UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Frederico Augusto Menezes Ribeiro

G-Graduações das Álgebras de Matrizes Triangulares Superiores sobre um Corpo

BELO HORIZONTE
2012

Frederico Augusto Menezes Ribeiro

G-Graduações das Álgebras de Matrizes Triangulares Superiores sobre um Corpo

Dissertação submetida à banca examinadora, designada pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMG, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientadora:
Prof^a. Viviane Ribeiro Tomaz da Silva

Belo Horizonte
2012

Agradecimentos

À meus Pais por tudo.

À meu irmão pelo incentivo.

À minha orientadora por toda a paciência.

Aos professores da banca pela atenção, críticas e sugestões.

Ao departamento de matemática.

À minha família e aos meus amigos pelo apoio e motivação.

Ao CNPQ pelo apoio financeiro.

Resumo

Sejam F um corpo e G um grupo. Nesta dissertação, trataremos das G-graduações da álgebra de matrizes triangulares superiores sobre F, a partir dos artigos de Valenti e Zaicev sobre o assunto. Começaremos pelo caso das matrizes 2×2, que ilustra de forma mais simples as técnicas usadas nos casos mais gerais. Passaremos então ao caso em que n é arbitrário, mas nos restringiremos primeiramente ao caso em que F é um corpo algebricamente fechado de característica zero e G um grupo abeliano finito. Por fim, faremos o caso geral: Para F um corpo qualquer e G um grupo qualquer temos que toda G-graduação da álgebra de matrizes triangulares superiores sobre F é, a menos de isomorfismo, de um tipo que chamamos elementar.

Abstract

Let F be a field and G a group. In this dissertation, we deal with the G-gradings of the algebra of upper triangular matrices over F, based on Valenti and Zaicev's articles on the subject. We start by the 2×2 matrices case, which shows in a simpler manner the techniques used on the more general cases. We then deal with the case where n is arbitrary, but first will restrict ourselves to the case F is an algebraically closed field of characteristc zero and G an finite abelian group. Lastly, we will do the general case: If F is any field and G any group, then every G-grading of the algebra of upper triangular matrices over F is isomorphic to a kind we call elementary.

Sumário

Introdução

Sejam F um corpo e $\mathcal{A}$ uma F-álgebra associativa. Uma **identidade polinomial** em $\mathcal{A}$ é um polinômio em variáveis não comutativas com coeficientes em F tal que, substituindo as variáveis por quaisquer elementos de $\mathcal{A}$, obtemos sempre zero como resultado. O polinômio nulo, por exemplo, é uma identidade polinomial em qualquer álgebra, e portanto é chamado de identidade trivial. Um outro exemplo é o polinômio $xy - yx$ que é uma identidade para qualquer álgebra comutativa.

Álgebras que satisfazem alguma identidade polinomial não trivial são chamadas de **PI-álgebras**, e é dessas álgebras que trata a PI-teoria. Numa PI-álgebra, se observarmos o ideal formado por todas as suas identidades polinomiais, podemos perceber que ele é na verdade um **T-ideal**, isto é, um ideal invariante por qualquer endomorfismo da álgebra livre $F\langle X\rangle$, com $X = \{x_1, x_2, \dots\}$. Denotamos então o T-ideal das identidades polinomiais de $\mathcal{A}$ por $\mathrm{Id}(\mathcal{A})$.

Dado um conjunto não vazio $S \subseteq F\langle X\rangle$, chamamos de **variedade** de S e denotamos $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S)$ o conjunto das álgebras tais que se $f \in S$, então f é uma identidade polinomial para estas álgebras. Se tomarmos $S = \mathrm{Id}(\mathcal{A})$, então denotamos $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S)$ simplesmente por $\mathcal{V}(\mathcal{A})$ e dizemos que $\mathcal{V}$ é gerada pela álgebra $\mathcal{A}$. Note que dada uma variedade $\mathcal{V}(S)$ qualquer, existe uma álgebra $\mathcal{A}$ tal que $\mathcal{V}(S) = \mathcal{V}(\mathcal{A})$. De fato, basta tomar $\mathcal{A} = \frac{F\langle X\rangle}{\langle S\rangle_T}$, onde $\langle S\rangle_T$ é o T-ideal gerado por S.

Dizemos que uma álgebra $\mathcal{A}$ é verbalmente prima se, sempre que tomarmos dois T-ideais I_1 e I_2 tais que $I_1 I_2 \subseteq \mathrm{Id}(\mathcal{A})$, tivermos necessariamente que $I_1 \subseteq \mathrm{Id}(\mathcal{A})$ ou $I_2 \subseteq \mathrm{Id}(\mathcal{A})$. Kemer [14] mostrou que, em característica zero, a menos de PI-equivalência, as únicas álgebras verbalmente primas não triviais são $M_n(F)$, $M_n(E)$ e certas subálgebras $M_{r,s}(E) \subseteq M_{r+s}(E)$, onde E é a álgebra de Grassmann de dimensão infinita.

O problema de determinação de $\mathrm{Id}(\mathcal{A})$ é bastante importante em PI-teoria, porém muitas vezes não é um problema fácil. Por exemplo, para $M_n(F)$, onde F é um corpo de característica zero, até o momento só se conhece $\mathrm{Id}(M_2(F))$, o qual foi descrito por Razmyslov [18] e Drensky [4].

Neste contexto, um conceito importante é o de codimensão. Denotando por P_n o espaço dos polinômios multilineares nas n primeiras variáveis, chamamos de n**-ésima codimensão** de $\mathcal{A}$ o inteiro $c_n(\mathcal{A}) = \dim\left(\frac{P_n}{P_n \cap \mathrm{Id}(\mathcal{A})}\right)$. Embora muitas vezes não se possa determinar diretamente $\mathrm{Id}(\mathcal{A})$, o comportamento de $c_n(\mathcal{A})$ nos fornece informações importantes sobre $\mathrm{Id}(\mathcal{A})$. Um teorema de Kemer, feito em [13] exemplifica isso: Se $\mathcal{A}$ é uma álgebra sobre um corpo de característica zero, então $c_n(\mathcal{A})$ é polinomialmente limitada se, e somente se, $\mathrm{Id}(\mathcal{A}) \nsubseteq \mathrm{Id}(UT_2(F))$ e $\mathrm{Id}(\mathcal{A}) \nsubseteq \mathrm{Id}(E)$, onde $UT_2(F)$ é a álgebra das matrizes triangulares superiores 2×2.

A sequência dos $c_n(\mathcal{A})$ é exponencialmente limitada (veja [19]), e portanto, para se entender melhor o comportamento de $\mathrm{Id}(\mathcal{A})$, pode-se olhar também para $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(\mathcal{A})}$ quando este existe. Giambruno e Zaicev mostraram em [7] e [8] que, sob certas hipóteses, tal limite existe e é um inteiro, provando assim a conjectura de Amitsur. O número $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(\mathcal{A})}$ é chamado de **PI-expoente** de $\mathcal{A}$ e denotado por $Exp(A)$.

Se $\mathcal{V}$ é uma variedade, então definimos o PI-expoente de $\mathcal{V}$ por $Exp(\mathcal{A})$, onde $\mathcal{A}$ é uma álgebra tal que $\mathcal{V} = \mathcal{V}(\mathcal{A})$. Dizemos que uma variedade é **minimal de PI-expoente** d se seu PI-expoente é d e qualquer subvariedade própria possui PI-expoente estritamente menor que d. Giambruno e Zaicev mostraram em [9] que, em característica zero, existe uma correspondência entre certas variedades minimais de um dado PI-expoente $d \geq 2$ e as matrizes blocotriangulares $d \times d$, e mostraram também que se uma variedade de uma álgebra finitamente gerada possui PI-expoente $d \geq 2$, esta variedade é minimal de PI-expoente d se e somente se seu T-ideal é produto de T-ideais de variedades verbalmente primas.

Vale ressaltar que a álgebra das matrizes triangulares superiores $n \times n$ sobre F, $UT_n(F)$, é o caso mais simples das matrizes blocotriangulares.

Por outro lado, temos o conceito de álgebra G-graduada. Seja G um grupo, F um corpo e $\mathcal{A}$ uma F-álgebra associativa. Dizemos que a álgebra $\mathcal{A}$ é G**-graduada** se $\mathcal{A}$ se decompõe numa soma de subespaços $\mathcal{A}^{(g)}$ tais que $\mathcal{A} = \oplus_{g\in G}\mathcal{A}^{(g)}$ e $\mathcal{A}^{(g)}\mathcal{A}^{(h)} \subseteq \mathcal{A}^{(gh)}$.

Qualquer álgebra pode ser G-graduada por qualquer grupo numa G-graduação que chamamos de trivial. Basta tomarmos $\mathcal{A}^{(e)} = \mathcal{A}$ e $\mathcal{A}^{(g)} = \{0\}$ para todo $g \neq e$, onde e é o elemento neutro do grupo.

Um exemplo simples de G-graduação não trivial é a G-graduação de $UT_2(F)$ chamada de canônica, onde $UT_2(F)^{(e)} = \mathrm{Span}_F\{E_{11}\} \oplus \mathrm{Span}_F\{E_{22}\}$ e $UT_2(F)^{(g)} = \mathrm{Span}_F\{E_{12}\}$ para algum $g \in G$, onde E_{ij} é a matriz cuja (i, j)-ésima entrada é igual a 1 e todas as outras entradas são zeros. Em [20], Valenti mostrou que esta é, a menos de isomorfismo, a única G-graduação não trivial de $UT_2(F)$.

No caso de $UT_n(F)$, podemos definir as G-graduações elementares como as G-graduações em que, para alguma n-upla $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$, cada matriz elementar E_{ij} pertence a $UT_n(F)^{(g_i^{-1}g_j)}$. Estas G-graduações generalizam a G-graduação canônica e a trivial de $UT_2(F)$, pois estas são exemplos de graduações elementares.

O conhecimento de todas as possíveis G-graduações de certas álgebras tem papel importante na teoria de identidades polinomiais. Vale ressaltar que vários artigos foram publicados recentemente sobre a determinação de todas as G-graduações de certas álgebras, por exemplo [1], [3], [5], [16], [20], [21] e [22].

O problema de determinação de todas as G-graduações de $M_n(F)$ e das álgebras de matrizes blocotriangulares $UT(t_1, \ldots, t_k)$ se mostra então natural e interessante em PI-teoria. Estudaremos nesta dissertação principalmente o caso mais simples e extremamente interessante de matrizes blocotriangulares dado por $UT_n(F)$, a álgebra das matrizes triangulares superiores.

O problema da determinação de todas as possíveis G-graduações de $UT_n(F)$ só foi completamente resolvido em 2007 por Valenti e Zaicev (veja [22]), mas nesta dissertação estudamos também os passos importantes dados em [20] por Valenti com a determinação de todas as possíveis G-graduações de $UT_2(F)$ e em [21] por Valenti e Zaicev onde foram determinadas as G-graduações de $UT_n(F)$ no caso de F algebricamente fechado com característica zero e G abeliano finito.

Para $UT_2(F)$ é possível fazer uma demonstração usando apenas fatos elementares, baseada apenas em propriedades básicas de grupos e G-graduações. Em tal demonstração fica claro que a técnica usada só é viável devido a diminuta dimensão de $UT_2(F)$, e portanto não é razoável aplicá-la no caso geral $UT_n(F)$. Ilustraremos no caso $UT_2(F)$, de maneira mais simples, também as técnicas empregadas em [21] e [22] para a determinação das G-graduações de $UT_n(F)$.

A demonstração feita em [21] usa como ponto chave a dualidade entre G-ações e G-graduações, estabelecida no caso em que F é algebricamente fechado de característica zero e G abeliano finito. Além disso são necessários vários resultados sobre radicais de Jacobson e anuladores.

Por fim, em [22] temos uma demonstração que, ao usar mais resultados sobre certo conjunto de idempotentes ortogonais, não se faz necessário o uso da dualidade entre G-ações e G-graduações. Desta maneira podemos então supor F um corpo e G um grupo quaisquer que ainda conseguimos mostrar a veracidade do mesmo resultado de [21], a saber que, a menos de isomorfismos, as únicas G-graduações de $UT_n(F)$ são elementares.

Faremos então um estudo detalhado destes artigos sobre as G-graduações de $UT_n(F)$, organizando a dissertação em cinco capítulos, sendo os três primeiros sobre resultados básicos necessários nos capítulos seguintes, e os dois últimos focados nas demonstrações dos resultados principais.

Mais precisamente, no Capítulo 1, mostraremos resultados e definições básicas sobre grupos, anéis de grupos, módulos e álgebras.

No Capítulo 2, abordaremos radicais de Jacobson e anuladores, fazendo diversos exemplos que vão ajudar a construir a determinação de todas as G-graduações de $UT_n(F)$, quando F é algebricamente fechado com característica zero e G é abeliano finito.

Já no Capítulo 3, introduziremos álgebras G-graduadas. Falaremos também sobre caracteres de grupos abelianos e mostraremos a dualidade que existe entre G-graduações e G-ações por automorfismos.

As G-graduações de $UT_2(F)$ serão trabalhadas no Capítulo 4, fazendo inicialmente uma demonstração usando apenas fatos básicos sobre grupos e G-graduações, e depois introduziremos técnicas mais elaboradas para provar o mesmo teorema, preparando assim o leitor para as demonstrações do capítulo a seguir.

Finalmente, no Capítulo 5, mostraremos todas as possíveis G-graduações de $UT_n(F)$, passando inicialmente pelo caso em que F é algebricamente fechado de característica zero e G abeliano finito.

A dissertação termina com uma breve e interessante discussão sobre as G-graduações da álgebra de matrizes $M_n(F)$ e da álgebra de matrizes blocotriangulares $UT(t_1, \ldots, t_k)$ sendo que esta última se relaciona intimamente com o estudo das G-graduações de $M_n(F)$ e, em certos casos, também de $UT_n(F)$.

Capítulo 1

Definições básicas

Ao longo deste capítulo faremos várias definições que serão usadas nos capítulos posteriores, mas que, para facilitar a estruturação destes, serão colocadas aqui.

1.1 Ações de grupo

Definição 1 *Uma **ação** de um grupo G sobre um conjunto não vazio S é uma função*

$$\begin{array}{rcl} G \times S & \rightarrow & S \\ (g,s) & \mapsto & g(s) \end{array}$$

tal que para todo $s \in S$ e $g_1, g_2 \in G$ temos $(g_1 g_2)(s) = g_1(g_2(s))$ e $e(s) = s$, onde e denota o elemento neutro de G.

Exemplo 2 *Sejam G um grupo e H um subgrupo de G. Podemos definir uma ação de H sobre G usando a própria operação do grupo:*

$$\begin{array}{rcl} H \times G & \rightarrow & G \\ (h,g) & \mapsto & h(g) = hg. \end{array}$$

1.2 Módulos e álgebras

Definição 3 *Seja R um anel com unidade. Um R-**módulo à esquerda** é um grupo abeliano aditivo M junto com uma função $R \times M \rightarrow M$ (denotaremos a imagem de*

(r, m) por rm) tal que, para quaisquer $r, s \in R$ e $m_1, m_2 \in M$, as seguintes condições são satisfeitas:

1. $r(m_1 + m_2) = rm_1 + rm_2$
2. $(r + s)m_1 = rm_1 + sm_1$
3. $(rs)m_1 = r(sm_1)$
4. $1_R m_1 = m_1$, *onde* 1_R *é a identidade de* R.

Analogamente definimos um ***R-módulo à direita****. Neste texto, a menos de menção em contrário, escreveremos simplesmente R-módulo sempre que trabalharmos com um R-módulo à esquerda.*

Exemplo 4 *Se F é um corpo, então claramente o conceito de F-módulo coincide com a noção de espaço vetorial.*

Exemplo 5 *Seja R um anel com unidade. Dado um ideal à esquerda I de R, uma vez que $RI \subseteq I$ temos que I pode ser visto como um R-módulo (à esquerda).*

Um caso particular bastante interessante é que todo anel R pode ser visto como um R-módulo.

Definição 6 *Sejam R um anel e M um R-módulo à esquerda.*

(1) *Dizemos que M é* ***simples****, ou irredutível, se $M \neq \{0\}$ e M não possui R-submódulos diferentes de $\{0\}$ e M.*

(2) *Dizemos que M é* ***semissimples*** *se todo R-submódulo de M é um somando direto de M, isto é, se N é um submódulo de M, então existe um outro submódulo N' de M tal que $M = N \oplus N'$.*

Os submódulos $\{0\}$ e M de M são chamados **submódulos triviais**.

Note que todo R-módulo simples é também semissimples.

Definição 7 *Dizemos que um anel R é* ***semissimples*** *se R, visto como um R-módulo, é um módulo semissimples.*

Se um subconjunto B do R-módulo M é tal que todo elemento m de M pode ser escrito como combinação linear sobre R de elementos de B, então dizemos que B é um **conjunto gerador de** M. Se o conjunto B é também linearmente independente, então dizemos que B é uma **base de** M. Se um R-módulo possui uma base, dizemos que ele é um R**-módulo livre**.

Teorema 8 *(Teorema 2.4.4 [17]) Sejam R um anel comutativo com unidade e M um R-módulo livre com duas bases finitas $B_1 = \{v_1, \ldots, v_n\}$ e $B_2 = \{w_1, \ldots, w_m\}$. Então $n = m$.*

Se R é um anel comutativo com unidade e M é um R-módulo livre com uma base finita, chamamos então o número de elementos de qualquer base de M de **posto** de M.

Definição 9 *Sejam M e N dois R-módulos. Uma função $f : M \to N$ é dita um **homomorfismo de R-módulos** ou um R**-homomorfismo** se, para quaisquer $m_1, m_2 \in M$ e $r \in R$, temos*

$$f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2) \text{ e } f(rm_1) = rf(m_1).$$

*Se f é também biunívoca, dizemos então que f é um **isomorfismo de R-módulos** ou um R**-isomorfismo**. Neste caso, dizemos que M e N são R**-módulos isomorfos**.*

Definição 10 *Sejam R um anel com unidade e M um R-módulo. Dizemos que M satisfaz a **condição descendente de cadeia**, ou é um **módulo artiniano**, se para toda cadeia de submódulos de M*

$$M_1 \supseteq M_2 \supseteq \cdots \supseteq M_n \supseteq \ldots$$

existe um inteiro m tal que $M_i = M_m$ para todo $i \geq m$.

*Um anel R é dito **artiniano à esquerda** se ele, visto como um R-módulo à esquerda, é um módulo artiniano.*

Definição 11 *Sejam R um anel com unidade e M um R-módulo. Dizemos que M satisfaz a **condição ascendente de cadeia**, ou é um **módulo noetheriano**, se para toda cadeia de submódulos de M*

$$M_1 \subseteq M_2 \subseteq \cdots \subseteq M_n \subseteq \ldots$$

existe um inteiro m tal que $M_i = M_m$ para todo $i \geq m$.

*Um anel R é dito **noetheriano à esquerda** se ele, visto como um R-módulo à esquerda, é um módulo noetheriano.*

Definição 12 *Seja R um anel comutativo com unidade. Uma R-**álgebra unitária** $\mathcal{A}$ é um anel com unidade tal que*

1. *$(\mathcal{A}, +)$ é um R-módulo*
2. *$r(ab) = (ra)b = a(rb)$, para todo $r \in R$ e $a, b \in \mathcal{A}$.*

Nesta dissertação trabalharemos apenas com álgebras unitárias, e portanto as chamaremos simplesmente de **álgebras**.

No caso em que R é um domínio de integridade, a álgebra $\mathcal{A}$ é também um espaço vetorial sobre R. Quando isto ocorre, definimos a dimensão de $\mathcal{A}$ como a dimensão deste espaço vetorial.

Toda álgebra $\mathcal{A}$ de dimensão finita é um anel artiniano e noetheriano. De fato, uma vez dados dois ideais de $\mathcal{A}$, I e J, se $I \subsetneq J$, então $\dim(I) < \dim(J)$, temos assim que qualquer cadeia de ideais neste anel só pode ter uma quantidade finita de ideais distintos.

Exemplo 13 *Seja F um corpo. O conjunto $M_n(F)$ das matrizes $n \times n$ sobre F, assim como o conjunto $UT_n(F)$ das matrizes triangulares superiores sobre F, com as operações usuais são exemplos de F-álgebras. Mais geralmente, sejam $t_1, \ldots, t_k$ inteiros positivos. Tomando $n = t_1 + \cdots + t_k$ considere o conjunto $UT(t_1, \ldots, t_k)$ dado pelas matrizes de $M_n(F)$ da forma*

$$\begin{pmatrix} A_1 & & * \\ & \ddots & \\ 0 & & A_k \end{pmatrix}$$

*onde, para $i = 1, \ldots, k$, A_i é uma matriz $t_i \times t_i$ sobre F. É claro que $UT(t_1, \ldots, t_k)$ é uma subálgebra de $M_n(F)$ denominada a **álgebra das matrizes blocotriangulares**.*

Note que no caso em que $t_i = 1$, para $i = 1, \ldots, k$, temos a álgebra das matrizes triangulares superiores. Já no caso trivial em que $k = 1$ temos a álgebra das matrizes $M_n(F)$.

Definição 14 *Seja f uma aplicação entre duas R-álgebras $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$. Se f é um homomorfismo de R-módulos e também um homomorfismo de anéis, então dizemos que f é um **homomorfismo de R-álgebras**. Se f é também bijetivo, dizemos que f é um **isomorfismo de R-álgebras**. Neste caso dizemos que $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são R-**álgebras isomorfas**.*

1.3 Anéis de grupo

Definição 15 *Sejam G um grupo e R um anel com unidade. Definimos o conjunto RG como o conjunto de todas as combinações lineares formais*

$$\alpha = \sum_{g \in G} a_g g$$

onde $a_g \in R$, $g \in G$ e $a_g \neq 0$ apenas para uma quantidade finita de elementos de G.

Dados dois elementos de RG, $\alpha = \sum_{g \in G} a_g g$ e $\beta = \sum_{g \in G} b_g g$, podemos definir as seguintes operações:

$$\alpha + \beta = \sum_{g \in G} (a_g + b_g) g$$

$$\alpha\beta = \sum_{g,h \in G} (a_g b_h) gh.$$

É fácil verificar que com estas operações RG é um anel com unidade, e sua unidade é dada por $1_R e$ onde 1_R é a unidade de R e e é o elemento neutro do grupo.

*RG com estas duas operações é chamado de **anel de grupo de** G **sobre** R.*

Podemos notar que RG pode ser visto como um R-módulo, basta tomar, para cada $r \in R$ e $\alpha \in RG$, $r\alpha = (re)\alpha$.

Observação 16 *Seja RG um anel de grupo. Existe uma ação natural do grupo G sobre RG, basta tomar, para cada $\alpha = \sum_{h \in G} a_h h \in RG$,*

$$\begin{array}{rcl} G \times RG & \to & RG \\ (g, \alpha) & \mapsto & g(\alpha) = \sum_{h \in G} a_h gh. \end{array}$$

Definição 17 *Sejam F um corpo, G um grupo, FG o anel de grupo de G sobre R e $\mathcal{A}$ uma F-álgebra. Uma **ação do anel de grupo** FG **sobre** $\mathcal{A}$ é uma aplicação*

$$\begin{array}{rcl} FG \times \mathcal{A} & \to & \mathcal{A} \\ (\alpha, a) & \mapsto & \alpha(a). \end{array}$$

tal que, para todo $a \in \mathcal{A}$, $\alpha, \beta \in FG$, $\alpha(\beta a) = (\alpha\beta)a$ e $(\alpha + \beta)(a) = \alpha(a) + \beta(a)$.

Observação 18 *Seja F um corpo. Dada uma ação de um grupo G sobre uma F-álgebra $\mathcal{A}$, podemos estendê-la para uma ação de FG sobre $\mathcal{A}$. Para isto, se a ação de G sobre $\mathcal{A}$ é dada por*

$$\begin{array}{rcl} G \times \mathcal{A} & \to & \mathcal{A} \\ (g, a) & \mapsto & g(a), \end{array}$$

basta tomarmos

$$\begin{array}{rcl} FG \times \mathcal{A} & \to & \mathcal{A} \\ (\sum_{g \in G} \alpha_g g, a) & \mapsto & \sum_{g \in G} \alpha_g g(a) \end{array}$$

e trivialmente esta é uma ação do anel de grupo FG sobre $\mathcal{A}$.

1.4 Matrizes elementares

Definiremos agora o conceito de matriz elementar que nos será útil em alguns resultados. Precisamos também definir as matrizes elementares usuais para podermos definir o conceito de G-graduação elementar.

Definição 19 *Em $M_n(F)$, se existem matrizes não nulas a_{ij}, $1 \leq i, j \leq n$ tais que*

$$a_{i_1 j_1} a_{i_2 j_2} = \delta_{j_1 i_2} a_{i_1 j_2}.$$

então chamamos o conjunto $\{a_{ij} | 1 \leq i, j \leq n\}$ de um ***conjunto de matrizes elementares****.*

As matrizes elementares E_{ij}, que possuem a (i, j)-ésima entrada igual a 1 e todas as outras entradas iguais a zero, serão denominadas ***matrizes elementares usuais****.*

De maneira análoga, em $UT_n(F)$, podemos definir matrizes elementares a_{ij}, onde $1 \leq i \leq j \leq n$. As matrizes E_{ij} com $1 \leq i \leq j \leq n$ serão nossas matrizes elementares usuais neste caso.

Exemplo 20 *Em $UT_2(F)$, as matrizes*

$$a_{11} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \; a_{22} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \text{ e } a_{12} = \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

são matrizes elementares não usuais.

Chamemos a atenção para o fato de que qualquer conjunto de matrizes elementares é uma base de $M_n(F)$. De fato, se $0 = \sum \alpha_{ij} a_{ij}$, onde esta soma é sobre todos os $1 \leq i, j \leq n$ com $\alpha_{ij} \in F$, então multiplicando os dois lados da igualdade à esquerda por $a_{i_0 i_0}$ e à direita por $a_{j_0 j_0}$ obtemos $\alpha_{i_0, j_0} a_{i_0, j_0} = 0$ e portanto $\alpha_{i,j} = 0$ para todo $1 \leq i, j, \leq n$, o que implica que as matrizes a_{ij} são linearmente independentes. Como são n^2 matrizes linearmente independentes, tal conjunto é uma base.

Observação 21 *Em $M_n(F)$, existe um isomorfismo de álgebras que leva qualquer conjunto de matrizes elementares no conjunto das matrizes elementares usuais, basta tomar*

$$\begin{array}{rccc} \phi : & \{\textit{matrizes elementares}\} & \rightarrow & \{\textit{matrizes elementares usuais}\} \\ & a_{ij} & \mapsto & E_{ij} \end{array}$$

e estender ϕ F-linearmente para $M_n(F)$. Como ele leva base em base e o conjunto das matrizes a_{ij} bem como o das matrizes E_{ij} são conjuntos de matrizes elementares, então ϕ é claramente um isomorfismo de álgebras.

Argumentos análogos mostram que também em $UT_n(F)$ qualquer conjunto de matrizes elementares é uma base, e que sempre existe um isomorfismo de álgebras que leva um conjunto de matrizes elementares no conjunto das matrizes elementares usuais de $UT_n(F)$.

Capítulo 2

Radical de Jacobson e anuladores

2.1 Radical de Jacobson

Em teoria de anéis, o radical de Jacobson é uma ferramenta importantíssima. Veremos neste capítulo que, sob certas condições, tanto o radical de Jacobson quanto os anuladores de alguns conjuntos são invariantes por automorfismos, fato que será incrivelmente útil quando tivermos o Teorema 73.

Definição 22 *Seja R um anel com unidade. O **radical de Jacobson** de R, denotado por $J(R)$, é o ideal (à esquerda) dado pela interseção de todos os ideais à esquerda maximais de R.*

Note que nossa definição depende da existência de ideais à esquerda maximais, mas como R é um anel com unidade, o lema de Zorn nos garante a existência de um ideal à esquerda maximal.

Embora esta definição seja feita usando os ideais à esquerda, mostraremos mais à frente que o radical de Jacobson "à direita" coincide com o radical "à esquerda", e portanto o chamaremos apenas de radical de Jacobson.

Para o próximo lema precisamos da seguinte definição:

Definição 23 *Sejam R um anel com unidade e M um R-módulo. O anulador de M é o subconjunto de R*

$$\operatorname{ann}(M) = \{r \in R \,|\, rm = 0 \text{ para todo } m \in M\}.$$

Observe que, como M é um R-módulo, então $\text{ann}(M)$ é um ideal bilateral de R.

Lema 24 *Seja R um anel com unidade. São equivalentes:*

(1) $y \in J(R)$;

(2) $1 - xy$ *é invertível à esquerda para todo* $x \in R$*;*

(3) $yM = 0$ *para todo* R*-módulo à esquerda simples* M*;*

(4) $y \in \bigcap \text{ann}(M)$ *onde esta interseção é sobre todos os módulos simples* M*;*

(5) $1 - xyz$ *é invertível para quaisquer* $x, z \in R$.

Antes de iniciar a demonstração, observe que a condição (4) nos dá que o radical de Jacobson é na verdade um ideal bilateral de R, pois $\text{ann}(M)$ é um ideal bilateral para qualquer M. A condição (5), por outro lado, não distingue à direita ou à esquerda, e assim, de maneira análoga poderíamos mostrar que o radical de Jacobson "à direita" também a satisfaz.

Demonstração: (1) $\Rightarrow$ (2) Se $y \in J(R)$ mas $1 - xy$ não é invertível à esquerda, então $1 \notin R(1 - xy)$ e portanto $R(1 - xy)$ está contido num ideal maximal de R, digamos I. Logo $y \in I$ e $1 - xy \in I$ de onde temos que $1 \in I$, um absurdo.

(2) $\Rightarrow$ (3) Se $ym \neq 0$ para algum $m \in M$ com M simples, então Rym é um submódulo não nulo de M e portanto o próprio M. Logo existe $x \in R$ tal que $m = xym$ e portanto $(1 - xy)m = 0$. Como $1 - xy$ é invertível à esquerda temos $m = 0$, um absurdo.

(3) $\Rightarrow$ (1) Dado I um ideal maximal de R, R/I é um R-módulo à esquerda simples. Temos então que $y(R/I) = 0$, e portanto $y \in I$, ou seja, y pertence a todos os ideais maximais e é assim um elemento do radical de Jacobson.

(3) $\Leftrightarrow$ (4) Sai direto da definição de anulador.

(1) e (2) $\Rightarrow$ (5) Se $y \in J(R)$ e $x, z \in R$, então $yz \in J(R)$ e portanto por (2) existe u tal que $u(1 - xyz) = 1$. Como $J(R)$ é um ideal bilateral, temos então que $xyz \in J(R)$ e assim $u = 1 + u(xyz)$ é também invertível à esquerda. Uma vez que o inverso à direita de u é $1 - xyz$, temos pela unicidade do inverso que $(1 - xyz)u = 1$.

(5) $\Rightarrow$ (2) Basta tomar $z = 1$.

$\square$

Definição 25 *Seja R um anel.*

(1) Um elemento $e \in R$ não nulo é dito ***idempotente*** *se $e^2 = e$.*

(2) Um elemento $r \in R$ é dito ***nilpotente*** *se $r^n = 0$ para algum n natural.*

(3) Dizemos que um ideal I é ***nilpotente*** *se $I^n = 0$ para algum n natural.*

(4) Dizemos que um ideal I é ***nil*** *se para todo $a \in I$, existe n (que depende de a) tal que $a^n = 0$.*

Existe uma ligação interessante entre o radical de Jacobson e elementos nilpotentes que mostraremos nos próximos resultados.

Lema 26 *Seja R um anel com unidade. Se I é um ideal à esquerda (ou à direita) nil de R, então $I \subseteq J(R)$.*

Demonstração: Se $y \in I$ e $x \in R$, então $xy \in I$ é nilpotente, ou seja, $(xy)^n = 0$. Assim

$$(1 - xy)(1 + xy + \cdots + (xy)^{n-1}) = (1 + xy + \cdots + (xy)^{n-1})(1 - xy) = 1$$

e portanto pelo item (2) do lema anterior temos que $y \in J(R)$.

A prova no caso à direita é análoga. Basta usar a propriedade (5) do lema anterior. $\square$

Proposição 27 *Se R é um anel artiniano com unidade, então $J(R)$ é o maior ideal à esquerda nilpotente de R.*

Demonstração: Dado o lema anterior, basta mostrar que $J := J(R)$ é um ideal nilpotente.

Temos

$$J \supseteq J^2 \supseteq J^3 \supseteq ...$$

é uma cadeia descendente de ideais, e portanto estaciona. Seja $J^k = I$ então o termo onde a sequência estabiliza.

Se $I \neq 0$, então $I^2 = I \neq 0$, e então podemos tomar um ideal à esquerda minimal A tal que $IA \neq 0$, que existe pois R é artiniano. Seja então $a \in A$ tal que $Ia \neq 0$,

$$I(Ia) = I^2 a = Ia \neq 0.$$

Pela minimalidade de A, temos $Ia = A$, e assim $a = ya$ para algum $y \in I$. Portanto $(1-y)a = 0$ e como $1-y$ é invertível (pois $y \in J = J(R)$) temos $a = 0$, um absurdo.

Logo $I = 0$, e portanto J é nilpotente. □

Uma aplicação muito útil desta proposição nesta dissertação é o seguinte corolário que será usado aqui por repetidas vezes.

Corolário 28 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de dimensão finita, então $J(\mathcal{A})$ é o maior ideal nilpotente de $\mathcal{A}$.*

Embora o resultado a seguir seja verdadeiro para qualquer anel, usaremos a Proposição 27 para fazer uma demonstração simples no caso que nos interessa.

Corolário 29 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de dimensão finita. Então $J(\mathcal{A}/J(\mathcal{A})) = \{0\}$.*

Demonstração: Tomando uma classe $a+J(\mathcal{A})$ em $\mathcal{A}/J(\mathcal{A})$, $a+J(\mathcal{A}) \in J(\mathcal{A}/J(\mathcal{A}))$ se e somente se $(a+J(\mathcal{A}))^k \in J(\mathcal{A})$ para algum k, ou seja, se $a^k \in J(\mathcal{A})$, mas neste caso temos a^k nilpotente, e portanto a nilpotente, o que implica $a+J(\mathcal{A}) = 0+J(\mathcal{A})$.

□

Visto que trabalharemos bastante com a álgebra $UT_n(F)$, é importante conhecer seu radical de Jacobson.

Exemplo 30 *Seja $UT_n(F)$ a álgebra das matrizes triangulares superiores sobre um corpo F. Então $J(UT_n(F))$ é o ideal das matrizes triangulares estritamente superiores. De fato, se uma matriz de $UT_n(F)$ possui alguma entrada diagonal não nula igual a α_{ii}, seu quadrado possui a mesma entrada igual a $\alpha_{ii}^2 \neq 0$. De maneira análoga, sua n-ésima potência possui tal entrada igual a α_{ii}^n e portanto tal matriz não pode ser nilpotente e assim não pertence a $J(UT_n(F))$.*

Por outro lado, se uma matriz A é triangular estritamente superior, então ela é da forma

$$A = \sum_{1 \leq i < j \leq n} \alpha_{ij} E_{ij} = \sum_{2 \leq i+1 \leq j \leq n} \alpha_{ij} E_{ij}$$

onde $\alpha_{ij} \in F$. Uma vez que $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$, como temos $j \geq i+1$ e $l \geq k+1$, se $j = k$ ocorre $l \geq i+2$, e assim

$$A^2 = \sum_{3 \leq i+2 \leq j \leq n} \beta_{ij} E_{ij}$$

onde $\beta_{ij} = \sum_{i+1 \leq k \leq j-1} \alpha_{ik}\alpha_{kj}$. *Analogamente obtemos*

$$A^m = \sum_{m+1 \leq i+m \leq j \leq n} \gamma_{ij} E_{ij}$$

para alguns $\gamma_{ij} \in F$, e portanto para $m \geq n$ temos $A^m = 0$.

Exemplo 31 *Sejam A e B duas matrizes de $UT_n(F)$. Então $[A,B] = AB - BA$ é nilpotente.*

Representando as (i,j)-ésimas entradas de A, B e $[A,B]$ por a_{ij}, b_{ij} e c_{ij} respectivamente, temos $c_{ii} = a_{ii}b_{ii} - b_{ii}a_{ii} = 0$ para $i = 1, \ldots, n$. Assim, $[A,B]$ possui todas as entradas diagonais iguais a zero, e portanto é uma matriz triangular superior. Pelo exemplo anterior concluímos que $[A,B]$ é nilpotente.

Podemos assim notar que, para quaisquer $A, B \in UT_n(F)$, uma vez que $[A,B]$ é nilpotente, então $[A,B] \in J(UT_n(F))$. Concluímos então que $[A_1,B_1]\cdots[A_n,B_n] = 0$ para quaisquer $A_1, \ldots, A_n, B_1, \ldots B_n \in UT_n(F)$.

Uma propriedade importante envolvendo radical de Jacobson é a seguinte.

Lema 32 *Seja $\mathcal{A}$ uma álgebra de dimensão finita tal que $\mathcal{A}$ pode ser decomposta como uma soma direta, $\mathcal{A} = \mathcal{B} \oplus \mathcal{C}$, de dois ideais $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$. Então $J(\mathcal{A}) = J(\mathcal{B}) \oplus J(\mathcal{C})$.*

Demonstração: Pela soma direta, todo elemento $a \in \mathcal{A}$ se escreve de modo único na forma $a = b + c$ com $b \in \mathcal{B}$ e $c \in \mathcal{C}$. Uma vez que $\mathcal{B}$ e $\mathcal{C}$ são ortogonais temos $a^n = b^n + c^n$ para todo $n \in \mathbb{N}$. Assim $\mathcal{A}$ é nilpotente de índice m se, e somente se, b e c o forem. Portanto, como $\mathcal{A}$ tem dimensão finita segue do Corolário 28 que $a \in J(\mathcal{A})$ se, e somente se, $b \in J(\mathcal{B})$ e $c \in J(\mathcal{C})$ e assim $J(\mathcal{A}) = J(\mathcal{B}) \oplus J(\mathcal{C})$. $\square$

O lema a seguir será muito importante nesta dissertação. Sua utilidade porém só se tornará evidente ao final do Capítulo 3.

Lema 33 *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas álgebras de dimensão finita, $J_{\mathcal{A}} := J(\mathcal{A})$ e $J_B := J(B)$ seus respectivos radicais de Jacobson e ϕ um homomorfismo de álgebras de $\mathcal{A}$ em $\mathcal{B}$. Então $\phi(J_{\mathcal{A}}) \subseteq J_{\mathcal{B}}$. Se ϕ é um isomorfismo, então $\phi(J_{\mathcal{A}}) = J_{\mathcal{B}}$.*

Demonstração: Como o radical de Jacobson é o maior ideal nilpotente de uma álgebra de dimensão finita, temos que, dado $a \in J_{\mathcal{A}}$ existe n tal que, $a^n = 0$ e portanto $[\phi(a)]^n = \phi(a^n) = \phi(0) = 0$ e assim $\phi(a)$ é também um elemento nilpotente, e portanto pertence a $J_{\mathcal{B}}$. Assim $\phi(J_{\mathcal{A}}) \subseteq J_{\mathcal{B}}$. Se ϕ é um automorfismo, então de modo análogo provamos que $J_{\mathcal{B}} \subseteq \phi(J_{\mathcal{A}})$ e portanto $\phi(J_{\mathcal{A}}) = J_{\mathcal{B}}$. □

2.2 Radical de Jacobson e semissimplicidade

Módulos e anéis semissimples possuem propriedades bastante interessantes, porém não os estudaremos a fundo aqui. Enunciaremos apenas alguns resultados que serão importantes para esta dissertação, sendo que o último relaciona diretamente semissimplicidade com o radical de Jacobson.

Teorema 34 *(Teoremas 2.5.7, 2.5.11 e 2.6.9 [17]) Se R é um anel semissimples com unidade, então R pode ser escrito como $R = W_1 \oplus \cdots \oplus W_n$ onde W_i, $i = 1, \ldots, n$, são ideais à esquerda minimais de R. Além disso, $1 = e_1 + \cdots + e_n$ onde $e_i \in W_i$, e os e_i's são idempotentes ortogonais não nulos tais que $W_i = Re_i$, $i = 1, \ldots, n$.*

Dada uma decomposição deste tipo, e tomando qualquer W_i como acima, temos que a soma de todos os ideais à esquerda isomorfos a W_i é um ideal bilateral minimal. Podemos então reordenar os ideais à esquerda e renomear seus índices agrupando os ideais isomorfos de forma que

$$R = \underbrace{W_{11} \oplus \cdots \oplus W_{1s_1}}_{U_1} \oplus \underbrace{W_{21} \oplus \cdots \oplus W_{2s_2}}_{U_2} \oplus \cdots \oplus \underbrace{W_{r1} \oplus \ldots W_{rs_r}}_{U_r}$$

onde $s_1 + \cdots + s_r = n$, e $W_{ij} \cong W_{kl}$ se $i = k$, e $W_{ij} \ncong W_{kl}$ se $i \neq k$.

*Desta maneira escrevemos $R = U_1 \oplus \cdots \oplus U_r$ como uma soma direta de ideais bilaterais minimais de R. Os U_i's são chamados de **componentes homogêneas de** R. Neste caso, obtemos idempotentes ortogonais $f_i \in U_i$ que também satisfazem $1 = f_1 + \cdots + f_r$, $U_i = Rf_i$ e além disso são centrais.*

Vale destacar que, uma vez que cada U_i é gerado pelo idempotente f_i, se $u_i \in U_i$, temos que existe $r \in R$ tal que $u_i = rf_i$ e assim $u_i = rf_i = rf_i^2 = u_i f_i$, ou seja, f_i funciona como uma unidade em U_i.

Teorema 35 *(Teorema de Wedderburn-Artin)(Teorema 2.6.8 [17]) Seja R um anel semissimples. Então $R \cong M_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_r}(D_r)$ onde $M_{n_i}(D_i)$ é o anel das matrizes $n_i \times n_i$ sobre o anel de divisão D_i. O número r, bem como os pares $(n_1, D_1), \ldots, (n_r, D_r)$ são, a menos de permutação, unicamente determinados.*

Teorema 36 *(Teorema de Maschke) (Teorema 3.4.7 [17]) Sejam G um grupo e R um anel com unidade. O anel de grupo RG é semissimples se, e somente se, as seguintes condições ocorrem:*

1. *R é um anel semissimples*
2. *G é finito*
3. *$|G|$ é invertível em R.*

Corolário 37 *Se F é um corpo de característica zero e G é um grupo finito, então FG é semissimples.*

Teorema 38 *(Teorema 4.14 [15]) Seja R um anel com unidade. São equivalentes:*

(1) R é semissimples,

(2) $J(R) = 0$ e R é artiniano à esquerda.

2.3 Anuladores

Definição 39 *Dada uma álgebra $\mathcal{A}$ e um subconjunto $B \subseteq \mathcal{A}$ definimos o **anulador à esquerda** de B em $\mathcal{A}$ como*

$$\mathrm{Ann}_e(B) = \{a \in \mathcal{A} \,|\, ab = 0 \text{ para todo } b \in B\}.$$

*Analogamente podemos definir o **anulador à direita** de B em $\mathcal{A}$, denotado por $\mathrm{Ann}_d(B)$. Definimos também o **anulador bilateral** de B em $\mathcal{A}$ como a interseção dos anuladores à direita e à esquerda, e este denotamos por $\mathrm{Ann}(B)$.*

Mostraremos agora alguns exemplos e resultados que nos serão úteis posteriormente.

Exemplo 40 *Seja*

$$\mathcal{A} = \begin{pmatrix} F & F & \dots & F & 0 \\ 0 & F & \dots & F & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & F & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & F \end{pmatrix} = \underbrace{\begin{pmatrix} F & F & \dots & F & 0 \\ 0 & F & \dots & F & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \ddots & \ddots & F & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{UT_{n-1}(F)} \oplus \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & F \end{pmatrix}}_{C'}.$$

Então $\mathrm{Ann}(J(UT_{n-1}(F))) = \mathrm{Span}_F\{E_{nn}, E_{1,n-1}\}$ *e* $\mathrm{Ann}(C') = UT_{n-1}(F)$.

Antes de iniciar a demonstração, chamemos a atenção para o abuso de notação cometido ao chamar uma das subálgebras de $UT_{n-1}(F)$. Tal subálgebra é na verdade isomorfa a $UT_{n-1}(F)$ através do isomorfismo definido por

$$\phi : \underbrace{UT_{n-1}(F)}_{\subseteq \mathcal{A}} \to UT_{n-1}(F)$$

$$\begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \alpha_{1,n-1} & 0 \\ 0 & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \alpha_{n-1,n-1} & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \alpha_{11} & \dots & \dots & \alpha_{1,n-1} \\ 0 & \ddots & \ddots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & \alpha_{n-1,n-1} \end{pmatrix}.$$

Demonstração: Já mostramos que $J(UT_{n-1}(F)) = \mathrm{Span}_F\{E_{ij} \mid i \leq i < j \leq n-1\}$. Claramente $E_{nn}, E_{1,n-1} \in \mathrm{Ann}(J(UT_{n-1}(F)))$. Se $A \notin \mathrm{Span}_F\{E_{nn}, E_{1,n-1}\}$, então existem $1 \leq i_0 \leq j_0 \leq n-1$ com $(i_0, j_0) \neq (1, n-1)$ tais que a (i,j)-ésima entrada α_{i_0,j_0} é diferente de zero. Temos então que

- Se $j_0 \neq n-1$, então observando que $\alpha_{i_0j_0}E_{i_0j_0}E_{j_0,j_0+1} = \alpha_{i_0,j_0}E_{i_0,j_0+1}$, e que esta é a (i_0, j_0+1)-ésima entrada de AE_{j_0,j_0+1} concluímos que $AE_{j_0,j_0+1} \neq 0$, e, portanto, não está no anulador de $UT_{n-1}(F)$.
- Se $j_0 = n-1$ e $i_0 \neq 1$, então $E_{i_0-1,i_0}\alpha_{i_0j_0}E_{i_0j_0} = \alpha_{i_0j_0}E_{i_0-1j_0}$ e esta é a (i_0-1, j_0)-ésima entrada de $E_{i_0-1,i_0}A$, e assim A não está no anulador de $UT_{n-1}(F)$.

Portanto, $\mathrm{Ann}(J(UT_{n-1}(F))) = \mathrm{Span}_F\{E_{nn}, E_{1,n-1}\}$.

Determinar o anulador de C' é fácil, pois todo elemento de C' é múltiplo de E_{nn}.

Uma vez que $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$, e $UT_{n-1}(F) = \mathrm{Span}_F\{E_{ij} \,|\, 1 \leq i \leq j \leq n-1\}$ obtemos que todos os geradores de $UT_{n-1}(F)$ pertencem a $\mathrm{Ann}(C')$, e assim

$$UT_{n-1}(F) \subseteq \mathrm{Ann}(C').$$

Um elemento não nulo de C' é da forma αE_{nn} com $0 \neq \alpha \in F$, e então $(\alpha E_{nn})^2 = \alpha^2 E_{nn} \neq 0$. Portanto

$$C' \cap \mathrm{Ann}(C') = \{0\}.$$

Concluímos então que

$$\mathrm{Ann}(C') = UT_{n-1}(F).$$

□

Lema 41 *Seja* $W \subseteq UT_n(F)$, $W = \mathrm{Span}_F\{E_{1n}, \ldots, E_{n-1,n}\}$ *e denote* $J = J(UT_n(F))$ *o radical de Jacobson de* $UT_n(F)$. *Então* W *é o anulador à esquerda de* J *em* J, *isto é,* $W = \mathrm{Ann}_e(J) \cap J$.

Demonstração: Claramente $W \subseteq J$. Uma vez que $J = \mathrm{Span}_F\{E_{ij} | 1 \leq i < j \leq n\}$, nesses geradores $i < n$ e portanto $E_{kn}E_{ij} = 0$, o que implica W está contido no anulador à esquerda de J.

Se $A \in J$ mas $A \notin W$, então A possui alguma entrada não nula, $a_{i_0 j_0} = \alpha$ com $j_0 \neq n$, $i_0 < j_0$. Tomando então $E_{j_0 n} \in J$ obtemos que $AE_{j_0 n}$ possui a (i_0, n)-ésima entrada igual a α, e portanto não nula. Logo A não pertence ao anulador de J. □

Dada uma álgebra $\mathcal{A}$ denote por $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$ o conjunto dos automorfismos de $\mathcal{A}$. Temos então o seguinte resultado.

Lema 42 *Sejam* $\mathcal{A}$ *uma álgebra e* B *um supespaço desta álgebra invariante por qualquer elemento de* $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$. *Então* $\mathrm{Ann}_e(B)$, $\mathrm{Ann}_d(B)$, $\mathrm{Ann}_e(B) \cap B$ *e* $\mathrm{Ann}(B)$ *são também invariantes por todos os elementos de* $\mathrm{Aut}(\mathcal{A})$.

Demonstração: Denote por $C = \mathrm{Ann}_e(B)$.

Dados um automorfismo de álgebras $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{A}$, e elementos $b \in B$ e $c \in C$, existe $b' \in B$ tal que $b = \phi(b')$. Temos então $0 = \phi(0) = \phi(cb') = \phi(c)\phi(b') = \phi(c)b$. Portanto $\phi(c)$ anula qualquer elemento de B. Logo $\phi(C) \subseteq \mathrm{Ann}_e(B) = C$, e como

ϕ é um automorfismo de álgebras, considerando agora a inversa de ϕ obtemos a inclusão contrária e consequentemente que $\phi(C) = C$.

Analogamente demonstramos que $\mathrm{Ann}(B)$ e $\mathrm{Ann}_d(B)$ são invariantes.

Agora, como $\phi(C) = C$ e $\phi(B) = B$, então claramente $\phi(C \cap B) = C \cap B$. $\square$

Como consequência dos Lemas 33 e 42 temos o seguinte resultado.

Corolário 43 *Denote por J o radical de Jacobson de $UT_n(F)$. Então J, $\mathrm{Ann}_e(J)$ e $W = \mathrm{Ann}_e(J) \cap J$ são invariantes por todos os automorfismos de $UT_n(F)$.*

Capítulo 3

G-Graduações e caracteres

Mostraremos ao final deste capítulo a dualidade que existe, sob certas hipóteses, entre G-graduações e G-ações. Para isto, antes precisaremos de vários resultados sobre representações e caracteres.

3.1 Representações e caracteres

Definição 44 *Sejam G um grupo, R um anel comutativo com unidade e V um R-módulo de posto finito. Uma* ***representação*** *de G sobre R com espaço de representação V é um homomorfismo de grupos $\rho : G \to GL(V)$, onde $GL(V)$ é o grupo dos R-automorfismos de V. O* ***grau da representação*** *ρ é o posto de V.*

Denotando por $GL(n, R)$ o grupo das matrizes invertíveis $n \times n$ com entradas em R, chamaremos de uma ***representação matricial*** *de G sobre R de grau n um homomorfismo de grupos $\rho : G \to GL(n, R)$.*

Se temos uma base do R-módulo V, podemos definir um isomorfismo $\phi : GL(V) \to GL(n, R)$ que leva cada automorfismo de V na matriz correspondente na base dada. Desta forma, se $\rho : G \to GL(V)$ é uma representação, então $\phi \circ \rho$ é um homomorfismo de G em $GL(n, R)$, e portanto uma representação matricial. De maneira análoga, se $\rho' : G \to GL(n, R)$ é uma representação matricial, então $\phi^{-1} \circ \rho'$ é uma representação de G sobre R. Vemos então que não se faz necessário distinguir representações e representações matriciais.

Um conceito importante ao trabalhar com matrizes é o de **traço**. Lembramos ao leitor que o traço de uma matriz é a soma de suas entradas na diagonal principal e que não é difícil verificar que se A e B são duas matrizes, então $\mathrm{tr}(AB) = \mathrm{tr}(BA)$. Segue imediatamente que se U é uma matriz invertível então $\mathrm{tr}(U^{-1}AU) = \mathrm{tr}(A)$, ou seja, os traços de duas matrizes conjugadas são iguais. Desta forma, faz sentido definir o traço de uma transformação linear qualquer de um espaço vetorial de dimensão finita como o traço da matriz associada a ela.

Definição 45 *Sejam G um grupo e V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo F. Seja $\rho : G \to GL(V)$ uma representação de G sobre F. Então o* ***caracter*** *χ da representação ρ é a aplicação*

$$\begin{array}{rll} \chi : & G & \to F \\ & g & \mapsto \mathrm{tr}(\rho(g)). \end{array}$$

Uma representação de grau 1 é dita uma **representação linear**. Da mesma forma, um caracter de uma representação de grau 1 é chamado de **caracter linear**.

Existe uma correspondência muito importante entre módulos e representações, como apresentado na proposição a seguir.

Proposição 46 *Sejam G um grupo e R um anel comutativo com unidade. Existe uma correspondência biunívoca entre as representações de um grupo G sobre um anel R e os RG-módulos que são livres de posto finito sobre R.*

Demonstração: Se $\rho : G \to GL(V)$ é uma representação, associamos a ela o RG-módulo construído a partir de V mantendo a soma e definindo o produto de um elemento x de V por um escalar $\alpha = \sum_{g \in G} a_g g \in RG$ como

$$\alpha x = \sum_{g \in G} a_g \rho_g(x)$$

onde ρ_g é a imagem de g pela representação ρ.

Se M é um RG-módulo de posto finito sobre R, podemos definir uma representação associando a cada elemento $g \in G$ o homomorfismo $\rho_g : M \to M$ dado por $\rho_g(m) = gm$ para todo $m \in M$.

Claramente estes processos são inversos um do outro, e portanto temos a correspondência biunívoca desejada. $\square$

Através desta correspondência chamamos uma representação de **representação irredutível** se ela corresponde a um módulo irredutível, e neste caso dizemos também que seu caracter é um **caracter irredutível**.

Um resultado interessante sobre caracteres lineares é o seguinte:

Lema 47 *Seja G um grupo. O conjunto dos caracteres lineares de G é um grupo com a multiplicação definida por $(\chi\chi')(g) = \chi(g)\chi'(g)$ para todo $g \in G$.*

Demonstração: Um caracter linear é o traço de uma representação linear, ou seja, ele associa a cada elemento do grupo o traço de uma matriz 1×1, e portanto coincide com a representação. Uma vez que claramente as representações lineares de G sobre F formam um grupo, o mesmo vale para os caracteres lineares. $\square$

3.2 Caracteres abelianos

No caso em que G é um grupo abeliano e F um corpo algebricamente fechado de característica zero, os caracteres irredutíveis de G sobre F são facilmente determinados, como mostraremos nesta seção. Para isto, faremos antes alguns lemas.

Lema 48 *(Lema de Schur) Sejam F um corpo algebricamente fechado de característica zero, G um grupo, V e W dois FG-módulos irredutíveis.*

(1) Se $\phi : V \to W$ é um FG-homomorfismo, então ϕ é um isomorfismo ou $\phi(v) = 0$ para todo $v \in V$.

(2) Se $\phi : V \to V$ é um FG-isomorfismo, então ϕ é um múltiplo escalar do endomorfismo identidade 1_V.

Demonstração:

(1) Se $\phi(v) \neq 0$ para algum $v \in V$, então claramente a imagem de V é um submódulo não nulo de W. Uma vez que W é irredutível, temos que a imagem de ϕ é W. Analogamente, o núcleo de ϕ é também um submódulo de V, mas, uma vez que v não pertence ao núcleo, temos que este é igual a $\{0\}$, e portanto ϕ é injetivo.

(2) O FG-isomorfismo $\phi : V \to V$ pode ser visto como um endomorfismo do F-espaço vetorial V, e portanto possui ao menos um autovalor, λ. Ou seja, $\ker(\phi - \lambda 1_V) \neq \{0\}$, e assim $\ker(\phi - \lambda 1_V)$ é um submódulo não nulo de V. Como V é simples, só pode ser V, e portanto $\phi = \lambda 1_V$.

□

Lema 49 *Se G é um grupo abeliano finito e F é um corpo algebricamente fechado de característica zero, então todo FG-módulo irredutível tem dimensão 1.*

Demonstração: Seja V um FG-módulo irredutível e, para cada $g \in G$, considere o F-endomorfismo

$$\begin{array}{rrl} \phi_g : & V \to & V \\ & v \mapsto & gv. \end{array}$$

Temos que ϕ_g é um FG-endomorfismo. De fato, dado qualquer $\alpha = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i h_i \in FG$ e $v \in V$, como G é abeliano, temos

$$\phi_g(\alpha v) = g\alpha v = g \sum_{i=1}^{k} \alpha_i h_i v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i g h_i v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i h_i g v = \alpha g v = \alpha \phi_g(v).$$

Logo ϕ_g é um FG-endomorfismo. Como ele possui como inverso o FG-endomorfismo $\phi_{g^{-1}}$, pelo Lema de Schur, este endomorfismo tem que ser um múltiplo escalar da identidade, e assim, para todo $v \in V$,

$$gv = \lambda_g v$$

para algum $\lambda_g \in F$.

Portanto, para todo $\alpha = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i h_i \in FG$ e $v \in V$, $\alpha v = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_{h_i} v = \lambda v$ onde $\lambda = \sum_{i=1}^{k} \alpha_i \lambda_{h_i} \in F$, e assim todo subespaço de V é um FG-submódulo. Uma vez que V é um FG-módulo irredutível, temos que V tem que ser um subespaço de dimensão 1. □

A partir de agora, denotaremos por $\hat{G}$ o conjunto dos caracteres lineares de um grupo G sobre F.

Teorema 50 *Sejam G um grupo abeliano finito e F um corpo algebricamente fechado de característica zero. Então $\hat{G}$ é um grupo isomorfo a G.*

Demonstração: Uma vez que G é abeliano finito, pelo Teorema Fundamental dos Grupos Abelianos Finitos, $G \cong C_{n_1} \times \cdots \times C_{n_r}$ para algum $n_1, \ldots, n_r$, onde C_{n_i} é o grupo cíclico de ordem n_i. Logo podemos, sem perda de generalidade, considerar

$$G = C_{n_1} \times \cdots \times C_{n_r}.$$

Tomemos então, para cada $i = 1, \ldots, r$, um gerador c_i de C_{n_i}. Os elementos $g_i = (e, \ldots, c_i, \ldots, e)$ formam um conjunto gerador de G.

Seja então $\rho : G \to GL(n, F)$ uma representação irredutível de G sobre F. Uma vez que pelo lema anterior temos $n = 1$, esta representação coincide com o seu caracter. Portanto para provar este lema precisamos apenas mostrar um isomorfismo de grupos entre G e as representações irredutíveis de G sobre F.

Como $n = 1$, temos que, para cada $i = 1, \ldots, r$, existe $\lambda_i \in F$ tal que

$$\rho(g_i) = \lambda_i.$$

Assim, desde que cada g_i possui ordem n_i, temos que λ_i é uma raiz n_i-ésima da unidade. Como todo $g \in G$ pode ser escrito na forma $g = g_1^{i_1} \ldots g_r^{i_r}$ para alguns $i_1, \ldots, i_r \in \mathbb{Z}$ temos

$$\rho(g) = \rho(g_1^{i_1} \ldots g_r^{i_r}) = \lambda_1^{i_1} \ldots \lambda_r^{i_r}.$$

Logo os valores de $\lambda_1, \ldots, \lambda_r$ determinam a representação e podemos chamar cada representação ρ de $\rho_{\lambda_1, \ldots, \lambda_r}$.

Por outro lado, se para cada $i = 1, \ldots, r$ é dada uma raiz n_i-ésima da unidade, λ_i, a aplicação que leva

$$g_1^{i_1} \ldots g_r^{i_r} \mapsto \lambda_1^{i_1} \ldots \lambda_r^{i_r}$$

é uma representação de G em $GL(1, F)$. Temos assim uma bijeção entre r-uplas $(\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ e representações irredutíveis de G sobre F. Portanto, como existem n_i raízes n_i-ésimas da unidade, um argumento combinatório nos leva imediatamente a $n_1 n_2 \ldots n_r = |G|$ representações distintas.

Fica fácil agora estabelecer o isomorfismo entre G e $\hat{G}$. É claro que todo elemento de G pode ser escrito de forma única como $g_1^{i_1} \ldots g_r^{i_r}$ para alguns $i_1, \ldots, i_r$ de forma que $1 \leq i_j \leq n_j$. Tomando então, para $i = 1, \ldots, r$, ξ_i raiz n_i-ésima primitiva da unidade, é claro que toda representação de G pode ser escrita de forma única como $\rho_{\xi_1^{i_1}, \ldots, \xi_r^{i_r}}$ para alguns $i_1, \ldots, i_r$ onde $1 \leq i_j \leq n_j$. Assim o homomorfismo de G em

$\hat{G}$ que leva $g_1^{i_1}\dots g_r^{i_r}$ na representação $\rho_{\xi_1^{i_1},\dots,\xi_r^{i_r}}$ é claramente injetivo e sobrejetivo, e portanto um isomorfismo.

$\square$

3.3 G-graduações

Apresentaremos agora o conceito de álgebra G-graduada.

Definição 51 *Sejam F um corpo, $\mathcal{A}$ uma F-álgebra e G um grupo. A álgebra $\mathcal{A}$ é dita G-**graduada** se pode ser escrita como soma direta de subespaços*

$$\mathcal{A} = \oplus_{g\in G}\mathcal{A}^{(g)}$$

de forma que, para quaisquer $g, h \in G$,

$$\mathcal{A}^{(g)}\mathcal{A}^{(h)} \subseteq \mathcal{A}^{(gh)}.$$

*Chamamos de **suporte de** $\mathcal{A}$, e denotamos por* $\mathrm{Supp}(\mathcal{A})$ *o subconjunto de G*

$$\mathrm{Supp}(\mathcal{A}) = \{g \in G \,|\, A^{(g)} \neq \{0\}\}.$$

Os subespaços $\mathcal{A}^{(g)}$ são chamados de **componentes homogêneas** de $\mathcal{A}$. Um elemento $a \in \mathcal{A}$ é dito **homogêneo** se $a \in \mathcal{A}^{(g)}$ para algum $g \in G$.

Uma vez que na definição temos uma soma direta de espaços vetoriais, todo elemento de $\mathcal{A}$ pode ser escrito de forma única como soma finita de elementos em componentes homogêneas distintas.

Definição 52 *Sejam G um grupo, $\mathcal{A}$ uma álgebra G-graduada e B um subespaço de $\mathcal{A}$. B é dito um **subespaço homogêneo**, ou **subespaço** G-**graduado**, se $B = \oplus_{g\in G}(B \cap \mathcal{A}^{(g)})$.*

É fácil ver que esta definição é equivalente a, dado qualquer $b \in B$, escrevendo b como soma de elementos homogêneos, $b = \sum_{g\in G} b_g$, temos que $b_g \in B$ para todo $g \in G$.

De forma análoga podemos definir **subálgebras G-graduadas** e **ideais G-graduados**.

Uma álgebra $\mathbb{Z}_2$-graduada é também chamada de **superálgebra**.

Apresentaremos agora alguns exemplos de álgebras G-graduadas.

Exemplo 53 *Qualquer álgebra $\mathcal{A}$ pode ser graduada por qualquer grupo G, basta tomar $\mathcal{A}^{(e)} = \mathcal{A}$ e $\mathcal{A}^{(g)} = 0$, onde e é a identidade do grupo. Tal G-graduação é chamada de* ***graduação trivial*** *e a denotaremos por $\mathcal{A}^{tr}$.*

Exemplo 54 *Seja $UT_2(F)$ a álgebra das matrizes triangulares superiores 2×2 sobre um corpo qualquer F. Chamamos uma G-graduação em $UT_2(F)$ de* ***G-graduação canônica*** *quando, para algum $g \in G$, $g \neq e$, $UT_2(F) = UT_2(F)^{(e)} \oplus UT_2(F)^{(g)}$ com $UT_2(F)^{(e)} = \mathrm{Span}_F\{E_{11}\} \oplus \mathrm{Span}_F\{E_{22}\}$ e $UT_2(F)^{(g)} = \mathrm{Span}_F\{E_{12}\}$.*

Exemplo 55 *Seja $\mathcal{A} = M_n(F)$ a álgebra das matrizes $n \times n$ sobre F e G um grupo qualquer. Dada uma n-upla $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$, podemos definir uma G-graduação em $\mathcal{A}$ tomando, para cada $g \in G$,*

$$\mathcal{A}^{(g)} = \mathrm{Span}_F\{E_{ij} \mid g_i^{-1} g_j = g\},$$

onde os E_{ij}'s são as matrizes elementares usuais. Tal G-graduação é denominada uma ***G-graduação elementar em*** *$M_n(F)$.*

Note que esta G-graduação induz naturalmente uma G-graduação em $UT_n(F)$ denominada uma ***G-graduação elementar em*** *$UT_n(F)$.*

Exemplo 56 *Seja novamente $\mathcal{A} = M_n(F)$ a álgebra das matrizes $n \times n$ e considere k, l dois naturais tais que $n = k + l$. Podemos definir uma $\mathbb{Z}_2$-graduação em $\mathcal{A}$ tomando $\mathcal{A}^{(0)} = \begin{pmatrix} M_k(F) & 0 \\ 0 & M_l(F) \end{pmatrix}$ e $\mathcal{A}^{(1)} = \begin{pmatrix} 0 & M_{k\times l}(F) \\ M_{l\times k}(F) & 0 \end{pmatrix}$. Esta G-graduação é chamada de* ***G-graduação*** *$M_{k,l}(F)$.*

Note que as G-graduações $M_n(F)^{tr}$ e $M_{k,l}(F)$ são exemplos da G-graduação elementar. Basta tomarmos as n-uplas $(e, \ldots, e) \in G^n$ e $(\underbrace{0, \ldots, 0}_{k}, \underbrace{1, \ldots, 1}_{l}) \in \mathbb{Z}_2^n$, respectivamente.

Até agora vimos apenas exemplos de G-graduações elementares de $M_n(F)$, mas existem G-graduações que não o são, como mostra o próximo exemplo.

Exemplo 57 *Seja $\mathcal{A} = M_2(F)$ e $G = \langle a \rangle \times \langle b \rangle$ o produto direto de dois grupos cíclicos de ordem 2. Podemos tomar*

$$\mathcal{A}^{(e)} = \mathrm{Span}_F\{E_{11} + E_{22}\}, \quad \mathcal{A}^{(a)} = \mathrm{Span}_F\{E_{11} - E_{22}\},$$

$$\mathcal{A}^{(b)} = \mathrm{Span}_F\{E_{12} + E_{21}\}, \quad \mathcal{A}^{(ab)} = \mathrm{Span}_F\{E_{12} - E_{21}\}$$

e perceber que $\mathcal{A} = \oplus_{g\in G}\mathcal{A}^{(g)}$ *e* $\mathcal{A}^{(g)}\mathcal{A}^{(h)} = \mathcal{A}^{(gh)}$ *para quaisquer* $g, h \in G$. *Portanto esta é uma* G*-graduação de* $M_2(F)$.

Tal G*-graduação não é elementar, pois* $\dim(\mathcal{A}^{(e)}) = 1$ *e em qualquer* G*-graduação elementar de* $M_2(F)$ *teríamos* $\dim(\mathcal{A}^{(e)}) \geq 2$ *pois toda matriz elementar diagonal,* E_{ii}, *pertenceria a* $\mathcal{A}^{(e)}$.

O exemplo a seguir generaliza o anterior para $M_n(F)$. Ele será retomado mais tarde.

Exemplo 58 *Seja* $G = \langle a\rangle \times \langle b\rangle$ *o produto direto de dois grupos cíclicos de ordem* n. *Seja* F *um corpo contendo uma raiz* n*-ésima primitiva da unidade,* ϵ. *Sejam* A *e* B *as seguintes matrizes* $n \times n$:

$$A = \begin{pmatrix} \epsilon^{n-1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \epsilon^{n-2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{pmatrix} \text{ e } B = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{pmatrix}.$$

Mostraremos que as matrizes A^cB^d, $c = 1, \dots, n$, $d = 1 \dots, n$ *são linearmente independentes sobre* F.

Escrevendo $B = E_{12} + \cdots + E_{n-1,n} + E_{n,1}$ e usando $E_{ij}E_{kl} = \delta_{jk}E_{il}$ fica claro que $B^2 = E_{13} + \cdots + E_{n-2,n} + E_{n-1,1} + E_{n,2}$ e analogamente

$$B^d = E_{1,d+1} + \cdots + E_{n-d,n} + E_{n-d+1,1} + \cdots + E_{n,d}.$$

Note que $B^n = E$, a matriz identidade. Como

$$A^c = \sum_{i=1}^{n} E_{ii}\epsilon^{c(n-i)},$$

ao calcularmos A^cB^d os únicos termos não nulos da soma aparecem como $E_{ii}(\epsilon^{c(n-i)})E_{i,i+d} = \epsilon^{c(n-i)}E_{i,i+d}$ e assim as únicas entradas não nulas de A^cB^d são as $(i, i+d)$-ésimas, ou seja, estão nas mesmas posições das entradas não nulas de B^d.

Logo, chamando de

$$L_d = \mathrm{Span}_F\{B^d, AB^d, \dots, A^{n-1}B^d\},$$

temos $L_d \subseteq \mathrm{Span}_F\{E_{1,d+1},\dots,E_{n-d,n},E_{n-d+1,1},\dots,E_{n,d}\}$. Claramente $L_{d_1} \cap L_{d_2} = \{0\}$ para todo $d_1 \neq d_2$, $1 \leq d_1, d_2, \leq n$.

Portanto, precisamos agora apenas mostrar que, fixado d, os elementos A^cB^d com $c = 1,\dots,n$ são linearmente independentes. Se $x_1,\dots,x_n$ são indeterminadas, então $x_1A + x_2A^2 + \cdots + x_nA^n = 0$ é um sistema linear com n equações cuja matriz correspondente é, a menos de uma permutação das linhas, uma matriz de Vandermonde. Seu determinante portanto é dado por $\prod_{i<j}(\epsilon^i - \epsilon^j)$ que é claramente não nulo, e assim $x_1A + x_2A^2 + \cdots + x_nA^n = 0$ possui apenas a solução trivial $x_1 = \cdots = x_n = 0$. Como B é invertível, $x_1AB^d + x_2A^2B^d + \cdots + x_nA^nB^d = 0$ possui também apenas a solução trivial para qualquer $d = 1,\dots,n$.

Concluímos então que as matrizes A^cB^d são linearmente independentes.

Como são n^2 matrizes distintas, temos que a subálgebra gerada por elas tem a mesma dimensão de $M_n(F)$, e portanto $\{A^cB^d \,|\, c, d = 1,\dots,n\}$ é uma base de $M_n(F)$.

Chamando então, para cada $g = (a^c, b^d) \in G$, $R^{(g)} = \mathrm{Span}_F\{A^cB^d\}$,

$$M_n(F) = \oplus_{g\in G}R^{(g)}$$

é uma G-graduação, a qual chamamos de **ϵ-graduação**. Esta G-graduação não é elementar, pois nela cada componente homogênea tem dimensão 1.

3.4 Isomorfismos de álgebras G-graduadas

Definição 59 *Sejam $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ duas álgebras G-graduadas. Dizemos que um homomorfismo de álgebras $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ é um **homomorfismo de álgebras G-graduadas** se, para todo $g \in G$, temos $\phi(\mathcal{A}^{(g)}) \subseteq \mathcal{B}^{(g)}$. Se ϕ for também bijetivo dizemos que ϕ é um **isomorfismo de álgebras G-graduadas** e $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ são duas álgebras **G-graduadas isomorfas**.*

É interessante que se estamos trabalhando com F algebricamente fechado de característica zero, então as únicas $\mathbb{Z}_2$-graduações possíveis de $M_n(F)$ são a trivial e as G-graduações $M_{k,l}(F)$ apresentadas no Exemplo 56.

Teorema 60 *(Teorema 3.5.3 [6]) Seja F um corpo algebricamente fechado de característica zero. Toda $\mathbb{Z}_2$-graduação de $M_n(F)$ é, a menos de isomorfismo, $M_n(F)^{tr}$ ou $M_{k,l}(F)$ com $k \geq l > 0$ e $k + l = n$.*

No caso de outros grupos, podem existir graduações não elementares para $M_n(F)$, como já mostramos nos Exemplos 57 e 58. No caso de $UT_n(F)$, veremos que só existem graduações elementares. Para mostrar isso no caso particular em que $n = 2$, precisaremos do seguinte exemplo:

Exemplo 61 *Seja $b \in F$, $b \neq 0$ e considere a G-graduação tal que, para algum $g \in G$, $g \neq e$,*

$$UT_2(F)^{(g)} = \mathrm{Span}_F\{E_{12}\}$$

e

$$UT_2(F)^{(e)} = \mathrm{Span}_F\{E_{11} + E_{22}\} \oplus \mathrm{Span}_F\{E_{11} + bE_{12}\}.$$

Então $UT_2(F)$ com a G-graduação acima é isomorfa como álgebra G-graduada a $UT_2(F)$ com a G-graduação canônica.

A fim de definirmos explicitamente o isomorfismo ϕ que leva componentes homogêneas da G-graduação dada nas da G graduação canônica vista no Exemplo 54, precisamos encontrar $\alpha, \alpha', \beta, \beta'$ e γ tais que

$$\begin{aligned}
\phi(E_{11} + E_{22}) &= \alpha E_{11} + \beta E_{22} \\
\phi(E_{11} + bE_{12}) &= \alpha' E_{11} + \beta' E_{22} \\
\phi(E_{12}) &= \gamma E_{12}.
\end{aligned}$$

E assim, desde que ϕ deve ser um F-homomorfismo temos

$$\phi(E_{22}) = \phi(E_{11} + E_{22}) - \phi(E_{11} + bE_{12}) + b\phi(E_{12}) = (\alpha - \alpha')E_{11} + (\beta - \beta')E_{22} + b\gamma E_{12}$$

$$\phi(E_{11}) = \phi(E_{11} + bE_{12}) - b\phi(E_{12}) = \alpha' E_{11} + \beta' E_{22} - b\gamma E_{12}.$$

A fim de encontrarmos os valores para α, α', β e β', exploremos melhor as relações entre as matrizes elementares e notemos que, uma vez que ϕ deve ser um isomorfismo, seu núcleo deve ser $\{0\}$ e portanto $\gamma \neq 0$. Logo,

- $0 = \phi(0) = \phi(E_{12}E_{11}) = \phi(E_{12})\phi(E_{11}) = \gamma\beta' E_{12}$ e assim $\beta' = 0$.
- $\gamma E_{12} = \phi(E_{12}) = \phi(E_{11}E_{12}) = \alpha'\gamma E_{12}$ e assim $\alpha' = 1$.
- $\gamma E_{12} = \phi(E_{12}) = \phi(E_{12}E_{22}) = \gamma\beta E_{12}$, logo $\beta = 1$.
- $0 = \phi(E_{22}E_{12}) = (\alpha - \alpha')\gamma E_{12}$ e finalmente concluímos que $\alpha = \alpha' = 1$.

Portanto temos que se ϕ é um isomorfismo, então precisa ser da forma:

$$\phi(E_{11}) = E_{11} - b\gamma E_{12}$$
$$\phi(E_{22}) = E_{22} + b\gamma E_{12}$$
$$\phi(E_{12}) = \gamma E_{12}.$$

Tomando $\gamma = 1$ é fácil ver que a aplicação $\phi : UT_2(F) \to UT_2(F)$ dada por

$$\phi(E_{11} + E_{22}) = E_{11} + E_{22}$$
$$\phi(E_{11} + bE_{12}) = E_{11}$$
$$\phi(E_{12}) = E_{12}$$

leva os geradores das componentes homogêneas de $UT_2(F)$ com a G-graduação dada nos geradores das componentes homogêneas de $UT_2(F)$ com a G-graduação elementar. Assim ϕ é claramente um isomorfismo de álgebras G-graduadas como queríamos.

Note que o isomorfismo ϕ é na verdade a aplicação

$$\begin{array}{ccc} UT_2(F) & \to & UT_2(F) \\ \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} + b(a_{22} - a_{11}) \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}. \end{array}$$

Duas observações que serão utilizadas ao trabalhar em geral com $UT_n(F)$ são as seguintes:

Observação 62 *Sejam $\phi : \mathcal{A} \to \mathcal{B}$ um isomorfismo de álgebras e $\mathcal{A}$ uma álgebra G-graduada. Então ϕ induz uma G-graduação em $\mathcal{B}$ e podemos assim ver ϕ como um isomorfismo de álgebras G-graduadas. De fato, basta tomar $\mathcal{B}^{(g)} := \phi(\mathcal{A}^{(g)})$. Trivialmente $\mathcal{B}^{(g)}$ é um subespaço para todo $g \in G$ e $\mathcal{B} = \oplus_{g\in G}\mathcal{B}^{(g)}$ é uma G-graduação de $\mathcal{B}$.*

Observação 63 *Seja $UT_n(F) = \oplus_{g\in G} UT_n(F)^{(g)}$ uma G-graduação de $UT_n(F)$ para a qual existe um conjunto $\{a_{ij} | 1 \leq i \leq j \leq n\}$ de matrizes elementares de $UT_n(F)$ homogêneas na G-graduação dada. Então tomando*

$$\begin{array}{rll} \phi : & UT_n(F) & \to UT_n(F) \\ & a_{ij} & \to E_{ij} \end{array}$$

onde E_{ij} são as matrizes elementares usuais, temos que pela observação anterior ϕ induz na imagem de $UT_n(F)$ uma G-graduação na qual cada matriz E_{ij} é homogênea.

3.5 Propriedades das G-graduações

Demonstraremos agora vários resultados sobre G-graduações que serão retomados mais à frente.

Lema 64 *Sejam $\mathcal{A}$ uma álgebra G-graduada e E sua unidade. Então $E \in \mathcal{A}^{(e)}$.*

Demonstração: Para todo elemento homogêneo a, temos que $aE = a$. Logo, se $E = \sum_{g \in G} E_g$, fica claro que

$$a = aE = a \sum_{g \in G} E_g = \sum_{g \in G} aE_g.$$

Como a e E_g são todos homogêneos, temos que

$$aE_e = a \ \text{ e } \ aE_g = 0 \ \text{ para todo } \ g \neq e.$$

Como todo elemento de $\mathcal{A}$ é soma de elementos homogêneos, temos que

$$b = \sum_{g \in G} b_g = \sum_{g \in G} b_g E_e = bE_e$$

para todo $b \in \mathcal{A}$ e assim $E = E_e \in \mathcal{A}^{(e)}$. □

Lema 65 *Sejam G um grupo abeliano e $\mathcal{A} = \oplus_{g \in G} \mathcal{A}^{(g)}$ uma álgebra G-graduada, então a subálgebra dos comutadores é uma subálgebra graduada.*

Demonstração: Notemos inicialmente que se mostrarmos que um conjunto de geradores de $[\mathcal{A}, \mathcal{A}]$ é tal que qualquer um de seus elementos pode ser escrito como soma de elementos homogêneos pertencentes a $[\mathcal{A}, \mathcal{A}]$, então o mesmo vale para todo elemento de $[\mathcal{A}, \mathcal{A}]$.

Se $a = \sum_{g \in G} a_g$ e $b = \sum_{g \in G} b_g$, então

$$[a, b] = ab - ba = \sum_{g,h \in G} (a_g b_h - b_h a_g)$$

mas $a_g b_h - b_h a_g = [a_g, b_h] \in \mathcal{A}^{(gh)} = \mathcal{A}^{(hg)}$. Assim, todo comutador $[a, b]$ é soma de elementos homogêneos pertencentes a $[\mathcal{A}, \mathcal{A}]$. Concluímos então que $[\mathcal{A}, \mathcal{A}]$ é uma subálgebra graduada. □

Lema 66 *A subálgebra dos comutadores de $UT_n(F)$ coincide com $J(UT_n(F))$.*

Demonstração: Como mostramos no Exemplo 31, $[a, b]$ é uma matriz nilpotente e, portanto, pertence a $J(UT_n(F))$. Uma vez que a subálgebra dos comutadores é gerada por matrizes da forma $[a, b]$, esta subálgebra está contida em $J(UT_n(F))$. Por outro lado, se $i < j$, $E_{ij} = [E_{ii}, E_{ij}]$, e portanto $J(UT_n(F))$ está contido na subálgebra dos comutadores de $UT_n(F)$. $\square$

Como corolário dos dois lemas anteriores temos:

Corolário 67 *Se G é um grupo abeliano finito, então a subálgebra dos comutadores coincide com o radical de Jacobson e, portanto, é um ideal nilpotente graduado.*

Lema 68 *Sejam G um grupo e $\mathcal{A} = \oplus_{g\in G}\mathcal{A}^{(g)}$ uma álgebra G-graduada qualquer. Se um elemento homogêneo a é idempotente, então $a \in \mathcal{A}^{(e)}$.*

Demonstração: Se $a \in \mathcal{A}^{(g)}$, então, como a é idempotente, temos também $a = a^2 \in \mathcal{A}^{(g^2)}$. Agora, se $g \neq e$, então temos $g \neq g^2$, e assim $\mathcal{A}^{(g)} \cap \mathcal{A}^{(g^2)} = \{0\}$, mas isso implica $a = 0$, o que não pode ocorrer. $\square$

Os dois lemas a seguir nos dão uma maneira de reescrever uma álgebra G-graduada $\mathcal{A}$ a partir de idempotentes em $\mathcal{A}^{(e)}$.

Lema 69 *Seja $\mathcal{A} = \oplus_{g\in G}\mathcal{A}^{(g)}$ uma álgebra G-graduada e suponha que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um conjunto de idempotentes ortogonais em $\mathcal{A}^{(e)}$. Denotando $\mathcal{A}_{ij} := e_i\mathcal{A}e_j$ temos:*

(1) Cada $\mathcal{A}_{ij}$ é um subespaço homogêneo;

(2) $a_{ij} = e_i a_{ij} e_j$ para todo $a_{ij} \in \mathcal{A}_{ij}$;

(3) Se $a_{ij} \in \mathcal{A}_{ij}$ e $a_{kl} \in \mathcal{A}_{kl}$, com $j \neq k$, então $a_{ij}a_{kl} = 0$;

(4) $\mathcal{A}_{ij} \cap \mathcal{A}_{kl} = \{0\}$ se $i \neq k$ ou $j \neq l$.

Demonstração: Para todo $1 \leq i \leq j \leq n$ temos:

(1) Se $a \in \mathcal{A}$, $a = \sum_{g\in G} a_g$, e assim $e_i a e_j = \sum_{g\in G} e_i a_g e_j$ que é soma de elementos homogêneos de $\mathcal{A}_{ij}$, já que $e_1, \ldots, e_n \in \mathcal{A}^{(e)}$.

(2) Dado $a_{ij} \in \mathcal{A}_{ij}$, existe $a \in \mathcal{A}$ tal que $a_{ij} = e_i a e_j$. Como e_i e e_j são idempotentes, $a_{ij} = e_i a e_j = e_i^2 a e_j^2 = e_i a_{ij} e_j$.

(3) Pelo item anterior, dados $a_{ij} \in \mathcal{A}_{ij}$ e $a_{kl} \in \mathcal{A}_{kl}$, então

$$a_{ij}a_{kl} = e_i a_{ij} \underbrace{e_j e_k}_{0} a_{kl} e_l = 0.$$

(4) Pelo item (2), se $a \in \mathcal{A}_{ij} \cap \mathcal{A}_{kl}$, então $a = e_i e_k a e_l e_j$, que é igual a 0 se $i \neq k$ ou $j \neq l$.

$\square$

No caso da álgebra $UT_n(F)$, se fizermos uma hipótese adicional sobre os idempotentes ortogonais, obtemos resultados mais expressivos sobre como os subespaços $UT_n(F)_{ij}$ se comportam na álgebra:

Lema 70 *Denote $\mathcal{A} = UT_n(F)$ e seja $\mathcal{A} = \oplus_{g\in G}\mathcal{A}^{(g)}$ uma G-graduação de $UT_n(F)$. Suponha que $\{e_1, \ldots, e_n\}$ é um conjunto de idempotentes ortogonais em $\mathcal{A}^{(e)}$ tal que $e_i = E_{ii} + Y_i$, onde Y_i é uma matriz triangular estritamente superior. Denotando $\mathcal{A}_{ij} := e_i \mathcal{A} e_j$ temos:*

(1) $\mathcal{A}_{ij}$ é subespaço homogêneo para todo $1 \leq i \leq j \leq n$

(2) $\mathcal{A}_{ij}$ possui dimensão 1 para todo $1 \leq i \leq j \leq n$

(3) $\mathcal{A} = \oplus_{1\leq i\leq j\leq n}\mathcal{A}_{ij}$.

Demonstração: Segue do lema anterior que $\mathcal{A}_{ij}$ é homogêneo.

Verificaremos agora que $\mathcal{A}_{ij} \neq \{0\}$ para todo $1 \leq i \leq j \leq n$. Desde que $Y_i, Y_j \in J(\mathcal{A})$, temos

$$E_{ij}Y_j = \sum_{k=1}^{n-j} \alpha_{j,j+k}E_{i,j+k} \quad \text{e} \quad Y_i E_{ij} = \sum_{l=1}^{i-1} \beta_{l,i}E_{l,j}$$

onde $\alpha_{j,j+k}$ é a $(j, j+k)$-ésima entrada de Y_j e $\beta_{l,i}$ é a (l, i)-ésima entrada de Y_i. Temos também

$$Y_i E_{ij} Y_j = Y_i \sum_{k=1}^{n-j} \alpha_{j,j+k}E_{i,j+k} = \sum_{k=1}^{n-j} \alpha_{j,j+k} Y_i E_{i,j+k} = \sum_{k=1}^{n-j} \alpha_{j,j+k} \sum_{l=1}^{i-1} \beta_{l,i} E_{l,j+k},$$

e portanto em $E_{ij}Y_j$, Y_jE_{ij} e $Y_iE_{ij}Y_j$ não aparece E_{ij}, o que implica

$$e_iE_{ij}e_j = E_{ij} + E_{ij}Y_j + Y_iE_{ij} + Y_iE_{ij}Y_j \neq 0.$$

Uma vez que cada $\mathcal{A}_{ij}$ é não nulo, possui dimensão maior ou igual a 1. Como, pelo lema anterior, a interseção de quaisquer dois destes subespaços é sempre igual a zero, são $\frac{n^2+n}{2}$ subespaços da forma $\mathcal{A}_{ij}$, e esta é exatamente a dimensão de $\mathcal{A}$, então $\mathcal{A} = \oplus_{1\leq i\leq j\leq n}\mathcal{A}_{ij}$ e cada $\mathcal{A}_{ij}$ tem que ter dimensão igual a 1. $\square$

Um resultado que nos será útil mais adiante para encontrar subespaços homogêneos é o seguinte:

Lema 71 *Dada uma álgebra G-graduada $\mathcal{A}$, o anulador à esquerda de um elemento homogêneo qualquer de $\mathcal{A}$ é um subespaço graduado.*

Demonstração: Se $a \in \mathcal{A}^{(g_0)}$ e $x \in \mathrm{Ann}_e(a)$, como x pode ser escrito

$$x = \sum_{g\in G} x_g$$

com $x_g \in \mathcal{A}^{(g)}$ temos que

$$0 = xa = \sum_{g\in G} x_g a$$

com $x_g a \in \mathcal{A}^{(gg_0)}$. Uma vez que $g \neq h$ implica $gg_0 \neq hg_0$, obtemos que, na soma acima, cada elemento é homogêneo e pertence a uma componente homogênea diferente da dos demais. Logo, uma vez que qualquer elemento só pode ser escrito de maneira única como soma de elementos homogêneos em componentes distintas temos que $x_g a = 0$ para todo $g \in G$, e assim $x_g \in \mathrm{Ann}_e(a)$ para todo $g \in G$. $\square$

3.6 Dualidade entre G-ações e G-graduações

O resultado a seguir é necessário para a demonstração do teorema que o segue.

Lema 72 *(Teorema 5.1.11 [17]) Sejam G um grupo abeliano, F um corpo algebricamente fechado de característica zero e χ_i o caracter do submódulo irredutível W_{i1} de FG conforme a decomposição do Teorema 34. Então o idempotente $f_i \in U_i$ é dado por $f_i = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_i(g^{-1})g$.*

Usaremos deste lema na verdade duas consequências. Como W_{i1} é um submódulo simples, χ_i é um caracter irredutível, e pelo Teorema 50, é linear. Logo, dado $h \in G$,

$$\begin{aligned} hf_i &= \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_i(g^{-1})hg = \frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_i(h)\chi_i(g^{-1})\chi_i(h^{-1})hg \\ &= \chi_i(h)\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}\chi_i((hg)^{-1})hg = \chi_i(h)f_i. \end{aligned}$$

Ou seja,

$$hf_i = \chi_i(h)f_i,$$

para todo $h \in G$ e para todo idempotente f_i que aparece na decomposição do Teorema 34.

Segue então, através da extensão da ação dos caracteres para FG, que

$$\delta_{ij}f_i = f_jf_i = \chi_i(f_j)f_i.$$

Uma vez que $\chi_i(f_j) \in F$ e $f_i \neq 0$, temos obrigatoriamente que $\chi_i(f_j) = \delta_{ij}$.

No teorema a seguir, através do isomorfismo entre G e $\hat{G}$, mostraremos que de fato existe uma dualidade entre G-ações e G-graduações.

Teorema 73 *Sejam F um corpo algebricamente fechado com característica zero e G um grupo abeliano finito. Qualquer G-graduação em qualquer F-álgebra $\mathcal{A}$ define uma $\hat{G}$-ação sobre $\mathcal{A}$ por automorfismos e vice-versa. Nesta ação um subespaço V é G-graduado se, e somente se, ele é invariante pela $\hat{G}$-ação. Um elemento $a \in \mathcal{A}$ é homogêneo na G-graduação se, e somente se, ele é um autovetor para cada $\chi \in \hat{G}$.*

Demonstração: Suponha $G \subseteq \mathrm{Aut}(\mathcal{A})$, pela Observação 18 podemos estender a ação para a álgebra de grupo FG. Pelo Teorema 35, FG é isomorfo como anel a $M_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_k}(D_k)$, mas uma vez que F é um corpo algebricamente fechado de característica zero e G é abeliano, então $n_i = 1$ e $D_i \cong F$, para $i = 1, \ldots, k$. Assim

$$FG \cong \underbrace{F \oplus \cdots \oplus F}_{k}.$$

Como FG é uma F-álgebra de dimensão igual à ordem de G, temos $k = |G|$. Logo, tomando 1_i como a unidade do i-ésimo F na soma direta e f_i a pré-imagem de 1_i pelo isomorfismo, temos que os f_i's são idempotentes ortogonais centrais e $f_1 + \cdots + f_k = 1$. Claramente esses f_i's coincidem com os do Teorema 34 e portanto valem para eles o Lema 72 e suas consequências.

Definindo então

$$\mathcal{A}^{(\chi_i)} = \{a \in \mathcal{A} \,|\, g(a) = \chi_i(g)a, \, \forall g \in G\},$$

se mostrarmos que $\mathcal{A}^{(\chi_i)}$ coincide com o subespaço gerado por todos os elementos da forma $f_i(a)$ com $a \in \mathcal{A}$, teremos $\mathcal{A}^{(\chi_i)} = f_i(\mathcal{A})$. Uma vez que $f_i f_j = \delta_{ij} f_i$ e $1 = f_1 + \cdots + f_k$, ocorre que $\mathcal{A} = \oplus_{i=1}^{k} f_i(\mathcal{A})$, e portanto

$$\mathcal{A} = \oplus_{i=1}^{k} \mathcal{A}^{(\chi_i)}.$$

Claramente $f_i(a) \in \mathcal{A}^{(\chi_i)}$ para todo $a \in \mathcal{A}$. Como $1 = f_1 + \cdots + f_k$, então, através da ação de FG sobre $\mathcal{A}$, temos

$$a = 1(a) = (f_1 + \cdots + f_k)(a) = f_1(a) + \cdots + f_k(a),$$

e assim

$$g(a) = g(f_1(a) + \cdots + f_k(a)) = (gf_1)(a) + \cdots + (gf_k)(a) = \chi_1(g) f_1(a) + \cdots + \chi_k(g) f_k(a).$$

Se $a \in \mathcal{A}^{(\chi_i)}$ então

$$g(a) = \chi_i(g)a = \chi_i(g) f_1(a) + \cdots + \chi_i(g) f_k(a).$$

Calculando então para $a \in \mathcal{A}^{(\chi_i)}$, $0 = g(a) - g(a)$, e usando o fato que $\mathcal{A} = \oplus_{i=1}^{k} f_i(\mathcal{A})$ obtemos

$$(\chi_i(g) - \chi_j(g)) f_j(a) = 0$$

para todo $j = 1, \ldots, k$ e $g \in G$. Concluímos então que $f_j(a) = 0$ para todo $j \neq i$ e assim obtemos $a = f_i(a)$ como queríamos.

Para provar que de fato temos uma $\hat{G}$-graduação, falta apenas mostrar que $\mathcal{A}^{(\chi_i)} \mathcal{A}^{(\chi_j)} \subseteq \mathcal{A}^{(\chi_i \chi_j)}$. Sejam então $a \in \mathcal{A}^{(\chi_i)}$ e $b \in \mathcal{A}^{(\chi_j)}$, então $g(a) = \chi_i(g)a$ e $g(b) = \chi_j(g)b$, e assim

$$g(ab) = g(a)g(b) = \chi_i(g)a\chi_j(g)b = \chi_i(g)\chi_j(g)ab = (\chi_i\chi_j)(g)(ab).$$

Logo $ab \in \mathcal{A}^{(\chi_i \chi_j)}$ como queríamos.

Seja agora $\mathcal{A} = \oplus_{g \in G} \mathcal{A}^{(g)}$ uma álgebra graduada por um grupo abeliano finito G. Definindo a ação de $\hat{G}$ em $\mathcal{A}$, em cada $\chi \in \hat{G}$, por

$$\chi(a) = \sum_{g \in G} \chi(g) a_g$$

para $a = \sum_{g \in G} a_g$, $a_g \in \mathcal{A}^{(g)}$, obtemos na verdade uma G-ação em $\mathcal{A}$, pois $\hat{G}$ é isomorfo a G.

Se $V = \oplus_{g \in G} V^{(g)}$ é um subespaço graduado de $\mathcal{A}$, então $\chi(V^{(g)}) = \chi(g)V^{(g)} = V^{(g)}$ para todo $g \in G$, e assim $\chi(V) = V$.

Por outro lado, se V é um subespaço invariante por qualquer automorfismo de $\hat{G}$, suponha que V não é um subespaço graduado, isto é, que existe $v \in V$ que se escreve como soma de elementos homogêneas $v_{g_1} + \cdots + v_{g_t}$, mas algum dos v_{g_i} não pertence a V. Uma vez que podemos subtrair os elementos homogêneos pertencentes a V, podemos supor sem perda de generalidade que $v_{g_1}, \ldots, v_{g_t} \notin V$. Seja então $\chi \in \hat{G}$ de forma que $\chi(g_1) = \lambda \neq \mu = \chi(g_2)$.

$$u = \lambda v - \chi(v) = (\lambda - \mu)v_{g_2} + ... \in V,$$

ou seja, u é um elemento de V que pode ser escrito como combinação apenas de $v_{g_2}, \ldots, v_{g_t}$. Repetindo indutivamente o processo para u, obtemos que um múltiplo de algum v_{g_i} pertence a V, uma contradição.

$\square$

Exemplo 74 *Seja F um corpo algebricamente fechado de característica zero. Dado ϕ um automorfismo de ordem 2 de uma F-álgebra $\mathcal{A}$ então $G = \langle \phi \rangle \cong \mathbb{Z}_2$ age sobre $\mathcal{A}$ por automorfismos. A fim de determinarmos a G-graduação associada a esta G-ação, observe que, uma vez que $\mathbb{Z}_2$ é abeliano finito, seus caracteres irredutíveis são os seus caracteres lineares, que coincidem com as representações lineares. Logo, uma vez que $\chi(0) = 1$ e $(\chi(1))^2 = 1$, temos os dois caracteres:*

1. $\chi_0(0) = 1$ *e* $\chi_0(1) = 1$
2. $\chi_1(0) = 1$ *e* $\chi_1(1) = -1$.

Podemos assim, com um abuso de notação, escrever $\hat{G} = \{\chi_0, \chi_1\}$ onde $\chi_0(Id) = 1$, $\chi_0(\phi) = 1$, $\chi_1(Id) = 1$ e $\chi_1(\phi) = -1$. Logo G induz uma natural $\mathbb{Z}_2$-graduação

$$\mathcal{A} = \mathcal{A}^{(0)} \oplus \mathcal{A}^{(1)}$$

onde

$$\mathcal{A}^{(0)} = \{a \in \mathcal{A} \mid Id(a) = \chi_0(Id)a = a \text{ e } \phi(a) = \chi_0(\phi)a = a\} = \{a \in \mathcal{A} \mid \phi(a) = a\}$$

$$\mathcal{A}^{(1)} = \{a \in \mathcal{A} \mid Id(a) = \chi_1(Id)a = a \text{ e } \phi(a) = \chi_1(\phi)a = -a\} = \{a \in \mathcal{A} \mid \phi(a) = -a\}.$$

Reciprocamente, dada uma $\mathbb{Z}_2$-graduação $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{(0)} \oplus \mathcal{A}^{(1)}$, temos que $\hat{\mathbb{Z}}_2 = \{\chi_0, \chi_1\}$ age em $\mathcal{A}$ da seguinte forma:

$$\chi_0(a_0 + a_1) = \chi_0(0)a_0 + \chi_0(1)a_1 = a_0 + a_1$$

$$\chi_1(a_0 + a_1) = \chi_1(0)a_0 + \chi_1(1)a_1 = a_0 - a_1.$$

Vemos assim que $\mathbb{Z}_2$ age sobre $\mathcal{A}$ por automorfismos.

No caso do subconjunto W de $UT_n(F)$, já apresentado no Lema 41, temos o seguinte corolário, que nos será útil no Capítulo 5.

Corolário 75 *Sejam F um corpo algebricamente fechado de característica zero e G um grupo abeliano finito. Considere $W \subseteq UT_n(F)$, $W = \mathrm{Span}_F\{E_{1n}, \ldots, E_{n-1,n}\}$. Então W possui uma base formada apenas por autovetores comuns a todos os automorfismos de $\hat{G}$.*

Demonstração: Segue do Lema 41 e Corolário 43 que W é invariante por qualquer automorfismo de $UT_n(F)$. Logo, pelo Teorema 73, ele é um subespaço G-graduado. Tomando então o conjunto $\{E_{1n}, \ldots, E_{n-1,n}\}$ que gera W como um espaço vetorial, temos que cada elemento deste conjunto pode ser decomposto numa soma de elementos homogêneos pertencentes a W. O subconjunto formado por todas as parcelas de todas estas somas é um outro conjunto gerador de W. Podemos portanto tomar um subconjunto deste último que é uma base de W. Chamando tal base de $\mathcal{B}$, temos novamente pelo Teorema 73 que todo elemento de $\mathcal{B}$ é um autovetor para todos os automorfismos de $\hat{G}$, o que conclui a demonstração. $\square$

Capítulo 4

G-Graduações de $UT_2(F)$

Iniciaremos nossa investigação das G-graduações de $UT_n(F)$ pelo caso mais simples, $UT_2(F)$.

4.1 Demonstração de Valenti

Mostraremos que, a menos de isomorfismos, as únicas G-graduações de $UT_2(F)$ são a trivial e a canônica. Esta primeira demonstração será feita seguindo as ideias de Valenti em [20].

Teorema 76 *Toda G-graduação de $UT_2(F)$ é, a menos de isomorfismo, trivial ou canônica.*

Demonstração: Denotemos $UT_2(F)$ por $\mathcal{A}$. A demonstração será dividida em quatro casos de acordo com a dimensão de $\mathcal{A}^{(e)}$.

<u>1^o **caso:**</u> $\dim(\mathcal{A}^{(e)}) = 3$. Neste caso, a G-graduação é claramente a trivial.

<u>2^o **caso:**</u> $\dim(\mathcal{A}^{(e)}) = 2$. Neste caso $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{(e)} \oplus \mathcal{A}^{(g)}$ para algum $g \in G$, $g \neq e$. Como, pelo Lema 64, $E_{11} + E_{22} \in \mathcal{A}^{(e)}$, então podemos completar $E_{11} + E_{22}$ a uma base de $\mathcal{A}^{(e)}$ com um elemento da forma $a_0E_{11} + bE_{12} + cE_{22}$ e então tomar no lugar deste segundo elemento, $(a_0E_{11} + bE_{12} + cE_{22}) - c(E_{11} + E_{22}) = aE_{11} + bE_{12}$, onde $a = a_0 - c$. Considere $a'E_{11} + b'E_{12} + c'E_{22}$ base de $\mathcal{A}^{(g)}$ sobre F, queremos mostrar que $a' = 0$ e $c' = 0$.

Verifiquemos primeiramente que no elemento $aE_{11}+bE_{12}$ devemos ter necessariamente $a\neq 0$. Para isto suponha que $a=0$, então de $\mathcal{A}^{(e)}\mathcal{A}^{(g)}\subset\mathcal{A}^{(g)}$ temos

$$(bE_{12})(a'E_{11}+b'E_{12}+c'E_{22}) = bc'E_{12} = \alpha(a'E_{11}+b'E_{12}+c'E_{22})$$

para algum $\alpha\in F$, e assim $\alpha a'=\alpha c'=0$. Se $c'\neq 0$ então como $\alpha c'=0$ temos $\alpha=0$ e assim $b=0$, o que não é possível. Ficamos portanto com $c'=0$.

Por outro lado, de $\mathcal{A}^{(g)}\mathcal{A}^{(e)}\subset\mathcal{A}^{(g)}$ obtemos $(a'E_{11}+b'E_{12}+c'E_{22})(bE_{12}) = a'bE_{12} = \alpha'(a'E_{11}+b'E_{12}+c'E_{22})$ para algum $\alpha'\in F$, o que implica que $a'=0$ ou $b=0$, e novamente temos que $a'=0$. Assim, $a'=c'=0$ e portanto $\mathcal{A}^{(g)} = \mathrm{Span}_F\{E_{12}\}\subset\mathcal{A}^{(e)}$ o que é absurdo.

Logo $a\neq 0$ e podemos portanto assumir que $E_{11}+bE_{12}$ e $E_{22}-bE_{12}=(E_{11}+E_{22})-(E_{11}+bE_{12})$ formam uma base de $\mathcal{A}^{(e)}$ sobre F.

Se $b=0$, então temos

$$\mathcal{A}^{(e)}=\mathrm{Span}_F\{E_{11}\}\oplus\mathrm{Span}_F\{E_{22}\}\quad\text{e}\quad\mathcal{A}^{(g)}=\mathrm{Span}_F\{E_{12}\},$$

e neste caso a G-graduação é a própria canônica.

Se $b\neq 0$, temos que $(a'E_{11}+b'E_{12}+c'E_{22})(E_{11}+bE_{12}) = a'(E_{11}+bE_{12})=0$ pois pertence a $\mathcal{A}^{(g)}\mathcal{A}^{(e)}\subseteq\mathcal{A}^{(g)}$ (pela G-graduação de $\mathcal{A}$) e pertence a $\mathcal{A}^{(e)}$ (pois é múltiplo de $E_{11}+bE_{12}$). Logo $a'=0$. Analogamente, $(E_{22}-bE_{12})(b'E_{12}+c'E_{22}) = c'(E_{22}-bE_{12})\in\mathcal{A}^{(g)}\cap\mathcal{A}^{(e)}$ e portanto $c'=0$.

Assim, temos que

$$\mathcal{A}^{(g)}=\mathrm{Span}_F\{E_{12}\}\quad\text{e}\quad\mathcal{A}^{(e)}=\mathrm{Span}_F\{E_{11}+E_{22}\}\oplus\mathrm{Span}_F\{E_{11}+bE_{12}\},$$

e portanto $\mathcal{A}$ com esta G-graduação é isomorfa à G-graduação canônica conforme mostramos no Exemplo 61.

<u>3^o **caso:**</u> $\dim(\mathcal{A}^{(e)})=1$. Mostraremos que este caso não pode ocorrer, para isto precisamos estudar os casos $\mathcal{A}=\mathcal{A}^{(e)}\oplus\mathcal{A}^{(g)}\oplus\mathcal{A}^{(h)}$ onde $\dim(\mathcal{A}^{(g)})=\dim(\mathcal{A}^{(h)})=1$ e $\mathcal{A}=\mathcal{A}^{(e)}\oplus\mathcal{A}^{(g)}$ com $\dim(\mathcal{A}^{(g)})=2$ e chegar sempre a um absurdo. Denotemos por J o radical de Jacobson de $\mathcal{A}$, e lembremos que já mostramos que J é o maior ideal nilpotente de $\mathcal{A}$, que $J=\mathrm{Span}_F\{E_{12}\}$ e portanto tem dimensão 1 e que em ambos os subcasos o Lema 64 se aplica, e portanto $\mathcal{A}^{(e)}=\mathrm{Span}_F\{E_{11}+E_{22}\}$.

Se $\mathcal{A}=\mathcal{A}^{(e)}\oplus\mathcal{A}^{(g)}\oplus\mathcal{A}^{(h)}$, com $\dim(\mathcal{A}^{(g)})=\dim(\mathcal{A}^{(h)})=1$, então existem

$$u=aE_{11}+bE_{12}+cE_{22}\quad\text{e}\quad v=a'E_{11}+b'E_{12}+c'E_{22}$$

tais que $\mathcal{A}^{(g)}=\mathrm{Span}_F\{u\}=\mathrm{Span}_F\{aE_{11}+bE_{12}+cE_{22}\}$ e $\mathcal{A}^{(h)}=\mathrm{Span}_F\{v\}=\mathrm{Span}_F\{a'E_{11}+b'E_{12}+c'E_{22}\}$.

- Se $gh \neq e$, então $gh \notin \{e,g,h\}$, e também $hg \notin \{e,g,h\}$, e portanto $\mathcal{A}^{(gh)} = \mathcal{A}^{(hg)} = \{0\}$. Logo

  - Se $g^2 \neq e$, então u é um elemento nilpotente. De fato, se $u^2 \neq 0$, então $\mathcal{A}^{(g^2)} \neq \{0\}$ e como $g^2 \neq e$ e $g^2 \neq g$ concluímos que $g^2 = h$. Logo $u^3 = u.u^2 \in \mathcal{A}^{(gh)} = \{0\}$ e assim $u^3 = 0$.

    Portanto $\mathcal{A}^{(g)} = \mathrm{Span}_F\{u\}$ tem dimensão 1 e está contido em J, o que implica $\mathcal{A}^{(g)} = J = \mathrm{Span}_F\{E_{12}\}$.

    Uma vez então que $\mathcal{A}^{(h)} = \mathrm{Span}_F\{a'E_{11}+b'E_{12}+c'E_{22}\}$ e $\{0\} = \mathcal{A}^{(g)}\mathcal{A}^{(h)} = \mathrm{Span}_F\{c'E_{12}\}$ temos $c' = 0$, e de $0 = \mathcal{A}^{(h)}\mathcal{A}^{(g)} = \mathrm{Span}_F\{a'E_{12}\}$ concluímos que $a' = 0$. Assim obtemos $\mathcal{A}^{(g)} = \mathcal{A}^{(h)}$, absurdo.
  - Se $h^2 \neq e$ então analogamente ao caso anterior obtemos um absurdo.
  - Se $g^2 = h^2 = e$, então $(\mathcal{A}^{(g)})^2 \subseteq \mathcal{A}^{(e)} = \mathrm{Span}_F\{E_{11} + E_{22}\}$ e assim $u^2 = \alpha(E_{11} + E_{22})$ para algum $\alpha \in F$. Se $\alpha = 0$ então $u^2 = 0$, e analogamente ao caso anterior obtemos um absurdo. Se $\alpha \neq 0$, então como $u^2 = a^2E_{11} + (ab+bc)E_{12} + c^2E_{22}$ é claro que $a \neq 0$. Similarmente, temos que considerar apenas o caso em que $v = a'E_{11} + b'E_{12} + c'E_{22}$ com $a' \neq 0$. Logo $0 \neq uv \in \mathcal{A}^{(gh)} = \{0\}$, um absurdo.

- Se $gh = e$ e $g^3 \neq e$ então $g^2 \neq h$ (pois $g^2 \neq g^{-1}$), $g^2 \neq g$ (pois $g \neq e$) e $g^2 \neq e$ (pois senão $gh = e = g^2$ implica $g = h$). Logo $g^2 \notin \{e,g,h\}$ e assim $\mathcal{A}^{(g^2)} = \{0\}$. Similarmente verificamos que $h^2 \notin \{e,g,h\}$ e assim $\mathcal{A}^{(h^2)} = \{0\}$. Portanto tanto $\mathcal{A}^{(g)}$ quanto $\mathcal{A}^{(h)}$ estão contidos em J, uma contradição com a dimensão de J ser 1.

- Por fim, se $gh = e$ e $g^3 = e$, então $h^3 = e$ e uma vez que $(\mathcal{A}^{(g)})^3 \subseteq \mathcal{A}^{(e)} = \mathrm{Span}_F\{E_{11} + E_{22}\}$, temos algumas possibilidades:

  - Se $u^3 = v^3 = 0$ então u e v são elementos nilpotentes, e analogamente ao caso anterior, $\mathcal{A}^{(g)} = \mathcal{A}^{(h)} = J$, o que não é possível.
  - Se $u^3 \neq 0$ então como $(\mathcal{A}^{(g)})^3 \subseteq \mathcal{A}^{(e)} = \mathrm{Span}_F\{E_{11} + E_{22}\}$ temos que $u^3 = \alpha(E_{11} + E_{22})$ para algum $\alpha \in F$, $\alpha \neq 0$. Temos então que $u^3 = a^3E_{11} + b(a^2 + ac + c^2)E_{12} + c^3E_{22} = \alpha(E_{11} + E_{22})$. Desde que $a \neq 0$, multiplicando u por a^{-1} obteríamos uma matriz cujo cubo é $E_{11} + E_{22}$, assim podemos supor sem perda de generalidade que $\alpha = 1$. Temos assim dois possíveis casos:

    * Se $b = 0$, então temos que u e u^2 são matrizes diagonais, assim $\dim(\mathrm{Span}_F\{u, u^2, e\}) = 2$, uma contradição, pois uma vez que $u^2 \in \mathcal{A}^{(h)}$ e $u^2 \neq 0$, como $\dim(\mathcal{A}^{(h)}) = 1$ temos que u^2 gera $\mathcal{A}^{(h)}$ e assim $\dim(\mathrm{Span}_F\{u, u^2, e\}) = 3$.

* Se $b \neq 0$, então obrigatoriamente temos $a^2 + ac + c^2 = 0$, mas uma vez que $a^3 = c^3 = 1$, a e c são raízes cúbicas da unidade, e portanto $a, c \in \{\xi, \xi^2, 1\}$ onde ξ é uma raiz cúbica primitiva da unidade. Logo temos um dos seguintes casos:
  · Se $c = a$, então podemos tomar u' um múltiplo de u da forma $u' = E_{11} + \beta E_{12} + E_{22}$, mas então $2u' - (u')^2 = E_{11} + E_{22} \in \mathcal{A}^{(e)}$ é um elemento diferente de zero que é a soma de elementos de $\mathcal{A}^{(g)}$ e $\mathcal{A}^{(g^2)}$, um absurdo.
  · Se $c = \xi a$, então podemos tomar u' um múltiplo de u da forma $u' = \xi E_{11} + \beta E_{12} + \xi^2 E_{22}$, mas neste caso $u' + u'^2 = (\xi + \xi^2)(E_{11} + E_{22}) \in \mathcal{A}^{(e)}$ é um elemento diferente de zero que é a soma de elementos de $\mathcal{A}^{(g)}$ e $\mathcal{A}^{(g^2)}$, um absurdo.
  · Por fim, se $c = \xi^2 a$, então tomando u' um múltiplo de u da forma $u' = \xi^2 E_{11} + \beta E_{12} + \xi E_{22}$, e então $u' + u'^2 = (\xi + \xi^2)(E_{11} + E_{22}) \in \mathcal{A}^{(e)}$ é um elemento diferente de zero que é a soma de elementos de $\mathcal{A}^{(g)}$ e $\mathcal{A}^{(g^2)}$, absurdo.

– Se $v^3 \neq 0$, analogamente ao caso anterior obtemos um absurdo.

Se $\mathcal{A} = \mathcal{A}^{(e)} \oplus \mathcal{A}^{(g)}$ com $\dim(\mathcal{A}^{(g)}) = 2$, podemos tomar $u, v \in \mathcal{A}^{(g)}$ de forma que $\mathcal{A}^{(g)} = \mathrm{Span}_F\{u, v\}$, $u = aE_{11} + bE_{12} + cE_{12}$, $v = a'E_{11} + b'E_{12} + c'E_{12}$.

- Se $g^2 \neq e$ obtemos $(\mathcal{A}^{(g)})^2 = \{0\}$ e portanto $\mathcal{A}^{(g)} \subseteq J$, o que não pode ocorrer devido às dimensões.

- Se $g^2 = e$ então $u^2 = \alpha(E_{11} + E_{22})$ para algum $\alpha \in F$. Analogamente a um subcaso anterior, se $\alpha \neq 0$ podemos supor $\alpha = 1$. Logo ou $u^2 = 0$ (e assim $u = bE_{12}$) ou $u^2 = E_{11} + E_{22}$ (e obtemos $a^2 = c^2 = 1$ e $ab + bc = 0$, o que implica também que $b = 0$ ou $a = -c$). Assim, desde que temos também $u \neq E_{11} + E_{22}$ (já que $\mathcal{A}^{(e)} = \mathrm{Span}_F\{E_{11} + E_{22}\}$), podemos supor sem perda de generalidade que

$$u = E_{12} \quad \text{ou} \quad u = E_{11} + bE_{12} - E_{22}.$$

  Note que procedendo analogamente podemos também supor sem perda de generalidade que $v = E_{12}$ ou $v = E_{11} + b'E_{12} - E_{22}$. E desde que $u \neq v$ podemos assumir que $v = E_{11} + b'E_{12} - E_{22}$.

  – Se $u = E_{12}$ então $uv = -E_{12} \notin \mathcal{A}^{(e)}$, o que não pode ocorrer já que $uv \in \mathcal{A}^{(g^2)} = \mathcal{A}^{(e)}$.
  – Se $u = E_{11} + bE_{12} - E_{22}$ então de $uv \in \mathcal{A}^{(e)}$ obtemos que $b' - b$ (o coeficiente de E_{12} em uv) é zero e assim $b' = b$, o que não é possível pois $u \neq v$.

<u>4^o **caso:**</u> $\dim(\mathcal{A}^{(e)}) = 0$. Este caso também não pode ocorrer. Pelo Lema 64, $E_{11} + E_{22} \in \mathcal{A}^{(e)}$, e portanto sua dimensão não pode ser zero. $\square$

4.2 Outras demonstrações

A demonstração dada na seção anterior lida com fatos bastante elementares, porém parece praticamente impossível de ser adaptável ao caso geral $UT_n(F)$ devido à multiplicidade dos casos a serem estudados. No entanto, ao analisarmos cuidadosamente tal demonstração, podemos notar que o ponto chave está na garantia da existência de idempotentes ortogonais $e_1 = E_{11} + \lambda_1 E_{12}$ e $e_2 = E_{22} + \lambda_2 E_{12}$ em $UT_2(F)^{(e)}$. Isto é, se pudermos de algum modo garantir a existência de tais idempotentes em $UT_2(F)^{(e)}$, então nossa demonstração do teorema se simplificaria por demais.

No caso em que G é um grupo abeliano finito e F um corpo algebricamente fechado de característica zero, com ajuda do Teorema 73 podemos encontrar nossos idempotentes ortogonais em $UT_2(F)^{(e)}$. Vejamos como isso pode ser feito empregando as ideias utilizadas por Valenti e Zaicev em [21].

Encontrando os idempotentes ortogonais em $UT_2(F)$ seguindo as idéias de [21]: Comecemos com os idempotentes ortogonais E_{11} e E_{22}. Nada nos garante que eles pertençam a $UT_2(F)^{(e)}$ já que eles podem inclusive não ser homogêneos. Tentemos então, a partir deles, construir os idempotentes e_1 e e_2 desejados. A ideia principal é usar o Teorema 73 que estabelece que um elemento é homogêneo na G-graduação se, e somente se, é um autovetor de todo elemento de $\hat{G}$ e que um subespaço é G-graduado se, e somente se, é invariante por todo elemento de $\hat{G}$.

Pelo Lema 33, $J := J(UT_2(F)) = \mathrm{Span}_F\{E_{12}\}$ é invariante por automorfismos de $UT_2(F)$, e assim, desde que J é gerado por E_{12}, temos que E_{12} é um autovetor de qualquer elemento de $\hat{G}$. Logo, para cada $\varphi \in \hat{G}$, existe λ (dependendo de φ) tal que

$$\varphi(E_{12}) = \lambda E_{12}.$$

Além disso, pelo Lema 42, temos que tanto o anulador de J à direita como à esquerda são invariantes por automorfismos de $UT_2(F)$. Desde que claramente $\mathrm{Ann}_d(J) = \mathrm{Span}_F\{E_{11}, E_{12}\}$ e $\mathrm{Ann}_e(J) = \mathrm{Span}_F\{E_{22}, E_{12}\}$, então

$$\mathrm{Span}_F\{E_{11}, E_{12}\} \text{ e } \mathrm{Span}_F\{E_{22}, E_{12}\}$$

são invariantes por todos os automorfismos de $UT_2(F)$. Logo, para todo $\varphi \in \hat{G}$, temos

$$\varphi(E_{11}) = \alpha E_{11} + \beta E_{12} \;\text{ e }\; \varphi(E_{22}) = \gamma E_{22} + \delta E_{12},$$

onde $\alpha, \beta, \gamma, \delta \in F$ dependem de φ. Como E_{11} é idempotente, temos $\varphi(E_{11}) = \varphi(E_{11}^2) = \alpha^2 E_{11} + \alpha\beta E_{12}$. Assim $\alpha = \alpha^2$ e $\beta = \alpha\beta$, e como φ é um automorfismo temos que obrigatoriamente $\alpha = 1$. De maneira análoga, $\gamma = 1$. Concluímos então que

$$\varphi(E_{11}) = E_{11} + \beta E_{12} \text{ e } \varphi(E_{22}) = E_{22} + \delta E_{12}.$$

Vemos então que E_{11} e E_{22}, apesar de não serem necessariamente estáveis por elementos de $\hat{G}$, são estáveis módulo J.

Vamos então, a partir de E_{11} e E_{22}, construir elementos que chamaremos de e_1'' e e_2'' estáveis por todos os elementos de $\hat{G}$. Para tanto, a partir de agora, fixaremos ϕ um elemento de $\hat{G}$ e usaremos ψ para denotar um elemento qualquer de $\hat{G}$ diferente de ϕ. Do que foi exposto acima, temos que existem $a_1, a_2, b_1, b_2, \lambda, \mu \in F$ tais que

$$\phi(E_{11}) = E_{11} + a_1 E_{12}, \quad \phi(E_{22}) = E_{22} + a_2 E_{12} \quad \text{e} \quad \phi(E_{12}) = \lambda E_{12}$$

$$\psi(E_{11}) = E_{11} + b_1 E_{12}, \quad \psi(E_{22}) = E_{22} + b_2 E_{12} \quad \text{e} \quad \psi(E_{12}) = \mu E_{12}.$$

Como G é um grupo finito, se $m = |\,G|$, então $\phi^m = \psi^m = Id$, o homomorfismo identidade. Logo, para $i = 1, 2$, temos

$$E_{ii} = \phi^m(E_{ii}) = E_{ii} + a_i(1 + \lambda + \cdots + \lambda^{m-1}),$$

e assim

$$0 = a_i(1 + \lambda + \cdots + \lambda^{m-1}). \tag{4.1}$$

Da mesma forma,

$$0 = b_i(1 + \mu + \cdots + \mu^{m-1}). \tag{4.2}$$

Uma vez que $\hat{G}$ é abeliano, $\phi\psi(E_{ii}) = \psi\phi(E_{ii})$ para $i = 1, 2$, e assim

$$E_{ii} + a_i E_{12} + \lambda b_i E_{12} = \phi\psi(E_{ii}) = \psi\phi(E_{ii}) = E_{ii} + b_i E_{12} + \mu a_i E_{12}$$

de onde tiramos

$$b_i(1 - \lambda) = a_i(1 - \mu).$$

Agora estamos prontos para construir os elementos e_1'' e e_2'' e, a partir deles, os elementos e_1 e e_2 desejados. Temos dois casos:

- Se existe um elemento de $\hat{G}$ cujo autovalor associado a E_{12} seja diferente de 1: Neste caso digamos que λ seja diferente de 1. Então podemos construir os elementos

$$e_1'' = E_{11} + \frac{a_1}{1 - \lambda} E_{12} \quad \text{e} \quad e_2'' = E_{22} + \frac{a_2}{1 - \lambda} E_{12}$$

que são estáveis por ϕ. De fato,

$$\phi(e_1'') = \phi\left(E_{11} + \frac{a_1}{1-\lambda}E_{12}\right) = E_{11}+a_1E_{12}+\frac{a_1\lambda}{1-\lambda}E_{12} = E_{11}+\frac{a_1}{1-\lambda}E_{12} = e_1''$$

$$\phi(e_2'') = \phi\left(E_{22} + \frac{a_2}{1-\lambda}E_{12}\right) = E_{22}+a_2E_{12}+\frac{a_2\lambda}{1-\lambda}E_{12} = E_{22}+\frac{a_2}{1-\lambda}E_{12} = e_2''.$$

Além disso, uma vez que $b_i(1-\lambda) = a_i(1-\mu)$, tais elementos são também estáveis por qualquer $\psi \in \hat{G}$.

Estes elementos são também idempotentes

$$(e_1'')^2 = \left(E_{11} + \frac{a_1}{1-\lambda}E_{12}\right)^2 = E_{11} + \frac{a_1}{1-\lambda}E_{12} = e_1''$$

$$(e_2'')^2 = \left(E_{22} + \frac{a_2}{1-\lambda}E_{12}\right)^2 = E_{22} + \frac{a_2}{1-\lambda}E_{12} = e_2''$$

mas, em geral, não são ortogonais, pois

$$e_1''e_2'' = \left(E_{11} + \frac{a_1}{1-\lambda}E_{12}\right)\left(E_{22} + \frac{a_2}{1-\lambda}E_{12}\right) = \frac{a_1+a_2}{1-\lambda}E_{12}.$$

Note que este é um problema fácil de ser corrigido, basta tomar então

$$e_1 := e_1'' - e_1''e_2'' = E_{11} + \frac{a_1}{1-\lambda}E_{12} - \frac{a_1+a_2}{1-\lambda}E_{12} = E_{11} - \frac{a_2}{1-\lambda}E_{12}$$

$$e_2 := e_2'' = E_{22} + \frac{a_2}{1-\lambda}E_{12}.$$

É claro que e_1 e e_2 são idempotentes estáveis por qualquer automorfismo de $\hat{G}$ e que $e_1e_2 = 0$ e $e_2e_1 = 0$.

- Se não existe elemento de $\hat{G}$ cujo autovalor associado a E_{12} seja diferente de 1: Neste caso tomamos $e_1 = E_{11}$ e $e_2 = E_{22}$, já que neste caso estes elementos são estáveis pelos elementos de $\hat{G}$, pois de (4.1) e (4.2) temos $a_i = 0$ e $b_i = 0$.

Construímos então e_1 e e_2 idempotentes ortogonais da forma desejada e homogêneos. Pelo Lema 68, e_1 e e_2 pertencem a $UT_2(F)^{(e)}$, o que conclui a demonstração. □

No caso geral, as técnicas empregadas acima não se aplicam. Neste caso, investiguemos mais a fundo os idempotentes de $UT_2(F)$.

Se $e = aE_{11} + bE_{12} + cE_{22}$ é idempotente temos

$$aE_{11} + bE_{12} + cE_{22} = (aE_{11} + bE_{12} + cE_{22})^2 = a^2E_{11} + b(a+c)E_{12} + c^2E_{22},$$

e assim

$$a^2 = a, \quad c^2 = c \quad \text{e}$$

$$b = 0 \quad \text{ou} \quad a + c = 1.$$

Os idempotentes então são E ou das formas $E_{11} + bE_{12}$, $E_{22} + bE_{12}$. Qualquer par de idempotentes ortogonais então só pode ser, como mostrado anteriormente, da forma $E_{11} + \alpha E_{12}$ e $E_{22} - \alpha E_{12}$. Note que estes idempotentes conjugados por $E_{11} - E_{22} + \alpha E_{12}$ dão como resultado E_{11} e E_{22}, respectivamente. Isto é,

$$(E_{11} - E_{22} + \alpha E_{12})^{-1}(E_{11} + \alpha E_{12})(E_{11} - E_{22} + \alpha E_{12}) = E_{11} \quad \text{e}$$

$$(E_{11} - E_{22} + \alpha E_{12})^{-1}(E_{22} - \alpha E_{12})(E_{11} - E_{22} + \alpha E_{12}) = E_{22}.$$

Posteriormente veremos que o análogo vale em $UT_n(F)$, ou seja, que dado um conjunto qualquer com n idempotentes ortogonais em $UT_n(F)$, eles são conjugados a $E_{11}, \ldots, E_{nn}$.

Assim, não precisaremos nos preocupar com a forma dos n idempotentes, mas apenas mostrar que de fato existem n idempotentes ortogonais em $UT_n(F)^{(e)}$. A fim de garantir tal existência, a ideia chave no caso $n = 2$ é mostrar que de fato existe um idempotente $e \in UT_2(F)^{(e)}$ com $e \neq E_{11} + E_{22}$, pois neste caso e e $E_{11} + E_{22} - e$ formam um par dos idempotentes desejados.

No entanto, mostrar que existe este idempotente não é uma tarefa fácil. Desde que, ao contrário do que acontece no artigo [21], trabalhar no caso $n = 2$ não simplifica a demonstração feita no artigo [22], não faz sentido exemplificar aqui o caso $n = 2$, e portanto deixaremos esta demonstração apenas para o próximo capítulo.

Capítulo 5

G-Graduações de $UT_n(F)$

Generalizaremos agora as ideias apresentadas no capítulo anterior, mostrando que qualquer G-graduação de $UT_n(F)$ é elementar.

5.1 Para F um corpo algebricamente fechado de característica zero e G um grupo finito

O objetivo desta seção é demonstrar o seguinte teorema:

Teorema 77 *Sejam F um corpo algebricamente fechado de característica zero e G um grupo abeliano finito. Então $UT_n(F)$, como álgebra G-graduada, é isomorfa a $UT_n(F)$ com uma G-graduação elementar.*

A demonstração será feita seguindo a técnica usada por Valenti e Zaicev em [21]. Para tanto serão necessários alguns lemas que serão enunciados e demonstrados a seguir.

Lema 78 *Na álgebra G-graduada $UT_n(F) = \oplus_{g\in G} UT_n(F)^{(g)}$, todas as matrizes elementares E_{ij} são homogêneas se, e somente se, a G-graduação é elementar.*

Demonstração: Denote $\mathcal{A} = UT_n(F)$.

Se a G-graduação é elementar, então, por definição, as matrizes elementares E_{ij} são homogêneas.

Reciprocamente, se as matrizes elementares E_{ij} são homogêneas, então pelo Lema 68, uma vez que as matrizes E_{ii} são idempotentes, temos $E_{ii} \in \mathcal{A}^{(e)}$ para $i = 1 \ldots, n$.

Sejam então

$$g_1 = e \qquad \text{e} \qquad g_{i+1} = g_i h_i, \quad \text{para cada} \quad i = 1, \ldots, n-1,$$

onde h_i é tal que $E_{i,i+1} \in \mathcal{A}^{(h_i)}$. Se $i < j$,

$$E_{ij} = E_{i,i+1} \ldots E_{j-1,j} \in \mathcal{A}^{(g_i^{-1} g_{i+1} g_{i+1}^{-1} \cdots g_{j-1} g_{j-1}^{-1} g_j)} = \mathcal{A}^{(g_i^{-1} g_j)}.$$

Portanto $E_{ij} \in \mathcal{A}^{(g_i^{-1} g_j)}$, para todo $1 \leq i \leq j \leq n$, e a G-graduação é elementar correspondente à n-upla $(g_1, \ldots, g_n)$. □

Proposição 79 *Considere a álgebra das matrizes triangulares superiores $n \times n$ sobre um corpo F algebricamente fechado de característica zero, graduada por um grupo abeliano finito G*

$$UT_n(F) = \bigoplus_{g \in G} UT_n(F)^{(g)}.$$

Então existem matrizes estritamente triangulares superiores $Y_1, \ldots, Y_n$ tais que $e_1 = E_{11} + Y_1, \ldots, e_n = E_{nn} + Y_n$ são idempotentes ortogonais pertencentes a $UT_n(F)^{(e)}$.

A demonstração desta proposição é bastante extensa e, por isso, antes de a exibirmos, mostraremos a ideia por trás dela.

A prova será feita por indução sobre n. Para usarmos a hipótese de indução, decomporemos $UT_n(F)$ na soma de três subespaços, a saber: uma cópia de $UT_{n-1}(F)$ a ser denotada pelo mesmo nome, o subespaço W gerado pelos elementos E_{in} com $i = 1, \ldots, n-1$ e finalmente o subespaço C' gerado por E_{nn}.

$$UT_n(F) = \underbrace{\begin{pmatrix} F & F & \ldots & F & 0 \\ 0 & F & \ldots & F & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & F & 0 \\ 0 & \ldots & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{UT_{n-1}(F)} \oplus \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & F \end{pmatrix}}_{C'} \oplus \underbrace{\begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 & F \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & F \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & F \\ 0 & 0 & \ldots & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{W}. \tag{5.1}$$

Desta maneira, trabalharemos com o espaço quociente $UT_n(F)/W$, que por sua vez é isomorfo a $UT_{n-1}(F) \oplus C'$. Por nossa hipótese de indução, encontraremos, em $UT_{n-1}(F)$, $n-1$ elementos idempotentes ortogonais cujas classes são elementos homogêneos de $UT_n(F)/W$ da forma desejada, os chamaremos de $e'_1, \ldots, e'_{n-1}$, completaremos com um idempotente e'_n pertencente a C'. A partir destes elementos construiremos nossos idempotentes, os e_k's do enunciado.

Note que este processo é a generalização do feito na Seção 4.2. Lá, por estarmos trabalhando em $UT_2(F)$, tínhamos $J := J(UT_2(F)) = \text{Span}_F\{E_{12}\}$, o qual coincide com W neste caso. Assim, se considerarmos (5.1) para $n = 2$ teremos simplesmente

$$UT_2(F) = \underbrace{\text{Span}_F\{E_{11}\}}_{UT_1(F)} \oplus \underbrace{\text{Span}_F\{E_{22}\}}_{C'} \oplus \underbrace{\text{Span}_F\{E_{12}\}}_{W=J}$$

e portanto nosso espaço quociente $UT_2(F)/W$ é isomorfo a $\text{Span}_F\{E_{11}\} \oplus \text{Span}_F\{E_{22}\}$. Neste caso os idempotentes e'_1 e e'_2 a serem tomados são simplesmente E_{11} e E_{22}, a partir dos quais construímos os idempotentes e_1 e e_2.

Demonstração:

Como F é algebricamente fechado de característica zero e G abeliano finito, segue do Teorema 50 que o conjunto das representações lineares de G sobre F, $\{\phi_1, \ldots, \phi_m\}$, coincide com o grupo dos caracteres irredutíveis de G, isto é, $\hat{G} = \{\phi_1, \ldots, \phi_m\}$. Pelo Teorema 73, $\hat{G}$ age sobre $UT_n(F)$ por automorfismos de maneira que um subespaço $B \subseteq UT_n(F)$ é homogêneo na G-graduação se, e somente se, $\phi_i(B) = B$ para todo $i = 1, \ldots, m$.

Provaremos por indução que existem os idempotentes ortogonais da Proposição 79 e que eles são estáveis pelos elementos de $\hat{G}$.

No caso inicial, $n = 1$, temos trivialmente que a única G-graduação possível é a trivial e $\{E_{11}\}$ é um conjunto de idempotentes ortogonais em $UT_n(F)^{(e)}$. Como E_{11} é a unidade de $UT_n(F)$, é claro que E_{11} é estável por qualquer automorfismo.

Suponha agora nossa tese válida para $n-1$, $n \geq 2$.

Considere

$$W = \text{Span}_F\{E_{1n}, \ldots, E_{n-1,n}\}.$$

Segue do Lema 33 que W é invariante por qualquer automorfismo de $UT_n(F)$, o que, pelo Teorema 73, implica que W é homogêneo na G-graduação e, portanto, o quociente $UT_n(F)/W$ é uma álgebra G-graduada.

Seja então $\rho : UT_n(F) \to UT_n(F)/W$ a projeção canônica, isto é,

$$\begin{array}{cccc} \rho : & UT_n(F) & \to & UT_n(F)/W \\ & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & a_{1n} \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & a_{2n} \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n-1} & a_{n-1,n} \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} & \mapsto & \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix} + W \end{array}$$

Segue de (5.1) que podemos decompor $UT_n(F)/W$ na soma direta de duas subálgebras ortogonais:

$$UT_n(F)/W = \underbrace{\rho \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1,n-1} & 0 \\ 0 & a_{22} & \dots & a_{2,n-1} & 0 \\ \vdots & \ddots & \ddots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \ddots & \ddots & a_{n-1,n-1} & 0 \\ 0 & \dots & \dots & 0 & 0 \end{pmatrix}}_{\rho(UT_{n-1}(F))} \oplus \underbrace{\rho \begin{pmatrix} 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \dots & 0 & a_{nn} \end{pmatrix}}_{C}$$

isto é,

$$UT_n(F)/W = \rho(UT_{n-1}(F)) \oplus C,$$

onde $C = \rho(\mathrm{Span}_F\{E_{nn}\})$ é a projeção do subespaço de $UT_n(F)$ gerado por E_{nn} e $\rho(UT_{n-1}(F))$ a imagem de $\mathrm{Span}_F\{E_{ij} \mid 1 \leq i \leq j < n\}$. Claramente,

$$\rho(UT_{n-1}(F)) \cong UT_{n-1}(F).$$

Como $UT_n(F)/W$ é uma álgebra de dimensão finita, $UT_n(F)/W = \rho(UT_{n-1}(F)) \oplus C$ e, $\rho(UT_{n-1}(F))$ e C são ortogonais, temos pelo Lema 32 que $J(UT_n(F)/W) = J(\rho(UT_{n-1}(F)) \oplus C) = J(\rho(UT_{n-1}(F))) \oplus J(C)$ e como $J(C) = \{0\}$ obtemos

$$J(\rho(UT_{n-1}(F))) = J(UT_n(F)/W).$$

Agora, pelo Lema 33, $J(UT_n(F)/W)$ é invariante por qualquer automorfismo de $UT_n(F)/W$ e assim $J(\rho(UT_{n-1}(F)))$ também o é. Pelo Lema 42 seu anulador bilateral, que mostramos no Exemplo 40 que é $\mathrm{Span}_F\{\rho(E_{nn}), \rho(E_{1,n-1})\}$, é também invariante. Portanto, para todo automorfismo ϕ de $UT_n(F)/W$ existem $\alpha, \beta \in F$ tais que

$$\phi(E_{nn} + W) = \alpha(E_{nn} + W) + \beta(E_{1,n-1} + W).$$

Por outro lado, como $E_{nn}^2 = E_{nn}$, obtemos

$$\phi(E_{nn} + W) = \phi(E_{nn}^2 + W) = [\phi(E_{nn} + W)]^2 = \alpha^2(E_{nn} + W).$$

Assim, $\beta = 0$ e $\alpha = \alpha^2$ e, como ϕ é um automorfismo, temos $\alpha = 1$. Logo

$$\phi(E_{nn} + W) = E_{nn} + W \tag{5.2}$$

para todo automorfismo $\phi \in \text{Aut}(UT_n(F)/W)$.

Portanto C é uma subálgebra invariante por todo automorfismo ϕ de $UT_n(F)/W$ e como, por um análogo do Exemplo 40, $\rho(UT_{n-1}(F)) = \text{Ann}(C)$, concluímos pelo Lema 42 que $\rho(UT_{n-1}(F))$ também é invariante. Assim, pelo Teorema 73, $\rho(UT_{n-1}(F))$ é G-graduado e, desde que temos também $\rho(UT_{n-1}(F)) \cong UT_{n-1}(F)$, por nossa hipótese de indução, a tese deste lema vale para $\rho(UT_{n-1}(F))$, e, portanto, existem $Z_i \in \text{Span}_F\{E_{kl} \mid 1 \leq k < l \leq n-1\}$ tais que, para cada $i = 1, \ldots, n-1$, $f_i = (E_{ii} + Z_i) + W$ são idempotentes ortogonais pertencentes a $UT_n(F)/W$, e estáveis pelos elementos de $\hat{G}$, isto é, $\phi_j((E_{ii} + Z_i) + W) = (E_{ii} + Z_i) + W$ para todo $j = 1, \ldots, m$. Tomando então para cada i, e'_i na preimagem de f_i temos

$$e'_1 = E_{11} + Z_1, \ldots, e'_{n-1} = E_{n-1,n-1} + Z_{n-1}$$

são idempotentes ortogonais estáveis sob todos os automorfismos $\phi_1, \ldots, \phi_m$ módulo W, isto é, $\phi_j(e'_i) + W = e'_i + W$. Claramente

$$e'_n := E_{nn}$$

é também idempotente, ortogonal aos outros e'_i, e, por (5.2), temos também $\phi_j(e'_n) + W = e'_n + W$, para todo $j = 1, \ldots, m$.

Construiremos agora a partir dos e'_j's os e_j's desejados. Para isto, antes construíremos primeiramente outros elementos, e''_j, $1 \leq j \leq n$ estáveis pelos elementos de $\hat{G}$.

Sabemos que os e'_j's são fixos módulo W pelos automorfismos de $\hat{G}$. Temos então que, dada uma base $\{w_1, \ldots, w_{n-1}\}$ de W, para qualquer $\phi \in \hat{G}$

$$\phi(e'_j) = e'_j + a_1 w_1 + \cdots + a_{n-1} w_{n-1}$$

onde $a_1, \ldots, a_{n-1} \in F$ dependem tanto de j quanto de ϕ. Pelo Corolário 75, podemos supor que a base $\{w_1, \ldots, w_{n-1}\}$ de W é composta por autovetores comuns a $\phi_1, \ldots, \phi_m$. Se, para $i = 1, \ldots, n-1$, $\phi(w_i) = \lambda_i w_i$ onde $\lambda_i \in F$ depende de ϕ, então é claro que

$$\phi^k(e'_j) = e'_j + \sum_{i=1}^{n-1} a_i(1 + \lambda_i + \cdots + \lambda_i^{k-1}) w_i.$$

Como a ordem de $\hat{G}$ é m, a mesma de G, então $\phi^m(e'_j) = e'_j$ e, portanto, quando $k = m$ temos que o coeficiente de cada w_i na soma acima é zero, ou seja,

$$a_i(1 + \lambda_i + \cdots + \lambda_i^{m-1}) = 0 \tag{5.3}$$

para todo $i = 1, \ldots, n-1$.

Da mesma forma, se $\psi \in \hat{G}$, então existem $\mu_1, \ldots, \mu_{n-1} \in F$ tais que $\psi(w_i) = \mu_i w_i, i = 1, \ldots, n-1$. Além disso, para cada $j = 1, \ldots, n$, temos que existem $b_1, \ldots, b_n \in F$ tais que

$$\psi(e'_j) = e'_j + b_1 w_1 + \cdots + b_{n-1} w_{n-1} \quad \text{e} \quad b_i(1 + \mu_i + \cdots + \mu_i^{m-1}) = 0$$

para $i = 1, \ldots, n-1$.

Como $\hat{G}$ é comutativo, $\phi\psi = \psi\phi$, e assim

$$e'_j + \sum_{i=1}^{n-1} (b_i + \mu_i a_i) w_i = \psi\phi(e'_j) = \phi\psi(e'_j) = e'_j + \sum_{i=1}^{n-1} (a_i + \lambda_i b_i) w_i.$$

Comparando então os coeficientes de w_i temos $b_i + \mu_i a_i = a_i + \lambda_i b_i$, e assim

$$b_i(1 - \lambda_i) = a_i(1 - \mu_i)\,, \; i = 1, \ldots, n-1.$$

Estamos prontos para construir os e''_j:

- Se $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ são todos diferentes de 1: Tomamos

$$e''_j = e'_j + \frac{a_1}{1 - \lambda_1} w_1 + \cdots + \frac{a_{n-1}}{1 - \lambda_{n-1}} w_{n-1}.$$

  Note que os e''_j's são estáveis por ϕ. De fato, para qualquer $1 \leq j \leq n$,

$$\begin{aligned} \phi(e''_j) &= \phi(e'_j) + \sum_i \frac{a_i}{1 - \lambda_i} \phi(w_i) = e'_j + \sum_i a_i w_i + \sum_i \frac{a_i}{1 - \lambda_i} \lambda_i w_i \\ &= e'_j + \sum_i a_i \left(1 + \frac{\lambda_i}{1 - \lambda_i}\right) w_i = e'_j + \sum_i \frac{a_i}{1 - \lambda_i} w_i = e''_j. \end{aligned}$$

- Se $\lambda_i = 1$, mas $\mu_i \neq 1$ para algum $\psi \in \hat{G}$: Trocamos o coeficiente de w_i em e''_j por $\frac{b_i}{1-\mu_i}$ (intuitivamente, isto vem do fato que quando $\lambda_i \neq 1$ e $\mu_i \neq 1$, então $\frac{a_i}{1-\lambda_i} = \frac{b_i}{1-\mu_i}$). Observando então que de (5.3) temos $a_i = 0$, podemos calcular o coeficiente de w_i em $\phi(e''_j)$, que é dado por

$$a_i w_i + \frac{b_i}{1 - \mu_i} \phi(w_i) = \frac{b_i \lambda_i}{1 - \mu_i} w_i = \frac{b_i}{1 - \mu_i} w_i,$$

  que é como w_i aparece em e''_j. Concluímos então que neste caso também e''_j é estável por ϕ.

- Se não existe ψ com autovalor associado a w_i diferente de 1: Colocamos o coeficiente de w_i como zero. Neste caso é fácil ver que, como $\lambda_i = 1$ somente se $a_i = 0$ (veja (5.3)), então em $\phi(e''_j)$ obtemos o coeficiente de w_i sendo zero, e assim e''_j é estável por ϕ.

Logo em todos os casos

$$\phi(e''_j) = e''_j.$$

Como $b_i(1 - \lambda_i) = a_i(1 - \mu_i)$ e temos também que $\mu_i = 1$ somente se $b_i = 0$, facilmente obtemos que $\psi(e''_j) = e''_j$ para todo $\psi \in \hat{G}$.

Denotemos, por simplicidade,

$$u_j = e''_j - e'_j, \quad \text{para} \quad j = 1, \ldots, n.$$

Lembrando que os w_i's são elementos de W temos que $u_j \in W$, $j = 1, \ldots, n$. Além disso, como

$$W^2 = 0, \quad We'_i = 0\,, \quad e'_n W = 0\,, \quad i = 1, \ldots, n-1$$

e os elementos $e'_1, \ldots, e'_n$ são idempotentes ortogonais, obtemos para $i = 1, \ldots, n-1$:

$$(e''_i)^2 = (e'_i + u_i)^2 = (e'_i)^2 + e'_i u_i + u_i e'_i + (u_i)^2 = e'_i + e'_i u_i,$$

$$(e''_n)^2 = (e'_n + u_n)^2 = (e'_n)^2 + e'_n u_n + u_n e'_n + (u_n)^2 = e'_n + u_n e'_n,$$

$$(e''_i)^2 (e''_n)^2 = (e'_i + e'_i u_i)(e'_n + u_n e'_n) = e'_i e'_n + e'_i u_n e'_n + e'_i u_i e'_n + e'_i u_i u_n e'_n = e'_i (u_n + u_i) e'_n.$$

Definimos então os elementos

$$e_i = e'_i + e'_i u_i - e'_i (u_i + u_n) e'_n, \quad \text{para} \ i = 1, \ldots, n-1,$$

$$e_n = e'_n + u_n e'_n.$$

Note que, para cada $j = 1, \ldots, n$, e_j é da forma dada no teorema, pois e'_j é da forma $E_{jj} + Z_j$, onde Z_j pertence ao radical de Jacobson e os u_t's, $t = 1\ldots, n$, pertencem ao radical de Jacobson, que é um ideal. Além disso, como, para $i = 1, \ldots, n-1$,

$$e_i = (e''_i)^2 - (e''_i)^2 (e''_n)^2 \quad \text{e} \quad e_n = (e''_n)^2,$$

e os elementos e''_j, $j = 1, \ldots, n$, são estáveis pelos automorfismos de $\hat{G}$, temos que o mesmo ocorre com os elementos e_j. Temos assim que, pelo Teorema 73, cada e_j é homogêneo, e portanto, se mostrarmos que os elementos e_j's são idempotentes, então pelo Lema 68, teremos que os e_j's pertencem a $\mathcal{A}^{(e)}$.

Falta portanto mostrar que os elementos e_j's são idempotentes e ortogonais para completar a demonstração. Temos, para $1 \leq i, j \leq n-1$,

- $e_je_i = (e'_j + e'_ju_j - e'_j(u_j+u_n)e'_n)e'_i(1+u_i-(u_i+u_n)e'_n)$
  $= (e'_je'_i + e'_j\underbrace{u_je'_i}_{0} - e'_j(u_j+u_n)\underbrace{e'_ne'_i}_{0})(1+u_i-(u_i+u_n)e'_n)$
  $= \delta_{ij}e'_i(1+u_i-(u_i+u_n)e'_n) = \delta_{ij}e_i$
- $e_n^2 = (1+u_n)e'_n(e'_n+u_ne'_n) = (1+u_n)(\underbrace{(e'_n)^2}_{e'_n} + \underbrace{e'_nu_n}_{0}e'_n)$
  $= (1+u_n)e'_n = e_n$
- $e_ne_j = (1+u_n)e'_ne'_j(1+u_j-(u_j+u_n)e'_n) = 0$
- $e_je_n = (e'_j+e'_ju_j-e'_j(u_j+u_n)e'_n)(e'_n+u_ne'_n) = e'_ju_ne'_n+e'_ju_je'_n-e'_j(u_j+u_n)e'_n =$
  $= 0.$

Concluindo assim a demonstração. □

Com todos estes resultados em mão, finalmente podemos fazer a demonstração do teorema:

Demonstração: Denotaremos $\mathcal{A} = UT_n(F)$ nesta demonstração e J o radical de Jacobson de $\mathcal{A}$.

Pela Proposição 79, podemos tomar

$$e_1 = E_{11} + Y_1, \dots, e_n = E_{nn} + Y_n$$

os idempotentes ortogonais pertencentes a $\mathcal{A}^{(e)}$, tais que $Y_1, \dots, Y_n$ são matrizes triangulares estritamente superiores.

Considere as subálgebras $\mathcal{A}_{ij} := e_i\mathcal{A}e_j$. Pelo Lema 70, temos que cada $\mathcal{A}_{ij}$ é um subespaço homogêneo, $\mathcal{A} = \oplus_{1\leq i\leq j\leq n}\mathcal{A}_{ij}$ e $\dim(\mathcal{A}_{ij}) = 1$ para todo $i \leq j$.

No caso em que $i < j$, é claro que $\mathcal{A}_{ij}^2 = e_i\mathcal{A}e_je_i\mathcal{A}e_j = \{0\}$, e por ser nilpotente $\mathcal{A}_{ij} \subseteq J$. Uma vez que a subálgebra gerada por todos os $\mathcal{A}_{ij}$ com $i < j$ tem a mesma dimensão de J, eles tem que ser iguais, isto é, $J = \oplus_{1\leq i<j\leq n}\mathcal{A}_{ij}$.

Sendo assim, uma vez que $\mathcal{A}_{ij}\mathcal{A}_{kl} = e_i\mathcal{A}e_je_k\mathcal{A}e_l$, temos que $\mathcal{A}_{ij}\mathcal{A}_{kl} \neq \{0\}$ somente se $j = k$ e fica fácil então ver que $J^{n-1} = \mathcal{A}_{12}\cdots\mathcal{A}_{n-1,n}$. Para cada $i = 1, \dots, n-1$ tome $a_{i,i+1} \in \mathcal{A}_{i,i+1}$ de forma que $\mathcal{A}_{i,i+1} = \langle a_{i,i+1}\rangle$. Uma vez que $E_{1n} \in J^{n-1}$, ocorre obrigatoriamente $a_{12}a_{23}\dots a_{n-1,n} \neq 0$ pois todo elemento de J^{n-1} é da forma $\alpha a_{12}a_{23}\dots a_{n-1,n}$.

Tomando então

$$a_{11} = e_1, \dots, a_{nn} = e_n$$

$$\text{e} \quad a_{ij} = a_{i,i+1} \dots a_{j-1,j} \quad \text{para} \quad 1 \leq i < j \leq n,$$

temos uma base de $\mathcal{A}$ com multiplicação dada por $a_{ij}a_{kl} = \delta_{kj}a_{il}$.

Temos portanto que as matrizes a_{ij} são matrizes elementares homogêneas na nossa G-graduação, e assim, pela Observação 63, temos que a G-graduação dada é isomorfa a uma outra G-graduação na qual cada matriz elementar E_{ij} é homogênea. Concluímos então, pelo Lema 78, que a G-graduação dada é isomorfa a uma graduação elementar.

□

5.2 Caso geral

Mostraremos agora que, mesmo sem hipóteses sobre o grupo G e o corpo F, as G-graduações de $UT_n(F)$ ainda são apenas as elementares. Este teorema foi provado por Valenti e Zaicev em [22], e aqui faremos uma demonstração seguindo as ideias deste.

Comparado com o caso anterior, a principal dificuldade é que, uma vez que não mais estamos sob as hipóteses do Teorema 73, não podemos usar a Proposição 79. Para contornar isto, mostraremos que existem n idempotentes ortogonais em $UT_n(F)^{(e)}$, sem nos importarmos inicialmente com sua forma, e também mostraremos que qualquer conjunto com n idempotentes ortogonais em $UT_n(F)$ é na verdade conjugado a $\{E_{11}, \dots, E_{nn}\}$.

Lema 80 *Todo idempotente em $UT_n(F)$ é conjugado a um idempotente do tipo $E_{i_1 i_1} + \dots + E_{i_k i_k}$ para alguns $1 \leq i_1 < \dots < i_k \leq n$.*

Antes de demonstrar, precisamos fazer as seguintes definições:

Definição 81 *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita n. Uma **bandeira** B em V é uma sequência crescente de espaços vetoriais $V_1 \subseteq \dots \subseteq V_n = V$ tais que $\dim(V_i) = i$, para $i = 1, \dots, n$.*

*Uma base $\{v_1, \dots, v_n\}$ de V é dita **adaptada** a B se $\{v_1, \dots, v_i\}$ é base de V_i, para $i = 1, \dots, n$.*

*Uma transformação linear $T : V \to V$ **preserva a bandeira** se $T(V_i) \subseteq V_i$ para $i = 1, \dots, n$.*

Dado um espaço vetorial V e uma bandeira B em V, temos que $UT_n(F)$ pode ser vista como a álgebra das transformações lineares de V que preservam a bandeira B. De fato, tomando uma base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ adaptada a B, isto é,

$$V_1 = \mathrm{Span}_F\{v_1\}, \ldots, V_n = \mathrm{Span}_F\{v_1 \ldots, v_n\},$$

fica fácil ver que qualquer matriz triangular superior pode ser vista como uma matriz na base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de uma transformação linear de V em V que leva V_i em V_i para qualquer $i = 1, \ldots, n$. Por outro lado, dada uma transformação linear T que preserva a bandeira, temos que

$$T(v_i) \in V_i, \quad i = 1, \ldots, n,$$

e portanto, considerando a matriz de T na base $\{v_1, \ldots, v_n\}$, temos que na i-ésima coluna apenas as i primeiras entradas podem ser não nulas, e assim a matriz de T nesta base é triangular superior.

Além disso, uma mudança de base entre duas bases adaptadas a bandeira B é feita por conjugação por matrizes triangulares superiores. De fato, se $\{u_1, \ldots, u_n\}$ e $\{v_1, \ldots, v_n\}$ são tais bases, como elas são adaptadas, temos claramente que, para alguns $\alpha_{ij} \in F$, $v_1 = \alpha_{11}u_1$, $v_2 = \alpha_{12}u_1 + \alpha_{22}u_2$, $\ldots$, $v_n = \alpha_{1n}u_1 + \cdots + \alpha_{nn}u_n$, e portanto nossa matriz mudança de base é triangular superior com a (i, j)-ésima entrada igual a α_{ij}, se $1 \leq i \leq j \leq n$ e 0 caso $i > j$.

Demonstração do Lema 80: Seja V um espaço vetorial de dimensão n e B uma bandeira em V, ou seja, existem $V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_n$ subespaços de V tais que $\dim(V_i) = i$ para $i = 1, \ldots, n$. Podemos então ver $UT_n(F)$ como a álgebra das transformações lineares de V que preservam à bandeira B.

Seja então e um idempotente de $UT_n(F)$. Para demonstrar este lema basta encontrar uma base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V adaptada à B tal que

$$e(v_i) = \epsilon_i v_i,$$

onde ϵ_i é igual a 0 ou 1, para todo $i = 1, \ldots, n$ pois nesta base e será escrito como $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \epsilon_i E_{ii}$.

A prova será feita por indução em n.

No caso $n = 1$, $e \in F$, e portanto, como e é idempotente, $e = 1$, e assim fica claro que $e(v_1) = v_1$.

Se $n > 1$, temos que, usando a hipótese de indução, existe uma base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ de V adaptada a B tal que $e(v_i) = \epsilon_i v_i$ para $i = 1, \ldots, n-1$. Como e é idempotente, então $e(e(v_n)) = e(v_n)$ e assim se $e(v_n) \notin V_{n-1}$ então $\{v_1, \ldots, v_{n-1}, e(v_n)\}$ é nossa base desejada. Se $e(v_n) \in V_{n-1}$, então $v'_n = v_n - e(v_n) \notin V_{n-1}$ e $e(v'_n) = e(v_n) - e(e(v_n)) = 0$ e assim $\{v_1, \ldots, v_{n-1}, v'_n\}$ é a nossa base desejada. $\square$

Uma vez que o traço de uma matriz é invariante por conjugações, pelo lema anterior podemos concluir que o traço de qualquer idempotente em $UT_n(F)$ é um número natural.

Lema 82 *Seja e um idempotente de $UT_n(F)$. A subálgebra $eUT_n(F)e$ é isomorfa a $UT_k(F)$, onde $k = tr(e)$.*

Demonstração: Para simplificar a notação, chamaremos $UT_n(F)$ de $\mathcal{A}$.

Pelo Lema 80, e é conjugado a um idempotente diagonal, e portanto existe $U \in \mathcal{A}$ invertível tal que $U^{-1}eU = E_{i_1i_1} + \cdots + E_{i_ki_k}$. Uma vez que uma conjugação é sempre um isomorfismo, temos

$$e\mathcal{A}e \cong U^{-1}e\mathcal{A}eU = U^{-1}eU(U^{-1}\mathcal{A}U)U^{-1}eU \cong U^{-1}eU(\mathcal{A})U^{-1}eU.$$

Chamando $U^{-1}eU = \sum_{i \in \{i_1, \ldots, i_k\}} E_{ii}$ de D, temos $e\mathcal{A}e \cong D\mathcal{A}D$.

Tomando então $A \in \mathcal{A}$, $A = \sum_{1 \leq i \leq j \leq n} \alpha_{ij}E_{ij}$, vemos que $DAD = \sum_{i,j \in \{i_1, \ldots, i_k\}} \alpha_{ij}E_{ij}$. Existe assim um isomorfismo de $D\mathcal{A}D$ em $UT_k(F)$, basta levar cada matriz elementar $E_{i_ri_s}$ na matriz elementar E_{rs} e estender esta aplicação linearmente para todo $D\mathcal{A}D$. Compondo o isomorfismo de $e\mathcal{A}e$ em $D\mathcal{A}D$ com este isomorfismo de $D\mathcal{A}D$ em $UT_k(F)$, obtemos um isomorfismo de $e\mathcal{A}e$ em $UT_k(F)$ como desejado. $\square$

Em $UT_2(F)$, vimos que quaisquer dois idempotentes ortogonais são conjugados a E_{11} e E_{22}. O lema a seguir mostra que o análogo ocorre para $UT_n(F)$.

Lema 83 *Todo conjunto com n elementos de idempotentes ortogonais $\{a_1, \ldots, a_n\}$ de $UT_n(F)$ é conjugado a $\{E_{11}, \ldots, E_{nn}\}$.*

Demonstração: Vendo $UT_n(F)$ como o conjunto das transformações lineares de um espaço vetorial V de dimensão n que preservam uma bandeira $V_1 \subseteq \cdots \subseteq V_n = V$, temos que encontrar uma base $\{v_1, \ldots, v_n\}$ adaptada à bandeira e que seja tal que

$a_i(v_j) = \delta_{ij}v_j$, onde δ_{ij} é o delta de Kronecker. Desta forma cada idempotente a_i será conjugado através da mudança de base a E_{ii}.

Procederemos por indução, com o caso inicial $n = 1$ sendo trivial pois o único idempotente de um corpo é 1.

Para $n > 1$, uma vez que $a_i^2 = a_i$, e a (k,k)-ésima entrada de a_i^2 é o quadrado da (k,k)-ésima entrada de a_i, temos que a_i possui apenas 0's e 1's na diagonal principal.

Se a_i e a_j têm ambos a (k,k)-ésima entrada igual a 1, então a (k,k)-ésima entrada do produto é 1, o que contraria a ortogonalidade. Como a_i é idempotente, não pode possuir a diagonal principal nula, pois nesse caso pertenceria ao radical de Jacobson e seria nilpotente, e portanto possui pelo menos uma destas entradas igual a 1. Como são apenas n entradas na diagonal, cada um dos n a_i's possui pelo menos uma entrada igual a 1 na diagonal e eles não podem possuir entradas não nulas comuns, concluímos que cada a_i possui exatamente uma destas entradas diferente de zero.

Podemos então reordenar os a_i's de forma que a_i possui a (i,i)-ésima entrada igual a 1, $i = 1, \ldots, n$.

Tomando $e = a_1 + \cdots + a_{n-1}$, da ortogonalidade e da idempotência dos a_i's segue que e é um idempotente, e pelo lema anterior, $eUT_n(F)e$ é isomorfo a $UT_{n-1}(F)$, que por sua vez pode ser visto como o conjunto das transformações lineares de V_{n-1} que preservam a bandeira. Pela hipótese de indução, existe uma base $\{v_1, \ldots, v_{n-1}\}$ de V_{n-1} adaptada à bandeira de forma que $a_i(v_j) = \delta_{ij}v_j$ para todo $1 \leq i, j \leq n-1$.

Tomando $0 \neq u_n \notin V_{n-1}$, temos que $\{v_1, \ldots, v_{n-1}, u_n\}$ é uma base de V adaptada à bandeira. Uma vez que $a_j(v_j) = v_j$, para $j = 1, \ldots, n-1$, obtemos que,

$$a_n(v_j) = a_n a_j(v_j) = 0,$$

para $j = 1, \ldots, n-1$. Se $a_n(u_n) = 0$, teríamos que $a_n(v) = 0$ para todo $v \in V$, o que não é possível desde que a_n possui a (n,n)-ésima entrada igual a 1. Concluímos então que

$$a_n(u_n) \neq 0.$$

Se $a_n(u_n) \in V_{n-1}$, então temos que existem $\alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1} \in F$ tais que $a_n(u_n) = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_{n-1}v_{n-1}$, e assim $a_n(u_n) = a_n^2(u_n) = a_n(\alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n) = 0$, o que não pode ocorrer. Logo $a_n(u_n) \notin V_{n-1}$. Podemos então tomar a base

$$\{v_1, \ldots, v_{n-1}, v_n = a_n(u_n)\}$$

onde claramente vale $a_i(v_j) = \delta_{ij}v_j$ para $1 \leq i, j \leq n$ como gostaríamos. □

Para facilitar a organização das ideias na demonstração da Proposição 85, utilizaremos do seguinte lema técnico:

Lema 84 *Seja* $UT_n(F) = \oplus_{g\in G} UT_n(F)^{(g)}$ *uma* G*-graduação de* $UT_n(F)$*. Se* $\mathrm{Span}_F\{E\}$ *for uma subálgebra semissimples maximal de* $UT_n(F)^{(e)}$*, então:*

(1) Todo elemento homogêneo de $UT_n(F)$ *é invertível ou nilpotente.*

(2) $J(UT_n(F))$ *não possui elementos homogêneos além do zero.*

(3) $\mathrm{Supp}(UT_n(F))$ *é um subgrupo de* G*.*

(4) $UT_n(F)^{(e)} = \mathrm{Span}_F\{E\}$*.*

(5) $\dim(UT_n(F)^{(g)}) = 1$ *para todo* $g \in \mathrm{Supp}(UT_n(F))$*.*

Demonstração:

Chamaremos ao longo desta demonstração $UT_n(F)$ de $\mathcal{A}$.

(1) Se $a \in \mathcal{A}^{(g)}$ não é nilpotente, então para algum m suficientemente grande temos $a, \ldots, a^m$ são linearmente dependentes (pois $\mathcal{A}$ tem dimensão finita) e homogêneos, e portanto g tem ordem finita, digamos k. Assim $a^k \in \mathcal{A}^{(e)}$ é um elemento não nilpotente, e, portanto, não pertence a $J(\mathcal{A}^{(e)})$, o radical de Jacobson de $\mathcal{A}^{(e)}$. Logo $\{0\} \neq \mathcal{A}^{(e)}/J(\mathcal{A}^{(e)})$ é uma álgebra de dimensão finita e, pelo Corolário 29,

$$J(\mathcal{A}^{(e)}/J(\mathcal{A}^{(e)})) = \{0\},$$

portanto, pelo Teorema 38, temos que $\mathcal{A}^{(e)}/J(\mathcal{A}^{(e)})$ é semissimples. Logo $\mathcal{A}^{(e)}/J(\mathcal{A}^{(e)})$ é isomorfa a uma subálgebra semissimples de $\mathcal{A}^{(e)}$. Como $\mathcal{A}^{(e)}/J(\mathcal{A}^{(e)}) \neq \{0\}$ e $\mathrm{Span}_F\{E\}$ tem dimensão 1 e é uma subálgebra semissimples maximal de $\mathcal{A}^{(e)}$, então

$$\mathcal{A}^{(e)}/J(\mathcal{A}^{(e)}) \cong \mathrm{Span}_F\{E\}.$$

Podemos então concluir que $a^k - \lambda E \in J(\mathcal{A}^{(e)})$ para algum $\lambda \in F$, $\lambda \neq 0$, e então que

$$(a^k - \lambda E)^i = 0$$

para algum inteiro i. Por fim,

$$(a^k - \lambda E)^i = a^k b - \lambda^i E$$

para algum $b \in \mathcal{A}^{(e)}$, de onde concluímos que

$$\frac{1}{\lambda^i}\, a^k b = E,$$

e portanto a^k (e consequentemente a) é invertível.

(2) Supondo que exista um elemento diferente de zero $a \in \mathcal{A}^{(g)} \cap J(\mathcal{A})$ para algum $g \in G$, temos que pelo Lema 71 o anulador à esquerda de a, $\mathrm{Ann}_e(a) = \{x \in \mathcal{A} |\, xa = 0\}$, é um subespaço graduado de $\mathcal{A}$. Uma vez que, pelo item (1), todo elemento homogêneo de $\mathcal{A}$ é invertível ou nilpotente, como um elemento invertível não pode ser divisor de 0, todo elemento de $\mathrm{Ann}_e(a)$ é soma de elementos homogêneos nilpotentes, e assim $\mathrm{Ann}_e(a)$ possui apenas elementos nilpotentes. Por outro lado, E_{nn} claramente anula à esquerda qualquer matriz triangular estritamente superior, e portanto como $a \in J(\mathcal{A})$ temos que E_{nn} pertence a $\mathrm{Ann}_e(a)$. Desde que E_{nn} não é nilpotente, obtemos um absurdo. Concluímos então deste absurdo que $J(\mathcal{A})$ não possui elementos homogêneos diferentes de zero.

(3) Claramente $e \in \mathrm{Supp}(\mathcal{A})$, já que $E \in \mathcal{A}^{(e)}$. Pelos itens (1) e (2), todo elemento homogêneo diferente de zero é invertível. Se $a \in \mathcal{A}^{(h)}$, então existe $a^{-1} = \sum_{g \in G} b_g$, e assim

$$E = aa^{-1} = \sum_{g \in G} ab_g$$

é soma de elementos homogêneos. Como $E \in \mathcal{A}^{(e)}$, então $ab_{h^{-1}} = E$ e $ab_g = 0$ para todo $g \neq h^{-1}$. Logo, $0 \neq b_{h^{-1}} \in \mathcal{A}^{(h^{-1})}$. Concluímos então que se $\mathcal{A}^{(h)} \neq 0$, então $\mathcal{A}^{(h^{-1})} \neq 0$.

(4) Pelo item (2), $J(UT_n(F))$ não possui elementos homogêneos diferentes de zero, e assim, como $J(\mathcal{A}^{(e)}) \subseteq J(UT_n(F))$, concluímos que $J(\mathcal{A}^{(e)}) = \{0\}$. Temos então, do Teorema 38 que $\mathcal{A}^{(e)}$ é semissimples e, desde que por hipótese $\mathrm{Span}_F\{E\}$ é uma subálgebra maximal semissimples de $\mathcal{A}^{(e)}$, concluímos que $\mathcal{A}^{(e)} = \mathrm{Span}_F\{E\}$, o que conclui este item.

(5) Suponha por absurdo que exista $g \in \mathrm{Supp}(\mathcal{A})$ tal que $\dim(\mathcal{A}^{(g)}) > 1$. Então existem elementos $x, y \in \mathcal{A}^{(g)}$ linearmente independentes. Como todo elemento homogêneo não nulo de $\mathcal{A}$ é invertível, então existe $x^{-1} \in \mathcal{A}^{(g^{-1})}$, e assim $yx^{-1} \in \mathcal{A}^{(e)}$ e, portanto, do item (4), $yx^{-1} = \lambda E$ para algum $\lambda \in F$. Logo $x - \lambda^{-1} y \in \mathcal{A}^{(g)}$ é diferente de zero, mas $(x - \lambda^{-1} y)x^{-1} = 0$ o que contraria a invertibilidade de todo elemento não nulo de $\mathcal{A}^{(g)}$. Portanto $\dim(\mathcal{A}^{(g)}) = 1$ para todo $g \in \mathrm{Supp}(\mathcal{A})$.

$\square$

Proposição 85 *Seja $UT_n(F) = \oplus_{g \in G} UT_n(F)^{(g)}$ uma G-graduação da álgebra de matrizes triangulares superiores sobre um corpo F. Então $UT_n(F)^{(e)}$ possui n idempotentes ortogonais.*

Demonstração: Ao longo desta demonstração denotaremos $\mathcal{A} = UT_n(F)$, e, para evitar confusão com outras notações, denotaremos 1 para a identidade do grupo ao invés de e.

Esta demonstração será feita por indução.

No caso $n = 1$, $\dim(\mathcal{A}) = 1$ e assim a G-graduação só pode ser a trivial e $\mathcal{A}$ possui como único idempotente $1_F \in F$.

Se $n > 1$, então, pelo Lema 64, temos que a matriz identidade, E, pertence a $\mathcal{A}^{(1)}$. Logo $\mathrm{Span}_F\{E\}$ é uma subálgebra simples (e portanto semissimples) de $\mathcal{A}^{(1)}$. Podemos então tomar uma subálgebra semissimples maximal que contém $\mathrm{Span}_F\{E\}$ da seguinte maneira: Se $\mathrm{Span}_F\{E\}$ não for maximal, então existe uma subálgebra $\mathcal{B}_1$ semissimples que contenha $\mathrm{Span}_F\{E\}$. Repetindo indutivamente o argumento, obtemos

$$\mathrm{Span}_F\{E\} \subseteq \mathcal{B}_1 \subseteq \mathcal{B}_2 \subseteq \ldots,$$

mas uma vez que $UT_n(F)$ tem dimensão finita, este processo termina.

Existe portanto uma subálgebra $\mathcal{B}$ semissimples maximal de $\mathcal{A}^{(1)}$. Pelo Teorema 34, $\mathcal{B}$ é soma direta de ideais à esquerda, que por sua vez são submódulos simples de $\mathcal{B}$. Tomemos então C um dos somandos diretos simples de $\mathcal{B}$, e seja e a unidade de C. Já sabemos que, uma vez que e é idempotente, tem que ser conjugado a um idempotente diagonal cujas entradas não nulas são todas 1's, e assim, se tal conjugação é pela matriz U temos dois casos:

$\underline{e \neq E}$: Neste caso $U^{-1}eU$ e $E - U^{-1}eU$ são idempotentes ortogonais e assim temos que e e $E - e$ são também idempotentes ortogonais. Se $k = tr(e)$, então $tr(E - e) = n - k$ e assim, pelo Lema 82,

$$P = e\mathcal{A}e \cong UT_k(F) \quad \text{e} \quad Q = (E - e)\mathcal{A}(E - e) \cong UT_{n-k}(F).$$

Como pelo Lema 69 P e Q são homogêneos, pela hipótese de indução, temos k idempotentes ortogonais em $P^{(1)}$ e $n - k$ idempotentes ortogonais em $Q^{(1)}$. Agora, também pelo Lema 69, $PQ = QP = \{0\}$ e $P \cap Q = \{0\}$, e portanto os idempotentes são distintos, e ortogonais. Temos assim $(n - k) + k = n$ idempotentes ortogonais como queríamos.

$\underline{e = E}$: Neste caso, $C = \mathrm{Span}_F\{E\}$, e assim é um ideal que contém E. Logo temos

$$C = \mathcal{B} = \mathrm{Span}_F\{E\},$$

e portanto $\dim(\mathcal{B}) = 1$. Este caso leva a uma contradição que será construída usando (mais uma) indução na ordem de G.

Se $|G| = 1$, é claro que $\mathcal{A}^{(1)} = \mathcal{A}$, mas então $E_{11}, E_{22} \in \mathcal{A}^{(1)}$ e a subálgebra $\mathrm{Span}_F\{E_{11}, E_{22}\}$ é semissimples, pois $\mathrm{Span}_F\{E_{11}, E_{22}\} = \mathrm{Span}_F\{E_{11}\} \oplus \mathrm{Span}_F\{E_{22}\}$ é soma de álgebras simples, o que leva a uma contradição com $\dim(\mathcal{B}) = 1$.

Suponha que para toda H-graduação de $\mathcal{A}$, onde H é um grupo finito com $|H| < |G|$ temos que $\dim(\mathcal{B}) = 1$ leva a uma contradição.

Pelo Lema 84, o suporte de G é um grupo finito. Portanto podemos supor que $G = \mathrm{Supp}(\mathcal{A})$ pois, caso contrário, nossa hipótese de indução nos dá uma contradição.

Note que G não pode ser um grupo abeliano, pois caso fosse, pelo Corolário 67, a subálgebra dos comutadores seria um ideal nilpotente graduado e, como $n \geq 2$, diferente de $\{0\}$, o que não pode acontecer pelo Lema 84.

Se G' é o subgrupo derivado de G, considere a graduação de $\mathcal{A}$ por G/G',

$$\mathcal{A} = \oplus_{\bar{g} \in G/G'} \mathcal{A}^{(\bar{g})}, \quad \text{onde} \quad \mathcal{A}^{(\bar{g})} = \oplus_{h \in G'} \mathcal{A}^{(gh)}.$$

Como G/G' é abeliano, então a conclusão do lema vale para esta G/G'-graduação, e assim existem n idempotentes ortogonais $e_1, \ldots, e_n \in \mathcal{A}^{(\bar{1})}$ onde $\mathcal{A}^{(\bar{1})} = \oplus_{h \in G'} \mathcal{A}^{(h)}$.

Agora, G' é gerado por elementos da forma $a^{-1}b^{-1}ab$ com $a, b \in G$. Tomando então

$$h := a^{-1}b^{-1}ab \in G'$$

e $0 \neq x \in \mathcal{A}^{(a)}$, $0 \neq y \in \mathcal{A}^{(b)}$ (os quais existem, pois $G = \mathrm{Supp}(\mathcal{A})$), então

$$z = x^{-1}y^{-1}xy$$

é um elemento não nulo de $\mathcal{A}^{(h)}$. Como já vimos no lema anterior que $\dim(\mathcal{A}^{(h)}) = 1$, então é claro que

$$\mathcal{A}^{(h)} = \mathrm{Span}_F\{z\}.$$

Ou seja, $\mathcal{A}^{(\bar{1})}$ é gerada como álgebra por todos os elementos $z = x^{-1}y^{-1}xy$, onde x e y são elementos homogêneos. Uma vez que a (i,i)-ésima entrada de z é dadas por $z_{ii} = x_{ii}^{-1}y_{ii}^{-1}x_{ii}y_{ii} = 1_F$, temos

$$z = E + a$$

onde $a \in J(\mathcal{A})$. Logo todos os elementos de $\mathcal{A}^{(\bar{1})}$ são da forma $\lambda E + a$ para alguns $\lambda \in F$ e $a \in J(\mathcal{A})$, em particular nossos idempotentes ortogonais podem ser escritos como $e_i = \lambda_i E + a_i$, para $i = 1, \ldots, n$, onde $\lambda_i \neq 0$, $a_i \in J(\mathcal{A})$.

Temos assim que para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, n\}$, $i \neq j$,

$$e_i e_j = (\lambda_i E + a_i)(\lambda_j E + a_j) = \lambda_i \lambda_j E + b$$

onde b pertence ao ideal $J(\mathcal{A})$ e portanto e_ie_j possui a diagonal principal diferente de zero, um absurdo com o fato de e_i e e_j serem ortogonais. Assim obtemos uma contradição, o que completa a demonstração. $\square$

Já vimos que uma G-graduação de $UT_n(F)$ é elementar se, e somente se, as matrizes elementares usuais são homogêneas. O lema seguinte mostra que se requer menos hipóteses para que a graduação seja elementar.

Lema 86 *Considere a álgebra G-graduada $UT_n(F) = \oplus_{g\in G} UT_n(F)^{(g)}$. A G-graduação é elementar se, e somente se, todas as matrizes elementares diagonais, E_{ii}, pertencem a $UT_n(F)^{(e)}$.*

Demonstração: Denotemos $UT_n(F)$ por $\mathcal{A}$. Se a G-graduação é elementar, então $E_{ii} \in \mathcal{A}^{(gg^{-1})} = \mathcal{A}^{(e)}$.

Se todos os E_{ii}'s pertencem a $\mathcal{A}^{(e)}$, então definindo $\mathcal{A}_{ij} = E_{ii}\mathcal{A}E_{jj}$, temos que, pelo Lema 70, este é um subespaço de dimensão 1 graduado de $\mathcal{A}$ para quaisquer $1 \leq i \leq j \leq n$, e portanto está contido em $\mathcal{A}^{(g)}$ para algum $g \in G$. Como $E_{ij} = E_{ii}E_{ij}E_{jj} \in \mathcal{A}_{ij}$, então todas as matrizes elementares são homogêneas, e portanto, pelo Lema 78, a G-graduação é elementar. $\square$

Podemos então finalmente demonstrar que toda G-graduação de $UT_n(F)$ é elementar.

Teorema 87 *Sejam G um grupo qualquer, F um corpo e $UT_n(F) = \oplus_{g\in G} UT_n(F)^{(g)}$ uma G-graduação. Então $UT_n(F)$ como álgebra G-graduada é isomorfa a $UT_n(F)$ com uma G-graduação elementar.*

Demonstração: Denotemos por $\mathcal{A}$ a álgebra $UT_n(F)$ com a G-graduação dada. Pela Proposição 85, $\mathcal{A}$ possui n idempotentes ortogonais em $\mathcal{A}^{(e)}$, e, pelo Lema 83, existe uma conjugação que leva estes n idempotentes em $\{E_{11}, \ldots, E_{nn}\}$, ou seja, existe um isomorfismo de $\mathcal{A}$ em $UT_n(F)$ que leva os idempotentes ortogonais na matrizes E_{ii}, $i = 1, \ldots, n$. Pelas observações 62 e 63 este isomorfismo induz uma G-graduação em $UT_n(F)$ e pode ser visto com um isomorfismo de álgebras G-graduadas. Além disso, na G-graduação induzida temos claramente que $E_{ii} \in UT_n(F)^{(e)}$ para $i = 1, \ldots, n$. Por fim, pelo Lema 86, a G-graduação induzida é elementar. Assim $\mathcal{A}$ é isomorfa a $UT_n(F)$ com uma G-graduação elementar. $\square$

Considerações finais

Vimos ao longo desta dissertação que, usando diferentes técnicas, podemos mostrar que as G-graduações de $UT_n(F)$ são todas elementares. Destaquemos que, no caso em que temos G abeliano e F algebricamente fechado com característica zero, podemos recorrer a resultados que facilitam a demonstração. Ao que parece, isto também ocorre em outras álgebras.

Uma vez demonstrada que toda G-graduação de $UT_n(F)$ é elementar, poderíamos nos perguntar o que acontece, por exemplo, com as álgebras de matrizes $M_n(F)$ e, mais geralmente, com as álgebras de matrizes blocotriangulares. Nos Exemplos 57 e 58 já vimos que existem G-graduações não elementares de $M_n(F)$, porém o Teorema 60 mostra que, no caso particular em que $G = \mathbb{Z}_2$, só existem graduações elementares. É natural então nos perguntarmos se, fazendo hipóteses sobre o grupo G e o corpo F, podemos descobrir todas as possíveis G-graduações de $M_n(F)$.

No caso em que G é um grupo abeliano e F algebricamente fechado de característica zero, as G-graduações de $M_n(F)$ foram completamente determinadas por Bathurin, Sehgal e Zaicev em 2001, antes mesmo da determinação das G-graduações de $UT_n(F)$ por Valenti e Zaicev.

Lembramos que uma G-graduação da álgebra $\mathcal{A}$ é dita **fina** se $\dim(\mathcal{A}^{(g)}) \leq 1$ para todo $g \in G$.

Teorema 88 *(Teorema 6 [1]) Sejam G um grupo abeliano, F um corpo algebricamente fechado de característica zero e*

$$M_n(F) = \oplus_{g\in G} M_n(F)^{(g)}$$

uma G-graduação de $M_n(F)$. Então existe uma decomposição $n = tq$, um subgrupo $H \subseteq G$ e uma q-upla $(g_1, \ldots, g_q) \in G^q$ tal que, como álgebra G-graduada, $M_n(F)$ é isomorfa a $M_t(F) \otimes M_q(F)$ onde $M_t(F)$ é graduada por H com uma graduação fina e $M_q(F)$ possui uma graduação elementar definida por $(g_1, \ldots, g_q)$.

O teorema supracitado nos diz que, mais geralmente, qualquer G-graduação de $M_n(F)$ pode ser construída a partir do produto tensorial de graduações finas e elementares. No caso particular em que $G = \mathbb{Z}_n \times \mathbb{Z}_n$, um exemplo de G-graduação fina de $M_n(F)$ foi visto no Exemplo 58 e consiste de uma ϵ-graduação. Surgem então as seguintes perguntas: Se G é um grupo abeliano arbitrário, é possível determinar todas as G-graduações finas de $M_n(F)$? Em caso positivo, qual é a relação destas G-graduações com as ϵ-graduações? Tais perguntas foram respondidas no mesmo artigo com o teorema a seguir.

Teorema 89 *(Teorema 5 [1]) Seja F um corpo algebricamente fechado de característica zero e $M_n(F) = \oplus_{g\in G} M_n(F)^{(g)}$ uma graduação fina de $M_n(F)$ por um grupo abeliano G. Então $H = \mathrm{Supp}(\mathcal{A})$ é um subgrupo de G, $H = H_1 \times \cdots \times H_k$, $H_i \cong \mathbb{Z}_{n_i} \times \mathbb{Z}_{n_i}$, $i = 1\ldots,k$ e $\mathcal{A}$ é isomorfa a $M_{n_1}(F) \otimes \ldots, \otimes M_{n_k}(F)$ como álgebra G-graduada, onde $M_{n_i}(F)$ é uma álgebra H_i-graduada com uma ϵ_i-graduação.*

No caso em que G é um grupo qualquer, o Teorema 88 foi posteriormente generalizado por Bathurin e Zaicev em 2002.

Teorema 90 *(Teorema 5.1 [2]) Sejam G um grupo qualquer, F um corpo algebricamente fechado de característica zero e*

$$M_n(F) = \oplus_{g\in G} M_n(F)^{(g)}$$

uma G-graduação de $M_n(F)$. Então existe uma decomposição $n = tq$, um subgrupo $H \subseteq G$ de ordem t^2 e uma q-upla $(g_1, \ldots, g_q) \in G^q$ tal que, como álgebras G-graduadas, $M_n(F)$ é isomorfa a $M_t(F) \otimes M_q(F)$ onde $M_t(F)$ é graduada por H com uma graduação fina e $M_q(F)$ possui uma graduação elementar definida por $(g_1, \ldots, g_q)$.

Uma consequência interessante é que neste mesmo artigo os autores nos dão condições suficientes para que uma G-graduação de $M_n(F)$ seja elementar. Mais precisamente, como corolário do Teorema 90, os autores mostram o seguinte resultado:

Corolário 91 *(Corolário 5.4 [2]) Se $M_n(F)$ é graduada por um grupo cuja ordem é livre de quadrados, então a graduação é obrigatoriamente elementar.*

Uma vez que todo grupo cuja ordem é livre de quadrados é um grupo solúvel, podemos nos perguntar se este corolário vale para qualquer grupo solúvel. A resposta é não, como mostrado no Exemplo 57.

É natural nos perguntarmos se podemos também, no caso das matrizes blocotriangulares, gerar todas as possíveis G-graduações a partir de produtos tensoriais de G-graduações conhecidas.

Em 2007, Valenti e Zaicev, fizeram a seguinte conjectura:

Conjectura 92 ([22]) *Seja $\mathcal{A} = UT(t_1, \ldots, t_k) = \oplus_{g\in G}\mathcal{A}^{(g)}$ uma álgebra de matrizes blocotriangulares G-graduada. Se $t_1 = tp_1, \ldots, t_k = tp_k$, para alguns $t, p_1, \ldots, p_k$ inteiros, então como álgebra G-graduada, $\mathcal{A}$ é isomorfa ao produto tensorial $M_t(F)\otimes UT(p_1, \ldots, p_k)$, onde a graduação de $M_t(F)$ é qualquer e $UT(p_1, \ldots, p_k)$ possui uma graduação elementar. Em particular, se $t_1, \ldots, t_k$ são primos entre si, então as únicas graduações possíveis para $UT(t_1, \ldots, t_k)$ são elementares.*

Em [23], o caso particular desta conjectura onde G é abeliano finito e F é algebricamente fechado com característica zero foi provado, e neste caso temos mais informações sobre a G-graduação de $M_t(F)$.

Teorema 93 *Sejam G um grupo abeliano finito e $UT(t_1, \ldots, t_k) = \oplus UT^{(g)}(t_1, \ldots, t_k)$ uma álgebra de matrizes blocotriangulares sobre um corpo F algebricamente fechado de característica zero com uma G-graduação. Então existe uma decomposição $t_1 = tp_1, \ldots, t_k = tp_k$, um subgrupo $H \subseteq G$ e uma n-upla $(g_1, \ldots, g_n) \in G^n$ onde $n = p_1 + \cdots + p_k$ tal que $UT(t_1, \ldots, t_k)$ é isomorfa a $M_t(F) \otimes UT(p_1, \ldots, p_k)$ como álgebra G-graduada onde $M_t(F)$ é uma álgebra H-graduada com uma graduação fina e $UT(p_1, \ldots, p_k)$ possui uma graduação elementar definida por $(g_1, \ldots, g_n)$.*

Como era de se esperar, no caso $t_1 = \cdots = t_k = 1$, este teorema coincide com o Teorema 87. O caso geral, com G e F quaisquer, ao que parece, permanece em aberto tanto para $UT(t_1, \ldots, t_k)$ quanto para $M_n(F)$.

Referências Bibliográficas

[1] BAHTURIN, Yu. A.; SEHGAL, S. K. e ZAICEV, M. V., *Group Gradings on Associative Algebras. J. Algebra 241, (2001) 677-698.*

[2] BAHTURIN, Yu. A. e ZAICEV, M. V. *Group Gradings on matrix algebras. Canad. Math. Bull. 45, (2002) 499-508.*

[3] BAHTURIN, Yu. A. e ZAICEV, M. V. *Group Gradings on Simple Lie Algebras of Type "A". arXiv:math/0506055v2 (2005).*

[4] DRENSKY, V. *A minimal basis for the identities of a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0. Algebra and Logic 20 (1981) 188-194.*

[5] ELDUQUE, A., *Gradings on octonions. J. Algebra, 207, (1998) 342-354*.

[6] GIAMBRUNO, A. e ZAICEV, M., *Polynomial Identities and Asymptotic Methods*, 2005.

[7] GIAMBRUNO A. e ZAICEV M., On codimension growth of finitely generated associative algebras, Adv. in Math.140 (1998) 145-155.

[8] GIAMBRUNO A. e ZAICEV M., Exponential codimension growth of P.I.algebras: an exact estimate, Adv. in Math.142 (1999) 221-243.

[9] GIAMBRUNO, A. e ZAICEV, M. V., *Minimal varieties of algebras of exponential growth. Adv. in Math. 174, (2003) 310-323*.

[10] GIAMBRUNO A. e ZAICEV, M., *Codimension growth and minimal superalgebras. Transactions of the American Mathematical Society, 355 (2003) 5091-5117.*

[11] HUNGERFORD, T. W., *Algebra*, Springer, 1974.

[12] JAMES, G. e LIEBECK, M. - *Representation and Characters of Groups*, segunda edição, Cambridge Univerity Press, 2001.

[13] KEMER, A. R., *T-ideals with power growth of the codimensions are Specht, Sibirskii Matematicheskii Zhurnal 19 (1978) 54-69 (in Russian) (English translation: Siberian Math. J. 19 (1978) 37-48).*

[14] KEMER, A. R., *Varieties and $\mathbb{Z}_2$-graded algebras, Math. USSR Izv. 25 (1985) 359-374.*

[15] LAM, T. Y., *A First Course in Noncommutative Rings*, Springer-Verlag, (1991).

[16] MCGRAW, J. *Gradings by Groups on Melikyan Algebras. arXiv:1001.3192v2 (2010).*

[17] MILIES, C. P. e SEHGAL, S. K., *An introduction to group rings*, Kluwer Academic Publishers, (2002).

[18] RAZMYSLOV, Yu. P. *Finite basing of a matrix algebra of second order over a field of characteristic zero. Algebra and Logic 12 (1973) 47-63.*

[19] REGEV, A., *Existence of identities in $A \otimes B$; Israel J.Math.11 (1972) 131-152.*

[20] VALENTI, A. *The graded identities of upper triangular matrices of size two. J. Pure. Appl. Algebra 172, (2002) 325-335.*

[21] VALENTI, A. e ZAICEV, M., *Abelian gradings on upper-triangular matrices. Arch. Math. 80, (2003) 12-17.*

[22] VALENTI, A. e ZAICEV, M., *Group gradings on upper-triangular matrices. Arch. Math. 89, (2007) 33-40.*

[23] VALENTI, A. e ZAICEV, M., *Abelian gradings on upper block triangular matrices. Canad. Math. Bull. doi:10.4153/CMB-2011-048-4 (2011).*