_0}$, pois a função atinge um mínimo para $\theta \in [0, 1]$.

Logo $|\partial_{12}h((u(\theta), u(\theta + \omega)))| \geq k_0 \text{sen}^2\alpha > \tilde{k} > 0$, para algum $0 < \tilde{k} < k_0 \sin^2 \alpha$ e $\theta \in \mathbb{R}$. Do mesmo modo, existe $\tilde{M}$ tal que todas as derivadas de h ate a ordem três são limitadas por $\tilde{M}$ nos pontos $(u(\theta), u(\theta + \omega))$ ou seja $|h|_{|C^3} < \tilde{M}$ em $(u(\theta), u(\theta + \omega)) \subset \mathbb{R}^2$.

Tomemos uma vizinhança U (faixa aberta) da curva $(u(\theta), u(\theta + \omega))$ em $\mathbb{R}^2$ tal que

$|\partial_{12}h(s_1, s_2)| > k$, e $|h|_{C^3} < M$ para todo $(s_1, s_2) \in U$, com $M > \tilde{M}$ e $k < \tilde{k}$. Basta agora estendermos $h(s_1, s_2)$ via sua série de Taylor a um domínio $D \subset \mathbb{C}^2$ tal que $D \cap \mathbb{R}^2 = U$, $|h|_{C^3} < M$ e $\min_D |\partial_{12}h(s_1, s_2)| > k$ em D. ■

Seja $R > 0$ tal que $\emptyset \neq D_R \subset D$ é definido por:

$$D_R = \{(z_1, z_2)/\text{dist}((z_1, z_2), D^C) > R\},$$

onde $D^C = \mathbb{C}^2 - D$. Observemos que o subconjunto D_R é o maior subconjunto de D cuja R vizinhança está contida em D.

Lema 3.2.5 *Fixado $R > 0$ tal que $\emptyset \neq D_R \subset D$, existem $r > 0$ e $\xi_R > 0$ tal que $((u(\theta), u(\theta+\xi)) \subset D_R$ para todo $|\xi - \omega| \leq \xi_R$ e θ tal que $|Im\theta| \leq r$.*

Prova: Pela construção do domínio D feita no Lema 3.2.4, a curva $(u(\theta), u(\theta+\omega))$ está contida no aberto D_R para todo $\theta \in \mathbb{R}$. Pela continuidade de $u(\theta)$ e da igualdade $u(\theta+1) = u(\theta)+1$, concluimos que existe $\xi_R > 0$ e $r > 0$ tal que $(u(\theta), u(\theta+\xi)) \subset D_R$ para todo $|\xi - \omega| \leq \xi_R$ e $|\mathrm{Im}\theta| \leq r$. ∎

Como consequência do Lema 3.2.5 temos o seguinte resultado.

Corolário 3.2.1 *Fixado $R > 0$ tal que $\emptyset \neq D_R \subset D$, existem $r > 0$, $\xi_R > 0, \alpha_R > 0$ tal que $((g(\theta), g(\theta+\xi)) \subset D_R$ para todo $|\xi - \omega| \leq \xi_R$, θ tal que $|Im\theta| \leq r$, e $|g(\theta) - u(\theta)|_r \leq \alpha_R$.*

Uma curva $\gamma(\theta) = (x(\theta), y(\theta))$ satisfaz a condição de invariância

$$T(x(\theta), y(\theta)) = (x(\theta+\omega), y(\theta+\omega))$$

se e somente se a função $x(\theta)$ satisfaz a equação:

$$\partial h_1(x(\theta), x(\theta+\omega)) + \partial h_2(x(\theta-\omega), x(\theta)) = 0, \tag{3.4}$$

uma vez que:

$$y(\theta) = -\partial h_1(x(\theta), x(\theta+\omega)) = \partial h_2(x(\theta-\omega), x(\theta)). \tag{3.5}$$

Deste modo o problema de encontrar $\gamma(\theta)$ se reduz a encontrar $x(\theta)$, pois se $x(\theta)$ satisfaz 3.4, então $y(\theta)$ fica bem determinado por 3.5.

Fixado $R > 0$ dado pelo Lema 3.2.5 tomemos $U_{\alpha_R} = \left\{ g \in \hat{W}_r / \, |g(\theta) - u(\theta)|_r \leq \alpha_R \right\}$ com α_R dado pelo Corolário 3.2.1. Para cada $\xi \in [\omega - \xi_R, \omega + \xi_R]$ definamos o operador:

$$E_\xi : U_\alpha \to \hat{W}_r$$

$$E_\xi(g(\theta)) = \partial_1 h(g(\theta), g(\theta+\xi)) + \partial_2 h(g(\theta-\xi), g(\theta)).$$

Como a reta $\{p = p_0\}$ é invariante temos por 3.3 e 3.4 que $E_\omega(u(\theta)) = 0$. Mostraremos adiante que sob certas restrições em ξ é possível obtermos uma única função $u_\xi(\theta) \in \tilde{W}_{r/2}$ satisfazendo $E_\xi(u_\xi(\theta)) = 0$ e $\int (u_\xi(\theta) - \theta)\, d\theta = 0$. Isto nos dará uma curva invariante $\gamma_\xi(\theta) = u_\xi(\theta), v_\xi(\theta)$, com $y(\theta) = -\partial h_1(x(\theta), x(\theta+\omega))$ satisfazendo $T(u_\xi(\theta), v_\xi(\theta)) = (u_\xi(\theta+\omega), v_\xi(\theta+\omega))$.

Usaremos a notação $g^+(\theta) = g(\theta+\xi)$, $g^-(\theta) = g(\theta-\xi)$ para reescrevermos $E_\xi(g(\theta))$ como $E_\xi(g(\theta)) = \partial_1 h(g(\theta), g^+(\theta)) + \partial_2 h(g^-(\theta), g(\theta))$.

LEMA 3.2.6 (Levi - Moser [8]) *A função $g'(\theta)\, E_\xi(g(\theta))$ tem média zero, isto é, $\int_0^1 g'(\theta)\, E_\xi(g(\theta))$ $d\theta = 0$.*

PROVA: Denotando $\nabla G(\theta) = G(\theta+\xi) - G(\theta)$ e $\nabla^* G(\theta) = G(\theta) - G(\theta-\xi)$ temos:

$$\begin{aligned}
g'(\theta)\, E_\xi(g(\theta)) &= g'(\theta)\, \partial_1 h(g(\theta), g^+(\theta)) + g'(\theta)\, \partial_2 h(g^-(\theta), g(\theta)) \\
&= g'(\theta)\, \partial_1 h(g(\theta), g^+(\theta)) + \left(g^+(\theta)\right)' \partial_2 h(g(\theta), g^+(\theta)) - \\
&\quad \left(g^+(\theta)\right)' \partial_2 h(g(\theta), g^+(\theta)) + g'(\theta)\, \partial_2 h(g^-(\theta), g(\theta)) \\
&= \frac{d}{d\theta} h(g(\theta), g^+(\theta)) - \nabla \left[g'(\theta)\, \partial_2 h(g^-(\theta), g(\theta))\right].
\end{aligned}$$

Consequentemente:

$$\int_0^1 g'(\theta)\, E_\xi(g(\theta)) d\theta =$$

$$\int_0^1 \frac{d}{d\theta} h(g(\theta), g^+(\theta)) d\theta - \int_0^1 \nabla \left[g'(\theta)\, \partial_2 h(g^-(\theta), g(\theta))\right] d\theta =$$

$= h(g(1), g^+(1)) - h(g(0), g^+(0)) - \int_0^1 \nabla \left[g'(\theta)\, \partial_2 h(g^-(\theta), g(\theta))\right] d\theta.$

Todavia como $h(g(1), g^+(1)) = h(g(0)+1, g^+(0)+1) = h(g(0), g^+(0))$ o primeiro termo é nulo. Consequentemente:

$$\int_0^1 g'(\theta)\, E_\xi(g(\theta)) d\theta =$$

$$-\int_0^1 (g(\theta+\xi))'\, \partial_2 h(g(\theta), g(\theta+\xi)) d\theta + \int_0^1 g'(\theta)\, \partial_2 h(g(\theta-\xi), g(\theta)) d\theta.$$

Fazendo a mudança $\theta + \xi = t$ na primeira integral obtemos:

$$\int_0^1 g'(\theta)\, E_\xi(g(\theta)) d\theta = -\int_\xi^{\xi+1} (g(t))'\, \partial_2 h(g(t-\xi), g(t)) dt + \int_0^1 g'(\theta)\, \partial_2 h(g(\theta-\xi), g(\theta)) d\theta.$$

Contudo como $u(\theta+1) = u(\theta) + 1$, e $h(s_1+1, s_2+1) = h(s_1, s_2)$ temos:

$$\int_0^\xi (g(t))'\, \partial_2 h(g(t-\xi), g(t)) dt = \int_1^{\xi+1} (g(t))'\, \partial_2 h(g(t-\xi), g(t)) dt$$

Somando e subtraindo esse termo obtemos:

$$\int_0^1 g'(\theta)\, E_\xi(g(\theta))d\theta =$$

$= -\int_\xi^{\xi+1} (g(t))' \, \partial_2 h(g(t-\xi), g(t))dt - \int_0^\xi (g(t))' \, \partial_2 h(g(t-\xi), g(t))dt +$

$\int_0^1 g'(\theta)\, \partial_2 h(g(\theta-\xi), g(\theta))d\theta + \int_1^{\xi+1} (g(\theta))' \, \partial_2 h(g(\theta-\xi), g(\theta))d\theta =$

$-\int_0^{\xi+1} (g(t))' \, \partial_2 h(g(t-\xi), g(t))dt + \int_0^{\xi+1} (g(\theta))' \, \partial_2 h(g(\theta-\xi), g(\theta))d\theta = 0.$ ■

O modo clássico de buscarmos uma solução de $E_\xi(g(\theta)) = 0$ seria utilizarmos o método de Newton, o qual consiste em escrevermos $E_\xi(g+v) = E_\xi(g) + E'_\xi(g)\, v + Q(v)$ com $|Q(v)| < c\,|v|^2$ para $|v|$ pequeno, e resolvermos sucessivamente a equação linear $E_\xi(g) + E'_\xi(g)\, v = 0$, obtendo uma sequência convergente à solução de $E_\xi(g(\theta)) = 0$. Contudo ao invés disto resolveremos um outra equação linear, chamada equação homológica, que se escreve na forma:

$$g' E_\xi(g) + g' E'_\xi(g)\, v - v E'_\xi(g)\, g' = 0$$

Mostraremos adiante que a sequência obtida resolvendo sucessivamente esta equação converge para a solução $E_\xi(g(\theta)) = 0$. Reescrevendo a equação homológica em termos da função geradora temos:

$$E'_\xi(g)\, v = \partial_{11} h\left(g, g^+\right) v + \partial h_{12}\left(g, g^+\right) v^+ + \partial_{21} h\left(g^-, g\right) v^- + \partial h_{22}\left(g^-, g\right) v$$

e portanto

$$\begin{aligned} g' E'_\xi(g)\, v - v E'_\xi(g)\, g' &= g' \partial_{11} h\left(g, g^+\right) v + g' \partial h_{12}\left(g, g^+\right) v^+ + g' \partial_{21} h\left(g^-, g\right) v^- \\ &\quad + g' \partial h_{22}\left(g^-, g\right) v - v \partial_{11} h\left(g, g^+\right) (g') - v \partial h_{12}\left(g, g^+\right) (g')^+ \\ &\quad - v \partial_{21} h\left(g^-, g\right) (g')^- - v \partial h_{22}\left(g^-, g\right) (g') \\ &= \partial h_{12}\left(g, g^+\right) \left(g' v^+ - v\,(g')^+\right) + \partial_{21} h\left(g^-, g\right) \left(g' v^- - v\,(g')^-\right). \end{aligned}$$

Tomando $v = g'w$, de modo que $v^+ = (g')^+ w^+$ e $v^- = (g')^- w^-$a equação fica:

$$\begin{aligned} & g' E'_\xi(g)\, v - v E'_\xi(g)\, g' \\ =\ & \partial h_{12}\left(g, g^+\right) \left(g' (g')^+ w^+ - g' w\,(g')^+\right) + \partial_{21} h\left(g^-, g\right) \left(g' (g')^- w^- - g' w\,(g')^-\right) \\ =\ & \partial h_{12}\left(g, g^+\right) g' (g')^+ \left(w^+ - w\right) - \partial_{21} h\left(g^-, g\right) g' (g')^- \left(w - w^-\right). \end{aligned}$$

Como no Lema 3.2.6 definimos:

$$\begin{aligned}\nabla g(\theta) &= g(\theta+\xi) - g(\theta) = \left(g^{+} - g\right)(\theta) \\ \nabla^{*} g(\theta) &= g(\theta) - g(\theta-\xi) = \left(g - g^{-}\right)(\theta)\end{aligned}$$

E reescrevemos:

$g' E_{\xi}'(g)\, v - v E_{\xi}'(g)\, g' = \partial h_{12}(g, g^{+})\, g' (g')^{+} \nabla w - \partial_{21} h(g^{-}, g)\, g' (g')^{-} \nabla^{*} w.$

Contudo:

$$\nabla \partial h_{12}\left(g, g^{+}\right) g' (g')^{+} = \partial h_{12}\left(g, g^{+}\right) g' (g')^{+} - \partial h_{12}\left(g^{-}, g\right) g' (g')^{-}$$

e

$$\nabla^{*} \partial h_{12}\left(g, g^{+}\right) g' (g')^{+} \nabla w = \partial h_{12}\left(g, g^{+}\right) g' (g')^{+} \nabla w - \partial h_{12}\left(g^{-}, g\right) g' (g')^{-} \nabla^{*} w.$$

Consequentemente podemos reescrever a equação homológica como:

$$\nabla^{*} \partial h_{12}\left(g, g^{+}\right) g' (g')^{+} \nabla w = -g' E_{\xi}(g)\,. \tag{3.6}$$

Iniciaremos nosso processo iterativo com $g(\theta) = u(\theta)$ dado por 3.2. Afim de determinarmos a função $v(\theta)$, ou $w(\theta)$ dada pela relação $v = u'w$, iremos resolver a equação homológica em duas etapas:

$$\nabla^{*}(\Upsilon) = u' E_{\xi}(u) \tag{3.7}$$

$$\partial h_{12}\left(u, u^{+}\right) u' (u')^{+} \nabla w = \Upsilon + \mu \tag{3.8}$$

onde μ é uma constante a ser determinada.

Pelo Lemas 3.2.3 e 3.2.4 $u'(\theta) \neq 0$ e $\partial h_{12}(u, u^{+}) \neq 0$, o que implica que dividindo por $\partial h_{12}(u, u^{+})\, u' (u')^{+}$ equação 3.8 pode ser reescrita na forma $\nabla w = \tilde{g}$.

O Lema adiante nos dá condições para a existência da solução do sistema acima, contudo haverá uma perda no domínio de analiticidade.

Lema 3.2.7 (Levi - Moser [8]) *Suponhamos que ξ satisfaça a condição diofantiona $|n\xi - m| \geq \frac{K}{n^{\rho+1}}$ com $n > 0$, e que $g \in W_r$ tenha média zero. Então para todo $0 < r' < r$, a equação $\nabla \psi = g$ possui uma única solução $\psi \in W_{r'}$ com media zero $\left(\int_0^1 \psi d\theta = 0\right)$, tal que existe uma constante $C(K, \rho)$ satisfazendo:*

$$|\psi|_{r'} \leq C(K, \rho) \frac{|g|_r}{(r - r')^{\tau}},\ \tau = 2 + \rho.$$

Prova: Escrevendo em série de Fourier $\psi(\theta) = \sum \psi_n e^{2n\pi i\theta}$, $g(\theta) = \sum g_n e^{2n\pi i\theta}$ obtemos que a condição$\nabla\psi(\theta) = g(\theta)$ é equivalente a

$$\psi_n = \frac{g_n}{(e^{2n\pi i\xi} - 1)},$$

pois $\nabla\psi(\theta) = \psi(\theta + \xi) - \psi(\theta) = \sum \psi_n e^{2n\pi i\theta}\left(e^{2n\pi i\xi} - 1\right)$. Para que ψ tenha média zero devemos ter $\psi_0 = 0$, o que é possível porque este coeficiente fica indeterminado na equação.

Estimando o denominador de ψ_n obtemos:

$$\left|\left(e^{2n\pi i\xi} - 1\right)\right| = |2 - 2\cos(2n\pi i\xi)| = 2|\sin(n\pi\xi)| = 2\sin(\pi|n\xi - m|).$$

Usando o fato que se $0 \leq x \leq 1/2$, $\sin(\pi x) \geq x/2$; e escolhendo m tal que $|n\xi - m| < 1/2$ obtemos

$$2\sin(\pi|n\xi - m|) \geq 4|n\xi - m| \geq \frac{K}{n^{\rho+1}},$$

onde a última desigualdade segue do fato do número ser diofantino.

Como $g \in W_r$, pelo Lema 3.2.1, $|g_n| \leq |g|_r e^{-2\pi|n|r}$, o que nos dá:

$$|\psi_n| \leq \frac{|g|_r e^{-2\pi|n|r} |n|^{1+\rho}}{4K}$$

Se $0 < r/2 < \sigma < r$ reescrevemos

$$|\psi_n| \leq (4K)^{-1} e^{-2\pi|n|\sigma} e^{-2\pi|n|(r-\sigma)} |n|^{1+\rho}.$$

Usando que $xe^{-x} \leq e^{-1}$ e fazendo $x = \frac{2\pi|n|(r-\sigma)}{1+\rho}$ obtemos

$$\frac{2\pi|n|(r-\sigma)}{1+\rho} e^{\frac{-2\pi|n|(r-\sigma)}{1+\rho}} < e^{-1} \Rightarrow \left(\frac{2\pi(r-\sigma)}{1+\rho}\right)^{1+\rho} e^{-2\pi(r-\sigma)|n|} |n|^{1+\rho} < e^{-(1+\rho)}$$

e portanto:

$$|\psi_n| \leq (4K)^{-1} |g|_r e^{-2\pi|n|\sigma} \frac{(1+\rho)^{1+\rho}}{(2\pi)^{1+\rho}} \frac{e^{-(1+\rho)}}{(r-\sigma)^{1+\rho}}$$

Ou equivalentemente:

$$|\psi_n| \leq |g|_r C_1(K,\rho) \frac{e^{-2\pi|n|\sigma}}{(r-\sigma)^{1+\rho}} \text{ com } C_1(K,\rho) = \frac{(1+\rho)^{1+\rho}}{(2\pi)^{1+\rho}} e^{-(1+\rho)}.$$

Tomando $r' > 0$ tal que $\sigma = \frac{r+r'}{2}$, com $0 < r/2 < \sigma < r$ obtemos:

$|\psi|_{r'} \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |\psi_n| e^{2|n|\pi r'} \leq \sum_{n=-\infty}^{\infty} |g|_r C_1(K,\rho) \frac{e^{2\pi|n|(r'-\sigma)}}{(r-\sigma)^{1+\rho}} \leq 2|g|_r C_1(K,\rho) \sum_{n=0}^{\infty} \frac{e^{2\pi|n|(r'-\sigma)}}{(r-\sigma)^{1+\rho}}$. Logo:

$|\psi|_{r'} \leq \frac{2|g|_r C_1(K,\rho)}{(r-\sigma)^{1+\rho}} \sum\limits_{n=0}^{\infty} \left(e^{2\pi(r'-\sigma)}\right)^{|n|} = \frac{2|g|_r C_1(K,\rho)}{(r-\sigma)^{1+\rho}} \frac{1}{1-e^{2\pi(r'-\sigma)}}$, pois $r'-\sigma<0$.

Escolhendo σ suficientemente próximo de r teremos também r' próximo de r e

$0<\sigma-r'<1/2$. Usando o fato que $\frac{1}{1-e^{-2\pi x}} < \frac{1}{x}$ para $0<x<1/2$ obtemos:

$|\psi|_{r'} \leq \frac{2|g|_r C_1(K,\rho)}{(r-\sigma)^{1+\rho}} \frac{1}{(\sigma-r')} = \frac{2^{2+\rho}|g|_r C_1(K,\rho)}{(r-r')^{1+\rho}} \frac{2}{(r-r')} = \frac{2^{3+\rho}|g|_r C_1(K,\rho)}{(r-r')^{2+\rho}}$. Por fim obtemos:

$$|\psi|_{r'} \leq \frac{|g|_r C(K,\rho)}{(r-r')^{2+\rho}}$$

com $C(K,\rho) = 2^{3+\rho} C_1(K,\rho)$. ■

Observação: Vale a mesma demonstração para o caso $\nabla^* \psi = g$, onde g tem média zero. Para isso basta observamos que $\nabla^* \psi(\theta) = \psi(\theta) - \psi(\theta-\xi) = \sum \psi_n e^{2n\pi i\theta}\left(1-e^{-2n\pi i\xi}\right)$ e que $\left|1-e^{-2n\pi i\xi}\right| = \left|e^{2n\pi i\xi}-1\right|$. A demonstração prossegue do mesmo modo.

Resolvendo primeiramente a equação $\nabla^*(\Upsilon) = u' E_\xi(u)$ com ξdiofantino, obtemos pelo Lema 3.2.7 que existe uma única solução Υ satisfazendo :

$$|\Upsilon|_{r'} \leq C(K,\rho) \frac{|u'|_r |E_\xi(u)|_r}{(r-r')^{2+\rho}}.$$

E pelo Lema 3.2.3:

$$|\Upsilon|_{r'} \leq C_1(K,\rho,N_0) \frac{|E_\xi(u)|_r}{(r-r')^{\tau}} \tag{3.9}$$

com $\tau = 2+\rho$.

Para obtermos uma estimativa para a norma da solução de

$$\nabla w = \left(\partial h_{12}\left(u,u^+\right) u' (u')^+\right)^{-1} (\Upsilon+\mu) \text{ em } W_{r'}$$

é necessário estimarmos a constante μ. Relembremos que $\nabla^*(\Upsilon+\mu) = \nabla^*(\Upsilon) = u' E_\xi(u)$, e portanto como a solução tem média zero devemos ter:

$\int_0^1 \left(\partial h_{12}(u(\theta), u^+(\theta))\, u'(\theta)\,(u')^+(\theta)\right)^{-1} (\Upsilon(\theta)+\mu)\, d\theta = 0,$

O que por sua vez nos dá:

$$\mu = \frac{\int_0^1 \left(\partial h_{12}(u(\theta), u^+(\theta))\, u'(\theta)\,(u')^+(\theta)\right)^{-1} \Upsilon(\theta)\, d\theta}{\int_0^1 \left(\partial h_{12}(u(\theta), u^+(\theta))\, u'(\theta)\,(u')^+(\theta)\right)^{-1} d\theta}.$$

Lema 3.2.8 (Levi - Moser [8]) *Existe uma constante* $C_2(K,\rho,M,\kappa)>0$ *tal que tal que:*

$$|\mu| \leq C_2(K,\rho,M,\kappa)\frac{|E_\xi(u)|_r}{(r-r')^\tau}$$

com N_0, M, κ *dados pelos Lemas 3.2.3 e 3.2.4.*

Prova: A constante μ satisfaz:

$$|\mu| \leq \frac{\int_0^1\left|\left(\partial h_{12}\left(u(\theta),u^+(\theta)\right)u'(\theta)(u')^+(\theta)\right)^{-1}\Upsilon(\theta)\right|d\theta}{\left|\int_0^1\left(\partial h_{12}(u(\theta),u^+(\theta))u'(\theta)(u')^+(\theta)\right)^{-1}d\theta\right|} \leq |\Upsilon|_{r'}\frac{\int_0^1\left|\left(\partial h_{12}\left(u(\theta),u^+(\theta)\right)u'(\theta)(u')^+(\theta)\right)^{-1}\right|d\theta}{\left|\int_0^1\left(\partial h_{12}(u(\theta),u^+(\theta))u'(\theta)(u')^+(\theta)\right)^{-1}d\theta\right|} \leq$$

Contudo pela desigualdade de Cauchy - Schwarz:

$$1 = \left|\int_0^1\left(\partial h_{12}(u(\theta),u^+(\theta))u'(\theta)(u')^+(\theta)\right)^{-1}\frac{1}{\left(\partial h_{12}(u(\theta),u^+(\theta))u'(\theta)(u')^+(\theta)\right)^{-1}}\right|d\theta \leq$$

$$\left|\int_0^1\left(\partial h_{12}(u(\theta),u^+(\theta))u'(\theta)(u')^+(\theta)\right)^{-1}d\theta\right|\left|\int_0^1\frac{d\theta}{\left(\partial h_{12}(u(\theta),u^+(\theta))u'(\theta)(u')^+(\theta)\right)^{-1}}\right|.$$

O que nós dá:

$\frac{1}{\left|\int_0^1\left(\partial h_{12}(u(\theta),u^+(\theta))u'(\theta)(u')^+(\theta)\right)^{-1}d\theta\right|} \leq \left|\int_0^1\partial h_{12}(u(\theta),u^+(\theta))u'(\theta)(u')^+(\theta)\,d\theta\right| \leq MN_0^2$ pelos Lemas 3.2.3 e 3.2.4.

Logo:

$|\mu| \leq |\Upsilon|_{r'}\frac{\int_0^1\left|\left(\partial h_{12}\left(u(\theta),u^+(\theta)\right)u'(\theta)(u')^+(\theta)\right)^{-1}\right|d\theta}{MN_0^2} \leq \frac{\kappa}{M}|\Upsilon|_{r'} \leq C_2(K,\rho,M,\kappa)\frac{|E_\xi(u)|_r}{(r-r')^\tau}$, onde a última desigualdade segue da equação 3.9. ∎

Diminuiremos o domínio da analicidade para $0<r_1<r'<r$ afim de estimarmos a norma em W_{r_1} da solução $v=u'w$ da equação homológica $u'E_\xi(u)+u'E'_\xi(u)v-vE'_\xi(u)u'=0$.

Lema 3.2.9 (Levi - Moser [8]) *Fixado* $0<r_1<r'<r$ *existe uma constante* $C_3(K,N_0,M,\kappa,\sigma)$ *tal que se* w *é solução da equação* $\nabla^*\partial h_{12}(u,u^+)u'(u')^+\nabla w=-u'E_\xi(u)$*:*

$$|w|_{r_1} \leq C_3\frac{|E_\xi(u)|_r}{|r-r'|^\tau|r'-r_1|^\tau}$$

Prova: Como a solução Υ de $\nabla^*(\Upsilon)=u'E_\xi(u)$ pertence à $W_{r'}$ e

$$\nabla w = \left(\partial h_{12}(u,u^+)u'(u')^+\right)^{-1}(\Upsilon+\mu)$$

temos pelo Lema 3.2.7 que existe uma constante $\tilde{C}_1(K,\rho)$ tal que:

$|w|_{r_1} \leq \tilde{C}_1(K,\rho) \frac{\left|\left(\partial h_{12}\left(u,u^+\right)u'(u')^+\right)^{-1}(\Upsilon+\mu)\right|_{r'}}{|r'-r_1|^\tau} \leq \tilde{C}_1(K,\rho)\, MN_0^2 \frac{|(\Upsilon+\mu)|_{r'}}{|r'-r_1|^\tau}$.

Contudo novamente pelos Lemas 3.2.7 e 3.2.8, e a equação 3.9 obtemos:

$|w|_{r_1} \leq \tilde{C}_1(K,\rho)\, MN_0^2\left(C_1(K,\rho,N_0)+C_2(K,\rho,M,\kappa)\right)\frac{\left|E_\xi(u)\right|_r}{|r-r'|^\tau|r'-r_1|^\tau}$.

Tomando $C_3 = \tilde{C}_1(K,\rho)\, MN_0^2\left(C_1(K,\rho,N_0)+C_2(K,\rho,M,\kappa)\right)$. ■

Sem perda de generalidade, daqui em diante, suporemos $0<r<1$ e $r'=\frac{r_1+r}{2}$.

Lema 3.2.10 (Levi - Moser [8]) *Fixado $0<r'<r_1<r$ com $r'=\frac{r_1+r}{2}$ existe uma constante $C_4(K,\rho,N_0,M,\kappa,r_1)>0$ tal que se $v=u'w$, com w solução da equação $\nabla^*\partial h_{12}(u,u^+)\,u'(u')^+\nabla w = -u'E_\xi(u)$:*

$$|v|_{r_1} \leq C_4\frac{|E_\xi(u)|_r}{|r-r_1|^{2\tau}}$$

$$|v'|_{r_1} \leq 2C_4\frac{|E_\xi(u)|_r}{|r-r_1|^{2\tau}}$$

Prova: Como $v=u'w$ então segue dos Lemas 3.2.3 e 3.2.9 e do fato que $r'=\frac{r_1+r}{2}$ a seguinte desigualdade :

$$|v|_{r'} \leq NC_3\frac{|E_\xi(u)|_r}{|r-r'|^\tau|r'-r_1|^\tau} = 2^{2\tau}NC_3\frac{|E_\xi(u)|_r}{|r-r_1|^{2\tau}} = C_4\frac{|E_\xi(u)|_r}{|r-r_1|^{2\tau}}$$

Afim de estimarmos $|v'|_{r_1}$ usaremos a estimativa de Cauchy. Com efeito para z tal que $|\mathrm{Im}z| \leq r_1$, tomando o círculo $\gamma =: \left\{|t-z|=\frac{r-r_1}{4}\right\}$ em $|\mathrm{Im}z|\leq r'$ obtemos $v(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{v(t)}{t-z}dt$, $v'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{v(t)}{(t-z)^2}dt$, o que nos dá:

$$|v(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_\gamma\frac{|v(t)|}{|t-z|}dt \leq \frac{C_4|E_\xi(u)|_r}{(\pi)^2|r-r_1|^{2\tau+1}} \leq \frac{C_4|E_\xi(u)|_r}{|r-r_1|^{2\tau+1}}.$$

$$|v'(z)| \leq \frac{1}{2\pi}\int_\gamma\frac{|v(t)|}{|t-z|^2}dt \leq \frac{2C_4|E_\xi(u)|_r}{(\pi)^3|r-r_1|^{2\tau+2}} \leq \frac{2C_4|E_\xi(u)|_r}{|r-r_1|^{2\tau+2}}.$$

Contudo como $0<r<1$, temos $0<r-r_1<1$ o que implica :

$$\frac{C_4|E_\xi(u)|_r}{|r-r_1|^{2\tau+1}} \leq \frac{C_4|E_\xi(u)|_r}{|r-r_1|^{2\tau}} \text{ e } \frac{2C_4|E_\xi(u)|_r}{|r-r_1|^{2\tau+2}} \leq \frac{2C_4|E_\xi(u)|_r}{|r-r_1|^{2\tau}}.$$

Que por sua vez implica que

$$|v(z)| \leq \frac{C_4 |E_\xi(u)|_r}{|r - r_1|^{2\tau}}$$

$$|v'(z)| \leq \frac{2C_4 |E_\xi(u)|_r}{|r - r_1|^{2\tau}}$$

para todo z tal que $|\mathrm{Im} z| \leq r_1$. Logo:

$$|v(z)|_{r_1} \leq \frac{C_4 |E_\xi(u)|_r}{|r - r_1|^{2\tau}}$$

$$|v'(z)|_{r_1} \leq \frac{2C_4 |E_\xi(u)|_r}{|r - r_1|^{2\tau}}$$

■

Como era de se esperar do método de Newton mostraremos no próximo Lema que neste caso o erro tambem é quadrático.

Lema 3.2.11 (Levi - Moser [8]) *Fixado $0 < r_1 < r$, se v é solução de $u' E_\xi(u) + u' E'_\xi(u) v = v E'_\xi(u) u$, então existe uma constante $C_5(K, \rho, N_0, M, \kappa, r_1) > 0$ tal que :*

$$|E_\xi(u + v)|_{r_1} \leq C_5 \frac{|E_\xi(u)|_r^2}{|r - r_1|^{4\tau}}$$

Prova: Observemos que a equação $u' E_\xi(u) + u' E'_\xi(u) v = v E'_\xi(u) u'$ equivale a:

$$E_\xi(u) + E'_\xi(u) v = (u')^{-1} v E'_\xi(u) u' = w \frac{d}{d\theta} [E_\xi(u)].$$

Como no Lema 3.2.10 para cada θ tal que $|\mathrm{Im}\theta| \leq r_1$, tomando o círculo $\gamma =: \left\{|t - z| = \frac{r - r_1}{4}\right\}$ em $|\mathrm{Im}\theta| \leq r'$ obtemos pela estimativa de Cauchy que $\frac{d}{d\theta}[E_\xi(u(\theta))] = \frac{1}{2\pi i} \int_\gamma \frac{E_\xi(u(t))}{(t-\theta)^2} dt$, o que por sua vez nos dá:

$$\left| \frac{d}{d\theta} E_\xi(u(\theta)) \right| = \frac{1}{2\pi} \int_\gamma \frac{|E_\xi(u(t))|}{|t - z|^2} dt \leq \frac{2 |E_\xi(u)|_r}{(\pi)^3 |r - r_1|^2} = \tilde{C}_1 \frac{|E_\xi(u)|_r}{|r - r_1|^2}.$$

Então:

$$|E_\xi(u)|_{r_1} \leq \tilde{C}_1 \frac{|E_\xi(u)|_r}{|r - r_1|^2}$$

com $\tilde{C}_1 = \frac{2}{\pi^3}$.

Utilizando o Lema 3.2.9 , com $r' = \frac{r_1+r}{2}$, obtemos:

$$|w|_{r_1} \leq \tilde{C}_2 \frac{|E_{\xi\xi}(u)|_r}{|r-r_1|^{2\tau}}$$

Com $\tilde{C}_2 = 2^{2\tau} C_3$.

Consequentemente:

$$\left|E_\xi(u) + E'_\xi(u)\,v\right|_{r_1} \leq |w|_{r_1} \left|\frac{d}{d\theta} E_\xi(u)\right|_{r_1} \leq \tilde{C}_3 \frac{|E_\xi(u)|_r^2}{|r-r_1|^{2\tau+2}} \leq \tilde{C}_3 \frac{|E_\xi(u)|_r^2}{|r-r_1|^{2\tau}},$$

pois $0 < |r - r_1| < 1$.

Pela fórmula de Taylor, $E_\xi(u+v) = E_\xi(u) + E'_\xi(u)\,v + Q(u,v)$, com $|Q(u,v)|_{r_1} \leq \tilde{C}_4 |v|_{r_1}^2$. Contudo pelo Lema 3.2.10, $|v|_{r_1} \leq \frac{C_4 \left|E_\xi(u)\right|_r}{|r-r_1|^{2\tau}}$.

Logo:

$$|E_\xi(u+v)|_{r_1} \leq \tilde{C}_3 \frac{|E_\xi(u)|_r^2}{|r-r_1|^{2\tau}} + \frac{\tilde{C}_4 C_4 |E_\xi(u)|_r^2}{|r-r_1|^{4\tau}} = \frac{\left(|r-r_1|^{2\tau} \tilde{C}_3 + \tilde{C}_4 C_4\right) |E_\xi(u)|_r^2}{|r-r_1|^{4\tau}}.$$

Todavia como $\tau = 2 + \rho$ e $0 < |r - r_1| < 1$, segue que

$$|E_\xi(u+v)|_{r_1} \leq \frac{\left(\tilde{C}_3 + \tilde{C}_4 C_4\right) |E_\xi(u)|_r^2}{|r-r_1|^{4\tau}} = \frac{C_5 |E_\xi(u)|_r^2}{|r-r_1|^{4\tau}}.$$

■

Fixado $0 < r_\infty < r < 1$ definimos a sequência $r_n = \frac{r_{n-1}+r_\infty}{2}$, com $r_0 = r$. Obviamente $r_n - r_\infty = \frac{r_{n-1}-r_\infty}{2}$ de modo que $r_n \to r_\infty$ e $r_n - r_\infty = \frac{r_0 - r_\infty}{2^{n+1}}$. Fazendo $u_0 = u$, $v_0 = v$, em cada etapa do processo, podemos resolver a equação homológica $u'_n E_\xi(u_n) + u'_n E'_\xi(u_n)\,v_n = v_n E'_\xi(u_n)\,u'_n$ com $u_{n+1} = u_n + v_n$. Contudo para que as desigualdades dos Lemas 3.2.8, 3.2.9, 3.2.10 e 3.2.11, continuem validas com as mesmas constantes para todo u_n devemos ter:

$$\begin{aligned} \left(u_n, u_n^+\right) &\subset D_R \text{ para } |\mathrm{Im}\theta| < r_n \\ |u'_n|_{r_n} &< N_0, \left|\left(u'_n\right)^{-1}\right|_{r_n} < N_0\ . \end{aligned}$$

Na Proposição adiante demonstraremos que se $|E_\xi(u)|_r$ for suficientemente pequeno então isso sempre ocorre.

Proposição 3.2.1 (Levi - Moser [8]) *Existe um* $\delta(r, R, \kappa, M, N, \rho, K) > 0$ *tal que se* $|E_\xi(u)|_r < \delta$ *então:*

$$\begin{array}{rcl} \left(u_n, u_n^+\right) & \subset & D_{\tilde{R}} \text{ para } |Im\theta| < r_n \\ |u_n'|_{r_n} & < & N, \left|(u_n')^{-1}\right|_{r_n} < N \end{array}$$

com $N = 2N_0$ *e* $\tilde{R} = R/2$.

Prova: Como $u_1 = u_0 + v_0$ então:

$|u_1 - u_0|_{r_1} = |v_0|_{r_1} \le C_4 \frac{|E_\xi(u)|_r}{|r_0 - r_1|^{2\tau}} = 2^{2\tau} C_4 \frac{|E_\xi(u)|_r}{|r_0 - r_\infty|^{2\tau}} \le 2.2^{4\tau} C_4 \frac{|E_\xi(u)|_r}{|r_0 - r_\infty|^{2\tau}}$, e

$|u_1' - u_0'|_{r_1} = |v_0'|_{r_1} \le 2C_4 \frac{|E_\xi(u)|_r}{|r_0 - r_1|^{2\tau}} = 2.2^{2\tau} C_4 \frac{|E_\xi(u)|_r}{|r_0 - r_\infty|^{2\tau}} \le 2^2.2^{4\tau} C_4 \frac{|E_\xi(u)|_r}{|r_0 - r_\infty|^{2\tau}}$.

Tomemos $\delta_0 > 0$ suficientemente pequeno tal que se $|E_\xi(u)|_r < \delta_0$, então:

$$\begin{array}{rcl} |u_1 - u_0|_{r_1} & < & \dfrac{R}{2}, \\ |u_1' - u_0'|_{r_1} & < & \dfrac{1}{2N_0}. \end{array}$$

Sem perda de generalidade podemos supor $N_0 > 2$.

Tomemos (z_1, z_2) em $\mathbb{C}^2$ tal que $\text{dist}\left((z_1, z_2), \left(u_1(\theta), u_1^+(\theta)\right)\right) \le \frac{R}{2}$ para todo θ tal que $|\text{Im}\theta| \le r_1$. Desta maneira:

$$\begin{array}{l} \text{dist}\left((z_1, z_2), \left(u_0(\theta), u_0^+(\theta)\right)\right) \le \\ \text{dist}\left((z_1, z_2), \left(u_1(\theta), u_1^+(\theta)\right)\right) + \text{dist}\left(\left(u_1(\theta), u_1^+(\theta)\right), \left(u_0(\theta), u_0^+(\theta)\right)\right) \\ < \dfrac{R}{2} + \dfrac{R}{2} = R. \end{array}$$

Como $\left(u_0(\theta), u_0^+(\theta)\right) \in D_R$ segue então que $(z_1, z_2) \in D$. Pela defingção do conjunto $D_{\frac{R}{2}}$ segue que $\left(u_1(\theta), u_1^+(\theta)\right) \in D_{\frac{R}{2}}$ para todo θ tal que $|\text{Im}\theta| \le r_1$. Além disso:

$$|u_1'|_{r_1} \le |u_1' - u_0'|_{r_1} + |u_0'|_{r_1} \le \frac{1}{2N_0} + N_0 < 2N_0.$$

E da desigualdade $|u_0'|_{r_1} - |u_1'|_{r_1} \le |u_1' - u_0'|_{r_1}$ temos:

$$|u_1'|_{r_1} > \frac{1}{N_0} - \frac{1}{2N_0}.$$

O que nos dá:
$$\left|(u_1')^{-1}\right|_{r_1} \leq 2N_0.$$
Como $|u'|_r \leq N_0$, $\left|(u')^{-1}\right|_r \leq N_0$, e $D_R \subset D_{R/2}$ se substituirmos N_0 por $N = 2N_0$ e R por $\tilde{R} = R/2$, nas demonstrações dos Lemas 3.2.8, 3.2.9, 3.2.10 e 3.2.11 teremos que para $k = 0, 1$:

$$\begin{aligned}
\left(u_k, u_k^+\right) &\subset D_{\tilde{R}} \text{ para } |\mathrm{Im}\theta| < r_k \\
|u_k'|_{r_k} &< N, \left|(u_k')^{-1}\right|_{r_k} < N\ ,
\end{aligned}$$

e a equação homológica é resolvida de modo que ainda valem as mesmas constantes dos Lemas 3.2.10, 3.2.11 para as funções v_1, v_1' em W_{r_1}, e $\left|E_\xi\left(u_2\right)\right|_{r_2}$ com $u_2 = u_1 + v_1$.

Suponhamos por indução que para todo $k \leq n-1$ e $\left|E_\xi\left(u\right)\right|_r < \delta_0$, valham as estimativas, com $N = 2N_0$ e $\tilde{R} = R/2$

$$\begin{aligned}
\left(u_k, u_k^+\right) &\subset D_{\tilde{R}} \text{ para } |\mathrm{Im}\theta| < r_k \\
|u_k'|_{r_k} &< N, \left|(u_k')^{-1}\right|_{r_k} < N\ .
\end{aligned}$$

Mostraremos que o mesmo ocorre para $k = n$.

Por hipótese de indução para todo $k \leq n-1$:

$$|v_k|_{r_{k+1}} \leq C_4 \frac{\left|E_\xi\left(u_k\right)\right|_{r_k}}{\left|r_k - r_{k+1}\right|^{2\tau}},$$

$$|v_k'|_{r_{k+1}} \leq 2C_4 \frac{\left|E_\xi\left(u_k\right)\right|_{r_k}}{\left|r_k - r_{k+1}\right|^{2\tau}}.$$

De modo que a desigualdade do Lema 3.2.11 fica:

$$\left|E_\xi\left(u_{k+1}\right)\right|_{r_{k+1}} \leq C_5 \frac{\left|E_\xi\left(u_k\right)\right|_{r_k}^2}{\left|r_k - r_{k+1}\right|^{4\tau}} = \left(2^{4\tau}\right)^{k+1} C_5 \frac{\left|E_\xi\left(u_k\right)\right|_{r_k}^2}{\left|r_0 - r_\infty\right|^{4\tau}}.$$

Fazendo $\epsilon_k = \left|E_\xi\left(u_k\right)\right|_{r_k}$ e $d = 2^{4\tau}$ obtemos a expressão:

$$\epsilon_{k+1} \leq C_6 d^k \epsilon_k^2,$$

com $C_6 = 2^{4\tau} C_5$. Escrevendo $\zeta_k = C_6 d^{k+1} \epsilon_k$ temos:

$$\begin{aligned}
\zeta_{k+1} &= C_6 d^{k+2} \epsilon_{k+1} \leq C_6^2 d^{2k+2} \epsilon_k^2 = \zeta_k^2 \\
\zeta_k &\leq \zeta_0^{2^k}
\end{aligned}$$

Logo:

$$
\begin{aligned}
|u_n - u_0|_{r_n} &= \sum_{k=0}^{n-1} |v_k|_{r_k} \leq \sum_{k=0}^{n-1} C_4 \frac{|E_\xi(u_k)|_{r_k}}{|r_k - r_{k+1}|^{2\tau}} = \sum_{k=0}^{n-1} \left(2^{2\tau}\right)^{k+1} C_4 \frac{\epsilon_k}{|r_0 - r_\infty|^{2\tau}} \\
&\leq \sum_{k=0}^{n-1} \left(2^{4\tau}\right)^{k+1} C_4 \frac{\epsilon_k}{|r_0 - r_\infty|^{2\tau}} = C_4 \sum_{k=0}^{n-1} d^{k+1} \frac{\epsilon_k}{|r_0 - r_\infty|^{2\tau}}
\end{aligned}
$$

e portanto

$$
|u_n - u_0|_{r_n} \leq \frac{C_4}{C_6 |r_0 - r_\infty|^{2\tau}} \sum_{k=0}^{n-1} C_6 d^{k+1} \epsilon_k = \frac{C_4}{C_6 |r_0 - r_\infty|^{2\tau}} \sum_{k=0}^{n-1} \zeta_k \leq \frac{C_4}{C_6 |r_0 - r_\infty|^{2\tau}} \sum_{k=0}^{n-1} \zeta_0^{2^k}.
$$

Contudo tomando $\zeta_0 = C_6 d \epsilon_0 < 1/2$, ou $\epsilon_0 < \tilde{\delta}_0 = \frac{1}{2C_6 d}$ obtemos:

$$
\begin{aligned}
|u_n - u_0|_{r_n} &\leq \frac{C_4}{C_6 |r_0 - r_\infty|^{2\tau}} \sum_{k=0}^{n-1} \zeta_0^{k+1} \frac{C_4}{C_6 |r_0 - r_\infty|^{2\tau}} \sum_{k=0}^{\infty} \zeta_0^{k+1} \\
&\leq \frac{C_4}{C_6 |r_0 - r_\infty|^{2\tau}} \frac{\zeta_0}{1 - \zeta_0} < \frac{2\zeta_0 C_4}{C_6 |r_0 - r_\infty|^{2\tau}} = 2.2^{4\tau} C_4 \frac{|E_\xi(u)|_r}{|r_0 - r_\infty|^{2\tau}}.
\end{aligned}
$$

Similarmente:

$$
|u_n' - u_0'|_{r_n} = \sum_{k=0}^{n-1} |v_k'|_{r_k} \leq \sum_{k=0}^{n-1} 2C_4 \frac{|E_\xi(u_k)|_{r_k}}{|r_k - r_{k+1}|^{2\tau}} < 2^2.2^{4\tau} C_4 \frac{|E_\xi(u)|_r}{|r_0 - r_\infty|^{2\tau}}.
$$

Desta maneira tomando $\delta = \min\left\{\delta_0, \tilde{\delta}_0\right\}$ com $|E_\xi(u)|_r < \delta$, então:

$$
\begin{aligned}
|u_n - u_0|_{r_n} &< \frac{R}{2} \\
|u_n' - u_0'|_{r_n} &< \frac{1}{2N_0}.
\end{aligned}
$$

Procedendo como no caso $n = 1$, tomemos (z_1, z_2) em $\mathbb{C}^2$ tal que

$$
\operatorname{dist}\left((z_1, z_2), (u_n(\theta), u_n(\theta))\right) \leq \frac{R}{2} \text{ para todo } \theta \text{ tal que } |\operatorname{Im}\theta| \leq r_1.
$$

Desta maneira:

$$
\begin{aligned}
& \operatorname{dist}\left(\left(z_1, z_2\right),\left(u_0(\theta), u_0^{+}(\theta)\right)\right) \\
\leq\ & \operatorname{dist}\left(\left(z_1, z_2\right),\left(u_n(\theta), u_n(\theta)\right)\right)+\operatorname{dist}\left(\left(u_n(\theta), u_n(\theta)\right),\left(u_0(\theta), u_0^{+}(\theta)\right)\right) \\
<\ & \frac{R}{2}+\frac{R}{2}=R .
\end{aligned}
$$

Como $\left(u_0(\theta), u_0^{+}(\theta)\right) \in D_R$ segue então que $\left(z_1, z_2\right) \in D$. Pela definção do conjunto $D_{\frac{R}{2}}$ segue que $\left(u_n(\theta), u_n(\theta)\right) \in D_{\frac{R}{2}}$ para todo θ tal que $|\mathrm{Im}\theta| \leq r_1$. Além disso:

$$
\left|u_n\right|_{r_1} \leq\left|u_n-u_0^{\prime}\right|_{r_1}+\left|u_0^{\prime}\right|_{r_1} \leq \frac{1}{2 N_0}+N_0<2 N_0 .
$$

E da desigualdade $\left|u_0^{\prime}\right|_{r_1}-\left|u_n\right|_{r_1} \leq\left|u_n-u_0^{\prime}\right|_{r_1}$ temos:

$$
\left|u_n\right|_{r_1}>\frac{1}{N_0}-\frac{1}{2 N_0} .
$$

O que nos dá:

$$
\left|\left(u_n\right)^{-1}\right|_{r_1} \leq 2 N_0 .
$$

■

Como consequência explícita na prova da Proposição 3.2.1 obtemos:

Corolário 3.2.2 *A solução u_n da equação homológica*

$$
u_n^{\prime} E_{\xi}\left(u_n\right)+u_n^{\prime} E_{\xi}^{\prime}\left(u_n\right) v_n=v_n E_{\xi}^{\prime}\left(u_n\right) u_n^{\prime}
$$

satisfaz as desigualdades em W_{r_n}.

$$
\begin{aligned}
\left|u_n-u_0\right|_{r_n} & <2^{4 \tau+1} C_4 \frac{\left|E_{\xi}(u)\right|_r}{\left|r_0-r_{\infty}\right|^{2 \tau}} \\
\left|u_n^{\prime}-u_0^{\prime}\right|_{r_n} & <2^{4 \tau+2} C_4 \frac{\left|E_{\xi}(u)\right|_r}{\left|r_0-r_{\infty}\right|^{2 \tau}}
\end{aligned}
$$

Mostraremos adiante que u_n converge a solução da equação $\left|E_{\xi}\left(u_{\xi}\right)\right|_{r_{\infty}}=0$ em $W_{r_{\infty}}$.

Proposição 3.2.2 *Para o mesmo $\delta(r, R, \kappa, M, N, \rho, K)>0$ da Proposição 3.2.1, se $\left|E_{\xi}(u)\right|_r<\delta$ então existe uma única função u_{ξ} próxima de u, tal que $E_{\xi}\left(u_{\xi}\right)=0$ com $u_{\xi}(\theta)-\theta \in W_{r_{\infty}}$ e $\int_0^1\left(u_{\xi}(\theta)-\theta\right) d \theta=0$.*

Prova: Novamente $u_n = u_0 + \sum_{k=0}^{n-1} v_k$ e como na Proposição 3.2.1

$$|v_k|_{r_{k+1}} \leq C_4 \frac{|E_\xi(u_k)|_{r_k}}{|r_k - r_{k+1}|^{2\tau}} = C_4 d^{k+1} \frac{\epsilon_k}{|r_0 - r_\infty|^{2\tau}} = \frac{C_4}{C_6 |r_0 - r_\infty|^{2\tau}} \zeta_k \text{ com } \zeta_k = C_6 d^{k+1} \epsilon_k.$$

Como $\zeta_k \leq \zeta_0^{2^k}$ e $\zeta_0 = C_6 d \epsilon_0 < 1/2$ por hipótese, temos que ζ_k é o termo geral de uma série convergente e obviamente $\epsilon_k \to 0$. Portanto a serie $\sum_{k=0}^{\infty} v_k$ converge uniformemente para $|\mathrm{Im}\theta| \leq r_\infty$.

Pela definição de u_n temos que essa sequência também converge uniformemente e portanto $|E_\xi(\lim(u_n))| = \lim |E_\xi(u_n)| = \lim \epsilon_n = 0$. Isto é, u_n converge uniformemente a solução $E_\xi(u_\xi) = 0$ em $|\mathrm{Im}\theta| \leq r_\infty$. ■

Lema 3.2.12 *Dado $\delta_1 > 0$ existe um $\epsilon_1 > 0$ tal que para todo $|\xi - \omega| < \epsilon_1$, $|E_\xi(u(\theta))|_r < \delta_1$.*

Prova: Definamos o seguinte operador $\eta : (|\mathrm{Im}\theta| \leq r) \times [\omega - \xi_R, \omega + \xi_R] \to \mathbb{C}$, dado por:

$$\eta(\theta, \xi) = \partial_1 h(u(\theta), u(\theta + \xi)) + \partial_2 h(u(\theta - \xi), u(\theta)).$$

$\eta(\theta, \xi)$ é uniformemente contínua restrita ao compacto $(\{0 \leq \mathrm{Re}(\theta) \leq 2\} \cap \{|\mathrm{Im}\theta| \leq r_5\}) \times [\omega - \xi_R, \omega + \xi_R]$, como $\eta(\theta + 1, \xi) = \eta(\theta, \xi)$, temos que $\eta(\theta, \xi)$ é uniformemente contínua em $(|\mathrm{Im}\theta| \leq r) \times [\omega - \xi_R, \omega + \xi_R]$. Então dado $\delta_1 > 0$, existe $\epsilon_1 > 0$ tal que para todo $|(\theta_1, \xi) - (\theta, \omega)| < \epsilon_1$ temos $|\eta(\theta_1, \xi) - \eta(\theta, \omega)| < \frac{\delta_1}{2}$. Porém como $\eta(\theta, \omega) = 0$, fazendo $\theta_1 = \theta$, $|(\theta, \omega) - (\theta, \xi)| < \epsilon_1$ implica $|\eta(\theta, \xi)| < \frac{\delta_1}{2}$, ou seja, dado $\delta_1 > 0$ existe $\epsilon_1 > 0$ tal que $|\xi - \omega| < \epsilon_1 \Rightarrow |\eta(\theta, \xi)| < \frac{\delta_1}{2}$.

Mas por definição $E_\xi(u(\theta)) = \eta(\theta, \xi)$, logo $|E_\xi(u(\theta))|_r \leq \frac{\delta_1}{2} < \delta_1$. ■

Antes de proseguirmos demonstraremos uma Proposição que nos dá uma propriedade essencial dos números diofantinos.

Proposição 3.2.3 *Sejam $\lambda \in [0,1]$ e $\varepsilon > 0$ fixos tal que $[\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon] \subset [0,1]$, e $K_0 = \min\{\lambda - \varepsilon, 1 - (\lambda + \varepsilon)\}$. O conjunto*

$$C_\varepsilon(K_1, \rho_1, \lambda) = \left\{ \xi \in [\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon] / \left| \xi - \frac{m}{n} \right| \geq \frac{K_1}{n^{3+\rho_1}} \ \forall m, n > 0 \textit{ inteiros, } K_0 \geq K_1 > 0, \rho_1 > 0 \textit{ fixos} \right\}$$

tem medida de lebesgue total em $[\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon]$.

Prova: Para todo $k \leq K_0$,e $\xi \in [\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon]$ temos $|\xi - m| \geq k$. Se ξ é um número diofantino em $[\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon]$ satisfazendo $\left|\xi - \frac{m}{n}\right| \geq \dfrac{k}{n^{2+\rho}}$, $\forall\ m,n > 0$ inteiros, e $k \leq K_0$, então a condição de ξ ser diofantino nesse caso é equivalente a $\left|\xi - \frac{m}{n}\right| \geq \dfrac{k}{n^{2+\rho}}$, $\forall\ m,n > 1$ inteiros, pois quando $n = 1$ a igualdade é trivialmente satisfeita.

Fixado $\rho_1 > 0$, seja $A = \{\xi \in [\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon] / \left|\xi - \frac{m}{n}\right| \geq \dfrac{k}{n^{3+\rho_1}}\ \forall\ m,n > 1$ inteiros, com $k \leq K_0\}$. Um número ξ pertence a A^c se e somente se para todo $0 < k \leq K_0$, existem $m,n > 1 \in \mathbb{Z}$ solução de $|n\xi - m| < \dfrac{K}{n^{3+\rho_1}}$.

Consideremos $B(k,\rho_1) = \{\xi \in [\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon] / |n\xi - m| < \dfrac{k}{n^{2+\rho_1}}$ para algum $m,n > 1 \in \mathbb{Z}\}$, o conjunto $A^c = \cap_k B(K,\rho_1)$.

Para n,m fixos a inequação $|\xi - m/n| < \dfrac{k}{n^{3+\rho_1}}$ define um intervalo $I(k,\rho_1,n,m)$ centrado em m/n de tamanho $\dfrac{k}{n^{3+\rho_1}}$. Além disso a inequação $|n\xi - m| < \dfrac{k}{n^{2+\rho_1}}$ implica que:

$$-1 < -k < -kn^{-(2+\rho)} + n\xi < m < kn^{-(2+\rho)} + n\xi < k + n < n + 1.$$

Como o intervalo $-1 < m < n+1$ contém $n+1$ inteiros, temos

$$B(K,\rho_1) \subset \cup_{n=2}^{\infty}(\cup_{m=0}^{n} I(K,\rho_1,n,m)).$$

Deste modo, denotando por μ a medida de lebegue obtemos:

$$\begin{aligned}
\mu(B(K,\rho_1)) &\leq \sum_{n=2}^{\infty}\sum_{m=0}^{n}\mu(I(K,\rho_1,n,m)) = \sum_{n=2}^{\infty}(n+1)\frac{2k}{n^{3+\rho_1}} = \\
&= 2k(\sum_{n=2}^{\infty} n^{-(2+\rho_1)} + n^{-(3+\rho_1)}) \leq 4k\sum_{n=2}^{\infty} n^{-(2+\rho_1)}.
\end{aligned}$$

Logo $\mu(A^c) \leq 4k\sum_{n=2}^{\infty} n^{-(2+\rho_1)}$ para todo $k > 0$, e consequentemente $\mu(A^c) = 0$.

Fixando $K_1 \leq K_0$ seja agora

$$D = \left\{\xi \in [\lambda-\varepsilon,\lambda+\varepsilon] / \left|\xi - \frac{m}{n}\right| \geq \frac{K_1}{m^{3+\rho}}, \forall m,n > 1 \text{ inteiros } \rho > 0\right\}.$$

Temos novamente que $\xi \in D^c$ se e somente se para todo $\rho > 0$ existem $m,n > 1$ inteiros solução de $|n\lambda - m| < \dfrac{K_1}{n^{2+\rho}}$. Similarmente definimos $B(K_1, \rho) = \{\xi \in [\lambda - \varepsilon, \lambda + \varepsilon] / \, |n\xi - m| < \dfrac{K_1}{n^{2+\rho}}$ para algum $m, n > 1 \in \mathbb{Z}\}$ e obtemos $D^c = \cap_\rho B(K_1, \rho)$.

Repetindo as contas obtemos $\mu(D^c) \leq 4K_1 \sum\limits_{n=2}^{\infty} n^{-(2+\rho)}$ para todo $\rho > 0$ o que implica que $\mu(D^c) = 0$.

Vejamos que $C_\varepsilon(K_1, \rho_1, \lambda) = A \cap D$, como $\mu((A \cap D)^c) \leq \mu(A^c) + \mu(D^c) = 0$ concluimos que $\mu(C_\varepsilon(K_1, \rho_1, \lambda)) = \mu([\gamma - \varepsilon, \gamma + \varepsilon]) = 2\varepsilon$. ■

Teorema 4 *Seja Γ uma oval de classe C^k, com $k \geq 2$, tal que a aplicação do bilhar associada tenha reta invariante $\{p_0 \neq 0\}$. Então em toda vizinhança (faixa aberta) da reta invariante no cilindro existem curvas analíticas rotacionais invariantes pela a aplicação do bilhar, conjugada a rotação em S^1 por um número de rotação diofantino. Ainda a união dessas curvas tem medida positiva no cilindro.*

Prova: Seja ξ um número diofantino com constantes ρ e K pertencentes ao intervalo $[\omega - \xi_R, \omega + \xi_R]$. Pela Proposição 3.2.2, fazendo $r_\infty = r/2$, existe um $\delta(r, R, \kappa, M, N, \rho, K) > 0$, tal que se $|E_\xi(u)|_r < \delta$, então existe uma única função $u_\xi(\theta)$ próxima de $u(\theta)$ tal que $E_\xi(u_\xi(\theta)) = 0$ com $u_\xi(\theta) - \theta \in W_{r/2}$ e $\int_0^1 (u_\xi(\theta) - \theta) d\theta = 0$.

Se variarmos ξ no conjunto dos números diofantinos contidos em $[\omega - \xi_R, \omega + \xi_R]$ os números r, R, κ, M, N permanecem os mesmos, pois a função geradora e a função $u(\theta)$ não são alteradas. Restringindo ξ ao conjunto $C_\varepsilon(K_1, \rho_1, \lambda)$, os números K_1 e ρ_1 também não são alterados, o que nos leva a concluir que para cada conjunto $C_\varepsilon(K_1, \rho_1, \lambda)$ existe um $\delta(r, R, \kappa, M, N, \rho_1, K_1)$ tal que se $|E_\xi(u)|_r < \delta$, então vale o resultado enunciado no parágrafo anterior.

Pelo Lema 3.2.12 existe ϵ_1 tal que para todo $|\xi - \omega| < \epsilon_1$ temos $|E_\xi(u(\theta))|_r < \delta_1$.

Fixado $\xi_1 \in C_\varepsilon(K_1, \rho_1)$ tomemos $\epsilon_1 > 0$ tal que $\delta_1 < \delta(r, R, \kappa, M, N, \rho_1, K_1)$, e $(\omega - \epsilon_1, \omega + \epsilon_1) \subset [\omega - \xi_R, \omega + \xi_R]$. Pela Proposição 3.2.3 o conjunto $C_\varepsilon(K_1, \rho_1, \lambda) \cap (\omega - \epsilon_1, \omega + \epsilon_1)$ tem medida total em $(\omega - \epsilon_1, \omega + \epsilon_1)$, e todo $\xi \in C_\varepsilon(K_1, \rho_1) \cap (\omega - \epsilon_1, \omega + \epsilon_1)$ satisfaz $|E_\xi(u(\theta))|_r < \delta_1 < \delta(r, R, \kappa, M, N, \rho_1, K_1)$.

Segue então da Proposição 3.2.2 que para todo $\xi \in C_\varepsilon(K_1, \rho_1) \cap (\omega - \epsilon_1, \omega + \epsilon_1)$ existe uma única função $u_\xi(\theta)$ próxima de $u(\theta)$ tal que $E_\xi(u_\xi(\theta)) = 0$ com $u_\xi(\theta) - \theta \in W_{r/2}$ e $\int_0^1 (u_\xi(\theta) - \theta) d\theta = 0$. Pondo $v_\xi(\theta) = -\partial_1 h(u_\xi(\theta), u_\xi(\theta + \xi))$ temos uma curva analítica $(u_\xi(\theta), v_\xi(\theta))$ satisfazendo:

$$T\left(u_\xi(\theta), v_\xi(\theta)\right) = \left(u_\xi(\theta + \xi), v_\xi(\theta + \xi)\right).$$

Até aqui demonstramos que existem as curvas invariantes, para demonstrarmos que toda faixa aberta contém essas curvas procedemos do seguinte modo:

Seja $U_\varepsilon = \{(s,p) \in \mathbb{R}^2 / \, |p - p_0| < \varepsilon\}$ uma faixa aberta de largura 2ε. Como

$$\partial_1 h\,(s_1+1, s_2+1) = \partial_1 h\,(s_1, s_2)$$

e $h\,(s_1, s_2)$ é analítica em $\mathbb{R}^2$, então $\partial_1 h\,(s_1, s_2)$ é uniformemente contínua em $\mathbb{R}^2$, portanto existe $\nu > 0$ tal que para todo $|((\tilde{s}_1, \tilde{s}_2) - (s_1, s_2))| < \nu$ temos $|\partial_1 h\,(s_1, s_2) - \partial_1 h\,(\tilde{s}_1, \tilde{s}_2)| < \varepsilon$.

Pelo Corolário 3.2.2 a solução $E_\xi(u_\xi(\theta)) = 0$ satisfaz $|u_\xi - u|_{r/2} < 2C_4 a \frac{|E_\xi(u)|_r}{(r/2)^{2(K_1+2)}}$ com $a = 2^{4(K_1+2)}$. Tomando $\xi \in C_\epsilon\,(K_1, \rho_1)$ tal que $|\xi - \omega|$ seja suficientemente pequeno teremos pelo Lema 3.2.12 que $|E_\xi\,(u)|_r < \frac{(r/2)^{2K_1}\nu/\sqrt[2]{2}}{C_4 2a}$, o que nos dá

$$|u_\xi\,(\theta) - u\,(\theta)|_{r/2} < \nu/\sqrt[2]{2}.$$

Implicando em

$$|(u_\xi\,(\theta)\,, u_\xi\,(\theta+\xi)) - (u\,(\theta)\,, u\,(\theta+\xi))| < \nu.$$

Retomando ao conjunto dos números reais com $\theta \in \mathbb{R}$, segue da continuidade uniforme de $\partial_1 h$ que

$|v_\xi(\theta) - v(\theta)| = |\partial_1 h\,(u_\xi\,(\theta)\,, u_\xi\,(\theta+\xi)) - \partial_1 h\,(u\,(\theta)\,, u\,(\theta+\xi))| < \varepsilon$, e portando as curvas $(u_\xi(\theta), v_\xi(\theta))$ estão contidas emU_ε.

A conclusão final de que a união dessas curvas tem medida positiva no cilindro segue do fato que a medida de Lebesgue do conjunto $C_\varepsilon(K_1, \rho_1) \cap (\omega - \epsilon_1, \omega + \epsilon_1)$ é $2\epsilon_1 > 0$, e que a medida $ds \wedge dp$ usada por nos no cilindro é a medida produto. ■

3.3 Um pouco sobre a região entre duas retas invariantes

Nesta Seção estudaremos a região entre duas retas invariantes.

Corolário 3.3.1 *Existe um conjunto de medida positiva de curvas invariantes se acumulando em ambos os lados da reta invariante $p = p_0$. Se $p_0 = 0$ devemos supor Γ C^k, com $k > 7$.*

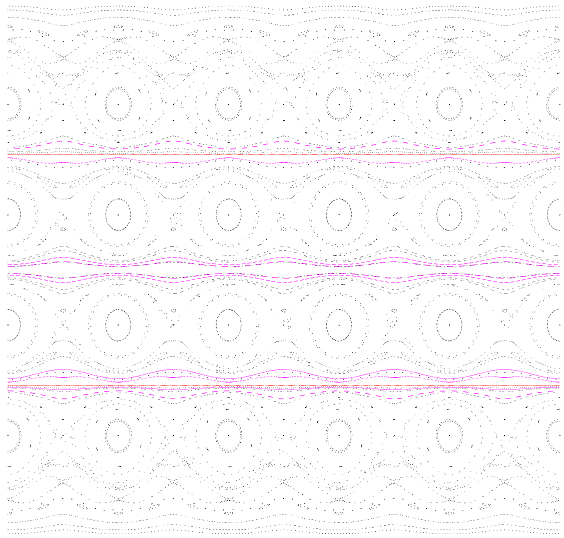

Figura 3.1: Curvas invariantes na vizinhança de retas invariantes do bilhar em uma oval 5-simétrica com raio de curvatura $R(\varphi) = 1+0{,}4\cos(5\varphi)$.

Prova: Tomemos γ_{ω_1} e γ_{ω_2} duas curvas invariantes, com números de rotação $\omega_1 < \omega_2$. Pelo Teorema da curva invariante de Birkhoff [15] essas curvas são gráficos, e podemos parametriza-las por $\gamma_{a_1}(s) = (s, g_1(s))$ e $\gamma_{a_2}(s) = (s, g_2(s))$. Como os números de rotação das curvas invariantes [1] formam um conjunto ordenado no cilindro $S^1 \times (-1,1)$, obtemos $g_1(s) < g_2(s)$. O resultado segue então dos Teoremas 3 e 4. ■

Observação: Se a oval Γ possuir raio de curvatura $R(\varphi) = a + b\cos(n\varphi)$ com $n \geq 4$ ímpar e $a > |b|$, então a reta $p_0 = 0$ também é invariante e neste caso o Teorema 3 e o Corolário 3.3.1 se aplicam.

Lema 3.3.1 *Se Γ é uma oval com raio de curvatura $R(\varphi) = a + b\cos(n\varphi)$, onde $n \geq 4$ e $a > |b|$, então a aplicação do bilhar T possui pelo menos $2d$ órbitas periódicas, associadas aos polígonos de perímetro máximo e mínimo do conjunto $\Lambda_{n,m}$, na região entre duas retas invariantes para algum $1 \leq m \leq n-1$, com $d =$mdc(n,m).*

Prova: Pelo Lema 1.7.5 o ângulo $\alpha = \cos^{-1}(p_0)$ esta no intervalo $(k\pi/n, k\pi/n + \pi/2n)$ e as $2d$ órbitas periódicas de $\Lambda_{n,m}$ estão sobre a reta $m\pi/n$, o que implica que essas $2d$ órbitas periódicas estão na região entre duas retas invariantes, o que conclui o resultado ■

Se a aplicação do bilhar T associada a uma oval Γ possui reta uma reta invariante $\{p_0 \neq 0\}$, então a oval Γ é n-simétrica, e a aplicação $T_{n,m} : \frac{\mathbb{R}}{2\pi\frac{m}{n}\mathbb{Z}} / \times (-1,1) \to \frac{\mathbb{R}}{2\pi\frac{m}{n}\mathbb{Z}} / \times (-1,1)$ induzida pela relação $T\left(\varphi + 2\pi\frac{m}{n}, p\right) = T(\varphi, p) + \left(2\pi\frac{m}{n}, 0\right)$ também possuirá. Neste contexto, afim de estudarmos a dinâmica na vizinhança local das órbitas do Lema 3.3.1 demonstramos a Proposição 3.3.1.

Proposição 3.3.1 *Se Γ é uma oval com raio de curvatura $R(\varphi) = a + b\cos(n\varphi)$, onde $n \geq 4$ e $a > |b|$, então a aplicação quociente $T_{n,m}$ possui pelo menos $2d$ pontos fixos associados aos polígonos de perímetro máximo e mínimo em $\Lambda_{n,m}$ pertencentes a região entre duas retas invariantes, para algum $1 \leq m \leq n-1$, com d =mdc(n,m). Ainda d pontos fixos são hiperbólicos e d pontos fixos são elípticos.*

Prova: Pelo Lema 1.7.5 o ângulo $\alpha = \cos^{-1}(p_0)$ está no intervalo $(k\pi/n, k\pi/n + \pi/2n)$ e as $2d$ órbitas periódicas de $\Lambda_{n,m}$ estão sobre a reta $p_{\frac{m}{n}} = \cos(m\pi/n)$, o que implica que esses $2d$ pontos fixos estão na região entre duas retas invariantes. A função suporte da oval é dada por $g(\varphi) = a - \frac{b}{n^2-1}\cos n\varphi$, a qual é uma função de Morse. Deste modo pelo Corolário 2.2.3 d órbitas são elípticas e d órbitas são hiperbólicas. ■

Vimos no Corolário 2.2.2 que esses d =mdc(nm) pontos fixos de $T_{n,m}$ correspondem a d órbitas periódicas hiperbólicas de periódo $n_1 = n/\text{mdc}(n,m)$ da aplicação do bilhar associadas aos polígonos de perímetro máximo no conjunto $\Lambda_{n,m}$. Isso caracteriza completamente a dinâmica local destas órbitas.

Iremos estudar a dinâmica local dos pontos fixos de elípticos de $T_{m,m}$. Pelo Lema 2.3.1 as condições de não ressonância do ponto fixo elíptico da aplicação induzida são $3g(\varphi_0) - g''(\varphi_0) \neq 0$ e $g(\varphi_0) - g''(\varphi_0) \neq 0$. Como neste caso $g(\varphi) = a - \frac{b}{n^2-1}\cos n\varphi$, as condições de ressonâncias equivalem a:

$$a = \frac{n^2+1}{n^2-1}|b|,$$

$$(a - |b|/3)\,n^2 = (a + |b|).$$

Fixado $a > 0$ e $n \geq 4$ cada equação possui no máximo duas soluções, já que $a > |b|$.

Proposição 3.3.2 *Seja Γ uma oval com raio de curvatura $R(\varphi) = a + b\cos(n\varphi)$, tal que $(a - |b|/3)\,n^2 \neq (a + |b|)$ e $a \neq \frac{n^2+1}{n^2-1}|b|$, com $n \geq 4$. Fixado $a > 0$ existe no máximo dois valores de b tal que o primeiro coeficiente de Birkhoff dos pontos fixos elípticos da aplicação quociente $T_{n,m}$ é nulo.*

Prova: Se o raio de curvatura da oval é $R(\varphi) = a + b\cos(n\varphi)$, então a função suporte da oval é dada por $g(\varphi) = a - \frac{b}{n^2-1}\cos n\varphi$ já que $R(\varphi) = g(\varphi) + g''(\varphi)$. Os pontos fixos elípticos da aplicação induzida são os pontos $\Pr\left(\varphi_0, p_{\frac{m}{n}}\right)$ tais que φ_0 é um ponto de mínimo de g, e $p_{\frac{m}{n}}$ =$\cos^{-1}(\pi m/n)$.

Suporemos sem perda de generalidade que $b > 0$, o caso $b < 0$ é análogo. No ponto φ_0 temos $g(\varphi_0) = a- \frac{b}{n^2-1}$, $g'(\varphi_0) = 0$ e $g''(\varphi_0) = \frac{bn^2}{n^2-1}$, implicando que:

$$R(\varphi_0) = a + b,\ R'(\varphi_0) = 0,\ \text{e}\ R''(\varphi_0) = -n^2 b.$$

Tomando $\varphi_0 = \varphi(s_1)$ temos:

$R(s_1) = R(\varphi_0)\,,$

$\frac{dR}{ds}(s_1) = \frac{dR}{d\varphi}(\varphi_0)\,\frac{d\varphi}{ds}(s_1) = 0,$

$\frac{d^2R}{ds^2}(s_1) = \frac{d^2R}{d\varphi^2}(\varphi_0)\left(\frac{d\varphi}{ds}(s_1)\right)^2 + \frac{dR}{d\varphi}(\varphi_0)\,\frac{d^2\varphi}{ds^2}(s_1) = -n^2 b/\left(a^2+b^2\right).$

Substituindo $L(s_1) = L(\varphi_0) = 2\mathrm{sen}\left(\frac{2\pi m}{n}\right) g(\varphi_0)$, com $g(\varphi_0) = a - \frac{b}{n^2-1}$ e as expressões do raio de curvatura e suas derivadas no ponto s_1 na expressão do primeiro coeficiente de Birkhoff obtemos[1]:

$$\tau_1 = \frac{1}{8\mathrm{sen}\left(\frac{m}{n}\pi\right)}\left(-\frac{1}{(a+b)\,\mathrm{sen}^2\left(\frac{m}{n}\pi\right)} + \frac{n^2-1}{(a-b/3)\,n^2-(a+b)} - \frac{a\left(n^2-1\right)-b}{(a+b)^2}\right).$$

Fixado $a > 0$, a equação $\tau_1 = 0$ e quadrática em b, possuindo por isto no máximo duas soluções. ■

Segue das Proposições 3.3.1, 3.3.2; e da Proposição 2.4.1 do capítulo 2 o seguinte resultado descrevendo a dinâmica local em um vizinhança das órbitas periódicas associadas aos polígonos de perímetro máximo e mínimo em $\Lambda_{n,m}$, nas ovais n-simétricas.

Proposição 3.3.3 *Seja Γ uma oval com raio de curvatura $R(\varphi) = a + b\cos(n\varphi)$, $n \geq 4$ e $a > |b|$. Fixado $1 \leq m \leq n-1$, se $(a-|b|/3)\,n^2 \neq (a+|b|)$ e $a \neq \frac{n^2+1}{n^2-1}|b|$, então para exceto dois valores de b existem d órbitas periódicas estáveis de periódo n_1 pertencentes a região entre duas retas invariantes, com d =mdc(n,m) e $n_1 = n/d$.*

O Teorema 2.5.2 do capítulo 2 nos dá a estabilidade de órbitas periódicas na região entre duas retas invariantes, associadas aos polígonos de perímetro máximo e mínimo em $\Lambda_{n,m}$. Neste contexto ele pode ser reformulado como.

Teorema 3.3.1 *Seja Γ uma oval com raio de curvatura dado por $R(\varphi) = a + b\cos(n\varphi)$, com $n \geq 4$, $(a-|b|/3)\,n^2 \neq (a+|b|)$ e $a \neq \frac{n^2+1}{n^2-1}|b|$. Para no mínimo dois $n-2$ valores de $1 \leq m \leq n-1$, a aplicação do bilhar associada T possui pelo menos d =mdc(n,m) órbitas periódicas estáveis de período $n_1 = n/$mdc(n,m). Para cada valor de m a órbita correspondente pertencente a região entre duas retas invariantes.*

Prova: Se $(a-|b|/3)\,n^2 \neq (a+|b|)$ e $a \neq \frac{n^2+1}{n^2-1}|b|$ então pela Proposição 3.3.1 para todo $1 \leq m \leq n-1$ os pontos fixos elípticos da aplicacão induzida $T_{n,m}$ são não ressonantes. O resultado então segue do Teorema 2.5.2. ■

[1] Ver apêndice

Teorema 5 *Seja Γ uma oval n-simétricas com raio de curvatura dado por $R(\varphi) = a + b\cos(n\varphi)$ com $n \geq 4$ e $a \neq \frac{n^2+1}{n^2-1}|b|$. Fixado $a > 0$ para exceto quatro valores de b a região entre duas retas invariantes possui duas $2d = 2mdc(n,m)$ órbitas periódicas de período $n_1 = n/mdc(n,m)$ para algum $1 \leq m \leq n-1$ que é determinado pela região escolhida. Destas $2d$ órbitas d são hiperbólicas e para no mínimo $n-2$ valores de m, d são tais que cada ponto da órbita é rodeado por curvas invariantes de T^{n_1}.*

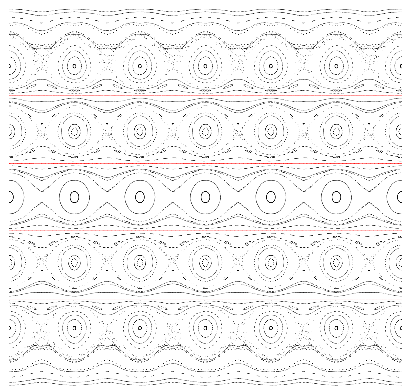

Figura 3.2: Retas invariantes e órbitas periódicas do bilhar em uma oval 6-simétrica com raio de curvatura $R(\varphi) = 1{+}0{,}4\cos(6\varphi)$.

3.4 Generalizando para aplicações Twist em $S^1 \times \mathbb{R}$

Nesta Seção estenderemos os Teoremas 3 e 4 para aplicações Twist em $S^1 \times \mathbb{R}$, em uma vizinhança de curvas rotacionais invariantes.

Definição 3.4.1 *Seja $C = S^1 \times \mathbb{R}$ o cilindro aberto recoberto pela faixa $\mathbb{R} \times \mathbb{R}$, através de $(x_1, y_1) = (x_1 mod 1, y_1)$. Um difeomorfismo $f : C \to C$ é uma aplicação twist se seu levantamento $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R} \times \mathbb{R}$, denotado por $F(x_1, y_1) = (x_2(x_1, y_1), y_2(x_1, y_1))$ satisfaz as seguintes condições:*

(1)*Preserva os fins do cilindro,*

(2)*Preserva área e orientação, ou seja $dx_2 \wedge dy_2 = dx_1 \wedge dy_1$ o que equivale a* $\det DF = 1$,

(3) $F \circ Tr = Tr \circ F$, *onde* $Tr(x, y) = (x + 1, y)$,

(4) $\frac{\partial F_1}{\partial y_1}(x_1, y_1) > 0$, *onde* $F_1(x_1, y_1) = x_2(x_1, y_1)$ *(propriedade twist)*.

Como as aplicações do bilhar as Aplicações Twist também possuem função geradora.

TEOREMA 3.4.1 ([1] e [15]) *Sejam f uma aplicação twist e F seu levantamento. Então existe uma função $h(x_1, x_2)$ duas vezes diferenciável tal que $h(x_1 + 1, x_2 + 1) = h(x_1, x_2)$ tal que*

$$\begin{aligned} \partial h_1 (x_1, x_2) &= -y_1, \\ \partial_2 h (x_1, x_2) &= y_2. \end{aligned}$$

Onde $F(x_1, y_1) = (x_2, y_2)$, e ∂h_1 e ∂h_2 são as derivadas com relação ao primeiro e ao segundo argumento de h.

Afim de estudarmos as curvas invariantes, utilizaremos o Teorema 3.4.2 sobre conjugações diferenciáveis de diffeomorfismo do círculo demonstrado por Yocooz [4].

TEOREMA 3.4.2 (Yocooz [4]) *Seja $\eta : S^1 \to S^1$ um difeomorfismo de classe C^k preservando orientação, com $k \geq 3$ inteiro. Suponhamos que o número de rotação de η satisfaça a condição diofantina $\left|\omega - \frac{p}{q}\right| \geq \frac{C}{q^{2+\rho}}$. Então se $k > 2\rho + 1$ existe um difeomorfismo $g : S^1 \to S^1$ de classe $C^{k-1-\rho-\varepsilon}$, preservando orientação que conjuga η a rotação $R_\omega(x) = x + \omega$ em S^1.*

Ainda em [4] temos o Corolário 3.4.1 para quando o difeomorfismo η é de classe C^∞ ou analítico.

COROLÁRIO 3.4.1 (Yocooz [4]) *Nas mesmas hipóteses do Teorema 3.4.2 a conjugação g é C^∞ se η for C^∞, e analítica se η for analítica.*

Consideremos uma aplicação twist $f : S^1 \times \mathbb{R} \to S^1 \times \mathbb{R}$ com uma curva invariante γ, tal que que f restrita a γ é conjugada a rotação por um número ω, ou seja, $f \circ g_{|\gamma} = g \circ R_{|\gamma}$. Se a conjugação é da mesma classe de diferenciabilidade da aplicação f, então R. S. Mackay [14] demonstrou a Proposição 3.4.1, que nos dá uma boa mudança de coordenadas, levando a curva invariante na reta $y = 0$.

PROPOSIÇÃO 3.4.1 (R. S. Mackay [14]) *Seja $f : S^1 \times \mathbb{R} \to S^1 \times \mathbb{R}$ uma aplicação twist de classe C^k, com uma curva invariante Ω, tal que f restrita a Ω é C^k conjugada a rotação por ω,com $k \geq 3$. Então existe uma mudança de coordenadas que transforma f em uma aplicação twist de classe C^{k-1}, tal que em uma vizinhança da reta $y = 0$ a aplicação é dada por:*

$$\begin{aligned} X(x, y) &= x + \omega + q(x)y + o(y^2) \\ Y(x, y) &= y + o(y^2) \end{aligned}$$

onde $q(x)$ é tal que $q_2 \geq q(x) \geq q_1 > 0$.

Observação: Se f e a conjugação g são analitíticas, então a mudança de coordenadas e a curva γ também são analíticas

Pela Proposicão 3.4.1 e o Teorema 3.1.1, se $f : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ é uma aplicação twist com uma curva invariante γ conjugada a rotação por um número ω, teremos outras curvas invariantes com número de rotação diofantino próximos de ω se acumulando em γ se a aplicação f e a conjugação são C^k, com $k > 5$ e $\omega \in \mathbb{Q}$. Pelo Corolario 3.4.1 e novamente pelo Teorema 3.1.1 e a Proposição 3.4.1 se a aplicação f e a curva γ são C^∞,com o número de rotação ω diofantino, então também teremos outras curvas invariantes com número de rotação diofantino próximos de ω se acumulando em γ.

Fórmularemos um Teorema que completa em partes esse resultado, pedindo que o mapa f e a conjugação g sejam analíticos, mas não exigindo nada a respeito do número de rotação ω.

Teorema 3.4.3 *Sejam $f : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ uma aplicação twist analítica e γ uma curva invariante tal que f restrita a γ é conjugada a rotação por um número ω. Se a conjugação for analítica entao existe um conjunto de medida positiva de curvas invariantes satisfazendo a equação 1.14 e se acumulando em ambos os lados de γ.*

Prova: Basta verificarmos que todos os Lemas 3.2.2, 3.2.3, 3.2.4, 3.2.5, 3.2.12, e a Proposição 3.2.3 continuam válidos , pois desta maneira a demonstração do Teorema 4 se aplica neste caso. Por fim a prova segue pelo mesmo argumento do Corolário 3.3.1.

Pela Proposição 3.4.1 podemos supor que a curva invariante é a reta $y = 0$,e consequentemente tomarmos $u(\theta) = \theta$. Deste modo temos que $u(\theta) \in \tilde{W}_r$ e $u(\theta) - \theta \in W_r$ para todo $r > 0$, o que demonstra o Lema 3.2.2. Temos ainda que $|u'|_r < 2$, e $(|u'|_r)^{-1} < 2$ visto que $u'(\theta) = 1$, o que demonstra o Lema 3.2.3.

O Lema 3.2.4 segue do fato da função geradora de f ser analítica, o que por sua vez implica que todas as derivadas até a ordem três são limitadas sobre a curva, e portanto o domínio $D \subset \mathbb{C}^2$ é tomado tal que essas derivadas ainda continuem limitadas, como foi feito no caso particular para aplicação do bilhar. Os Lemas 3.2.5, 3.2.12 dependem apenas da analiticidade das funções $u(\theta) = \theta$ e da função geradora h, o que implica que a demonstração é a mesma feita no caso particular para a aplicação do bilhar, sendo que a constante ξ_R obtida no Lema 3.2.5 é utilizada na demonstração do Lema 3.2.12.

A Proposição 3.2.3, é uma propriedade dos números diofantinos, não dependendo da função $u(\theta)$.

Pelo argumento inicial do primeiro parágrafo da prova isto conclui a demonstração. ■

A união de todas as curvas invariantes de uma aplicação twist $f : S^1 \times \mathbb{R} \rightarrow S^1 \times \mathbb{R}$ é um conjunto fechado do cilindro $S^1 \times \mathbb{R}$. As componentes conexas do complementar, cujo bordo são duas curvas invariantes são chamados zona de instabilidade de f.

O Corolário 3.4.2 nos dá condições que as curvas invariantes, bordos da região de instabilidade não devem satisfazer.

Corolário 3.4.2 *Sejam* $f : S^1 \times \mathbb{R} \to S^1 \times \mathbb{R}$ *uma aplicação twist, e* γ *é uma curva invariante conjugada a rotação por* ω*. Se* $\gamma(\theta)$ *é o bordo de uma região de instabilidade nenhum dos três itens devem ser satisfeitos:*

1. f *e a conjugação são de classe* C^k*, com* $k > 5$ *e* $\omega \in \mathbb{Q}$*.*
2. f *e a curva* γ *são* C^∞*, com* ω *diofantino, ou similarmente,* f *e a conjugação são* C^∞*, com* ω *sendo diofantino.*
3. f *e a conjugação são analíticas.*

Errata

Pouco tempo depois da apresentação deste trabalho, submetemos um artigo contendo os resultados da Seção 3.2 e o Reviewer encontrou um erro na demonstração do Teorema 4.

Apêndice

Calcularemos o primeiro coeficiente de Birkhoff em um ponto fixo não ressonante $\Pr\big(s_0, p_{\frac{m}{n}}\big)$ da aplicação quociente $T_{n,m}$.

Cálculo do jato de ordem 3

Inicialização:

```
> restart:readlib(mtaylor):
```

A aplicação do bilhar será denotada por T(s,p)=(S,P) nas coordenadas canônicas:
s: Parâmetro comprimento de arco da oval Gamma,
p=cosbeta: Componente tangencial do momento (Desde que -Pi < beta < Pi, a função inversa beta(p) é bem definida), com beta o ângulo orientado entre a trajetória e o vetor tangente.
Com essa escolha de coordenadas a medida de Lesbegue dsdp é preservada.

Inspirados por [16] iremos reescrever a componente tangencial do momento como:
p = sin theta, onde theta é o ângulo orientado entre a trajetória e o vetor normal. Neste caso temos - Pi /2< theta < Pi/2 e a função inversa theta(p) é bem definida.
A relação entre theta(p) e beta(p) é dada por:
theta(p)=Pi/2-beta(p).

Denotaremos por:
l(s,p)=|Gamma(s)-Gamma(S(s,p))|
r(s)=1/K(s), onde K(s) é o raio de curvatura da oval Gamma.

Nesta planilha calcularemos as derivadas até a ordem 3 da aplicação do bilhar em um ponto periódico ($s_0, p_0) = T^{n_1}(s_0, p_0)$ pertencente a órbita periódica associada a algum polígono do conjunto Lambda$_{n,\,m}$ em uma oval Gamma n-simétrica, com $n_1 = \dfrac{n}{mdc(n, m)}$.
Pondo $T(s_0, p_0) = (s_1, p_1)$, $r_0 = r(s_0)$ e $r_1 = r(s_1)$, a condição de simetria (CS) da oval Gamma nos dá $r_1 = r_0$, $s_1 = s_0 + \dfrac{C}{n}$, e $p_1 = p_0$, onde C é o perímetro da oval e $p_0 = \sin\left(\dfrac{\mathrm{pi}}{2} - \dfrac{\mathrm{pi}\, m}{n}\right)$. Equivalentemente Theta$_0$ $= \dfrac{\mathrm{pi}}{2} - \dfrac{\mathrm{pi}\, m}{n}$.
As condições iniciais serão C0, C1 e CS (Condição de simetria).

```
> 1C0:=
  S(s[0],p[0])=s[1],P(s[0],p[0])=p[1],
  theta(p[0])=Theta[0],D(theta)(p[0])=1/cos(Theta[0]),(D@D)(theta)
  (p[0])=sin(Theta[0])/cos(Theta[0])^3,
  r(s[0])=R[0],l(s[0],p[0])=L[0],ll(s[0],s[1]) = L[0];
  C1:=r(s[1])=R[1],
  theta(p[1])=Theta[1],D(theta)(p[1])=1/cos(Theta[1]),(D@D)(theta)
  (p[1])=sin(Theta[1])/cos(Theta[1])^3;
  CS:=p[1]=sin(Theta[0]),p[0]=sin(Theta[0]),R[1]=R[0],Theta[1]=
  Theta[0],
  D(r)(s[1])=D(r)(s[0]),(D@D)(r)(s[1])=(D@D)(r)(s[0]);
```

$$C0 := S(s_0, p_0) = s_1,\ P(s_0, p_0) = p_1,\ \theta(p_0) = \Theta_0,\ \mathrm{D}(\theta)(p_0) = \frac{1}{\cos(\Theta_0)},\ \mathrm{D}^{(2)}(\theta)(p_0)$$

$$= \frac{\sin(\Theta_0)}{\cos(\Theta_0)^3}, r(s_0) = R_0, l(s_0, p_0) = L_0, ll(s_0, s_1) = L_0$$

$$C1 := r(s_1) = R_1, \theta(p_1) = \Theta_1, \mathrm{D}(\theta)(p_1) = \frac{1}{\cos(\Theta_1)}, \mathrm{D}^{(2)}(\theta)(p_1) = \frac{\sin(\Theta_1)}{\cos(\Theta_1)^3}$$

$$CS := p_1 = \sin(\Theta_0), p_0 = \sin(\Theta_0), R_1 = R_0, \Theta_1 = \Theta_0, \mathrm{D}(r)(s_1) = \mathrm{D}(r)(s_0), \mathrm{D}^{(2)}(r)(s_1) = \mathrm{D}^{(2)}(r)(s_0)$$

A derivada de T é dada por:

$$DT_{s,p} = \begin{bmatrix} \frac{\partial}{\partial s} S & \frac{\partial}{\partial p} S \\ \frac{\partial}{\partial s} P & \frac{\partial}{\partial p} P \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} S_{1,0}(s,p) & S_{0,1}(s,p) \\ P_{1,0}(s,p) & P_{0,1}(s,p) \end{bmatrix}$$

onde:

```
> S10:=(ss,pp) ->  (l(ss,pp)-r(ss)*cos(theta(pp)))/(r(ss)*cos(theta
  (P(ss,pp)))):
> S01:=(ss,pp) -> -l(ss,pp)/(cos(theta(pp))*cos(theta(P(ss,pp)))):
> P10:=(ss,pp) -> -(l(ss,pp)-r(ss)*cos(theta(pp))-r(S(ss,pp))*cos
  (theta(P(ss,pp))))/(r(ss)*r(S(ss,pp))):
> P01:=(ss,pp) -> (l(ss,pp)-r(S(ss,pp))*cos(theta(P(ss,pp))))/(r(S
  (ss,pp))*cos(theta(pp))):
```

```
> eqns1:=
  D[1](S)(s[0],p[0])=(subs(C1,subs(C0,S10(s[0],p[0])))),
  D[2](S)(s[0],p[0])=(subs(C1,subs(C0,S01(s[0],p[0])))),
  D[1](P)(s[0],p[0])=(subs(C1,subs(C0,P10(s[0],p[0])))),
  D[2](P)(s[0],p[0])=(subs(C1,subs(C0,P01(s[0],p[0]))));
```

$$eqns1 := \mathrm{D}_1(S)(s_0, p_0) = \frac{L_0 - R_0\cos(\Theta_0)}{R_0\cos(\Theta_1)}, \mathrm{D}_2(S)(s_0, p_0) = -\frac{L_0}{\cos(\Theta_0)\cos(\Theta_1)}, \mathrm{D}_1(P)(s_0, p_0) = -\frac{L_0 - R_0\cos(\Theta_0) - R_1\cos(\Theta_1)}{R_0 R_1}, \mathrm{D}_2(P)(s_0, p_0) = \frac{L_0 - R_1\cos(\Theta_1)}{R_1\cos(\Theta_0)}$$

Denotaremos por $A_{i,j} = S_{i,j}$ e $B_{i,j} = P_{i,j}$ as respectivas derivadas parciais de $S(s,p)$ e $P(s,p)$ no ponto (s_0, p_0). Substituindo as condições iniciais:

```
> A[1,0]:=subs(CS,subs(eqns1,D[1](S)(s[0],p[0])));
```

```
A[0,1]:=subs(CS,subs(eqns1,D[2](S)(s[0],p[0])));
B[1,0]:=subs(CS,subs(eqns1,D[1](P)(s[0],p[0])));
B[0,1]:=subs(CS,subs(eqns1,D[2](P)(s[0],p[0])));
```

$$A_{1,\,0} := \frac{L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)}{R_0 \cos(\Theta_0)}$$

$$A_{0,\,1} := -\frac{L_0}{\cos(\Theta_0)^2}$$

$$B_{1,\,0} := -\frac{L_0 - 2\,R_0 \cos(\Theta_0)}{R_0^2}$$

$$B_{0,\,1} := \frac{L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)}{R_0 \cos(\Theta_0)}$$

Como l(s_0 , s_1) representa a função geradora temos $\frac{\partial}{\partial s_0}\, l(s_0, s_1) = -p_0$ e $\frac{\partial}{\partial s_1}\, l(s_0, s_1) = p_1$. Pela regra da cadeia:

```
> L10:=(ss,pp)->-pp+P(ss,pp)*D[1](S)(ss,pp):
  L01:=(ss,pp)-> P(ss,pp)*D[2](S)(ss,pp):
```

```
> eqL1:=
  D[1](l)(s[0],p[0])=subs(eqns1,(subs(C1,subs(C0,L10(s[0],p[0]))))
  ),
  D[2](l)(s[0],p[0])=subs(eqns1,(subs(C1,subs(C0,L01(s[0],p[0])))))
  ;
```

$$eqL1 := \mathrm{D}_1(l)\,(s_0, p_0) = -p_0 + \frac{p_1\,\left(L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)\right)}{R_0 \cos(\Theta_1)},\ \mathrm{D}_2(l)\,(s_0, p_0) = -\frac{p_1\,L_0}{\cos(\Theta_0)\,\cos(\Theta_1)}$$

Derivadas de segunda ordem de $S(s, p)$ e $P(s, p)$ no ponto (s_0, p_0) (Cálculo de $A_{i,\,j}$ e $B_{i,\,j}$ com $i + j = 2$).

```
> eqns2:=
  D[1,1](S)(s[0],p[0])=subs(eqL1,(subs(C1,subs(C0,subs(eqns1,D[1]
  (S10)(s[0],p[0])))))),
  D[2,1](S)(s[0],p[0])=subs(eqL1,(subs(C1,subs(C0,subs(eqns1,D[2]
  (S10)(s[0],p[0])))))),
  D[2,2](S)(s[0],p[0])=subs(eqL1,(subs(C1,subs(C0,subs(eqns1,D[2]
  (S01)(s[0],p[0])))))),
  D[1,1](P)(s[0],p[0])=subs(eqL1,(subs(C1,subs(C0,subs(eqns1,D[1]
  (P10)(s[0],p[0])))))),
  D[2,1](P)(s[0],p[0])=subs(eqL1,(subs(C1,subs(C0,subs(eqns1,D[2]
  (P10)(s[0],p[0])))))),
```

```
D[2,2](P)(s[0],p[0])=subs(eqL1,(subs(C1,subs(C0,subs(eqns1,D[2]
(P01)(s[0],p[0]))))))
:
```

```
> A[2,0]:=subs(CS,subs(eqns2,D[1,1](S)(s[0],p[0])));
  A[1,1]:=subs(CS,subs(eqns2,D[1,2](S)(s[0],p[0])));
  A[0,2]:=subs(CS,subs(eqns2,D[2,2](S)(s[0],p[0])));
```

$$A_{2,\,0} := \frac{-\sin(\Theta_0) + \frac{\sin(\Theta_0)\,(L_0 - R_0\cos(\Theta_0))}{R_0\cos(\Theta_0)} - \mathrm{D}(r)(s_0)\cos(\Theta_0)}{R_0\cos(\Theta_0)}$$

$$- \frac{(L_0 - R_0\cos(\Theta_0))\,\mathrm{D}(r)(s_0)}{R_0^2\cos(\Theta_0)} - \frac{(L_0 - R_0\cos(\Theta_0))\sin(\Theta_0)\,(L_0 - 2\,R_0\cos(\Theta_0))}{R_0^3\cos(\Theta_0)^3}$$

$$A_{1,\,1} := \frac{-\frac{\sin(\Theta_0)\,L_0}{\cos(\Theta_0)^2} + \frac{R_0\sin(\Theta_0)}{\cos(\Theta_0)}}{R_0\cos(\Theta_0)} + \frac{(L_0 - R_0\cos(\Theta_0))^2\sin(\Theta_0)}{R_0^2\cos(\Theta_0)^4}$$

$$A_{0,\,2} := -\frac{L_0\sin(\Theta_0)\,(L_0 - R_0\cos(\Theta_0))}{\cos(\Theta_0)^5\,R_0}$$

```
> B[2,0]:=subs(CS,subs(eqns2,D[1,1](P)(s[0],p[0])));
  B[1,1]:=subs(CS,subs(eqns2,D[1,2](P)(s[0],p[0])));
  B[0,2]:=subs(CS,subs(eqns2,D[2,2](P)(s[0],p[0])));
```

$$B_{2,\,0} := -\frac{1}{R_0^2}\left(-\sin(\Theta_0) + \frac{\sin(\Theta_0)\,(L_0 - R_0\cos(\Theta_0))}{R_0\cos(\Theta_0)} - \mathrm{D}(r)(s_0)\cos(\Theta_0)\right.$$

$$\left. - \frac{\mathrm{D}(r)(s_0)\,(L_0 - R_0\cos(\Theta_0))}{R_0} - \frac{\sin(\Theta_0)\,(L_0 - 2\,R_0\cos(\Theta_0))}{\cos(\Theta_0)\,R_0}\right)$$

$$+ \frac{(L_0 - 2\,R_0\cos(\Theta_0))\,\mathrm{D}(r)(s_0)}{R_0^3}$$

$$+ \frac{(L_0 - 2\,R_0\cos(\Theta_0))\,\mathrm{D}(r)(s_0)\,(L_0 - R_0\cos(\Theta_0))}{R_0^4\cos(\Theta_0)}$$

$$B_{1,\,1} := -\frac{-\frac{\sin(\Theta_0)\,L_0}{\cos(\Theta_0)^2} + \frac{R_0\sin(\Theta_0)}{\cos(\Theta_0)} + \frac{\mathrm{D}(r)(s_0)\,L_0}{\cos(\Theta_0)} + \frac{\sin(\Theta_0)\,(L_0 - R_0\cos(\Theta_0))}{\cos(\Theta_0)^2}}{R_0^2}$$

$$-\frac{\left(L_0-2\,R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)L_0}{R_0^3\cos\left(\Theta_0\right)^2}$$

$$B_{0,\,2}:=\frac{-\frac{\sin\left(\Theta_0\right)L_0}{\cos\left(\Theta_0\right)^2}+\frac{\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)L_0}{\cos\left(\Theta_0\right)}+\frac{\sin\left(\Theta_0\right)\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)}{\cos\left(\Theta_0\right)^2}}{R_0\cos\left(\Theta_0\right)}$$

$$+\frac{\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)L_0}{R_0^2\cos\left(\Theta_0\right)^3}+\frac{\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)\sin\left(\Theta_0\right)}{R_0\cos\left(\Theta_0\right)^3}$$

Derivadas de segunda ordem da função geradora.

```
> eqL2:=
  D[1,1](l)(s[0],p[0])=subs(eqns2,eqns1,subs(C0,D[1](L10)(s[0],p[0]
  ))),
  D[1,2](l)(s[0],p[0])=subs(eqns2,eqns1,subs(C0,D[2](L10)(s[0],p[0]
  ))),
  D[2,2](l)(s[0],p[0])=subs(eqns2,eqns1,subs(C0,D[2](L01)(s[0],p[0]
  )))
  ;
```

$$eqL2:=\mathrm{D}_{1,\,1}(l)\left(s_0,p_0\right)=-\frac{\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)-R_1\cos\left(\Theta_1\right)\right)\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)}{R_0^2\,R_1\cos\left(\Theta_1\right)}$$

$$+p_1\left(\frac{-p_0+\frac{p_1\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)}{R_0\cos\left(\Theta_1\right)}-\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)\cos\left(\Theta_0\right)}{R_0\cos\left(\Theta_1\right)}\right.$$

$$-\frac{\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)}{R_0^2\cos\left(\Theta_1\right)}$$

$$\left.-\frac{\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)\sin\left(\Theta_1\right)\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)-R_1\cos\left(\Theta_1\right)\right)}{R_0^2\cos\left(\Theta_1\right)^3R_1}\right),\ \mathrm{D}_{1,\,2}(l)\left(s_0,p_0\right)=-1$$

$$+\frac{\left(L_0-R_1\cos\left(\Theta_1\right)\right)\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)}{R_1\cos\left(\Theta_0\right)R_0\cos\left(\Theta_1\right)}+p_1\left(\frac{-\frac{p_1L_0}{\cos\left(\Theta_0\right)\cos\left(\Theta_1\right)}+\frac{R_0\sin\left(\Theta_0\right)}{\cos\left(\Theta_0\right)}}{R_0\cos\left(\Theta_1\right)}\right.$$

$$+\frac{\left(L_0-R_0\cos(\Theta_0)\right)\sin(\Theta_1)\left(L_0-R_1\cos(\Theta_1)\right)}{R_0\cos(\Theta_1)^3 R_1\cos(\Theta_0)}\Bigg), \mathrm{D}_{2,2}(l)(s_0,p_0)=$$

$$-\frac{\left(L_0-R_1\cos(\Theta_1)\right)L_0}{R_1\cos(\Theta_0)^2\cos(\Theta_1)}+p_1\Bigg(\frac{p_1 L_0}{\cos(\Theta_0)^2\cos(\Theta_1)^2}-\frac{L_0\sin(\Theta_0)}{\cos(\Theta_0)^3\cos(\Theta_1)}$$

$$-\frac{L_0\sin(\Theta_1)\left(L_0-R_1\cos(\Theta_1)\right)}{\cos(\Theta_0)^2\cos(\Theta_1)^3 R_1}\Bigg)$$

Derivadas de Terceira Ordem de $S(s,p)$ e $P(s,p)$ no ponto (s_0,p_0) (Cálculo de $A_{i,j}$ e $B_{i,j}$ com $i+j=3$)

```
> eqns3:=
  D[1,1,1](S)(s[0],p[0])=subs(eqL2,eqL1,eqns2,eqns1,subs(C1,subs
  (C0,D[1,1](S10)(s[0],p[0])))),
  D[2,1,1](S)(s[0],p[0])=subs(eqL2,eqL1,eqns2,eqns1,subs(C1,subs
  (C0,D[2,1](S10)(s[0],p[0])))),
  D[2,2,1](S)(s[0],p[0])=subs(eqL2,eqL1,eqns2,eqns1,subs(C1,subs
  (C0,D[2,2](S10)(s[0],p[0])))),
  D[2,2,2](S)(s[0],p[0])=subs(eqL2,eqL1,eqns2,eqns1,subs(C1,subs
  (C0,D[2,2](S01)(s[0],p[0])))),
  D[1,1,1](P)(s[0],p[0])=subs(eqL2,eqL1,eqns2,eqns1,subs(C1,subs
  (C0,D[1,1](P10)(s[0],p[0])))),
  D[2,1,1](P)(s[0],p[0])=subs(eqL2,eqL1,eqns2,eqns1,subs(C1,subs
  (C0,D[2,1](P10)(s[0],p[0])))),
  D[2,2,1](P)(s[0],p[0])=subs(eqL2,eqL1,eqns2,eqns1,subs(C1,subs
  (C0,D[2,2](P10)(s[0],p[0])))),
  D[2,2,2](P)(s[0],p[0])=subs(eqL2,eqL1,eqns2,eqns1,subs(C1,subs
  (C0,D[2,2](P01)(s[0],p[0])))):
```

```
> A[3,0]:=subs(CS,subs(eqns3,D[1,1,1](S)(s[0],p[0])));
  A[2,1]:=subs(CS,subs(eqns3,D[1,1,2](S)(s[0],p[0])));
  A[1,2]:=subs(CS,subs(eqns3,D[1,2,2](S)(s[0],p[0])));
  A[0,3]:=subs(CS,subs(eqns3,D[2,2,2](S)(s[0],p[0])));
```

$$A_{3,0}:=\frac{1}{R_0\cos(\Theta_0)}\Bigg(-\frac{\left(L_0-2R_0\cos(\Theta_0)\right)\left(L_0-R_0\cos(\Theta_0)\right)}{R_0^3\cos(\Theta_0)}$$

$$+\sin(\Theta_0)\left(\frac{-\sin(\Theta_0)+\frac{\sin(\Theta_0)\,(L_0-R_0\cos(\Theta_0))}{R_0\cos(\Theta_0)}-\mathrm{D}(r)(s_0)\cos(\Theta_0)}{R_0\cos(\Theta_0)}\right.$$

$$\left.-\frac{(L_0-R_0\cos(\Theta_0))\,\mathrm{D}(r)(s_0)}{R_0^2\cos(\Theta_0)}-\frac{(L_0-R_0\cos(\Theta_0))\sin(\Theta_0)\,(L_0-2\,R_0\cos(\Theta_0))}{R_0^3\cos(\Theta_0)^3}\right)$$

$$\left.-\mathrm{D}^{(2)}(r)(s_0)\cos(\Theta_0)\right)$$

$$-\frac{2\left(-\sin(\Theta_0)+\frac{\sin(\Theta_0)\,(L_0-R_0\cos(\Theta_0))}{R_0\cos(\Theta_0)}-\mathrm{D}(r)(s_0)\cos(\Theta_0)\right)\mathrm{D}(r)(s_0)}{R_0^2\cos(\Theta_0)}$$

$$-\frac{1}{R_0^3\cos(\Theta_0)^3}\left(2\left(-\sin(\Theta_0)+\frac{\sin(\Theta_0)\,(L_0-R_0\cos(\Theta_0))}{R_0\cos(\Theta_0)}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\mathrm{D}(r)(s_0)\cos(\Theta_0)\right)\sin(\Theta_0)\,(L_0-2\,R_0\cos(\Theta_0))\right)$$

$$+\frac{2\,(L_0-R_0\cos(\Theta_0))\,\mathrm{D}(r)(s_0)^2}{R_0^3\cos(\Theta_0)}$$

$$+\frac{2\,(L_0-R_0\cos(\Theta_0))\,\mathrm{D}(r)(s_0)\sin(\Theta_0)\,(L_0-2\,R_0\cos(\Theta_0))}{R_0^4\cos(\Theta_0)^3}$$

$$-\frac{(L_0-R_0\cos(\Theta_0))\,\mathrm{D}^{(2)}(r)(s_0)}{R_0^2\cos(\Theta_0)}$$

$$+\frac{3\,(L_0-R_0\cos(\Theta_0))\sin(\Theta_0)^2\,(L_0-2\,R_0\cos(\Theta_0))^2}{R_0^5\cos(\Theta_0)^5}$$

$$+\frac{(L_0-R_0\cos(\Theta_0))\,(L_0-2\,R_0\cos(\Theta_0))^2}{R_0^5\cos(\Theta_0)^3}+\frac{1}{R_0\cos(\Theta_0)^3}\Big((L_0$$

$$-R_0\cos(\Theta_0))\sin(\Theta_0)\left(-\frac{1}{R_0^2}\left(-\sin(\Theta_0)+\frac{\sin(\Theta_0)\,(L_0-R_0\cos(\Theta_0))}{R_0\cos(\Theta_0)}\right.\right.$$

$$-\mathrm{D}(r)(s_0)\cos(\Theta_0)-\frac{\mathrm{D}(r)(s_0)\,(L_0-R_0\cos(\Theta_0))}{R_0}$$

$$\left.-\frac{\sin(\Theta_0)\,(L_0-2R_0\cos(\Theta_0))}{\cos(\Theta_0)\,R_0}\right)+\frac{(L_0-2R_0\cos(\Theta_0))\,\mathrm{D}(r)(s_0)}{R_0^3}$$

$$\left.\left.+\frac{(L_0-2R_0\cos(\Theta_0))\,\mathrm{D}(r)(s_0)\,(L_0-R_0\cos(\Theta_0))}{R_0^4\cos(\Theta_0)}\right)\right)$$

$$A_{2,1}:=\frac{1}{R_0\cos(\Theta_0)}\left(-1+\frac{(L_0-R_0\cos(\Theta_0))^2}{R_0^2\cos(\Theta_0)^2}+\sin(\Theta_0)\left(\frac{-\frac{\sin(\Theta_0)\,L_0}{\cos(\Theta_0)^2}+\frac{R_0\sin(\Theta_0)}{\cos(\Theta_0)}}{R_0\cos(\Theta_0)}\right.\right.$$

$$\left.+\frac{(L_0-R_0\cos(\Theta_0))^2\sin(\Theta_0)}{R_0^2\cos(\Theta_0)^4}\right)+\frac{\mathrm{D}(r)(s_0)\sin(\Theta_0)}{\cos(\Theta_0)}\Bigg)$$

$$-\frac{\left(-\frac{\sin(\Theta_0)\,L_0}{\cos(\Theta_0)^2}+\frac{R_0\sin(\Theta_0)}{\cos(\Theta_0)}\right)\mathrm{D}(r)(s_0)}{R_0^2\cos(\Theta_0)}$$

$$-\frac{\left(-\frac{\sin(\Theta_0)\,L_0}{\cos(\Theta_0)^2}+\frac{R_0\sin(\Theta_0)}{\cos(\Theta_0)}\right)\sin(\Theta_0)\,(L_0-2R_0\cos(\Theta_0))}{R_0^3\cos(\Theta_0)^3}$$

$$+\frac{1}{R_0^2\cos(\Theta_0)^4}\left(\left(-\sin(\Theta_0)+\frac{\sin(\Theta_0)\,(L_0-R_0\cos(\Theta_0))}{R_0\cos(\Theta_0)}\right.\right.$$

$$\left.\left.-\mathrm{D}(r)(s_0)\cos(\Theta_0)\right)\sin(\Theta_0)\,(L_0-R_0\cos(\Theta_0))\right)$$

$$-\frac{(L_0-R_0\cos(\Theta_0))^2\sin(\Theta_0)\,\mathrm{D}(r)(s_0)}{R_0^3\cos(\Theta_0)^4}$$

$$- \frac{3\left(L_0 - R_0\cos(\Theta_0)\right)^2 \sin(\Theta_0)^2 \left(L_0 - 2R_0\cos(\Theta_0)\right)}{R_0^4 \cos(\Theta_0)^6}$$

$$- \frac{\left(L_0 - R_0\cos(\Theta_0)\right)^2 \left(L_0 - 2R_0\cos(\Theta_0)\right)}{R_0^4 \cos(\Theta_0)^4} + \frac{1}{R_0\cos(\Theta_0)^3}\Bigg(\Big(L_0$$

$$- R_0\cos(\Theta_0)\Big)\sin(\Theta_0)\Bigg($$

$$- \frac{-\frac{\sin(\Theta_0) L_0}{\cos(\Theta_0)^2} + \frac{R_0\sin(\Theta_0)}{\cos(\Theta_0)} + \frac{\mathrm{D}(r)(s_0) L_0}{\cos(\Theta_0)} + \frac{\sin(\Theta_0)\left(L_0 - R_0\cos(\Theta_0)\right)}{\cos(\Theta_0)^2}}{R_0^2}$$

$$- \frac{\left(L_0 - 2R_0\cos(\Theta_0)\right)\mathrm{D}(r)(s_0) L_0}{R_0^3\cos(\Theta_0)^2}\Bigg)\Bigg)$$

$A_{1,\,2} :=$

$$\frac{1}{R_0\cos(\Theta_0)}\left(-\frac{\left(L_0 - R_0\cos(\Theta_0)\right)L_0}{R_0\cos(\Theta_0)^3} - \frac{\sin(\Theta_0)^2 L_0\left(L_0 - R_0\cos(\Theta_0)\right)}{\cos(\Theta_0)^5 R_0}\right.$$

$$\left. + \frac{R_0}{\cos(\Theta_0)} + \frac{R_0\sin(\Theta_0)^2}{\cos(\Theta_0)^3}\right)$$

$$+ \frac{2\left(-\frac{\sin(\Theta_0) L_0}{\cos(\Theta_0)^2} + \frac{R_0\sin(\Theta_0)}{\cos(\Theta_0)}\right)\sin(\Theta_0)\left(L_0 - R_0\cos(\Theta_0)\right)}{R_0^2\cos(\Theta_0)^4}$$

$$+ \frac{3\left(L_0 - R_0\cos(\Theta_0)\right)^3\sin(\Theta_0)^2}{R_0^3\cos(\Theta_0)^7} + \frac{\left(L_0 - R_0\cos(\Theta_0)\right)^3}{R_0^3\cos(\Theta_0)^5} + \frac{1}{R_0\cos(\Theta_0)^3}\Bigg(\Big(L_0$$

$$- R_0 \cos(\Theta_0)))$$

$$\sin(\Theta_0) \left(\frac{ -\frac{\sin(\Theta_0) L_0}{\cos(\Theta_0)^2} + \frac{\mathrm{D}(r)(s_0) L_0}{\cos(\Theta_0)} + \frac{\sin(\Theta_0) \left(L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)\right)}{\cos(\Theta_0)^2} }{R_0 \cos(\Theta_0)} \right.$$

$$\left. + \frac{\left(L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)\right) \mathrm{D}(r)(s_0) L_0}{R_0^2 \cos(\Theta_0)^3} + \frac{\left(L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)\right) \sin(\Theta_0)}{R_0 \cos(\Theta_0)^3} \right) \Bigg)$$

$$A_{0,3} := - \frac{ -\frac{\left(L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)\right) L_0}{R_0 \cos(\Theta_0)^3} - \frac{\sin(\Theta_0)^2 L_0 \left(L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)\right)}{\cos(\Theta_0)^5 R_0} }{\cos(\Theta_0)^2} - \frac{\sin(\Theta_0)^2 L_0}{\cos(\Theta_0)^6}$$

$$- \frac{L_0}{\cos(\Theta_0)^4} - \frac{3 L_0 \sin(\Theta_0)^2 \left(L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)\right)^2}{\cos(\Theta_0)^8 R_0^2} - \frac{L_0 \left(L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)\right)^2}{\cos(\Theta_0)^6 R_0^2}$$

$$- \frac{1}{\cos(\Theta_0)^4} \left(L_0 \sin(\Theta_0) \left(\frac{1}{R_0 \cos(\Theta_0)} \left(-\frac{\sin(\Theta_0) L_0}{\cos(\Theta_0)^2} + \frac{\mathrm{D}(r)(s_0) L_0}{\cos(\Theta_0)} \right. \right. \right.$$

$$\left. + \frac{\sin(\Theta_0) \left(L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)\right)}{\cos(\Theta_0)^2} \right) + \frac{\left(L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)\right) \mathrm{D}(r)(s_0) L_0}{R_0^2 \cos(\Theta_0)^3}$$

$$\left. \left. + \frac{\left(L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)\right) \sin(\Theta_0)}{R_0 \cos(\Theta_0)^3} \right) \right)$$

```
> B[3,0]:=subs(CS,subs(eqns3,D[1,1,1](P)(s[0],p[0])));
  B[2,1]:=subs(CS,subs(eqns3,D[1,1,2](P)(s[0],p[0])));
  B[1,2]:=subs(CS,subs(eqns3,D[1,2,2](P)(s[0],p[0])));
```

```
B[0,3]:=subs(CS,subs(eqns3,D[2,2,2](P)(s[0],p[0])));
```

$$B_{3,\,0} := -\frac{1}{R_0^2}\left(-\frac{\left(L_0-2\,R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)}{R_0^3\cos\left(\Theta_0\right)}\right.$$

$$+\sin\left(\Theta_0\right)\left(\frac{-\sin\left(\Theta_0\right)+\frac{\sin\left(\Theta_0\right)\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)}{R_0\cos\left(\Theta_0\right)}-\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)\cos\left(\Theta_0\right)}{R_0\cos\left(\Theta_0\right)}\right.$$

$$\left.-\frac{\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)}{R_0^2\cos\left(\Theta_0\right)}-\frac{\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)\sin\left(\Theta_0\right)\left(L_0-2\,R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)}{R_0^3\cos\left(\Theta_0\right)^3}\right)$$

$$-\mathrm{D}^{(2)}(r)\left(s_0\right)\cos\left(\Theta_0\right)-\frac{\mathrm{D}^{(2)}(r)\left(s_0\right)\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)^2}{R_0^2\cos\left(\Theta_0\right)}$$

$$-\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)\left(\frac{-\sin\left(\Theta_0\right)+\frac{\sin\left(\Theta_0\right)\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)}{R_0\cos\left(\Theta_0\right)}-\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)\cos\left(\Theta_0\right)}{R_0\cos\left(\Theta_0\right)}\right.$$

$$\left.-\frac{\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)}{R_0^2\cos\left(\Theta_0\right)}-\frac{\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)\sin\left(\Theta_0\right)\left(L_0-2\,R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)}{R_0^3\cos\left(\Theta_0\right)^3}\right)$$

$$\cos\left(\Theta_0\right)-\frac{2\,\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)\sin\left(\Theta_0\right)\left(L_0-2\,R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)}{R_0^3\cos\left(\Theta_0\right)^2}$$

$$
\begin{aligned}
&+\frac{\left(L_0-2\,R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)^2}{R_0^3\cos\left(\Theta_0\right)}+\frac{\sin\left(\Theta_0\right)^2\left(L_0-2\,R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)^2}{R_0^3\cos\left(\Theta_0\right)^3}\\
&+\frac{1}{\cos\left(\Theta_0\right)}\left(R_0\sin\left(\Theta_0\right)\left(-\frac{1}{R_0^2}\left(-\sin\left(\Theta_0\right)+\frac{\sin\left(\Theta_0\right)\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)}{R_0\cos\left(\Theta_0\right)}\right.\right.\right.\\
&-\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)\cos\left(\Theta_0\right)-\frac{\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)}{R_0}\\
&\left.-\frac{\sin\left(\Theta_0\right)\left(L_0-2\,R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)}{\cos\left(\Theta_0\right)R_0}\right)+\frac{\left(L_0-2\,R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)}{R_0^3}\\
&\left.\left.\left.+\frac{\left(L_0-2\,R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)}{R_0^4\cos\left(\Theta_0\right)}\right)\right)\right)+\frac{1}{R_0^3}\left(2\left(-\sin\left(\Theta_0\right)\right.\right.\\
&+\frac{\sin\left(\Theta_0\right)\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)}{R_0\cos\left(\Theta_0\right)}-\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)\cos\left(\Theta_0\right)-\frac{\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)}{R_0}\\
&\left.\left.-\frac{\sin\left(\Theta_0\right)\left(L_0-2\,R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)}{\cos\left(\Theta_0\right)R_0}\right)\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)\right)+\frac{1}{R_0^4\cos\left(\Theta_0\right)}\left(2\left(-\sin\left(\Theta_0\right)\right.\right.\\
&+\frac{\sin\left(\Theta_0\right)\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)}{R_0\cos\left(\Theta_0\right)}-\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)\cos\left(\Theta_0\right)-\frac{\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)}{R_0}\\
&\left.\left.-\frac{\sin\left(\Theta_0\right)\left(L_0-2\,R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)}{\cos\left(\Theta_0\right)R_0}\right)\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)\right)\\
&-\frac{2\left(L_0-2\,R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)^2}{R_0^4}\\
&-\frac{2\left(L_0-2\,R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)^2\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)}{R_0^5\cos\left(\Theta_0\right)}\\
&+\frac{\left(L_0-2\,R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)\mathrm{D}^{(2)}(r)\left(s_0\right)}{R_0^3}\\
&-\frac{2\left(L_0-2\,R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)^2\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)^2}{R_0^6\cos\left(\Theta_0\right)^2}
\end{aligned}
$$

$$+\frac{\left(L_0-2\,R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)\,\mathrm{D}^{(2)}(r)\left(s_0\right)\,\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)^2}{R_0^5\cos\left(\Theta_0\right)^2}+\frac{1}{R_0^3}\Bigg(\Big(L_0$$

$$-2\,R_0\cos\left(\Theta_0\right)\Big)$$

$$\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)\left(\frac{-\sin\left(\Theta_0\right)+\frac{\sin\left(\Theta_0\right)\,\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)}{R_0\cos\left(\Theta_0\right)}-\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)\,\cos\left(\Theta_0\right)}{R_0\cos\left(\Theta_0\right)}\right.$$

$$\left.-\frac{\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)\,\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)}{R_0^2\cos\left(\Theta_0\right)}-\frac{\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)\,\sin\left(\Theta_0\right)\,\left(L_0-2\,R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)}{R_0^3\cos\left(\Theta_0\right)^3}\right)$$

$$\Bigg)$$

$$B_{2,\,1}:=-\frac{1}{R_0^2}\left(-1+\frac{\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)^2}{R_0^2\cos\left(\Theta_0\right)^2}+\sin\left(\Theta_0\right)\left(\frac{-\frac{\sin\left(\Theta_0\right)\,L_0}{\cos\left(\Theta_0\right)^2}+\frac{R_0\sin\left(\Theta_0\right)}{\cos\left(\Theta_0\right)}}{R_0\cos\left(\Theta_0\right)}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)^2\sin\left(\Theta_0\right)}{R_0^2\cos\left(\Theta_0\right)^4}\right)+\frac{\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)\,\sin\left(\Theta_0\right)}{\cos\left(\Theta_0\right)}\right.$$

$$+\frac{\mathrm{D}^{(2)}(r)\left(s_0\right)\,\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)\,L_0}{R_0\cos\left(\Theta_0\right)^2}-\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)\left(\frac{-\frac{\sin\left(\Theta_0\right)\,L_0}{\cos\left(\Theta_0\right)^2}+\frac{R_0\sin\left(\Theta_0\right)}{\cos\left(\Theta_0\right)}}{R_0\cos\left(\Theta_0\right)}\right.$$

$$+\frac{\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)^2\sin\left(\Theta_0\right)}{R_0^2\cos\left(\Theta_0\right)^4}\Bigg)\cos\left(\Theta_0\right)$$

$$+\frac{\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)L_0\sin\left(\Theta_0\right)\left(L_0-2R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)}{\cos\left(\Theta_0\right)^3R_0^2}+\frac{\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)^2\sin\left(\Theta_0\right)}{R_0^2\cos\left(\Theta_0\right)^3}$$

$$-\frac{\left(L_0-2R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)}{\cos\left(\Theta_0\right)^2R_0^2}$$

$$-\frac{\sin\left(\Theta_0\right)^2\left(L_0-2R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)}{\cos\left(\Theta_0\right)^4R_0^2}+\frac{1}{\cos\left(\Theta_0\right)}\Bigg(R_0\sin\left(\Theta_0\right)\Bigg($$

$$-\frac{-\frac{\sin\left(\Theta_0\right)L_0}{\cos\left(\Theta_0\right)^2}+\frac{R_0\sin\left(\Theta_0\right)}{\cos\left(\Theta_0\right)}+\frac{\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)L_0}{\cos\left(\Theta_0\right)}+\frac{\sin\left(\Theta_0\right)\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)}{\cos\left(\Theta_0\right)^2}}{R_0^2}$$

$$-\frac{\left(L_0-2R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)L_0}{R_0^3\cos\left(\Theta_0\right)^2}\Bigg)\Bigg)\Bigg)$$

$$+\frac{1}{R_0^3}\Bigg(\Bigg(-\frac{\sin\left(\Theta_0\right)L_0}{\cos\left(\Theta_0\right)^2}+\frac{R_0\sin\left(\Theta_0\right)}{\cos\left(\Theta_0\right)}+\frac{\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)L_0}{\cos\left(\Theta_0\right)}$$

$$+\frac{\sin\left(\Theta_0\right)\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)}{\cos\left(\Theta_0\right)^2}\Bigg)\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)\Bigg)+\frac{1}{R_0^4\cos\left(\Theta_0\right)}\Bigg(\Bigg(-\frac{\sin\left(\Theta_0\right)L_0}{\cos\left(\Theta_0\right)^2}$$

$$+\frac{R_0\sin\left(\Theta_0\right)}{\cos\left(\Theta_0\right)}+\frac{\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)L_0}{\cos\left(\Theta_0\right)}+\frac{\sin\left(\Theta_0\right)\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)}{\cos\left(\Theta_0\right)^2}\Bigg)\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)\left(L_0\right.$$

$$- R_0 \cos(\Theta_0)) \Bigg) - \frac{1}{R_0^3 \cos(\Theta_0)^2} \Bigg(\Bigg(-\sin(\Theta_0) + \frac{\sin(\Theta_0) \left(L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)\right)}{R_0 \cos(\Theta_0)}$$

$$- \mathrm{D}(r)(s_0) \cos(\Theta_0) - \frac{\mathrm{D}(r)(s_0) \left(L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)\right)}{R_0}$$

$$- \frac{\sin(\Theta_0) \left(L_0 - 2 R_0 \cos(\Theta_0)\right)}{\cos(\Theta_0) R_0} \Bigg) \mathrm{D}(r)(s_0) L_0 \Bigg) + \frac{\left(L_0 - 2 R_0 \cos(\Theta_0)\right) \mathrm{D}(r)(s_0)^2 L_0}{R_0^4 \cos(\Theta_0)^2}$$

$$+ \frac{2 \left(L_0 - 2 R_0 \cos(\Theta_0)\right) \mathrm{D}(r)(s_0)^2 L_0 \left(L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)\right)}{R_0^5 \cos(\Theta_0)^3}$$

$$- \frac{\left(L_0 - 2 R_0 \cos(\Theta_0)\right) \mathrm{D}^{(2)}(r)(s_0) \left(L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)\right) L_0}{R_0^4 \cos(\Theta_0)^3} + \frac{1}{R_0^3} \Bigg(\Big(L_0$$

$$- 2 R_0 \cos(\Theta_0) \Big) \mathrm{D}(r)(s_0) \left(\frac{ -\frac{\sin(\Theta_0) L_0}{\cos(\Theta_0)^2} + \frac{R_0 \sin(\Theta_0)}{\cos(\Theta_0)} }{R_0 \cos(\Theta_0)} \right.$$

$$\left. + \frac{\left(L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)\right)^2 \sin(\Theta_0)}{R_0^2 \cos(\Theta_0)^4} \right) \Bigg)$$

$$B_{1,2} := -\frac{1}{R_0^2} \Bigg(-\frac{\left(L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)\right) L_0}{R_0 \cos(\Theta_0)^3} - \frac{\sin(\Theta_0)^2 L_0 \left(L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)\right)}{\cos(\Theta_0)^5 R_0} + \frac{R_0}{\cos(\Theta_0)}$$

$$+ \frac{R_0 \sin(\Theta_0)^2}{\cos(\Theta_0)^3} - \frac{\mathrm{D}^{(2)}(r)(s_0) L_0^2}{\cos(\Theta_0)^3} - \frac{\mathrm{D}(r)(s_0) L_0 \sin(\Theta_0) \left(L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)\right)}{\cos(\Theta_0)^4 R_0}$$

$$+\frac{\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)^2}{R_0\cos\left(\Theta_0\right)^3}+\frac{\sin\left(\Theta_0\right)^2\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)^2}{R_0\cos\left(\Theta_0\right)^5}$$

$$+\frac{1}{\cos\left(\Theta_0\right)}\left(R_0\sin\left(\Theta_0\right)\left(\frac{1}{R_0\cos\left(\Theta_0\right)}\left(-\frac{\sin\left(\Theta_0\right)L_0}{\cos\left(\Theta_0\right)^2}+\frac{\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)L_0}{\cos\left(\Theta_0\right)}\right.\right.\right.$$

$$\left.+\frac{\sin\left(\Theta_0\right)\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)}{\cos\left(\Theta_0\right)^2}\right)+\frac{\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)L_0}{R_0^2\cos\left(\Theta_0\right)^3}$$

$$\left.\left.\left.+\frac{\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)\sin\left(\Theta_0\right)}{R_0\cos\left(\Theta_0\right)^3}\right)\right)\right)-\frac{1}{R_0^3\cos\left(\Theta_0\right)^2}\left(2\left(-\frac{\sin\left(\Theta_0\right)L_0}{\cos\left(\Theta_0\right)^2}\right.\right.$$

$$\left.\left.+\frac{R_0\sin\left(\Theta_0\right)}{\cos\left(\Theta_0\right)}+\frac{\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)L_0}{\cos\left(\Theta_0\right)}+\frac{\sin\left(\Theta_0\right)\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)}{\cos\left(\Theta_0\right)^2}\right)\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)L_0\right)$$

$$-\frac{2\left(L_0-2R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)^2L_0^2}{R_0^4\cos\left(\Theta_0\right)^4}+\frac{\left(L_0-2R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)\mathrm{D}^{(2)}(r)\left(s_0\right)L_0^2}{R_0^3\cos\left(\Theta_0\right)^4}$$

$$-\frac{\left(L_0-2R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)L_0\sin\left(\Theta_0\right)\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)}{R_0^4\cos\left(\Theta_0\right)^5}$$

$$B_{0,\,3}:=\frac{1}{R_0\cos\left(\Theta_0\right)}\left(-\frac{\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)L_0}{R_0\cos\left(\Theta_0\right)^3}-\frac{\sin\left(\Theta_0\right)^2L_0\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)}{\cos\left(\Theta_0\right)^5R_0}\right.$$

$$-\frac{\mathrm{D}^{(2)}(r)\left(s_0\right)L_0^2}{\cos\left(\Theta_0\right)^3}-\frac{\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)L_0\sin\left(\Theta_0\right)\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)}{\cos\left(\Theta_0\right)^4R_0}+\frac{\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)^2}{R_0\cos\left(\Theta_0\right)^3}$$

$$+\frac{\sin\left(\Theta_0\right)^2\left(L_0-R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)^2}{R_0\cos\left(\Theta_0\right)^5}$$

$$
\begin{aligned}
&+ \frac{1}{\cos(\Theta_0)} \left(R_0 \sin(\Theta_0) \left(\frac{1}{R_0 \cos(\Theta_0)} \left(- \frac{\sin(\Theta_0) L_0}{\cos(\Theta_0)^2} + \frac{\mathrm{D}(r)(s_0) L_0}{\cos(\Theta_0)} \right.\right.\right. \\
&\left.\left.+ \frac{\sin(\Theta_0) (L_0 - R_0 \cos(\Theta_0))}{\cos(\Theta_0)^2} \right) + \frac{(L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)) \mathrm{D}(r)(s_0) L_0}{R_0^2 \cos(\Theta_0)^3} \\
&\left.\left.+ \frac{(L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)) \sin(\Theta_0)}{R_0 \cos(\Theta_0)^3} \right)\right) \\
&+ \frac{2 \left(- \frac{\sin(\Theta_0) L_0}{\cos(\Theta_0)^2} + \frac{\mathrm{D}(r)(s_0) L_0}{\cos(\Theta_0)} + \frac{\sin(\Theta_0) (L_0 - R_0 \cos(\Theta_0))}{\cos(\Theta_0)^2} \right) \mathrm{D}(r)(s_0) L_0}{R_0^2 \cos(\Theta_0)^3} \\
&+ \frac{2 \left(- \frac{\sin(\Theta_0) L_0}{\cos(\Theta_0)^2} + \frac{\mathrm{D}(r)(s_0) L_0}{\cos(\Theta_0)} + \frac{\sin(\Theta_0) (L_0 - R_0 \cos(\Theta_0))}{\cos(\Theta_0)^2} \right) \sin(\Theta_0)}{R_0 \cos(\Theta_0)^3} \\
&+ \frac{2 (L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)) \mathrm{D}(r)(s_0)^2 L_0^2}{R_0^3 \cos(\Theta_0)^5} + \frac{2 (L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)) \mathrm{D}(r)(s_0) L_0 \sin(\Theta_0)}{R_0^2 \cos(\Theta_0)^5} \\
&- \frac{(L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)) \mathrm{D}^{(2)}(r)(s_0) L_0^2}{R_0^2 \cos(\Theta_0)^5} + \frac{(L_0 - R_0 \cos(\Theta_0))^2 \mathrm{D}(r)(s_0) L_0 \sin(\Theta_0)}{R_0^3 \cos(\Theta_0)^6} \\
&+ \frac{3 (L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)) \sin(\Theta_0)^2}{R_0 \cos(\Theta_0)^5} + \frac{L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)}{R_0 \cos(\Theta_0)^3}
\end{aligned}
$$

****

Fim do cálculo das derivadas de ordem 3 da aplicação do bilhar nas coordenadas canônicas (s,p)

****

Estudo das Derivadas

Estudaremos as derivadas parciais ($A_{i,j}$ e $B_{i,j}$) até a terceira ordem da aplicação do bilhar em um ponto periódico $(s_0, p_0) = T^{n_1}(s_0, p_0)$ pertencente a órbita periódica associada a algum polígono do conjunto Lambda$_{n,m}$ em uma oval n-simétrica Gamma com $n_1 = \frac{n}{mdc(n, m)}$.
Denotando $T(s_0, p_0) = (s_1, p_1)$, $r_0 = r(s_0)$ e $r_1 = r(s_1)$, a condição de simetria (CS) da oval Gamma nos dá $r_1 = r_0$, $s_1 = s_0 + \frac{C}{n}$, e $p_1 = p_0$, onde C é o perímetro da oval e $p_0 = \sin\left(\frac{\text{pi}}{2} - \frac{\text{pi}\, m}{n}\right)$. Ainda Theta$_0$ $= \frac{\text{pi}}{2} - \frac{\text{pi}\, m}{n}$.
As derivadas foram cálculadas na planilha *Cálculo do jato de ordem 3*. Elas dependem de L (distância entre dois pontos de impacto da órbita periódica) e do raio de curvatura nestes pontos r_0 e r_1 (e suas derivadas).

Nesta planilha simplificaremos as expressões já obtidas explicitando a dependência em relação ao raio de curvatura e suas derivadas.
Inicialização:

```
> restart:
```

Derivadas de primeira ordem

As derivadas parciais de primeira ordem são todas entradas da matriz $DT(s_0, p_0)$ e depende apenas de L, r_0 e $\frac{m}{n}$.

```
> #A[1,0] := (L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0]):
  A10 := (L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/(R[0]*cos(Theta[0]));simplify
  (a10-a[1,0]);
```

$$A10 := \frac{L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)}{R_0 \cos(\Theta_0)}$$

$$a10 - a_{1,0}$$

```
> A[1,0]:=A10;
```

$$A_{1,0} := \frac{L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)}{R_0 \cos(\Theta_0)}$$

```
> #A[0,1] := -L[0]/cos(Theta[0])^2:
  A01:= -L[0]/cos(Theta[0])^2;simplify(a01-a[0,1]);
```

$$A01 := -\frac{L_0}{\cos(\Theta_0)^2}$$

$$a01 - a_{0,\,1}$$

```
> A[0,1]:=A01;
```

$$A_{0,\,1} := -\frac{L_0}{\cos(\Theta_0)^2}$$

```
> #B[1,0] := -(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^2;
  B10 := -(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^2;simplify(b10-b[1,0])
  ;
```

$$B10 := -\frac{L_0 - 2\,R_0\cos(\Theta_0)}{R_0^2}$$

$$b10 - b_{1,\,0}$$

```
> B[1,0]:=B10;
```

$$B_{1,\,0} := -\frac{L_0 - 2\,R_0\cos(\Theta_0)}{R_0^2}$$

```
> #B[0,1] := (L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/(R[0]*cos(Theta[0]));
  B01 := (L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/(R[0]*cos(Theta[0]));simplify
  (b01-b[0,1]);
```

$$B01 := \frac{L_0 - R_0\cos(\Theta_0)}{R_0\cos(\Theta_0)}$$

$$b01 - b_{0,\,1}$$

```
> B[0,1]:=B01;
```

$$B_{0,\,1} := \frac{L_0 - R_0\cos(\Theta_0)}{R_0\cos(\Theta_0)}$$

Derivadas de segunda ordem

As derivadas parciais de segunda ordem dependem de L, r_0 e linearmente de $Dr(s_0)$.

A[2,0]

```
> #A[2,0] := (-sin(Theta[0])+sin(Theta[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta
  [0]))/(R[0]*cos(Theta[0]))-D(r)(s[0])*cos(Theta[0]))/(R[0]*
  cos(Theta[0]))-(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))*D(r)(s[0])/(R[0]^2*
  cos(Theta[0]))-(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))*sin(Theta[0])*(L[0]
  -2*R[0]*cos(Theta[0]))/(R[0]^3*cos(Theta[0])^3):
```

```
> A20:=
  -sin(Theta[0])*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))*(L[0]-2*R[0]*cos
  (Theta[0]))/(R[0]^3*cos(Theta[0])^3)-(1/(R[0]^2*cos(Theta[0])
  ))*(L[0]*D(r)(s[0]))
  ;
  simplify(A20-A[2,0]);
```

$$A20 := -\frac{\sin(\Theta_0)\left(L_0 - 2 R_0 \cos(\Theta_0)\right)^2}{R_0^3 \cos(\Theta_0)^3} - \frac{L_0\, \mathrm{D}(r)(s_0)}{R_0^2 \cos(\Theta_0)}$$

$$0$$

```
> A[2,0]:= A20;
```

$$A_{2,\,0} := -\frac{\sin(\Theta_0)\left(L_0 - 2 R_0 \cos(\Theta_0)\right)^2}{R_0^3 \cos(\Theta_0)^3} - \frac{L_0\, \mathrm{D}(r)(s_0)}{R_0^2 \cos(\Theta_0)}$$

A[1,1]

```
> #A[1,1] := (-sin(Theta[0])*L[0]/(cos(Theta[0])^2)+R[0]*sin
  (Theta[0])/cos(Theta[0]))/(R[0]*cos(Theta[0]))+(L[0]-R[0]*cos
  (Theta[0]))^2*sin(Theta[0])/(R[0]^2*cos(Theta[0])^4):
> A11 :=
  sin(Theta[0])*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))*(L[0]-R[0]*cos
  (Theta[0]))/(R[0]^2*cos(Theta[0])^4);
  simplify(A11-A[1,1]);
```

$$A11 := \frac{\sin(\Theta_0)\left(L_0 - 2 R_0 \cos(\Theta_0)\right)\left(L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)\right)}{R_0^2 \cos(\Theta_0)^4}$$

$$0$$

```
> A[1,1]:= A11;
```

$$A_{1,\,1} := \frac{\sin(\Theta_0)\left(L_0 - 2 R_0 \cos(\Theta_0)\right)\left(L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)\right)}{R_0^2 \cos(\Theta_0)^4}$$

A[0,2]

```
> #A[0,2] := -sin(Theta[0])*L[0]*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/(cos
  (Theta[0])^5*R[0]):
> A02:=-sin(Theta[0])*L[0]*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/cos(Theta
  [0])^5/R[0];
  simplify(A02-A[0,2]);
```

$$A02 := -\frac{\sin(\Theta_0)\, L_0\, (L_0 - R_0 \cos(\Theta_0))}{\cos(\Theta_0)^5\, R_0}$$

$$0$$

```
> A[0,2] := A02;
```

$$A_{0,2} := -\frac{\sin(\Theta_0)\, L_0\, (L_0 - R_0 \cos(\Theta_0))}{\cos(\Theta_0)^5\, R_0}$$

B[2,0]

```
> #B[2,0] := -(-sin(Theta[0])+sin(Theta[0])*(L[0]-R[0]*cos
  (Theta[0]))/(R[0]*cos(Theta[0]))-D(r)(s[0])*cos(Theta[0])-D
  (r)(s[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]-sin(Theta[0])*(L[0]
  -2*R[0]*cos(Theta[0]))/(cos(Theta[0])*R[0]))/(R[0]^2)+(L[0]
  -2*R[0]*cos(Theta[0]))*D(r)(s[0])/(R[0]^3)+(L[0]-2*R[0]*cos
  (Theta[0]))*D(r)(s[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/(R[0]^4*cos
  (Theta[0])):
> B20 := (L[0]*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/(R[0]^4*cos(Theta[0]))
  )*D(r)(s[0]):
  simplify(B20-B[2,0]);
```

$$0$$

```
> B[2,0] :=B20;
```

$$B_{2,0} := \frac{L_0\, (L_0 - R_0 \cos(\Theta_0))\, \mathrm{D}(r)(s_0)}{R_0^4 \cos(\Theta_0)}$$

B[1,1]

```
> #B[1,1] := -(-sin(Theta[0])*L[0]/(cos(Theta[0])^2)+R[0]*sin
  (Theta[0])/cos(Theta[0])+D(r)(s[0])*L[0]/cos(Theta[0])+sin
  (Theta[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/(cos(Theta[0])^2))/(R[0]
  ^2)-(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))*D(r)(s[0])*L[0]/(R[0]^3*cos
  (Theta[0])^2):
> B11 := -L[0]*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))*D(r)(s[0])/(R[0]^3*cos
  (Theta[0])^2):
  simplify(B11-B[1,1]);
```

$$B11 := -\frac{L_0\, (L_0 - R_0 \cos(\Theta_0))\, \mathrm{D}(r)(s_0)}{R_0^3 \cos(\Theta_0)^2}$$

$$0$$

```
> B[1,1] :=B11;
```

$$B_{1,\,1} := -\frac{L_0\left(L_0 - R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)}{R_0^3\cos\left(\Theta_0\right)^2}$$

B[0,2]

```
> #B[0,2] := (-sin(Theta[0])*L[0]/cos(Theta[0])^2+D(r)(s[0])*L
  [0]/cos(Theta[0])+sin(Theta[0])/cos(Theta[0])^2*(L[0]-R[0]*
  cos(Theta[0])))/R[0]/cos(Theta[0])+(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))
  /R[0]^2/cos(Theta[0])^3*D(r)(s[0])*L[0]+(L[0]-R[0]*cos(Theta
  [0]))/R[0]/cos(Theta[0])^3*sin(Theta[0]):
> B02 := +(L[0])^2/(R[0]^2*cos(Theta[0])^3)*D(r)(s[0])
  +sin(Theta[0])*
  (L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])^3
  ;
  simplify(B02-B[0,2]);
```

$$B02 := \frac{L_0^2\,\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)}{R_0^2\cos\left(\Theta_0\right)^3} + \frac{\sin\left(\Theta_0\right)\left(L_0 - 2\,R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)}{R_0\cos\left(\Theta_0\right)^3}$$

$$0$$

```
> B[0,2]:=B02;
```

$$B_{0,\,2} := \frac{L_0^2\,\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)}{R_0^2\cos\left(\Theta_0\right)^3} + \frac{\sin\left(\Theta_0\right)\left(L_0 - 2\,R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)}{R_0\cos\left(\Theta_0\right)^3}$$

Derivadas de terceira ordem

As derivadas parciais de terceira ordem dependem de L, r_0 com dependência linear e quadrática de $\mathrm{D}\,r\left(s_0\right)$. A dependência das derivadas com relação a $\mathrm{D}^2\,r\left(s_0\right)$ também é linear. Iremos reescrever as derivadas como
$x_{i_0 j_0} + x_{i_1 j_1}\,\mathrm{D}(r)\left(s_0\right) + x_{i_1 j_2}\,\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)^2 + x_{i_2 j_1}\,\mathrm{D}^2\,r\left(s_0\right)$, onde o índice i indica a ordem da derivada em r, e j indica se o termo é constante, linear ou quadrático.

A[3,0]

```
> #A[3,0]:=(-(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^3*(L[0]-R[0]*cos
  (Theta[0]))/cos(Theta[0])+sin(Theta[0])*((-sin(Theta[0])+sin
  (Theta[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])-D(r)
  (s[0])*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])-(L[0]-R[0]*cos(Theta
  [0]))/R[0]^2/cos(Theta[0])*D(r)(s[0])-(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]
  ))/R[0]^3/cos(Theta[0])^3*sin(Theta[0])*(L[0]-2*R[0]*cos
  (Theta[0])))-`@@`(D,2)(r)(s[0])*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta
```

```
[0])-2*(-sin(Theta[0])+sin(Theta[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])-D(r)(s[0])*cos(Theta[0]))/R[0]^2/cos(Theta[0])*D(r)(s[0])-2*(-sin(Theta[0])+sin(Theta[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])-D(r)(s[0])*cos(Theta[0]))/R[0]^3/cos(Theta[0])^3*sin(Theta[0])*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))+2*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^3/cos(Theta[0])*D(r)(s[0])^2+2*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^4/cos(Theta[0])^3*D(r)(s[0])*sin(Theta[0])*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))-(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^2/cos(Theta[0])*`@@`(D,2)(r)(s[0])+3*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^5/cos(Theta[0])^5*sin(Theta[0])^2*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))^2+(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^5/cos(Theta[0])^3*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))^2+(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])^3*sin(Theta[0])*(-(-sin(Theta[0])+sin(Theta[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])-D(r)(s[0])*cos(Theta[0])-D(r)(s[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]-sin(Theta[0])/cos(Theta[0])*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0])/R[0]^2+(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^3*D(r)(s[0])+(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^4*D(r)(s[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/cos(Theta[0])):
> A30:=(-(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^3*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/cos(Theta[0])+sin(Theta[0])*((-sin(Theta[0])+sin(Theta[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])-D(r)(s[0])*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])-(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^2/cos(Theta[0])*D(r)(s[0])-(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^3/cos(Theta[0])^3*sin(Theta[0])*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0])))-`@@`(D,2)(r)(s[0])*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])-2*(-sin(Theta[0])+sin(Theta[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])-D(r)(s[0])*cos(Theta[0]))/R[0]^2/cos(Theta[0])*D(r)(s[0])-2*(-sin(Theta[0])+sin(Theta[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])-D(r)(s[0])*cos(Theta[0]))/R[0]^3/cos(Theta[0])^3*sin(Theta[0])*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))+2*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^3/cos(Theta[0])*D(r)(s[0])^2+2*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^4/cos(Theta[0])^3*D(r)(s[0])*sin(Theta[0])*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))-(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^2/cos(Theta[0])*`@@`(D,2)(r)(s[0])+3*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^5/cos(Theta[0])^5*sin(Theta[0])^2*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))^2+(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^5/cos(Theta[0])^3*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))^2+(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])^3*sin(Theta[0])*(-(-sin(Theta[0])+sin(Theta[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])-D(r)(s[0])*cos(Theta[0])-D(r)(s[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]-sin(Theta[0])/cos(Theta[0])*(L[0]-2*R[0]
```

```
*cos(Theta[0]))/R[0])/R[0]^2+(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]
^3*D(r)(s[0])+(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^4*D(r)(s[0])*
(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/cos(Theta[0])):
simplify(A30-A[3,0]);
```

$$0$$

```
> A300:=subs(D(r)(s[0])=0,(D@D)(r)(s[0])=0,A30):
> AA300:=
(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))*(
+3*sin(Theta[0])^2*(
(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/(cos(Theta[0])^2)*(L[0]-2*R[0]*
cos(Theta[0]))
)
+(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))*(L[0]-3*R[0]*cos(Theta[0]))
)/(R[0]^5*cos(Theta[0])^3);
simplify(AA300-A300);
```

$$AA300 := \frac{1}{R_0^5 \cos(\Theta_0)^3} \left(\left(L_0 - 2\, R_0 \cos(\Theta_0)\right) \left(\frac{3 \sin(\Theta_0)^2 \left(L_0 - 2\, R_0 \cos(\Theta_0)\right)^2}{\cos(\Theta_0)^2} + \left(L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)\right) \left(L_0 - 3\, R_0 \cos(\Theta_0)\right) \right) \right)$$

$$0$$

```
> A3021:=coeff(A30,(D@D)(r)(s[0])):
> AA3021:=-(L[0])/R[0]^2/cos(Theta[0]);
simplify(AA3021-A3021);
```

$$AA3021 := -\frac{L_0}{R_0^2 \cos(\Theta_0)}$$

$$0$$

```
> A3011:=coeff(A30,(D)(r)(s[0]),1):
> AA3011:=
sin(Theta[0])*(-L[0]/R[0]^3/cos(Theta[0])^2
+2*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^4/cos(Theta[0])^3*(L[0]-2*R
[0]*cos(Theta[0]))
+(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/(R[0]^4*cos(Theta[0])^3)*
 2*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))
+(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/(R[0]^4*cos(Theta[0])^3)*(L[0]-2*R
[0]*cos(Theta[0]))/R[0]*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/cos(Theta
[0]))
;
```

```
simplify(AA3011-A3011);
```

$$AA3011 := \sin(\Theta_0)\left(-\frac{L_0}{R_0^3\cos(\Theta_0)^2}+\frac{2(L_0-R_0\cos(\Theta_0))(L_0-2R_0\cos(\Theta_0))}{R_0^4\cos(\Theta_0)^3}+\frac{2(L_0-R_0\cos(\Theta_0))^2}{R_0^4\cos(\Theta_0)^3}+\frac{(L_0-R_0\cos(\Theta_0))^2(L_0-2R_0\cos(\Theta_0))}{R_0^5\cos(\Theta_0)^4}\right)$$

$$0$$

```
> A3012:=coeff(A30,(D)(r)(s[0]),2):
```

```
> AA3012:=2*(L[0])/R[0]^3/cos(Theta[0]);
  simplify(AA3012-A3012);
```

$$AA3012 := \frac{2L_0}{R_0^3\cos(\Theta_0)}$$

$$0$$

```
> AA30:=AA300+AA3011*(D)(r)(s[0])+AA3012*((D)(r)(s[0]))^2+
  AA302*(D@D)(r)(s[0]):
  simplify(AA30-A30);
```

$$0$$

```
> A[3,0]:=AA30;
```

$$A_{3,0} := \frac{1}{R_0^5\cos(\Theta_0)^3}\left((L_0-2R_0\cos(\Theta_0))\left(\frac{3\sin(\Theta_0)^2(L_0-2R_0\cos(\Theta_0))^2}{\cos(\Theta_0)^2}+(L_0-R_0\cos(\Theta_0))(L_0-3R_0\cos(\Theta_0))\right)\right)+\sin(\Theta_0)\left(-\frac{L_0}{R_0^3\cos(\Theta_0)^2}+\frac{2(L_0-R_0\cos(\Theta_0))(L_0-2R_0\cos(\Theta_0))}{R_0^4\cos(\Theta_0)^3}+\frac{2(L_0-R_0\cos(\Theta_0))^2}{R_0^4\cos(\Theta_0)^3}+\frac{(L_0-R_0\cos(\Theta_0))^2(L_0-2R_0\cos(\Theta_0))}{R_0^5\cos(\Theta_0)^4}\right)\mathrm{D}(r)(s_0)+\frac{2L_0\,\mathrm{D}(r)(s_0)^2}{R_0^3\cos(\Theta_0)}-\frac{L_0\,\mathrm{D}^{(2)}(r)(s_0)}{R_0^2\cos(\Theta_0)}$$

A[2,1]

```
> #A[2,1] := (-1+(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2/(R[0]^2*cos(Theta
  [0])^2)+sin(Theta[0])*((-sin(Theta[0])*L[0]/(cos(Theta[0])^2)
```

```
+R[0]*sin(Theta[0])/cos(Theta[0]))/(R[0]*cos(Theta[0]))+(L[0]
-R[0]*cos(Theta[0]))^2*sin(Theta[0])/(R[0]^2*cos(Theta[0])^4)
)+D(r)(s[0])*sin(Theta[0])/cos(Theta[0]))/(R[0]*cos(Theta[0])
)-(-sin(Theta[0])*L[0]/(cos(Theta[0])^2)+R[0]*sin(Theta[0])
/cos(Theta[0]))*D(r)(s[0])/(R[0]^2*cos(Theta[0]))-(-sin(Theta
[0])*L[0]/(cos(Theta[0])^2)+R[0]*sin(Theta[0])/cos(Theta[0]))
*sin(Theta[0])*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/(R[0]^3*cos(Theta
[0])^3)+(-sin(Theta[0])+sin(Theta[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]
))/(R[0]*cos(Theta[0]))-D(r)(s[0])*cos(Theta[0]))*sin(Theta
[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/(R[0]^2*cos(Theta[0])^4)-(L[0]
-R[0]*cos(Theta[0]))^2*sin(Theta[0])*D(r)(s[0])/(R[0]^3*cos
(Theta[0])^4)-3*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2*sin(Theta[0])^2*
(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/(R[0]^4*cos(Theta[0])^6)-(L[0]-R
[0]*cos(Theta[0]))^2*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/(R[0]^4*cos
(Theta[0])^4)+(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))*sin(Theta[0])*(-(-sin
(Theta[0])*L[0]/(cos(Theta[0])^2)+R[0]*sin(Theta[0])/cos
(Theta[0])+D(r)(s[0])*L[0]/cos(Theta[0])+sin(Theta[0])*(L[0]-
R[0]*cos(Theta[0]))/(cos(Theta[0])^2))/(R[0]^2)-(L[0]-2*R[0]*
cos(Theta[0]))*D(r)(s[0])*L[0]/(R[0]^3*cos(Theta[0])^2))/(R
[0]*cos(Theta[0])^3):

> A21:=(-1+(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2/(R[0]^2*cos(Theta[0])^2)
+sin(Theta[0])*((-sin(Theta[0])*L[0]/(cos(Theta[0])^2)+R[0]*
sin(Theta[0])/cos(Theta[0]))/(R[0]*cos(Theta[0]))+(L[0]-R[0]*
cos(Theta[0]))^2*sin(Theta[0])/(R[0]^2*cos(Theta[0])^4))+D(r)
(s[0])*sin(Theta[0])/cos(Theta[0]))/(R[0]*cos(Theta[0]))-(-
sin(Theta[0])*L[0]/(cos(Theta[0])^2)+R[0]*sin(Theta[0])/cos
(Theta[0]))*D(r)(s[0])/(R[0]^2*cos(Theta[0]))-(-sin(Theta[0])
*L[0]/(cos(Theta[0])^2)+R[0]*sin(Theta[0])/cos(Theta[0]))*sin
(Theta[0])*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/(R[0]^3*cos(Theta[0])
^3)+(-sin(Theta[0])+sin(Theta[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/
(R[0]*cos(Theta[0]))-D(r)(s[0])*cos(Theta[0]))*sin(Theta[0])*
(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/(R[0]^2*cos(Theta[0])^4)-(L[0]-R[0]
*cos(Theta[0]))^2*sin(Theta[0])*D(r)(s[0])/(R[0]^3*cos(Theta
[0])^4)-3*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2*sin(Theta[0])^2*(L[0]
-2*R[0]*cos(Theta[0]))/(R[0]^4*cos(Theta[0])^6)-(L[0]-R[0]*
cos(Theta[0]))^2*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/(R[0]^4*cos
(Theta[0])^4)+(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))*sin(Theta[0])*(-(-sin
(Theta[0])*L[0]/(cos(Theta[0])^2)+R[0]*sin(Theta[0])/cos
(Theta[0])+D(r)(s[0])*L[0]/cos(Theta[0])+sin(Theta[0])*(L[0]-
R[0]*cos(Theta[0]))/(cos(Theta[0])^2))/(R[0]^2)-(L[0]-2*R[0]*
cos(Theta[0]))*D(r)(s[0])*L[0]/(R[0]^3*cos(Theta[0])^2))/(R
```

```
[0]*cos(Theta[0])^3):
simplify(A21-A[2,1]);
```

$$0$$

```
> A212:=coeff(A21,(D@D)(r)(s[0]),1);
A2112:=coeff(A21,(D)(r)(s[0]),2);
```

$$A212 := 0$$

$$A2112 := 0$$

```
> A2111:=coeff(A21,(D)(r)(s[0]),1):
> AA2111 := sin(Theta[0])/(cos(Theta[0])^2*R[0])
-(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2*sin(Theta[0])/(R[0]^3*cos(Theta
[0])^4)
-L[0]*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2*sin(Theta[0])/(R[0]^4*cos
(Theta[0])^5);
simplify(AA2111-A2111);
```

$$AA2111 := \frac{\sin(\Theta_0)}{\cos(\Theta_0)^2 R_0} - \frac{(L_0 - R_0 \cos(\Theta_0))^2 \sin(\Theta_0)}{R_0^3 \cos(\Theta_0)^4} - \frac{L_0 (L_0 - R_0 \cos(\Theta_0))^2 \sin(\Theta_0)}{R_0^4 \cos(\Theta_0)^5}$$

$$0$$

```
> A210:=subs(D(r)(s[0])=0,(D@D)(r)(s[0])=0,A21):
> AA210 :=

-1/(R[0]*cos(Theta[0]))
+(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2/(R[0]^2*cos(Theta[0])^4)/(R[0]*
cos(Theta[0]))
-sin(Theta[0])^2*(((L[0]-R[0]*cos(Theta[0])))/(R[0]*cos(Theta
[0])^3)/(R[0]*cos(Theta[0]))
)
+(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/(cos(Theta[0])^2)
*sin(Theta[0])^2*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/(R[0]^3*cos
(Theta[0])^3)

+(sin(Theta[0])*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/(R[0]*cos(Theta
[0])))*sin(Theta[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/(R[0]^2*cos
(Theta[0])^4)
-2*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2*sin(Theta[0])^2*(L[0]-2*R[0]*
cos(Theta[0]))/(R[0]^4*cos(Theta[0])^6)
-(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/(R
```

```
[0]^4*cos(Theta[0])^6)
;
simplify(AA210-A210);
```

$$AA210 := -\frac{1}{R_0\cos(\Theta_0)} + \frac{(L_0 - R_0\cos(\Theta_0))^2}{R_0^3\cos(\Theta_0)^5} - \frac{\sin(\Theta_0)^2 (L_0 - R_0\cos(\Theta_0))}{R_0^2\cos(\Theta_0)^4}$$
$$+ \frac{2 (L_0 - R_0\cos(\Theta_0)) \sin(\Theta_0)^2 (L_0 - 2 R_0\cos(\Theta_0))}{\cos(\Theta_0)^5 R_0^3}$$
$$- \frac{2 (L_0 - R_0\cos(\Theta_0))^2 \sin(\Theta_0)^2 (L_0 - 2 R_0\cos(\Theta_0))}{R_0^4\cos(\Theta_0)^6}$$
$$- \frac{(L_0 - R_0\cos(\Theta_0))^2 (L_0 - 2 R_0\cos(\Theta_0))}{R_0^4\cos(\Theta_0)^6}$$

$$0$$

```
> AA21:=AA210+AA2111*D(r)(s[0]);
simplify(AA21-A21);
```

$$AA21 := -\frac{1}{R_0\cos(\Theta_0)} + \frac{(L_0 - R_0\cos(\Theta_0))^2}{R_0^3\cos(\Theta_0)^5} - \frac{\sin(\Theta_0)^2 (L_0 - R_0\cos(\Theta_0))}{R_0^2\cos(\Theta_0)^4}$$
$$+ \frac{2 (L_0 - R_0\cos(\Theta_0)) \sin(\Theta_0)^2 (L_0 - 2 R_0\cos(\Theta_0))}{\cos(\Theta_0)^5 R_0^3}$$
$$- \frac{2 (L_0 - R_0\cos(\Theta_0))^2 \sin(\Theta_0)^2 (L_0 - 2 R_0\cos(\Theta_0))}{R_0^4\cos(\Theta_0)^6}$$
$$- \frac{(L_0 - R_0\cos(\Theta_0))^2 (L_0 - 2 R_0\cos(\Theta_0))}{R_0^4\cos(\Theta_0)^6} + \left(\frac{\sin(\Theta_0)}{\cos(\Theta_0)^2 R_0}\right.$$
$$\left. - \frac{(L_0 - R_0\cos(\Theta_0))^2 \sin(\Theta_0)}{R_0^3\cos(\Theta_0)^4} - \frac{L_0 (L_0 - R_0\cos(\Theta_0))^2 \sin(\Theta_0)}{R_0^4\cos(\Theta_0)^5}\right) \mathrm{D}(r)(s_0)$$

$$0$$

```
> A[2,1]:=AA21;
```

$$A_{2,1} := -\frac{1}{R_0\cos(\Theta_0)} + \frac{(L_0 - R_0\cos(\Theta_0))^2}{R_0^3\cos(\Theta_0)^5} - \frac{\sin(\Theta_0)^2 (L_0 - R_0\cos(\Theta_0))}{R_0^2\cos(\Theta_0)^4}$$

$$+\frac{2\left(L_0-R_0\cos(\Theta_0)\right)\sin(\Theta_0)^2\left(L_0-2R_0\cos(\Theta_0)\right)}{\cos(\Theta_0)^5R_0^3}$$

$$-\frac{2\left(L_0-R_0\cos(\Theta_0)\right)^2\sin(\Theta_0)^2\left(L_0-2R_0\cos(\Theta_0)\right)}{R_0^4\cos(\Theta_0)^6}$$

$$-\frac{\left(L_0-R_0\cos(\Theta_0)\right)^2\left(L_0-2R_0\cos(\Theta_0)\right)}{R_0^4\cos(\Theta_0)^6}+\left(\frac{\sin(\Theta_0)}{\cos(\Theta_0)^2R_0}\right.$$

$$\left.-\frac{\left(L_0-R_0\cos(\Theta_0)\right)^2\sin(\Theta_0)}{R_0^3\cos(\Theta_0)^4}-\frac{L_0\left(L_0-R_0\cos(\Theta_0)\right)^2\sin(\Theta_0)}{R_0^4\cos(\Theta_0)^5}\right)\mathrm{D}(r)(s_0)$$

A[1,2]

```
> #A[1,2] := (-(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])^3*L
[0]-sin(Theta[0])^2*L[0]/cos(Theta[0])^5*(L[0]-R[0]*cos(Theta
[0]))/R[0]+R[0]/cos(Theta[0])+R[0]*sin(Theta[0])^2/cos(Theta
[0])^3)/R[0]/cos(Theta[0])+2*(-sin(Theta[0])*L[0]/cos(Theta
[0])^2+R[0]*sin(Theta[0])/cos(Theta[0]))/R[0]^2/cos(Theta[0])
^4*sin(Theta[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))+3*(L[0]-R[0]*cos
(Theta[0]))^3/R[0]^3/cos(Theta[0])^7*sin(Theta[0])^2+(L[0]-R
[0]*cos(Theta[0]))^3/R[0]^3/cos(Theta[0])^5+(L[0]-R[0]*cos
(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])^3*sin(Theta[0])*((-sin(Theta
[0])*L[0]/cos(Theta[0])^2+D(r)(s[0])*L[0]/cos(Theta[0])+sin
(Theta[0])/cos(Theta[0])^2*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))))/R[0]
/cos(Theta[0])+(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^2/cos(Theta[0])
^3*D(r)(s[0])*L[0]+(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta
[0])^3*sin(Theta[0])):
> A12:= (-(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])^3*L[0]-
sin(Theta[0])^2*L[0]/cos(Theta[0])^5*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0])
)/R[0]+R[0]/cos(Theta[0])+R[0]*sin(Theta[0])^2/cos(Theta[0])
^3)/R[0]/cos(Theta[0])+2*(-sin(Theta[0])*L[0]/cos(Theta[0])
^2+R[0]*sin(Theta[0])/cos(Theta[0]))/R[0]^2/cos(Theta[0])^4*
sin(Theta[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))+3*(L[0]-R[0]*cos
(Theta[0]))^3/R[0]^3/cos(Theta[0])^7*sin(Theta[0])^2+(L[0]-R
[0]*cos(Theta[0]))^3/R[0]^3/cos(Theta[0])^5+(L[0]-R[0]*cos
(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])^3*sin(Theta[0])*((-sin(Theta
[0])*L[0]/cos(Theta[0])^2+D(r)(s[0])*L[0]/cos(Theta[0])+sin
(Theta[0])/cos(Theta[0])^2*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))))/R[0]
/cos(Theta[0])+(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^2/cos(Theta[0])
^3*D(r)(s[0])*L[0]+(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta
```

```
[0])^3*sin(Theta[0])):
simplify(A12-A[1,2]);
```

$$0$$

```
> A120:=subs(D(r)(s[0])=0,(D@D)(r)(s[0])=0,A12):
> AA120 :=
-(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))*L[0]/(R[0]^2*cos(Theta[0])^6)
+(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^3/(R[0]^3*cos(Theta[0])^7)
+1/(cos(Theta[0])^4)
+2*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2
*sin(Theta[0])^2*
((L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/(R[0]^3*cos(Theta[0])^7)
)
+(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))*sin(Theta[0])^2*
((L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/(R[0]^2*cos(Theta[0])^6));
simplify(AA120-A120);
```

$$AA120 := -\frac{\left(L_0 - R_0 \cos\left(\Theta_0\right)\right) L_0}{R_0^2 \cos\left(\Theta_0\right)^6} + \frac{\left(L_0 - R_0 \cos\left(\Theta_0\right)\right)^3}{R_0^3 \cos\left(\Theta_0\right)^7} + \frac{1}{\cos\left(\Theta_0\right)^4}$$
$$+ \frac{2 \left(L_0 - R_0 \cos\left(\Theta_0\right)\right)^2 \sin\left(\Theta_0\right)^2 \left(L_0 - 2 R_0 \cos\left(\Theta_0\right)\right)}{R_0^3 \cos\left(\Theta_0\right)^7}$$
$$+ \frac{\left(L_0 - R_0 \cos\left(\Theta_0\right)\right) \sin\left(\Theta_0\right)^2 \left(L_0 - 2 R_0 \cos\left(\Theta_0\right)\right)}{R_0^2 \cos\left(\Theta_0\right)^6}$$

$$0$$

```
> A1212:=coeff(A12,(D)(r)(s[0]),2);
```

$$A1212 := 0$$

```
> A1211:=coeff(A12,(D)(r)(s[0]),1):
> AA1211:=
(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])^3*sin(Theta[0])*
((L[0])/R[0]^2/cos(Theta[0])^3*L[0]);
simplify(AA1211-A1211);
```

$$AA1211 := \frac{\left(L_0 - R_0 \cos\left(\Theta_0\right)\right) \sin\left(\Theta_0\right) L_0^2}{R_0^3 \cos\left(\Theta_0\right)^6}$$

$$0$$

```
> A122:=coeff(A2,(D@D)(r)(s[0]),1);
```

$$A122 := 0$$

```
> AA12:=AA120+D(r)(s[0])*AA1211;
  simplify(AA12-A12);
```

$$AA12 := -\frac{(L_0 - R_0\cos(\Theta_0))\,L_0}{R_0^2\cos(\Theta_0)^6} + \frac{(L_0 - R_0\cos(\Theta_0))^3}{R_0^3\cos(\Theta_0)^7} + \frac{1}{\cos(\Theta_0)^4} + \frac{2\,(L_0 - R_0\cos(\Theta_0))^2\sin(\Theta_0)^2\,(L_0 - 2\,R_0\cos(\Theta_0))}{R_0^3\cos(\Theta_0)^7} + \frac{(L_0 - R_0\cos(\Theta_0))\sin(\Theta_0)^2\,(L_0 - 2\,R_0\cos(\Theta_0))}{R_0^2\cos(\Theta_0)^6} + \frac{\mathrm{D}(r)(s_0)\,(L_0 - R_0\cos(\Theta_0))\sin(\Theta_0)\,L_0^2}{R_0^3\cos(\Theta_0)^6}$$

$$0$$

```
> A[1,2]:=AA12;
```

$$A_{1,2} := -\frac{(L_0 - R_0\cos(\Theta_0))\,L_0}{R_0^2\cos(\Theta_0)^6} + \frac{(L_0 - R_0\cos(\Theta_0))^3}{R_0^3\cos(\Theta_0)^7} + \frac{1}{\cos(\Theta_0)^4} + \frac{2\,(L_0 - R_0\cos(\Theta_0))^2\sin(\Theta_0)^2\,(L_0 - 2\,R_0\cos(\Theta_0))}{R_0^3\cos(\Theta_0)^7} + \frac{(L_0 - R_0\cos(\Theta_0))\sin(\Theta_0)^2\,(L_0 - 2\,R_0\cos(\Theta_0))}{R_0^2\cos(\Theta_0)^6} + \frac{\mathrm{D}(r)(s_0)\,(L_0 - R_0\cos(\Theta_0))\sin(\Theta_0)\,L_0^2}{R_0^3\cos(\Theta_0)^6}$$

a[0,3]

```
> #A[0,3] := -(-(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])^3*
  L[0]-sin(Theta[0])^2*L[0]/cos(Theta[0])^5*(L[0]-R[0]*cos
  (Theta[0]))/R[0])/cos(Theta[0])^2-sin(Theta[0])^2*L[0]/cos
  (Theta[0])^6-L[0]/cos(Theta[0])^4-3*L[0]/cos(Theta[0])^8*sin
  (Theta[0])^2*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2/R[0]^2-L[0]/cos
  (Theta[0])^6*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2/R[0]^2-L[0]/cos
  (Theta[0])^4*sin(Theta[0])*((-sin(Theta[0])*L[0]/cos(Theta[0]
  )^2+D(r)(s[0])*L[0]/cos(Theta[0])+sin(Theta[0])/cos(Theta[0])
```

```
^2*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0])))/R[0]/cos(Theta[0])+(L[0]-R[0]*
cos(Theta[0]))/R[0]^2/cos(Theta[0])^3*D(r)(s[0])*L[0]+(L[0]-R
[0]*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])^3*sin(Theta[0])):
```

```
> A03:= -(-(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])^3*L[0]-
sin(Theta[0])^2*L[0]/cos(Theta[0])^5*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0])
)/R[0])/cos(Theta[0])^2-sin(Theta[0])^2*L[0]/cos(Theta[0])^6-
L[0]/cos(Theta[0])^4-3*L[0]/cos(Theta[0])^8*sin(Theta[0])^2*
(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2/R[0]^2-L[0]/cos(Theta[0])^6*(L[0]
-R[0]*cos(Theta[0]))^2/R[0]^2-L[0]/cos(Theta[0])^4*sin(Theta
[0])*((-sin(Theta[0])*L[0]/cos(Theta[0])^2+D(r)(s[0])*L[0]
/cos(Theta[0])+sin(Theta[0])/cos(Theta[0])^2*(L[0]-R[0]*cos
(Theta[0])))/R[0]/cos(Theta[0])+(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R
[0]^2/cos(Theta[0])^3*D(r)(s[0])*L[0]+(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]
))/R[0]/cos(Theta[0])^3*sin(Theta[0])):
simplify(a03-a[0,3]);
```

$$a03 - a_{0,\,3}$$

```
> A0312:=coeff(A03,(D)(r)(s[0]),2);
```

$$A0312 := 0$$

```
> A032:=coeff(A03,(D@D)(r)(s[0]),1);
```

$$A032 := 0$$

```
> A0311:=coeff(A03,(D)(r)(s[0]),1):
```

```
> AA0311:=-L[0]^2/cos(Theta[0])^4*sin(Theta[0])*
((L[0])/R[0]^2/cos(Theta[0])^3);
simplify(AA0311-A0311);
```

$$AA0311 := -\frac{L_0^3 \sin\left(\Theta_0\right)}{\cos\left(\Theta_0\right)^7 R_0^2}$$

$$0$$

```
> A030:=subs(D(r)(s[0])=0,(D@D)(r)(s[0])=0,A03):
```

```
> AA030:=
L[0]*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/cos(Theta[0])^5/R[0]
-3*L[0]/cos(Theta[0])^8*sin(Theta[0])^2*(L[0]-R[0]*cos(Theta
[0]))^2/R[0]^2
-L[0]/cos(Theta[0])^6*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2/R[0]^2
-L[0]/cos(Theta[0])^4*cos(Theta[0])^2*1/(cos(Theta[0])^2)
;

simplify(AA030-A030);
```

$$AA030 := \frac{L_0 \left(L_0 - R_0 \cos\left(\Theta_0\right)\right)}{\cos\left(\Theta_0\right)^5 R_0} - \frac{3 L_0 \sin\left(\Theta_0\right)^2 \left(L_0 - R_0 \cos\left(\Theta_0\right)\right)^2}{\cos\left(\Theta_0\right)^8 R_0^2} - \frac{L_0 \left(L_0 - R_0 \cos\left(\Theta_0\right)\right)^2}{\cos\left(\Theta_0\right)^6 R_0^2} - \frac{L_0}{\cos\left(\Theta_0\right)^4}$$

$$0$$

```
> AA030:=
  L[0]*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/cos(Theta[0])^5/R[0]
  -3*L[0]/cos(Theta[0])^8*sin(Theta[0])^2*(L[0]-R[0]*cos(Theta
  [0]))^2/R[0]^2
  -L[0]/cos(Theta[0])^6*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2/R[0]^2
  ;

  simplify(AA030-A030);
```

$$AA030 := \frac{L_0 \left(L_0 - 2 R_0 \cos\left(\Theta_0\right)\right)}{\cos\left(\Theta_0\right)^5 R_0} - \frac{3 L_0 \sin\left(\Theta_0\right)^2 \left(L_0 - R_0 \cos\left(\Theta_0\right)\right)^2}{\cos\left(\Theta_0\right)^8 R_0^2} - \frac{L_0 \left(L_0 - R_0 \cos\left(\Theta_0\right)\right)^2}{\cos\left(\Theta_0\right)^6 R_0^2}$$

$$0$$

```
> AA03:=AA030+D(r)(s[0])*AA0311;
  simplify(AA03-A03);
```

$$AA03 := \frac{L_0 \left(L_0 - 2 R_0 \cos\left(\Theta_0\right)\right)}{\cos\left(\Theta_0\right)^5 R_0} - \frac{3 L_0 \sin\left(\Theta_0\right)^2 \left(L_0 - R_0 \cos\left(\Theta_0\right)\right)^2}{\cos\left(\Theta_0\right)^8 R_0^2} - \frac{L_0 \left(L_0 - R_0 \cos\left(\Theta_0\right)\right)^2}{\cos\left(\Theta_0\right)^6 R_0^2} - \frac{\mathrm{D}(r)\left(s_0\right) L_0^3 \sin\left(\Theta_0\right)}{\cos\left(\Theta_0\right)^7 R_0^2}$$

$$0$$

```
> A[0,3]:=AA03;
```

$$A_{0,3} := \frac{L_0 \left(L_0 - 2 R_0 \cos\left(\Theta_0\right)\right)}{\cos\left(\Theta_0\right)^5 R_0} - \frac{3 L_0 \sin\left(\Theta_0\right)^2 \left(L_0 - R_0 \cos\left(\Theta_0\right)\right)^2}{\cos\left(\Theta_0\right)^8 R_0^2} - \frac{L_0 \left(L_0 - R_0 \cos\left(\Theta_0\right)\right)^2}{\cos\left(\Theta_0\right)^6 R_0^2} - \frac{\mathrm{D}(r)\left(s_0\right) L_0^3 \sin\left(\Theta_0\right)}{\cos\left(\Theta_0\right)^7 R_0^2}$$

b[3,0]

```
> #B[3,0] := -(-(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^3*(L[0]-R[0]*
cos(Theta[0]))/cos(Theta[0])+sin(Theta[0])*((-sin(Theta[0])+
sin(Theta[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])-D
(r)(s[0])*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])-(L[0]-R[0]*cos
(Theta[0]))/R[0]^2/cos(Theta[0])*D(r)(s[0])-(L[0]-R[0]*cos
(Theta[0]))/R[0]^3/cos(Theta[0])^3*sin(Theta[0])*(L[0]-2*R[0]
*cos(Theta[0])))-`@@`(D,2)(r)(s[0])*cos(Theta[0])-`@@`(D,2)
(r)(s[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2/R[0]^2/cos(Theta[0])-D
(r)(s[0])*((-sin(Theta[0])+sin(Theta[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta
[0]))/R[0]/cos(Theta[0])-D(r)(s[0])*cos(Theta[0]))/R[0]/cos
(Theta[0])-(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^2/cos(Theta[0])*D
(r)(s[0])-(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^3/cos(Theta[0])^3*
sin(Theta[0])*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0])))*cos(Theta[0])-2*D
(r)(s[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^3/cos(Theta[0])^2*
sin(Theta[0])*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))+1/R[0]^3/cos(Theta
[0])*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))^2+1/R[0]^3*sin(Theta[0])
^2/cos(Theta[0])^3*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))^2+R[0]*sin
(Theta[0])/cos(Theta[0])*(-(-sin(Theta[0])+sin(Theta[0])*(L
[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])-D(r)(s[0])*cos
(Theta[0])-D(r)(s[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]-sin
(Theta[0])/cos(Theta[0])*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0])/R
[0]^2+(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^3*D(r)(s[0])+(L[0]-2*R
[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^4*D(r)(s[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0])
)/cos(Theta[0])))/R[0]^2+2*(-sin(Theta[0])+sin(Theta[0])*(L
[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])-D(r)(s[0])*cos
(Theta[0])-D(r)(s[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]-sin
(Theta[0])/cos(Theta[0])*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0])/R
[0]^3*D(r)(s[0])+2*(-sin(Theta[0])+sin(Theta[0])*(L[0]-R[0]*
cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])-D(r)(s[0])*cos(Theta[0])-D
(r)(s[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]-sin(Theta[0])/cos
(Theta[0])*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0])/R[0]^4*D(r)(s[0]
)*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/cos(Theta[0])-2*(L[0]-2*R[0]*cos
(Theta[0]))/R[0]^4*D(r)(s[0])^2-2*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))
/R[0]^5*D(r)(s[0])^2*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/cos(Theta[0])+
(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^3*`@@`(D,2)(r)(s[0])-2*(L[0]
-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^6*D(r)(s[0])^2*(L[0]-R[0]*cos
(Theta[0]))^2/cos(Theta[0])^2+(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R
[0]^5*`@@`(D,2)(r)(s[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2/cos
(Theta[0])^2+(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^3*D(r)(s[0])*(
(-sin(Theta[0])+sin(Theta[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]
/cos(Theta[0])-D(r)(s[0])*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])-
```

```
(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^2/cos(Theta[0])*D(r)(s[0])-(L
[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^3/cos(Theta[0])^3*sin(Theta[0])*
(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))):
> B30:= -(-(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^3*(L[0]-R[0]*cos
(Theta[0]))/cos(Theta[0])+sin(Theta[0])*((-sin(Theta[0])+sin
(Theta[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])-D(r)
(s[0])*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])-(L[0]-R[0]*cos(Theta
[0]))/R[0]^2/cos(Theta[0])*D(r)(s[0])-(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]
))/R[0]^3/cos(Theta[0])^3*sin(Theta[0])*(L[0]-2*R[0]*cos
(Theta[0])))-`@@`(D,2)(r)(s[0])*cos(Theta[0])-`@@`(D,2)(r)(s
[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2/R[0]^2/cos(Theta[0])-D(r)(s
[0])*((-sin(Theta[0])+sin(Theta[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))
/R[0]/cos(Theta[0])-D(r)(s[0])*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta
[0])-(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^2/cos(Theta[0])*D(r)(s[0]
)-(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^3/cos(Theta[0])^3*sin(Theta
[0])*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0])))*cos(Theta[0])-2*D(r)(s[0])*
(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^3/cos(Theta[0])^2*sin(Theta[0]
)*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))+1/R[0]^3/cos(Theta[0])*(L[0]-2*
R[0]*cos(Theta[0]))^2+1/R[0]^3*sin(Theta[0])^2/cos(Theta[0])
^3*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))^2+R[0]*sin(Theta[0])/cos(Theta
[0])*(-(-sin(Theta[0])+sin(Theta[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0])
)/R[0]/cos(Theta[0])-D(r)(s[0])*cos(Theta[0])-D(r)(s[0])*(L
[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]-sin(Theta[0])/cos(Theta[0])*(L
[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0])/R[0]^2+(L[0]-2*R[0]*cos(Theta
[0]))/R[0]^3*D(r)(s[0])+(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^4*D
(r)(s[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/cos(Theta[0])))/R[0]^2+2*
(-sin(Theta[0])+sin(Theta[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]
/cos(Theta[0])-D(r)(s[0])*cos(Theta[0])-D(r)(s[0])*(L[0]-R[0]
*cos(Theta[0]))/R[0]-sin(Theta[0])/cos(Theta[0])*(L[0]-2*R[0]
*cos(Theta[0]))/R[0])/R[0]^3*D(r)(s[0])+2*(-sin(Theta[0])+sin
(Theta[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])-D(r)
(s[0])*cos(Theta[0])-D(r)(s[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R
[0]-sin(Theta[0])/cos(Theta[0])*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R
[0])/R[0]^4*D(r)(s[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/cos(Theta[0]
)-2*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^4*D(r)(s[0])^2-2*(L[0]
-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^5*D(r)(s[0])^2*(L[0]-R[0]*cos
(Theta[0]))/cos(Theta[0])+(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^3*
`@@`(D,2)(r)(s[0])-2*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^6*D(r)
(s[0])^2*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2/cos(Theta[0])^2+(L[0]-2*
R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^5*`@@`(D,2)(r)(s[0])*(L[0]-R[0]*cos
(Theta[0]))^2/cos(Theta[0])^2+(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R
[0]^3*D(r)(s[0])*((-sin(Theta[0])+sin(Theta[0])*(L[0]-R[0]*
```

```
cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])-D(r)(s[0])*cos(Theta[0]))/R
[0]/cos(Theta[0])-(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^2/cos(Theta
[0])*D(r)(s[0])-(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^3/cos(Theta[0]
)^3*sin(Theta[0])*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))):
simplify(B[3,0]-B30);
```

$$0$$

```
> B302:=coeff(B30,(D@D)(r)(s[0]),1):
> BB302:=(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2/
(R[0]^5*cos(Theta[0])^2)
+(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^3;
simplify(BB302-B302);
```

$$BB302 := \frac{\left(L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)\right)^3}{R_0^5 \cos(\Theta_0)^2} + \frac{L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)}{R_0^3}$$

$$0$$

```
> B3012:=coeff(B30,(D)(r)(s[0]),2):
> BB3012 := -3*L[0]/R[0]^4-2*L[0]/R[0]^5*(L[0]-R[0]*cos(Theta
[0]))/cos(Theta[0])-2*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^4-2*(L
[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^5*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))
/cos(Theta[0])-2*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^6*(L[0]-R
[0]*cos(Theta[0]))^2/cos(Theta[0])^2-(L[0]-2*R[0]*cos(Theta
[0]))/R[0]^5*L[0]/cos(Theta[0]);
simplify(BB3012-B3012);
```

$$BB3012 := -\frac{3 L_0}{R_0^4} - \frac{2 L_0 \left(L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)\right)}{R_0^5 \cos(\Theta_0)} - \frac{2 \left(L_0 - 2 R_0 \cos(\Theta_0)\right)}{R_0^4}$$
$$- \frac{2 \left(L_0 - 2 R_0 \cos(\Theta_0)\right) \left(L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)\right)}{R_0^5 \cos(\Theta_0)}$$
$$- \frac{2 \left(L_0 - 2 R_0 \cos(\Theta_0)\right) \left(L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)\right)^2}{R_0^6 \cos(\Theta_0)^2} - \frac{\left(L_0 - 2 R_0 \cos(\Theta_0)\right) L_0}{R_0^5 \cos(\Theta_0)}$$

$$0$$

```
> B3011:=coeff(B30,(D)(r)(s[0]),1):
> BB3011 := -sin(Theta[0])*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))^3/(R[0]
^6*cos(Theta[0])^3);
simplify(BB3011-B3011);
```

$$BB3011 := -\frac{\sin(\Theta_0) \left(L_0 - 2 R_0 \cos(\Theta_0)\right)^3}{R_0^6 \cos(\Theta_0)^3}$$

$$0$$

```
> B300:=subs(D(r)(s[0])=0,(D@D)(r)(s[0])=0,B30):
> BB300 :=
  (L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^4;
  simplify(BB300-B300);
```

$$BB300 := \frac{L_0 - 2\,R_0\cos(\Theta_0)}{R_0^4}$$

$$0$$

```
> BB30:=BB300+BB3011*(D)(r)(s[0])+BB3012*(D)(r)(s[0])^2+BB302*
  (D@D)(r)(s[0]);
  simplify(BB30-B30);
```

$$BB30 := \frac{L_0 - 2\,R_0\cos(\Theta_0)}{R_0^4} - \frac{\sin(\Theta_0)\,(L_0 - 2\,R_0\cos(\Theta_0))^3\,\mathrm{D}(r)(s_0)}{R_0^6\cos(\Theta_0)^3} + \left(-\frac{3\,L_0}{R_0^4} - \frac{2\,L_0\,(L_0 - R_0\cos(\Theta_0))}{R_0^5\cos(\Theta_0)} - \frac{2\,(L_0 - 2\,R_0\cos(\Theta_0))}{R_0^4} - \frac{2\,(L_0 - 2\,R_0\cos(\Theta_0))\,(L_0 - R_0\cos(\Theta_0))}{R_0^5\cos(\Theta_0)} - \frac{2\,(L_0 - 2\,R_0\cos(\Theta_0))\,(L_0 - R_0\cos(\Theta_0))^2}{R_0^6\cos(\Theta_0)^2} - \frac{(L_0 - 2\,R_0\cos(\Theta_0))\,L_0}{R_0^5\cos(\Theta_0)}\right)\mathrm{D}(r)(s_0)^2 + \left(\frac{(L_0 - R_0\cos(\Theta_0))^3}{R_0^5\cos(\Theta_0)^2} + \frac{L_0 - R_0\cos(\Theta_0)}{R_0^3}\right)\mathrm{D}^{(2)}(r)(s_0)$$

$$0$$

```
> B[3,0]:=BB30;
```

$$B_{3,0} := \frac{L_0 - 2\,R_0\cos(\Theta_0)}{R_0^4} - \frac{\sin(\Theta_0)\,(L_0 - 2\,R_0\cos(\Theta_0))^3\,\mathrm{D}(r)(s_0)}{R_0^6\cos(\Theta_0)^3} + \left(-\frac{3\,L_0}{R_0^4} - \frac{2\,L_0\,(L_0 - R_0\cos(\Theta_0))}{R_0^5\cos(\Theta_0)} - \frac{2\,(L_0 - 2\,R_0\cos(\Theta_0))}{R_0^4} - \frac{2\,(L_0 - 2\,R_0\cos(\Theta_0))\,(L_0 - R_0\cos(\Theta_0))}{R_0^5\cos(\Theta_0)}\right.$$

$$- \frac{2\left(L_0 - 2 R_0 \cos(\Theta_0)\right)\left(L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)\right)^2}{R_0^6 \cos(\Theta_0)^2} - \frac{\left(L_0 - 2 R_0 \cos(\Theta_0)\right) L_0}{R_0^5 \cos(\Theta_0)}\Bigg)$$

$$\mathrm{D}(r)(s_0)^2 + \left(\frac{\left(L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)\right)^3}{R_0^5 \cos(\Theta_0)^2} + \frac{L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)}{R_0^3}\right) \mathrm{D}^{(2)}(r)(s_0)$$

B[2,1]

```
> #B[2,1] := -(-1+(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2/R[0]^2/cos(Theta
  [0])^2+sin(Theta[0])*((-sin(Theta[0])*L[0]/cos(Theta[0])^2+R
  [0]*sin(Theta[0])/cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])+(L[0]-R
  [0]*cos(Theta[0]))^2/R[0]^2/cos(Theta[0])^4*sin(Theta[0]))+D
  (r)(s[0])*sin(Theta[0])/cos(Theta[0])+`@@`(D,2)(r)(s[0])*(L
  [0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]*L[0]/cos(Theta[0])^2-D(r)(s[0])*
  ((-sin(Theta[0])*L[0]/cos(Theta[0])^2+R[0]*sin(Theta[0])/cos
  (Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])+(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2/R
  [0]^2/cos(Theta[0])^4*sin(Theta[0]))*cos(Theta[0])+D(r)(s[0])
  *L[0]/cos(Theta[0])^3*sin(Theta[0])*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]
  ))/R[0]^2+D(r)(s[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2/R[0]^2/cos
  (Theta[0])^3*sin(Theta[0])-1/cos(Theta[0])^2*(L[0]-2*R[0]*cos
  (Theta[0]))/R[0]^2*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))-sin(Theta[0])
  ^2/cos(Theta[0])^4*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^2*(L[0]-R
  [0]*cos(Theta[0]))+R[0]*sin(Theta[0])/cos(Theta[0])*(-(-sin
  (Theta[0])*L[0]/cos(Theta[0])^2+R[0]*sin(Theta[0])/cos(Theta
  [0])+D(r)(s[0])*L[0]/cos(Theta[0])+sin(Theta[0])/cos(Theta[0]
  )^2*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0])))/R[0]^2-(L[0]-2*R[0]*cos(Theta
  [0]))/R[0]^3*D(r)(s[0])*L[0]/cos(Theta[0])^2))/R[0]^2+(-sin
  (Theta[0])*L[0]/cos(Theta[0])^2+R[0]*sin(Theta[0])/cos(Theta
  [0])+D(r)(s[0])*L[0]/cos(Theta[0])+sin(Theta[0])/cos(Theta[0]
  )^2*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0])))/R[0]^3*D(r)(s[0])+(-sin(Theta
  [0])*L[0]/cos(Theta[0])^2+R[0]*sin(Theta[0])/cos(Theta[0])+D
  (r)(s[0])*L[0]/cos(Theta[0])+sin(Theta[0])/cos(Theta[0])^2*(L
  [0]-R[0]*cos(Theta[0])))/R[0]^4*D(r)(s[0])*(L[0]-R[0]*cos
  (Theta[0]))/cos(Theta[0])-(-sin(Theta[0])+sin(Theta[0])*(L[0]
  -R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])-D(r)(s[0])*cos(Theta
  [0])-D(r)(s[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]-sin(Theta[0])
  /cos(Theta[0])*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0])/R[0]^3*D(r)
  (s[0])*L[0]/cos(Theta[0])^2+(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]
  ^4*D(r)(s[0])^2*L[0]/cos(Theta[0])^2+2*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta
  [0]))/R[0]^5*D(r)(s[0])^2*L[0]/cos(Theta[0])^3*(L[0]-R[0]*cos
  (Theta[0]))-(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^4*`@@`(D,2)(r)(s
  [0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/cos(Theta[0])^3*L[0]+(L[0]-2*R
```

```
[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^3*D(r)(s[0])*((-sin(Theta[0])*L[0]
/cos(Theta[0])^2+R[0]*sin(Theta[0])/cos(Theta[0]))/R[0]/cos
(Theta[0])+(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2/R[0]^2/cos(Theta[0])
^4*sin(Theta[0])):
> B21 := -(-1+(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2/R[0]^2/cos(Theta[0])
^2+sin(Theta[0])*((-sin(Theta[0])*L[0]/cos(Theta[0])^2+R[0]*
sin(Theta[0])/cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])+(L[0]-R[0]*
cos(Theta[0]))^2/R[0]^2/cos(Theta[0])^4*sin(Theta[0]))+D(r)(s
[0])*sin(Theta[0])/cos(Theta[0])+`@@`(D,2)(r)(s[0])*(L[0]-R
[0]*cos(Theta[0]))/R[0]*L[0]/cos(Theta[0])^2-D(r)(s[0])*((-
sin(Theta[0])*L[0]/cos(Theta[0])^2+R[0]*sin(Theta[0])/cos
(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])+(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2/R
[0]^2/cos(Theta[0])^4*sin(Theta[0]))*cos(Theta[0])+D(r)(s[0])
*L[0]/cos(Theta[0])^3*sin(Theta[0])*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]
))/R[0]^2+D(r)(s[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2/R[0]^2/cos
(Theta[0])^3*sin(Theta[0])-1/cos(Theta[0])^2*(L[0]-2*R[0]*cos
(Theta[0]))/R[0]^2*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))-sin(Theta[0])
^2/cos(Theta[0])^4*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^2*(L[0]-R
[0]*cos(Theta[0]))+R[0]*sin(Theta[0])/cos(Theta[0])*(-(-sin
(Theta[0])*L[0]/cos(Theta[0])^2+R[0]*sin(Theta[0])/cos(Theta
[0])+D(r)(s[0])*L[0]/cos(Theta[0])+sin(Theta[0])/cos(Theta[0]
)^2*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0])))/R[0]^2-(L[0]-2*R[0]*cos(Theta
[0]))/R[0]^3*D(r)(s[0])*L[0]/cos(Theta[0])^2))/R[0]^2+(-sin
(Theta[0])*L[0]/cos(Theta[0])^2+R[0]*sin(Theta[0])/cos(Theta
[0])+D(r)(s[0])*L[0]/cos(Theta[0])+sin(Theta[0])/cos(Theta[0]
)^2*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0])))/R[0]^3*D(r)(s[0])+(-sin(Theta
[0])*L[0]/cos(Theta[0])^2+R[0]*sin(Theta[0])/cos(Theta[0])+D
(r)(s[0])*L[0]/cos(Theta[0])+sin(Theta[0])/cos(Theta[0])^2*(L
[0]-R[0]*cos(Theta[0])))/R[0]^4*D(r)(s[0])*(L[0]-R[0]*cos
(Theta[0]))/cos(Theta[0])-(-sin(Theta[0])+sin(Theta[0])*(L[0]
-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])-D(r)(s[0])*cos(Theta
[0])-D(r)(s[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]-sin(Theta[0])
/cos(Theta[0])*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0])/R[0]^3*D(r)
(s[0])*L[0]/cos(Theta[0])^2+(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]
^4*D(r)(s[0])^2*L[0]/cos(Theta[0])^2+2*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta
[0]))/R[0]^5*D(r)(s[0])^2*L[0]/cos(Theta[0])^3*(L[0]-R[0]*cos
(Theta[0]))-(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^4*`@@`(D,2)(r)(s
[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/cos(Theta[0])^3*L[0]+(L[0]-2*R
[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^3*D(r)(s[0])*((-sin(Theta[0])*L[0]
/cos(Theta[0])^2+R[0]*sin(Theta[0])/cos(Theta[0]))/R[0]/cos
(Theta[0])+(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2/R[0]^2/cos(Theta[0])
^4*sin(Theta[0])):
```

```
simplify(B21-B[2,1]);
```

$$0$$

```
> B212:=coeff(B21,(D@D)(r)(s[0]),1):
> BB212 := -(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))
  *L[0]/(R[0]^4*cos(Theta[0])^3);
  simplify(BB212-B212);
```

$$BB212 := -\frac{\left(L_0 - R_0 \cos\left(\Theta_0\right)\right)^2 L_0}{R_0^4 \cos\left(\Theta_0\right)^3}$$

$$0$$

```
> B2112:=coeff(B21,(D)(r)(s[0]),2):
> BB2112:=
    2*L[0]^2/(R[0]^4*cos(Theta[0])^2)
  +L[0]*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/(R[0]^4*cos(Theta[0])^2)
  +2*L[0]*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))
  /(R[0]^5*cos(Theta[0])^3);
  simplify(BB2112-B2112);
```

$$BB2112 := \frac{2 L_0^2}{R_0^4 \cos\left(\Theta_0\right)^2} + \frac{\left(L_0 - 2 R_0 \cos\left(\Theta_0\right)\right) L_0}{R_0^4 \cos\left(\Theta_0\right)^2} + \frac{2 \left(L_0 - 2 R_0 \cos\left(\Theta_0\right)\right) L_0 \left(L_0 - R_0 \cos\left(\Theta_0\right)\right)}{R_0^5 \cos\left(\Theta_0\right)^3}$$

$$0$$

```
> BB2112:=
  L[0]*( 2*L[0]/(R[0]^4*cos(Theta[0])^2)
  +(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/(R[0]^4*cos(Theta[0])^2)
  +2*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/(R
  [0]^5*cos(Theta[0])^3));
  simplify(BB2112-B2112);
```

$$BB2112 := L_0 \left(\frac{2 L_0}{R_0^4 \cos\left(\Theta_0\right)^2} + \frac{L_0 - 2 R_0 \cos\left(\Theta_0\right)}{R_0^4 \cos\left(\Theta_0\right)^2} + \frac{2 \left(L_0 - 2 R_0 \cos\left(\Theta_0\right)\right) \left(L_0 - R_0 \cos\left(\Theta_0\right)\right)}{R_0^5 \cos\left(\Theta_0\right)^3} \right)$$

$$0$$

```
> B2111:=coeff(B21,(D)(r)(s[0]),1):
> BB2111 :=
```

```
sin(Theta[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))*(L[0]-2*R[0]*cos
(Theta[0]))^2/(R[0]^5*cos(Theta[0])^4)
;
simplify(BB2111-B2111);
```

$$BB2111 := \frac{\sin(\Theta_0)\left(L_0 - R_0\cos(\Theta_0)\right)\left(L_0 - 2\,R_0\cos(\Theta_0)\right)^2}{R_0^5\cos(\Theta_0)^4}$$

$$0$$

```
> B210:=subs(D(r)(s[1])=0,D(r)(s[0])=0,(D@D)(r)(s[0])=0,B21):
```

```
> BB210 :=
-(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/(R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^2;
simplify(BB210-B210);
```

$$BB210 := -\frac{L_0 - 2\,R_0\cos(\Theta_0)}{R_0^3\cos(\Theta_0)}$$

$$0$$

```
> BB21:=BB210+BB2111*(D)(r)(s[0])+BB2112*(D)(r)(s[0])^2+BB212*
(D@D)(r)(s[0]):
simplify(BB21-B21);
```

$$0$$

```
> B[2,1]:=BB21;
```

$$B_{2,\,1} := -\frac{L_0 - 2\,R_0\cos(\Theta_0)}{R_0^3\cos(\Theta_0)} + \frac{\sin(\Theta_0)\left(L_0 - R_0\cos(\Theta_0)\right)\left(L_0 - 2\,R_0\cos(\Theta_0)\right)^2 \mathrm{D}(r)(s_0)}{R_0^5\cos(\Theta_0)^4} + L_0\left(\frac{2\,L_0}{R_0^4\cos(\Theta_0)^2} + \frac{L_0 - 2\,R_0\cos(\Theta_0)}{R_0^4\cos(\Theta_0)^2} + \frac{2\left(L_0 - 2\,R_0\cos(\Theta_0)\right)\left(L_0 - R_0\cos(\Theta_0)\right)}{R_0^5\cos(\Theta_0)^3}\right)\mathrm{D}(r)(s_0)^2 - \frac{\left(L_0 - R_0\cos(\Theta_0)\right)^2 L_0\,\mathrm{D}^{(2)}(r)(s_0)}{R_0^4\cos(\Theta_0)^3}$$

b[1,2]

```
> #B[1,2] := -(-(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])^3*
```

```
L[0]-sin(Theta[0])^2*L[0]/cos(Theta[0])^5*(L[0]-R[0]*cos
(Theta[0]))/R[0]+R[0]/cos(Theta[0])+R[0]*sin(Theta[0])^2/cos
(Theta[0])^3-`@@`(D,2)(r)(s[0])*L[0]^2/cos(Theta[0])^3-D(r)(s
[0])*L[0]/cos(Theta[0])^4*sin(Theta[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta
[0]))/R[0]+1/R[0]/cos(Theta[0])^3*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))
^2+1/R[0]*sin(Theta[0])^2/cos(Theta[0])^5*(L[0]-R[0]*cos
(Theta[0]))^2+R[0]*sin(Theta[0])/cos(Theta[0])*((-sin(Theta
[0])*L[0]/cos(Theta[0])^2+D(r)(s[0])*L[0]/cos(Theta[0])+sin
(Theta[0])/cos(Theta[0])^2*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))))/R[0]
/cos(Theta[0])+(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^2/cos(Theta[0])
^3*D(r)(s[0])*L[0]+(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta
[0])^3*sin(Theta[0])))/R[0]^2-2*(-sin(Theta[0])*L[0]/cos
(Theta[0])^2+R[0]*sin(Theta[0])/cos(Theta[0])+D(r)(s[0])*L[0]
/cos(Theta[0])+sin(Theta[0])/cos(Theta[0])^2*(L[0]-R[0]*cos
(Theta[0])))/R[0]^3*D(r)(s[0])*L[0]/cos(Theta[0])^2-2*(L[0]
-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^4*D(r)(s[0])^2*L[0]^2/cos(Theta
[0])^4+(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^3*`@@`(D,2)(r)(s[0])*
L[0]^2/cos(Theta[0])^4-(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^4*D
(r)(s[0])*L[0]/cos(Theta[0])^5*sin(Theta[0])*(L[0]-R[0]*cos
(Theta[0])):
> B12:= -(-(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])^3*L[0]-
sin(Theta[0])^2*L[0]/cos(Theta[0])^5*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0])
)/R[0]+R[0]/cos(Theta[0])+R[0]*sin(Theta[0])^2/cos(Theta[0])
^3-`@@`(D,2)(r)(s[0])*L[0]^2/cos(Theta[0])^3-D(r)(s[0])*L[0]
/cos(Theta[0])^4*sin(Theta[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]
+1/R[0]/cos(Theta[0])^3*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2+1/R[0]*
sin(Theta[0])^2/cos(Theta[0])^5*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2+R
[0]*sin(Theta[0])/cos(Theta[0])*((-sin(Theta[0])*L[0]/cos
(Theta[0])^2+D(r)(s[0])*L[0]/cos(Theta[0])+sin(Theta[0])/cos
(Theta[0])^2*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))))/R[0]/cos(Theta[0])+(L
[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^2/cos(Theta[0])^3*D(r)(s[0])*L
[0]+(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])^3*sin(Theta
[0])))/R[0]^2-2*(-sin(Theta[0])*L[0]/cos(Theta[0])^2+R[0]*sin
(Theta[0])/cos(Theta[0])+D(r)(s[0])*L[0]/cos(Theta[0])+sin
(Theta[0])/cos(Theta[0])^2*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0])))/R[0]^3*
D(r)(s[0])*L[0]/cos(Theta[0])^2-2*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))
/R[0]^4*D(r)(s[0])^2*L[0]^2/cos(Theta[0])^4+(L[0]-2*R[0]*cos
(Theta[0]))/R[0]^3*`@@`(D,2)(r)(s[0])*L[0]^2/cos(Theta[0])^4-
(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^4*D(r)(s[0])*L[0]/cos(Theta
[0])^5*sin(Theta[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0])):
simplify(B12-B[1,2]);
```

$$0$$

```
> B122:=coeff(B12,(D@D)(r)(s[0]),1):
> BB122 := (L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^3*L[0]^2/cos(Theta[0]
)^4;
simplify(BB122-B122);
```

$$BB122 := \frac{\left(L_0 - R_0 \cos\left(\Theta_0\right)\right) L_0^2}{R_0^3 \cos\left(\Theta_0\right)^4}$$

$$0$$

```
> B1212:=coeff(B12,(D)(r)(s[0]),2):
> BB1212:= -2*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^4*L[0]^2/cos(Theta
[0])^4;
simplify(BB1212-B1212);
```

$$BB1212 := -\frac{2\left(L_0 - R_0 \cos\left(\Theta_0\right)\right) L_0^2}{R_0^4 \cos\left(\Theta_0\right)^4}$$

$$0$$

```
> B1211:=coeff(B12,(D)(r)(s[0]),1):
> BB1211 :=
-sin(Theta[0])/cos(Theta[0])*(L[0]/cos(Theta[0])^2)/R[0]^2
-(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^4*L[0]/cos(Theta[0])^5*sin
(Theta[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]));
simplify(BB1211-B1211);
```

$$BB1211 := -\frac{\sin\left(\Theta_0\right) L_0}{\cos\left(\Theta_0\right)^3 R_0^2} - \frac{\left(L_0 - 2 R_0 \cos\left(\Theta_0\right)\right) L_0 \sin\left(\Theta_0\right) \left(L_0 - R_0 \cos\left(\Theta_0\right)\right)}{R_0^4 \cos\left(\Theta_0\right)^5}$$

$$0$$

```
> B120:=subs(D(r)(s[0])=0,(D@D)(r)(s[0])=0,B12):
> BB120:=(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/(R[0]^2*cos(Theta[0])^2);
simplify(BB120-B120);
```

$$BB120 := \frac{L_0 - 2 R_0 \cos\left(\Theta_0\right)}{R_0^2 \cos\left(\Theta_0\right)^2}$$

$$0$$

```
> BB12:=BB120+BB1211*(D)(r)(s[0])+BB1212*(D)(r)(s[0])^2+BB122*
(D@D)(r)(s[0]):
simplify(BB12-B12);
```

$$0$$

```
> B[1,2]:=BB12;
```

$$B_{1,2} := \frac{L_0 - 2\,R_0 \cos(\Theta_0)}{R_0^2 \cos(\Theta_0)^2} + \left(- \frac{\sin(\Theta_0)\,L_0}{\cos(\Theta_0)^3\,R_0^2} - \frac{(L_0 - 2\,R_0\cos(\Theta_0))\,L_0 \sin(\Theta_0)\,(L_0 - R_0\cos(\Theta_0))}{R_0^4 \cos(\Theta_0)^5} \right) \mathrm{D}(r)(s_0) - \frac{2\,(L_0 - R_0\cos(\Theta_0))\,L_0^2\,\mathrm{D}(r)(s_0)^2}{R_0^4\cos(\Theta_0)^4} + \frac{(L_0 - R_0\cos(\Theta_0))\,L_0^2\,\mathrm{D}^{(2)}(r)(s_0)}{R_0^3\cos(\Theta_0)^4}$$

b[0,3]

```
> #B[0,3] := (-(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])^3*L
[0]-sin(Theta[0])^2*L[0]/cos(Theta[0])^5*(L[0]-R[0]*cos(Theta
[0]))/R[0]-`@@`(D,2)(r)(s[0])*L[0]^2/cos(Theta[0])^3-D(r)(s
[0])*L[0]/cos(Theta[0])^4*sin(Theta[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta
[0]))/R[0]+1/R[0]/cos(Theta[0])^3*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))
^2+1/R[0]*sin(Theta[0])^2/cos(Theta[0])^5*(L[0]-R[0]*cos
(Theta[0]))^2+R[0]*sin(Theta[0])/cos(Theta[0])*((-sin(Theta
[0])*L[0]/cos(Theta[0])^2+D(r)(s[0])*L[0]/cos(Theta[0])+sin
(Theta[0])/cos(Theta[0])^2*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))))/R[0]
/cos(Theta[0])+(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^2/cos(Theta[0])
^3*D(r)(s[0])*L[0]+(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta
[0])^3*sin(Theta[0])))/R[0]/cos(Theta[0])+2*(-sin(Theta[0])*L
[0]/cos(Theta[0])^2+D(r)(s[0])*L[0]/cos(Theta[0])+sin(Theta
[0])/cos(Theta[0])^2*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0])))/R[0]^2/cos
(Theta[0])^3*D(r)(s[0])*L[0]+2*(-sin(Theta[0])*L[0]/cos(Theta
[0])^2+D(r)(s[0])*L[0]/cos(Theta[0])+sin(Theta[0])/cos(Theta
[0])^2*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0])))/R[0]/cos(Theta[0])^3*sin
(Theta[0])+2*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^3/cos(Theta[0])
^5*D(r)(s[0])^2*L[0]^2+2*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^2/cos
(Theta[0])^5*D(r)(s[0])*L[0]*sin(Theta[0])-(L[0]-R[0]*cos
(Theta[0]))/R[0]^2/cos(Theta[0])^5*`@@`(D,2)(r)(s[0])*L[0]^2+
(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2/R[0]^3/cos(Theta[0])^6*D(r)(s[0])
*L[0]*sin(Theta[0])+3*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]/cos
(Theta[0])^5*sin(Theta[0])^2+(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]
/cos(Theta[0])^3:
> B03 := (-(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])^3*L[0]-
sin(Theta[0])^2*L[0]/cos(Theta[0])^5*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0])
)/R[0]-`@@`(D,2)(r)(s[0])*L[0]^2/cos(Theta[0])^3-D(r)(s[0])*L
[0]/cos(Theta[0])^4*sin(Theta[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R
[0]+1/R[0]/cos(Theta[0])^3*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2+1/R[0]
*sin(Theta[0])^2/cos(Theta[0])^5*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2+
```

```
R[0]*sin(Theta[0])/cos(Theta[0])*((-sin(Theta[0])*L[0]/cos
(Theta[0])^2+D(r)(s[0])*L[0]/cos(Theta[0])+sin(Theta[0])/cos
(Theta[0])^2*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0])))/R[0]/cos(Theta[0])+(L
[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^2/cos(Theta[0])^3*D(r)(s[0])*L
[0]+(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])^3*sin(Theta
[0])))/R[0]/cos(Theta[0])+2*(-sin(Theta[0])*L[0]/cos(Theta[0]
)^2+D(r)(s[0])*L[0]/cos(Theta[0])+sin(Theta[0])/cos(Theta[0])
^2*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0])))/R[0]^2/cos(Theta[0])^3*D(r)(s
[0])*L[0]+2*(-sin(Theta[0])*L[0]/cos(Theta[0])^2+D(r)(s[0])*L
[0]/cos(Theta[0])+sin(Theta[0])/cos(Theta[0])^2*(L[0]-R[0]*
cos(Theta[0])))/R[0]/cos(Theta[0])^3*sin(Theta[0])+2*(L[0]-R
[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^3/cos(Theta[0])^5*D(r)(s[0])^2*L[0]
^2+2*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^2/cos(Theta[0])^5*D(r)(s
[0])*L[0]*sin(Theta[0])-(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^2/cos
(Theta[0])^5*`@@`(D,2)(r)(s[0])*L[0]^2+(L[0]-R[0]*cos(Theta
[0]))^2/R[0]^3/cos(Theta[0])^6*D(r)(s[0])*L[0]*sin(Theta[0])
+3*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])^5*sin(Theta
[0])^2+(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])^3:
simplify(B03-B[0,3]);
```

$$0$$

```
> B032:=coeff(B03,(D@D)(r)(s[0]),1):
> BB032 := -(L[0])/R[0]^2/cos(Theta[0])^5*L[0]^2;
simplify(BB032-B032);
```

$$BB032 := -\frac{L_0^3}{R_0^2\cos\left(\Theta_0\right)^5}$$

$$0$$

```
> B0312:=coeff(B03,(D)(r)(s[0]),2):
> BB0312 := 2*(L[0])/R[0]^3/cos(Theta[0])^5*L[0]^2;
simplify(BB0312-B0312);
```

$$BB0312 := \frac{2\,L_0^3}{R_0^3\cos\left(\Theta_0\right)^5}$$

$$0$$

```
> B0311:=coeff(B03,(D)(r)(s[0]),1):
> BB0311 :=
L[0]^3*sin(Theta[0])/R[0]^3/cos(Theta[0])^6;
simplify(BB0311-B0311);
```

$$BB0311 := \frac{L_0^3 \sin(\Theta_0)}{R_0^3 \cos(\Theta_0)^6}$$

$$0$$

```
> B030:=subs(D(r)(s[0])=0,(D@D)(r)(s[0])=0,B03):
> BB030:=
  3*sin(Theta[0])^2*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta
  [0])^5;
  simplify(BB030-B030);
```

$$BB030 := \frac{3 \sin(\Theta_0)^2 \left(L_0 - 2 R_0 \cos(\Theta_0)\right)}{R_0 \cos(\Theta_0)^5}$$

$$0$$

```
> BB03:=BB030+BB0311*(D)(r)(s[0])+BB0312*((D)(r)(s[0]))^2+
  BB032*(D@D)(r)(s[0]):
  simplify(BB03-B03);
```

$$0$$

```
> B[0,3]:=BB03;
```

$$B_{0,3} := \frac{3 \sin(\Theta_0)^2 \left(L_0 - 2 R_0 \cos(\Theta_0)\right)}{R_0 \cos(\Theta_0)^5} + \frac{L_0^3 \sin(\Theta_0) \mathrm{D}(r)(s_0)}{R_0^3 \cos(\Theta_0)^6} + \frac{2 L_0^3 \mathrm{D}(r)(s_0)^2}{R_0^3 \cos(\Theta_0)^5} - \frac{L_0^3 \mathrm{D}^{(2)}(r)(s_0)}{R_0^2 \cos(\Theta_0)^5}$$

****

Fim do cálculo da dependência linear e quadrática das derivadas até a ordem 3 da aplicação do bilhar nas coordenadas canônicas (s,p), em função de L (distancia entre dois pontos de impacto da órbita periódica), e do raio de curvatura nestes pontos r_0 e r_1(e suas derivadas).

****

Coordenadas complexas

Denotaremos por $T_{n,m}$ a aplicação quociente em uma oval Gamma n-simétrica induzida pela relação $T\left(s+\frac{C\,m}{n}, p\right) = T(s, p)$, onde C é o perímetro da oval Gamma. Denotaremos também por (s, p) as coordenadas da aplicação quociente, e por (s_0, p_0) um ponto fixo elíptico não ressonante de $T_{n,m}$ correspondendo a um ponto periódico da aplicação do bilhar T pertencente a órbita periódica de período n_1 associada a algum polígono do conjunto Lambda$_{n,m}$ em uma oval Gamma n-simétrica, com $n_1 = \frac{n}{mdc(n, m)}$.

Nesta planilha, faremos explicitamente as transformações que levam a aplicação quociente $T_{n,m}$ na vizinhança do ponto fixo elíptico (s_0, p_0), em sua forma diagonalizável complexa equivalente neste ponto.

Suporemos a menos de translação que neste caso $(s_0, p_0)=(0, 0)$. Reescrevendo $T_{n,m}(s, p) = (S, P)$ os coeficientes de Taylor de S e P com relação a s e p até a terceira em ordem em (0, 0) são definidos por:

$$S(s,p) = a_{1,0}\,s + a_{0,1}\,p + a_{2,0}\,s^2 + a_{1,1}\,s\,p + a_{0,2}\,p^2 + a_{3,0}\,s^3 + a_{2,1}\,s^2\,p + a_{1,2}\,s\,p^2 + a_{0,3}\,p^3$$
$$P(s,p) = b_{1,0}\,s + b_{0,1}\,p + b_{2,0}\,s^2 + b_{1,1}\,s\,p + b_{0,2}\,p^2 + b_{3,0}\,s^3 + b_{2,1}\,s^2\,p_0 + b_{1,2}\,s\,p^2 + b_{0,3}\,p^3$$

Onde os coeficientes $a_{i,j}$ e $b_{i,j}$ são dados por $a_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{i!\,j!}$ e $b_{i,j} = \frac{B_{i,j}}{i!\,j!}$, com $A_{i,j}$ e $B_{i,j}$ obtidos na planilha *cálculo do jato de ordem 3.*

Como o ponto fixo (0,0) é elíptico os autovalores de $DT_{n,m}(0, 0)$ são da forma mu $= e^{I\,\mathrm{gamma}}$. Podemos fazer uma mudança de coordenadas linear para x(s,p) and y(s,p) tal que o mapa pode ser reescrito em váriaveis complexas como $z = x + I\,y$:

Z $= \mathrm{mu}\,z + g_{2,0}\,z^2 + g_{1,1}\,z\,\bar{z} + g_{0,2}\,\bar{z}^2 + g_{3,0}\,z^3 + g_{2,1}\,z^2\,\bar{z} + g_{1,2}\,z\,\bar{z}^2 + g_{0,3}\,\bar{z}^3$

ou

$Z = \mathrm{mu}\left(z + c_{2,0}\,z^2 + c_{1,1}\,z\,\bar{z} + c_{0,2}\,\bar{z}^2 + c_{3,0}\,z^3 + c_{2,1}\,z^2\,\bar{z} + c_{1,2}\,z\,\bar{z}^2 + c_{0,3}\,\bar{z}^3\right)$

```
> restart:with(linalg):
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
```

A matriz jacobiana tem a forma.

> $DT_{n,m} := \begin{bmatrix} a_{1,0} & -\frac{b_{1,0}}{\mathrm{omega}^2} \\ b_{1,0} & a_{1,0} \end{bmatrix}$

$$DT_{n,m} := \begin{bmatrix} a_{1,0} & -\frac{b_{1,0}}{\omega^2} \\ b_{1,0} & a_{1,0} \end{bmatrix}$$

com omega >0 definido por:

```
> define_omega:=omega=sqrt(-b[1,0]/a[0,1]):
```

$DT_{n,m}$ possui autovalores $\mathrm{mu} = \cos(\mathrm{gamma}) + I\sin(\mathrm{gamma})$ e $\overline{\mathrm{mu}} = \frac{1}{\mathrm{mu}}$:

```
> V:=eigenvectors(DT[n,m]);mu:=evalc(V[1][1]);
```

$$V := \left[\frac{a_{1,0}\,\omega + I\,b_{1,0}}{\omega},\ 1,\ \left\{\left[\begin{array}{cc} -\dfrac{-\dfrac{a_{1,0}\,\omega + I\,b_{1,0}}{\omega} + a_{1,0}}{b_{1,0}} & 1 \end{array}\right]\right\}\right],\ \left[\frac{a_{1,0}\,\omega - I\,b_{1,0}}{\omega},\ 1,\ \left\{\left[\begin{array}{cc} -\dfrac{-\dfrac{a_{1,0}\,\omega - I\,b_{1,0}}{\omega} + a_{1,0}}{b_{1,0}} & 1 \end{array}\right]\right\}\right]$$

$$\mu := a_{1,0} + \frac{I\,b_{1,0}}{\omega}$$

No sistema de coordenadas (x,y) de R^2 definido pela parte real e imaginária dos autovetores de $DT_{n,m}$ associados a mu, $DT_{n,m}$ é representado pela matriz de rotação R_{gamma}.

```
> v:=op(V[1][3]):
  u[1]:=[coeff(v[1],I,1),coeff(v[2],I,1)]:
  u[2]:=[coeff(v[1],I,0),coeff(v[2],I,0)]:
  verify_if_det_is_positive := 0 < det([u[1],u[2]]);
```

$$\mathit{verify\_if\_det\_is\_positive} := 0 < \frac{1}{\omega}$$

(Se Det(u[1] | u[2]) é negativo, mundamos u[1] e u[2] na matriz acima afim de preservarmos orientação).

A matriz M define mudança das coordenadas (s,p) para as coordenadas (x,y) preservando área e orienteção.

```
> M:=simplify(scalarmul(
     transpose(matrix([u[1],u[2]])),
     sqrt(1/(det(matrix([u[1],u[2]]))))));
```

$$M := \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{\omega}} & 0 \\ 0 & \sqrt{\omega} \end{bmatrix}$$

Definimos as novas variáveis complexas $z = x + I\,y$ e $t = \overline{z}$, e obtemos as relações entre (z,t) e (s,p)

```
> C:=matrix([[1,I],[1,-I]]):
> coord_zt:=
          z=evalm(C&*(inverse(M)&*[[s],[p]]))[1,1],
          t=evalm(C&*(inverse(M)&*[[s],[p]]))[2,1];
> coord_sp:=s= (evalm(M&*(inverse(C)&*[[z],[t]])))[1,1],
```

```
p= (evalm(M&*(inverse(C)&*[[z],[t]])))[2,1];
```

$$coord\_zt := z=\sqrt{\omega}\, s+\frac{\mathrm{I}\, p}{\sqrt{\omega}},\ t=\sqrt{\omega}\, s-\frac{\mathrm{I}\, p}{\sqrt{\omega}}$$

$$coord\_sp := s=\frac{1}{2}\ \frac{z}{\sqrt{\omega}}+\frac{1}{2}\ \frac{t}{\sqrt{\omega}},\ p=-\frac{1}{2}\ \mathrm{I}\sqrt{\omega}\ z+\frac{1}{2}\ \mathrm{I}\sqrt{\omega}\ t$$

Cálcularemos adiante o jato de ordem 3 usando as variáveis complexas z e t. Somente os coeficientes necessários para o cálculo do Primeiro Coeficiente de Birkhoff serão calculados.

```
> Order1:=(evalm(DT[n,m]&*[[s],[p]]));
```

$$Order1 := \begin{bmatrix} a_{1,0}\, s-\dfrac{b_{1,0}\, p}{\omega^2} \\ b_{1,0}\, s+a_{1,0}\, p \end{bmatrix}$$

```
> S1[1]:=subs(coord_sp,Order1[1,1]);
  S1[2]:=subs(coord_sp,Order1[2,1]):
```

$$S1_1 := a_{1,0}\left(\frac{1}{2}\ \frac{z}{\sqrt{\omega}}+\frac{1}{2}\ \frac{t}{\sqrt{\omega}}\right)-\frac{b_{1,0}\left(-\frac{1}{2}\ \mathrm{I}\sqrt{\omega}\ z+\frac{1}{2}\ \mathrm{I}\sqrt{\omega}\ t\right)}{\omega^2}$$

```
> Z1[1]:=simplify(subs(s=S1[1],p=S1[2],rhs(coord_zt[1])));
  Z1[2]:=simplify(subs(s=S1[1],p=S1[2],rhs(coord_zt[2])));
```

$$Z1_1 := \frac{z\left(a_{1,0}\,\omega+\mathrm{I}\, b_{1,0}\right)}{\omega}$$

$$Z1_2 := \frac{t\left(a_{1,0}\,\omega-\mathrm{I}\, b_{1,0}\right)}{\omega}$$

Checando se o termo linear de z está correto, isto é, se ie $Z = \mathrm{mu}\ z$

```
> if  (evalc(coeff(Z1[1],z)) = 0) then
  zz :=2: tt:=1
  else
  zz :=1: tt:=2
  fi:
> c[1,0]:=evalc(coeff(Z1[zz],z));evalb(c[1,0]=mu);
> d[1,0]:=evalc(coeff(Z1[tt],t));
```

$$c_{1,0} := a_{1,0}+\frac{\mathrm{I}\, b_{1,0}}{\omega}$$

$$true$$

$$d_{1,0} := a_{1,0}-\frac{\mathrm{I}\, b_{1,0}}{\omega}$$

```
> Order2[1,1]:=a[2,0]*s^2+a[1,1]*s*p+a[0,2]*p^2;
  Order2[2,1]:=b[2,0]*s^2+b[1,1]*s*p+b[0,2]*p^2;
> S2[1]:=subs(coord_sp,Order2[1,1]):
  S2[2]:=subs(coord_sp,Order2[2,1]):
> Z2[1]:=simplify(subs(s=S2[1],p=S2[2],rhs(coord_zt[1]))):
```

$$Order2_{1,\,1} := a_{2,\,0}\,s^2 + a_{1,\,1}\,s\,p + a_{0,\,2}\,p^2$$

$$Order2_{2,\,1} := b_{2,\,0}\,s^2 + b_{1,\,1}\,s\,p + b_{0,\,2}\,p^2$$

```
> g[2,0]:=(coeff(Z2[zz],z,2));
  g[0,2]:=(coeff(Z2[zz],t,2));
```

$$g_{2,\,0} := -\frac{1}{4}\,\frac{-\omega\,a_{2,\,0} + \omega^3\,a_{0,\,2} + \mathrm{I}\,b_{0,\,2}\,\omega^2 - b_{1,\,1}\,\omega - \mathrm{I}\,b_{2,\,0} + \mathrm{I}\,\omega^2\,a_{1,\,1}}{\omega^{3/2}}$$

$$g_{0,\,2} := -\frac{1}{4}\,\frac{-\omega\,a_{2,\,0} - \mathrm{I}\,\omega^2\,a_{1,\,1} + \omega^3\,a_{0,\,2} + \mathrm{I}\,b_{0,\,2}\,\omega^2 + b_{1,\,1}\,\omega - \mathrm{I}\,b_{2,\,0}}{\omega^{3/2}}$$

```
> Order3[1,1]:=a[3,0]*s^3+a[2,1]*s^2*p+a[1,2]*s*p^2+a[0,3]*p^3;
  Order3[2,1]:=b[3,0]*s^3+b[2,1]*s^2*p+b[1,2]*s*p^2+b[0,3]*p^3;
> S3[1]:=subs(coord_sp,Order3[1,1]):
  S3[2]:=subs(coord_sp,Order3[2,1]):
> Z3[1]:=simplify(subs(s=S3[1],p=S3[2],rhs(coord_zt[1]))):
```

$$Order3_{1,\,1} := a_{3,\,0}\,s^3 + a_{2,\,1}\,s^2\,p + a_{1,\,2}\,s\,p^2 + a_{0,\,3}\,p^3$$

$$Order3_{2,\,1} := b_{3,\,0}\,s^3 + b_{2,\,1}\,s^2\,p + b_{1,\,2}\,s\,p^2 + b_{0,\,3}\,p^3$$

```
> g[2,1]:=(coeff(coeff(Z3[zz],z,2),t,1));
```

$$g_{2,\,1} := -\frac{1}{8}\,\frac{1}{\omega^2}\Big(\mathrm{I}\,\omega^2\,a_{2,\,1} + 3\,\mathrm{I}\,\omega^4\,a_{0,\,3} - 3\,\mathrm{I}\,b_{3,\,0} - 3\,\omega\,a_{3,\,0} - 3\,b_{0,\,3}\,\omega^3 - \mathrm{I}\,b_{1,\,2}\,\omega^2 - b_{2,\,1}\,\omega - \omega^3\,a_{1,\,2}\Big)$$

Cálculo de $c_{2,\,1}$: mu $c_{2,\,1} = g_{2,\,1}$, $\frac{1}{\text{mu}} = \overline{\text{mu}}$

```
> c[2,1]:=d[1,0]*g[2,1];
```

$$c_{2,\,1} := -\frac{1}{8}\,\frac{1}{\omega^2}\left(\left(a_{1,\,0} - \frac{\mathrm{I}\,b_{1,\,0}}{\omega}\right)\Big(\mathrm{I}\,\omega^2\,a_{2,\,1} + 3\,\mathrm{I}\,\omega^4\,a_{0,\,3} - 3\,\mathrm{I}\,b_{3,\,0} - 3\,\omega\,a_{3,\,0} - 3\,b_{0,\,3}\,\omega^3 - \mathrm{I}\,b_{1,\,2}\,\omega^2 - b_{2,\,1}\,\omega - \omega^3\,a_{1,\,2}\Big)\right)$$

Com parte real e imaginária dada por:

```
> Imaginary:=Im(c[21])=coeff(c[2,1],I,1);
```

$$Imaginary := \Im(c_{21}) = -\frac{1}{8}\frac{1}{\omega^2}\left(a_{1,0}\left(3\,\omega^4 a_{0,3} + \omega^2 a_{2,1} - b_{1,2}\,\omega^2 - 3\,b_{3,0}\right) - \frac{b_{1,0}\left(-3\,b_{0,3}\,\omega^3 - b_{2,1}\,\omega - 3\,\omega\,a_{3,0} - \omega^3 a_{1,2}\right)}{\omega}\right)$$

```
> Real:=Re(c[21])=coeff(c[2,1],I,0)-coeff(c[2,1],I,2);
```

$$Real := \Re(c_{21}) = -\frac{1}{8}\frac{a_{1,0}\left(-3\,b_{0,3}\,\omega^3 - b_{2,1}\,\omega - 3\,\omega\,a_{3,0} - \omega^3 a_{1,2}\right)}{\omega^2} - \frac{1}{8}\frac{b_{1,0}\left(3\,\omega^4 a_{0,3} + \omega^2 a_{2,1} - b_{1,2}\,\omega^2 - 3\,b_{3,0}\right)}{\omega^3}$$

Forma Normal de Birkhoff e o Primeiro Coeficiente

M.J.Dias Carneiro, S.Oliffson Kamphorst, S.Pinto de Carvalho

Nesta planilha, faremos explicitamente as transformações que levam uma aplicação preservando área G em sua forma normal de Birkhoff, exibindo a expressão do primeiro coeficiente de Birkhoff tau_1.

```
> restart:readlib(mtaylor):
```

Assumindo que a parte linear de G já tenha sido diagonalizável temos

$$> G := (z, w) \to \mathrm{mu}\left(z + c_{2,0} z^2 + c_{1,1} z w + c_{0,2} w^2 + c_{3,0} z^3 + c_{2,1} z^2 w + c_{1,2} z w^2 + c_{0,3} w^3\right)$$

$$G := (z, w) \to \mu\left(z + c_{2,0} z^2 + c_{1,1} z w + c_{0,2} w^2 + c_{3,0} z^3 + c_{2,1} z^2 w + c_{1,2} z w^2 + c_{0,3} w^3\right)$$

onde $w = \overline{z}$ e $\mathrm{mu} = \mathrm{e}^{I\,\mathrm{theta}}$, tal que, $\mathrm{mu}\,\overline{\mathrm{mu}} = 1$. Definimos também $Gc(z, w) = \overline{G(z, w)}$.

$$> Gc := (z, w) \to \frac{w + \overline{c_{2,0}}\, w^2 + \overline{c_{1,1}}\, z w + \overline{c_{0,2}}\, z^2 + \overline{c_{3,0}}\, w^3 + \overline{c_{2,1}}\, w^2 z + \overline{c_{1,2}}\, w z^2 + \overline{c_{0,3}}\, z^3}{\mathrm{mu}}$$

$$Gc := (z, w) \to \frac{w + \overline{c_{2,0}}\, w^2 + \overline{c_{1,1}}\, z w + \overline{c_{0,2}}\, z^2 + \overline{c_{3,0}}\, w^3 + \overline{c_{2,1}}\, w^2 z + \overline{c_{1,2}}\, w z^2 + \overline{c_{0,3}}\, z^3}{\mu}$$

Se $\mathrm{mu}^j \neq 1$ para j=1,2,3; G admite uma forma normal de Birkhoff, isto é, existe um difeomorfismo H tal que

$H^{-1}\, o\, G\, o\, H(z) = z\,\mathrm{e}^{I\left(\mathrm{theta} + \mathrm{sigma}\,|z|^2\right)} + \mathrm{O}\left(|z|^4\right) = \mathrm{B}\ (\mathrm{z}).$

ou

$B(z) = \mathrm{mu}\,\left(1 + I\,\mathrm{sigma}\,|z|^2\right)\, z + \mathrm{O}\left(|z|^4\right)$. Onde sigma é um número real chamado primeiro coeficiente de Birkhoff.

Definimos a conjugação H e sua conjugada complexa Hc:

$$> H := (z, w) \to z + h_{2,0} z^2 + h_{1,1} z w + h_{0,2} w^2 + h_{3,0} z^3 + h_{2,1} z^2 w + h_{1,2} z w^2 + h_{0,3} w^3$$

$$> Hc := (z, w) \to w + \overline{h_{2,0}}\, w^2 + \overline{h_{1,1}}\, z w + \overline{h_{0,2}}\, z^2 + \overline{h_{3,0}}\, w^3 + \overline{h_{2,1}}\, w^2 z + \overline{h_{1,2}}\, w z^2 + \overline{h_{0,3}}\, z^3$$

Definimos também a forma normal de Birkhoff e sua conjugada complexa:

$$> B := (z, w) \to z\,\mathrm{mu} + I\,\mathrm{mu}\,\mathrm{sigma}\, z^2 w$$

$$> Bc := (z, w) \to \frac{w}{\mathrm{mu}} - \frac{I\, w^2\,\mathrm{sigma}\, z}{\mathrm{mu}}$$

Denotando F = G o H - H o B, podemos resolver F = 0 recursivamente para cada ordem em z e w e deste modo determinar os coeficientes de Taylor de H e os coeficientes de Birkhoff. Até a terceira ordem temos:

```
> F:=mtaylor(G(H(z,w),Hc(z,w))-H(B(z,w),Bc(z,w)),[z,w],4):
```

```
> eq1:=solve({coeff(coeff(F,z,2),w,0)=0,
             coeff(coeff(F,z,1),w,1)=0,
             coeff(coeff(F,z,0),w,2)=0},
           {h[2,0],h[1,1],h[0,2]});
> eq1c:={
  conjugate(h[2,0])=simplify(subs(conjugate(mu)=1/mu,expand(subs
  (eq1,conjugate(h[2,0]))))),
  conjugate(h[1,1])=simplify(subs(conjugate(mu)=1/mu,expand(subs
  (eq1,conjugate(h[1,1]))))),
```

```
conjugate(h[0,2])=simplify(subs(conjugate(mu)=1/mu,expand(subs
(eq1,conjugate(h[0,2])))))
};
```

$$eq1 := \left\{h_{1,1} = -\frac{\mu\, c_{1,1}}{\mu - 1},\ h_{0,2} = -\frac{\mu^3 c_{0,2}}{\mu^3 - 1},\ h_{2,0} = \frac{c_{2,0}}{\mu - 1}\right\}$$

$$eq1c := \left\{\overline{h_{2,0}} = -\frac{\mu\, \overline{c_{2,0}}}{\mu - 1},\ \overline{h_{1,1}} = \frac{\overline{c_{1,1}}}{\mu - 1},\ \overline{h_{0,2}} = \frac{\overline{c_{0,2}}}{\mu^3 - 1}\right\}$$

```
> sigma:=solve(coeff(coeff(F,z,2),w,1)=0,sigma);
```

$$\sigma := -\mathrm{I}\left(2\, c_{0,2}\, \overline{h_{0,2}} + c_{1,1}\, \overline{h_{1,1}} + c_{1,1}\, h_{2,0} + 2\, c_{2,0}\, h_{1,1} + c_{2,1}\right)$$

Esta expressão pode ser simplificada usando as fórmulas para $h_{i,j}$ (equações eq1 e eq1c acima)

```
> sigma:=subs(conjugate(mu)=1/mu,expand(subs(eq1,sigma)));
```

$$\sigma := \frac{2\,\mathrm{I}\, c_{0,2}\, \overline{c_{0,2}}}{\left(-1 + \frac{1}{\mu^3}\right)\mu^3} + \frac{\mathrm{I}\, c_{1,1}\, \overline{c_{1,1}}}{\left(-1 + \frac{1}{\mu}\right)\mu} - \frac{\mathrm{I}\, c_{1,1}\, c_{2,0}}{\mu - 1} + \frac{2\,\mathrm{I}\, c_{2,0}\, \mu\, c_{1,1}}{\mu - 1} - \mathrm{I}\, c_{2,1}$$

A propriedade da aplicação G preservar área implica que o Jacobiano deve ser 1.

$$> J := \left(\frac{\partial}{\partial z} G(z, w)\right)\left(\frac{\partial}{\partial w} Gc(z, w)\right) - \left(\frac{\partial}{\partial w} G(z, w)\right)\left(\frac{\partial}{\partial z} Gc(z, w)\right)$$

Em primeira ordem em z e w a condição da aplicação preservar área equivale a:

```
> ap1:=solve(coeff(coeff(J,z,1),w,0)=0,{conjugate(c[1,1])}),
  solve(coeff(coeff(J,z,0),w,1)=0,{c[1,1]});
```

$$ap1 := \left\{\overline{c_{1,1}} = -2\, c_{2,0}\right\},\ \left\{c_{1,1} = -2\, \overline{c_{2,0}}\right\}$$

Usando esta condição a expressão para sigma pode ser simplificada para :

```
> sigma:=expand(subs(ap1,sigma));
```

$$\sigma := \frac{2\,\mathrm{I}\, c_{0,2}\, \overline{c_{0,2}}}{\left(-1 + \frac{1}{\mu^3}\right)\mu^3} + \frac{4\,\mathrm{I}\, \overline{c_{2,0}}\, c_{2,0}}{\left(-1 + \frac{1}{\mu}\right)\mu} + \frac{2\,\mathrm{I}\, \overline{c_{2,0}}\, c_{2,0}}{\mu - 1} - \frac{4\,\mathrm{I}\, c_{2,0}\, \mu\, \overline{c_{2,0}}}{\mu - 1} - \mathrm{I}\, c_{2,1}$$

Isto pode ser reescrito como:

$$> \mathrm{tau}_1 := -I\left(c_{2,1} + 2\left(\frac{|c_{2,0}|^2\,(2\,\mathrm{mu} + 1)}{\mathrm{mu} - 1} + \frac{|c_{0,2}|^2}{\mathrm{mu}^3 - 1}\right)\right)$$

$$\tau_1 := -\mathrm{I}\left(c_{2,1} + \frac{2\,|c_{2,0}|^2\,(2\,\mu + 1)}{\mu - 1} + \frac{2\,|c_{0,2}|^2}{\mu^3 - 1}\right)$$

Conferindo:

```
> simplify(tau[1]-sigma);
```

$$0$$

Tau: O Primeiro Coeficiente de Birkhoff

Nesta planilha calcularemos o primeiro coeficiente de Birkhoff tau_1de um ponto fixo elíptico não ressonante
(s_0, p_0) da aplicação quociente $T_{n,\,m}$ correspondendo a um ponto periódico do bilhar T pertencente a órbita periódica de período n_1 associada a algum polígono do conjunto $\text{Lambda}_{n,\,m}$ em uma oval Gamma n-simétrica, com $n_1 = \dfrac{n}{mdc(n,\,m)}$.

Pela planilha *Forma Normal de Birkhoff e o Primeiro Coeficiente*, o Primeiro Coeficiente de Birkhoff é dado por:

$$\text{tau} = \text{Im}\left(c_{2,\,1} + \frac{2\ (2\ \text{mu} + 1)\ |c_{2,\,0}|^2}{\text{mu} - 1} + \frac{2\ |c_{0,\,2}|^2}{\text{mu}^3 - 1} \right).$$

Termos de Tau

$$I\,\text{tau} := c_{2,\,1} + 2\left(\frac{|c_{2,\,0}|^2\ (2\ \text{mu} + 1)}{\text{mu} - 1} + \frac{|c_{0,\,2}|^2}{\text{mu}^3 - 1} \right)$$

```
> restart:
  define_mu:=mu=cos(gamma)+I*sin(gamma);
  tau:= (1/I)*(c[2,1]+2*(abs(c[2,0])^2*(2*mu+1)/(mu-1)+abs(c[0,2]
  )^2/(mu^3-1)));
```

$$define\_mu := \mu = \cos(\gamma) + \mathrm{I}\sin(\gamma)$$

$$\tau := -\mathrm{I}\left(c_{2,\,1} + \frac{2\ |c_{2,\,0}|^2\ (2\ \mu + 1)}{\mu - 1} + \frac{2\ |c_{0,\,2}|^2}{\mu^3 - 1} \right)$$

Coeficientes de | c[2,0]| e |c[0,2]|

```
> B1:=coeff(tau,abs(c[2,0]),2):B1:=
  simplify(evalc(Re(subs(define_mu,B1))))
  +I*simplify(evalc(Im(subs(define_mu ,B1))));
> B2:=coeff(tau,abs(c[0,2]),2):
  B2:=factor(simplify(evalc(Re(subs(define_mu,B2)))))
          +I*simplify(evalc(Im(subs(define_mu,B2))));
```

$$B1 := \frac{3\sin(\gamma)}{\cos(\gamma) - 1} - \mathrm{I}$$

$$B2 := \frac{(2\cos(\gamma) - 1)\ \sin(\gamma)}{(2\cos(\gamma) + 1)\ (\cos(\gamma) - 1)} + \mathrm{I}$$

```
> X:= -I*(c[2,1]+(abs(c[2,0])^2-abs(c[0,2])^2)+I*(sin(gamma)/(cos
  (gamma)-1))*(3*abs(c[2,0])^2+((2*cos(gamma)-1)/(2*cos(gamma)+1)
  )*abs(c[0,2])^2)):
  simplify(X-subs(define_mu,tau));
```

```
tau:=
-I*(c[2,1]+(abs(c[2,0])^2-abs(c[0,2])^2)+I*(sin(gamma)/(cos
(gamma)-1))*(3*abs(c[2,0])^2+((2*cos(gamma)-1)/(2*cos(gamma)+1)
)*abs(c[0,2])^2));
```

$$0$$

$$\tau := -\mathrm{I}\left(c_{2,1} + |c_{2,0}|^2 - |c_{0,2}|^2 + \frac{\mathrm{I}\sin(\gamma)\left(3|c_{2,0}|^2 + \frac{(2\cos(\gamma)-1)|c_{0,2}|^2}{2\cos(\gamma)+1}\right)}{\cos(\gamma)-1}\right)$$

Como tau deve ser real (consequência da aplicação preservar área)

```
> eqreal:=Re(c[2,1])+abs(c[2,0])^2-abs(c[0,2])^2=0;
  tau:=Im(c[2,1])-coeff(tau,I,2);
  #eqim:=-Im(tau)=0;
  #tau:=Re(tau);
```

$$eqreal := \Re(c_{2,1}) + |c_{2,0}|^2 - |c_{0,2}|^2 = 0$$

$$\tau := \Im(c_{2,1}) + \frac{\sin(\gamma)\left(3|c_{2,0}|^2 + \frac{(2\cos(\gamma)-1)|c_{0,2}|^2}{2\cos(\gamma)+1}\right)}{\cos(\gamma)-1}$$

Como $\mathrm{tau} = \mathrm{Im}(c_{2,1}) + \frac{\sin(\mathrm{gamma})\left(3|c_{2,0}|^2 + \frac{(2\cos(\mathrm{gamma})-1)|c_{0,2}|^2}{2\cos(\mathrm{gamma})+1}\right)}{\cos(\mathrm{gamma})-1}$ escreveremos

$\mathrm{tau} = \mathrm{Im}(c_{2,1}) + C1\,|c_{2,0}|^2 + C2\,|c_{0,2}|^2$,

ou

$\mathrm{tau} = \mathrm{Im}(c_{2,1}) + e_{2,0} + e_{0,2}$, com $e_{0,2} = C2\,c_{0,2}^2$ $e_{2,0} = C1\,|c_{2,0}|^2$.

Cálculo de $e_{0,2} = C2\,c_{0,2}^2$ e $e_{2,0} = C1\,|c_{2,0}|^2$ em tau_1.

Coeficientes reais a[i,j], b[i,j]

Coeficientes reais $a_{i,j} = \frac{A_{i,j}}{i!\,j!}$ e $b_{i,j} = \frac{B_{i,j}}{i!\,j!}$ com $A_{i,j}$ e $B_{i,j}$ obtidos na planilha *Cálculo do Jato de Ordem* 3.

```
> define_omega2:=omega^2=(-b[1,0]/a[0,1]):
  define_omegam2:=1/omega^2=(-a[0,1]/b[1,0]):
  eq1:=
```

```
  a[1,0] = (L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0]),
  a[0,1] = -L[0]/cos(Theta[0])^2,
  b[1,0] = -(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^2,
  b[0,1] = (L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0]):
> eq2:=
  a[2,0] = -1/2*sin(Theta[0])*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))^2/R[0]
  ^3/cos(Theta[0])^3-1/2*1/R[0]^2/cos(Theta[0])*L[0]*D(r)(s[0]),
  a[1,1] = sin(Theta[0])*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))*(L[0]-R[0]*
  cos(Theta[0]))/R[0]^2/cos(Theta[0])^4,
  a[0,2] = -1/2*L[0]/cos(Theta[0])^5*sin(Theta[0])*(L[0]-R[0]*cos
  (Theta[0]))/R[0],
  b[2,0] = 1/2*L[0]*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^4/cos(Theta[0]
  )*D(r)(s[0]),
  b[1,1] = -L[0]*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))*D(r)(s[0])/R[0]^3/cos
  (Theta[0])^2,
  b[0,2] = 1/2*L[0]^2/R[0]^2/cos(Theta[0])^3*D(r)(s[0])+1/2*sin
  (Theta[0])*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]/cos(Theta[0])^3:
> eq3:=
  a[3,0] = 1/6*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))*(3*sin(Theta[0])^2*(L
  [0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))^2/cos(Theta[0])^2+(L[0]-R[0]*cos
  (Theta[0]))*(L[0]-3*R[0]*cos(Theta[0])))/R[0]^5/cos(Theta[0])
  ^3+1/6*sin(Theta[0])*(-L[0]/R[0]^3/cos(Theta[0])^2+2*(L[0]-R[0]
  *cos(Theta[0]))/R[0]^4/cos(Theta[0])^3*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta
  [0]))+2*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2/R[0]^4/cos(Theta[0])^3+(L
  [0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2/R[0]^5/cos(Theta[0])^4*(L[0]-2*R[0]*
  cos(Theta[0])))*D(r)(s[0])+1/3*L[0]/R[0]^3/cos(Theta[0])*D(r)(s
  [0])^2-1/6*L[0]/R[0]^2/cos(Theta[0])*`@@`(D,2)(r)(s[0]),
  a[2,1] = -1/2*1/(R[0]*cos(Theta[0]))+1/2*(L[0]-R[0]*cos(Theta
  [0]))^2/R[0]^3/cos(Theta[0])^5-1/2*sin(Theta[0])^2*(L[0]-R[0]*
  cos(Theta[0]))/R[0]^2/cos(Theta[0])^4+(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))
  /cos(Theta[0])^5*sin(Theta[0])^2*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R
  [0]^3-(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2/R[0]^4/cos(Theta[0])^6*sin
  (Theta[0])^2*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))-1/2*(L[0]-R[0]*cos
  (Theta[0]))^2*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^4/cos(Theta[0])
  ^6+(1/2*sin(Theta[0])/cos(Theta[0])^2/R[0]-1/2*(L[0]-R[0]*cos
  (Theta[0]))^2/R[0]^3/cos(Theta[0])^4*sin(Theta[0])-1/2*L[0]*(L
  [0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2*sin(Theta[0])/R[0]^4/cos(Theta[0])^5)
  *D(r)(s[0]),
  a[1,2] = -1/2*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))*L[0]/R[0]^2/cos(Theta
  [0])^6+1/2*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^3/R[0]^3/cos(Theta[0])
  ^7+1/2*1/(cos(Theta[0])^4)+(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2*sin
  (Theta[0])^2*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^3/cos(Theta[0])
```

```
^7+1/2*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))*sin(Theta[0])^2*(L[0]-2*R[0]*
cos(Theta[0]))/R[0]^2/cos(Theta[0])^6+1/2*D(r)(s[0])*(L[0]-R[0]
*cos(Theta[0]))/R[0]^3/cos(Theta[0])^6*sin(Theta[0])*L[0]^2,
a[0,3] = 1/6*L[0]*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/cos(Theta[0])^5/R
[0]-1/2*L[0]/cos(Theta[0])^8*sin(Theta[0])^2*(L[0]-R[0]*cos
(Theta[0]))^2/R[0]^2-1/6*L[0]/cos(Theta[0])^6*(L[0]-R[0]*cos
(Theta[0]))^2/R[0]^2-1/6*D(r)(s[0])*L[0]^3/cos(Theta[0])^7*sin
(Theta[0])/R[0]^2,
b[3,0] = 1/6*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^4-1/6*sin(Theta
[0])*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))^3/R[0]^6/cos(Theta[0])^3*D(r)
(s[0])+(-1/2*L[0]/R[0]^4-1/3*L[0]/R[0]^5*(L[0]-R[0]*cos(Theta
[0]))/cos(Theta[0])-1/3*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^4-1/3*
(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^5*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))
/cos(Theta[0])-1/3*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^6*(L[0]-R
[0]*cos(Theta[0]))^2/cos(Theta[0])^2-1/6*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta
[0]))/R[0]^5*L[0]/cos(Theta[0]))*D(r)(s[0])^2+(1/6*(L[0]-R[0]*
cos(Theta[0]))^3/R[0]^5/cos(Theta[0])^2+1/6*(L[0]-R[0]*cos
(Theta[0]))/R[0]^3)*`@@`(D,2)(r)(s[0]),
b[2,1] = -1/2*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^3/cos(Theta[0])
+1/2*sin(Theta[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))*(L[0]-2*R[0]*cos
(Theta[0]))^2/R[0]^5/cos(Theta[0])^4*D(r)(s[0])+1/2*L[0]*(2*L
[0]/R[0]^4/cos(Theta[0])^2+(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]
^4/cos(Theta[0])^2+2*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))*(L[0]-R[0]*cos
(Theta[0]))/R[0]^5/cos(Theta[0])^3)*D(r)(s[0])^2-1/2*(L[0]-R[0]
*cos(Theta[0]))^2*L[0]/R[0]^4/cos(Theta[0])^3*`@@`(D,2)(r)(s[0]
),
b[1,2] = 1/2*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^2/cos(Theta[0])
^2+(-1/2*sin(Theta[0])/cos(Theta[0])^3*L[0]/R[0]^2-1/2*(L[0]-2*
R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^4*L[0]/cos(Theta[0])^5*sin(Theta[0])*
(L[0]-R[0]*cos(Theta[0])))*D(r)(s[0])-(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))
/R[0]^4*L[0]^2/cos(Theta[0])^4*D(r)(s[0])^2+1/2*(L[0]-R[0]*cos
(Theta[0]))/R[0]^3*L[0]^2/cos(Theta[0])^4*`@@`(D,2)(r)(s[0]),
b[0,3] = 1/2*sin(Theta[0])^2*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]
/cos(Theta[0])^5+(1/6*(-L[0]/cos(Theta[0])^4*sin(Theta[0])*(L
[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]+R[0]*sin(Theta[0])/cos(Theta[0])*
(L[0]/cos(Theta[0])^2/R[0]+(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^2/cos
(Theta[0])^3*L[0]))/R[0]/cos(Theta[0])+1/3*(-sin(Theta[0])*L[0]
/cos(Theta[0])^2+sin(Theta[0])/cos(Theta[0])^2*(L[0]-R[0]*cos
(Theta[0])))/R[0]^2/cos(Theta[0])^3*L[0]+1/3*L[0]/cos(Theta[0])
^4/R[0]*sin(Theta[0])+1/3*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^2/cos
(Theta[0])^5*L[0]*sin(Theta[0])+1/6*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))
^2/R[0]^3/cos(Theta[0])^6*L[0]*sin(Theta[0]))*D(r)(s[0])+1/3*L
```

```
[0]^3/R[0]^3/cos(Theta[0])^5*D(r)(s[0])^2-1/6*L[0]^3/R[0]^2/cos
(Theta[0])^5*`@@`(D,2)(r)(s[0]):
```

Termos em c[2,0] e c[0,2]

```
> define_gamma:=cos(gamma)=a[1,0],sin(gamma)=b[1,0]/omega;
  define_omega:=omega=sqrt(-b[1,0]/a[0,1]);
```

$$define\_gamma := \cos(\gamma) = a_{1,0}, \sin(\gamma) = \frac{b_{1,0}}{\omega}$$

$$define\_omega := \omega = \sqrt{-\frac{b_{1,0}}{a_{0,1}}}$$

```
> C2:= coeff(tau,abs(c[0,2]),2);
  C2:= subs(define_gamma,coeff(tau,abs(c[0,2]),2)):
```

$$C2 := \frac{(2\cos(\gamma) - 1)\sin(\gamma)}{(2\cos(\gamma) + 1)(\cos(\gamma) - 1)}$$

Da planilha *Coordenadas complexas* temos $|g_{0,2}|^2 = |c_{0,2}|^2$:

```
> g[0,2] := 1/4*(omega*a[2,0]+I*omega^2*a[1,1]-omega^3*a[0,2]+I*b
  [2,0]-b[1,1]*omega-I*b[0,2]*omega^2)/(omega^(3/2)):
```

```
>eqc02:=abs(c[0,2])^2=1/(16*omega)*(a[2,0]-b[1,1]-omega^2*a[0,2])
 ^2+(omega)/16*(b[2,0]/omega^2-b[0,2]+a[1,1])^2;
 simplify(subs(eqc02,abs(c[0,2])^2-simplify(evalc(abs(g[0,2])^2),
 assume=positive)));
```

$$eqc02 := |c_{0,2}|^2 = \frac{1}{16}\frac{\left(a_{2,0} - b_{1,1} - \omega^2 a_{0,2}\right)^2}{\omega} + \frac{1}{16}\omega\left(\frac{b_{2,0}}{\omega^2} - b_{0,2} + a_{1,1}\right)^2$$

$$0$$

Logo obtemos a expressão de $e_{0,2}$:

```
> e[0,2]:=subs(eqc02,C2*abs(c[0,2])^2);
```

$$e_{0,2} := \frac{(2a_{1,0} - 1)\, b_{1,0}\left(\frac{1}{16}\frac{\left(a_{2,0} - b_{1,1} - \omega^2 a_{0,2}\right)^2}{\omega} + \frac{1}{16}\omega\left(\frac{b_{2,0}}{\omega^2} - b_{0,2} + a_{1,1}\right)^2\right)}{\omega\,(2a_{1,0} + 1)\,(a_{1,0} - 1)}$$

Cálculo de $e_{2,0} = C1\, c_{2,0}^2$ em tau.

```
> C1:= coeff(tau,abs(c[2,0]),2);
  C1:= subs(define_gamma,coeff(tau,abs(c[2,0]),2));
```

$$C1 := \frac{3\sin(\gamma)}{\cos(\gamma) - 1}$$

$$C1 := \frac{3\, b_{1,0}}{\omega\, (a_{1,0} - 1)}$$

Da planilha *Coordenadas complexas* temos a expressão $|g_{2,0}|^2 = |c_{2,0}|^2$:

```
> g[2,0] := 1/4*(omega*a[2,0]-I*omega^2*a[1,1]-omega^3*a[0,2]+I*b
  [2,0]+b[1,1]*omega-I*b[0,2]*omega^2)/(omega^(3/2)):
> eqc20:= abs(c[2,0])^2=(a[2,0]-omega^2*a[0,2]+b[1,1])^2/(16*
  omega)+omega/16*(-b[0,2]+b[2,0]/(omega^2)-a[1,1])^2;
  simplify(subs(eqc20,abs(c[2,0])^2-simplify(evalc(abs(g[2,0])
  ^2),assume=positive)));
```

$$eqc20 := |c_{2,0}|^2 = \frac{1}{16}\,\frac{\left(a_{2,0} - \omega^2 a_{0,2} + b_{1,1}\right)^2}{\omega} + \frac{1}{16}\,\omega \left(-b_{0,2} + \frac{b_{2,0}}{\omega^2} - a_{1,1}\right)^2$$

$$0$$

Do mesmo modo obtemos a expressão de $e_{2,0}$:

```
> e[2,0]:=subs(eqc20,C1*abs(c[2,0])^2);
```

$$e_{2,0} := \frac{3\, b_{1,0} \left(\frac{1}{16}\,\frac{\left(a_{2,0} - \omega^2 a_{0,2} + b_{1,1}\right)^2}{\omega} + \frac{1}{16}\,\omega \left(-b_{0,2} + \frac{b_{2,0}}{\omega^2} - a_{1,1}\right)^2\right)}{\omega\, (a_{1,0} - 1)}$$

Definimos ee/divee$= e_{0,2} + e_{2,0}$, onde divee$=\dfrac{16\ \text{omega}^4\, (a_{1,0} - 1)\, (2\, a_{1,0} + 1)}{b_{1,0}}$ é o termo dividindo *ee*.

```
> ee :=(2*a[1,0]-1)*(omega^2*(a[2,0]-omega^2*a[0,2]-b[1,1])^2+(b
  [2,0]-b[0,2]*omega^2+a[1,1]*omega^2)^2)
  +3*(2*a[1,0]+1)*(omega^2*(a[2,0]-omega^2*a[0,2]+b[1,1])^2+(+b
  [2,0]-b[0,2]*omega^2-a[1,1]*omega^2)^2);
  divee:=(16*omega^4*(a[1,0]-1)*(2*a[1,0]+1))/b[1,0];
  simplify(ee/divee-e[2,0]-e[0,2]);
```

$$ee := (2\, a_{1,0} - 1) \left(\omega^2 \left(a_{2,0} - b_{1,1} - \omega^2 a_{0,2}\right)^2 + \left(\omega^2 a_{1,1} + b_{2,0} - b_{0,2}\, \omega^2\right)^2\right)$$

$$+3\,(2\,a_{1,0}+1)\,\left(\omega^2\,(a_{2,0}-\omega^2\,a_{0,2}+b_{1,1})^2+(-\omega^2\,a_{1,1}+b_{2,0}-b_{0,2}\,\omega^2)^2\right)$$

$$divee := \frac{16\,\omega^4\,(a_{1,0}-1)\,(2\,a_{1,0}+1)}{b_{1,0}}$$

$$0$$

Expressões de *ee* e div*ee* obtidas substituindo os valores de a[i,j] e b[i,j]:

```
> divEE:=subs(eq1,eq2,eq3,subs(define_omega,divee));
  EE:=subs(eq1,eq2,eq3,subs(define_omega,ee)):#voltar e colocar;
  EE1:=simplify((coeff(EE,D(r)(s[0]),1)));
```

$$divEE := -\frac{1}{R_0^2\,L_0^2}\left(16\,(L_0-2\,R_0\cos(\Theta_0))\,\cos(\Theta_0)^4\left(\frac{L_0-R_0\cos(\Theta_0)}{R_0\cos(\Theta_0)}-1\right)\left(\frac{2\,(L_0-R_0\cos(\Theta_0))}{R_0\cos(\Theta_0)}+1\right)\right)$$

$$EE1 := 0$$

facE=1/div*ee*

```
> facE :=1/( -16*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))^2*cos(Theta[0])^2*
  (2*L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/(R[0]^4*L[0]^2));
  simplify(1/facE-divEE);
```

$$facE := -\frac{1}{16}\,\frac{R_0^4\,L_0^2}{(L_0-2\,R_0\cos(\Theta_0))^2\,\cos(\Theta_0)^2\,(2\,L_0-R_0\cos(\Theta_0))}$$

$$0$$

Cálculo de e_0, com e_0 o termo constante de $(e_{0,2}+e_{2,0})$ (não possui $\mathrm{D}(r)(s_0)$) :

```
> EE0:=(coeff(EE,D(r)(s[0]),0)):
> E0f1 :=
  (-1/2*sin(Theta[0])^2/(R[0]^5*cos(Theta[0])*L[0]^2)*(L[0]-2*R
  [0]*cos(Theta[0]))^3);
  E0f2:=
  ((2*L[0]-3*R[0]*cos(Theta[0]))^3/(R[0]^3*cos(Theta[0])^3)
  +3*(2*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))/(R[0]*cos(Theta[0]))+1));
  simplify(E0f1*E0f2-EE0);
```

$$E0f1 := -\frac{1}{2}\,\frac{\sin(\Theta_0)^2\,(L_0-2\,R_0\cos(\Theta_0))^3}{R_0^5\cos(\Theta_0)\,L_0^2}$$

$$E0f2 := \frac{(2\,L_0-3\,R_0\cos(\Theta_0))^3}{R_0^3\cos(\Theta_0)^3}+\frac{6\,(L_0-R_0\cos(\Theta_0))}{R_0\cos(\Theta_0)}+3$$

$$0$$

```
> simplify(facE*E0f1*E0f2-EE0/divEE);
```

$$0$$

```
> e0:=facE*E0f1*E0f2;
```

$$e0 := \frac{1}{32}\,\frac{1}{\cos(\Theta_0)^3\,(2\,L_0 - R_0\cos(\Theta_0))\,R_0}\Bigg(\bigg(L_0 - 2\,R_0\cos(\Theta_0)\bigg)\sin(\Theta_0)^2\left(\frac{(2\,L_0 - 3\,R_0\cos(\Theta_0))^3}{R_0^3\cos(\Theta_0)^3} + \frac{6\,(L_0 - R_0\cos(\Theta_0))}{R_0\cos(\Theta_0)}\right) + 3\Bigg)$$

Cálculo de e_2, com com e_2 o coeficiente de$\mathrm{D}(r)\,(s_0)^2$ em $(e_{0,\,2} + e_{2,\,0})$.

```
> EE2:=(coeff(EE,D(r)(s[0]),2)):
> E2f1:=L[0]/cos(Theta[0])^2/R[0]^8:
> E2f2:=
  4*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))^2*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))+R[0]*
  cos(Theta[0])*((L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2)+L[0]^2*R[0]*cos
  (Theta[0]):
  E2f2:=
  (L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))*(4*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))^2+R[0]
  *cos(Theta[0])*((L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))))
  +L[0]^2*R[0]*cos(Theta[0]);
  simplify(E2f1*E2f2-EE2);
```

$$E2f2 := (L_0 - R_0\cos(\Theta_0))\,\left(4\,(L_0 - 2\,R_0\cos(\Theta_0))^2 + R_0\cos(\Theta_0)\,(L_0 - R_0\cos(\Theta_0))\right) + L_0^2\,R_0\cos(\Theta_0)$$

$$0$$

```
> simplify(facE*E2f1*E2f2-EE2/divEE);
```

$$0$$

```
> e2:=facE*E2f1*E2f2;
```

$$e2 := -\frac{1}{16}\,\Big(L_0^3\,\big((L_0 - R_0\cos(\Theta_0))\,(4\,(L_0 - 2\,R_0\cos(\Theta_0))^2 + R_0\cos(\Theta_0)\,(L_0 - R_0\cos(\Theta_0))) + L_0^2\,R_0\cos(\Theta_0)\big)\Big)\Big/\Big((L_0 - 2\,R_0\cos(\Theta_0))^2\cos(\Theta_0)^4\,(2\,L_0 - R_0\cos(\Theta_0))\,R_0^4\Big)$$

im(c[2,1]])

Expressão da parte imaginária de $c_{2,\,1}$ em função de L, r_0 e suas derivadas.

```
> imc21 := -1/8*
  (
   a[1,0]*(-3*b[3,0]+3*omega^4*a[0,3]+omega^2*a[2,1]-b[1,2]*
  omega^2)
  -b[1,0]*(-omega^2*a[1,2]-3*a[3,0]-b[2,1]-3*b[0,3]*omega^2))/
  (omega^2);
```

$$imc21 := -\frac{1}{8}\,\frac{1}{\omega^2}\left(a_{1,\,0}\left(-3\,b_{3,\,0}+3\,\omega^4\,a_{0,\,3}+\omega^2\,a_{2,\,1}-b_{1,\,2}\,\omega^2\right)-b_{1,\,0}\left(-\omega^2\,a_{1,\,2}-3\,a_{3,\,0}-b_{2,\,1}-3\,b_{0,\,3}\,\omega^2\right)\right)$$

Coeficientes em $\mathrm{Im}\left(c_{2,\,1}\right)$ (ATENCAO DIVIDIR por 8)

8*im c[2,1] = C0 + C11 $\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)$ + C12 $\mathrm{D}(r)\left(s_0\right)^2$ + C21 $\mathrm{D}^2 r\left(s_0\right)$

```
> C:=subs(eq1,eq2,eq3,subs(define_omega,8*imc21)):
  C11:=simplify((coeff(C,D(r)(s[0]),1)));
```

$$C11 := 0$$

```
> C12:=((coeff(C,D(r)(s[0]),2))):
```

```
> c12 :=
  (L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2*(L[0]/R[0]^2/cos(Theta[0])^2)
  +L[0]/2
  +2*R[0]*cos(Theta[0]);
  simplify(c12*L[0]/cos(Theta[0])^2/(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R
  [0]^2-C12);
```

$$c12 := \frac{\left(L_0 - R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)^2 L_0}{R_0^2\cos\left(\Theta_0\right)^2} + \frac{1}{2}\,L_0 + 2\,R_0\cos\left(\Theta_0\right)$$

$$0$$

```
> c12:=((L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))*L[0])*(L[0]/R[0]^2/cos(Theta
  [0])^2)
  +3*L[0]/2
  +2*R[0]*cos(Theta[0]);
  c12f:=
  L[0]/cos(Theta[0])^2/(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^2/8:
  simplify(c12*c12f-C12/8);
```

$$c12 := \frac{\left(L_0 - 2\,R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)L_0^2}{R_0^2\cos\left(\Theta_0\right)^2} + \frac{3}{2}\,L_0 + 2\,R_0\cos\left(\Theta_0\right)$$

$$0$$

```
> c12*c12f;
```

$$\frac{1}{8}\,\frac{\left(\frac{\left(L_0 - 2\,R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)L_0^2}{R_0^2\cos\left(\Theta_0\right)^2} + \frac{3}{2}\,L_0 + 2\,R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)L_0}{\cos\left(\Theta_0\right)^2\left(L_0 - 2\,R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)R_0^2}$$

```
> C21:=((coeff(C,(D@D)(r)(s[0]),1))):
> c21:=-R[0]^2*cos(Theta[0])^2/(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))*R[0]
  ^2*L[0]/cos(Theta[0])^2/(R[0]^4*cos(Theta[0]));
  simplify(c21-C21);
```

$$c21 := -\frac{L_0}{\cos\left(\Theta_0\right)\left(L_0 - 2\,R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)}$$

$$0$$

```
> C0:=subs((D@D)(r)(s[0])=0,(D)(r)(s[1])=0,(D)(r)(s[0])=0,C):
> fac0:=-(1/2)/cos(Theta[0])^3:
  c0a:=
  (L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2*
  (2/R[0]^3+(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))*(3*sin(Theta[0])^2/(cos
  (Theta[0])^3*R[0]^4))):
> c0bf:=-(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^3;
  c0b:=
  (2*L[0])/(cos(Theta[0])^2)+(L[0]^2*sin(Theta[0])^2-8*R[0]^2*cos
  (Theta[0])^2*(sin(Theta[0])^2))/(R[0]*cos(Theta[0])^3);
  simplify((c0a+c0bf*c0b)*fac0-C0);
```

$$c0bf := -\frac{L_0 - 2\,R_0\cos\left(\Theta_0\right)}{R_0^3}$$

$$c0b := \frac{2\,L_0}{\cos\left(\Theta_0\right)^2} + \frac{L_0^2\sin\left(\Theta_0\right)^2 - 8\,R_0^2\cos\left(\Theta_0\right)^2\sin\left(\Theta_0\right)^2}{R_0\cos\left(\Theta_0\right)^3}$$

$$0$$

```
> c0 :=
  +(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))*L[0]/(R[0]^3*cos(Theta[0])^5)
  -(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2/(R[0]^3*cos(Theta[0])^3)
  +(1/2)*sin(Theta[0])^2*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))*(
```

```
(
L[0]^2-8*R[0]^2*cos(Theta[0])^2)
-3*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2
)/(R[0]^4*cos(Theta[0])^6)
;
simplify(c0-C0);
```

$$c0 := \frac{\left(L_0 - 2\,R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)L_0}{R_0^3\cos\left(\Theta_0\right)^5} - \frac{\left(L_0 - R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)^2}{R_0^3\cos\left(\Theta_0\right)^3} + \frac{1}{2}\,\frac{\sin\left(\Theta_0\right)^2\left(L_0 - 2\,R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)\left(L_0^2 - 8\,R_0^2\cos\left(\Theta_0\right)^2 - 3\left(L_0 - R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)^2\right)}{R_0^4\cos\left(\Theta_0\right)^6}$$

$$0$$

Calculando tau

Escreveremos tau = T0 + T12 $D(r)\left(s_0\right)^2$ + T21 $D^2 r\left(s_0\right)$

Termo na derivada 2a: T21 = C21/8

```
> t21:=c21;
```

$$t21 := -\frac{L_0}{\cos\left(\Theta_0\right)\left(L_0 - 2\,R_0\cos\left(\Theta_0\right)\right)}$$

Termo independente T0 = C0/8 + e0

```
> c0 := (L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))*L[0]/(R[0]^3*cos(Theta[0])^5)
  -(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2/(R[0]^3*cos(Theta[0])^3)+1/2*sin
  (Theta[0])^2*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))*(L[0]^2-8*R[0]^2*cos
  (Theta[0])^2-3*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2)/(R[0]^4*cos(Theta
  [0])^6):
> e0 := 1/32*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))*sin(Theta[0])^2*((2*L[0]
  -3*R[0]*cos(Theta[0]))^3/(R[0]^3*cos(Theta[0])^3)+6*(L[0]-R[0]*
  cos(Theta[0]))/(R[0]*cos(Theta[0]))+3)/(cos(Theta[0])^3*(2*L[0]
  -R[0]*cos(Theta[0]))*R[0]):
> T0:=(c0/8+e0):
> t0a :=
  (L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))*L[0]/(R[0]^3*cos(Theta[0])^5)-4*(L
  [0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2/(R[0]^3*cos(Theta[0])^3):
  t0a1 := -1/(cos(Theta[0])^3*R[0]):
  t0a2:=((L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2*(sin(Theta[0])^2)
  )/(R[0]^3*cos(Theta[0])^5):
  ft0b:=-sin(Theta[0])^2*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/(2*L[0]-R[0]
```

```
*cos(Theta[0])):
t0b:=2*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))^2/(R[0]^3*cos(Theta[0])^5)+3*L
[0]/(R[0]^2*cos(Theta[0])^4):
simplify((t0a1+t0a2+ft0b*t0b)/8-T0):
```

```
> t0:=+3/(2*L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))
+2*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/(cos(Theta[0])^3*R[0]*(2*L[0]-R
[0]*cos(Theta[0]))):
#t0:=3*(sin(Theta[0])^2)/(cos(Theta[0])^2*(2*L[0]-R[0]*cos
(Theta[0])))-1/(cos(Theta[0])^3*R[0]);
simplify((-t0)/8-T0);
```

$$0$$

```
> t0:=(
-1/(cos(Theta[0])^3*R[0])
+3*R[0]*cos(Theta[0])*(sin(Theta[0])^2)/(cos(Theta[0])^3*R[0]*
(2*L[0]-R[0]*cos(Theta[0])))
)
;
simplify((t0/8)-T0);
```

$$t0 := -\frac{1}{R_0 \cos(\Theta_0)^3} + \frac{3 \sin(\Theta_0)^2}{\cos(\Theta_0)^2 \left(2 L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)\right)}$$

$$0$$

Termo na derivada primeira (ao quadrado) T12 = C12/8 + e2

```
> c12:=1/8*((L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))*L[0]^2/R[0]^2/cos(Theta
[0])^2+3/2*L[0]+2*R[0]*cos(Theta[0]))*L[0]/cos(Theta[0])^2/(L
[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))/R[0]^2:
> e2 := -1/16*L[0]^3*((L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))*(4*(L[0]-2*R[0]*
cos(Theta[0]))^2+R[0]*cos(Theta[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0])))+
L[0]^2*R[0]*cos(Theta[0]))/((L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))^2*cos
(Theta[0])^4*(2*L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))*R[0]^4):
> T12:=c12+e2;
```

$$T12 := \frac{1}{8} \frac{\left(\frac{\left(L_0 - 2 R_0 \cos(\Theta_0)\right) L_0^2}{R_0^2 \cos(\Theta_0)^2} + \frac{3}{2} L_0 + 2 R_0 \cos(\Theta_0)\right) L_0}{\cos(\Theta_0)^2 \left(L_0 - 2 R_0 \cos(\Theta_0)\right) R_0^2} - \frac{1}{16} \left(L_0^3 \left(\left(L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)\right) \left(4 \left(L_0 - 2 R_0 \cos(\Theta_0)\right)^2 + R_0 \cos(\Theta_0) \left(L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)\right)\right) + L_0^2 R_0 \cos(\Theta_0)\right)\right) \Big/ \left(\left(L_0 - 2 R_0 \cos(\Theta_0)\right)^2 \cos(\Theta_0)^4 \left(2 L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)\right) R_0^4\right)$$

```
> ft12:=(1/16)*L[0]/R[0]^2/cos(Theta[0])^2/(L[0]-2*R[0]*cos(Theta
[0])):
```

```
t12:= 2*((L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))*L[0]^2/(R[0]^2*cos(Theta
[0])^2)+3/2*L[0]+2*R[0]*cos(Theta[0])
)
-L[0]^2*(
(L[0]-R[0]*cos(Theta[0]))*(4*(L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))^2+R[0]
*cos(Theta[0])*(L[0]-R[0]*cos(Theta[0])))+L[0]^2*R[0]*cos(Theta
[0])
)/((L[0]-2*R[0]*cos(Theta[0]))*cos(Theta[0])^2*(2*L[0]-R[0]*cos
(Theta[0]))*R[0]^2):
```

```
> t12:=(-1)*L[0]*(7*L[0]-4*R[0]*cos(Theta[0]))/((L[0]-2*R[0]*cos
(Theta[0]))^2*(2*L[0]-R[0]*cos(Theta[0])));
simplify(t12/8-T12);
```

$$t12 := -\frac{L_0\left(7 L_0 - 4 R_0 \cos(\Theta_0)\right)}{\left(L_0 - 2 R_0 \cos(\Theta_0)\right)^2 \left(2 L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)\right)}$$

$$0$$

Juntando tudo:

```
> tau:=(1/8)*(t0+t12*D(r)(s[0])^2+t21*(D@D)(r)(s[0]));
```

$$\tau := -\frac{1}{8 R_0 \cos(\Theta_0)^3} + \frac{3}{8} \frac{\sin(\Theta_0)^2}{\cos(\Theta_0)^2 \left(2 L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)\right)} - \frac{1}{8} \frac{L_0\left(7 L_0 - 4 R_0 \cos(\Theta_0)\right) \mathrm{D}(r)(s_0)^2}{\left(L_0 - 2 R_0 \cos(\Theta_0)\right)^2 \left(2 L_0 - R_0 \cos(\Theta_0)\right)} - \frac{1}{8} \frac{L_0 \mathrm{D}^{(2)}(r)(s_0)}{\cos(\Theta_0)\left(L_0 - 2 R_0 \cos(\Theta_0)\right)}$$

Parte Imaginaira (checando)

Verificaremos que a parte imaginária de tau, $|c_{2,0}|^2 - |c_{0,2}|^2 + \mathrm{Re}(c_{2,1})$ será nula como esperado.

```
eqim := abs(c[2,0])^2-abs(c[0,2])^2+Re(c[2,1]) = 0;
rec21:=Re(c[2,1]) = -1/8*a[1,0]*(-3*b[0,3]*omega^3-3*omega*a[3,0]-
omega^3*a[1,2]-b[2,1]*omega)/omega^2-1/8*1/omega^3*b[1,0]*(-3*b[3,
0]+omega^2*a[2,1]-b[1,2]*omega^2+3*omega^4*a[0,3]);
modc02:=abs(c[0,2])^2=1/(16*omega)*(a[2,0]-b[1,1]-omega^2*a[0,2])
^2+(omega)/16*(b[2,0]/omega^2-b[0,2]+a[1,1])^2;
modc20:= abs(c[2,0])^2=(a[2,0]-omega^2*a[0,2]+b[1,1])^2/(16*omega)+
omega/16*(-b[0,2]+b[2,0]/(omega^2)-a[1,1])^2;
```

$$eqim := |c_{2,0}|^2 - |c_{0,2}|^2 + \Re(c_{2,1}) = 0$$

$$rec21 := \Re(c_{2,1}) = -\frac{1}{8}\,\frac{a_{1,0}\left(-3\,b_{0,3}\,\omega^3 - 3\,\omega\,a_{3,0} - \omega^3\,a_{1,2} - b_{2,1}\,\omega\right)}{\omega^2} - \frac{1}{8}\,\frac{b_{1,0}\left(-3\,b_{3,0} + \omega^2\,a_{2,1} - b_{1,2}\,\omega^2 + 3\,\omega^4\,a_{0,3}\right)}{\omega^3}$$

$$modc02 := |c_{0,2}|^2 = \frac{1}{16}\,\frac{\left(a_{2,0} - b_{1,1} - \omega^2\,a_{0,2}\right)^2}{\omega} + \frac{1}{16}\,\omega\left(\frac{b_{2,0}}{\omega^2} - b_{0,2} + a_{1,1}\right)^2$$

$$modc20 := |c_{2,0}|^2 = \frac{1}{16}\,\frac{\left(a_{2,0} - \omega^2\,a_{0,2} + b_{1,1}\right)^2}{\omega} + \frac{1}{16}\,\omega\left(-b_{0,2} + \frac{b_{2,0}}{\omega^2} - a_{1,1}\right)^2$$

```
> imag:=
   2*(a[2,0]-omega^2*a[0,2])*b[1,1]
  -2*(b[2,0]-b[0,2]*omega^2)*a[1,1]
  -a[1,0]*(-3*b[0,3]*omega^2-3*a[3,0]-omega^2*a[1,2]-b[2,1])
  -b[1,0]*(-3*b[3,0]/omega^2+a[2,1]-b[1,2]+3*omega^2*a[0,3]);
  fatori:=1/(8*omega);
  simplify(imag*fatori-imaginaria);
```

$$imag := 2\left(a_{2,0} - \omega^2\,a_{0,2}\right)b_{1,1} - 2\left(b_{2,0} - b_{0,2}\,\omega^2\right)a_{1,1} - a_{1,0}\left(-\omega^2\,a_{1,2} - 3\,a_{3,0} - b_{2,1} - 3\,b_{0,3}\,\omega^2\right) - b_{1,0}\left(-\frac{3\,b_{3,0}}{\omega^2} + a_{2,1} - b_{1,2} + 3\,\omega^2\,a_{0,3}\right)$$

$$fatori := \frac{1}{8\,\omega}$$

$$-\frac{1}{8}\,\frac{1}{\omega^3}\left(-2\,b_{1,1}\,\omega^2\,a_{2,0} + 2\,b_{1,1}\,\omega^4\,a_{0,2} + 2\,\omega^2\,a_{1,1}\,b_{2,0} - 2\,\omega^4\,a_{1,1}\,b_{0,2} - a_{1,0}\,\omega^4\,a_{1,2} - 3\,a_{1,0}\,\omega^2\,a_{3,0} - a_{1,0}\,\omega^2\,b_{2,1} - 3\,a_{1,0}\,\omega^4\,b_{0,3} - 3\,b_{1,0}\,b_{3,0} + 3\,b_{1,0}\,\omega^4\,a_{0,3} + b_{1,0}\,\omega^2\,a_{2,1} - b_{1,0}\,b_{1,2}\,\omega^2 + 8\,imaginaria\,\omega^3\right)$$

```
> imagi:=subs(define_omegam2,define_omega2,imag);
```

$$imagi := 2\left(a_{2,0} + \frac{b_{1,0}\,a_{0,2}}{a_{0,1}}\right)b_{1,1} - 2\left(b_{2,0} + \frac{b_{0,2}\,b_{1,0}}{a_{0,1}}\right)a_{1,1} - a_{1,0}\left(\frac{b_{1,0}\,a_{1,2}}{a_{0,1}} - 3\,a_{3,0} - b_{2,1} + \frac{3\,b_{0,3}\,b_{1,0}}{a_{0,1}}\right) - b_{1,0}\left(\frac{3\,b_{3,0}\,a_{0,1}}{b_{1,0}} + a_{2,1} - b_{1,2} - \frac{3\,b_{1,0}\,a_{0,3}}{a_{0,1}}\right)$$

```
> simplify(subs(eq1,eq2,eq3,imagi));
```

LL

0

Tau: Bilhares com retas invariantes

Nesta planilha cálcularemos o primero coeficiente de Birkhoff tau$_1$ de um ponto fixo elíptico não ressonante
(s_0, p_0) da aplicação quociente $T_{n,\,m}$ em uma oval Gamma n-simétrica, com raio de curvatura $R(\text{phi}) = a + b\cos(n\,\text{phi})$, a>|b|e $4 \le n$. Explicitaremos o valor de tau$_1$ em função das constantes a, b e m. Faremos o caso onde b>0, o caso b<0 é análogo.

Inicialização:

```
> restart:
```

Condições iniciais na função suporte e no raio de curvatura.

```
> eq1:=L[0]=2*sin(Theta[0])*g(s[0]),R[0]=g(s[0])+(D@D)(g)(s[0]),D
  (r)(s[0])^2=0;
```

$$eq1 := L_0 = 2\sin\left(\Theta_0\right) g\left(s_0\right), R_0 = g\left(s_0\right) + D^{(2)}(g)\left(s_0\right), D(r)\left(s_0\right)^2 = 0$$

```
> eq2:= g(s[0])=a-(b*cos(n*s[0]))/(n^2-1);
```

$$eq2 := g\left(s_0\right) = a - \frac{b\cos\left(n\,s_0\right)}{n^2-1}$$

O ponto fixo elíptico corresponde ao minimo. Neste ponto critico temos

```
> eq3:=g(s[0])=a-(b)/(n^2-1),(D@D)(g)(s[0])=(b*n^2)/(n^2-1),(D@D)
  (r)(s[0])=-b*n^2/(a+b)^2;
```

$$eq3 := g\left(s_0\right) = a - \frac{b}{n^2-1}, D^{(2)}(g)\left(s_0\right) = \frac{b\,n^2}{n^2-1}, D^{(2)}(r)\left(s_0\right) = -\frac{b\,n^2}{(a+b)^2}$$

Pela planilha *Tau: O Primeiro Coeficiente de Birkhoff* ,o Primeiro Coeficiente de Birkhoff é dado por:

$$\text{tau}_1 := -\frac{1}{8 R_0 \sin\left(\text{Theta}_0\right)^3} + \frac{3}{8\left(2L_0 - R_0\sin\left(\text{Theta}_0\right)\right)} - \frac{1\,L_0\left(7L_0 - 4R_0\sin\left(\text{Theta}_0\right)\right) D(r)\left(s_0\right)^2}{8\left(L_0 - 2R_0\sin\left(\text{Theta}_0\right)\right)^2\left(2L_0 - R_0\sin\left(\text{Theta}_0\right)\right)} - \frac{1\,L_0\,D^{(2)}(r)\left(s_0\right)}{8\sin\left(\text{Theta}_0\right)\left(L_0 - 2R_0\sin\left(\text{Theta}_0\right)\right)}$$

```
> Tau := -1/8/(R[0]*sin(Theta[0])^3)+3/8*sin(Theta[0])^2/(sin(Theta
  [0])^2*(2*L[0]-R[0]*sin(Theta[0])))-1/8*L[0]*(7*L[0]-4*R[0]*sin
  (Theta[0]))*D(r)(s[0])^2/((L[0]-2*R[0]*sin(Theta[0]))^2*(2*L[0]-R
  [0]*sin(Theta[0])))-1/8*L[0]*`@@`(D, 2)(r)(s[0])/(sin(Theta[0])*
  (L[0]-2*R[0]*sin(Theta[0]))):
```

Substituindo as condições iniciais:

```
> Tauc1:=(subs(eq1,eq3,Tau)):Tauc11 :=-1/((a-b/(n^2-1)+b*n^2/(n^2
  -1))*sin(Theta[0])^3) +3/(4*sin(Theta[0])*(a-b/(n^2-1))-(a-b/(n^2
  -1)+b*n^2/(n^2-1))*sin(Theta[0])) +(a-b/(n^2-1))*b*n^2/((a+b)^2*
  (sin(Theta[0])*(a-b/(n^2-1))-(a-b/(n^2-1)+b*n^2/(n^2-1))*sin
  (Theta[0])));tau := -1/((a+b)*sin(Theta[0])^2)+(n^2-1)/((a-b/3)*
```

```
n^2-(a+b))-(a*(n^2-1)-b)/(a+b)^2;simplify(Tauc1-1/(8*sin(Theta[0]
))*tau);
```

$$Tauc11 := -\frac{1}{\left(a-\frac{b}{n^2-1}+\frac{b\,n^2}{n^2-1}\right)\sin(\Theta_0)^3}$$
$$+\frac{3}{4\sin(\Theta_0)\left(a-\frac{b}{n^2-1}\right)-\left(a-\frac{b}{n^2-1}+\frac{b\,n^2}{n^2-1}\right)\sin(\Theta_0)}$$
$$+\frac{\left(a-\frac{b}{n^2-1}\right)b\,n^2}{(a+b)^2\left(\sin(\Theta_0)\left(a-\frac{b}{n^2-1}\right)-\left(a-\frac{b}{n^2-1}+\frac{b\,n^2}{n^2-1}\right)\sin(\Theta_0)\right)}$$

$$\tau := -\frac{1}{(a+b)\sin(\Theta_0)^2}+\frac{n^2-1}{\left(a-\frac{1}{3}\,b\right)n^2-a-b}-\frac{a\,(n^2-1)-b}{(a+b)^2}$$

$$0$$

Logo o Primeiro Coeficiente de Birkhoff é dado por

$$8\sin(\mathrm{Theta}_0)\ \mathrm{tau}_1 := -\frac{1}{(a+b)\sin(\mathrm{Theta}_0)^2}+\frac{n^2-1}{\left(a-\frac{1\,b}{3}\right)n^2-a-b}-\frac{a\,(n^2-1)-b}{(a+b)^2}.$$

Bibliografia

[1] B. Hassenblatt, e A. Katok, *Introduction to the modern theory of dynamical systems*, Cambridge University Press, Cambridge, 8th printing 2006.

[2] G.D.Birkhoff, *Dynamical systems,* Providence, RI: A.M.S. Coloquium Publication, 1966 (original edition 1927).

[3] H. Gluch, *The converse to the four-vertex theorem*, L' Eiseignement Mathématique, 17, 295-309, 1971.

[4] J. C.Yoccoz , *Conjugaison différentiable des difféomorphismes du Cercle dont le nombre de rotation vérifie une condition diophantienne,* Annales scientifiques de l 'É. N. S. 4^e série, tome 17, n^o 3, 311-343, 1984.

[5] J. Moser, *Stable and random motions in dynamical systems,* PUP, Princeton, 1973.

[6] Lazutkin, *The Existence of Caustics for a Billiard problem in a convex domain,* Math. USSR Izvestija, t.7, 1973, 185-214.

[7] L. J. Diaz, e D.R. Jorge, *Uma introdução aos Sistemas Dinâmicos via Frações Contínuas*, 26^o Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 2007.

[8] M. Levi, and J. Moser, *A Lagrangian Proof of the Invariant Curve Theorem for Twist Mappings,* Proceedings of Symposia in Pure Mathematics, volume 69, AMS, 733-746, 2001.

[9] M. W. Hirsch, *Differential Topology*, Springer-Verlag, 1976.

[10] Nobuhiro Innami, *Convex curves whose points are vertices of billiard triangles,* Kodai Math. J. 11, 17-24, 1988.

[11] O. Knill, *On nonconvex caustics of convex billiards*, Elem. Math. 53, 89-106, 1998.

[12] R. Douady, *Applications du théorème des tores invariants*, Thèse de Doctorat, 1982.

[13] R. Moeckel, *Generic Bifurcations of the Twist Coefficient*, Ergodic Theory and Dynamical Systems 10, 185 - 195, 1990.

[14] R. S. Mackay, *Greene's residue criterion,* Nonlinearity, 161-187, 1992.

[15] S. A. Zanata, M. J. Dias Carneiro, C. G. e Ragazzo, *Introdução à Dinâmica de Aplicações do Tipo Twist*, 25° Colóquio Brasileiro de Matemática, IMPA, 2005.

[16] S. Oliffson Kamphorst, S. Pinto de Carvalho, *The first Birkhoff coefficient and the stability of 2- Periodic Orbits on Billiards,* Experimental Math 14/3, 299-306, 2005.

[17] S. Oliffson Kamphorst, S. Pinto de Carvalho, M. J. Dias Carneiro, *Elliptic Island on Strictly Convex Billiards,* Ergodic Theory and Dynamical System 23/3, 799-812, 2003.

[18] S. Tabachnikov, *Panorama et Synthèses 1- Billiards*, Société Mathématique de France, 1995.

[19] S. Tabachnikov, *Tire Track Geometry,* arXiv:mathDG/0405445v1,2004.

[20] V. Cyr, *A Number Theoretic Question Arinsing in the Geometry of Plane Curves and in Billiard Dynamics*, arXiv: 1103.5071v1, 2011.

[21] V.V.Koslov, e D.V. Treshchëv, *A Genetic Introduction to the Dynamics of Systems with Impacts*, Translations of Mathematical Monographs, vol.89, AMS.