

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

Identidades de Hsiung-Minkowski e Aplicações Geométricas

Farley Francisco Santana

Belo Horizonte - MG
2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

Farley Francisco Santana

Orientador:

Prof. Ezequiel Rodrigues Barbosa

IDENTIDADES DE HSIUNG-MINKOWSKI
E APLICAÇÕES GEOMÉTRICAS

Dissertação submetida à banca examinadora, designada pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMG, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Matemática.

Belo Horizonte - MG
Fevereiro - 2012

Resumo

Neste trabalho, provaremos resultados obtidos por Robert C. Reilly no artigo [30], os resultados obtidos são no contexto de subvariedades do espaço Euclidiano compactas e sem bordo. A princípio, mostramos uma generalização da curvatura média conforme [30], criando as r -ésimas curvaturas médias σ_r , que podem ter valores reais ou vetoriais. As fórmulas de Hsiung-Minkowski são identidades conhecidas em análise geométrica. Em 1954, Hsiung provou essa identidade para subvariedades do espaço Euclidiano de codimensão 1, compactas e sem bordo, no artigo [17]. Provaremos esse resultado para subvariedades de codimensão qualquer, como feito em [30]. Em uma variedade, nem sempre é possível obter valor exato do primeiro autovalor do Laplaciano. Utilizando o princípio do mínimo e as fórmulas de Hsiung-Minkowski, encontramos cotas superiores para esse autovalor, desigualdades, as quais, também classificam a variedade, com teoremas do tipo "esfera". No primeiro capítulo, registramos resultados básicos de geometria Riemanniana, que são úteis para o capítulo final. O segundo capítulo trata de subvariedades, a referência que mais utilizamos para a sua escrita foi [12]. O trabalho consta ainda de dois apêndices, nos quais, veremos uma demonstração da desigualdade de Wirtinger para o \mathbb{R}^2 , , que junto com outra desigualdade que será vista no último capítulo, nos dá a desigualdade isoperimétrica para curvas suaves. No segundo apêndice sera visto um cálculo explícito do primeiro autovalor do Laplaciano no caso da esfera.

Sumário

Resumo	iii
Introdução	1
1 Geometria Riemanniana	3
1.1 Variedades	3
1.1.1 Variedades Topológicas	3
1.1.2 Variedades Diferenciáveis	4
1.2 Espaço Tangente e Campos Tensoriais	5
1.3 Métricas e Conexões	8
1.4 Curvaturas	10
1.5 Geodésicas e Aplicação Exponencial	12
2 Geometria das Subvariedades	17
2.1 Equações Básicas em Subvariedades	17
2.2 Hipersuperfícies	20
2.3 Subvariedades Mínimas e Umbílicas	22
2.4 Teorema de Takahashi	25
2.5 Redução de codimensão	28
3 Laplaciano em Subvariedades	31
3.1 Notações e Resultados Preliminares	31
3.2 Cotas superiores para λ_1	35
A Desigualdade de Wirtinger	41
B Primeiro Autovalor	43
Referências Bibliográficas	47

Introdução

Dada uma subvariedade Riemanniana M^n , de uma variedade M^{n+q} , a segunda forma fundamental \mathbf{b} é uma aplicação simétrica e bilinear sobre o anel das funções diferenciáveis $C^\infty(M)$. Dado um referencial ortonormal para M , $\{e_1, \dots, e_n\}$, podemos representar \mathbf{b} através de uma matriz (\mathbf{b}_{ij}) , em que $\mathbf{b}_{ij} = \mathbf{b}(e_i, e_j)$. As r -ésimas curvaturas médias σ_r , generalizam, de certa forma, a curvatura média. As fórmulas de Hsiung-Minkowski são identidades conhecidas em análise geométrica. Sua generalização, que será vista no último capítulo, é dada por:

$$\int_M (\langle \mathbf{Y}, \sigma_r \rangle + \sigma_{r-1}) dA = 0.$$

O Laplaciano Δ de uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ em uma variedade é o traço da Hessiana, mas também, podemos pensá-lo como um operador diferencial elíptico de segunda ordem. Um autovalor do Laplaciano é um número real λ , tal que existe uma função $f \in C^\infty(M)$, que verifica $\Delta f = \lambda f$. Considerando $-\Delta$, temos um operador autoadjunto sobre o espaço de Sobolev $H^{1,2}(M)$. Seu espectro constitui-se de uma sequência que tende ao infinito:

$$0 = \lambda_0 < \lambda_1 < \dots < \lambda_n < \dots < +\infty.$$

O teorema principal deste trabalho nos dá uma cota superior para o primeiro autovalor, através da desigualdade:

$$nA \int_M |\sigma_r|^2 dA \geq \lambda_1 \left(\int_M \sigma_{r-1} dA \right)^2.$$

Se σ_r não for identicamente nulo, M está imersa minimamente em alguma hipersfera de \mathbb{R}^{n+q} . Esta desigualdade no caso da variedade ter dimensão 1, junto com a desigualdade de Wirtinger, nos dá a desigualdade isoperimétrica.

A dissertação está organizada da seguinte forma: No capítulo 1, fazemos resultados básicos de geometria Riemanniana, definimos espaço tangente, campos tensoriais, métricas, conexões, curvaturas, geodésicas e aplicação exponencial.

No capítulo 2, citamos resultados de subvariedades, as fórmulas de Gauss, Codazzi, Weingarten e Ricci. Definimos e provamos algumas propriedades de subvariedades míni-

mas e umbílicas. Comentaremos um resultado de redução de codimensão e o Teorema de Takahashi.

No capítulo final, comentaremos os resultados obtidos por Robert C. Reilly no artigo [30].

Nos apêndices, demonstramos a desigualdade de Wirtinger e calculamos o primeiro autovalor do Laplaciano no caso da esfera.

CAPÍTULO 1

Algumas Noções de Geometria Riemanniana

Nesse capítulo apresentamos algumas definições e resultados básicos de geometria Riemanniana, muitos destes serão utilizados no capítulo final. Em geral os resultados apresentados neste capítulo não serão demonstrados, pois existe uma vasta bibliografia na área. Serão definidos os conceitos de variedade diferenciável, curvaturas, tensores e métrica Riemanniana. Alguns dos livros que usamos para a escrita deste capítulo: [7] [16] [24].

1.1 Variedades

Uma variedade pode ser pensada como uma colagem de "pedaços" do espaço euclidiano. Essa noção de variedade, apesar de natural, historicamente, foi difícil chegar à uma definição precisa. Essa noção começou com Riemann em 1854. Em 1923 Hermann Weyl foi o primeiro a criar bases sólidas para fundamentar a definição. Em 1936 a noção ficou completamente clara no artigo de Whitney [34].

1.1.1 Variedades Topológicas

Definição 1.1. *Uma variedade topológica de dimensão n é um espaço topológico de Hausdorff M ao qual, todo ponto $x \in M$ possui uma vizinhança aberta Ω homeomorfa a um aberto V de \mathbb{R}^n , através de um homeomorfismo $\phi : \Omega \rightarrow V$. O par (ϕ, Ω) é chamado carta local de dimensão n de M no ponto x . Dado $y \in \Omega$ a imagem $(\phi_1(y), \dots, \phi_n(y))$ em \mathbb{R}^n é chamada coordenada local de y na carta (Ω, ϕ) .*

Por conta dessas cartas locais o espaço topológico M possui algumas propriedades:

1. É localmente compacto.

2. É localmente conexo.
3. Se for conexo, também será conexo por caminhos.

Definição 1.2. *Seja M uma variedade topológica e $\mathcal{A} = (\Omega_i, \phi_i)_{i \in I}$ uma família de cartas locais de M . Diremos que \mathcal{A} é um atlas de M se $M = \bigcup_{i \in I} \Omega_i$. Em particular, a mudança de coordenadas é um homeomorfismo:*

$$\Phi_{ij} = \phi_j \circ \phi_i^{-1} : \phi_i(\Omega_i \cap \Omega_j) \rightarrow \phi_j(\Omega_i \cap \Omega_j)$$

1.1.2 Variedades Diferenciáveis

Definição 1.3. *Seja M uma variedade topológica e $\mathcal{A} = (\Omega_i, \phi_i)_{i \in I}$ um atlas de dimensão n para M . Diremos que \mathcal{A} é de classe C^k , $1 \leq k \leq \infty$, se a aplicação mudança de coordenadas Φ_{ij} for de classe C^k . Em particular, como $\Phi_{ji} = \Phi_{ij}^{-1}$, a mudança de coordenadas será um difeomorfismo.*

É sempre possível, dado um atlas \mathcal{A} completá-lo em um atlas máximo, agregando a ele todas as parametrizações as quais a mudança de coordenada é difeomorfismo. Do que segue, a partir de agora, ao longo do texto, usaremos a seguinte definição:

Definição 1.4. *Uma variedade diferenciável M , de dimensão n , é uma variedade topológica com um atlas máximo $\mathcal{A} = (\Omega_i, \phi_i)_{i \in I}$ de classe C^∞ . Uma função diferenciável f é uma função de classe C^∞ .*

Exemplo 1.1. O espaço Euclidiano \mathbb{R}^n é uma n -variedade diferenciável, com uma única parametrização, que é a aplicação identidade.

Exemplo 1.2. A n -esfera $\mathbb{S}^n = \{x \in \mathbb{R}^{n+1}; |x|_2 = 1\}$ é uma n -variedade diferenciável, em que $|x|_2 = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_{n+1}^2}$, com, por exemplo, um atlas composto de duas parametrizações dadas pela projeção estereográfica nos pólos norte e sul.

Seja M uma n -variedade diferenciável e N uma m -variedade diferenciável. Uma aplicação $f : M \rightarrow N$ diz-se *diferenciável* de classe C^k , $k \geq 0$, se para cada carta local (Ω, ϕ) e (U, ψ) de M e N , respectivamente, tais que $f(\Omega) \subset U$, a aplicação

$$\psi \circ f \circ \phi^{-1} : \phi(\Omega) \rightarrow \psi(U)$$

é diferenciável de classe C^k , $k \geq 0$. Cabe observar que a classe da função f será sempre menor ou igual a classe das variedades M e N .

1.2 Espaço Tangente e Campos Tensoriais

Nesta seção, definimos a noção de tensores, que é muito importante. Por exemplo, uma métrica riemanniana nada mais é do que um tensor do tipo $\binom{2}{0}$ com algumas propriedades. Essa noção também permitirá definir as curvaturas de Ricci e Riemann a partir de seus respectivos tensores. Aqui será definido o espaço tangente à uma variedade diferenciável e as noções de campos e fibrados.

Definição 1.5. *Seja V um espaço vetorial real de dimensão finita e V^* o seu espaço dual. Um k -tensor covariante em V é uma aplicação multilinear*

$$F : \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \text{ cópias}} \rightarrow \mathbb{R}$$

Analogamente, um l -tensor contravariante é uma aplicação multilinear

$$F : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{l \text{ cópias}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Um tensor misto do tipo $\binom{k}{l}$ é uma aplicação multilinear

$$F : \underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{l \text{ cópias}} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_{k \text{ cópias}} \rightarrow \mathbb{R}.$$

Denotamos o espaço dos k -tensores covariantes em V por $T^k(V)$, o espaço dos l -tensores contravariantes por $T_l(V)$ e o espaço dos tensores do tipo $\binom{k}{l}$ por $T_l^k(V)$.

Lema 1.1. *Seja V um espaço vetorial de dimensão finita. Existe um isomorfismo natural entre $T_{l+1}^k(V)$ e o espaço das aplicações multilineares:*

$$\underbrace{V^* \times \cdots \times V^*}_{l+1} \times \underbrace{V \times \cdots \times V}_k \rightarrow V.$$

Demonstração. Veja [24], página 12. ■

Dada uma variedade diferenciável M de dimensão n , um vetor tangente pode ser caracterizado como uma aplicação, do espaço de funções diferenciáveis numa vizinhança de um ponto p . Ou como um classe de equivalência de curvas, em que podemos resgatar a noção de velocidade. Dada uma parametrização $\phi(p) = (x_1, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n$, denotaremos por $\left\{ \frac{\partial}{\partial x_1}(p), \dots, \frac{\partial}{\partial x_n}(p) \right\}$, ou abreviadamente $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$, a base do espaço tangente no ponto p , $T_p M$, na parametrização ϕ . Dado um vetor $X \in T_p M$, $\exists X^1, \dots, X^n \in \mathbb{R}$ tais que

$$X = \sum_{i=1}^n X^i (\partial_i)_p.$$

Definição 1.6. Um fibrado vetorial de dimensão k suave é um par de variedades diferenciáveis E (o espaço total) e M (o espaço base), junto com uma aplicação sobrejetora e diferenciável $\pi : E \rightarrow M$ (projeção), tal que:

- Cada conjunto $E_p := \pi^{-1}(p)$ (chamado a fibra de E sobre p), possui estrutura de espaço vetorial real todos de mesma dimensão k .
- Para cada $p \in M$, existe uma vizinhança U de p e um difeomorfismo $\phi : \pi^{-1}(U) \rightarrow U \times \mathbb{R}^k$, tal que o seguinte diagrama comuta:

$$\begin{array}{ccc} \pi^{-1}(U) & \xrightarrow{\phi} & U \times \mathbb{R}^k \\ \downarrow \pi & & \downarrow \pi_1 \\ U & \xlongequal{\quad} & U \end{array}$$

- A restrição de ϕ a cada fibra, $\phi : E_p \rightarrow \{p\} \times \mathbb{R}^k$, é um isomorfismo linear.

Exemplo 1.3 (Fibrado Tangente). O fibrado tangente a uma variedade M^n é a união disjunta dos espaços tangentes à variedade em cada ponto x , ou seja:

$$T(M) = \bigcup_{x \in M} T_x M.$$

O fibrado tangente herda naturalmente uma estrutura de variedade diferenciável de dimensão $2n$. Seja \mathcal{A} um atlas máximo de M . A toda carta (Ω, ϕ) de \mathcal{A} associamos uma aplicação:

$$\Phi : \bigcup_{x \in \Omega} T_x(M) \rightarrow \phi(\Omega) \times \mathbb{R}^n$$

que é definida por: se $x \in \Omega$ tem coordenadas (x_1, \dots, x_n) na carta (Ω, ϕ) , e se $X \in T_x M$ tem coordenadas (X^1, \dots, X^n) na carta (Ω, ϕ) ,

$$\Phi(X) = (x_1, \dots, x_n, X^1, \dots, X^n).$$

Essas aplicações dão uma estrutura de variedade diferenciável ao conjunto $T(M)$. Se $(\Omega, \psi) \in \mathcal{A}$ for uma outra carta para M , mostra-se que:

$$\Psi \circ \Phi^{-1}(x_1, \dots, x_n, X^1, \dots, X^n) = (\psi \circ \phi^{-1}(x_1, \dots, x_n), d(\psi \circ \phi^{-1})_{(x_1, \dots, x_n)}(X^1, \dots, X^n)).$$

Em que $d(\psi \circ \phi^{-1})$ denota a derivada do difeomorfismo $\psi \circ \phi^{-1}$. Se $\pi : T(M) \rightarrow M$ é a projeção canônica de $T(M)$ em M definida por: se $X \in T_x M$, $\pi(X) = x$. Temos que π será uma submersão, pois para toda carta (Ω, ϕ) de M ,

$$\phi \circ \pi \circ \Phi^{-1}(x_1, \dots, x_n, X^1, \dots, X^n) = (x_1, \dots, x_n).$$

Assim, mostramos que $T(M)$ é, de fato, um fibrado vetorial.

1.2 Espaço Tangente e Campos Tensoriais

Um covetor é um funcional linear $df : T_x M \rightarrow \mathbb{R}$. Dada uma base do espaço tangente gerada por uma parametrização $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$, existem covetores $\{d^1, \dots, d^n\}$ tais que $d^i(\partial_j) = \delta_{ij}$. Esses covetores formam uma base do espaço dos funcionais lineares de $T_x M$ em \mathbb{R} , $T_x^* M$. Chamamos essa enúpla de *base dual* a $\{\partial_1, \dots, \partial_n\}$.

Analogamente definimos:

Exemplo 1.4 (Fibrado Cotangente). O fibrado cotangente $T^* M$ é a união disjunta dos espaços cotangentes $T_x^* M$

Exemplo 1.5 (Fibrado dos Tensores do Tipo $\binom{k}{l}$). Um tensor do tipo $\binom{k}{l}$ em $x \in M$ é um elemento de $T_l^k(T_x M)$. O fibrado dos tensores do tipo $\binom{k}{l}$ é definido como:

$$T_l^k(M) := \bigcup_{x \in M} T_l^k(T_x M).$$

Definição 1.7 (Seção). Se $\pi : E \rightarrow M$ é um fibrado vetorial sobre M , uma seção de M é uma aplicação $F : M \rightarrow E$ tal que $\pi \circ F = Id_M$. A seção é dita diferenciável se for uma aplicação diferenciável entre variedades.

Exemplo 1.6. Uma seção diferenciável de $T(M)$ é chamada *Campo Vetorial*. Denotaremos o espaço das seções diferenciáveis de $T(M)$ por $\Gamma(M)$.

Exemplo 1.7. Uma seção diferenciável de $T_l^k(M)$ é chamada *Campo Tensorial*. Denotaremos o espaço das seções diferenciáveis de $T_l^k(M)$ por $\Gamma_l^k(M)$.

Definição 1.8 (Pull Back). Sejam M e N variedades diferenciáveis e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Se $d : T_{f(x)} N \rightarrow \mathbb{R}$ é um funcional linear, o pull back de d através da aplicação f , f^*d , é definido por:

$$\begin{aligned} f^*d : T_x M &\rightarrow \mathbb{R} \\ f^*d(X) &\mapsto d(df_x(X)), \end{aligned}$$

em que df_x denota a derivada da função f no ponto x .

As vezes, usaremos a notação f^*X para denotar $df_x X$, quando estiver subentendido que X é um vetor. Podemos ainda, fazer o pull back de campos tensoriais. Sejam M e N variedades diferenciáveis e $f : M \rightarrow N$ uma aplicação diferenciável. Dado um campo tensorial $T \in \Gamma_l^k$, o pull back de T através da aplicação f é definido por:

$$(f^*T)(x)(X_1, \dots, X_p) = T(f(x))(f_x^*X_1, \dots, f_x^*X_p).$$

Definição 1.9. Sejam $f, g \in C^\infty(M)$, $X, Y \in \Gamma(M)$, $a, b \in \mathbb{R}$. O Colchete, $[X, Y]$, de dois campos vetoriais $X, Y \in \Gamma(M)$, é o campo vetorial definido por

$$[X, Y]_x(f) = X_x(Y(f)) - Y_x(X(f)),$$

que em uma carta local (Ω, ϕ) se exprime como:

$$[X, Y]_x = \sum_{i=1}^n \left\{ \sum_{j=1}^n \left(X^j_x \left(\frac{\partial Y^i}{\partial x_j} \right)_x - Y^j_x \left(\frac{\partial X^i}{\partial x_j} \right)_x \right) \right\} \left(\frac{\partial}{\partial x_j} \right)_x.$$

Valem ainda, as seguintes propriedades em relação ao colchete $[X, Y]$:

1. $[X, Y] = -[Y, X]$,
2. $[aX + bY, Z] = a[X, Z] + b[Y, Z]$,
3. $[[X, Y]Z] + [[Y, Z]X] + [[Z, X]Y] = 0$, (*Identidade de Jacobi*)
4. $[fX, gY] = fg[X, Y] + fX(g)Y - gY(f)X$.

1.3 Métricas e Conexões

A partir de agora e no que segue, será usada a convenção do *somatório de Einstein*: um índice que ocorre duas vezes num produto, será somado de 1 até n . Por exemplo, $X^i \partial_i$ é uma abreviação para

$$\sum_{i=1}^n X^i \partial_i,$$

e $\Gamma_{ij}^k X^i Y^j$ denota

$$\sum_{i,j=1}^n \Gamma_{ij}^k X^i Y^j.$$

Uma *Métrica Riemanniana* em uma variedade diferenciável M é um campo tensorial do tipo $\binom{2}{0}$, $g \in \Gamma^2(M)$, que é *simétrico*, ($g(X, Y) = g(Y, X)$), e *positivo definido*, ($g(X, X) > 0$) se $X \neq 0$. Desta forma, uma métrica Riemanniana determina um produto interno em cada espaço tangente $T_x M$, que escrevemos como $\langle X, Y \rangle := g(X, Y)$ para $X, Y \in T_x M$. Uma variedade diferenciável com uma métrica Riemanniana, g , é chamada *variedade Riemanniana*, (M, g) .

Se (M, g) e (\bar{M}, \bar{g}) são variedades Riemannianas um difeomorfismo ϕ de M em \bar{M} é chamado de *isometria* se $\phi^* \bar{g} = g$. Seja (Ω, ϕ) uma carta local de M . Nesta carta, a métrica Riemanniana g , sobre M , é representada por uma matriz definida positiva e simétrica

$$(g_{ij}(x))_{1 \leq i, j \leq n},$$

em que $g_{ij} = \langle \partial_i, \partial_j \rangle$ depende suavemente de $x \in M$.

Definição 1.10 (Conexão Afim). *Uma conexão afim em uma variedade diferenciável M , é uma aplicação*

1.3 Métricas e Conexões

$$\begin{aligned}\nabla : \Gamma(M) \times \Gamma(M) &\rightarrow \Gamma(M) \\ (X, Y) &\mapsto \nabla_X Y,\end{aligned}$$

que possui as seguintes propriedades:

1. $\nabla_{fX+gY}Z = f\nabla_X Z + g\nabla_Y Z$, ($C^\infty(M)$ -linearidade na primeira variável)
2. $\nabla_X(aY + bZ) = a\nabla_X Y + b\nabla_X Z$, (\mathbb{R} -linear na segunda variável)
3. $\nabla_X(fY) = f\nabla_X Y + X(f)Y$, (Regra de Leibniz ou Regra do Produto)

nas quais $X, Y, Z \in \Gamma(M)$, $a, b \in \mathbb{R}$ e $f, g \in C^\infty(M)$. O símbolo $\nabla_X Y$ lê-se: derivada covariante de Y na direção de X .

Uma conexão afim ∇ é um operador local. Dados os campos $X, Y, Z, W \in \Gamma(M)$, usando a propriedade 3 e uma função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $f(x) \neq 0$ e $f(Z - W) \equiv 0$, temos que: Se Z e W coincidem em uma vizinhança Ω de $x \in M$, $\nabla_X Z(x) = \nabla_X W(x)$. Analogamente, se X e Y coincidem em Ω , $\nabla_X Z = \nabla_X W$.

Dada uma carta local (Ω, ϕ) de M^n , $\forall i, j = 1, \dots, n$, $\nabla_{\partial_i} \partial_j$ é um campo vetorial C^∞ em Ω . Denotaremos por $\Gamma_{ij}^k : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ suas funções coordenadas, que são também chamados de Símbolos de Christoffel. Os símbolos de Christoffel determinam a expressão local da conexão ∇ , na carta (Ω, ϕ) , pois, se $X = X^i \partial_i, Y = Y^i \partial_i \in \Gamma(\Omega)$:

$$\nabla_X Y = X^i (\nabla_{\partial_i} Y)(x),$$

usando a regra de Leibniz obtemos,

$$\nabla_{\partial_i} Y(x) = \left\{ \left(\frac{\partial Y^j}{\partial x_i} \right)_x + \Gamma_{i\alpha}^j(x) Y^\alpha(x) \right\} \partial_j$$

Quando a conexão afim ainda satisfaz as seguintes propriedades:

1. $X \langle Y, Z \rangle = \langle \nabla_X Y, Z \rangle + \langle Y, \nabla_X Z \rangle$, (compatibilidade com a métrica)
2. $\nabla_X Y - \nabla_Y X = [X, Y]$, (simetria)

dizemos que a conexão é Riemanniana (ou de Levi-Civita).

De fato, dada uma variedade Riemanniana (M, g) , existe uma única conexão de Levi-Civita para M , o que é garantido pelo:

Teorema 1.1. *Dada uma variedade Riemanniana (M, g) , existe uma única conexão afim, ∇ , em M que é simétrica e compatível com a métrica Riemanniana g .*

Demonstração. Veja [7], página 61. ■

Usando o teorema de Levi-Civita, podemos obter a expressão local dos símbolos de Christoffel que é dada por:

$$\Gamma_{ij}^k = \frac{1}{2}g^{kl}(\partial_i g_{jl} + \partial_j g_{il} + \partial_l g_{ij}).$$

1.4 Curvaturas

No espaço Euclidiano \mathbb{R}^n , pelo Teorema de Schwarz sabemos que $\nabla_{\partial_i} \nabla_{\partial_j} Z = \nabla_{\partial_j} \nabla_{\partial_i} Z$. Ainda no espaço \mathbb{R}^n se $X, Y, Z \in \Gamma(\mathbb{R}^n)$ vale que:

$$\nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z = \nabla_{[X,Y]} Z. \quad (1.1)$$

Esta propriedade vale em qualquer variedade que é localmente isométrica ao espaço Euclidiano \mathbb{R}^n . Esta é a motivação para a definição seguinte:

Definição 1.11. *Seja M uma variedade Riemanniana, o Tensor Curvatura de Riemman é a aplicação $R : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \times \Gamma(M) \rightarrow \Gamma(M)$ definido por,*

$$R(X, Y)Z = \nabla_X \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]} Z. \quad (1.2)$$

Proposição 1.1. *A aplicação definida anteriormente é, de fato, um tensor do tipo $\begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}$.*

Demonstração. Tem-se

$$\begin{aligned} R(fX_1 + gX_2, Y)Z &= \nabla_{fX_1+gX_2} \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_{fX_1+gX_2} Z - \nabla_{[fX_1+gX_2, Y]} Z \\ &= f \nabla_{X_1} \nabla_Y Z + g \nabla_{X_2} \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_{fX_1+gX_2} Z - \nabla_{f[X_1, Y] + g[X_2, Y]} Z. \end{aligned}$$

Note que,

$$\begin{aligned} -\nabla_Y \nabla_{fX_1+gX_2} Z &= -\nabla_Y ([fX_1 + gX_2, Z] + \nabla_Z (fX_1 + gX_2)) \text{ (simetria da conexão)} \\ &= -\nabla_Y (f[X_1, Z] + g[X_2, Z] + f \nabla_Z X_1 + g \nabla_Z X_2) \\ &= -\nabla_Y (f([X_1, Z] + \nabla_Z X_1) + g([X_2, Z] + \nabla_Z X_2)) \\ &= -\nabla_Y (f \nabla_{X_1} Z + g \nabla_{X_2} Z) \\ &= -f \nabla_Y \nabla_{X_1} Z - g \nabla_Y \nabla_{X_2} Z. \end{aligned}$$

Então,

$$\begin{aligned} R(fX_1 + gX_2, Y)Z &= f \nabla_{X_1} \nabla_Y Z + g \nabla_{X_2} \nabla_Y Z - f \nabla_Y \nabla_{X_1} Z \\ &\quad - g \nabla_Y \nabla_{X_2} Z - f \nabla_{[X_1, Y]} Z - g \nabla_{[X_2, Y]} Z \\ &= f (\nabla_{X_1} \nabla_Y Z - \nabla_Y \nabla_{X_1} Z - \nabla_{[X_1, Y]} Z) \\ &\quad + g (\nabla_{X_2} \nabla_Y Z - g \nabla_Y \nabla_{X_2} Z - \nabla_{[X_2, Y]} Z) \\ &= [fR(X_1, Y) + gR(X_2, Y)]Z. \end{aligned}$$

1.4 Curvaturas

Analogamente, $R(X, fY_1 + gY_2) = fR(X, Y_1) + gR(X, Y_2)$. Pela propriedade 2. de uma conexão afim, tem-se

$$R(X, Y)(Z + W) = R(X, Y)Z + R(X, Y)W.$$

Falta mostrar que $R(X, Y)fZ = fR(X, Y)Z$. Por definição, $R(X, Y)fZ = \nabla_X \nabla_Y fZ - \nabla_Y \nabla_X fZ - \nabla_{[X, Y]}fZ$. Como

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y (fZ) &= \nabla_X (f \nabla_Y Z + (Yf)Z) \\ &= f \nabla_X \nabla_Y Z + (Xf) \nabla_Y Z + (Yf) \nabla_X Z + [X(Yf)]Z, \end{aligned}$$

tem-se,

$$\begin{aligned} \nabla_X \nabla_Y (fZ) - \nabla_Y \nabla_X (fZ) &= f \nabla_X \nabla_Y Z + (Xf) \nabla_Y Z + (Yf) \nabla_X Z + [X(Yf)]Z \\ &\quad - f \nabla_Y \nabla_X Z - (Yf) \nabla_X Z - (Xf) \nabla_Y Z - [Y(Xf)]Z \\ &= f \nabla_X \nabla_Y Z - f \nabla_Y \nabla_X Z + [(XY - YX)f]Z \\ &= f \nabla_X \nabla_Y Z - f \nabla_Y \nabla_X Z + ([X, Y]f)Z, \end{aligned}$$

e

$$\nabla_{[X, Y]}(fZ) = f \nabla_{[X, Y]}Z + ([X, Y]f)Z.$$

Daí,

$$\begin{aligned} R(X, Y)fZ &= \nabla_X \nabla_Y (fZ) - \nabla_Y \nabla_X (fZ) - \nabla_{[X, Y]}(fZ) \\ &= f \nabla_X \nabla_Y Z - f \nabla_Y \nabla_X Z + ([X, Y]f)Z - f \nabla_{[X, Y]}Z - ([X, Y]f)Z \\ &= fR(X, Y)Z. \end{aligned}$$

■

Usaremos, às vezes, a seguinte notação:

$$R(\partial_i, \partial_j)\partial_k = R_{ijk}^l \partial_l.$$

Em uma carta local (Ω, ϕ) , sua expressão é dada por:

$$R_{ijk}^l(x) = \left(\frac{\partial \Gamma_{ki}^l}{\partial x_j} \right)_x - \left(\frac{\partial \Gamma_{ji}^l}{\partial x_k} \right)_x + \Gamma_{j\alpha}^l(x) \Gamma_{ki}^\alpha(x) - \Gamma_{k\alpha}^l(x) \Gamma_{ji}^\alpha(x).$$

Definimos também o *Tensor Curvatura de Riemann*, como o campo tensorial do tipo $\binom{4}{0}$ dado por:

$$Rm(X, Y, Z, W) = \langle R(X, Y)Z, W \rangle, \quad (1.3)$$

denotando $R_{ijkl} = Rm(\partial_i, \partial_j, \partial_k, \partial_l)$, temos que $R_{ijkl} = g_{lm} R_{ijk}^m$.

Proposição 1.2. *Seja $\sigma \subset T_p M$ um subespaço bi-dimensional. Sejam $X, Y \in \sigma$ vetores linearmente independentes. Então,*

$$K(X, Y) := \frac{\langle R(X, Y)Y, X \rangle}{\|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X, Y \rangle^2},$$

não depende da escolha dos vetores $X, Y \in T_p M$.

Demonstração. Veja [7], página 105. ■

Dados $p \in M$ e um subespaço bi-dimensional, $\sigma \subset T_p M$. Chama-se de *curvatura seccional* ao número real $K(X, Y) = K(\sigma)$, em que $\{X, Y\}$ é uma base qualquer de σ .

Considere x um ponto de uma variedade Riemanniana de dimensão n . A *curvatura de Ricci* é um tensor do tipo $\binom{2}{0}$, dado por:

$$\begin{aligned} Ric(X, Y) &= \text{traço } Z \mapsto R(Z, X)Y \\ &= \text{traço } R(\cdot, X)Y, \end{aligned}$$

na qual $X, Y, Z \in T_p M$. Portanto,

$$Ric(X, Y) = \sum_{i=1}^n \langle R(e_i, X)Y, e_i \rangle,$$

em que $\{e_i\}$ é uma base ortonormal para $T_p M$.

Seja $X = Z_n \in T_p M$ unitário. Complete $\{X\}$ a uma base ortonormal $\{Z_1, \dots, Z_{n-1}, X\}$ para $T_p M$. A *curvatura de Ricci na direção de X* é definida por

$$Ric_p(X) = \sum_{i=1}^{n-1} \langle R(Z_i, X)X, Z_i \rangle,$$

e a *curvatura escalar* é definida por

$$\begin{aligned} Scal_g(x) &= \frac{1}{n(n+1)} \text{traço } (X, Y) \mapsto (\text{traço } Z \mapsto R(Z, X)Y) \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \text{traço } (X, Y) \mapsto \sum_{i=1}^n \langle R(e_i, X)Y, e_i \rangle \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{j=1}^n \sum_{i=1}^n \langle R(e_i, e_j)e_j, e_i \rangle \\ &= \frac{1}{n(n+1)} \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^n \langle R(Z_i, Z_j)Z_j, Z_i \rangle. \end{aligned}$$

1.5 Geodésicas e Aplicação Exponencial

Uma curva em uma variedade M é uma aplicação $\gamma : I \rightarrow M$, em que $I \subset \mathbb{R}$ é algum intervalo da reta. Em algum tempo $t \in I$, o vetor velocidade da curva γ , $\gamma'(t) \in T_{\gamma(t)} M$ é definido por:

$$\gamma'(t)f = \frac{d}{dt}(f \circ \gamma)(t),$$

1.5 Geodésicas e Aplicação Exponencial

em que $f \in C^\infty(M)$.

Um campo vetorial ao longo de uma curva $\gamma : I \rightarrow M$, é uma aplicação suave $V : I \rightarrow T(M)$, tal que $V(t) \in T_{\gamma(t)}M, \forall t \in I$. Denotaremos por $\Gamma(\gamma)$ o espaço dos campos vetoriais ao longo de γ .

Dado $\bar{V} \in \Gamma(M)$ um campo vetorial em M . Para cada $t \in I$, seja $V(t) = \bar{V}_{\gamma(t)}$. É fácil ver, em coordenadas locais, que $V(t)$ é diferenciável. Um campo vetorial V ao longo de γ é *extendível*, se existe um campo vetorial \bar{V} em uma vizinhança da imagem de γ que se relaciona a V desta forma.

Lema 1.2 (Derivada Covariante). *Seja ∇ uma conexão afim em M . Para cada curva $\gamma : I \rightarrow M$, ∇ determina um único operador*

$$D_t : \Gamma(\gamma) \rightarrow \Gamma(\gamma)$$

que satisfaz às seguintes propriedades:

1. *Linearidade sobre \mathbb{R} :*

$$D_t(aV + bW) = aD_tV + bD_tE \quad \text{para } a, b \in \mathbb{R}.$$

2. *Regra do produto*

$$D_t(fV) = f'V + fD_tV \quad \text{para } f \in C^\infty(M).$$

3. *Se V é extendível, então para qualquer extensão \bar{V} de V ,*

$$D_tV(t) = \nabla_{\gamma'(t)}\bar{V}.$$

Para qualquer $V \in \Gamma(\gamma)$, D_tV é chamada derivada covariante de V ao longo de γ .

Demonstração. Veja [24], página 57. ■

Definição 1.12. *Seja M uma variedade Riemanniana, com conexão ∇ , e seja γ uma curva em M . A aceleração de γ é o campo vetorial $D_t\gamma'$ ao longo de γ . Uma curva γ é chamada geodésica com respeito a ∇ se sua aceleração é zero: $D_t\gamma' \equiv 0$.*

Teorema 1.2 (Existência e Unicidade de Geodésicas). *Seja M uma variedade diferenciável com uma conexão afim. Para cada $x \in M$, cada $V \in T_xM$, e cada $t_0 \in \mathbb{R}$, existe um intervalo aberto $I \in \mathbb{R}$, contendo t_0 e uma geodésica $\gamma : I \rightarrow M$ satisfazendo $\gamma(t_0) = x$, $\gamma'(t_0) = V$. Quaisquer duas geodésicas assim, coincidem no seu domínio em comum.*

Demonstração. Uma curva $\gamma : I \rightarrow M$ é uma geodésica se, e somente se, suas funções coordenadas $\gamma(x_1(t), \dots, x_n(t))$ satisfazem a *equação geodésica*

$$x_k'' + \sum_{i,j=1}^n x_i'(t)x_j'(t)\Gamma_{ij}^k(x(t)) = 0. \quad (1.4)$$

Substituindo $v_i = x_i'$, obtemos a seguinte EDO:

$$\begin{aligned} x_k'(t) &= v_k(t) \\ v_k'(t) &= - \sum_{i,j=1}^n x_i'(t)x_j'(t)\Gamma_{ij}^k(x(t)). \end{aligned}$$

Pelo teorema de existência e unicidade para EDO's de primeira ordem, obtemos o resultado. ■

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana e $x \in M$. Se $X \in T_x M$, denotaremos por $\gamma_x(X, t)$ a única geodésica com parametro t , definida no intervalo $[0, \epsilon(X)]$ a qual temos:

$$\begin{aligned} \gamma_x(X, 0) &= x, \\ \left(\frac{d\gamma_x}{dt}\right)_{(X,0)} &= X. \end{aligned}$$

Denotamos por $t_0(X)$ o sup dos $\epsilon(X)$, tais que $t \rightarrow \gamma_x(X, t)$ é definida. Pela teoria clássica de EDO's, existem reais positivos t_0 e r tais que $\forall X \in T_x M$ com $|X|_g < r$, $t_0(X) > t_0$. Observamos que dado $\lambda \in \mathbb{R}$, $\lambda > 0$, $t \rightarrow \gamma(\lambda t)$ é uma geodésica se γ for. Logo, $\forall \lambda > 0$ e $\forall X \in T_x M$,

$$\gamma_x(\lambda X, t) = \gamma_x(X, \lambda t). \quad (1.5)$$

Diminuindo, se necessário for, o valor de r podemos supor que $t_0 > 1$. Ou seja, existe um número real positivo r tal que $\forall X \in T_x M$, $t_0(X) > 1$ desde que $|X|_g < r$. Denotamos:

$$\Omega_x(M) = \{X \in T_x M / t_0(X) > 1\}.$$

É claro que $B_0^x(r) \subset \Omega_x(M)$, em que

$$B_0^x(r) = \{X \in T_x M / |X|_g < r\}.$$

Definição 1.13 (Aplicação Exponencial). *A exponencial em um ponto x é uma aplicação de $\Omega_x(M)$ em M , que associa a cada $X \in \Omega_x(M)$, $\gamma_x(X, 1)$.*

Existe um isomorfismo natural entre $T_x M$ e \mathbb{R}^n através de uma parametrização, (Ω, ϕ) , da mesma forma, se $v \in T_x M$, podemos identificar $T_v(T_x M)$ com $T_x M$.

Proposição 1.3. *Dado $x \in M$, existe um $\epsilon > 0$ tal que $\exp_x : B_0^x(\epsilon) \subset T_x M \rightarrow M$ é um difeomorfismo de B_0^x sobre um aberto de M .*

1.5 Geodésicas e Aplicação Exponencial

Demonstração. Calculemos $d(\exp_x)_0$:

$$\begin{aligned}d(\exp_x)_0(v) &= \frac{d}{dt}(\exp_x(tv))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(\gamma_x(tv, 1))|_{t=0} \\ &= \frac{d}{dt}(\gamma_x(v, t))|_{t=0} \\ &= v.\end{aligned}$$

Chamamos o aberto $\exp_x(B_0^x(\epsilon))$, de *vizinhança normal* de x em M . ■

Uma base ortonormal $\{E_i\}$ para $T_x M$ gera um isomorfismo $E : \mathbb{R}^n \rightarrow T_x M$, dado por $E(x^1, \dots, x^n) = x^i E_i$. Se \mathcal{U} é uma vizinhança normal de x , podemos combinar este isomorfismo com a aplicação para obtermos uma carta local,

$$\psi := E^{-1} \circ \exp_x^{-1} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbb{R}^n.$$

Chamamos essa carta local de *carta normal*, e as coordenadas nessa carta de *coordenadas normais* com centro em x . Essa carta possui propriedades importantes:

Exemplo 1.8. Sejam $(\mathcal{U}, (x^i))$ coordenadas normais com centro em x

1. Para qualquer $V = V^i \partial_i \in T_x M$, a geodésica γ_V com ponto inicial x e velocidade V é representada em coordenadas normais por

$$\gamma_V(t) = (tV^1, \dots, tV^n)$$

enquanto γ_V esteja contida em \mathcal{U} .

2. As coordenadas de x são $(0, \dots, 0)$.
3. As componentes da métrica em x são $g_{ij} = \delta_{ij}$.
4. As derivadas parciais de primeira ordem de g_{ij} e os símbolos de Christoffel são nulos em x .

CAPÍTULO 2

Geometria das Subvariedades

Neste capítulo são apresentados resultados de subvariedades. Suporemos sempre a variedade conexa.

2.1 Equações Básicas em Subvariedades

Definição 2.1. *Sejam M^n e \bar{M}^m variedades diferenciáveis de dimensões n e m respectivamente. Uma aplicação $f : M^n \rightarrow \bar{M}^m$ é uma imersão se a sua derivada $df_x : T_x M \rightarrow T_{f(x)} \bar{M}$ é injetiva, $\forall x \in M$. Se f for uma imersão e um homeomorfismo sobre sua imagem, será chamada de mergulho. Se as variedades forem Riemannianas, f será uma imersão isométrica se*

$$\langle X, Y \rangle_M = \langle df_x X, df_x Y \rangle_{\bar{M}}$$

$\forall x \in M$ e $\forall X, Y \in T_x M$, ou pode se dizer, ainda, que a variedade M tem a métrica induzida de \bar{M} através da imersão f .

Seja $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+p}$ uma imersão isométrica. $\forall x \in M, \exists U \subset M$ aberto, tal que $f|_U$ é um mergulho sobre $f(U)$, neste caso, identificamos U com $f(U)$, como se a aplicação f fosse a identidade. Então, podemos considerar o espaço tangente a M em um ponto x como um subespaço vetorial do espaço tangente a \bar{M} no ponto x e escrevemos a seguinte soma direta:

$$T_x \bar{M} = T_x M \oplus T_x M^\perp,$$

em que $T_x M^\perp$ é o complemento ortogonal de $T_x M$ em $T_x \bar{M}$

Dessa decomposição, obtemos um fibrado vetorial $TM^\perp = \bigcup_{x \in M} T_x M^\perp$, chamado *fibrado normal* a M . Desta forma, o fibrado vetorial $T\bar{M}|_{f(M)} = \{X \in T\bar{M} : \pi(X) \in f(M)\}$

$f(M)$, em que $\pi : T\bar{M} \rightarrow \bar{M}$ é a projeção} se decompõe na soma de Whitney

$$T\bar{M}|_{f(M)} = TM \oplus_W TM^\perp.$$

Definimos ainda as projeções tangencial e normal dadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} (\cdot)^\top : T\bar{M}|_{f(M)} &\rightarrow TM \\ (\cdot)^\perp : T\bar{M}|_{f(M)} &\rightarrow TM^\perp, \end{aligned}$$

Seja \bar{M}^{n+p} uma variedade Riemanniana com conexão de Levi-Civita $\bar{\nabla}$, e seja $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+p}$ uma imersão isométrica. Dados os campos vetoriais $X, Y \in \Gamma(M)$, podemos decompor:

$$\bar{\nabla}_X Y = (\nabla_X Y)^\top + (\bar{\nabla}_X Y)^\perp.$$

Pela unicidade da conexão de Levi-Civita, segue que $(\bar{\nabla})^\top$ é a conexão de Levi-Civita na variedade M . Então, obtemos a:

Fórmula de Gauss

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \mathbf{b}(X, Y), \tag{2.1}$$

a qual define uma aplicação $\mathbf{b} : \Gamma(M) \times \Gamma(M) \rightarrow \Gamma(M)^\perp$, chamada *segunda forma fundamental*, que é bilinear sobre o anel $C^\infty(M)$ das funções diferenciáveis em M e simétrica. Em particular para qualquer ponto $x \in M$ e campos vetoriais $X, Y \in \Gamma(M)$, a aplicação $\mathbf{b}_x : T_x M \times T_x M \rightarrow T_x M^\perp$, dada por $\mathbf{b}_x(X, Y) = \mathbf{b}(X, Y)(x)$, depende apenas dos valores de X e Y no ponto x .

Considerando os campos $X \in \Gamma(M)$ e $\xi \in \Gamma(M)^\perp$, denotamos

$$A_\xi X = -(\bar{\nabla}_X \xi)^\top.$$

Já que,

$$0 = X \langle \xi, Y \rangle = \langle \bar{\nabla}_X \xi, Y \rangle + \langle \xi, \bar{\nabla}_X Y \rangle, \quad \forall Y \in \Gamma(M)$$

a fórmula de Gauss (2.1) nos dá

$$\langle A_\xi X, Y \rangle = \langle \mathbf{b}(X, Y), \xi \rangle.$$

A aplicação $A_\xi : \Gamma(M) \rightarrow \Gamma(M)$ é linear sobre $C^\infty(M)$ e autoadjunta. Essa aplicação será chamada de *operador de Weingarten*, ou *segunda forma fundamental na direção ξ* .

A componente normal de $\bar{\nabla}_X \xi$, que denotamos por $\nabla_X^\perp \xi$, define uma conexão no fibrado normal TM^\perp . Dizemos que ∇^\perp é a *conexão normal* de f , e obtemos a equação:

2.1 Equações Básicas em Subvariedades

Fórmula de Weingarten

$$\bar{\nabla}_X \xi = -A_\xi X + \nabla_X^\perp \xi. \quad (2.2)$$

Combinando as fórmulas de Weingarten e Gauss, obtemos as equações básicas de uma imersão isométrica que são as equações de Gauss, Codazzi e Ricci. Cujas demonstrações podem ser encontradas em [12]. Sejam $X, Y, Z \in \Gamma(M)$, vale a seguinte igualdade:

Equação de Gauss

$$\langle R(X, Y)Z, W \rangle = \langle \bar{R}(X, Y)Z, W \rangle + \langle \mathbf{b}(X, W), \mathbf{b}(Y, Z) \rangle - \langle \mathbf{b}(X, Z), \mathbf{b}(Y, W) \rangle, \quad (2.3)$$

em que R e \bar{R} , são os tensores curvatura em M e \bar{M} , respectivamente. Em particular, se $K(X, Y) = \langle R(X, Y)Y, X \rangle$ e $\bar{K}(X, Y) = \langle \bar{R}(X, Y)Y, X \rangle$, denotam as curvaturas seccionais em M e \bar{M} em relação ao plano gerado pelos vetores ortonormais $X, Y \in T_x M$, a equação de Gauss fica

$$K(X, Y) = \bar{K}(X, Y) + \langle \mathbf{b}(X, X), \mathbf{b}(Y, Y) \rangle - |\mathbf{b}(X, Y)|^2.$$

Equação de Codazzi

$$(\bar{R}(X, Y), Z)^\perp = (\nabla_X^\perp \mathbf{b})(Y, Z) - (\nabla_Y^\perp \mathbf{b})(X, Z), \quad (2.4)$$

em que, por definição,

$$(\nabla_X^\perp \mathbf{b})(Y, Z) = \nabla_X^\perp \mathbf{b}(Y, Z) - \mathbf{b}(\nabla_X Y, Z) - \mathbf{b}(Y, \nabla_X Z).$$

Seja R^\perp o tensor curvatura do fibrado normal TM^\perp , isto é,

$$R^\perp(X, Y)\xi = \nabla_X^\perp \nabla_Y^\perp \xi - \nabla_Y^\perp \nabla_X^\perp \xi - \nabla_{[X, Y]}^\perp \xi$$

$\forall X, Y \in \Gamma(M)$ e $\xi \in \Gamma(M)^\perp$. Segue das fórmulas de Gauss e Weingarten que:

Equação de Ricci

$$(\bar{R}(X, Y)\xi)^\perp = R^\perp(X, Y)\xi + \mathbf{b}(A_\xi X, Y) - \mathbf{b}(X, A_\xi Y). \quad (2.5)$$

Essa equação também pode ser escrita na forma:

$$\langle (\bar{R}(X, Y)\xi)\eta \rangle = \langle R^\perp(X, Y)\xi, \eta \rangle - \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y \rangle,$$

em que $X, Y \in \Gamma(M)$; $\xi, \eta \in \Gamma(M)^\perp$ e $[A_\xi, A_\eta] = A_\xi A_\eta - A_\eta A_\xi$. Analogamente, a equação de Codazzi pode ser escrita como

$$(\bar{R}(X, Y)\xi)^\top = (\nabla_Y A)(X, \xi) - (\nabla_X A)(Y, \xi)$$

em que, por definição,

$$(\nabla_Y A)(X, \xi) = \nabla_Y A_\xi X - A_\xi \nabla_Y X - A_{\nabla_Y^\perp \xi} X.$$

Seja $f : M^n \rightarrow \bar{M}_c^{n+p}$ uma imersão isométrica, em que \bar{M}_c denota uma variedade com curvatura seccional constante c . Neste caso, o tensor curvatura \bar{R} de \bar{M} é dado por

$$\bar{R}(X, Y) = c(X \wedge Y)$$

para todo $X, Y \in T\bar{M}$, em que

$$(X \wedge Y)Z = \langle Y, Z \rangle X - \langle X, Z \rangle Y, \quad \forall Z \in T\bar{M}$$

$$\begin{aligned} \text{(i)} \quad \langle R(X, Y)Z, W \rangle &= c \langle (X \wedge Y)Z, W \rangle \\ &= \langle \mathbf{b}(X, W), \mathbf{b}(Y, Z) \rangle - \langle \mathbf{b}(X, Z), \mathbf{b}(Y, W) \rangle \end{aligned}$$

$$\text{(ii)} \quad (\nabla_X^\perp \mathbf{b})(Y, Z) = (\nabla_X^\perp \mathbf{b})(X, Z), \text{ ou de forma equivalente,}$$

$$(\nabla_X A)(Y, \xi) = (\nabla_X A)(X, \xi)$$

$$\text{(iii)} \quad R^\perp(X, Y)\xi = \mathbf{b}(X, A_\xi Y) - \mathbf{b}(A_\xi X, Y), \text{ ou de maneira equivalente}$$

$$\langle R^\perp(X, Y)\xi, \eta \rangle = \langle [A_\xi, A_\eta]X, Y \rangle.$$

2.2 Hipersuperfícies

Nesta seção falaremos de hipersuperfícies, ou seja, imersões isométricas com codimensão 1. Varios resultados para hipersuperfícies no espaço \mathbb{R}^n são generalizações dos mesmos resultados no caso de superfícies em \mathbb{R}^3 . É conhecido que uma hipersuperfície possui um campo normal unitário diferenciável se, e somente se, for orientável. Mas, localmente, toda hipersuperfície é orientável ao considerarmos uma vizinhança parametrizada.

Seja $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica e consideremos um campo local $\eta \in \Gamma(M)^\perp$ definido em uma vizinhança U de $x \in M$, tal que $\langle \eta_y, \eta_y \rangle = 1, \forall y \in U$. Desta forma, a *fórmula de Gauss* (2.1) fica :

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \langle A_\eta X, Y \rangle \eta.$$

2.2 Hipersuperfícies

Por outro lado, como ξ é unitário e normal, temos que $\langle \bar{\nabla}_X \xi, \xi \rangle = 0$. Logo, $\nabla_X^\perp \xi = 0$, $\forall X \in \Gamma(M)$. Assim, a *fórmula de Weingarten* (2.2) fica

$$\bar{\nabla}_X \xi = -A_\xi X.$$

Usando o fato que $\mathbf{b}(X, Y) = \langle A_\xi X, Y \rangle \xi$, a *equação de Gauss* (2.3) fica

$$R(X, Y)Z = (\bar{R}(X, Y)Z)^\top + (A_\xi X \wedge A_\xi Y)Z.$$

A *equação de codazzi* (2.4) fica

$$R(X, Y)Z = (\bar{R}(X, Y)\xi)^\top = (\nabla_Y A_\xi)X - (\nabla_X A_\xi)Y,$$

em que, por definição,

$$(\nabla_X A_\xi)Y = (\nabla_X(A_\xi)Y) - A_\xi \nabla_X Y.$$

No caso da variedade \bar{M}^{n+1} ter curvatura seccional constante c , as equações de Gauss e Codazzi são, respectivamente,

$$R(X, Y) = c(X \wedge Y) + A_\xi X \wedge A_\xi Y$$

e

$$(\nabla_X A_\xi)Y = (\nabla_Y A_\xi)X.$$

Seja $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+1}$ uma imersão isométrica, e seja ξ um campo normal unitário definido em uma vizinhança de um ponto $x \in M$. Definimos as *curvaturas principais* de f em x como os autovalores, garantidos pelo teorema espectral, de A_{ξ_x} , e as *direções principais* como os autovetores unitários correspondentes. O produto de todas as curvaturas principais $K = \lambda_1 \cdot \dots \cdot \lambda_n$ é chamada *curvatura de Gauss-Kronecker* de f .

Dada uma hipersuperfície orientável $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ do espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+1} , escolhemos um campo vetorial global normal unitário $\xi \in \Gamma(M)^\perp$. A *aplicação normal de Gauss* é definida por

$$\begin{aligned} \phi : M^n &\rightarrow S_1^n \\ x &\mapsto \xi_x \end{aligned}$$

em que $S_1^n \subset \mathbb{R}^{n+1}$ é a esfera unitária canônica, e $\xi_x \in S_x^n$ denota a translação para a origem em \mathbb{R}^{n+1} do vetor $\xi_x \in T_x M^\perp$. Observe que, para cada $x \in M^n$, os espaços vetoriais $T_x M$ e $T_{\phi(x)} S_1^n$ são paralelos em \mathbb{R}^{n+1} . Logo, há um isomorfismo entre $T_x M$ e $T_{\phi(x)} S_1^n$ que nos permite identificar esses dois espaços.

Proposição 2.1. *Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+1}$ uma hipersuperfície orientável com aplicação normal de Gauss $\phi : M^n \rightarrow S_1^n$. Então, para cada $x \in M^n$, temos*

$$(\mathrm{d}\phi)_x = -A_{\xi_x}.$$

Demonstração. Dado $X \in T_x M$, seja $\gamma : (-\epsilon, \epsilon) \rightarrow M$ uma curva diferenciável tal que $\gamma(0) = x$ e $\gamma'(0) = X$. Temos que:

$$(\mathrm{d}\phi)_x(X) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\phi \circ \gamma)(t)|_{t=0} = \bar{\nabla}_X \xi = -A_{\xi_x} X.$$

Em que na última igualdade usamos a fórmula de Weingarten para hipersuperfícies. ■

2.3 Subvariedades Mínimas e Umbílicas

Dada uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+p}$, o vetor curvatura média $H(x)$ de f em $x \in M$ é definido como

$$H(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^n \mathbf{b}(X_j, X_j),$$

em que $X_1, \dots, X_n \in T_x M$ é uma base ortonormal. Podemos escrever, ainda, $H(x) = \frac{1}{n} \sum_{j=1}^p (\text{traço} A_{\xi_j}) \xi_j$, para qualquer conjunto de vetores ortonormais $\xi_1, \dots, \xi_p \in T_x M^\perp$. Concluimos então que $H(x)$ não depende do referencial escolhido.

Definição 2.2. *Uma imersão isométrica f é mínima em $x \in M$ quando $H(x) = 0$, e f é dita uma imersão mínima quando for mínima em todos os pontos de M .*

Definição 2.3. *Uma imersão isométrica f é totalmente geodésica em $x \in M$ quando sua segunda forma fundamental \mathbf{b} for identicamente nula em x , e f é dita uma imersão totalmente geodésica quando for totalmente geodésica em todos os pontos de M .*

No caso de uma imersão totalmente geodésica, as geodésicas de M são as geodésicas de \bar{M} que estão contidas inteiramente em M .

Seja M^n uma subvariedade de $(M')^q$, que por sua vez é subvariedade de de uma variedade Riemanniana N .

Sejam X e Y campos tangentes em M , e sejam $\bar{\nabla}$ e ∇' as conexões Riemannianas de N e M' , respectivamente. Temos, pela equação de Gauss (2.3), que

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla'_X Y + \bar{\mathbf{b}}(X, Y), \tag{2.6}$$

em que $\bar{\mathbf{b}}$ é a segunda forma fundamental de M' em N . Seja ∇ a conexão Riemanniana de M e \mathbf{b}' a segunda forma fundamental de M em M' . Temos que:

$$\nabla'_X Y = \nabla_X Y + \mathbf{b}'(X, Y), \tag{2.7}$$

2.3 Subvariedades Míminas e Umbílicas

De (2.6) e (2.7), obtemos que

$$\bar{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + \mathbf{b}'(X, Y) + \bar{\mathbf{b}}(X, Y). \quad (2.8)$$

A segunda forma fundamental \mathbf{b} de M em N é dada por

$$\mathbf{b}(X, Y) = \mathbf{b}'(X, Y) + \bar{\mathbf{b}}(X, Y),$$

com $\mathbf{b}'(X, Y)$ tangente a M' e $\bar{\mathbf{b}}(X, Y)$ normal a M' . Se denotarmos por H e H' os vetores curvatura média de M em N e M' , respectivamente obtemos

$$H = H' + H(M; M', N), \quad (2.9)$$

em que $H(M; M', N)$ é normal a M' e definido por

$$H(M; M', N) = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{b}}(E_i, E_i),$$

e $\{E_1, \dots, E_n\}$ é um campo vetorial ortonormal tangente a M . O vetor $H(M; M', N)$ é chamado *vetor curvatura média relativo a M com respeito a M' e N* .

Definição 2.4. *Seja M uma variedade Riemanniana e h uma função diferenciável, $h : M \rightarrow \mathbb{R}$. Por $\nabla h(x)$ denotamos o gradiente da função h em $x \in M$, definido por*

$$\langle \nabla h(x), X \rangle = X(h)(x), \quad X \in T_x M.$$

Proposição 2.2. *Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ uma imersão isométrica com M compacta. Existe um ponto $x_0 \in M^n$ e um vetor normal $\xi \in T_{x_0} M^\perp$ tal que a segunda forma A_ξ é positiva definida.*

Demonstração. A função $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x) = \frac{1}{2}|f(x)|^2$ é diferenciável, por ser a composta de funções diferenciáveis, e como M é compacta, essa função possui máximo em algum ponto $x_0 \in M$. Como

$$0 = X(h)(x_0) = \langle X, f(x_0) \rangle, \quad \forall X \in T_{x_0} M,$$

concluimos que $f(x_0)$ é normal a M em x_0 . E mais ainda,

$$0 \geq X(X(h))(x_0) = \langle \bar{\nabla}_X X, f(x_0) \rangle + |X|^2 = \langle \mathbf{b}(X, X), f(x_0) \rangle + |X|^2.$$

Tomando $\xi = -f(x_0)$, obtemos

$$\langle A_\xi X, X \rangle \geq |X|^2, \quad \forall X \in T_{x_0} M.$$

■

Corolário 2.0.1. *Não existe subvariedade mínima compacta do espaço euclidiano.*

Definição 2.5. *Uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+p}$ é umbílica em $x_0 \in M$, quando $A_\xi = \lambda_\xi I$, $\forall \xi \in T_{x_0}M^\perp$, em que $\lambda_\xi \in \mathbb{R}$ e I é a aplicação identidade de $T_{x_0}M$. A aplicação f é dita ser uma imersão umbílica quando for umbílica em todos os pontos de M .*

Proposição 2.3. *São equivalentes:*

- (i) f é umbílica em $x_0 \in M$,
- (ii) $A_\xi = \langle H(x_0), \xi \rangle I$, $\xi \in T_{x_0}M^\perp$,
- (iii) $\mathbf{b}(X, Y) = \langle X, Y \rangle H(x_0)$, $X, Y \in T_{x_0}M$.

Demonstração.

(i) \Rightarrow (ii) Tomando uma base ortonormal $\{e_i\}$, para $T_{x_0}M$ e denotando por $\mathbf{b}_{ij} = \mathbf{b}(e_i, e_j)$, temos que:

$$\begin{aligned} \langle H(x_0), \xi \rangle &= \left\langle \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \mathbf{b}_{ii}, \xi \right\rangle \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \langle A_\xi e_i, e_i \rangle \\ &= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n \lambda_\xi \langle e_i, e_i \rangle \\ &= \lambda_\xi. \end{aligned}$$

(ii) \Rightarrow (iii) Seja $\{\xi_i\}$ uma base para $T_{x_0}M^\perp$, temos que:

$$\begin{aligned} \mathbf{b}(X, Y) &= \sum_{i=1}^p \langle \mathbf{b}(X, Y), \xi_i \rangle \xi_i \\ &= \sum_{i=1}^p \langle A_{\xi_i} X, Y \rangle \xi_i \\ &= \sum_{i=1}^p \langle H(x_0), \xi_i \rangle \langle X, Y \rangle \xi_i \\ &= \lambda_\xi \end{aligned}$$

(iii) \Rightarrow (i) Basta fazer o caminho inverso na demonstração anterior, pois em todos os passos temos igualdades. ■

Dizemos que $f : M^n \rightarrow \bar{M}^{n+p}$ tem *vetor curvatura média paralelo* quando $\nabla_X^\perp H = 0$, $\forall X \in \Gamma(M)$. Neste caso, temos como consequência que $|H|$ é constante.

2.4 Teorema de Takahashi

Proposição 2.4. *Se $f : M^n \rightarrow \bar{M}_c^{n+p}$, $n \geq 2$, for uma imersão umbílica, então o vetor curvatura média H de f é paralelo.*

Demonstração. Usando as equivalências da proposição anterior, temos que para cada $X, Y, Z \in \Gamma(M)$,

$$\begin{aligned} (\nabla_X^\perp \mathbf{b})(Y, Z) &= \nabla_X^\perp \mathbf{b}(Y, Z) - \mathbf{b}(\nabla_X Y, Z) - \mathbf{b}(Y, \nabla_X Z) \\ &= \nabla_X^\perp (\langle Y, Z \rangle H) - \langle \nabla_X Y, Z \rangle H - \langle Y, \nabla_X Z \rangle H \\ &= \langle Y, Z \rangle \nabla_X^\perp H. \end{aligned}$$

Usando a equação de Codazzi para o caso de variedades com curvatura seccional constante, temos

$$\langle X, Y \rangle \nabla_Y^\perp H = \langle Y, Z \rangle \nabla_X^\perp H.$$

Tomando $Z = Y$, ortogonal a X , concluímos que H é paralelo. ■

2.4 Teorema de Takahashi

Seja M uma variedade Riemanniana e h uma função diferenciável, definimos o *hessiano* de h em $x \in M$ como a forma bilinear simétrica dada por:

$$Hess_h(X, Y) = \langle \nabla_X \nabla h, Y \rangle = XY(h) - \nabla_X Y(h), \quad X, Y \in T_x M.$$

Suponhamos que $f : M \rightarrow \bar{M}$ seja uma imersão isométrica, e que $g : \bar{M} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função diferenciável. Queremos calcular o gradiente e o hessiano da função $h = g \circ f : M \rightarrow \mathbb{R}$. Temos que, em $x \in M$,

$$\langle \nabla h, X \rangle = \langle \nabla g, X \rangle,$$

$\forall X \in T_x M$. Então, se escrevermos

$$\nabla g = \nabla h + (\nabla g)^\perp,$$

em que $(\nabla g)^\perp$ é perpendicular a $T_x M$, obtemos, para cada $X, Y \in T_x M$,

$$\begin{aligned} Hess_h(X, Y) &= \langle \nabla_X \nabla h, Y \rangle = \langle \bar{\nabla}_X \nabla h, Y \rangle \\ &= X \langle \nabla h, Y \rangle - \langle \nabla h, \bar{\nabla}_X Y \rangle \\ &= X \langle \nabla g - (\nabla g)^\perp, Y \rangle - \langle \nabla g - (\nabla g)^\perp, \bar{\nabla}_X Y \rangle \\ &= \langle \bar{\nabla}_X \nabla g, Y \rangle + \langle \nabla g, \mathbf{b}(X, Y) \rangle. \end{aligned}$$

Então,

$$Hess_h(X, Y) = Hess_g(X, Y) + \langle \nabla g, \mathbf{b}(X, Y) \rangle. \quad (2.10)$$

O *divergente* de um campo $X \in \Gamma(M)$ e o *Laplaciano* de uma função diferenciável $h : M \rightarrow \mathbb{R}$ são definidos, respectivamente, por:

$$div X = \text{traço}(Z \mapsto \nabla_Z X)$$

e

$$\Delta h = \text{traço} Hess_h = div \nabla h$$

Proposição 2.5. *Se $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^N$ for uma imersão isométrica,*

$$\Delta f = (\Delta f_1, \dots, \Delta f_N) = nH,$$

em que H é o vetor curvatura média.

Demonstração. De fato, seja $\{e_1, \dots, e_N\}$ uma base ortonormal para \mathbb{R}^N , então $f_i = \pi_i \circ f$, em que π_i é a projeção na i -ésima coordenada. Se $\{X_j\}$ é um referencial ortonormal para M^n , pela equação (2.10) temos

$$\begin{aligned} Hess_{f_i}(X_j, X_j) &= Hess_{\pi_i}(X_j, X_j) + \langle \nabla \pi_i, \mathbf{b}(X_j, X_j) \rangle. \quad \text{Daí,} \\ \sum_{j=1}^n Hess_{f_i}(X_j, X_j) &= \sum_{j=1}^n (Hess_{\pi_i}(X_j, X_j) + \langle e_i, \mathbf{b}(X_j, X_j) \rangle). \quad \text{Assim,} \\ \Delta f_i &= n \langle e_i, H \rangle. \end{aligned}$$

■

Teorema 2.1 (Hopf). *Sejam M^n uma variedade diferenciável compacta, sem bordo, conexa e $h : M^n \rightarrow \mathbb{R}$ uma função diferenciável. Se $\Delta h \geq 0$, então h é constante.*

Demonstração. Primeiro vamos provar a seguinte identidade:

$$\Delta(f.g) = f\Delta g + g\Delta f + 2\langle \nabla f, \nabla g \rangle.$$

Tomando um referencial geodésico $\{E_1, \dots, E_n\}$ em $p \in M^n$, temos que

$$\nabla f(p) = \sum_{i=1}^n (E_i(f)) E_i(p).$$

Então,

$$\Delta f(p) = \sum_{i=1}^n E_i(E_i(f))(p).$$

2.4 Teorema de Takahashi

Usando a distributividade da derivação em relação ao produto de funções, obtemos o resultado. Logo,

$$\Delta(h^2/2) = h\Delta h + |\nabla h|^2.$$

Pelo teorema da divergência, temos que

$$\int_M \Delta h = 0.$$

Como $\Delta h \geq 0$, temos $\Delta h = 0$. Usando novamente o teorema da divergência para $h^2/2$, obtemos

$$\begin{aligned} 0 &= \int_M \Delta(h^2/2) = \int_M h\Delta h + \int_M |\nabla h|^2 \\ &= \int_M |\nabla h|^2 \end{aligned}$$

o que, junto com a conexidade de M , implica que $f = \text{constante}$. ■

Observação 2.1. A proposição (2.5) e o teorema (2.1) nos dão outra prova para o fato que não existe imersão isométrica de uma variedade compacta no espaço Euclidiano.

Proposição 2.6. *Dada uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow S_{1/r,2}^N \subset \mathbb{R}^{N+1}$, vale a seguinte igualdade*

$$\Delta f = nr^2 f + nH.$$

Demonstração. Já temos, pela proposição (2.5), que $\Delta f = n\bar{H}$, em que \bar{H} é o vetor curvatura média de M em relação a \mathbb{R}^N . Logo, pela equação (2.9),

$$\bar{H} = H - \sum_{i=1}^n \bar{\mathbf{b}}(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i),$$

em que $\bar{\mathbf{b}}$ é a segunda forma fundamental em $S_{1/r,2}^N$ como subvariedade de \mathbb{R}^{N+1} e \mathbf{e}_i é a imagem de uma base ortonormal para $T_p M$, levada em $S_{1/r,2}^N$, através da derivada da isometria f . Pela proposição (2.2) e lembrando que a segunda forma fundamental em uma hipersuperfície é dada por $\bar{\mathbf{b}}(X, Y) = \langle A_\xi X, Y \rangle \xi$, temos que $\bar{\mathbf{b}}(X, Y) = -r^2 \langle X, Y \rangle \xi$, pois a aplicação normal de Gauss em $S_{1/r,2}^N \subset \mathbb{R}^{N+1}$ será a homotetia por r^2 e por uma questão de orientação, o vetor normal ξ será o próprio vetor posição. ■

Teorema 2.2 (Takahashi). *Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{N+1}$ uma imersão isométrica tal que $\Delta f = -\lambda f$, $\lambda > 0$. Então, $f(M) \subset S_{1/r,2}^N$, $r = (n/\lambda)^{1/2}$, e $f : M^n \rightarrow S_{1/r,2}^N$ é mínima.*

Demonstração. Por (2.5) temos que $\Delta f = -\lambda f$ é normal a imersão, isto implica que $|f|$ é constante, pois dado $X \in T_x M$,

$$X(|f|^2) = 2\langle \bar{\nabla}_X f, f \rangle = \langle X, f \rangle, \quad \forall X \in T_x M$$

Usando a identidade,

$$\begin{aligned}\Delta\left(\frac{1}{2}|f|^2\right) &= n + \langle \Delta f, f \rangle \\ &= n - \lambda|f|^2,\end{aligned}$$

integramos de ambos os lados ao longo de M . Pelo teorema da divergência ref??, $\int_M \Delta\left(\frac{1}{2}|f|^2\right) = 0$. Concluimos então, que $|f| = (n/\lambda)^{1/2}$. Substituindo esse valor do raio na equação (2.6), obtemos que $H = 0$, ou seja, a imersão é mínima ■

2.5 Redução de codimensão

Neste capítulo, vamos responder ao problema de redução de codimensão. Isto é, dada uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$, quando existirá um subespaço \mathbb{R}^{n+q} , $q \leq p$, tal que $f(M) \subset \mathbb{R}^{n+q}$.

Dada uma imersão isométrica $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$, definimos o *primeiro espaço normal* de f em $x \in M$ como sendo o subespaço $N_1(x) \subset T_x M^\perp$ gerado pela segunda forma fundamental \mathbf{b} de f em x .

$$N_1(x) = \text{expn}\{\mathbf{b}(X, Y) : X, Y \in T_x M\}.$$

Ou seja,

$$N_1(x) = \{\xi \in T_x M^\perp : A_\xi = 0\}^\perp.$$

Dizemos que a imersão f é *1-regular* se a dimensão de $N_1(x)$ é constante ao longo de M . Neste caso, N_1 é um subfibrado de TM^\perp . A imersão f é *substancial* se a codimensão de f não puder ser reduzida. A menor codimensão a qual uma imersão f pode ser reduzida é chamada *codimensão substancial* de f .

Definição 2.6. *Seja $\pi : E \rightarrow M$ um fibrado vetorial com uma conexão linear ∇ . Dizemos que uma seção $\xi \in \Gamma(\pi)$ é paralela quando $\nabla_X \xi = 0$, para todo $X \in \chi(M)$. Um subfibrado vetorial F de E é dito paralelo quando para toda seção η de F e todo $X \in \chi(M)$, temos que $\nabla_X \eta$ é uma seção de F .*

Proposição 2.7. *Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ uma imersão isométrica, e suponhamos que exista um subfibrado paralelo L do fibrado normal, de rank $q \leq p$, satisfazendo $N_1(x) \subset L(x)$, $\forall x \in M$. Então, a codimensão de f pode ser reduzida a q .*

Em particular temos o seguinte corolário:

2.5 Redução de codimensão

Corolário 2.2.1. *Seja $f : M^n \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ um imersão isométrica 1-regular. Se N_1 é um subfibrado paralelo, de rank $q \leq p$, então f tem codimensão substancial q .*

Demonstração.[prova de (2.7)] Dado um ponto arbitrário $x_0 \in M$. Vamos mostrar que $f(M) \subset T_{x_0}M \oplus L(x_0)$. Seja η um vetor no complemento ortogonal de $L(x_0)$ em $T_{x_0}M^\perp$, e seja η_t o transporte paralelo de η ao longo de uma curva diferenciável arbitrária $\gamma : I \rightarrow M$, através de x_0 . Como L é subfibrado paralelo do fibrado normal, L^\perp também será. Temos então, que $\eta_t \in L(\gamma(t))^\perp, t \in I$. Então, da fórmula de Weingarten, e do fato que $N_1(x) \subset L(x)$, obtemos

$$\bar{\nabla}_{\gamma'} \eta_t = -A_{\eta_t} \gamma' + \nabla_{\gamma'}^\perp \eta_t = 0,$$

em que a primeira parcela é 0 pela definição de N_1 e a segunda é zero pelo fato do transporte ser paralelo no fibrado normal. Então, $\eta_t = \eta$ é constante em \mathbb{R}^{n+p} , e

$$\frac{d}{dt} \langle f(\gamma(t)) - f(x_0), \eta \rangle = \langle df \gamma'(t), \eta \rangle = 0.$$

Concluimos que $\langle f(\gamma(t)) - f(x_0), \eta \rangle = 0$ para $t \in I$. Como a curva γ e o vetor $\eta \in L(x_0)^\perp$ foram escolhidos arbitrariamente, concluimos que $f(M)$ está contido em $T_{x_0}M \oplus L(x_0)$, que é uma subvariedade totalmente geodésica de \mathbb{R}^{n+p} . ■

CAPÍTULO 3

Desigualdades Envolvendo o Laplaciano

Nesse capítulo, demonstramos resultados de classificação de subvariedades do espaço Euclidiano. Os resultados aqui enunciados e demonstrados se encontram no artigo [30].

3.1 Notações e Resultados Preliminares

Neste capítulo, M denotará uma variedade suave (C^∞), compacta, orientada e conexa de dimensão n , sem bordo, e \mathbf{Y} denotará uma imersão suave de M no espaço Euclidiano \mathbb{R}^{n+p} . Denotaremos a forma volume, o volume e o operador Laplaciano em M (a partir de sua estrutura Riemanniana) por dA , A e Δ (respectivamente). Denotamos ainda a segunda forma fundamental, que toma valores no espaço normal, por \mathbf{b} , e sua matriz relativamente a um referencial ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ por (\mathbf{b}_{ij}) . Se \mathbf{u} for um vetor unitário normal em um ponto de M , denotamos a segunda forma fundamental, agora tomando valores reais $\langle \mathbf{b}, \mathbf{u} \rangle$, na direção \mathbf{u} por \mathbf{b}^u . Denotamos, ainda, o quadrado do comprimento de \mathbf{b} , que pode ser calculado como $\sum_{i,j} \langle \mathbf{b}_{ij}, \mathbf{b}_{ij} \rangle$, por $|\mathbf{b}|^2$. Analogamente $|\mathbf{b}^u|^2 = \sum_{i,j} \langle \mathbf{b}_{ij}, \mathbf{u} \rangle \langle \mathbf{b}_{ij}, \mathbf{u} \rangle$. Essas quantidades não dependem do referencial ortonormal escolhido. Se $p=1$, denotaremos o vetor unitário normal a M (determinado pela orientação) por \mathbf{N} , e a função suporte por $\langle \mathbf{Y}, \mathbf{N} \rangle$ por P . A seguir definiremos as curvaturas médias e provaremos as fórmulas de Hsiung-Minkowski em codimensão qualquer.

Definição 3.1. *Se r é um inteiro, $0 \leq r \leq n$, então a r -ésima curvatura média em M é definida por:*

$$\binom{n}{r}^{-1} \frac{1}{r!} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_r}} \epsilon \left(\begin{matrix} i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_r \end{matrix} \right) \langle \mathbf{b}_{i_1 j_1}, \mathbf{b}_{i_2 j_2} \rangle \dots \langle \mathbf{b}_{i_{r-1} j_{r-1}}, \mathbf{b}_{i_r j_r} \rangle$$

se r for par, e por

$$\binom{n}{r}^{-1} \frac{1}{r!} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_r}} \epsilon \left(\begin{matrix} i_1, \dots, i_r \\ j_1, \dots, j_r \end{matrix} \right) \langle \mathbf{b}_{i_1 j_1}, \mathbf{b}_{i_2 j_2} \rangle \cdots \langle \mathbf{b}_{i_{r-2} j_{r-2}}, \mathbf{b}_{i_{r-1} j_{r-1}} \rangle \mathbf{b}_{i_r j_r}$$

se r for ímpar.

Assumimos que $\epsilon \binom{i_1, \dots, i_r}{j_1, \dots, j_r}$ é zero se $\{i_1, \dots, i_r\} \neq \{j_1, \dots, j_r\}$ ou se existem p e q tais que $i_p = i_q$. caso contrário, $\epsilon \binom{i_1, \dots, i_r}{j_1, \dots, j_r}$ é o sinal da permutação $\binom{i_1, \dots, i_r}{j_1, \dots, j_r}$. Cabe observar que, quando r é ímpar, a r -ésima curvatura média é um vetor normal que denotaremos a partir de agora por $\boldsymbol{\sigma}_r$. Em contraste, quando r for par, a r -ésima curvatura média tem valor real. Quando a codimensão p é 1, definimos a curvatura média tomando apenas valores reais, pela regra $\boldsymbol{\sigma}_r = \langle \boldsymbol{\sigma}_r, \mathbf{N} \rangle$. E definimos, ainda, $\boldsymbol{\sigma}_{-1} = -P$ e $\boldsymbol{\sigma}_0 = 1$. Vamos mostrar, agora, as características da curvatura média quando $r = 1, 2$.

Exemplo 3.1. (Codimensão p)

- Quando $r = 1$, temos o vetor curvatura média definido por $\boldsymbol{\sigma}_1 = (\sum_j \mathbf{b}_{jj})/n$, que também denotaremos por H .
- Quando $r = 2$, temos $\boldsymbol{\sigma}_2 = \text{Scal}_g(\text{curvatura escalar})$. Pois, pela equação de Gauss (2.3)

$$\langle R(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i \rangle = \langle \mathbf{b}_{ii}, \mathbf{b}_{jj} \rangle - \langle \mathbf{b}_{ij}, \mathbf{b}_{ji} \rangle, \text{ obtemos}$$

$$\frac{1}{n(n+1)} \sum_{i,j=1}^n \langle R(\mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j) \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_i \rangle = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{i,j=1}^n \langle \mathbf{b}_{ii}, \mathbf{b}_{jj} \rangle - \langle \mathbf{b}_{ij}, \mathbf{b}_{ji} \rangle = \boldsymbol{\sigma}_2.$$

Exemplo 3.2. (Codimensão 1)

- Quando $r = 1$ podemos, escolher a base, $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$, ortonormal e formada por autovetores do operador de Weingarten A_N , que são garantidos pelo teorema espectral. Observamos então que $\boldsymbol{\sigma}_1 = (\lambda_1 + \dots + \lambda_n)/n$, onde os λ_i são os autovalores de A_N . É claro que essa quantidade não depende do referencial escolhido, por ser o traço do operador A_N . Às vezes é conveniente, mesmo em codimensão 1, definirmos o vetor curvatura média como $H = \boldsymbol{\sigma}_1 N$.
- Quando $r = 2$, usando a notação do exemplo acima, temos

$$\text{Scal}_g = \frac{1}{n(n+1)} \sum_{i \neq j} \lambda_i \lambda_j = \boldsymbol{\sigma}_2.$$

Proposição 3.1. (a) Se $p > 1$ e r é inteiro e ímpar, $1 \leq r \leq n$, então

$$\int_M (\langle \mathbf{Y}, \boldsymbol{\sigma}_r \rangle + \boldsymbol{\sigma}_{r-1}) dA = 0 \quad (3.1)$$

3.1 Notações e Resultados Preliminares

Demonstração. Consideremos um campo tangente \mathbf{X} em M cujas componentes $\{\mathbf{X}_1, \dots, \mathbf{X}_n\}$ em relação à um referencial ortonormal $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ são dadas por:

$$\mathbf{X}_j = \frac{1}{(r-1)!} \sum_{\substack{i_1, \dots, i_{r-1}, i \\ j_1, \dots, j_{r-1}}} \epsilon \left(\begin{matrix} i_1, \dots, i_{r-1}, i \\ j_1, \dots, j_{r-1}, j \end{matrix} \right) \langle \mathbf{b}_{i_1 j_1}, \mathbf{b}_{i_2 j_2} \rangle \cdots \langle \mathbf{b}_{i_{r-2} j_{r-2}}, \mathbf{b}_{i_{r-1} j_{r-1}} \rangle \langle \mathbf{Y}, \mathbf{e}_i \rangle$$

O divergente desse campo é um múltiplo do integrando em (3.1). Então, pelo teorema da divergência, ([23], página 357) temos o resultado. Podemos supor, sem perda de generalidade, que o referencial $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ é geodésico no ponto p . Então, usando a simetria da conexão ∇ do espaço ambiente \mathbb{R}^{n+p} em relação à métrica gerada pelo produto interno, concluímos o resultado. Como $\text{div} \mathbf{X} = \sum_{i=1}^n \langle \nabla_{\mathbf{e}_k} \mathbf{X}, \mathbf{e}_k \rangle$, vamos calcular esse divergente por etapas. Primeiro devemos observar que $\langle \nabla_{\mathbf{e}_k} \mathbf{e}_j, \mathbf{e}_k \rangle = \langle \mathbf{b}_{jk}, \mathbf{e}_k \rangle = 0$. Então, basta calcularmos as derivadas nos termos que estão dentro do produto interno. Temos ainda que $\langle \nabla_{\mathbf{e}_k} \mathbf{X}_j, \mathbf{e}_k \rangle = 0$, se $k \neq j$. Assim, basta considerarmos o caso $k = j$. Usando a linearidade da conexão, vamos derivar cada componente do campo separadamente e depois juntaremos os resultados.

1. Pela equação de Codazzi, (2.4) $\nabla_{\mathbf{e}_i}^\perp \mathbf{b}_{jk} = \nabla_{\mathbf{e}_j}^\perp \mathbf{b}_{ik}$. Então,

$$\begin{aligned} & \epsilon \left(\begin{matrix} i_1, \dots, i_{r-1}, i \\ j_1, \dots, j_{r-1}, j \end{matrix} \right) \langle \mathbf{b}_{i_1 j_1}, \mathbf{b}_{i_2 j_2} \rangle \cdots \langle \mathbf{b}_{i_{r-2} j_{r-2}}, \nabla_{\mathbf{e}_j} \mathbf{b}_{i_{r-1} j_{r-1}} \rangle = \\ & \epsilon \left(\begin{matrix} i_1, \dots, i_{r-1}, i \\ j_1, \dots, j_{r-1}, j \end{matrix} \right) \langle \mathbf{b}_{i_1 j_1}, \mathbf{b}_{i_2 j_2} \rangle \cdots \langle \mathbf{b}_{i_{r-2} j_{r-2}}, \nabla_{\mathbf{e}_{j_{r-1}}} \mathbf{b}_{i_{r-1} j} \rangle = \\ & -\epsilon \left(\begin{matrix} i_1, \dots, i_{r-1}, i \\ j_1, \dots, j, j_{r-1} \end{matrix} \right) \langle \mathbf{b}_{i_1 j_1}, \mathbf{b}_{i_2 j_2} \rangle \cdots \langle \mathbf{b}_{i_{r-2} j_{r-2}}, \nabla_{\mathbf{e}_{j_{r-1}}} \mathbf{b}_{i_{r-1} j} \rangle. \end{aligned}$$

Daí, a soma de todas as parcelas que possuem derivadas da segunda forma se anulam por simetria.

2. Temos que $\nabla_{\mathbf{e}_i} \mathbf{Y} = \mathbf{e}_i$. Então, para essas parcelas basta considerarmos $i = j$. Isto nos dá

$$\epsilon \left(\begin{matrix} i_1, \dots, i_{r-1}, i \\ j_1, \dots, j_{r-1}, i \end{matrix} \right) \langle \mathbf{b}_{i_1 j_1}, \mathbf{b}_{i_2 j_2} \rangle \cdots \langle \mathbf{b}_{i_{r-2} j_{r-2}}, \mathbf{b}_{i_{r-1} j_{r-1}} \rangle.$$

Neste mesmo raciocínio, cada termo destes aparecerá $n - r + 1$ vezes, ao longo que variamos os índices k , o que nos dá como soma ao longo de i , $(n - r + 1) \binom{n}{r-1} \sigma_{r-1}$.

3. Temos que $\nabla_{\mathbf{e}_k} \mathbf{e}_j(p) = \mathbf{b}_{kj}(p)$ (o referencial é geodésico no ponto p). Assim, somando os termos onde aparece essa derivada, temos as parcelas do tipo

$$\epsilon \binom{i_1, \dots, i_{r-1}, i}{j_1, \dots, j_{r-1}, j} \langle \mathbf{b}_{i_1 j_1}, \mathbf{b}_{i_2 j_2} \rangle \cdots \langle \mathbf{b}_{i_{r-2} j_{r-2}}, \mathbf{b}_{i_{r-1} j_{r-1}} \rangle \langle \mathbf{Y}, \mathbf{b}_{ij} \rangle,$$

que somando ao longo de i e j nos dará $r \binom{n}{r} \langle \mathbf{Y}, \boldsymbol{\sigma}_{r-1} \rangle$.

■

(b) Se $p = 1$ e r é um inteiro qualquer, $0 \leq r \leq n$, então

$$\int_M (\langle \mathbf{Y}, \boldsymbol{\sigma}_r \rangle + \boldsymbol{\sigma}_{r-1}) dA = 0 \quad (3.2)$$

Quando $r = 1, 2$, temos as clássicas fórmulas de Minkowski

$$\begin{aligned} \int_M (1 + \langle H, N \rangle) dA &= 0 \\ \int_M (H + Scal_g \langle Y, N \rangle) dA &= 0 \end{aligned}$$

Proposição 3.2. (Princípio do Mínimo) *Se λ_1 é o menor autovalor positivo do operador Laplaciano Δ em M , e se $f : M \rightarrow \mathbb{R}$ é C^1 tal que $\int_M f dA = 0$, então $\int_M |\nabla f|^2 dA \geq \lambda_1 \int_M f^2 dA$. Temos igualdade se $\Delta f = -\lambda_1 f$.*

Demonstração. Veja [16], página 227. ■

Proposição 3.3. *Seja S^{N-1} a esfera unitária no espaço Euclidiano \mathbb{R}^N e seja dX o elemento de volume em S^{N-1} , normalizado, tal que $\int_{S^{N-1}} 1 dX = 1$, e compatível com a orientação dada pelo vetor normal exterior. Então*

$$\int_{S^{N-1}} \langle \mathbf{B}, \mathbf{X} \rangle \langle \mathbf{C}, \mathbf{X} \rangle dX = \frac{1}{N} \langle \mathbf{B}, \mathbf{C} \rangle. \quad (3.3)$$

Demonstração. Tomamos uma base ortonormal arbitrária para o espaço \mathbb{R}^N , $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_N\}$. Escrevendo todos os vetores nessa base temos $\sum_{i,j=1}^N \mathbf{b}_i \mathbf{c}_j \int_{S^{N-1}} \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{X} \rangle \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{X} \rangle dX$, em que \mathbf{c}_i e \mathbf{b}_j são as coordenadas de \mathbf{B} e \mathbf{C} na base \mathbf{e}_i . Analisando cada uma dessas parcelas, temos:

$$\begin{aligned} \int_{S^{N-1}} \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{X} \rangle \langle \mathbf{e}_j, \mathbf{X} \rangle dX &= \int_{S^{N-1}} \mathbf{x}_i \mathbf{x}_j dX \\ &= \int_{S^{N-1}} \langle (0, \dots, \underbrace{\mathbf{x}_j}_{i\text{-ésima coordenada}}, \dots, 0), \mathbf{X} \rangle dX \\ &\stackrel{(*)}{=} \int_{\Omega} \text{div}(0, \dots, \underbrace{\mathbf{x}_j}_{i\text{-ésima coordenada}}, 0) dA \\ &= \delta_{ij} \text{vol}(\Omega) = \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_j \rangle \text{vol}(\Omega). \end{aligned}$$

3.2 Cotas superiores para λ_1

Em que Ω denota a bola unitária em \mathbb{R}^N , dA denota a forma volume em \mathbb{R}^N e em (*) usamos o teorema da divergência. Ainda, pelo teorema da divergência, temos que $vol(\Omega) = \frac{1}{N} \int_{S^{N-1}} 1 dX$. ■

Proposição 3.4. (Desigualdade de Newton) *Se (a_{ij}) é uma matriz simétrica com valores reais, então $\sum_{i,j} a_{ij}^2 \geq 1/n(\sum_i a_{ii})^2$. Mais ainda, temos igualdade se, e somente se, (a_{ij}) é proporcional à matriz identidade.*

Demonstração. Basta que consideremos uma matriz A como um vetor em \mathbb{R}^{n^2} , ordenando suas linhas por exemplo. Então, pela desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos que $\|A\|^2 \|I\|^2 \geq \langle A, I \rangle^2$, em que $A = (a_{ij})$ e I é a matriz identidade. ■

3.2 Cotas superiores para λ_1

Lema 3.1. (Lema principal) *Se $\mathbf{Y} : M \rightarrow \mathbb{R}^{n+p}$ é uma imersão tal que $\int_M \mathbf{Y} dA = 0$, então*

$$nA \geq \int_M |\mathbf{Y}|^2 dA = 0 \quad (3.4)$$

Demonstração. Por $\int_M \mathbf{Y} dA = 0$ queremos dizer que a integral de todas as funções coordenadas da imersão \mathbf{Y} é 0. O que é equivalente a dizer que para todo vetor unitário $\mathbf{X} \in \mathbb{R}^{n+p}$, $\int_M \langle \mathbf{Y}, \mathbf{X} \rangle dA = 0$. Então, usando essa hipótese, a função $f : M \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $f(p) = \langle \mathbf{Y}(p), \mathbf{X} \rangle$, satisfaz as hipóteses do princípio do mínimo (3.2). Logo, temos que:

$$\int_M |\nabla \langle \mathbf{Y}, \mathbf{X} \rangle| dA \geq \lambda_1 \int_M \langle \mathbf{Y}, \mathbf{X} \rangle^2 dA \quad (3.5)$$

Como ∇f é a projeção do vetor \mathbf{X} no espaço tangente à variedade em cada ponto. Logo, se $\{\mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n\}$ é um referencial ortonormal à variedade M , em um ponto p , temos $|\nabla \langle \mathbf{Y}, \mathbf{X} \rangle|^2 = \sum_i \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{X} \rangle^2$. Então, pela proposição (3.3), temos, no ponto p , integrando na hipersfera em função de \mathbf{X} , que :

$$\int_{S^{n+p-1}} |\nabla \langle \mathbf{Y}, \mathbf{X} \rangle|^2 d\mathbf{X} = \sum_i \int_{S^{n+p-1}} \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{X} \rangle^2 d\mathbf{X} = \sum_i \langle \mathbf{e}_i, \mathbf{e}_i \rangle / (n+p) = n/(n+p).$$

Analogamente, ainda em p , temos, pela proposição (3.3), que $\int_M \langle \mathbf{Y}, \mathbf{X} \rangle^2 d\mathbf{X} = |\mathbf{Y}|^2 / (n+p)$. Logo, se integrarmos ambos os lados de (3.5) com respeito a \mathbf{X} na hipersfera S^{n+p-1} e trocarmos a ordem de integração, usando o teorema de Fubini, e multiplicar ambos os lados por $(n+p)$ obteremos (3.4). Igualdade em (3.4) implica, pelo princípio do mínimo (3.2), que para um \mathbf{X} arbitrário, $\Delta \langle \mathbf{Y}, \mathbf{X} \rangle = -\lambda_1 \langle \mathbf{Y}, \mathbf{X} \rangle$. Pelo teorema de Takahashi (2.2), isso implica que \mathbf{Y} imerge M minimamente em uma hipersfera. ■

O próximo resultado é o principal deste capítulo:

Teorema 3.1. (a) Se $p > 1$ e r é inteiro e ímpar, $1 \leq r \leq n$, então

$$nA \int_M |\boldsymbol{\sigma}_r|^2 dA \geq \lambda_1 \left(\int_M \boldsymbol{\sigma}_{r-1} dA \right)^2. \quad (3.6)$$

Se, para algum r , tivermos igualdade em (3.6) e se $\boldsymbol{\sigma}_r$ não for identicamente nulo, então \mathbf{Y} imerge M minimamente em alguma hiperesfera de \mathbb{R}^{n+p} e $\boldsymbol{\sigma}_r$ é paralelo no fibrado normal de M em \mathbb{R}^{n+p} . Em particular, se $r = 1$ e se temos igualdade em (3.6), então \mathbf{Y} imerge M como uma subvariedade mínima de alguma hiperesfera em \mathbb{R}^{n+p} .

(b) Se $p = 1$ e r é um inteiro qualquer, $0 \leq r \leq n$, então

$$nA \int_M |\boldsymbol{\sigma}_r|^2 dA \geq \lambda_1 \left(\int_M \boldsymbol{\sigma}_{r-1} dA \right)^2. \quad (3.7)$$

Temos igualdade em (3.7) para algum r , $0 \leq r \leq n$, se, e somente se, \mathbf{Y} imerge M como uma hiperesfera em \mathbb{R}^{n+1} . Se $n \geq 2$, \mathbf{Y} será um mergulho.

Demonstração. Desde que todas as igualdades que aparecem em (3.6) e (3.7) envolvem apenas derivadas, elas são independentes de escolha de origem. Então, podemos compor a imersão \mathbf{Y} com uma translação $\mathbf{Y} + \mathbf{C}$, em que $\mathbf{C} \in \mathbb{R}^{n+p}$ é tal que $\int_M \mathbf{Y} dA = -\int_M \mathbf{C} dA$. A única expressão que poderia depender da escolha da origem é $\int_M P dA$ (Lembre-se que $\boldsymbol{\sigma}_{-1} = -P$). Mas isso não ocorre, pois se $P' = \langle \mathbf{Y} + \mathbf{C}, \mathbf{N} \rangle = P + \langle \mathbf{C}, \mathbf{N} \rangle$, sabemos, pelo teorema da divergência, que, para uma hipersuperfície compacta sem bordo, $\int_M \mathbf{N} dA = 0$.

Assumindo este fato, podemos aplicar o Lema (3.1), isto é, a desigualdade (3.4) vale. Para provar a parte (a), multiplicamos ambos os lados de (3.4) por $\int_M |\boldsymbol{\sigma}_r|^2 dA$ e obtemos a seguinte cadeia de desigualdades

$$\begin{aligned} nA \int_M |\boldsymbol{\sigma}_r|^2 dA &\geq \lambda_1 \left(\int_M |\mathbf{Y}|^2 dA \right) \left(\int_M |\boldsymbol{\sigma}_r|^2 dA \right) \\ &\stackrel{(*)}{\geq} \lambda_1 \left(\int_M |\mathbf{Y}| |\boldsymbol{\sigma}_r| dA \right)^2 \\ &\stackrel{(**)}{\geq} \lambda_1 \left(\int_M \langle \mathbf{Y}, \boldsymbol{\sigma}_r \rangle dA \right)^2 \\ &\stackrel{(***)}{=} \lambda_1 \left(\int_M \boldsymbol{\sigma}_{r-1} dA \right)^2 \end{aligned} \quad (3.8)$$

em que em (*) usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz em L_2 , em (**) usamos a desigualdade de Cauchy-Schwarz para vetores e em (***) usamos a fórmula de Hsiung-Minkowski (3.1).

Se tivermos igualdade em (3.6), todas as desigualdades que aparecem em (3.9) serão na verdade igualdades. Então teremos que $\boldsymbol{\sigma}_r = C \cdot \mathbf{Y}$ para alguma constante real C . Como por hipótese $\boldsymbol{\sigma}_r$ não é identicamente nulo, devemos, obrigatoriamente, ter $C \neq 0$.

3.2 Cotas superiores para λ_1

Então, como σ_r é um vetor normal, \mathbf{Y} será sempre normal a M . Como $\mathbf{X}(|\mathbf{Y}|^2) = 2\langle \mathbf{Y}, \mathbf{X} \rangle = 0$, $\forall \mathbf{X} \in T_p M$, e como M é conexa isso implica que $|\mathbf{Y}|$ é constante. Portanto, \mathbf{Y} necessariamente deve levar M em alguma hipersfera de \mathbb{R}^{n+p} . Isso também implica que σ_r é paralelo no fibrado normal, pois $\nabla_{\mathbf{X}}^\perp \sigma_r = C \nabla_{\mathbf{X}}^\perp \mathbf{Y} = C(\mathbf{X})^\perp = 0$, $\forall \mathbf{X} \in T_p M$

Vamos agora à demonstração do caso (b). Recordemos que σ_r é sempre um número real. Primeiro observamos que para $r = 0$ a equação (3.7) fica $nA^2 \geq \lambda_1 \left(\int_M -P \, dA \right)^2$. Então, aplicando a desigualdade (3.4) e multiplicando ambos os lados por $\int_M (\sigma_r)^2 \, dA$, vamos observar que, como $|\mathbf{N}| = 1$, $|\sigma_r| = |\sigma_r \mathbf{N}|$. Então, temos uma cadeia de desigualdades análoga à anterior com essa pequena diferença

$$\begin{aligned}
 nA \int_M (\sigma_r)^2 \, dA &\geq \lambda_1 \left(\int_M |\mathbf{Y}|^2 \, dA \right) \left(\int_M (\sigma_r)^2 \, dA \right) \\
 &\geq \lambda_1 \left(\int_M |\mathbf{Y}| |\sigma_r \mathbf{N}| \, dA \right)^2 \\
 &\geq \lambda_1 \left(\int_M \sigma_r \langle \mathbf{Y}, \mathbf{N} \rangle \, dA \right)^2 \\
 &= \lambda_1 \left(\int_M \sigma_{r-1} \, dA \right)^2.
 \end{aligned} \tag{3.9}$$

■

Corolário 3.1.1. *Se $p = 1$ e \mathbf{Y} imerge M como a fronteira de um domínio $D \subset \mathbb{R}^{n+1}$, então $nA^2 \geq \lambda_1(n+1)^2V^2$, em que V é o volume $(n+1)$ dimensional de D . Mais ainda, temos igualdade se, e somente se, D é uma bola.*

Demonstração. Basta aplicarmos a parte (b) do Teorema (3.1) no caso $r = 0$, observando que, pelo Teorema de Stokes, $|\int_M P \, dA| = \int_D (n+1) \, dV = (n+1)V$. ■

O próximo corolário é a desigualdade isoperimétrica, que diz que, de todas as curvas no plano de mesmo comprimento, a que abrange maior área em seu interior é o círculo.

Corolário 3.1.2. *Se, no corolário anterior, assumirmos que $n = 1$, então obtemos a clássica desigualdade isoperimétrica no plano: Se A é o comprimento da fronteira suave do domínio $D \subset \mathbb{R}^2$ e V é a área de D , então $A^2 \geq 4\pi V$. Além disso, vale a igualdade se, e somente se, o domínio é um disco.*

Demonstração. Usando o fato que $nA^2 \geq \lambda_1(n+1)^2V^2$ no (3.1.1), quando $n = 1$. No caso de uma curva fechada de comprimento A o primeiro autovalor pode ser calculado explicitamente através da desigualdade de Wirtinger, que será provada no apêndice A e seu valor é $\lambda_1 = (2\pi/A)^2$. Substituindo esse valor no corolário (3.1.1) obtemos a desigualdade isoperimétrica. ■

Teorema 3.2. Usando a notação estabelecida no início, vale a seguinte desigualdade:

$$\int_M |\mathbf{B}|^2 dA \geq \lambda_1 A. \quad (3.10)$$

Mais ainda, temos igualdade se, e somente se, \mathbf{Y} imerge M como uma hiperesfera em algum subespaço Euclidiano de \mathbb{R}^{n+p} de dimensão $n+1$

Demonstração. Pela desigualdade de Newton (proposição (3.4)), temos que se \mathbf{u} é um vetor unitário e normal a M em um ponto q , então $|\mathbf{B}^{\mathbf{u}}| \geq n\langle \boldsymbol{\sigma}_1, \mathbf{u} \rangle^2$, com igualdade se, e somente se, $\mathbf{B}^{\mathbf{u}}$ é proporcional a identidade, (isso é o mesmo que dizer que M é umbílica na direção \mathbf{u}). Então, fixado o ponto q , tomamos o espaço normal a M , $(T_q M)^\perp$, de dimensão p e integramos ambos os lados da desigualdade em função de $\mathbf{u} \in S^{p-1} \subset (T_q M)^\perp$. Assim, temos pela Proposição (3.3), que $\int_{S^{p-1}} \langle \mathbf{b}_{ij}, \mathbf{u} \rangle^2 d\mathbf{u} = \frac{1}{p} \langle \mathbf{b}_{ij}, \mathbf{b}_{ij} \rangle$ e que $\int_{S^{p-1}} \langle \boldsymbol{\sigma}_1, \mathbf{u} \rangle^2 d\mathbf{u} = \frac{1}{p} \langle \boldsymbol{\sigma}_1, \boldsymbol{\sigma}_1 \rangle$. Então, obtemos a seguinte desigualdade:

$$\int_M |\mathbf{B}|^2 dA \geq \int_M n|\boldsymbol{\sigma}_1|^2 dA \quad (3.11)$$

Que junto com (3.6) (no caso $r=1$) implica (3.10). Mais ainda, se tivermos igualdade em (3.10), devemos ter também igualdade em (3.11). Logo M é totalmente umbílica, ou seja, isso implica que \mathbf{Y} imerge M em alguma hiperesfera de algum subespaço linear de dimensão $(n+1)$ de \mathbb{R}^{n+p} , conforme foi demonstrado em (ref??) ■

Teorema 3.3. Se $\boldsymbol{\sigma}_1$ não for nunca 0, então

$$\int_M |\mathbf{B}^{\mathbf{u}}|^2 dA \geq \lambda_1 A \quad (3.12)$$

Em que $\mathbf{u} = \boldsymbol{\sigma}_1/|\boldsymbol{\sigma}_1|$ é um campo normal unitário na direção de $\boldsymbol{\sigma}_1$. Se tivermos igualdade em (3.12) então \mathbf{Y} imerge M como uma subvariedade mínima de alguma hiperesfera em \mathbb{R}^{n+p}

Demonstração. Pela desigualdade de Newton (proposição (3.4)), temos que $|\mathbf{B}^{\mathbf{u}}| \geq n\langle \boldsymbol{\sigma}_1, \mathbf{u} \rangle^2 \implies |\mathbf{B}^{\mathbf{u}}| \geq n|\boldsymbol{\sigma}_1|^2$ Substituindo o segundo lado da desigualdade pela equação de minkowski (3.1) (para $r=1$) obtemos (3.12), se vale a igualdade temos que \mathbf{Y} imerge M como uma variedade mínima de alguma hiperesfera em \mathbb{R}^{n+p} . Conforme foi provado em (ref??) ■

Teorema 3.4. Suponhamos que para algum r ímpar, $1 \leq r \leq n$, $\boldsymbol{\sigma}_r$ é paralelo e não-nulo no fibrado normal e . Seja $\mathbf{u} = \boldsymbol{\sigma}_r/|\boldsymbol{\sigma}_r|$. Então, temos a seguinte desigualdade:

$$\int_M |\mathbf{B}^{\mathbf{u}}|^2 dA \geq \lambda_1 A \quad (3.13)$$

3.2 Cotas superiores para λ_1

Demonstração. A fórmula de Hsiung-Minkowski (3.1) é independente da escolha de origem, então se substituirmos \mathbf{Y} por $\mathbf{Y} + \mathbf{X}$, em que \mathbf{X} é um vetor unitário em \mathbb{R}^{n+p} , ainda teremos uma fórmula válida. Segue que para todo \mathbf{X} , $\int_M \langle \mathbf{X}, \boldsymbol{\sigma}_r \rangle dA = 0$. Logo, podemos aplicar o princípio do mínimo (Proposição (3.2)), à função $f = \langle \mathbf{X}, \boldsymbol{\sigma}_r \rangle$. Como $\boldsymbol{\sigma}_r$ é paralelo no fibrado normal, tomando um referencial ortonormal $\{ \mathbf{e}_1, \dots, \mathbf{e}_n \}$ temos que:

$$|\nabla f|^2 = |\boldsymbol{\sigma}_r|^2 \sum_{ijk} \langle \mathbf{X}, \mathbf{e}_i \rangle \langle \mathbf{X}, \mathbf{e}_j \rangle \mathbf{b}_{ij}^u \mathbf{b}_{kj}^u.$$

Pois $\mathbf{e}_j(f) = \langle \bar{\nabla}_{\mathbf{e}_j} \mathbf{X}, \boldsymbol{\sigma}_r \rangle + \langle \mathbf{X}, \bar{\nabla}_{\mathbf{e}_j} \boldsymbol{\sigma}_r \rangle = 0 + \langle \mathbf{X}, (\bar{\nabla}_{\mathbf{e}_j} \boldsymbol{\sigma}_r)^\top \rangle$, já que \mathbf{X} é constante e $\boldsymbol{\sigma}_r$ é paralelo. Logo, $\mathbf{e}_j(f) = \sum_i \langle \mathbf{X}, \mathbf{e}_i \rangle \mathbf{b}_{ij}^u |\boldsymbol{\sigma}_r|$. Portanto $(\mathbf{e}_j(f))^2 = \sum_{ik} \langle \mathbf{X}, \mathbf{e}_i \rangle \langle \mathbf{X}, \mathbf{e}_k \rangle \mathbf{b}_{ij}^u \mathbf{b}_{kj}^u |\boldsymbol{\sigma}_r|^2$. Somando ao longo de j , obtemos a equação desejada. Então, temos, pelo princípio do mínimo (Proposição (3.2)), que

$$\int_M |\boldsymbol{\sigma}_r|^2 \left(\sum_{ijk} \langle \mathbf{X}, \mathbf{e}_i \rangle \langle \mathbf{X}, \mathbf{e}_k \rangle \mathbf{b}_{ij}^u \mathbf{b}_{kj}^u \right) dA \geq \lambda_1 \int_M \langle \mathbf{X}, \mathbf{u} \rangle^2 |\boldsymbol{\sigma}_r|^2 dA \quad (3.14)$$

Integrando ambos os lados de (3.14) em relação a variável \mathbf{X} ao longo da esfera S^{n+p-1} e invertendo a ordem das integrais pelo teorema de Fubini, obtemos, pela proposição (3.3), a seguinte desigualdade:

$$\int_M 1/(n+p) |\mathbf{B}^u|^2 |\boldsymbol{\sigma}_r|^2 dA \geq \lambda_1 \int_M 1/(n+p) |\boldsymbol{\sigma}_r|^2 dA$$

Observando que como $\boldsymbol{\sigma}_r$ é paralelo e M é conexa, devemos ter $|\boldsymbol{\sigma}_r|^2$ constante. Cancelando a constante $\frac{|\boldsymbol{\sigma}_r|^2}{(n+p)}$ dos dois lados, obtemos a demonstração. \blacksquare

APÊNDICE A

Desigualdade de Wirtinger

A desigualdade de Wirtinger limita a norma de funções em L^2 pela norma em L^2 da sua derivada. Sua generalização é a conhecida desigualdade de Poincaré. Sua melhor constante é o primeiro autovalor do laplaciano. Usaremos essa desigualdade para calcular o primeiro autovalor do laplaciano em uma curva fechada.

Teorema A.1. *Seja $f(\theta)$ uma função suave por partes com período 2π . E seja \bar{f} a média de f*

$$\bar{f} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \, d\theta.$$

Então

$$\int_0^{2\pi} (f(\theta) - \bar{f})^2 \, d\theta \leq \int_0^{2\pi} (f'(\theta))^2 \, d\theta.$$

vale a igualdade se, e somente se,

$$f(\theta) = \bar{f} + a \cos \theta + b \sin \theta \tag{A.1}$$

para algumas constantes a e b .

Demonstração. A idéia é expressar f e f' em suas respectivas séries de Fourier. Como a sua derivada é limitada e f é contínua, sua série de Fourier converge para todo θ

$$f(\theta) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} \{a_k \cos k\theta + b_k \sin k\theta\}$$

onde,

$$a_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \cos m\theta \, d\theta, \quad b_m = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} f(\theta) \sin m\theta \, d\theta$$

Então $2\bar{f} = a_0$ e como $S = \left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \frac{\sin k\theta}{\sqrt{\pi}}, \frac{\cos k\theta}{\sqrt{\pi}} \right\}$ forma uma base ortonormal do espaço $L^2([0, 2\pi], \mathbb{R})$, vale a identidade de Parseval:

$$\int_0^{2\pi} (f(\theta) - \bar{f})^2 \, d\theta = \pi \sum_{k=1}^{\infty} (a_k^2 + b_k^2) \tag{A.2}$$

Como $f'(\theta)$ é contínua por partes temos que sua expansão em séries de Fourier é, a menos de um conjunto de medida nula, dada por:

$$f'(\theta) = \sum_{k=1}^{\infty} \{-ka_k \operatorname{sen} k\theta + kb_k \operatorname{cos} k\theta\}$$

Então pela desigualdade de Bessel

$$\pi \sum_{k=1}^{\infty} k^2 (a_k^2 + b_k^2) \leq \int_0^{2\pi} (f'(\theta))^2 d\theta. \quad (\text{A.3})$$

Somando ambos os lados de A.3 e A.2

$$\int_0^{2\pi} (f'(\theta))^2 d\theta - \int_0^{2\pi} (f(\theta) - \bar{f})^2 d\theta \geq \pi \sum_{k=1}^{\infty} (k^2 - 1)(a_k^2 + b_k^2) \geq 0$$

Se vale a igualdade, isso implica que para $k \geq 2$, $(k^2 - 1)(a_k^2 + b_k^2) = 0$ então $a_k = b_k = 0$, ou seja, f é da forma A.1

A desigualdade do teorema é a mesma que aparece no princípio do mínimo 3.2, no caso da variedade ser uma curva, pois: Supondo que α esteja parametrizada pelo comprimento de arco e tenha comprimento L , podemos reparametrizá-la por $\alpha(L\theta/2\pi)$, tomando uma função f que satisfaça 3.2 denotando por $f(\theta) = f(\alpha(L\theta/2\pi))$

$$\begin{aligned} \int_0^{2\pi} (f(\theta))^2 d\theta &\leq \int_0^{2\pi} (f'(\theta))^2 d\theta \\ \int_0^{2\pi} (f(\theta))^2 d\theta &\leq \int_0^{2\pi} (\langle \nabla f(\alpha(L\theta/2\pi)), \alpha'(L\theta/2\pi) \rangle L/2\pi)^2 d\theta \\ \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2 \int_0^{2\pi} (f(\theta))^2 d\theta &\leq \int_0^{2\pi} (\langle \nabla f(\alpha(L\theta/2\pi)), \alpha'(L\theta/2\pi) \rangle)^2 d\theta \end{aligned}$$

Essa desigualdade é ótima pois existe uma função que a satisfaz, então temos que $\lambda_1 = \left(\frac{2\pi}{L}\right)^2$ ■

APÊNDICE B

Primeiro Autovalor do Laplaciano na Esfera

$$S^n$$

Teorema B.1. *Seja (M, g) uma n -variedade Riemanniana compacta. Então, o problema de autovalor*

$$-\Delta u = \lambda u \text{ em } M,$$

possui uma quantidade infinita e enumerável de autovalores $\{\lambda_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ que satisfazem

$$0 < \lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \dots,$$

tais que

$$\lambda_k \xrightarrow{k \rightarrow +\infty} +\infty,$$

e autofunções $\{u_k\}$ que constituem um sistema ortonormal completo para $L^2(M)$, isto é,

$$v = \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i u_i,$$

para todo $v \in L^2(M)$. Em particular,

$$\|v\|_{L^2(M)}^2 = \sum_{i=1}^{+\infty} \langle v, u_i \rangle_{L^2(M)}^2.$$

Daqui em diante, um interesse especial será dado ao primeiro autovalor do Laplaciano, λ_1 . Por isso, será apresentada a seguir uma caracterização variacional para λ_1 .

Teorema B.2. *Seja (M, g) uma n -variedade Riemanniana compacta. Então, o primeiro autovalor do Laplaciano λ_1 satisfaz*

$$\lambda_1 = \inf_{\mathcal{H} \setminus \{0\}} \frac{\int_M |\nabla u|^2 dv_g}{\int_M u^2 dv_g},$$

onde

$$\mathcal{H} = \{u \in H^{1,2}(M); \int_M u \, dv_g = 0\}.$$

Demonstração. Veja [16], página 227. ■

Será demonstrado, agora, que o primeiro autovalor do Laplaciano, λ_1 , na esfera Euclidiana, \mathbb{S}^n , é igual a n . Para isso, será utilizado o seguinte teorema:

Teorema B.3. (Lichnerowicz)

Seja (M, g) uma n -variedade Riemanniana compacta. Se a curvatura de Ricci satisfaz $Ric \geq k$, em que $k > 0$, então

$$\lambda_1 \geq \frac{nk}{n-1}.$$

Demonstração. Veja [16], página 229. ■

Tem-se que a curvatura de Ricci na esfera Euclidiana (\mathbb{S}^n, δ) , em que δ é a métrica canônica, é dada por $Ric = (n-1)\delta \geq n-1$. Assim, do teorema de Lichnerowicz conclui-se que

$$\lambda_1 \geq n.$$

Utilizando-se este fato, obtém-se o seguinte teorema:

Teorema B.4. *Seja λ_1 o primeiro autovalor do Laplaciano na esfera (\mathbb{S}^n, δ) , em que δ é a métrica canônica. Então, $\lambda_1 = n$.*

Demonstração. Considere sobre a esfera, \mathbb{S}^n , as coordenadas polares (r, θ) em que $\theta \in \mathbb{S}^{n-1}$, fornecidas pelo seguinte difeomorfismo: $G : (0, \pi) \times \mathbb{S}^{n-1} \rightarrow \mathbb{S}^n \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}^n$, $G(r, \theta) = (\cos(r), \sin(r) \cdot \theta)$. Assim, a métrica δ tem as seguintes expressões:

$$\delta_{rr} = 1, \quad \delta_{r\theta} = 0 \quad \text{e} \quad \delta_{\theta\theta} = \sin^2 r.$$

Para ver isto, note que como $\theta = (\theta_1, \dots, \theta_n) \in \mathbb{S}^{n-1}$ tem-se

$$1 = \theta_1^2 + \dots + \theta_n^2,$$

logo,

$$0 = d(\theta_1^2 + \dots + \theta_n^2) = 2(\theta_1 d\theta_1 + \dots + \theta_n d\theta_n).$$

Segue-se que

$$\begin{aligned} \delta &= dt^2 + \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij} dx^i dx^j \\ &= (d \cos(r))^2 + \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij} d(\sin(r)\theta_i) d(\sin(r)\theta_j) \\ &= \sin^2(r) dr^2 + \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij} (\theta_i \cos(r) dr + \sin(r) d\theta_i) (\theta_j \cos(r) dr + \sin(r) d\theta_j), \end{aligned}$$

fazendo o produto tensorial das 1-formas $d\theta_i$, encontra-se

$$\begin{aligned}
\delta &= \text{sen}^2(r)dr^2 + \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij}\theta_i\theta_j \cos^2(r)dr^2 + \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij}\theta_i \cos(r)\text{sen}(r)drd\theta_j \\
&\quad + \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij}\theta_j \cos(r)\text{sen}(r)d\theta_idr + \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij}\text{sen}^2(r)d\theta_id\theta_j \\
&= \text{sen}^2(r)dr^2 + \cos^2(r)dr^2 \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij}\theta_i\theta_j + \text{sen}^2(r) \sum_{i,j=1}^n \delta_{ij}d\theta_id\theta_j \\
&\quad + \cos(r)\text{sen}(r)dr \sum_{i=1}^n \theta_id\theta_i + \cos(r)\text{sen}(r) \left(\sum_{i=1}^n \theta_id\theta_i \right) dr \\
&= dr^2 + \text{sen}^2(r) \left(d\theta_1^2 + \dots + d\theta_n^2 \right),
\end{aligned}$$

como $(d\theta_1^2 + \dots + d\theta_n^2)$ restrita à \mathbb{S}^{n-1} é exatamente a métrica canônica da mesma, segue-se a afirmação. Portanto, nesta carta local, a métrica de \mathbb{S}^n é representada pela seguinte matriz:

$$\begin{bmatrix}
1 & 0 & \dots & 0 \\
0 & \text{sen}^2(r) & \dots & 0 \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
0 & 0 & \dots & \text{sen}^2(r)
\end{bmatrix}_{n \times n}$$

Escolhendo a função $\varphi(x) = -\cos r$ e usando a fórmula (??) tem-se

$$-\Delta_\delta \varphi = \frac{1}{\text{sen}^{n-1}(r)} n \text{sen}^{n-1}(r) \cos(r) = n \cos r.$$

Portanto, $\lambda_1 = n$, já que $\lambda_1 \geq n$ e n é um autovalor de $-\Delta_\delta$. ■

Referências Bibliográficas

- [1] R. A. Adams - *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1975.
- [2] T. Aubin - *Function de Green et valeurs propres du Laplacien*, J. Math. Pures Appl. 53 (1974) 347-371.
- [3] H. Alencar, M. P. do Carmo - *Hypersurfaces with Constant Mean Curvature in Spheres*, Proc. Amer. Math. Soc. 120, 1994.
- [4] M. Berger - *A Panoramic View of Riemannian Geometry*, Springer, 2003.
- [5] H. Brézis - *Análisis funcional: Teoría y aplicaciones*, Versão Espanhola traduzida por Juan Ramón Esteban, París, Masson, 1983.
- [6] M. P. do Carmo - *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2008.
- [7] M. P. do Carmo - *Geometria Riemanniana*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2008.
- [8] I. Chavel - *Riemannian Geometry: a modern introduction*, Cambridge Tracts in Mathematics, Cambridge University Press, 1993.
- [9] J. Cheeger - *Cheeger, Jeff The relation between the Laplacian and the diameter for manifolds of non-negative curvature*, Arch. Math. (Basel) 19 (1968), 558-560.
- [10] J. Cheeger - *A lower bound for the smallest eigenvalue of the Laplacian*. Problems in analysis (Papers dedicated to Salomon Bochner, 1969), pp. 195-199. Princeton Univ. Press, Princeton, N. J., 1970.
- [11] S. Y. Cheng - *Eigenvalue comparison theorems and its geometric applications*, Math. Z. 143 (1975), no. 3, 289-297.
- [12] M. Dacjzer, At Al - *Submanifolds and Isometric Immersions*, Math. Lec. Series 13, 1990.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [13] G. Faber - *Beweis, dass unter allen homogenen Membranen von gleicher Fläche und gleicher Spannung die kreisförmige den tiefsten Grundton gibt* Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. München, Math.-Phys. Kl. (1923) pp. 169-172
- [14] S. Gallot, D. Hulin, J. Lafontaine - *Riemannian Geometry*, Universitex, Springer-Verlag, 1993.
- [15] D. Gilbarg, N. S. Trudinger - *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Reprint of the 1998 Edition, 2001.
- [16] E. Hebey - *Introduction à l'analyse non linéaire sur les variétés*, Paris: Diderot, 1997.
- [17] C. C. Hsiung - *Some Integral Formulas for Closed Hypersurfaces*, Math. Scand. 2 (1954) 286-294
- [18]
- [19] J. Jost - *Riemannian Geometry and Geometric Analysis*, Universitex, Springer-Verlag, 1995.
- [20] E. Krahn - *Über eine von Rayleigh formulierte Minimaleigenschaft des Kreises.* (German) Math. Ann. 94 (1925), no. 1, 97-100,
- [21] E. Krahn - *Berechnung der zweiten Näherung der kompressiblen Strömung um ein Profil nach Janzen-Rayleigh.* (German) Luftfahrtforschung 20, (1943). 147-151.
- [22] S. Lang - *Introduction to Differentiable Manifolds*, New York: Springer-Verlag, 2002.
- [23] J. M. Lee - *Introduction to Smooth Manifolds*, New York: Springer-Verlag, 2003.
- [24] J. M. Lee - *Riemannian Manifolds: An Introduction to Curvature*, New York: Springer-Verlag, 1997.
- [25] P. F. Leung - *An Estimate on the Ricci Curvature of a Submanifold and some Applications*, Proc. Amer. Math Soc. 114, 1992.
- [26] A. Lichnerowicz - *Géométrie des groupes de transformations.* (French) Travaux et Recherches Mathématiques, III. Dunod, Paris 1958.
- [27] E. L. Lima - *Curso de Análise*, Rio de Janeiro: Instituto de Matemática Pura e Aplicada, 2008, Volume 2.

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

- [28] P. Petersen - *Riemannian Geometry*, Graduate Texts in Mathematics, Vol. 171, Springer-Verlag, 1998.
- [29] G. Pólya, G. Szegő - *Isoperimetric inequalities in mathematical physics*, Ann. of Math. Stud. , 27 , Princeton Univ. Press (1951).
- [30] R. C. Reilly - *On the first eigenvalue of the Laplacian for compact submanifolds of Euclidian space*, Commentarii Mathematici Helvetici 52 (1977), 525-533.
- [31] T. Sakai - *Riemannian Geometry*, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 149, AMS, 1996.
- [32] M. Spivak - *Calculus on Manifolds: A Modern Approach to Classical Theorems of Advanced Calculus*, New York: Addison-Wesley, 1965.
- [33] S. T. Yau - *Isoperimetric constants and the first eigenvalue of a compact Riemannian manifold*, Ann. Sci. École Norm. Sup. (4) 8 (1975), no. 4, 487-507.
- [34] H. Whitney - *Differentiable manifolds*, Annals of Math. **37** (1936), no.2, 645-680.