

Universidade Federal de Minas Gerais

Departamento de Matemática - ICEX

Dissertação de Mestrado

Valores críticos de sistemas Lagrangianos autônomos

Luiz Gustavo Perona Araújo

Orientador: Prof. José Antônio G. Miranda

2012

Valores críticos de sistemas Lagrangianos autônomos

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação defendida por **Luiz Gustavo Perona Araújo**, no Instituto de Ciências Exatas, **ICEX**, como requisito parcial para obtenção do título de **MESTRE EM MATEMÁTICA**

Banca examinadora:

Prof. José Antônio G. Miranda

Prof. Mário Jorge Dias Carneiro

Prof. Carlos Maria Carballo

Prof. César de Souza Eschenazzi

Belo Horizonte, 16 de fevereiro de 2012.

Agradecimentos

Agradeço ao Divino Pai Eterno por me guiar com muita luz nessa caminhada.

Aos meus pais, irmãs e toda minha família pelo apoio e carinho.

À minha mãe Lurdes, pelas orações, incentivo e por estar sempre perto nas horas de dificuldades.

À Carol pelo carinho, compreensão e por me fazer acreditar que sou capaz.

Ao meu orientador, José Antônio, pela paciência, dedicação, ensinamentos e por me trazer de volta a beleza da Matemática.

Aos professores Mário Jorge Dias Carneiro, Carlos Carballo e César Eschenazzi pelas correções e sugestões apresentadas.

Aos amigos do mestrado - Vitor, Monique, Carlos, Frederico, Danilo, José Joselmo, Charles, Luiza e Rodrigo - pela companhia nos momentos de luta.

A todos os professores e funcionários do Departamento de Matemática da UFMG, em especial Bernardo Lima, Suzana Fornari, Márcio Soares, Andréa e Kelli que sempre estiveram dispostos a me ajudar.

Ao Grimberg, pelas correções ortográficas.

À FAPEMIG, pelo apoio financeiro.

Resumo

Dada uma variedade Riemanniana e um Lagrangiano de Tonelli, podemos obter o valor crítico de Mañé associado à variedade e seus recobrimentos. Neste trabalho, iremos comparar os valores críticos na variedade, nos recobrimentos universal e abeliano, além do valor crítico estrito.

Palavras-chave: Sistemas Lagrangianos, Hamiltonianos, valor crítico de Mañé.

Abstract

Given a Riemannian manifold and Tonelli's Lagrangian, we can obtain the Mañé's critical values associated to manifold and their coverings. We will compare the critical values on the manifold and on universal and abelian coverings beyond the strict critical value.

Keywords: Lagrangian systems, Hamiltonians, Mañé critical values.

Sumário

Introdução	7
1 Preliminares	8
1.1 Lagrangianos	8
1.2 Hamiltonianos	11
1.3 Fluxo Magnético	14
1.4 Equações de Jacobi	18
1.5 Fluxo Magnético em uma superfície	19
1.6 Grupo Fundamental	21
1.7 Espaços de Recobrimento	25
1.8 Homologia, Cohomologia e Recobrimento Abeliano	28
2 Valor Crítico de Mañé	31
2.1 Valor Crítico de Mañé e Ação Potencial	31
2.2 Caracterização Ergódica	37
2.3 Caracterização via Gráficos Lagrangianos	40
3 Valor Crítico nos Recobrimentos	44
3.1 A Primeira Pergunta	44
3.2 Demonstração do Teorema 3.1	47
4 Níveis de Energia Anosov	50
4.1 A Segunda Pergunta	50
4.2 Prova do Teorema 4.1	53

5 Um Exemplo	54
Bibliografia	69

Introdução

A partir do trabalho de J. Mather no artigo *Action minimizing measures for positive definite Lagrangian systems* [13], de 1991, a Dinâmica Lagrangiana teve um avanço muito significativo. A partir disso, R. Mañé definiu, no pré-print *Lagrangian flows: the dynamics of globally minimizing orbits*, [24], de 1995, os valores críticos de Lagrangianos convexos e superlineares. Esse *paper* foi publicado após sua morte e finalizado por G. Contreras, J. Delgado, R. Iturriaga, em [11]. Tais valores também podem ser definidos nos espaços de recobrimento de uma variedade e, uma vez que são números reais, podem ser comparados.

O principal objetivo desse trabalho é comparar os valores críticos na variedade e em seus recobrimentos. Como referência principal, estudamos o artigo *Critical values of autonomous Lagrangian systems*, [8], de 1997.

O trabalho se divide em 5 capítulos. Os dois primeiros são de teoria geral. No capítulo 1, apresentamos alguns conceitos básicos da dinâmica Lagrangiana e alguns resultados sobre o Fluxo Magnético. Além disso, temos algumas preliminares sobre grupo fundamental, espaços de recobrimento, homologia e cohomologia. No capítulo 2, definimos o Valor Crítico de Mañé e damos duas caracterizações importantes do mesmo: a ergódica e a via gráficos Lagrangianos.

O 3º, 4º e 5º capítulos tiveram como base os resultados do artigo [8]. No capítulo 3 comparamos o Valor Crítico na variedade e em seus espaços de recobrimento, em especial os recobrimentos universal e abeliano. Neste contexto, surge a primeira pergunta e o primeiro teorema do artigo. No capítulo 4, apresentamos a pergunta feita por R. Mañé e o segundo teorema do artigo. O capítulo 5 é um exemplo, utilizando o fluxo magnético, respondendo negativamente as duas perguntas e aplicando os principais teoremas.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados sobre a dinâmica Lagrangiana e alguns resultados sobre o Fluxo Magnético. Além disso, teremos algumas preliminares sobre grupo fundamental, espaços de recobrimento e homologia e cohomologia.

1.1 Lagrangianos

Sejam M uma variedade compacta C^∞ , com métrica Riemanniana $g : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ e TM seu fibrado tangente.

Definição 1.1. Um Lagrangiano (autônomo) do tipo Tonelli em M é uma função $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ , satisfazendo as seguintes condições:

- (i) Convexidade: A matriz Hessiana $\frac{\partial^2 L}{\partial v_i \partial v_j}(x, v)$, calculada em coordenadas, é uniformemente positiva definida para todo $(x, v) \in TM$, ie, existe $A > 0$ tal que

$$w \cdot L_{vv}(x, v) \cdot w \geq A|w|^2 \text{ para todo } (x, v) \in TM \text{ e } w \in T_x M.$$

- (ii) Superlinearidade:

$$\lim_{|v| \rightarrow \infty} \frac{L(x, v)}{|v|} = \infty, \text{ uniformemente em } x \in M,$$

equivalentemente, para todo $A \in \mathbb{R}$ existe $B \in \mathbb{R}$ tal que

$$L(x, v) \geq A|v| - B \text{ para todo } (x, v) \in TM.$$

1.1 Lagrangianos

Definição 1.2. Seja $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ um Lagrangiano e $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ uma curva de classe C^1 . Definimos a ação de γ por L como

$$A_L(\gamma) = \int_a^b L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt.$$

Gostaríamos de encontrar curvas que minimizam ação, ie, $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ tal que $A_L(\gamma) \leq A_L(\alpha)$ para toda α , C^1 por partes, com $\alpha(a) = \gamma(a)$ e $\alpha(b) = \gamma(b)$. Quando encontramos tal curva, dizemos que γ é uma minimizante. Este é um problema de cálculo variacional e denotando \mathcal{C} o conjunto das curvas $\gamma : [a, b] \rightarrow M$ de classe C^1 temos:

Proposição 1.1. Se a curva $x(t)$ é ponto crítico da ação funcional em \mathcal{C} , então $x(t)$ satisfaz a equação de Euler-Lagrange

$$\frac{d}{dt} L_v(x(t), \dot{x}(t)) = L_x(x(t), \dot{x}(t)).$$

Demonstração. Vamos escolher (x_1, \dots, x_n) um sistema de coordenadas sobre $x(t)$. Seja $h(t)$ uma curva diferenciável tal que $h(a) = h(b) = 0$. Então, para todo $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, a curva $y_\epsilon = x + \epsilon h$ está em \mathcal{C} e contida no sistema de coordenadas acima. Agora, defina $g(\epsilon) = A_L(y_\epsilon)$. Observe que $g(0) = A_L(x(t))$ e, uma vez que x é ponto crítico em \mathcal{C} , 0 é mínimo de g . Além disso,

$$\begin{aligned} g'(0) &= \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{g(\epsilon) - g(0)}{\epsilon} = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_a^b \frac{L(x + \epsilon h, \dot{x} + \epsilon \dot{h}) - L(x, \dot{x})}{\epsilon} dt \\ &= \int_a^b \left[\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{L(x, \dot{x}) + \epsilon L_x h + \epsilon L_v \dot{h} + o(\epsilon^2) - L(x, \dot{x})}{\epsilon} \right] dt \\ &= \int_a^b \left[\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{\epsilon L_x h + \epsilon L_v \dot{h} + o(\epsilon^2)}{\epsilon} \right] dt \\ &= \int_a^b [L_x h + L_v \dot{h}] dt \end{aligned}$$

Resolvendo a última integral pelo método de integração por partes ($u = L_v$ e $dv = \dot{h}$),

$$\begin{aligned} g'(0) &= \int_a^b L_x h dt + L_v h \Big|_a^b - \int_a^b \frac{d}{dt} L_v h dt \\ &= h(a) - h(b) + \int_a^b \left(L_x - \frac{d}{dt} L_v \right) h dt \end{aligned}$$

1.1 Lagrangianos

Como $h(a) = h(b) = 0$ e $g'(0) = 0$ temos

$$\int_a^b \left[L_x(x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} L_v(x(t), \dot{x}(t)) \right] h dt = 0$$

para toda $h \in \mathcal{C}$.

Afirmção 1. Sejam $f, g : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\int_a^b f(t)g(t)dt = 0$ para toda função g . Então $f \equiv 0$.

De fato, suponhamos que $f(t) \neq 0$ para todo $t \in [a, b]$ e tome $g(t) = \frac{1}{f(x)}$. Pela hipótese, temos que

$$0 = \int_a^b f(t)g(t)dt = \int_a^b f(t) \frac{1}{f(t)} dt = \int_a^b dt = b - a \neq 0,$$

contradição! Logo, temos o resultado.

Assim, pela Afirmção 1, concluímos que

$$L_x(x(t), \dot{x}(t)) - \frac{d}{dt} L_v(x(t), \dot{x}(t)) = 0,$$

ou seja, $x(t)$ satisfaz a equação de Euler-Lagrange(E-L). □

A equação de Euler-Lagrange é uma equação de segunda ordem em M , mas com a hipótese de convexidade do Lagrangiano temos L_{vv} invertível e isso nos permite escrevê-la como um sistema de equações diferenciais de primeira ordem em TM . De fato,

$$L_x(x, \dot{x}) = \frac{d}{dt} L_v(x, \dot{x}) = L_{vx}(x, \dot{x})\dot{x} + L_{vv}(x, \dot{x})\ddot{x}.$$

Uma vez que L_{vv} é invertível e fazendo a substituição $\dot{x} = v$, temos

$$\dot{v} = (L_{vv})^{-1}(L_x - L_{vx}v)$$

e nosso sistema de primeira ordem em TM fica

$$\begin{cases} \dot{x} = v \\ \dot{v} = (L_{vv})^{-1}(L_x - L_{vx}v). \end{cases}$$

O campo de vetores X em TM associado ao sistema acima, que em coordenadas se escreve como $X(x, v) = (v, (L_{vv})^{-1}(L_x - L_{vx}v))$, é chamado de *Campo de Vetores Lagrangiano* e seu fluxo φ_t é chamado de *Fluxo Lagrangiano*. Uma observação importante é que devemos supor que L seja, pelo menos, C^3 para que X e φ_t sejam, pelo menos, C^1 .

1.2 Hamiltonianos

Definição 1.3. A função de Energia de um Lagrangiano L é $E : TM \rightarrow \mathbb{R}$, definida por

$$E(x, v) = \frac{\partial L}{\partial v}(x, v) \cdot v - L(x, v). \quad (1.1)$$

Se $x(t)$ é uma solução da equação de Euler-Lagrange (E-L), temos

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt}E(x, \dot{x}) &= \frac{d}{dt}L_v(x, \dot{x}) \cdot \dot{x} + L_v(x, \dot{x}) \cdot \ddot{x} - L_x(x, \dot{x}) \cdot \dot{x} - L_v(x, \dot{x})\ddot{x} \\ &= \left(\frac{d}{dt}L_v(x, \dot{x}) - L_x(x, \dot{x}) \right) \cdot \dot{x} \\ &= 0, \end{aligned}$$

ou seja, E é constante ao longo do fluxo de E-L e, portanto, é uma integral primeira para tal sistema. Dessa maneira, temos que o fluxo de Euler-Lagrange é completo e diferenciável. As curvas de nível da função E são chamadas de *níveis de energia*. Para um nível de energia fixo, denotaremos $T^cM = \{E^{-1}(c); E : TM \rightarrow \mathbb{R} \text{ é a função de energia}\}$

Uma vez que o Lagrangiano L é convexo nas fibras podemos considerar

$$e_0 := \max_{x \in M} E(x, 0) = - \min_{x \in M} L(x, 0).$$

Observemos que pela superlinearidade temos $e_0 > -\infty$.

1.2 Hamiltonianos

Nesta seção, definiremos os Hamiltonianos, que são funções definidas num espaço munido por uma forma simplética e com valores reais. Além disso, o fluxo Hamiltoniano é conjugado ao fluxo de Euler-Lagrange via transformada de Legendre.

Definição 1.4. Uma estrutura simplética em uma variedade N é uma 2-forma $\omega : T_xN \times T_xN \rightarrow \mathbb{R}$ bilinear e antissimétrica tal que

- (i) ω é fechada, ie, $d\omega = 0$;
- (ii) ω é não degenerada, ie, se $\omega_x(u, v) = 0$ para todo $v \in T_xM$ então $u = 0$.

Nesse caso, dizemos que o par (N, ω) é uma *Variedade Simplética*.

1.2 Hamiltonianos

Exemplo 1.1. Seja $\{x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n\}$ uma base de \mathbb{R}^{2n} . Assim,

$$\bar{\omega} = \sum_1^n dx_i \wedge dy_i$$

é a *estrutura simplética canônica* em \mathbb{R}^{2n} .

Proposição 1.2. Seja V espaço vetorial de dimensão finita que admite uma estrutura simplética ω . Então V tem dimensão par.

Demonstração. Sejam $\{e_i\}$ uma base de V e $A = [A_{ij}]$ a matriz de ω nessa base, ie, $A_{ij} = \omega(e_i, e_j)$. Como ω é anti-simétrica temos $A^t = -A$ e assim

$$\det A = \det A^t = \det(-A) = (-1)^{\dim V} \det A.$$

Como ω é não degenerada $\det A \neq 0$ e, portanto, a dimensão de V é par. □

Definição 1.5. Seja (N, ω) uma variedade simplética. Um Hamiltoniano é uma função $H : N \rightarrow \mathbb{R}$ de classe $C^r, r \geq 2$. O Campo Hamiltoniano X_H associado a H é definido por

$$\omega(X_H, \cdot) = dH(\cdot). \tag{1.2}$$

O fluxo associado ao campo Hamiltoniano é chamado de *fluxo Hamiltoniano*.

Sejam T_x^*M o espaço dual de T_xM e $T^*M = \{(x, p) : p \in T_x^*M\}$ o fibrado cotangente de M .

Definição 1.6. Definimos a 1-forma de Liouville Θ em T^*M como

$$\Theta_{(x,p)}(\xi) = p(d\pi\xi), \quad \text{para } \xi \in T_{(x,p)}(T^*M)$$

em que $\pi : T^*M \rightarrow M$ é a projeção canônica. A *forma simplética canônica* em T^*M é definida como $\omega = -d\Theta$.

Proposição 1.3. O par (T^*M, ω) , em que ω é a 2-forma definida acima, é uma variedade simplética.

1.2 Hamiltonianos

Demonstração. Uma vez que $\omega = -d\Theta$, temos que ω é fechada, pois $d\omega = -d(d\Theta) = 0$. Vamos mostrar agora que ω é não degenerada. De fato, escrevendo $\xi \in T_{(x,p)}T^*M$ em coordenadas locais como

$$\xi = \sum_i^n X_i \frac{\partial}{\partial x_i} + \sum_i^n P_i \frac{\partial}{\partial p_i},$$

temos

$$\omega(\xi, \cdot) = \sum_i^n X_i dp_i - \sum_i^n P_i dx_i,$$

ou seja, se $\omega(\xi, \cdot) = 0$ temos $\xi = 0$, já que $\{dx_i, dp_i\}$ é base das 1-formas em T^*M e, portanto, ω é não-degenerada. □

Escrevendo $x = (x_1, \dots, x_n)$ num sistema de coordenadas locais de M e $p \in T^*M$ como $\sum_i^n p_i \cdot dx_i$ induzimos um sistema de coordenadas locais $(x, p) = (x_1, \dots, x_n, p_1, \dots, p_n)$ de T^*M . Assim, nesse sistema de coordenadas, podemos escrever as formas Θ e ω como

$$\begin{aligned} \Theta &= p \cdot dx = \sum_i p_i dx_i \\ \omega &= -d\Theta = -dp \wedge dx = \sum_i -dp_i \wedge dx_i. \end{aligned}$$

Dessa maneira, escrevemos

$$dH = \sum_i^n \frac{\partial H}{\partial x_i} dx_i + \sum_i^n \frac{\partial H}{\partial p_i} dp_i$$

e, assim,

$$X_H(x, p) = \sum_i^n \frac{\partial H}{\partial p_i} \frac{\partial}{\partial x_i} - \sum_i^n \frac{\partial H}{\partial x_i} \frac{\partial}{\partial p_i}.$$

Portanto, o sistema Hamiltoniano que provém do campo X_H é dado por

$$\begin{cases} \dot{x} = H_p \\ \dot{p} = -H_x. \end{cases}$$

Podemos ver que o fluxo Hamiltoniano dado pelo sistema acima também é constante ao longo das trajetórias. De fato,

$$\frac{d}{dt} H(x(t), p(t)) = H_x \dot{x} + H_p \dot{p} = 0.$$

1.3 Fluxo Magnético

Definição 1.7. A Transformada de Fenchel, $\hat{H} : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$, de um Lagrangiano L é dada por

$$\hat{H}(x, p) = \sup_{v \in T_x M} \{pv - L(x, v)\}.$$

Observe que a Transformada de Fenchel está bem definida, pois, pela superlinearidade de L , temos

$$\lim_{\|v\| \rightarrow \infty} \frac{pv - L(x, v)}{\|v\|} = -\infty,$$

logo, existe $K > 0$ tal que $\hat{H}(x, p) = \sup_{v \in T_x M} \{pv - L(x, v)\} = \max_{\|v\| \leq K} \{pv - L(x, v)\}$.

Considere agora o Hamiltoniano obtido pela Transformada de Fenchel de um Lagrangiano. O fluxo associado a esse Hamiltoniano é conjugado ao fluxo de Euler-Lagrange e a conjugação é dada pela proposição a seguir cuja demonstração pode ser encontrada em [1].

Proposição 1.4. Seja $\mathcal{L} : TM \rightarrow T^*M$ definida por $\mathcal{L}(x, v) = (x, L_v(x, v))$ a Transformada de Legendre. Então $\hat{H} = E \circ \mathcal{L}^{-1}$, em que E é a função de Energia definida em (1.1). E mais, \mathcal{L} é a conjugação entre o fluxo Lagrangiano e o fluxo Hamiltoniano.

1.3 Fluxo Magnético

Sejam M uma variedade fechada de classe C^∞ e TM seu fibrado tangente. Vamos definir em TM uma forma simplética de maneira a deixá-lo uma variedade simplética.

Considere $\pi : TM \rightarrow M$ a projeção canônica, $g : T_x M \times T_x M \rightarrow \mathbb{R}$ a métrica Riemanniana em M e ∇ a conexão de Levi-Civita. Dados $\theta = (x, v) \in TM$ e $\xi \in T_\theta TM$, seja $\alpha(t) = (Z(t), V(t))$ uma curva adaptada a ξ , i.e., $\alpha(0) = \theta$ e $\alpha'(0) = \xi$. Definimos

$$V(\theta) = \ker(d_\theta \pi) \subset T_\theta TM \quad \text{e} \quad H(\theta) = \ker(K_\theta) \subset T_\theta TM,$$

onde $K : TTM \rightarrow TM$ é definido por $K_\theta(\xi) = \nabla_{\dot{Z}(0)}(V(0))$.

O isomorfismo

$$\begin{aligned} \Lambda : T_\theta TM &\rightarrow T_{\pi(\theta)}M \times T_{\pi(\theta)}M \\ \xi &\mapsto (d_\theta \pi(\xi), K_\theta(\xi)) \end{aligned}$$

nos dá $T_\theta TM = H(\theta) \oplus V(\theta) = T_x TM \times T_x TM$. Esses dois subespaços são chamados Horizontal e Vertical, respectivamente.

1.3 Fluxo Magnético

Dessa maneira, podemos escrever $\xi = (\xi^h, \xi^v)$ e definir uma métrica $\langle \cdot, \cdot \rangle$ em TM como

$$\langle \xi, \eta \rangle_\theta = g_{\pi(\theta)}(d_\pi(\xi), d_\pi(\eta)) + g_{\pi(\theta)}(K_\theta(\xi), K_\theta(\eta)) \quad \forall \xi, \eta \in T_\theta TM$$

e uma estrutura J_θ em $T_\theta TM$ dada por $J_\theta(\xi^h, \xi^v) = (-\xi^v, \xi^h)$. Assim, a *forma simplética canônica* em TM é

$$\omega_0(\xi, \eta) = \langle J_\theta \xi, \eta \rangle_\theta = g_{\pi(\theta)}(d_\pi(\xi), K_\theta(\eta)) - g_{\pi(\theta)}(K_\theta(\xi), d_\pi(\eta)).$$

Dada uma 2-forma fechada Ω em M considere a nova forma simplética em TM definida por

$$\omega(\Omega) = \omega_0 + \pi^* \Omega,$$

conhecida como *forma simplética "twisted"*.

Fixamos a função Hamiltoniana $E_c : TM \rightarrow \mathbb{R}$ como

$$E_c(x, v) = \frac{1}{2}g(v, v)$$

e definimos o *campo magnético* sendo campo X_Ω do Hamiltoniano E_c com relação à forma simplética "twisted", ou seja,

$$\omega(\Omega)(X_\Omega, \cdot) = dE_c(\cdot).$$

Definição 1.8. O *fluxo magnético* induzido pela 2-forma fechada Ω é o fluxo

$$\phi_t^\Omega : TM \rightarrow TM$$

associado ao campo Hamiltoniano X_Ω .

Definimos a *Força de Lorentz* $Y = Y(\Omega) : TM \rightarrow TM$ pela igualdade

$$\Omega(x)(u, v) = g_x(Y_x \cdot u, v) \quad \forall x \in M \text{ e } u, v \in T_x M.$$

Para cada $\xi \in T_\theta TM$, escrevendo $\theta = (x, v)$, $\xi = (\xi^h, \xi^v)$, $X_\Omega(\theta) = (X_\Omega(\theta)^h, X_\Omega(\theta)^v)$ e aplicando a definição de $\omega(\Omega)$ obtemos:

$$\begin{aligned} \omega(\Omega)_\theta(X(\theta), \xi) &= (\omega_0)_\theta(X_\Omega(\theta), \xi) + (\pi^* \Omega)_\theta(X_\Omega(\theta), \xi) \\ &= g_x(X_\Omega(\theta)^h, \xi^v) - g_x(X_\Omega(\theta)^v, \xi^h) + \Omega_x(X_\Omega(\theta)^h, \xi^h) \\ &= g_x(X_\Omega(\theta)^h, \xi^v) - g_x(X_\Omega(\theta)^v, \xi^h) + g_x(Y_x \cdot X_\Omega(\theta)^h, \xi^h) \\ &= g_x(X_\Omega(\theta)^h, \xi^v) + g_x(Y_x \cdot X_\Omega(\theta)^h - X_\Omega(\theta)^v, \xi^h). \end{aligned}$$

1.3 Fluxo Magnético

Por outro lado, se $z : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow TM$ é uma curva adaptada a ξ e $V(t)$ é um campo de vetores ao longo da curva $\pi \circ z(t)$, tal que $z(t) = (\pi \circ z(t), V(t))$ temos

$$dE_c(\theta)(\xi) = \frac{d}{dt} \Big|_{t=0} \frac{1}{2} g(V(t), V(t)) = g(\nabla_{\dot{z}} V(0), V(0)) = g_x(\xi^v, v).$$

Igualando os dois termos temos

$$g_x(X_\Omega(\theta)^h, \xi^v) + g_x(Y_x \cdot X_\Omega(\theta)^h - X_\Omega(\theta)^v, \xi^h) = g_x(\xi^v, v) = g_x(v, \xi^v)$$

e isso nos dá

$$X_\Omega(\theta)^h = v \quad \text{e} \quad g_x(Y_x \cdot X_\Omega(\theta)^h - X_\Omega(\theta)^v, \xi^h) = 0.$$

Como $\xi^h \neq 0$ temos $Y_x \cdot X_\Omega(\theta)^h - X_\Omega(\theta)^v = 0$. Ou seja,

$$X_\Omega(\theta)^h = v \quad \text{e} \quad X_\Omega(\theta)^v = Y_x \cdot v$$

e, portanto,

$$X_\Omega(\theta) = (v, Y_x \cdot v) \in H(\theta) \oplus V(\theta). \quad (1.3)$$

Pela equação (1.3) temos que $t \mapsto (\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = \phi_t^\Omega(\theta)$ é uma órbita do fluxo magnético se e somente se a curva $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$ satisfaz

$$\frac{D}{dt}(\dot{\gamma}) = Y_\gamma(\dot{\gamma}) \quad (1.4)$$

com condições iniciais $\gamma(0) = x$ e $\dot{\gamma}(0) = v$.

Podemos dizer que o fluxo magnético ϕ_t^Ω descreve as trajetórias de uma partícula de massa 1 sobre o efeito de um campo magnético cuja força de Lorentz é $Y(\Omega)$ (Lei de Newton).

Quando Ω é exata, isto é, existe uma 1-forma η tal que $\Omega = d\eta$, temos o Lagrangiano associado $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ dado por

$$L(x, v) = E_c(x, v) - \eta_x(v).$$

Em coordenadas locais, as equações de Euler-Lagrange de L coincidem com a equação (1.4). Além disso, a função de energia de L é

$$\begin{aligned} E(x, v) &= \frac{\partial L}{\partial v}(x, v) \cdot v - L(x, v) \\ &= \frac{1}{2} \left(\frac{\partial}{\partial v} g_x(v, v) - \frac{\partial}{\partial v} \eta_x(v) \right) \cdot v - \left(\frac{1}{2} g_x(v, v) - \eta_x(v) \right) \\ &= \frac{1}{2} (g_x(v, v) + g_x(v, v) - \eta_x(v)) - \frac{1}{2} g_x(v, v) + \eta_x(v) \\ &= \frac{1}{2} g_x(v, v). \end{aligned}$$

1.3 Fluxo Magnético

Portanto, o fluxo de Euler-Lagrange de L coincide com o fluxo magnético para $\Omega = d\eta$. Neste caso, o fluxo é chamado de *Fluxo Magnético Exato*. Quando Ω não é exata, o fluxo é chamado de *Monopólo Magnético*.

Exemplo 1.2. Em particular, se $\Omega \equiv 0$, temos o fluxo geodésico. De fato, teremos $g_x(Y_x \cdot u, v) = 0 \quad \forall u, v \in T_x M$. Como $u \neq 0, v \neq 0$ temos $Y_x \cdot u = 0 \quad \forall x \in M$, ou seja, $Y \equiv 0$. Logo $\frac{D}{dt}(\dot{\gamma}) = Y_x(\dot{\gamma}) = 0$.

Definição 1.9. Dizemos que um fluxo é homogêneo se para toda solução $\gamma(t)$ com condições iniciais $\gamma(0) = x$ e $\dot{\gamma}(0) = v$ temos que $\tilde{\gamma}(t) = \gamma(\lambda t)$ também é solução com condições iniciais $\tilde{\gamma}(0) = x$ e $\dot{\tilde{\gamma}}(0) = \lambda v$.

Proposição 1.5. O fluxo magnético é homogêneo se, e somente se, $Y \equiv 0$.

Demonstração. Seja γ uma órbita do fluxo magnético tal que $\gamma(0) = p$ e $\dot{\gamma}(0) = v$. Se $\tilde{\gamma} = \gamma(\lambda t)$, então

$$\frac{D}{dt}\dot{\tilde{\gamma}} = \lambda^2 \frac{D}{dt}\dot{\gamma}(\lambda t) = \lambda^2 Y_{\gamma(\lambda t)}\dot{\gamma}(\lambda t) = \lambda^2 Y_{\gamma(\lambda t)}\frac{1}{\lambda}\dot{\tilde{\gamma}} = (\lambda Y)_{\tilde{\gamma}}\dot{\tilde{\gamma}}$$

para todo t e para todo v . Em particular, para $t=0$ temos

$$\left. \frac{D}{dt} \right|_{t=0} \dot{\tilde{\gamma}} = (\lambda Y)\dot{\tilde{\gamma}}(0) = \lambda Y(\lambda v) = \lambda^2 Yv.$$

Para $\tilde{\gamma}$ ser solução devemos ter

$$\left. \frac{D}{dt} \right|_{t=0} \dot{\tilde{\gamma}} = Y(\lambda v).$$

Igualando as duas equações temos

$$\lambda^2(Yv) = \lambda(Yv), \quad \text{para todo } \lambda \text{ e para todo } v,$$

ou seja,

$$(\lambda^2 - \lambda)Yv = 0.$$

Então para $\lambda \neq 0$ e $\lambda \neq 1$, temos $Yv = 0$ para todo v , ou seja, $Y \equiv 0$ como gostaríamos. Nos casos em que $\lambda = 0$ temos $\tilde{\gamma} = x$ e $\lambda = 1$ temos $\tilde{\gamma} = \gamma$ que são soluções.

A recíproca é imediata, pois, como vimos no exemplo (1.2), temos o fluxo geodésico. □

1.4 Equações de Jacobi

Fixado $\theta \in TM$, sejam $\phi_t^\Omega(\theta) = (\gamma, \dot{\gamma})$ sua órbita pelo fluxo magnético e $\xi \in T_\theta TM$. Definimos o *Campo de Jacobi* $J_\xi(t)$ como o campo de vetores ao longo de $\gamma : \mathbb{R} \rightarrow M$, dado por

$$J_\xi(t) := \left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \pi \circ \phi_t^\Omega(\alpha(s)),$$

onde $\alpha : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow TM$ é uma curva adaptada a $\xi \in T_\theta TM$, i.e., $\alpha(0) = \theta$ e $\dot{\alpha}(0) = \xi$.

Vamos denotar $\gamma_s(t)$ a trajetória correspondente à órbita pelo fluxo do ponto $\alpha(s)$, i.e., $\gamma_s(t) = \pi \circ \phi_t^\Omega(\alpha(s))$. Como $\frac{D}{dt} \dot{\gamma}_s(t) = Y_{\gamma_s(t)} \cdot \dot{\gamma}_s(t)$, derivando ambos os lados em relação à s temos

$$\left. \frac{D}{ds} \right|_{s=0} \left(Y_{\gamma_s(t)} \cdot \dot{\gamma}_s(t) \right) = \left. \frac{D}{ds} \right|_{s=0} \left(\frac{D}{dt} \dot{\gamma}_s(t) \right) = \frac{D}{dt} \left(\left. \frac{D}{dt} \left(\left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \gamma_s(t) \right) \right) = \frac{D^2}{d^2t} \left(J_\xi(t) \right).$$

Utilizando a simetria da conexão e, uma vez que o tensor de curvatura Riemanniana satisfaz

$$R\left(\frac{\partial}{\partial s} \gamma_s, \frac{\partial}{\partial t} \gamma_s\right) \frac{\partial}{\partial t} \gamma_s = \frac{D}{dt} \frac{D}{ds} \dot{\gamma}_s(t) - \frac{D}{ds} \frac{D}{dt} \dot{\gamma}_s(t),$$

obtemos

$$\frac{D^2}{d^2t} \left(J_\xi(t) \right) + R(\dot{\gamma}_s, J_\xi) \dot{\gamma}_s = \left. \frac{D}{ds} \right|_{s=0} \left(Y_{\gamma_s(t)} \cdot \dot{\gamma}_s(t) \right).$$

Sendo a aplicação $(x, v) \mapsto Y_x \cdot v$ um $(1, 1)$ -tensor e estendendo a conexão aos tensores temos

$$\left. \frac{D}{ds} \right|_{s=0} \left(Y_{\gamma_s} \cdot \dot{\gamma}_s \right) = \left(\nabla_{\left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \gamma_s} Y \right) \cdot \dot{\gamma} + Y_\gamma \cdot \left. \frac{D}{dt} \left(\left. \frac{\partial}{\partial s} \right|_{s=0} \gamma_s \right) \right).$$

Finalmente, utilizando as equações acima, obtemos a *Equação de Jacobi* do fluxo magnético sobre γ :

$$\frac{D^2}{d^2t} \left(J_\xi(t) \right) + R(\dot{\gamma}, J_\xi) \dot{\gamma} - \left(\nabla_{J_\xi(t)} Y \right) \cdot \dot{\gamma} - Y \cdot \frac{D}{dt} J_\xi = 0.$$

Decompondo TTM nos subespaços horizontal e vertical, podemos escrever a derivada do fluxo em $T^c M = \{E^{-1}(c); E : TM \rightarrow \mathbb{R} \text{ é a função de energia}\}$, chamado nível de energia, como

$$d\phi_t(\theta)(\xi) = \left(J_\xi(t), \frac{D}{dt} J_\xi(t) \right), \quad \forall \xi \in T_\theta T^c M.$$

1.5 Fluxo Magnético em uma superfície

De fato, valem:

$$\left\{ \begin{array}{l} J_\xi(t) = \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} (\pi \circ \phi_t)(\xi) = d\pi(\phi_t(\theta)) \circ d\phi_t(\theta)(\xi) \\ \frac{D}{dt} J_\xi(t) = \frac{D}{dt} \frac{\partial}{\partial s} \Big|_{s=0} (\pi \circ \phi_t(\alpha(s))) = \frac{D}{dt} \Big|_{s=0} \frac{\partial}{\partial t} (\pi \circ \phi_t(\alpha(s))) = \frac{D}{dt} \Big|_{s=0} \frac{\partial}{\partial t} (\gamma_s)(t) = K_{\phi_t(\theta)}(d\phi_t(\theta)(\xi)). \end{array} \right.$$

1.5 Fluxo Magnético em uma superfície

Seja M variedade de dimensão 2, fechada, orientada e com métrica Riemanniana g . Dado $\theta = (x, v) \in TM$, existe uma única aplicação linear $i : T_x M \rightarrow T_x M$ que define uma base ortogonal $\{v, i \cdot v\}$ em $T_x M$ orientada positivamente.

Consideremos a 2-forma Ω_0 fechada em M sendo a forma de área, i.e.,

$$\Omega_0(x)(u, v) = g_x(i \cdot u, v).$$

Denotamos por $\Omega^2(M)$ o espaço vetorial das 2-formas de classe C^∞ sobre M . Uma vez que $\dim(M) = 2$ temos que $d\omega = 0$ para toda $\omega \in \Omega^2(M)$. Dessa maneira, a toda $\omega \in \Omega^2(M)$ podemos identificá-la como $\omega = \omega_f = f\Omega_0$, onde $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^∞ .

Pela definição da força de Lorentz Y temos:

$$Y = Y^f = Y(\Omega_f) = \Omega_f(x)(u, v) = f\Omega_0(x)(u, v) = fg_x(i \cdot u, v) = fi$$

e a forma simplética “*twisted*” ω_f definida por Ω_f se reescreve como

$$\begin{aligned} \omega_f(\theta)(\xi, \eta) = \omega(\Omega_f)(\theta)(\xi, \eta) &= \omega_0(\theta)(\xi, \eta) + (\pi^*(\Omega_f))(\theta)(\xi, \eta) \\ &= \omega_0(\theta)(\xi, \eta) + \Omega_f(\pi(\theta))(d\pi\xi, d\pi\eta) \\ &= \omega_0(\theta)(\xi, \eta) + f(\pi(\theta))\Omega_0(x)(\xi^h, \eta^h) \\ &= \omega_0(\theta)(\xi, \eta) + f(x) \cdot g_x(i \cdot \xi^h, \eta^h). \end{aligned}$$

Denotamos o campo e o fluxo magnético associados à forma “*twisted*” ω_f por X^f e ϕ^f , respectivamente. Sendo assim, afirmamos que as órbitas desse fluxo são as soluções da equação

$$\frac{D}{dt} \dot{\gamma} = Y_\gamma^f \cdot \dot{\gamma} = f(\gamma)i \cdot \dot{\gamma}.$$

Sejam $T^c M$ o nível de energia, e $(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) = \phi_t(\theta)$ a órbita por um ponto $\theta = (x, v) \in T^c M$. Sendo $\{\dot{\gamma}(t), i \cdot \dot{\gamma}(t)\}$ uma base ortogonal de $T_{\gamma(t)} M$ temos o seguinte teorema:

1.5 Fluxo Magnético em uma superfície

Teorema 1.1. Seja $J(t) \in T_{\gamma(t)}M$ um campo de Jacobi ao longo de uma trajetória do fluxo magnético $\gamma(t) = \pi \circ \phi_t^f(\theta)$. Se escrevemos $J(t) = x(t)\dot{\gamma}(t) + y(t)i \cdot \dot{\gamma}(t)$, então os funcionais lineares $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazem as equações diferenciais:

$$\begin{cases} \dot{x} - fy = 0 \\ \ddot{y} + (2cK + f^2 - g_\gamma(\nabla f, i \cdot \dot{\gamma}))y = 0, \end{cases}$$

onde $K = g_x(R(\dot{\gamma}, i(\dot{\gamma}))\dot{\gamma}, i(\dot{\gamma}))$ é a curvatura seccional ao longo de $\gamma(t)$, ∇f é o vetor gradiente de f e c é o valor da energia.

Demonstração. Para iniciar nossa demonstração, lembramos que $J(t)$ satisfaz:

$$(i) \quad \frac{D^2}{dt^2} \left(J(t) \right) + R(\dot{\gamma}, J(t))\dot{\gamma} - \left(\nabla_{J(t)} f \right) i \cdot \dot{\gamma} - fi \cdot \frac{D}{dt} J(t) = 0$$

$$(ii) \quad (J(t), \frac{D}{dt} J(t)) \in T_{\phi_t^f(\theta)} T^c M, \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Além disso, observamos que

$$\frac{D}{dt}(i \cdot \dot{\gamma}) = (\nabla_{\dot{\gamma}} i)\dot{\gamma} + i \cdot \frac{D}{dt} \dot{\gamma} = i \cdot fi \cdot \dot{\gamma} = -f\dot{\gamma}$$

e

$$\begin{aligned} \frac{D}{dt} J(t) &= \frac{D}{dt} \left(x(t)\dot{\gamma}(t) + y(t)i \cdot \dot{\gamma}(t) \right) = \dot{x}(t)\dot{\gamma}(t) + x(t)\frac{D}{dt}\dot{\gamma}(t) + \dot{y}(t)i \cdot \dot{\gamma}(t) + y(t)i\frac{D}{dt}\dot{\gamma}(t) \\ &= \dot{x}\dot{\gamma} + xfi\dot{\gamma} + \dot{y}i\dot{\gamma} + yifi\dot{\gamma} \\ &= (\dot{x} - yf)\dot{\gamma} + (\dot{y} + xf)i \cdot \dot{\gamma}. \end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\frac{D^2}{dt^2} J(t) = (\ddot{x} - 2\dot{y}f - y\dot{f} - xf^2)\dot{\gamma} + (\ddot{y} + 2\dot{x}f + x\dot{f} - yf^2)i \cdot \dot{\gamma}.$$

Por outro lado, valem:

$$fi\left(\frac{D}{dt} J\right) = (xf^2 - \dot{y}f)\dot{\gamma} + (f\dot{x} - yf^2)i \cdot \dot{\gamma}$$

e

$$(\nabla_{J(t)} f)i \cdot \dot{\gamma} = \{x\nabla f(\gamma) + y\nabla f(i \cdot \dot{\gamma})\}i \cdot \dot{\gamma}.$$

1.6 Grupo Fundamental

Tomando a componente na direção de $\dot{\gamma}$ da equação (i) temos:

$$\begin{aligned} 0 &= g\left(\frac{D^2}{dt^2}J, \dot{\gamma}\right) + g(R(\dot{\gamma}, J)\dot{\gamma}, \dot{\gamma}) - g((\nabla_J f)i \cdot \dot{\gamma}, \dot{\gamma}) - g\left(i \cdot \left(\frac{D}{dt}J\right), \dot{\gamma}\right) \\ &= g\left(\frac{D^2}{dt^2}J, \dot{\gamma}\right) - g\left(i \cdot \left(\frac{D}{dt}J\right), \dot{\gamma}\right) \end{aligned}$$

e, assim, utilizando as equações anteriores, obtemos

$$\ddot{x} = \dot{y}f + y\dot{f} = \frac{d}{dt}(yf).$$

Da mesma forma, porém tomando a componente na direção de $i \cdot \dot{\gamma}$, temos

$$\ddot{y} + \{2cK_\gamma - g(\nabla f, i \cdot \dot{\gamma})\}y = -\dot{x}f = -(yf)f = -yf^2,$$

onde

$$K_\gamma = \frac{g(R(\dot{\gamma}(t), i \cdot \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t), i \cdot \dot{\gamma}(t))}{|\dot{\gamma}(t) \wedge i \cdot \dot{\gamma}(t)|^2} = \frac{1}{2c}g(R(\dot{\gamma}(t), i \cdot \dot{\gamma}(t))\dot{\gamma}(t), i \cdot \dot{\gamma}(t)).$$

Por (ii) temos

$$0 = dE\left(J(t), \frac{D}{dt}J(t)\right) = g\left(\dot{\gamma}, \frac{D}{dt}J\right) = \dot{x} - yf.$$

Logo, temos que $x, y : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ satisfazem as equações

$$\begin{cases} \dot{x} - fy = 0 \\ \ddot{y} + (2cK_\gamma + f^2 - g_\gamma(\nabla f, i \cdot \dot{\gamma}))y = 0. \end{cases}$$

□

1.6 Grupo Fundamental

Seja X um espaço topológico e consideremos $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow X$ caminhos fechados com ponto inicial e final $x_0 \in X$. A definição abaixo nos dá ideia de como deformar continuamente γ_1 em γ_2 por caminhos fechados.

Definição 1.10. Dizemos que γ_1 é homotópico a γ_2 se existe uma função $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow M$ contínua tal que

- i) $H(s, 0) = \gamma_1(s)$ e $H(s, 1) = \gamma_2(s)$ para todo $s \in [0, 1]$

1.6 Grupo Fundamental

ii) $H(0, t) = H(1, t) = x_0$ para todo $t \in [0, 1]$

Neste caso, dizemos que H é uma *homotopia* entre γ_1 e γ_2 e escrevemos $\gamma_1 \sim \gamma_2$.

A primeira condição nos diz que H é uma deformação contínua de γ_1 para γ_2 e a segunda nos diz que essa deformação preserva os pontos inicial e final.

Lema 1.1. A relação \sim definida acima é uma relação de equivalência.

Demonstração.

- i) $(\gamma \sim \gamma)$. Consideremos a homotopia $H(s, t) = \gamma(s)$ para todo $s \in [0, 1]$
- ii) $(\gamma_1 \sim \gamma_2 \Rightarrow \gamma_2 \sim \gamma_1)$. Seja H homotopia entre γ_1 e γ_2 . Definimos $G(s, t) = H(s, 1 - t)$. G é a homotopia entre γ_2 e γ_1 .
- iii) $(\gamma_1 \sim \gamma_2$ e $\gamma_2 \sim \gamma_3 \Rightarrow \gamma_1 \sim \gamma_3)$. Sejam H_1 homotopia entre γ_1 e γ_2 e H_2 homotopia entre γ_2 e γ_3 . Definimos

$$G(s, t) = \begin{cases} H_1(s, 2t) & \text{se } t \in [0, \frac{1}{2}], \\ H_2(s, 2t - 1) & \text{se } t \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Observemos que, se $t = \frac{1}{2}$, temos $H_1(s, 2t) = H(s, 1) = \gamma_2(s) = H_2(s, 0) = H_2(s, 2t - 1)$. Falta mostrar que G é contínua. Seja A um subconjunto aberto de X . Temos $H^{-1}(A) = H_1^{-1}(A) \cup H_2^{-1}(A)$. Pela continuidade de H_1 e H_2 , segue que $H_1^{-1}(A)$ e $H_2^{-1}(A)$ são abertos, e usando o fato de que união de abertos é aberto temos $H^{-1}(A)$ aberto. Logo, pela caracterização de função contínua por abertos, H é contínua.

□

Gostaríamos de definir uma operação nas classes de homotopia. Para isso, vamos definir uma operação entre curvas contínuas que tem o mesmo ponto inicial e final.

Definição 1.11. Sejam $\gamma_1, \gamma_2 : [0, 1] \rightarrow X$ curvas contínuas tal que ambas tem o mesmo ponto inicial e final $x_0 \in X$. Definimos o produto $\gamma_1 * \gamma_2$ como o caminho

$$\gamma_1 * \gamma_2(s) = \begin{cases} \gamma_1(2s) & \text{se } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ \gamma_2(2s - 1) & \text{se } s \in [\frac{1}{2}, 1]. \end{cases}$$

1.6 Grupo Fundamental

Observemos que esse produto está bem definido e é contínuo pelo mesmo argumento usado na demonstração da parte (iii) do Lema (1.1). Além disso, induz uma operação bem definida nas classes de caminhos homotópicos como:

$$[\gamma_1] * [\gamma_2] = [\gamma_1 * \gamma_2].$$

De fato, sejam H_1 e H_2 homotopia entre γ_1 e $\tilde{\gamma}_1$, e, γ_2 e $\tilde{\gamma}_2$ respectivamente. Definimos

$$H(s, t) = \begin{cases} H_1(2s, t) & \text{se } s \in [0, \frac{1}{2}], \\ H_2(2s - 1, t) & \text{se } s \in [\frac{1}{2}, 1] \end{cases}$$

Como $H_1(1, t) = x_0 = H_2(0, t)$ temos que H está bem definida e é contínua. Portanto é a homotopia entre $\gamma_1 * \gamma_2$ e $\tilde{\gamma}_1 * \tilde{\gamma}_2$.

Lema 1.2. A operação $*$ tem as seguintes propriedades:

1. (Associatividade) $[\gamma_1] * ([\gamma_2] * [\gamma_3]) = ([\gamma_1] * [\gamma_2]) * [\gamma_3]$;
2. (Identidade) Existe $e_{x_0} : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $e_{x_0}(t) = x_0 \forall t \in [0, 1]$ e

$$[\gamma_1] * [e_{x_0}] = [\gamma_1] = [e_{x_0}] * [\gamma_1];$$

3. (Inverso) Existe $\gamma_1^{-1} : [0, 1] \rightarrow X$ tal que $\gamma_1^{-1}(t) = \gamma_1(1 - t) \forall t \in [0, 1]$ e

$$[\gamma_1] * [\gamma_1^{-1}] = [\gamma_1^{-1}] * [\gamma_1] = [e_{x_0}].$$

Pelo Lema 1.2, cuja demonstração pode ser encontrada em [16], o conjunto das classes de homotopia com a operação $*$ forma um grupo chamado *Grupo Fundamental* de X relativo à base x_0 e denotado por $\pi_1(X, x_0)$.

Um fato imediato é que o grupo fundamental depende do ponto x_0 . Então, uma pergunta natural é: em quais condições a escolha do ponto base afeta a estrutura do grupo fundamental? A resposta é a seguinte:

Proposição 1.6. Se X é conexo por caminho e $x_0, x_1 \in X$, então $\pi_1(X, x_0)$ é isomorfo a $\pi_1(X, x_1)$.

1.6 Grupo Fundamental

Demonstração. Como X é conexo por caminhos, seja α um caminho ligando x_0 a x_1 e denote por $\bar{\alpha}$ o caminho inverso de α . Definimos

$$\begin{aligned} \phi : \pi_1(X, x_0) &\longrightarrow \pi_1(X, x_1) \\ [\gamma] &\longmapsto [\bar{\alpha}] * [\gamma] * [\alpha] \end{aligned}$$

Observemos que $[\bar{\alpha}] * [\gamma] * [\alpha]$ é um caminho fechado em x_1 . Além disso, ϕ é um homomorfismo, pois

$$\phi([\gamma_1]) * \phi([\gamma_2]) = ([\bar{\alpha}] * [\gamma_1] * [\alpha]) * ([\bar{\alpha}] * [\gamma_2] * [\alpha]) = [\bar{\alpha}] * [\gamma_1] * [\gamma_2] * [\alpha] = \phi([\gamma_1] * [\gamma_2]).$$

Agora seja

$$\begin{aligned} \psi : \pi_1(X, x_1) &\longrightarrow \pi_1(X, x_0) \\ [\beta] &\longmapsto [\alpha] * [\beta] * [\bar{\alpha}]. \end{aligned}$$

Observe que ψ é inversa de ϕ pois

$$\psi(\phi([\gamma])) = [\alpha] * ([\bar{\alpha}] * [\gamma] * [\alpha]) * [\bar{\alpha}] = [\gamma]$$

e

$$\phi(\psi([\beta])) = [\bar{\alpha}] * [\alpha] * [\beta] * [\bar{\alpha}] * [\alpha] = [\beta].$$

Logo ϕ é um isomorfismo e assim $\pi_1(X, x_0)$ é isomorfo a $\pi_1(X, x_1)$ como gostaríamos. \square

Portanto, se o espaço X for conexo por caminhos, o grupo fundamental de X independe do ponto base. Dessa maneira, vamos denotá-lo, sem perda de generalidade, por $\pi_1(X)$.

Definição 1.12. Seja $p_0 \in X$ qualquer. Dizemos que X é *simplesmente conexo* se $\pi_1(X, x_0) = \{e_{p_0}\}$. Em outras palavras, $\gamma \sim e_{p_0}$, para toda curva fechada $\gamma : [0, 1] \rightarrow X$.

Exemplo 1.3. Se X é convexo, então é simplesmente conexo. De fato, sejam $p_0 \in X$ e $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ uma curva fechada em M . Definimos

$$H(s, t) = (1 - t)\gamma(s) + tp_0.$$

Uma vez que X é convexo, H está bem definida e claramente é contínua com $H(s, 0) = \gamma(s)$ e $H(s, 1) = p_0$. Portanto, H é homotopia entre γ e e_{p_0} . Como γ é qualquer, temos $\pi_1(X, x_0) = \{e_{p_0}\}$.

1.7 Espaços de Recobrimento

A partir de agora, chamaremos o elemento identidade do grupo fundamental apenas de e .

Exemplo 1.4. *O Grupo Fundamental do bitoro.* Como podemos ver em [16], se M é o bitoro, temos que $\pi_1(M)$ é um grupo com 4 geradores, $\{a_1, b_1, a_2, b_2\}$, satisfazendo a relação

$$a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} = e.$$

A Figura 1.1 abaixo exemplifica essa relação. Observemos que a curva C é dada pela relação $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} = e$ ou $a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} = e$ e estas relações geram o grupo fundamental do toro. Assim, podemos dizer que o bitoro é uma “colagem” de 2 toros.

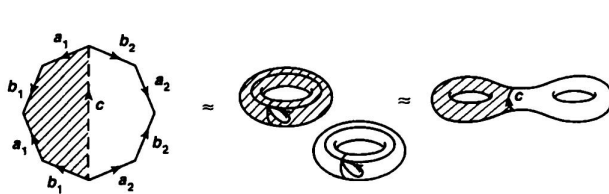


Figura 1.1: Representação do Grupo Fundamental do bitoro.

Além disso, podemos ver também em [16] e [27] que $\pi_1(M)$ não é abeliano.

1.7 Espaços de Recobrimento

Nesta seção, definiremos o recobrimento universal e alguns resultados que relacionam os espaços de recobrimento e subgrupos do grupo fundamental.

Definição 1.13. Uma função $p : \widehat{X} \rightarrow X$ contínua e sobrejetiva é uma aplicação de recobrimento (ou simplesmente um recobrimento) se para cada $x_0 \in X$ existe um aberto $U \ni x_0$ tal que $p^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$ com V_{α} disjuntos e, para cada α , p aplica V_{α} homeomorficamente a U . O espaço \widehat{X} é dito *Espaço de Recobrimento* de X . Quando o conjunto de índices α é finito, dizemos que \widehat{X} é um *recobrimento finito* de X .

Observemos que uma aplicação de recobrimento $p : \widehat{X} \rightarrow X$ é um homeomorfismo local sobre X .

1.7 Espaços de Recobrimento

Definição 1.14. Seja $p : \widehat{X} \rightarrow X$ uma aplicação de recobrimento. Se X é simplesmente conexo, então \widehat{X} é chamado *Recobrimento Universal* de X .

Seja $p : \widehat{X} \rightarrow X$ aplicação de recobrimento tal que $p(x_0) = b_0$. Definimos

$$\begin{aligned} p_* : \pi_1(\widehat{X}, x_0) &\longrightarrow \pi_1(X, b_0) \\ [\gamma] &\longmapsto [p \circ \gamma]. \end{aligned} \tag{1.5}$$

Observemos que p_* está bem definida, pois, se H é uma homotopia entre γ_1 e γ_2 , então $p \circ H$ é uma homotopia entre $p \circ \gamma_1$ e $p \circ \gamma_2$. Assim, se $[\gamma_1] = [\gamma_2]$, então $p_*([\gamma_1]) = [p \circ \gamma_1] = [p \circ \gamma_2] = p_*([\gamma_2])$.

Lema 1.3. A função $p_* : \pi_1(\widehat{X}, x_0) \rightarrow \pi_1(X, b_0)$ definida acima é um homomorfismo de grupos.

Demonstração. Sejam $[\gamma_1], [\gamma_2] \in \pi_1(X, x_0)$. Então,

$$\begin{aligned} p_*([\gamma_1] * [\gamma_2]) &= p_*([\gamma_1 * \gamma_2]) \\ &= [p \circ (\gamma_1 * \gamma_2)] \\ &= [(p \circ \gamma_1) * (p \circ \gamma_2)] \\ &= [(p \circ \gamma_1)] * [(p \circ \gamma_2)] \\ &= (p_*([\gamma_1])) * (p_*([\gamma_2])) \end{aligned}$$

□

Claramente p_* depende do ponto base x_0 . Porém, se \widehat{X} é conexo por caminhos essa dependência deixa de existir.

Definição 1.15. Sejam $p : \widehat{X} \rightarrow X$ e $\hat{p} : \widehat{Y} \rightarrow X$ aplicações de recobrimento. Dizemos que p e \hat{p} são equivalentes se existe um homeomorfismo $h : \widehat{X} \rightarrow \widehat{Y}$ tal que $p = \hat{p} \circ h$.

Definição 1.16. Sejam H_1, H_2 subgrupos de um grupo G . Dizemos que H_1 e H_2 são conjugados se $H_2 = g \cdot H_1 \cdot g^{-1}$ para algum elemento $g \in G$.

A proposição a seguir é uma caracterização entre aplicações de recobrimentos equivalentes e subgrupos do grupo fundamental e a demonstração pode ser encontrada em [16].

1.7 Espaços de Recobrimento

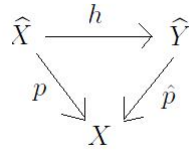


Figura 1.2: Diagrama de recobrimentos equivalentes.

Proposição 1.7. Sejam $p : \widehat{X} \rightarrow X$ e $\hat{p} : \widehat{Y} \rightarrow X$ aplicações de recobrimento tal que $p(x_0) = \hat{p}(y_0) = b_0$. Então p e \hat{p} são equivalentes se, e somente se, os subgrupos $H_0 = p_*(\pi_1(\widehat{X}, x_0))$ e $\hat{H}_0 = \hat{p}_*(\pi_1(\widehat{Y}, y_0))$ de $\pi_1(X, b_0)$ são conjugados.

Seja $p : \widehat{X} \rightarrow X$ é uma aplicação de recobrimento com $p(x_0) = b_0$. Se \widehat{X} é simplesmente conexo, temos que \widehat{X} é um recobrimento universal de X . Uma vez que $\pi_1(\widehat{X}, x_0)$ é o trivial, o homomorfismo $p_* : \pi_1(\widehat{X}, x_0) \rightarrow \pi_1(X, b_0)$ nos dá uma correspondência entre o subgrupo $\{e\}$ de $\pi_1(X, b_0)$ com $\pi_1(\widehat{X}, x_0)$. Da proposição anterior, se existem dois recobrimentos universais de X então eles são equivalentes. Por essa razão, o recobrimento universal é único, a menos de equivalência.

Definição 1.17. Um espaço X é dito semilocalmente simplesmente conexo se para cada $b \in X$ existe uma vizinhança $U_b \subset X$ tal que o homomorfismo $i_* : \pi_1(U_b, b) \rightarrow \pi_1(X, b)$ induzido pela inclusão – veja (1.5) – é o trivial.

Lema 1.4. Seja M uma variedade. Então M é simplesmente conexo semilocalmente.

Demonstração. Como M é variedade, dados $b \in M$ e um sistema de coordenadas local ϕ , existem vizinhanças $U_b \ni b$ e $V \subset \mathbb{R}^n$ com $\phi(V) = U_b$. Como V é simplesmente conexo e ϕ é homeomorfismo, temos U_b simplesmente conexo. Assim, tomando qualquer $[\gamma] \in \pi_1(U_b, b)$ temos $[\gamma] = [e]$, e, uma vez que $i_* : \pi_1(U_b, b) \rightarrow \pi_1(X, b)$ é homomorfismo de grupos, leva identidade em identidade. Portanto, i_* é trivial e, como b é qualquer, temos M simplesmente conexo semilocalmente. \square

A demonstração do Teorema a seguir pode ser encontrada em [16]

Teorema 1.2. Seja X conexo por caminhos, localmente conexo por caminhos e simplesmente conexo semilocalmente. Consideremos $b_0 \in X$. Dado um subgrupo H de $\pi_1(X, b_0)$ existe uma aplicação de recobrimento $p : \widehat{X} \rightarrow X$ e um ponto $x_0 \in p^{-1}(b_0)$, tal que $p_* \left(\pi_1(\widehat{X}, x_0) \right) = H$.

1.8 Homologia, Cohomologia e Recobrimento Abeli- ano

Observemos que se tomarmos $H = \{e\}$ o recobrimento obtido na proposição anterior é o recobrimento universal de X .

1.8 Homologia, Cohomologia e Recobrimento Abeli- ano

Sejam M uma variedade e ω uma 1-forma de classe C^∞ definida em M . Dizemos que ω é exata se existe uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ tal que $\omega = df$ e dizemos que ω é fechada se $d\omega = 0$.

Observemos que toda 1-forma exata é fechada, porém nem toda 1-forma exata é fechada. Vamos denotar por $E(M)$ e $F(M)$ os conjuntos das 1-formas exatas e fechadas, respectivamente. É fácil verificar que $F(M)$, com a soma e multiplicação por escalares usuais, é um espaço vetorial. Além disso, para quaisquer funções $f_1, f_2 : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ e $c \in \mathbb{R}$ valem

$$d(f_1 + f_2) = df_1 + df_2 \quad \text{e} \quad cdf_1 = d(cf_1)$$

e, assim, $E(M)$ é um subespaço vetorial de $F(M)$.

Dadas duas 1-formas ω_1, ω_2 fechadas em M , temos a seguinte relação de equivalência:

$$\omega_1 \equiv \omega_2 \Leftrightarrow \omega_1 - \omega_2 \in E(M).$$

Dessa maneira, definimos:

Definição 1.18. O *Primeiro Grupo de Cohomologia Real* de uma variedade M , denotado por $H^1(M, \mathbb{R})$, é o espaço quociente

$$H^1(M, \mathbb{R}) = \frac{F(M)}{E(M)} = \frac{\{1\text{-formas fechada em } M\}}{\{1\text{-formas exata em } M\}}.$$

Definição 1.19. O *Primeiro Grupo de Homologia Real* de uma variedade M , denotado por $H_1(M, \mathbb{R})$, é o espaço dual $H^1(M, \mathbb{R})^*$ do espaço vetorial $H^1(M, \mathbb{R})$.

Vamos relembrar um subgrupo importante da teoria de grupos. Dado um grupo G definimos o *Subgrupo dos Comutadores* como

$$[G, G] = \{xyx^{-1}y^{-1}; x, y \in G\}.$$

1.8 Homologia, Cohomologia e Recobrimento Abeliano

Não é difícil mostrar que $[G, G]$ é um subgrupo normal de G . Dessa maneira, podemos tomar o quociente $\frac{G}{[G, G]}$ que é abeliano e, por isso, também é conhecido como *abelianização* do grupo G .

Um resultado importante de topologia algébrica identifica o grupo de homologia com coeficientes inteiros, $H_1(M, \mathbb{Z})$, com a abelianização do grupo fundamental $\pi_1(M)$. Mais precisamente,

Lema 1.5. Seja $[\pi_1(M), \pi_1(M)]$ o subgrupo dos comutadores do grupo fundamental $\pi_1(M)$. Então

$$H_1(M, \mathbb{Z}) \approx \frac{\pi_1(M)}{[\pi_1(M), \pi_1(M)]}.$$

A demonstração desse lema pode ser encontrada em [27]. A partir disso, e utilizando o produto tensorial, podemos também definir o primeiro grupo de homologia real como

$$H_1(M, \mathbb{R}) = H_1(M, \mathbb{Z}) \otimes \mathbb{R}.$$

Consideremos o homomorfismo

$$\begin{aligned} \xi : \pi_1(M) &\longrightarrow H_1(M) \\ [\gamma] &\longmapsto \overline{[\gamma]}, \end{aligned}$$

em que $\overline{[\gamma]}$ é a classe de $[\gamma]$ em $H_1(M)$. Essa projeção canônica é conhecida como *Homomorfismo de Hurewicz*.

Uma vez que $\ker(\xi) = [\pi_1(M), \pi_1(M)]$ é um subgrupo de $\pi_1(M)$, pelo Teorema 1.2, existe um espaço de recobrimento e uma aplicação de recobrimento $p : \overline{M} \rightarrow M$ tal que $p_*(\pi_1(\overline{M})) = [\pi_1(M), \pi_1(M)]$. Este espaço de recobrimento é conhecido como *Recobrimento Abeliano* de M , denotado por \overline{M} .

Exemplo 1.5. Seja M o bitoro. Então, o recobrimento universal e o recobrimento abeliano de M são diferentes. De fato, uma vez que $\pi_1(M)$ não é abeliano, temos $[\pi_1(M), \pi_1(M)] \neq \{e\}$. Pela definição de recobrimento abeliano e do Teorema 1.2 temos que os recobrimentos abeliano e universal são diferentes.

Sejam $[\gamma] \in H_1(M, \mathbb{Z})$ e $[\omega] \in H^1(M, \mathbb{R})$, onde $\gamma : [0, 1] \rightarrow M$ é uma curva fechada e $[\omega]$ é um representante da classe de $\omega \in F(M)$. Definimos $\langle \cdot, \cdot \rangle : H_1(M, \mathbb{Z}) \times H^1(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ por

$$\langle [\gamma], [\omega] \rangle = \int_{\gamma} \omega. \tag{1.6}$$

1.8 Homologia, Cohomologia e Recobrimento Abeliano

Dos resultados do capítulo de integrais curvilíneas em [5], $\langle \cdot, \cdot \rangle$ está bem definida, isto é, não depende do representante da classe. Dada $h \in H_1(M, \mathbb{R})$ não necessariamente associamos uma curva fechada em M . Porém usando a dualidade entre os espaços de cohomologia e homologia real estendemos a função acima para $\langle \cdot, \cdot \rangle: H_1(M, \mathbb{R}) \times H^1(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$.

Capítulo 2

Valor Crítico de Mañé

Neste capítulo, definiremos o Valor Crítico de Mañé e algumas de suas caracterizações.

2.1 Valor Crítico de Mañé e Ação Potencial

Nesta seção, suponhamos que as curvas $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ sejam absolutamente contínuas. Dados $x, y \in M$ consideremos os conjuntos

$$\mathcal{C}(x, y, T) = \{\gamma : [0, T] \rightarrow M : \gamma(0) = x \text{ e } \gamma(T) = y\}$$

e

$$\mathcal{C}(x, y) = \bigcup_{T>0} \mathcal{C}(x, y, T).$$

Para cada $k \in \mathbb{R}$ definimos a *Ação Potencial* $\Phi_k : M \times M \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ por

$$\Phi_k(x, y) = \inf\{A_{L+k}(\gamma) : \gamma \in \mathcal{C}(x, y)\}.$$

Observando que, se $k_1 < k_2$, então, para cada $\gamma \in \mathcal{C}(x, y, T)$ vale:

$$A_{L+k_1}(\gamma) < A_{L+k_2}(\gamma),$$

logo, segue das propriedades de ínfimo, que a função $k \mapsto \Phi_k(x, y)$ é não decrescente.

A partir do Potencial, definimos o Valor Crítico de Mañé, que é dado pelo seguinte teorema:

2.1 Valor Crítico de Mañé e Ação Potencial

Teorema 2.1. (Valor Crítico de Mañé) Existe $c(L) \in \mathbb{R}$, tal que, para todo $p_1, p_2, p_3 \in M$ valem:

- (a) Se $k < c(L)$ então $\Phi_k(p_1, p_2) = -\infty$.
- (b) Se $k \geq c(L)$ então:
 - (b.1) $\Phi_k(p_1, p_2) > -\infty$,
 - (b.2) $\Phi_k(p_1, p_3) \leq \Phi_k(p_1, p_2) + \Phi_k(p_2, p_3)$,
 - (b.3) $\Phi_k(p_1, p_2) + \Phi_k(p_2, p_1) \geq 0$ e
 - (b.4) $\Phi_k : M \times M \rightarrow \mathbb{R}$ é Lipschitziana .
- (c) Se $k > c(L)$, então $\Phi_k(p_1, p_2) + \Phi_k(p_2, p_1) > 0$.

Demonstração. Primeiramente, mostraremos que, se $\Phi_k(q_1, q_2) = -\infty$, para algum $q_1, q_2 \in M$, então $\Phi_k(p_1, p_2) = -\infty$, para todo $p_1, p_2 \in M$.

Sejam $q_1, q_2 \in M$, tais que $\Phi_k(q_1, q_2) = -\infty$. Então, pela definição do Potencial, temos que existe uma sequência de curvas $x_n \in \mathcal{C}(q_1, q_2)$, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} A_{L+k}(x_n) = -\infty$.

Sejam $\gamma \in \mathcal{C}(p_1, q_1, 1)$ e $\eta \in \mathcal{C}(q_2, p_2, 1)$ curvas minimizantes. Assim, existe $C > 0$, tal que

$$A_L(\gamma) + A_L(\eta) \leq C. \quad (2.1)$$

Definindo a sequência $\alpha_n \in \mathcal{C}(p_1, p_2, 3)$ por:

$$\alpha_n(t) = \gamma * x_n * \eta(t) = \begin{cases} \gamma(t) & \text{se } t \in [0, 1], \\ x_n(t-1) & \text{se } t \in [1, 2] \text{ e} \\ \eta(t-2) & \text{se } t \in [2, 3] \end{cases}$$

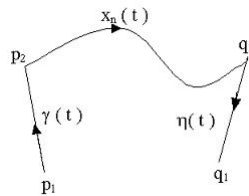


Figura 2.1: Curva $\alpha = \gamma * x_n * \eta$

2.1 Valor Crítico de Mañé e Ação Potencial

temos que:

$$A_{L+k}(\alpha_n) = A_{L+k}(\gamma) + A_{L+k}(\eta) + A_{L+k}(x_n).$$

Passando o limite e usando a desigualdade (2.1) obtemos :

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_{L+k}(\alpha_n) = -\infty.$$

Logo, pelas propriedades de ínfimo, temos que $\Phi_k(p_1, p_2) = -\infty$.

Definimos

$$c(L) = \inf\{k \in \mathbb{R}; \Phi_k(p, q) > -\infty\}.$$

Pelo resultado anterior temos que $c(L)$ não depende da escolha dos pontos p, q .

Vamos mostrar que $-\infty < c(L) < \infty$. Sendo a função $k \mapsto \Phi_k(p, q)$ não decrescente, basta mostrar que existem k_1 e k_2 , tais que $\Phi_{k_1}(p, q) = -\infty$ e $\Phi_{k_2}(p, q) > -\infty$.

Como M é compacta, o conjunto $\{(x, v) \in TM : \|v\| \leq 2\}$ é compacto e, portanto, L é limitado neste conjunto, ou seja, existe $B > 0$ tal que

$$|L(x, v)| < B, \quad \text{se } \|v\| \leq 2. \quad (2.2)$$

Sejam $\xi_n \in \mathcal{C}(p, q, n), n \in \mathbb{N}$ curvas geodésicas, com $\|\dot{\xi}_n(t)\| \equiv \frac{d(p, q)}{n}$. Desta forma, tomando $k_1 = -(B + 1)$, onde B é dado por (2.2), temos que se $n \geq \frac{d(p, q)}{2}$, então $\|\dot{\xi}_n(t)\| \leq 2$ e, portanto, vale:

$$\begin{aligned} \Phi_{k_1}(p, q) &\leq \liminf A_{L+k_1}(\xi_n) \\ &\leq \liminf \left(\int_0^n L(\xi_n(t), \dot{\xi}_n(t)) dt - (B + 1)n \right) \\ &\leq \liminf -n = -\infty. \end{aligned}$$

Logo $\Phi_{k_1}(p, q) = -\infty$. Como L é positivo, tomando $k_2 = 1$ obtemos:

$$A_{L+1}(x) = \int_0^T L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) dt + T \geq T > 0 \quad \forall \gamma \in \mathcal{C}(p, q).$$

Assim, zero é uma cota inferior de $A_{L+k_2}(\gamma)$, com $\gamma \in \mathcal{C}(p, q)$ e, dessa maneira, $\Phi_{k_2}(p, q) \geq 0$. Portanto, $-\infty < k_1 \leq c(L) \leq k_2 < \infty$, como queríamos.

Prova da desigualdade (a). É imediata da definição.

2.1 Valor Crítico de Mañé e Ação Potencial

Prova da desigualdade (b.1).

Suponhamos por contradição que existem $p, q \in M$, tais que $\Phi_c(p, q) = -\infty$, onde $c = c(L)$. Então, existe uma sequência $x_n \in \mathcal{C}(p, q)$, tal que $\lim_{n \rightarrow \infty} A_{L+c}(x_n) = -\infty$. Seja $\gamma \in \mathcal{C}(q, p, 1)$ uma curva minimizante. Consideremos ainda a sequência $\psi_n = x_n * \gamma \in \mathcal{C}(p, p)$ como na figura 2.2.

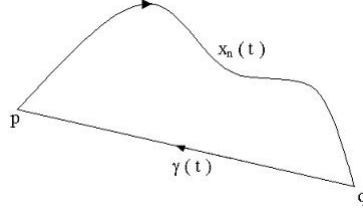


Figura 2.2: Curva $\psi_n = x_n * \gamma$

Como

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_{L+c}(\psi_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_{L+c}(x_n) + A_{L+c}(\gamma) = -\infty,$$

temos que $\Phi_c(p, q) = -\infty$. Logo, dado $a > 0$, existem $T \in \mathbb{R}$ e uma curva $\beta \in \mathcal{C}(p, p, T)$, tal que $A_{L+c}(\beta) \leq -a < 0$. Tomando $\epsilon > 0$ satisfazendo

$$A_{L+c}(\beta) + \epsilon < \frac{-a}{2},$$

temos que $A_{L+c+\frac{\epsilon}{T}}(\beta) < \frac{-a}{2}$. Definindo $\eta_n = \beta * \beta * \dots * \beta$ temos que

$$\Phi_{c+\frac{\epsilon}{T}}(p, q) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} A_{L+c+\frac{\epsilon}{T}}(\eta_n) \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{-an}{2} = -\infty,$$

o que contradiz a definição do valor crítico. Portanto temos $\Phi_c(p, q) > -\infty$ para todo $p, q \in M$, e como a função $k \mapsto \Phi_k(p, q)$ é não decrescente, provamos a desigualdade (b.1).

Prova da desigualdade (b.2).

Seja $k \geq c(L)$ e $p_1, p_2, p_3 \in M$ e sejam $x_n \in \mathcal{C}(p_1, p_2, T_n)$ e $y_n \in \mathcal{C}(p_2, p_3, J_N)$, tais que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} A_{L+k}(x_n) = \Phi_k(p_1, p_2) \text{ e } \lim_{n \rightarrow \infty} A_{L+k}(y_n) = \Phi_k(p_2, p_3).$$

Então, definindo a sequência de curvas $\eta_n = x_n * y_n \in \mathcal{C}(p_1, p_3)$, temos que

$$\Phi_k(p_1, p_3) \leq A_{L+k}(\eta_n) = A_{L+k}(x_n) + A_{L+k}(y_n) \quad \forall n \in \mathbb{N}.$$

2.1 Valor Crítico de Mañé e Ação Potencial

Logo, passando o limite temos a desigualdade desejada.

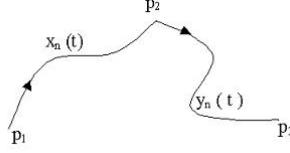


Figura 2.3: Curva $\eta_n = x_n * y_n \in \mathcal{C}(p_1, p_3)$

Prova da desigualdade (b.3).

Pelo ítem anterior, basta mostrar que $\Phi_k(p, p) = 0$ para todo $p \in M$ e $k \geq c(L)$. De fato, se $p \in M$ e $k \geq c(L)$, é claro que $\Phi_k(p, p) \geq 0$, e se tivéssemos $\Phi_k(p, p) < 0$, obrigatoriamente existiria uma curva $\beta \in \mathcal{C}(p, p)$ tal que a ação de A_{L+k} negativa. Assim, definindo $\eta_n = \beta * \beta * \dots * \beta$, obtemos que $A_{L+k} \rightarrow -\infty$, o que contradiz (b.1).

Prova de (b.4).

Para cada par $p, q \in M$ podemos tomar uma curva geodésica $\gamma \in \mathcal{C}(p, q, d(p, q))$ ligando os pontos p e q , com $\|\dot{\gamma}(t)\| \equiv 1$. Usando (2.2) obtemos:

$$\Phi_k(p, q) \leq \int_0^{d(p, q)} L(\gamma(t), \dot{\gamma}(t)) + k dt \leq (B + k)d(p, q) \quad \forall k \in \mathbb{R}. \quad (2.3)$$

Sejam p_1, p_2, q_1 e $q_2 \in M$, se $k \geq c(L)$ usando (b.2) e (b.3) obtemos

$$\begin{aligned} \Phi_k(p_1, p_2) - \Phi_k(q_1, q_2) &\leq \Phi_k(p_1, q_1) + \Phi_k(q_1, p_2) - \Phi_k(q_1, q_2) \\ &\leq \Phi_k(p_1, q_1) + \Phi_k(q_1, q_2) + \Phi_k(q_2, p_2) - \Phi_k(q_1, q_2) \\ &= \Phi_k(p_1, q_1) + \Phi_k(q_2, p_2). \end{aligned}$$

Usando (2.3) temos

$$\Phi_k(p_1, p_2) - \Phi_k(q_1, q_2) \leq (B + k)(d(p_1, q_1) + d(q_2, p_2)).$$

Do mesmo modo, obtemos

$$\Phi_k(q_1, q_2) - \Phi_k(p_1, p_2) \leq \Phi_k(q_1, p_1) + \Phi_k(p_2, q_2) \leq (B + k)[d(p_1, q_1) + d(q_2, p_2)].$$

2.1 Valor Crítico de Mañé e Ação Potencial

Portanto,

$$|\Phi_k(q_1, q_2) - \Phi_k(p_1, p_2)| \leq (B + k)(d(p_1, q_1) + d(q_2, p_2)),$$

provando que $(p, q) \mapsto \Phi_k(p, q)$ é lipschitz.

Prova de (c).

Usando a propriedade (b.3) temos que

$$\Phi_k(p_1, p_2) + \Phi_k(p_2, p_1) \geq 0 \quad \forall p_1, p_2 \in M.$$

Portanto, basta mostrar que a função $k \mapsto \Phi_k(p, q)$, com $p \neq q$ fixos e $k \geq c(L)$, é estritamente crescente. De fato, se $l > k > c(L)$ e $p \neq q \in M$, pela definição do potencial temos que existem curvas $x_n \in \mathcal{C}(p, q, T_n)$, tais que

$$\Phi_l(p, q) = \lim_{n \rightarrow \infty} A_{L+l}(x_n).$$

Temos ainda que $A_{L+l}(x_n) = A_{L+k}(x_n) + (l - k)T_n$. Logo

$$\Phi_l(p, q) = \lim_{n \rightarrow \infty} (A_{L+k}(x_n) + (l - k)T_n) \geq \Phi_k(p, q) + \liminf (l - k)T_n.$$

Afirmamos que $\liminf T_n > 0$. De fato, supondo por contradição que $\liminf T_n = 0$ e usando a superlinearidade, temos que, dado $C > 0$, existe $A > 0$, tal que

$$|L(x, v)| \geq C|v| - A.$$

Então,

$$\begin{aligned} \Phi_l(p, q) &= \lim_{n \rightarrow \infty} A_{L+l}(x_n) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_0^{T_n} L(x_n(t), \dot{x}_n(t)) + l dt \\ &\geq \liminf \int_0^{T_n} C \|\dot{x}_n\| + (l - A) dt \\ &\geq C d(p, q) + 0 \quad \forall C > 0, \end{aligned}$$

logo $\Phi_l(p, q) = \infty$, contradizendo a definição de Potencial. Portanto, a afirmação é verdadeira e, com isso, temos que $\Phi_l(p, q) > \Phi_k(p, q)$.

□

2.2 Caracterização Ergódica

Consideremos os conjuntos

$$\mathcal{C}_1 = \{k \in \mathbb{R}; \text{ existe uma curva fechada } \gamma \text{ com } A_{L+k} < 0\} \text{ e}$$

$$\mathcal{C}_2 = \{k \in \mathbb{R}; A_{L+k} \geq 0 \text{ para toda curva fechada } \gamma\}.$$

Utilizando o Teorema 2.1 mais as definições de ínfimo e supremo, podemos mostrar outra caracterização do valor crítico, conforme o Lema seguinte.

Lema 2.1. $c(L) = \sup \mathcal{C}_1 = \inf \mathcal{C}_2$.

2.2 Caracterização Ergódica

Nesta seção, daremos uma caracterização ergódica do valor crítico de Mañé. Para isso, precisaremos de alguns resultados de teoria geral dessa área que foram introduzidos por Mather em [13]. A Teoria de Mather, como é conhecida, também pode ser encontrada em [1], [12] e [20].

Seja $P = TM \cup \{\infty\}$ a compactificação do fibrado tangente e definindo $\phi_t(\infty) = \infty$, em que ϕ_t é o fluxo de Euler-Lagrange, obtemos uma extensão contínua do mesmo que continuaremos denotando por ϕ_t .

Seja \mathcal{B} a σ -álgebra de Borel de P e denotemos por \mathcal{M} o conjunto de todas as medidas de probabilidade ($\mu(P) = 1$) definidas em \mathcal{B} . Dos resultados de Teoria Ergódica em [18] segue que \mathcal{M} , com a *topologia fraca**, é um espaço compacto. Além disso, nesse espaço temos a métrica

$$d^*(\mu_1, \mu_2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{2^n} \left| \int f_n d\mu_1 - \int f_n d\mu_2 \right|, \quad (2.4)$$

em que $\{f_n : n \in \mathbb{N}\}$ é um subconjunto denso na bola unitária do espaço das funções $f : P \rightarrow \mathbb{R}$ contínuas com a norma uniforme.

Denotemos por \mathcal{M}_L o conjunto das medidas de probabilidades invariantes pelo fluxo de Euler-Lagrange, ou seja,

$$\mu(E) = \mu(\phi_{-t}(E)) \text{ para todo subconjunto mensurável } E \subset P \text{ e todo } t \in \mathbb{R}.$$

Também em [18] mostra-se que \mathcal{M}_L é um conjunto convexo, não vazio e compacto.

2.2 Caracterização Ergódica

Definição 2.1. Seja $\mu \in \mathcal{M}_L$. Definimos a *Ação Média* de μ como

$$\mathcal{A}_L(\mu) = \int L d\mu.$$

Podemos mostrar que o funcional Ação Média $\mathcal{A}_L : \mathcal{M}_L \rightarrow \mathbb{R}$ é semicontínua inferiormente na topologia fraca* e, uma vez que seu domínio é compacto, existe uma medida μ_0 que minimiza o funcional Ação média, isto é,

$$\mathcal{A}_L(\mu_0) \leq \mathcal{A}_L(\mu) \quad \text{para toda } \mu \in \mathcal{M}_L.$$

Para cada $\mu \in \mathcal{M}_L$ com $\mathcal{A}_L(\mu) < \infty$ vamos associar uma classe de homologia que denotaremos por $\rho(\mu)$. Mais precisamente, $\rho(\mu)$ é a única classe de homologia, $\rho(\mu) \in H_1(M, \mathbb{R})$, que verifica a equação

$$\langle \rho(\mu), [\omega] \rangle = \int_{TM} \omega d\mu$$

para toda 1-forma fechada ω definida em M e $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o colchete definido pela equação (1.6). O lado direito da igualdade é uma integral com respeito a μ com ω considerada uma função $\omega : TM \rightarrow \mathbb{R}$. J. Mather mostrou em [13] que a função $\rho : \mathcal{M}_L \rightarrow H_1(M, \mathbb{R})$ é sobrejetiva.

Para cada $h \in H_1(M, \mathbb{R})$, seja $\mathcal{M}_L(h)$ o conjunto de todas as medidas $\mu \in \mathcal{M}_L$ com classe de homologia h . Uma vez que o funcional Ação Média é semicontínuo inferiormente, ao tomarmos aqueles cuja ação média é finita mais a sobrejetividade da função ρ temos que $\mathcal{M}_L(h)$ é um subconjunto fechado e não vazio na topologia fraca*. Portanto, é compacto e podemos definir a função *Beta de Mather* como $\beta : H_1(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\beta(h) = \min\{\mathcal{A}_L(\mu); \mu \in \mathcal{M}_L(h)\}. \quad (2.5)$$

Lema 2.2. $\beta(h)$ é uma função convexa.

Demonstração. Sejam $h_1, h_2 \in H_1(M, \mathbb{R})$ e $0 \leq \lambda \leq 1$. Então se $h = (\lambda h_1 + (1 - \lambda)h_2)$, pela linearidade de ρ temos que

$$\{\lambda\mu_1 + (1 - \lambda)\mu_2; \mu_1 \in \mathcal{M}_L(h_1) \text{ e } \mu_2 \in \mathcal{M}_L(h_2)\} \subset \mathcal{M}_L(h),$$

2.2 Caracterização Ergódica

portanto, vale

$$\begin{aligned}
 \beta(h) &= \min\{\mathcal{A}_L(\mu); \mu \in \mathcal{M}_L(h)\} \\
 &\leq \min\{\mathcal{A}_L(\lambda\mu_1 + (1-\lambda)\mu_2); \mu_1 \in \mathcal{M}_L(h_1) \text{ e } \mu_2 \in \mathcal{M}_L(h_2)\} \\
 &= \lambda \min\{\mathcal{A}_L(\mu_1); \mu_1 \in \mathcal{M}_L(h_1)\} + (1-\lambda) \min\{\mathcal{A}_L(\mu_2); \mu_2 \in \mathcal{M}_L(h_2)\} \\
 &= \lambda\beta(h_1) + (1-\lambda)\beta(h_2),
 \end{aligned}$$

ou seja, β é convexa. □

Como podemos ver em [26], uma função convexa f definida num espaço vetorial X de dimensão finita com valores em $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$ possui uma função conjugada f^* , definida no espaço dual X^* de X com valores em $\mathbb{R} \cup \{\infty\}$, dada por :

$$f^*(x^*) = \sup_{x \in X} \{ \langle x, x^* \rangle - f(x) \}.$$

Definimos a função *Alfa de Mather* como a função conjugada de β , ou seja, $\alpha = \beta^* : H^1(M, \mathbb{R}) \rightarrow \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ dada por

$$\alpha([\omega]) = \beta^*([\omega]) = \max_{h \in H^1(M, \mathbb{R})} \{ \langle h, [\omega] \rangle - \beta(h) \}. \quad (2.6)$$

Sendo β uma função finita e convexa, segue dos resultados da teoria de funções convexas que α é convexa e superlinear. Usando a sobrejetividade da função ρ e a definição da função β obtemos:

$$\begin{aligned}
 \alpha([\omega]) &= \max_{\mu \in \mathcal{M}_L} \{ \langle \rho(\mu), [\omega] \rangle - \beta(\rho(\mu)) \} \\
 &= - \min_{\mu \in \mathcal{M}_L} \{ \mathcal{A}_L(\mu) - \langle \rho(\mu), [\omega] \rangle \} \\
 &= - \min_{\mu \in \mathcal{M}_L} \left\{ \int (L - \omega) d\mu \right\}.
 \end{aligned}$$

Observando que $(L - \omega)$ define um novo Lagrangiano, que também é convexo e superlinear, e como ω é fechada, as equações de Euler-Lagrange para $(L - \omega)$ são as mesmas de L . Assim, temos que o funcional $\mathcal{A}_{(L-\omega)} : \mathcal{M}_L \rightarrow \mathbb{R}$ é semicontínuo inferiormente na topologia fraca* e existe $\mu \in \mathcal{M}_L$, tal que

$$\alpha([\omega]) = -\mathcal{A}_{(L-\omega)}(\mu) = - \int (L - \omega) d\mu < \infty,$$

ou seja, α é uma função finita. Portanto, pela teoria de funções convexas, temos que β é superlinear. Dessa forma, provamos o seguinte teorema:

2.3 Caracterização via Gráficos Lagrangianos

Teorema 2.2. As funções α e β definidas acima são funções convexas conjugadas e super-lineares.

Utilizando a função β definimos uma medida minimizante.

Definição 2.2. Uma medida de probabilidade μ_0 , invariante pelo fluxo de Euler-Lagrange, é uma *medida minimizante* se

$$\mathcal{A}_L(\mu_0) = \beta(\rho(\mu_0)) = \min\{\mathcal{A}_L(\mu); \mu \in \mathcal{M}_L(\rho(\mu_0))\}.$$

O Teorema 2.3 também é conhecido como caracterização ergódica do valor crítico de Mañé e foi demonstrado pelo mesmo em [9] e [24].

Teorema 2.3.

$$c(L) = - \min \left\{ \mathcal{A}_L(\mu) = \int L d\mu; \mu \in \mathcal{M}_L \right\}.$$

Utilizando o Teorema 2.3 mais uma das caracterizações da função alfa de Mather, temos que

$$c(L - \omega) = \alpha([\omega]), \tag{2.7}$$

para toda 1-forma fechada ω . Da dualidade entre alfa e beta mais a igualdade anterior temos

$$\begin{aligned} -\beta(0) &= \min\{\alpha([\omega]); [\omega] \in H^1(M, \mathbb{R})\} \\ &= \min\{c(L - \omega); [\omega] \in H^1(M, \mathbb{R})\}. \end{aligned}$$

E, finalmente, R. Mañé definiu o valor crítico estrito de um Lagrangiano.

Definição 2.3. Dada uma 1-forma fechada em M , definimos o *valor crítico estrito* de L como

$$c_0(L) = \min\{c(L - \omega) : [\omega] \in H^1(M, \mathbb{R})\}.$$

2.3 Caracterização via Gráficos Lagrangianos

Nesta seção, daremos uma caracterização do valor crítico de Mañé via Gráficos Lagrangianos. Lembramos que estamos trabalhando com Hamiltonianos $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ associados ao Lagrangiano L de acordo com a Proposição 1.4, ou seja,

$$H \circ \mathcal{L}(x, v) = \frac{\partial L}{\partial v}(x, v) \cdot v - L(x, v),$$

em que $\mathcal{L} : TM \rightarrow T^*M$ é a transformação de Legendre.

2.3 Caracterização via Gráficos Lagrangianos

Definição 2.4. Seja ω uma forma simplética canônica em T^*M . Um subespaço $V \subset T_p T^*M$ é chamado Subespaço Lagrangiano se $\omega(v_1, v_2) = 0$ para todos $v_1, v_2 \in V$ e $\dim V = \dim M = n$. Dizemos, também, que uma subvariedade $W \subset T^*M$ é Lagrangiana se em cada ponto $\theta \in W$ o espaço tangente $T_\theta W$ é um subespaço Lagrangiano de $T_\theta T^*M$.

Observamos que a Definição 2.4 é verdadeira para uma forma simplética ω qualquer. Uma vez que estamos trabalhando em T^*M com a forma simplética canônica, optamos por essa definição.

Lema 2.3. Dada uma 1-forma η em M , então

$$G_\eta = \text{Graf}(\eta) := \{(x, \eta_x) ; x \in M\} \subset T^*M$$

é uma subvariedade Lagrangiana se, e somente se, η for fechada ($d\eta = 0$).

Demonstração. Escolhemos um sistema de coordenadas locais (q_1, \dots, q_n) de M . Então $\eta(q) = \sum_k p_k(q) dq_k$. Uma base para o espaço tangente ao G_η é dada por $E_i = \left(\frac{\partial}{\partial q_i}, \sum_k \frac{\partial p_k}{\partial q_i} \frac{\partial}{\partial p_k} \right)$. Aplicando $\omega = dp \wedge dq$ temos

$$\omega(E_i, E_j) = \frac{\partial p_i}{\partial q_j} - \frac{\partial p_j}{\partial q_i}.$$

Dessa maneira,

$$d\eta = \sum_{i < j} \left(\frac{\partial p_i}{\partial q_j} - \frac{\partial p_j}{\partial q_i} \right) dq_j \wedge dq_i.$$

Então, $\omega|_{TG_\eta} \equiv 0 \Leftrightarrow d\eta \equiv 0$. □

Gráficos de 1-formas que são subvariedades Lagrangianas são ditos *Gráficos Lagrangianos*. Podemos associar ao gráfico G_η uma classe de cohomologia $[\eta] \in H^1(M, \mathbb{R})$. Gráficos Lagrangianos com classe de cohomologia zero são gráficos de 1-formas exatas. Estes são chamados de *Gráficos Lagrangianos Exatos*.

A equação de Hamilton-Jacobi para Hamiltonianos autônomos $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ é dada por

$$H(x, d_x u) = k, \quad u : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}.$$

Dizemos que $u : U \subset M \rightarrow \mathbb{R}$ é uma subsolução da equação de Hamilton-Jacobi se u for diferenciável e

$$H(x, d_x u) \leq k,$$

2.3 Caracterização via Gráficos Lagrangianos

em quase todo ponto com relação à medida de Lebesgue.

Veremos no Teorema 2.4 que uma subsolução de classe C^1 da equação de Hamilton-Jacobi induz um Gráfico Lagrangiano Exato contido no nível de energia k .

O Lema a seguir será usado para demonstrar o Teorema 2.4. Além disso, será essencial para a demonstração do Teorema 4.1.

Lema 2.4. Se existe uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^1 tal que $H(x, d_x f) \leq k$ então $k \geq c(L)$.

Demonstração. Lembramos que

$$H(x, p) = \max_{v \in T_x M} \{p_x(v) - L(x, v)\}.$$

Uma vez que $H(x, d_x f) \leq k$ segue que para todo $(x, v) \in TM$,

$$d_x f(v) - L(x, v) \leq k.$$

Se $\gamma : [0, T] \rightarrow M$ é uma curva fechada absolutamente contínua, temos que

$$\int_0^T d_\gamma f(\dot{\gamma}) dt = \int_0^T \frac{d}{dt} f(\gamma(t)) dt = 0.$$

Sendo assim,

$$A_{L+k}(\gamma) = \int_0^T (L(\gamma, \dot{\gamma}) + k) dt = \int_0^T (L(\gamma, \dot{\gamma}) + k - d_\gamma f(\dot{\gamma})) dt \geq \int_0^T d_\gamma f(\dot{\gamma}) - d_\gamma f(\dot{\gamma}) dt = 0.$$

Uma vez que γ é qualquer e da definição de valor crítico temos $k \geq c(L)$. □

A demonstração da proposição a seguir pode ser encontrada em [12].

Proposição 2.1. Para $k > c(L)$ existe uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^∞ tal que $H(x, d_x f) < k$.

Teorema 2.4. Seja M uma variedade compacta. Então,

$$c(L) = \inf F,$$

em que $F = \{k \in \mathbb{R}; \exists f : M \rightarrow \mathbb{R} \text{ de classe } C^1 \text{ tal que } H(x, d_x f) < k\}$.

2.3 Caracterização via Gráficos Lagrangianos

O Teorema 2.4 é conhecido como a caracterização do valor crítico em termos da existência de gráficos Lagrangianos. Observemos que essa é uma caracterização geométrica, uma vez que ele estabelece que o valor crítico é o ínfimo dos valores k , tal que $H^{-1}(-\infty, k)$ contém um gráfico Lagrangiano exato.

Demonstração do Teorema 2.4. Pelo Lema 2.4, $c(L)$ é cota inferior para o conjunto F . Por outro lado, dado $\delta > 0$ existe $c(L) < k < c(L) + \delta$ e, pela Proposição 2.1, $k \in F$. Logo,

$$c(L) = \inf F.$$

□

Capítulo 3

Valor Crítico nos Recobrimentos

Neste capítulo, compararemos o valor crítico na variedade e em seus recobrimentos, em especial o universal e o abeliano. Também apresentaremos a primeira pergunta e o primeiro teorema do artigo [8].

3.1 A Primeira Pergunta

Seja \widehat{M} um recobrimento de M com projeção p e $L : TM \rightarrow \mathbb{R}$ um Lagrangiano. Tomemos o levantamento de L para $T\widehat{M}$ dado por

$$\widehat{L}(\widehat{x}, \widehat{v}) = L(p(\widehat{x}), dp(\widehat{v})).$$

Dessa maneira, para cada $k \in \mathbb{R}$ definimos a Ação Potencial $\widehat{\Phi}_k : \widehat{M} \times \widehat{M} \rightarrow \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ por

$$\widehat{\Phi}_k(\widehat{x}, \widehat{y}) = \inf\{A_{\widehat{L}+k}(\gamma) : \gamma \in \mathcal{C}(\widehat{x}, \widehat{y})\}$$

e podemos tomar o valor crítico $c(\widehat{L})$.

Sejam M_1 e M_2 recobrimentos de M . Denotemos por L_1 e L_2 os levantamentos do Lagrangiano L para M_1 e M_2 , respectivamente.

Lema 3.1. Sejam M_1 e M_2 recobrimentos de M , tal que M_1 cobre M_2 . Então, $c(L_1) \leq c(L_2)$.

Demonstração. Ao projetarmos uma curva fechada de M_1 temos uma curva fechada em M_2 . Assim,

$$\{p(\gamma); \gamma \text{ é uma curva fechada em } M_1\} \subseteq \{\gamma; \gamma \text{ é uma curva fechada em } M_2\}.$$

3.1 A Primeira Pergunta

Portanto,

$$c(L_1) \leq c(L_2).$$

□

Corolário 3.1. $c(\widehat{L}) \leq c(L)$.

Proposição 3.1. Sejam M_1 e M_2 recobrimentos de M , tal que M_1 é um recobrimento finito de M_2 . Então, $c(L_1) = c(L_2)$.

Demonstração. Pelo Lema 3.1 temos $c(L_1) \leq c(L_2)$. Suponhamos que a inequação seja estrita e seja k tal que $c(L_1) < k < c(L_2)$. Pela definição de valor crítico, existe uma curva fechada γ em M_2 com $A_{L_2+k}(\gamma) < 0$. Seja $\tilde{\gamma}$ o levantamento de γ . Temos duas possibilidades para $\tilde{\gamma}$: ou é uma curva fechada ou não.

No primeiro caso, teremos uma curva fechada com $A_{L_1+k}(\tilde{\gamma}) < 0$, e isso contradiz o fato de $c(L_1)$ ser o supremo.

No segundo caso, uma vez que o recobrimento é finito, alguma iterada de γ é uma curva fechada. Assim, teremos uma curva fechada com ação negativa. O que também contradiz o fato de $c(L_1)$ ser o supremo.

Portanto, $c(L_1) = c(L_2)$.

□

Denotando por $c_u(L)$ e $c_a(L)$ o valor crítico nos recobrimentos universal \widetilde{M} e abeliano \overline{M} , respectivamente, temos quatro números reais, $c_u(L)$, $c_a(L)$, $c_0(L)$ e $c(L)$, e podemos compará-los. Pelo Lema 3.1 obtemos que

$$c_u(L) \leq c_a(L) \leq c(L).$$

Além disso, da definição de valor crítico estrito (ver 2.3) temos

$$c_0(L) \leq c(L).$$

Quando $\pi_1(M)$ é abeliano, concluímos que \widetilde{M} é um recobrimento finito de \overline{M} , e pelo lema 3.1, $c_u(L) = c_a(L)$. Daí surge uma pergunta natural:

Pergunta 1. É verdade que $c_u(L) = c_a(L)$?

3.1 A Primeira Pergunta

No capítulo 5 construiremos um exemplo respondendo negativamente essa pergunta. Por outro lado, foi demonstrado por Gabriel P. Paternain e Miguel Paternain em [8] o teorema a seguir.

Teorema 3.1. $c_a(L) = c_0(L)$.

Para demonstrar esse teorema precisaremos dos resultados auxiliares abaixo. Suas demonstrações serão omitidas, uma vez que não é nosso objetivo demonstrá-las.

Conforme vimos no início da seção 1.1, uma curva absolutamente contínua $u : [0, T] \rightarrow \overline{M}$ é chamada uma \overline{L} -minimizante se minimiza a ação $A_{\overline{L}}$ sobre uma classe de curvas absolutamente contínuas definidas em $[0, T]$ com os mesmos pontos iniciais e finais de u . Assim, temos a proposição a seguir, demonstrada por Mather em [13].

Proposição 3.2. Seja $u_i : [0, T_i] \rightarrow \overline{M}$ uma sequência de \overline{L} -minimizantes, tal que $T_i \rightarrow \infty$ e $\frac{u_i(T_i) - u_i(0)}{T_i} \rightarrow \gamma \in H_1(M, \mathbb{R})$ quando $i \rightarrow \infty$. Então,

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{T_i} A_{\overline{L}}(u_i) = \beta(\gamma).$$

R. Mañé mostrou em [9] e [24] a proposição 3.3.

Proposição 3.3. Suponhamos $k > c(L)$. Então, dados $x_1 \neq x_2$ em M , existe uma solução $x(t)$ da equação de Euler-Lagrange com energia k tal que para algum $T > 0$, $x(0) = x_1$, $x(T) = x_2$ e

$$A_{L+k}(x|_{[0, T]}) = \Phi_k(x_1, x_2).$$

Na proposição anterior, podemos trocar M pelo seu recobrimento e L pelo Lagrangiano levantado.

M. J. Dias Carneiro mostrou em [19] a proposição 3.4.

Proposição 3.4. Se μ é uma medida minimizante com homologia γ , então seu suporte está contido em um nível de energia fixo k , com $k \geq c_0(L)$.

Além das proposições anteriores, precisaremos do seguinte Lema auxiliar:

Lema 3.2. Para toda 1-forma fechada ω em M temos

$$c_a(L - \omega) = c_a(L).$$

3.2 Demonstração do Teorema 3.1

Demonstração. Denotamos por $\bar{\omega}$ o levantamento de ω para o recobrimento abeliano de M . Da definição de recobrimento abeliano, temos que $H_1(\bar{M}) = \{0\}$. Portanto,

$$H^1(\bar{M}) = (H_1(\bar{M}))^* = (\{0\})^* = \{0\}.$$

Assim, $\bar{\omega}$ é exata.

Seja \bar{f} uma 0-forma tal que $\bar{\omega} = d\bar{f}$. Calculando $A_{(\bar{L}-\bar{\omega})}$ temos:

$$A_{(\bar{L}-\bar{\omega})}(\bar{\gamma}) = \int_{\bar{\gamma}} \bar{L} - \bar{\omega} = \int_{\bar{\gamma}} \bar{L} - \int_{\bar{\gamma}} \bar{\omega} = \int_{\bar{\gamma}} \bar{L} - \int_{\bar{\gamma}} d\bar{f}$$

Aplicando o Teorema de Stokes obtemos

$$\int_{\bar{\gamma}} d\bar{f} = \int_N d(d\bar{f}) = 0$$

em que N é o interior de $\bar{\gamma}$. Portanto,

$$A_{(\bar{L}-\bar{\omega})}(\bar{\gamma}) = \int_{\bar{\gamma}} \bar{L} = A_{\bar{L}}(\bar{\gamma}).$$

Uma vez que $c_a(L - \omega) = c(\bar{L} - \bar{\omega})$ e ação potencial de $\bar{L} - \bar{\omega}$ coincide com ação potencial de \bar{L} temos o resultado. \square

3.2 Demonstração do Teorema 3.1

Seja ω 1-forma tal que $c_0(L) = c(L - \omega)$. Pelo Lema 3.2 temos

$$c_a(L) = c_a(L - \omega) \leq c(L - \omega) = c_0(L)$$

em que a desigualdade é válida pelo Lema 3.1. Para completar a prova, precisamos mostrar que $c_a(L) \geq c_0(L)$.

Temos duas possibilidades para \bar{M} : ou é compacto ou não compacto. Se for compacto, então \bar{M} é um recobrimento finito de M . Assim, pela Proposição 3.1

$$c_a(L) = c(L) \geq c_0(L)$$

e temos o resultado.

3.2 Demonstração do Teorema 3.1

Analisamos agora o caso em que \overline{M} é não compacto. Suponhamos, por absurdo, que $c_a(L) < c_0(L)$. Como a desigualdade é estrita, existe k tal que $c_a(L) < k < c_0(L)$. Fixemos $\overline{q} \in \overline{M}$ e tome uma sequência de pontos $\overline{q}_i \in \overline{M}$, tal que $d(\overline{q}, \overline{q}_i) \rightarrow \infty$, em que d é a métrica levantada de M .

Pela proposição 3.3 existe, para cada i , uma solução $\overline{x}_i(t)$ da equação de Euler-Lagrange com energia k para algum $T_i > 0$, $\overline{x}_i(0) = \overline{q}$, $\overline{x}_i(T_i) = \overline{q}_i$ e tal que

$$A_{\overline{L}+k}(\overline{x}_i|_{[0,T_i]}) = \overline{\Phi}_k(\overline{q}, \overline{q}_i). \quad (3.1)$$

Uma vez que as soluções têm nível de energia k , existe uma constante $A > 0$, tal que $\|\dot{\overline{x}}_i(t)\| < A$ para todo t e todo i . De fato, uma vez que $E(\overline{x}_i, \dot{\overline{x}}_i) = k$ e $E^{-1}(k)$ é compacto, tomemos $C = \max\{L(x, v); (x, v) \in E^{-1}(k)\}$. Dessa maneira, $L(\overline{x}_i(t), \dot{\overline{x}}_i(t)) \leq C$ para todo $i \in \mathbb{N}$. Pela superlinearidade de L existe $D > 0$ tal que $L(x, v) \geq \|v\| - D$ para todo $(x, v) \in E^{-1}(k)$. Dessa maneira, temos

$$\|\dot{\overline{x}}_i(t)\| \leq C + D = A.$$

Assim,

$$d(q, q_i) = \int_0^{T_i} \|\dot{\overline{x}}_i(t)\| dt \leq \int_0^{T_i} A dt = AT_i$$

e, como $d(q, q_i) \rightarrow \infty$, segue que $T_i \rightarrow \infty$.

Sejam μ_i medida de probabilidade uniformemente distribuída ao longo da projeção de $\overline{x}_i|_{[0,T_i]}$ para M , ou seja,

$$\int_{TM} f d\mu_i = \frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} f(p(\overline{x}_i), dp(\dot{\overline{x}}_i)) dt,$$

para toda função $f : TM \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^0 e considerando $p : \overline{M} \rightarrow M$ a aplicação de recobrimento. Em particular, tomando $f = L$ temos que μ_i satisfaz

$$\int_{TM} L d\mu_i = \frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} L(p(\overline{x}_i), dp(\dot{\overline{x}}_i)) dt. \quad (3.2)$$

Como vimos na seção 2.2, o conjunto das medidas de probabilidade \mathcal{M} com a topologia fraca* é compacto. Portanto, a sequência $(\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$ possui subsequência convergente para uma medida $\mu \in \mathcal{M}$. Sem perda de generalidade, denotaremos tal subsequência por $(\mu_i)_{i \in \mathbb{N}}$. Assim, da definição de convergência nessa topologia temos

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \int_{TM} L d\mu_i = \int_{TM} L d\mu. \quad (3.3)$$

3.2 Demonstração do Teorema 3.1

Das equações (3.2) e (3.3) resultamos

$$\begin{aligned}
 \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} \bar{L}(\bar{x}_i, \dot{\bar{x}}_i) dt &= \lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{T_i} \int_0^{T_i} L(p(\bar{x}_i), dp(\dot{\bar{x}}_i)) dt \\
 &= \lim_{i \rightarrow \infty} \int_{TM} L d\mu_i \\
 &= \int_{TM} L d\mu \\
 &= \mathcal{A}_{\bar{L}}(\mu).
 \end{aligned}$$

A equação (3.1) nos diz que $\bar{x}_i|_{[0, T_i]}$ são \bar{L} -minimizantes. Então aplicando a Proposição 3.2 mais o resultado anterior obtemos que

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{T_i} A_{\bar{L}(\bar{x}_i|_{[0, T_i]})} = A_{\bar{L}}(\mu) = \beta(\rho(\mu)). \quad (3.4)$$

Logo μ é uma medida minimizante. Uma vez que o suporte de μ está contido no nível de energia k , pela Proposição 3.4, temos $k \geq c_0(L)$, o que é uma contradição. Portanto, $c_a(L) \geq c_0(L)$ e isso nos dá a igualdade que procurávamos.

Capítulo 4

Níveis de Energia Anosov

Neste capítulo, compararemos o valor de $c_u(L)$ com o valor da energia do Lagrangiano L cujo nível é Anosov. Também apresentaremos a segunda pergunta e o segundo teorema do artigo [8]. Para compreender melhor e melhorar a demonstração deste teorema estudamos o artigo [10].

4.1 A Segunda Pergunta

Definição 4.1. Um subconjunto compacto $\Lambda \subset T^cM = E^{-1}(c)$ e invariante pelo fluxo $\phi_t|_{T^cM}$ é um *conjunto hiperbólico* se existe uma decomposição contínua

$$T_\Lambda(T^cM) = E^s \oplus E^u \oplus \langle X \rangle$$

em que $T_\Lambda(T^cM)$ é o espaço tangente a T^cM restrito a Λ e $\langle X \rangle$ é o campo associado. Além disso, existem constantes $C > 0$ e $0 < \lambda < 1$, tal que

$$|d_\theta \phi_t(\xi)| \leq C\lambda^t|\xi|, \quad \forall t > 0, \theta \in \Lambda, \xi \in E^s$$

$$|d_\theta \phi_{-t}(\xi)| \leq C\lambda^t|\xi|, \quad \forall t > 0, \theta \in \Lambda, \xi \in E^u.$$

E^s e E^u são chamados Subespaços Estável e Instável, respectivamente. Quando $\Lambda = T^cM$ é um conjunto hiperbólico dizemos que T^cM é *nível Anosov*.

A pergunta a seguir foi feita por R. Mañé.

4.1 A Segunda Pergunta

Pergunta 2. Se o nível de energia k é Anosov, é verdade que $k \geq c_a(L)$?

No capítulo 5, responderemos negativamente essa pergunta. Sobre os níveis de energia Anosov, temos o seguinte resultado.

Teorema 4.1. Se o nível de energia $E^{-1}(k)$ é Anosov, então

$$k > c_u(L).$$

G. P. Paternain e M. Paternain mostraram o teorema a seguir no artigo [8].

Teorema 4.2. Se existe k , tal que para todo $k' \geq k$ o nível de energia k' é Anosov, então

$$k > c_u(L).$$

Observamos que o Teorema 4.1 é mais forte que o Teorema 4.2, já que basta apenas um nível de energia Anosov para termos o resultado. É importante ressaltar que o Teorema 4.1 foi demonstrado por G. Contreras, R. Iturriaga, G. P. Paternain e M. Paternain no artigo [10] um ano depois que o Teorema 4.2 fora publicado. Assim sendo, demonstraremos apenas o Teorema 4.1, mas, antes disso, precisaremos de alguns resultados preliminares.

Definição 4.2. Seja θ_t uma órbita hiperpólica. Definimos as subvariedades estável e instável fortes de θ_t no ponto $\theta = \theta_0$ como

$$W^{ss}(\theta) = \{v \in T^c M ; \lim_{t \rightarrow \infty} d(\theta_t, \phi_t(v)) = 0\}$$

$$W^{us}(\theta) = \{v \in T^c M ; \lim_{t \rightarrow -\infty} d(\theta_t, \phi_t(v)) = 0\}$$

respectivamente, e definimos as subvariedades estável e instável fraca de θ_t por

$$W^s(\theta_t) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \phi_t(W^{ss}(\theta)) \text{ e } W^u(\theta_t) = \bigcup_{t \in \mathbb{R}} \phi_t(W^{us}(\theta)).$$

Uma vez que toda forma simplética ω em T^*M é invariante pelo fluxo, temos que $W^s(\theta_t)$ e $W^u(\theta_t)$ são subvariedades Lagrangianas. Além disso, são folheações de T^*M .

Definição 4.3. Se $\pi : E \rightarrow B$ a projeção de um espaço fibrado de fibra F . Dizemos que uma folheação \mathcal{F} de T^*M é transversal às fibras quando satisfaz às seguintes propriedades:

4.1 A Segunda Pergunta

- (i) Para todo $x \in E$ a folha L_p de \mathcal{F} que passa por p é transversal à fibra $F_{\pi(x)}$ e $\dim(\mathcal{F}) + \dim(F) = \dim(E)$;
- (ii) Para toda folha L de \mathcal{F} , $\pi|_L : L \rightarrow B$ é uma aplicação de recobrimento.

Decorre da definição que para todo $p \in E$ tem-se

$$T_p E = T_p(L_p) \oplus T_p(F_{\pi(p)}).$$

Um resultado importante devido a Ehresman, cuja demonstração pode ser encontrado em [3], é a seguinte:

Proposição 4.1. Suponhamos que a fibra F seja compacta. Neste caso, (i) implica (ii) na Definição 4.3.

Seja $\pi : T^*M \rightarrow M$ a projeção canônica e se $\theta \in T^*M$ denotamos por $V(\theta)$ o núcleo da aplicação $d_\theta \pi : T_\theta T^*M \rightarrow T_{\pi(\theta)}M$. Sejam também $\Sigma = H^{-1}(k)$, em que $H : T^*M \rightarrow \mathbb{R}$ é o Hamiltoniano associado ao Lagrangiano L via transformada de Legendre, e ϕ_t^* o fluxo Hamiltoniano restrito a Σ .

No artigo [7], G. P. Paternain e M. Paternain mostraram que

Teorema 4.3. Seja $\Sigma = H^{-1}(k)$ um nível de energia regular e suponha que $\phi_t^*|_\Sigma$ admita um subfibrado Lagrangiano continuamente invariante \mathbb{E} . Então,

- (a) $\mathbb{E}(\theta) \cap V(\theta) = \{0\}$ para todo $\theta \in \Sigma$;
- (b) $\pi(\Sigma) = M$.

Uma vez que a variedade estável fraca $W^s(\theta_t) = W^s$ do fluxo hamiltoniano ϕ_t^* é uma folheação e uma subvariedade Lagrangiana, observamos que o Teorema 4.3 nos diz que

$$T_{\theta_t} \Sigma = T_{\theta_t} W^s \oplus V(\theta_t),$$

ou seja, W^s é transversa às fibras da fibração por $(n-1)$ -convexos

$$\pi|_\Sigma : \Sigma \rightarrow M.$$

Agora, já podemos provar o Teorema 4.1.

4.2 Prova do Teorema 4.1

Suponhamos que o nível de energia k seja Anosov. Sejam $\Sigma = H^{-1}(k)$, $\pi : T^*M \rightarrow M$ a projeção canônica e \widetilde{M} o recobrimento universal de M com projeção $p : \widetilde{M} \rightarrow M$. Denotamos por $\widetilde{\Sigma}$ o nível de energia k do levantamento do Hamiltoniano H . Temos também a fibração por $(n - 1)$ -convexos

$$\widetilde{\pi}|_{\widetilde{\Sigma}} : \widetilde{\Sigma} \rightarrow \widetilde{M}. \quad (4.1)$$

Seja \widetilde{W}^s o levantamento da folheação que, por sua vez, é a folheação estável fraca para o fluxo hamiltoniano H restrito a $\widetilde{\Sigma}$. A folheação \widetilde{W}^s também é transversa à fibração (4.1). Uma vez que as fibras são compactas, pela Proposição 4.1, temos que para todo $(x, p) \in \widetilde{\Sigma}$ a aplicação

$$\widetilde{\pi}|_{\widetilde{W}^s(x,p)} : \widetilde{W}^s(x,p) \rightarrow \widetilde{M} \quad (4.2)$$

é uma aplicação de recobrimento.

A aplicação de recobrimento (4.2) é um difeomorfismo. Para concluirmos isso, precisamos mostrar a injetividade, já que, por definição, é um difeo local. Dessa maneira, sejam $y_1, y_2 \in \widetilde{W}^s(x, p)$, tal que $\widetilde{\pi}(y_1) = \widetilde{\pi}(y_2) = x$ e, ainda, tomemos γ uma curva conectando y_1 e y_2 . Temos que $\widetilde{\pi}(\gamma)$ é uma curva fechada em \widetilde{M} , logo é homotopicamente trivial, já que \widetilde{M} é simplesmente conexo. Então, γ é uma curva fechada em \widetilde{M} e, portanto, $y_1 = y_2$. Como $x \in \widetilde{M}$ é qualquer, temos a injetividade.

Uma vez que \widetilde{M} é simplesmente conexo e a aplicação (4.2) é um difeomorfismo, observamos que $\widetilde{W}^s(x, p)$ é simplesmente conexo. Além disso, já que a aplicação (4.2) é, em particular, injetiva, $\widetilde{W}^s(x, p)$ intersecta cada fibra da fibração (4.1) em apenas um ponto.

Em outras palavras, cada levantamento $\widetilde{W}^s(x, p)$ é o gráfico de uma 1-forma λ . Como $\widetilde{W}^s(x, p)$ é uma subvariedade Lagrangiana temos, pelo Lema 2.3, que λ é fechada. Uma vez que toda forma fechada no recobrimento universal é exata, existe $f : \widetilde{M} \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\lambda = df$. Assim, segue que cada $\widetilde{W}^s(x, p)$ é um Gráfico Lagrangiano Exato.

Pelo Lema 2.4 temos que $k \geq c_u(L)$. Como o nível de energia k é Anosov, pelo Teorema da Estabilidade Estrutural, existe um $\epsilon > 0$, tal que para todo $k' \in (k - \epsilon, k + \epsilon)$ o nível de energia k' é Anosov. Dessa forma, obtemos

$$k > k' \geq c_u(L),$$

ou seja, $k > c_u(L)$ como gostaríamos.

Capítulo 5

Um Exemplo

Neste capítulo, exibiremos um Lagrangiano L em uma superfície fechada, orientável e de gênero dois cujos níveis de energia k' são Anosov para todo $k' \geq 1/2$ e $c_0(L) > 1/2$. Pelo Teorema 4.2, $c_u(L) < 1/2$. Assim, obtemos respostas negativas para as perguntas 1 e 2. Este exemplo foi dado por G. P. Paternain e M. Paternain em [8].

Sejam M superfície fechada, ie, compacta e sem bordo, e η uma 1-forma diferenciável em M . Fixamos g uma métrica Riemanniana em M e consideramos o Lagrangiano

$$L(x, v) = \frac{1}{2}g_x(v, v) - \eta_x(v). \quad (5.1)$$

Como vimos na Seção 1.3, a função de energia associada a L é

$$E(x, v) = \frac{1}{2}g_x(v, v)$$

e as equações de Euler-Lagrange de L são as mesmas do Fluxo Magnético Exato no qual a forma simplética “*twisted*” é dada por $\omega(d\eta) = \omega_0 + \pi^*d\eta$, sendo $\pi : TM \rightarrow M$ a projeção canônica, bem como a força de Lorentz satisfaz a igualdade

$$d\eta(x)(u, v) = g_x(Y_x \cdot u, v) \quad \forall x \in M \text{ e } u, v \in T_x M.$$

Seja Ω_a a forma de área associada com a métrica Riemanniana. Toda 2-forma Ω pode ser escrita como $\Omega = F\Omega_a$ para uma função diferenciável $F : M \rightarrow \mathbb{R}$. Dessa forma, temos:

Proposição 5.1. Seja M superfície fechada. Então a 2-forma $\Omega = F\Omega_a$ é exata se, e somente se, $\int_M F\Omega_a = 0$.

Demonstração. Suponhamos $\Omega = \Omega_a$ exata. Então, existe uma 1-forma α tal que $F\Omega_a = d\alpha$. Pelo Teorema de Stokes temos

$$\int_M F\Omega_a = \int_M d\alpha = \int_{\partial M} \alpha = 0.$$

A última igualdade vale pois $\partial M = \emptyset$.

Reciprocamente, suponhamos que $\int_M F\Omega_a = 0$. Seja $H^2(M)$ o anel de cohomologia das 2-formas em M e definimos $\varphi : H^2(M) \rightarrow \mathbb{R}$ por $\varphi([F\Omega]) = \int_M F\Omega$. Claramente, φ está bem definida, é linear e, uma vez que $\dim(H^2(M)) = 1$, obtemos $H^2(M) \approx \mathbb{R}$. Considerando $\varphi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ temos que $\ker(\varphi) = \{0\}$ ou $\ker(\varphi) = \mathbb{R}$, já que φ é linear. Como $\varphi(0) = 0$ e $\varphi(\Omega_a) \neq 0$ concluímos que $\ker(\varphi) = \{0\}$. Porém, a classe $[0] = \{\Omega \in H^2(M); \Omega \text{ é exata}\}$. Portanto obtemos o resultado. □

Agora, escolheremos uma métrica Riemanniana em uma superfície orientável de gênero dois e uma função $F : M \rightarrow \mathbb{R}$, tal que $F\Omega_a$ seja exata. Assim, se escrevermos $F\Omega_a = d\eta$, mostraremos que o fluxo de Euler-Lagrange de (5.1) é Anosov para todo nível de energia $k' \geq 1/2$ e $c_0 > 1/2$.

Seja S_l uma família a um-parâmetro de superfícies compactas de gênero 2 com curvatura negativa, em que l é o comprimento da geodésica γ com velocidade unitária, conforme a Figura 5.1.

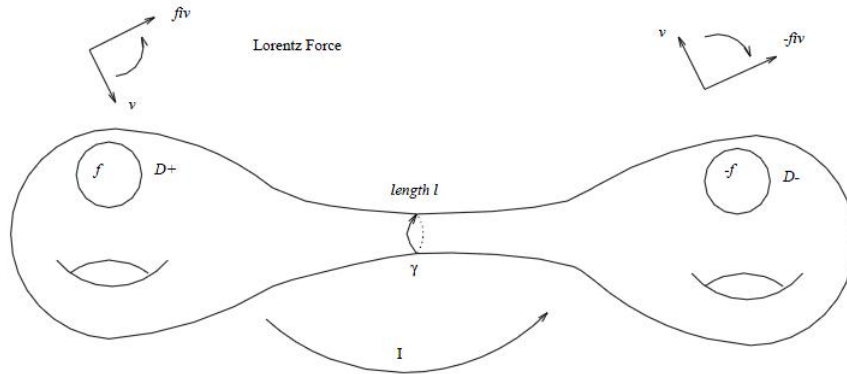


Figura 5.1: Superfície S_l

Denotamos por K_l a curvatura Gaussiana de S_l . A curva γ divide S_l em duas superfícies com fronteira: S_l^+ e S_l^- . Vamos assumir que para cada l , S_l admita uma involução isométrica

I que fixa γ e troca S_l^+ com S_l^- . Mais ainda, vamos supor que existe um disco D^+ contido em S_l^+ tal que a métrica não muda com l e tem curvatura constante igual a -1 . Seja $D^- \stackrel{\text{def}}{=} I(D^+)$. Vamos escolher a orientação de γ induzida por S_l^+ .

Seja $f : S_l^+ \rightarrow \mathbb{R}$ uma função não negativa com suporte contido em D^+ , e tal que

$$-1 + (f(x))^2 \pm g_x(\nabla f(x), iv) < 0, \quad (5.2)$$

para todo (x, v) na esfera unitária do fibrado de D^+ , em que iv denota a rotação de $\pi/2$ em v , de acordo com a orientação de S_l . Seja $m = \int_{D^+} f\Omega_a > 0$ e, uma vez que a métrica de D^+ não muda, à medida em que l varia, temos que m independe de l . Finalmente, podemos definir a função F da seguinte maneira:

$$F(x) = \begin{cases} f(x) & \text{se } x \in S_l^+ \\ -f(Ix) & \text{se } x \in S_l^- \end{cases}$$

Como vimos na Seção 1.5, expressamos a força de Lorentz, associada ao campo magnético $d\eta$, como

$$Y(x, v) = F(\pi(x, v))iv.$$

Uma vez que

$$\begin{aligned} \int_{S_l} F\Omega_a &= \int_{S_l^+} F\Omega_a + \int_{S_l^-} F\Omega_a \\ &= \int_{S_l^+} f(x)\Omega_a + \int_{S_l^-} -f(Ix)\Omega_a \\ &= 0 \end{aligned}$$

temos, pela proposição 5.1, que $F\Omega_a$ é exata, ie, existe uma 1-forma η tal que $d\eta = F\Omega_a$.

Observamos também que se $\gamma : [a, b] \rightarrow M$, obtemos

$$l = \int_a^b \|\dot{\gamma}(t)\|^2 dt = \int_a^b 1^2 dt = b - a.$$

Sendo assim, denotando L_l o Lagrangiano magnético dado pela métrica em S_l e pela

1-forma η , calculamos a ação de $L_l + c_0(L_l)$ em γ :

$$\begin{aligned}
A_{L_l+c_0(L_l)}(\gamma) &= \int_a^b [L_l(\gamma, \dot{\gamma}) + c_0(L_l)] dt \\
&= \int_a^b L_l(\gamma, \dot{\gamma}) dt + c_0(L_l)(b-a) \\
&= \int_a^b \frac{1}{2} \|\dot{\gamma}\|^2 dt - \int_\gamma \eta + c_0(L_l)l \\
&= \frac{1}{2}l + c_0(L_l)l - \int_\gamma \eta.
\end{aligned}$$

Pelo Teorema de Stokes e usando o fato de que o suporte de F está contido em D^+ ,

$$\begin{aligned}
A_{L_l+c_0(L_l)}(\gamma) &= l \left(\frac{1}{2} + c_0(L_l) \right) - \left(\int_{D^+} d\eta + \int_{S_l^+ \setminus D^+} d\eta \right) \\
&= l \left(\frac{1}{2} + c_0(L_l) \right) - \int_{D^+} F\Omega_a \\
&= l \left(\frac{1}{2} + c_0(L_l) \right) - m.
\end{aligned}$$

Como no Exemplo 1.1, γ tem homologia nula. De fato, uma vez que γ satisfaz as relações $a_1 b_1 a_1^{-1} b_1^{-1} = e$ ou $a_2 b_2 a_2^{-1} b_2^{-1} = e$, temos que $[\gamma] \in [\pi_1(M), \pi_1(M)]$. Como

$$H_1(M) \approx \frac{\pi_1(M)}{[\pi_1(M), \pi_1(M)]}$$

concluimos que γ é um representante da identidade, ou seja, tem homologia nula.

Pelo Teorema 3.1 $c_0(L_l) = c_a(L_l)$. Além disso, segue da definição de valor crítico que

$$A_{L_l+c_0(L_l)}(\gamma) = A_{L_l+c_a(L_l)}(\gamma) \geq 0$$

e, conseqüentemente,

$$l \left(\frac{1}{2} + c_0(L_l) \right) \geq m > 0 \text{ para todo } l.$$

Proposição 5.2. $\lim_{l \rightarrow 0} c_0(L_l) = \infty$.

Demonstração. Suponhamos que não, ie, existe $C > 0$ e uma seqüência $l_n \rightarrow 0$, tal que $c_0(L_{l_n}) \leq C$ para todo n . Então, existe uma subsequência l_{n_j} tal que $c_0(L_{l_{n_j}}) \rightarrow \bar{C}$ com $\bar{C} \in \mathbb{R}$. Assim,

$$\lim_{l_{n_j} \rightarrow 0} l_{n_j} \left(\frac{1}{2} + c_0(L_{l_{n_j}}) \right) = \lim_{l_{n_j} \rightarrow 0} l_{n_j} \cdot \lim_{l_{n_j} \rightarrow 0} \left(\frac{1}{2} + c_0(L_{l_{n_j}}) \right) = 0 \cdot \left(\frac{1 + 2\bar{C}}{2} \right) = 0,$$

o que é absurdo, pois $\lim_{l \rightarrow 0} l \left(\frac{1}{2} + c_0(L_l) \right) \geq \lim_{l \rightarrow 0} m = m > 0$ para todo l , em particular para l_{n_j} . \square

Agora, mostraremos que para todo l , o nível de energia k' para $k' \geq 1/2$ é Anosov. Combinando esse fato com a Proposição 5.2 obtemos, para l suficientemente pequeno, a superfície S_l e a função F com as propriedades desejadas.

Para cada $\theta = (x, v)$ com nível de energia k' , procuramos os subespaços estável e instável $E^s(\theta)$ e $E^u(\theta)$, respectivamente. Seja $J = J(t)$ o campo de Jacobi associado à trajetória do fluxo magnético $\Gamma : \mathbb{R} \rightarrow S_l$ com condições iniciais em θ e nível de energia $k' > 0$. Uma vez que $\{\dot{\Gamma}(t), i\dot{\Gamma}(t)\}$ é base ortonormal de $T_\Gamma S_l$ e escrevendo $J = x\dot{\Gamma} + yi\dot{\Gamma}$ temos, pelo Teorema 1.1, que x e y satisfazem às seguintes equações:

$$\dot{x} - Fy = 0 \tag{5.3}$$

$$\ddot{y} + \left(2k'K_l(\Gamma) + F^2(\Gamma) - g_\Gamma(\nabla F(\Gamma), i\dot{\Gamma}) \right) y = 0. \tag{5.4}$$

Para não carregar a notação, denotaremos por $K_{mag} = (2k'K_l(\Gamma) + F^2(\Gamma) - g_\Gamma(\nabla F(\Gamma), i\dot{\Gamma}))$. Dessa forma, a equação (5.4) torna-se

$$\ddot{y} + K_{mag}y = 0. \tag{5.5}$$

Proposição 5.3. Para todo $\theta = (x, v)$ com nível de energia $k' \geq 1/2$, a função K_{mag} é estritamente negativa.

Demonstração. Fora dos discos D^+ e D^- , nossa função F se anula e temos

$$K_{mag} = 2k'K_l(\Gamma) < 0,$$

pois a superfície S_l tem curvatura Gaussiana negativa.

Dentro dos discos, a métrica não muda com a variação de l e tem curvatura $K_l(\Gamma)$ constante igual a -1 . Assim,

$$K_{mag} = -2k' + F^2(\Gamma) - g_\Gamma(\nabla F(\Gamma), i\dot{\Gamma}) < 0$$

para todo $k' \geq 1/2$ pela hipótese (5.2) da função f . Portanto, $K_{mag} < 0$ para todo $\theta = (x, v)$ com nível de energia $k' \geq 1/2$ como gostaríamos. \square

Uma vez que $K_{mag} < 0$, seguimos um raciocínio análogo ao caso geodésico para construir fibrados estáveis e instáveis que procuramos. Assim sendo, mostraremos que y se anula no máximo uma vez. Isto é, existe no máximo um $t_0 \in \mathbb{R}$ tal que $y(t_0) = 0$. Observemos que isso não impede que y não tenha nenhum zero. Para tanto, precisamos do seguinte teorema cuja demonstração é simples e pode ser encontrada em [23].

Teorema 5.1 (Comparação de Sturm). Sejam u e v soluções reais e não triviais de

$$(p(t)u')' + q_1(t)u = 0$$

$$(p(t)v')' + q_2(t)v = 0$$

em que p, p', q_1 e q_2 são contínuas, $p(t) > 0$ e $q_1(t) \leq q_2(t)$ para todo t . Se $t_1 \leq t_2$ e $u(t_1) = u(t_2) = 0$, então v se anula pelo menos uma vez (t_1, t_2) , a menos que, nesse intervalo, tenhamos $q_1 \equiv q_2$ e $v \equiv ku$, $k \in \mathbb{R}$.

Proposição 5.4. A solução $y(t)$ da equação diferencial

$$\ddot{y} + K_{mag}y = 0$$

tem, no máximo, um zero.

Demonstração. Suponhamos y definida no intervalo $[a, b]$. Compararemos a equação (5.5) com $(p(t)v')' + 0v' = 0$ cuja solução é $v(t) = \int_a^t \frac{1}{p(x)} dx$. Pela proposição 5.3, temos $K_{mag} < 0$ para todo t em $[a, b]$. Além disso, v se anula apenas em $t = a$. Então pelo teorema de comparação de Sturm, y não pode ter dois zeros em $[a, b]$. De fato, se considerarmos que y tenha dois zeros $t_1, t_2 \in [a, b]$, teremos que v se anula, pelo menos, uma vez em $(t_1, t_2) \subset [a, b]$, contradizendo o fato de $t = a$ ser o único zero de v . \square

Agora, encontraremos soluções particulares y^s , y^u e constantes $C, \lambda > 0$, tal que

$$|y^s(t)| \leq Ce^{-\lambda t}, \quad \text{para todo } t \geq 0$$

$$|y^u(t)| \leq Ce^{\lambda t}, \quad \text{para todo } t < 0.$$

A proposição 5.4 nos diz que y tem, no máximo, um zero. Seja $y(t)$ uma solução particular com condições iniciais $y(T) = 0$ e $y'(T) = w \neq 0$. Dessa maneira, temos $y(t) \neq 0$ para todo $t \in (-\infty, T) \cup (T, +\infty)$ e, sem perda de generalidade e pela linearidade de y ,

podemos supor $y(0) = 1$. Observamos que para $T > 0$, o fato de $y(t)$ ser contínua mais a condição $y(0) = 1$ nos diz que $y'(T) < 0$ e $y(t) > 0$ para $t \in (-\infty, T)$ e $y(t) < 0$ para $t \in (T, +\infty)$, já que $t = T$ é o único zero de $y(t)$. Da mesma maneira, se $T < 0$, a condição $y(0) = 1$ nos diz que $y'(T) > 0$ e $y(t) < 0$ para $t \in (-\infty, T)$ e $y(t) > 0$ para $t \in (T, +\infty)$.

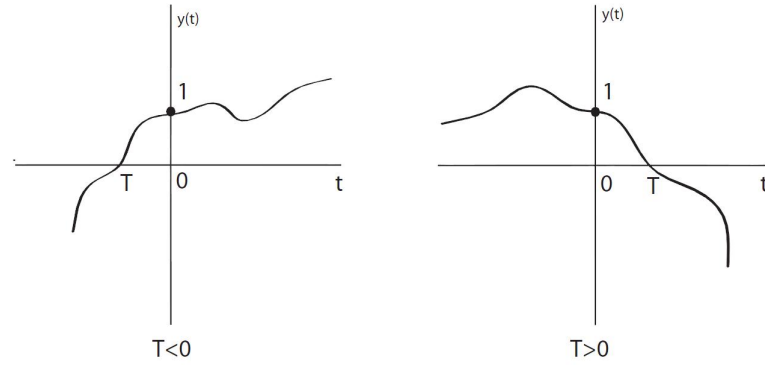


Figura 5.2: Suposto gráfico de $y(t)$

Definimos agora,

$$u_T(t) = \frac{y'(t)}{y(t)}.$$

Notemos que u_T não está definido para $t = T$, já que $y(T) = 0$. Além disso, da definição de u_T temos que

$$y''(t) = u_T'(t)y(t) + u_T(t)y'(t). \quad (5.6)$$

Substituindo (5.5) em (5.6) e usando a definição de u_T , obtemos

$$-K_{mag}(t)y(t) = u_T'(t)y(t) + u_T(t)(u_T(t)y(t)) = u_T'(t)y(t) + u_T^2 y(t),$$

ou seja,

$$y(t) (u_T' + u_T^2 + K_{mag}) = 0.$$

Como $y(t) \neq 0$ para todo $t \in (-\infty, T) \cup (T, +\infty)$, concluímos que u_T satisfaz a equação

$$u_T' + u_T^2 + K_{mag} = 0, \quad (5.7)$$

que também é conhecida como equação de Ricatti. Como a solução de uma equação diferencial é definida em um intervalo, temos

$$u_T(t) = \begin{cases} u_T^- = \frac{y'(t)}{y(t)} & \text{se } t \in (-\infty, T), \\ u_T^+ = \frac{y'(t)}{y(t)} & \text{se } t \in (T, +\infty). \end{cases}$$

Observamos que u_T^- e u_T^+ estão determinadas pelas condições de $y(t)$ fixadas. Dessa maneira, tanto para $T > 0$ quanto para $T < 0$, temos

$$\lim_{t \rightarrow T^-} u_T^-(t) = \lim_{t \rightarrow T^-} \frac{y'(t)}{y(t)} = -\infty \quad (5.8)$$

$$\lim_{t \rightarrow T^+} u_T^+(t) = \lim_{t \rightarrow T^+} \frac{y'(t)}{y(t)} = +\infty \quad (5.9)$$

No caso em que $K_{mag} = k$, com $k \in \mathbb{R}$, encontramos dois tipos de soluções da equação de Ricatti. O primeiro são as soluções $U^s = -\sqrt{-k}$ e $U^u = \sqrt{-k}$, que estão definidas para todo $t \in \mathbb{R}$. O segundo são funções u_T com singularidades e definidas para $t \neq T$. Além disso, as funções u_T^- estão abaixo de U^s e u_T^+ estão acima de U^u , já que ambas, U^s e U^u , são soluções da mesma equação diferencial. Temos também que

$$\lim_{T \rightarrow +\infty} u_T^- = U^s(t)$$

$$\lim_{T \rightarrow -\infty} u_T^+ = U^u(t).$$

Baseando-se nesse fato, encontraremos soluções da equação de Ricatti análogas às anteriores, porém consideraremos o caso em que K_{mag} não é constante.

Uma vez que $u_T' = -u_T^2 - K_{mag}$, para cada t temos o seguinte gráfico para u_T' :

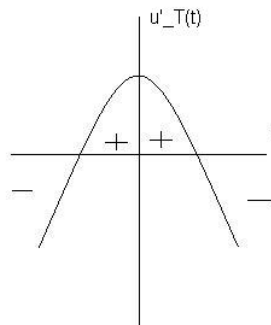


Figura 5.3: Gráfico de $u'(t)$ para cada t .

Uma vez que a superfície S_l é compacta e $K_{mag} < 0$, existem $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, tal que

$$\beta \leq K_{mag} \leq \alpha < 0.$$

Assim, pelo gráfico de u_T' (Figura 5.3) juntamente com o fato de $\sqrt{|\alpha|} \leq \sqrt{|K_{mag}|} \leq \sqrt{|\beta|}$, temos na Figura 5.4 o campo de vetores de u_T .

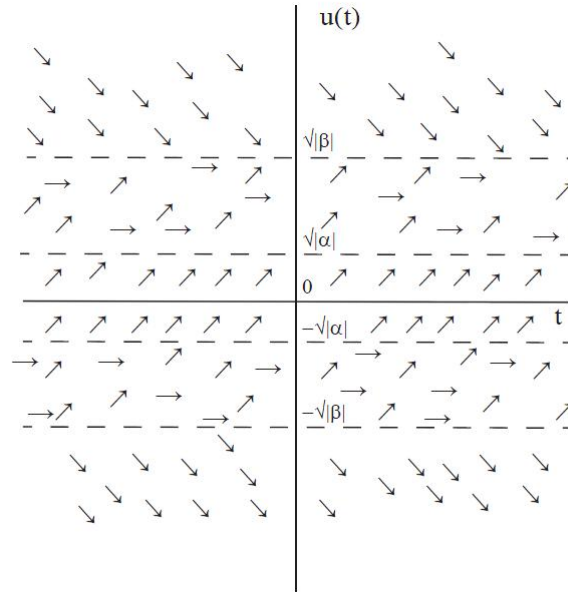


Figura 5.4: Suposto campo de vetores de u_T

Observamos que entre as faixas $(\sqrt{|\beta|}, \sqrt{|\alpha|})$ e $(-\sqrt{|\alpha|}, -\sqrt{|\beta|})$ também temos um campo de vetores nulo, uma vez que as funções $\pm\sqrt{|K_{mag}|}$ estão nessas faixas. Entre a faixa $(-\sqrt{|\alpha|}, \sqrt{|\alpha|})$ o campo é estritamente positivo, e para valores de u_T maiores que $\sqrt{|\beta|}$ e menores que $-\sqrt{|\beta|}$ o campo é estritamente negativo.

Lema 5.1. As funções u_T^- e u_T^+ são estritamente negativa e estritamente positiva respectivamente.

Demonstração. Primeiro, mostraremos que $u_T^-(t) < -\sqrt{|\alpha|} < 0$ para todo $t \in (-\infty, T)$. Suponhamos que exista $t_0 \in (-\infty, T)$, tal que $0 < u_T^-(t_0) < -\sqrt{|\alpha|} + \epsilon$, com $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Como u_T^- é contínua e $u_T^- \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow T^-$, existe t_1 , com $t_0 < t_1 < T$, tal que $u_T^-(t_1) = -\sqrt{|\alpha|} - \epsilon$. Dessa maneira, uma vez que $u_T^-(t_0) > u_T^-(t_1)$, existe $t_2 \in (t_0, t_1)$ tal que $(u_t^-)'(t_2) < 0$. E mais, existe uma vizinhança $V \ni t_2$, tal que $(u_T^-)'(t) < 0$ para todo $t \in V$. Como ϵ é qualquer, fazendo $\epsilon \rightarrow 0$ temos t_2 tal que $u_T^-(t_2) = -\sqrt{|\alpha|}$ e em V obtemos $(u_T^-)'(t) < 0$ para todo t , contradizendo o fato de que o campo de vetores na faixa $(-\sqrt{|\alpha|}, 0)$ ser estritamente positivo. Portanto, $u_T^-(t) < -\sqrt{|\alpha|}$ para todo t .

Para mostrar que $u_T^+(t) > \sqrt{|\alpha|} > 0$ para todo $t \in (T, +\infty)$, seguiremos analogamente ao caso anterior. Suponhamos que exista $t_0 \in (T, +\infty)$ tal que $0 < u_T^+(t_0) < \sqrt{|\alpha|} - \epsilon$, com

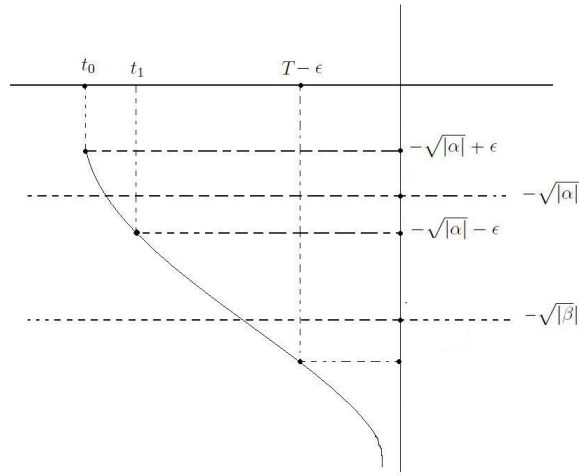


Figura 5.5: Contradição sobre $u_T^-(t)$

$\epsilon > 0$ suficientemente pequeno. Dessa maneira, existem $T < t_1 < t_0$, $t_2 \in (t_1, t_0)$ e uma vizinhança $V \ni t_2$, tal que $(u_T^+)'(t) < 0$ para todo $t \in V$, contradizendo o fato de que o campo de vetores na faixa $(0, \sqrt{|\alpha|})$ ser estritamente positivo. Portanto, $u_T^+(t) > \sqrt{|\alpha|}$ para todo t .

□

Com o lema anterior mais as condições (5.8) e (5.9), concluímos que os gráficos de u_T^- e u_T^+ são do tipo hipérbolas, como um esboço na Figura 5.6.

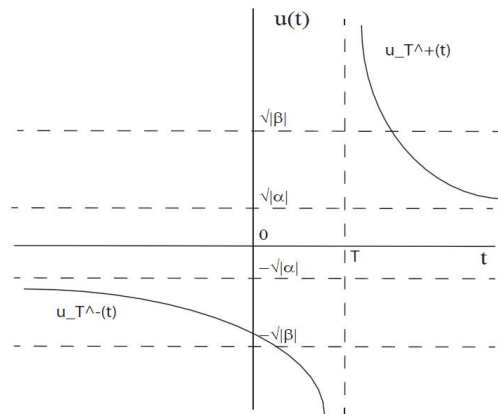


Figura 5.6: Supostos gráficos de $u_T^-(t)$ e $u_T^+(t)$

O lema seguinte mostra uma limitação para as funções u_T^- e u_T^+ .

Lema 5.2. Existe $\kappa_T > 0$, tal que $|u_T(t)| \leq \kappa_T$ para $|t - T| \geq 1$.

Demonstração. Pelo Lema anterior $u_T^-(t) < -\sqrt{|\alpha|}$ e $u_T^+(t) > \sqrt{|\alpha|}$. Agora, observamos que por (5.8) e (5.9), dado $\epsilon > 0$, temos $u_T^-(T - \epsilon) = m_1$ suficientemente grande e $u_T^+(T + \epsilon) = m_2$ suficientemente pequeno. Sem perda de generalidade, tomamos $\epsilon = 1$. Como o campo de vetores para valores de u_T^- e u_T^+ maiores que $\sqrt{|\beta|}$ é negativo, temos que m_1 e m_2 são o mínimo e o máximo de $u_T^-(t)$ e $u_T^+(t)$, respectivamente, para $|t - T| \geq 1$. Dessa maneira,

$$m_1 \leq u_T^-(t) \leq -\sqrt{|\alpha|}$$

e

$$\sqrt{|\alpha|} \leq u_T^+(t) \leq m_2.$$

Seja $\kappa_T = \max\{|m_1|, m_2\}$. Assim, $|u_T^-(t)| \leq \kappa_T$ e $|u_T^+(t)| \leq \kappa_T$ como gostaríamos. \square

Para cada $T \in \mathbb{R}$, temos uma u_T associada à solução particular $y(t)$ fixada desde o início. O objetivo agora é mostrar que existem funções U^u positiva e U^s negativa, definidas para todo $t \in \mathbb{R}$ e satisfazendo:

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow +\infty} u_T^- &= U^s(t) \\ \lim_{T \rightarrow -\infty} u_T^+ &= U^u(t). \end{aligned}$$

Além disso, esse limite é uniforme em subconjuntos compactos de \mathbb{R} . Portanto, teremos que tais limites também são soluções da equação de Riccati associada à $y(t)$ com U^u e U^s limitadas.

Intuitivamente esse limite faz sentido, uma vez que quando $T \rightarrow -\infty$ a solução particular u_T^- “desaparece” ficando somente uma u_T^+ definida para todo t que chamaremos de U^u . Também quando $T \rightarrow +\infty$ a solução particular u_T^+ “desaparece” ficando somente a u_T^- definida para todo t que chamaremos de U^s . Assim, observamos pelo mesmo motivo anterior, que tanto U^u quanto U^s são positiva e negativa, respectivamente, e limitadas.

Consideremos os conjuntos

$$U_1 = \{u_T^-; u_T^- : (-\infty, T) \rightarrow \mathbb{R} \text{ é solução da equação de Riccati associada à } y\}$$

$$U_2 = \{u_T^+; u_T^+ : (T, +\infty) \rightarrow \mathbb{R} \text{ é solução da equação de Riccati associada à } y\}$$

e seja $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}$ compacto da forma $[a, b]$. Sem perda de generalidade, tomamos as seqüências $u_T^- \in U_1$ e $u_T^+ \in U_2$ com $T \in \mathbb{N}$. Além disso, observamos que se $\mathcal{K} \subset (-\infty, T)$, então $\mathcal{K} \subset (-\infty, T+1) \subset (-\infty, T+2) \cdots$ e, dessa maneira, vemos a seqüência u_T^- sempre em \mathcal{K} quando $T \rightarrow +\infty$. Analogamente, olhamos para a seqüência u_T^+ em \mathcal{K} , quando $T \rightarrow -\infty$, já que, se $\mathcal{K} \subset (T, +\infty)$, então $\mathcal{K} \subset (T-1, \infty) \subset (T-2, \infty) \cdots$.

Definição 5.1. Seja X um subconjunto de \mathbb{R} . Dizemos que uma seqüência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ é equicontínua quando, para todo $x_0 \in X$ e dado $\epsilon > 0$ existir um $\delta > 0$, tal que se $|x - x_0| < \delta$, então $|f_n(x) - f_n(x_0)| < \epsilon$ para toda f_n .

Um fato importante dessa definição é que o número δ escolhido a partir de ϵ é o mesmo para todas as funções f_n .

Lema 5.3. As seqüências u_T^- e u_T^+ são equicontínuas em \mathcal{K} .

Demonstração. Como a demonstração para as seqüências u_T^- e u_T^+ são idênticas, consideraremos u_T e omitiremos os sinais $+$ e $-$.

Uma vez que \mathcal{K} é compacto e u_T é contínua, temos que u_T para cada T é uniformemente contínua em \mathcal{K} . Assim, dado $\epsilon > 0$ existe δ_T , tal que para todo $x, y \in \mathcal{K}$ com $|x - y| < \delta_T$, então $|u_T(x) - u_T(y)| < \epsilon$.

Escrevendo $\mathcal{K} = \bigcup_{x \in \mathcal{K}} I_{T,x}$, em que $I_{T,x} = (x - \delta_T, x + \delta_T)$, tiramos uma subcobertura finita, já que \mathcal{K} é compacto. Desse modo, $\mathcal{K} \subset (I_{T_1, x_1} \cup \cdots \cup I_{T_n, x_n})$ e tomemos $\delta = \min\{\delta_{T_1}, \cdots, \delta_{T_n}\}$. Se $|x - y| < \delta$, então $x \in I_{T_j, x_j}$ para algum j . Assim,

$$|x - x_j| < \delta_{T_j, x_j}.$$

Usando a desigualdade triangular temos

$$|y - x_j| \leq |y - x| + |x - x_j| < 2\delta_{T_j, x_j}.$$

Desse modo, essas duas desigualdades nos dão para todo T

$$|u_T(x) - u_T(x_j)| < \frac{\epsilon}{2} \quad \text{e} \quad |u_T(y) - u_T(x_j)| < \frac{\epsilon}{2}.$$

Portanto,

$$|u_T(x) - u_T(y)| \leq |u_T(x) - u_T(x_j)| + |u_T(x_j) - u_T(y)| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Dessa maneira, encontramos um δ que depende apenas de ϵ e, portanto, a sequência u_T é equicontínua como gostaríamos. \square

Definição 5.2. Seja X um subconjunto de \mathbb{R} . Dizemos que uma sequência de funções $f_n : X \rightarrow \mathbb{R}$ é uniformemente limitada se existe um número $c > 0$, tal que $|f_n(x)| \leq c$ para toda f_n e para todo $x \in X$.

Lema 5.4. As sequências u_T^- e u_T^+ são uniformemente limitadas em \mathcal{K} .

Demonstração. Pelo Lema 5.2, u_T^- e u_T^+ são limitadas. Mostraremos, inicialmente, para u_T^- . Tomemos n_0 o primeiro inteiro maior que b . Dessa maneira, κ_{n_0} é tal que $|u_T^-(t)| \leq \kappa_{n_0}$ para todo $T > n_0$. Para vermos isso, observemos que $u_T^-(b)$ está bem definida, já que $T > b$. Além disso, $u_{T+1}^-(t) > u_T^-(t)$ para todos $T > n_0$ e $t \in (-\infty, T+1)$. De fato, suponhamos que exista $t_0 \in (-\infty, T+1)$, tal que $u_{T+1}^-(t_0) > u_T^-(t_0)$ numa vizinhança de t_0 . Uma vez que $u_T^- \rightarrow -\infty$ para $t \rightarrow T$ e $u_{T+1}^- \rightarrow -\infty$ para $t \rightarrow T+1 > T$ haverá $t_1 \in (-\infty, T)$, tal que $u_T^-(t_1) = u_{T+1}^-(t_1)$, contradizendo a unicidade de soluções de uma equação diferencial.

Para u_T^+ , basta tomar n_0 o primeiro inteiro menor que a e, análogo ao caso anterior, temos $u_{T-1}^+(t) < u_T^+(t)$ para todo $T < n_0$ e $t \in \mathcal{K}$. \square

O teorema abaixo, cuja demonstração pode ser encontrada em [6], garantirá a convergência uniforme das funções u_T^+ e u_T^- em \mathcal{K} .

Teorema 5.2 (Arzelá-Ascoli). Seja $\mathcal{K} \subset \mathbb{R}$ compacto. Toda sequência equicontínua e uniformemente limitada de funções $f_n : \mathcal{K} \rightarrow \mathbb{R}$ possui uma subsequência uniformemente convergente.

Uma vez que as sequências u_T^- e u_T^+ são equicontínuas e uniformemente limitadas em \mathcal{K} , pelo teorema de Arzelá-Ascoli, possuem uma subsequência uniformemente convergente. Exaurindo \mathbb{R} por compactos, isto é, $\mathbb{R} = \bigcup_{n \in \mathbb{N}} [-n, n]$, temos que existem funções U^u e U^s , tal que

$$\begin{aligned} \lim_{T \rightarrow +\infty} u_T^- &= U^s(t) \\ \lim_{T \rightarrow -\infty} u_T^+ &= U^u(t) \end{aligned}$$

e esse limite é uniforme. Portanto, as funções limites são soluções da equação de Riccati e mais, U^s e U^u são limitadas, negativa e positiva, respectivamente, já que u_T^- e u_T^+ também o são.

Além disso, como U^u e U^s são limitadas, existe $\lambda > 0$ tal que $|U^u(t)| \leq \lambda$ e $|U^s(t)| \leq \lambda$ para todo t . Retornando à equação (5.7), integrando de ambos os lados e tomando o módulo, obtemos

$$|y^s(t)| \leq Ce^{-\lambda t}, \text{ para todo } t \geq 0$$

$$|y^u(t)| \leq Ce^{\lambda t}, \text{ para todo } t \leq 0$$

Retornando à equação (5.3), encontramos soluções particulares x^s e x^u associadas a cada par de solução acima. Para isso, tomamos como condições iniciais de x^s e x^u como

$$x^s(0) = - \int_0^\infty F(\Gamma(t))y^s(t)dt$$

$$x^u(0) = \int_0^\infty F(\Gamma(-t))y^u(-t)dt,$$

uma vez que F é uniformemente limitada. Assim, temos

$$x^s(t) = - \int_t^\infty F(\Gamma(\tau))y^s(\tau)d\tau$$

$$x^u(t) = \int_{-\infty}^t F(\Gamma(\tau))y^u(\tau)d\tau.$$

Além disso, tomando $\rho = \max(F(\Gamma(t)))$ já que M é compacta, vemos que

$$|x^s(t)| \leq \int_t^\infty |F(\Gamma(\tau))||y^s(\tau)|d\tau \leq \rho C \int_t^\infty e^{-\lambda\tau}d\tau = \frac{\rho C}{\lambda}e^{-\lambda t} \longrightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow +\infty$$

$$|x^u(t)| \leq \int_{-\infty}^t |F(\Gamma(\tau))||y^u(\tau)|d\tau \leq \rho C \int_{-\infty}^t e^{-\lambda\tau}d\tau = \frac{\rho C}{\lambda}e^{\lambda t} \longrightarrow 0 \text{ quando } t \rightarrow -\infty.$$

Sejam J^s e J^u os únicos campos de Jacobi determinados pelas condições iniciais

$$J^s(0) = x^s(0)\dot{\Gamma}(0) + y^s(0)i \cdot \dot{\Gamma}$$

$$J^u(0) = x^u(0)\dot{\Gamma}(0) + y^u(0)i \cdot \dot{\Gamma}(0).$$

Dessa maneira, encontramos

$$E^s(\theta) = \left\langle J^s(0), \frac{D}{dt}J^s(0) \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

$$E^u(\theta) = \left\langle J^u(0), \frac{D}{dt}J^u(0) \right\rangle_{\mathbb{R}}$$

que são claramente os espaços estável e instável.

Portanto, pelos argumentos anteriores juntamente com a proposição 5.3, o fluxo de Euler-Lagrange é Anosov em todo nível de energia $k' \geq 1/2$. Além disso, pela proposição 5.2 unida ao teorema 4.2 temos o salto entre $c_u(L)$ e $c_0(L)$ tão grande quanto se queira. Ou seja, fazendo $l \rightarrow 0$ encontramos uma superfície S_l e mostramos que, para o Lagrangiano magnético L_l temos $E^{-1}(k')$ Anosov para todo $k' \geq 1/2$ e tal que

$$c_u(L_l) < 1/2 < c_0(L_l) = c_a(L_l).$$

Dessa maneira, respondemos negativamente às perguntas 1 e 2.

Referências Bibliográficas

- [1] A. Fathi, *Weak KAM Theorem in Lagrangian Dynamics*, Workshop and School on Conservative Dynamics, 2006.
- [2] A. A. Rocha, *Propriedades de Recorrência nos Conjuntos de Aubry e Mañé*, Dissertação de Mestrado, UFMG, 2009.
- [3] C. Camacho e A. L. Neto, *Teoria Geométrica das Folheações*, Rio de Janeiro, IMPA, 1979.
- [4] D. McDuff e D. Salamon, *Introduction to Symplectic Topology*, New York, Oxford Science, 1998.
- [5] E. L. Lima, *Curso de Análise*, Rio de Janeiro, IMPA, V.1, 2008.
- [6] E. L. Lima, *Curso de Análise*, Rio de Janeiro, IMPA, V.2, 2008.
- [7] G. P. Paternain, M. Paternain, *On Anosov Energy Levels of Convex Hamiltonian Systems*, Math. Z., V.217 (1994), 901-952.
- [8] G. P. Paternain, M. Paternain, *Critical Values of Autonomous Lagrangian Systems*, Comment. Math. Helv., V.72 (1997), 901-952.
- [9] G. Contreras, J. Delgado, R. Iturriaga, *Lagrangian Flows: the Dynamics of Globally Minimizing Orbits II*, Bulletin of the Brazilian Math. Society, pré-print 1996.
- [10] G. Contreras, R. Iturriaga, G. P. Paternain e M. Paternain, *Lagrangian Graphs, Minimizing Measure and Mañé's Critical Values*, Geom. Funct. Anal. 8 (1998), no 5, 788-809.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [11] G. Contreras e R. Iturriaga, *Convex Hamiltonians Without Conjugate Points*, Ergod.Th.Dynam.Sys.(1999), V.10, 901-952.
- [12] G. Contreras, R. Iturriaga, *Global Minimizers of Autonomous Lagrangians*, México, CIMAT, 2000.
- [13] J. Mather, *Action Minimizing Measures for Positive Definite Lagrangian Systems*, Math. Z., V.207 (1991), 169-267.
- [14] J. A. G. Miranda, *Medidas Minimizantes da Ação de Lagrangianos Convexos*, Dissertação de Mestrado, UFMG, 1999.
- [15] J. A. G. Miranda, *Propiedades genéricas y Entropía Topológica para Flujos Magnéticos en Superfícies*, Tese de doutorado, CIMAT, 2004.
- [16] J. R. Munkres, *Topology*, New Jersey, Prentice Hall, 2000;
- [17] J. Muniz Junior, *Subvariedades Lagrangianas e a Equação de Hamilton Jacobi*, Dissertação de Mestrado, UFMG, 2009.
- [18] K. de Oliveira, *Um Primeiro Curso de Teoria Ergódica e Aplicações*, Publicações Matemáticas - IMPA, 2005.
- [19] M. J. Carneiro, *On Minimizing Measure of the Action of Autonomous Lagrangians*, Nonlinearity, V.8 (1995), 1077-1085.
- [20] M. J. Carneiro, *Tópicos em Dinâmica Lagrangiana*, Sociedade Matemática Peruana, 2003.
- [21] Manfredo P. Carmo, *Geometria Riemanniana*, Rio de Janeiro, IMPA, 2008.
- [22] M. Shub, *Global Stability of Dynamical Systems*, New York, Springer - Verlag, 1987.
- [23] J. Sotomayor, *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*, Rio de Janeiro, IMPA, 1979.
- [24] R. Mañé, *Lagrangian Flows: the Dynamics of Globally Minimizing Orbits*, preprint 1995, International Conference on Dynamical Systems in Montevideo (a tribute to Ricardo Mañé), F. Ledrappier, J. Lewowicz, s. Newhouse (Eds.), Pitman Research Notes in Math, V.362 (1996), 120-131.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [25] R. O. Ruggiero, *Geodésicas em Superfícies sob o Ponto de Vista Global*, 1ª Bienal SBM, 2002.
- [26] R. T. Rockafellar, *Convex Analysis*, Princeton University Press, 1971.
- [27] W. Fulton, *Algebraic Topology - A First Course*, New York, Springer - Verlag, 1995.