

Universidade Federal de Minas Gerais  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática



## OS TEOREMAS DE STURM E GEOMETRIA SIMPLÉTICA

DISSERTAÇÃO DE MESTRADO

Vitor Luiz de Almeida

ORIENTADOR: Prof. Dr. Mário Jorge Dias Carneiro

Belo Horizonte  
Fevereiro de 2012

# OS TEOREMAS DE STURM E GEOMETRIA SIMPLÉTICA

Este exemplar corresponde à redação final da dissertação defendida por **Vitor Luiz de Almeida**.

Belo Horizonte, 24 de fevereiro de 2012.

---

Prof. Dr. **Mário Jorge Dias Carneiro**.

*Orientador*

Banca examinadora:

Prof. Dr. Mário Jorge Dias Carneiro.

Prof. Dr. Alberto Berly Sarmiento.

Prof. Dr. Heleno da Silva Cunha.

Prof. Dr. José Antônio G. Miranda.

Dissertação submetida à banca examinadora, designada pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais (UFMG), como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Matemática.

*Dedico à minha família, em especial, aos meus pais.*

# Agradecimentos

Agradeço, primeiramente, à DEUS pelo dom da vida.

À minha família, em especial, aos meus pais Silene e Alberto, pelo apoio e amor incondicionais.

Aos grandes amigos, pela força e torcida.

Ao Prof. Mário Jorge pela oportunidade, dedicação, orientação e paciência.

Aos membros da banca examinadora pelas enormes contribuições.

Ao corpo docente da pós-graduação do DMAT - UFMG pelos ensinamentos, em particular, aos professores Gastão e Jussara pela orientação acadêmica.

Aos mestres do DEMAT - UFOP, em particular, os professores Érica, Sebastião, Jamil e Paulo pelo incentivo, ainda durante minha graduação, em dar continuidade aos meus estudos em nível de Mestrado.

Aos amigos e colegas da Matemática (UFMG e UFOP) pelo companheirismo. Em especial, à Monique e Luiz, grandes companheiros de estudo durante esses dois anos.

À Fatinha e Gislene, minhas eternas professoras.

Por último, e não menos importante, à CAPES pelo auxílio financeiro.

## Resumo

Estudamos sistemas de equações diferenciais não-autônomos da forma  $(B(t)x)' = -A(t)x$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , em que as matrizes  $A(t)$  e  $B(t)$  são simétricas para todo  $t$  real, identificando-os com sistemas hamiltonianos equivalentes em  $\mathbb{R}^{2n}$ . Foram dadas propriedades topológicas e geométricas da grassmaniana lagrangiana  $\Lambda(n)$  e de seus estratos. A orientação transversal do estrato de codimensão mínima  $\Lambda^1(\alpha)$  permitiu-nos definir o índice de Maslov. Com o auxílio da Geometria Simplética e Topologia Algébrica, obtivemos generalizações dos teoremas clássicos de Sturm (teoremas da separação e da comparação e suas consequências) para o caso  $n$ -dimensional.

**Palavras-chave:** sistemas hamiltonianos, grassmaniana lagrangiana, índice de Maslov, teoremas de Sturm.

## Abstract

We studied systems of non-autonomous ordinary differential equations of the form  $(B(t)x')' = -A(t)x$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , in which the matrices  $A(t)$  e  $B(t)$  are symmetric for all  $t$  in reals, identifying them with equivalent hamiltonian systems in  $\mathbb{R}^{2n}$ . We'd given topological and geometrical properties of Grassmanian Lagrangian  $\Lambda(n)$  and their trains. The transversal orientation of the minimal codimension train  $\Lambda^1(\alpha)$  allowed us to define the Maslov's index. With help of the Symplectic Geometry and Algebraic Topology, we'd get generalizations of the Sturm classical theorems (comparison and separation theorems and their consequences) for  $n$ -dimensional case.

**Keywords:** hamiltonian systems, grassmanian lagrangian, Maslov's index, Sturm's theorems.

# Sumário

Convenções e Simbologias Adotadas	4
Introdução	7
<b>1 Resultados Preliminares</b>	<b>12</b>
1.1 Noções básicas de Álgebra Linear Simplética . . . . .	12
1.2 Sistemas Hamiltonianos . . . . .	16
1.2.1 Ações e fórmulas da primeira e segunda variações . . . . .	17
1.2.2 Funções hamiltonianas . . . . .	21
1.3 Geodésicas minimizantes em superfícies regulares . . . . .	25
1.3.1 Definições básicas . . . . .	25
1.3.2 O teorema de Jacobi . . . . .	28
<b>2 Propriedades gerais da Grassmaniana Lagrangiana <math>\Lambda(n)</math></b>	<b>32</b>
2.1 Geometria da Grassmaniana Lagrangiana $\Lambda(n)$ . . . . .	33
2.1.1 Definições e resultados gerais . . . . .	33

2.1.2	$\Lambda(n)$ como espaço homogêneo . . . . .	38
2.2	Orientação transversal de $\Lambda^1(\alpha)$ . . . . .	41
2.3	Caminhos Lagrangianos e o índice de Maslov . . . . .	44
2.3.1	Breves noções sobre fibrações e grupos de homologia . . . . .	50
2.3.2	O índice de Maslov e Homologia . . . . .	54
2.3.3	Caso particular: hamiltoniano linear . . . . .	63
2.4	Exemplo: a Grassmaniana Lagrangiana $\Lambda(2)$ . . . . .	68
<b>3</b>	<b>Generalizações dos Teoremas de Sturm</b>	<b>85</b>
3.1	Formas quadráticas no $\mathbb{R}^n$ . . . . .	85
3.2	Análogos simpléticos dos Teoremas de Sturm . . . . .	93
3.2.1	O teorema da não-oscilação . . . . .	95
3.2.2	O teorema da separação e suas consequências . . . . .	97
3.2.3	O teorema da comparação e suas consequências . . . . .	101
3.3	Fluxos geodésicos e campos de Jacobi . . . . .	106
	<b>Considerações Finais</b>	<b>112</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>113</b>

# Convenções e Simbologias Adotadas

Com o intuito de minimizar a repetição de fatos que aparecerão frequentemente ao longo de todo o texto e evitar possíveis confusões de notação, criamos este tópico que reúne as convenções e simbologias adotadas:

- $\mathbb{R}^{2n}$  denotará o espaço euclidiano  $2n$ -dimensional;
- $\mathbb{C}\mathbb{P}^n$  denotará o espaço projetivo complexo  $n$ -dimensional;
- $\mathbb{R}\mathbb{P}^n := \mathbb{S}^n / \sim$  denotará o espaço projetivo real;
- $\mathbb{S}^n$  denotará a esfera unitária  $n$ -dimensional. Em particular, para  $n = 1$ , representará o grupo multiplicativo dos números complexos de módulo 1 e, para  $n = 3$ , representará o grupo multiplicativo dos quatérnios de módulo 1;
- $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_{n \times n} \\ I_{n \times n} & 0 \end{pmatrix}$  é a estrutura complexa padrão do  $\mathbb{R}^{2n}$ ;
- Em geral,  $\alpha$  representará o  $p$ -plano (plano vertical) e  $\beta$  representará o  $q$ -plano (plano horizontal);
- $T_p M$  denotará o espaço tangente a variedade  $M$  no ponto  $p$ ;
- $TM$  representará o fibrado tangente da variedade  $M$ ;
- $T^*M$  representará o fibrado cotangente da variedade  $M$ ;
- $df(x)$  representará a derivada da aplicação  $f$  no ponto  $x$ ;
- $\mathcal{F}[a, b]$  representará o espaço dos caminhos absolutamente contínuos em  $[a, b]$ ;
- $\mathcal{L}$  representará a transformada de Legendre;

- $X_H$  representará o campo de vetores hamiltoniano associado à função hamiltoniana  $H$ ;
- $\phi_t^{X_H}$  ou  $\phi_t^H$  denotará o fluxo associado ao campo de vetores  $X_H$ ;
- $\phi_{\tau-t}^H$  denotará o fluxo associado ao campo de vetores  $X_H$ , calculado do tempo  $\tau$  ao tempo  $t$ ;
- $\nabla$  representará o operador gradiente;
- $\wedge$  denotará tanto a diferenciação exterior quanto o produto vetorial de dois vetores;
- $\frac{D}{ds}v(s)$  representará a derivada covariante do campo de vetores  $v(s)$ ;
- $\|\cdot\|$  representará a norma usual do  $\mathbb{R}^n$ ;
- $G_k(n)$  representará a grassmaniana dos espaços  $k$ -dimensionais do  $\mathbb{R}^n$ ;
- $\Lambda(n)$  representará a grassmaniana lagrangiana do espaço vetorial simplético  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ ;
- $\Lambda^k(\alpha)$  representará o estrato dos planos lagrangianos de  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$  cuja intersecção com o plano lagrangiano  $\alpha$  é  $k$ -dimensional;
- $U(n)$  representará o grupo das matrizes unitárias de ordem  $n$ ;
- $SU(n)$  representará o grupo especial das matrizes unitárias de ordem  $n$ ;
- $O(n)$  representará o grupo ortogonal das matrizes de ordem  $n$ ;
- $SO(n)$  representará o grupo especial ortogonal das matrizes de ordem  $n$ ;
- $A^t$  denotará a matriz transposta da matriz  $A$ ;
- $A^*$  denotará a matriz adjunta da matriz  $A$ ;
- $M_n(\mathbb{K})$  denotará o conjunto das matrizes de ordem  $n$  com entradas no corpo  $\mathbb{K}$ ;

- $Sp(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$  representará o grupo simplético do espaço vetorial simplético  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ ;
- $G_m$  denotará o grupo de isotropia do elemento  $m \in M$ ;
- $G(m)$  denotará a órbita do elemento  $m \in M$ ;
- $\mu_\alpha([\cdot])$  ou  $\mu(\cdot, \alpha)$  representará o índice de Maslov de um plano lagrangiano em relação ao plano lagrangiano  $\alpha$ ;
- $H_n(X)$  representará o  $n$ -ésimo grupo de homologia do espaço topológico  $X$ ;
- $H_n(X, A)$  representará o  $n$ -ésimo grupo de homologia do par  $(X, A)$ ;

# Introdução

Problemas de diversas áreas do conhecimento como, por exemplo, da Física, Biologia e Economia são modelados por equações diferenciais. Além disso, vários problemas da própria matemática são modelados ou se reduzem a equações diferenciais.

O estudo das equações diferenciais iniciou-se no final do século XVII através dos métodos do Cálculo Diferencial e Integral desenvolvidos por Newton e Leibniz, sendo que, em meados do século XVIII, o tema “Equações Diferenciais” tornou-se, de fato, um ramo da Matemática. Inicialmente, o que se almejava era a busca de soluções de EDO's, essencialmente, através de métodos analíticos.

No século XIX começou-se a estudar questões relativas a existência e unicidade de soluções satisfazendo a determinados dados iniciais. Ainda nesse século, com o desenvolvimento da Análise Matemática, houve a revisão e reformulação dos conceitos de limites, derivadas, integrais, convergência de séries (numéricas ou de funções) e de outros processos infinitos definidos em termos aritméticos, sendo esses definidos e tratados com maior rigor.

Dentro da moderna teoria de equações diferenciais ordinárias escalares, chamamos de equação de Sturm-Liouville uma equação diferencial real de 2ª ordem da forma  $\frac{d}{dx} \left( p(x) \frac{dy}{dx} \right) + q(x)y = \lambda r(x)y$ , satisfazendo as condições de contorno  $a_1y(a) + b_1y(b) = 0$  e  $a_2y'(a) + b_2y'(b) = 0$ , com  $a_i^2 + b_i^2 \neq 0$ , em que as funções  $p$ ,  $p'$ ,  $q$  e  $r$  são contínuas no intervalo  $[a, b]$  e, além disso,  $p(x) > 0$  e  $r(x) > 0$ , nesse mesmo intervalo. Determinar os valores do parâmetro  $\lambda$ , tais que a equação de Sturm-Liouville admite solução não-trivial, constitui os chamados “Problemas de Sturm-Liouville regulares”. Quando alguma das hipóteses anteriores não é verificada, eles são denominados singulares.

Originalmente, no período de 1836 a 1837, Jacques Charles François Sturm

(1803 – 1855) e Joseph Liouville (1809 – 1892) publicaram uma série de artigos sobre equações diferenciais de 2ª ordem envolvendo problemas de valores de contorno, em especial, tratando dos problemas ditos regulares. Esses trabalhos abordavam problemas de equações diferenciais ordinárias (lineares e não-lineares) e Análise em geral. Além disso, eles desencadearam uma série de desenvolvimentos que culminaram, no início do século XX, ao surgimento de uma nova e importante área da Matemática: a Análise Funcional.

Sturm e Liouville foram os primeiros a perceberem a necessidade de encontrar propriedades das soluções diretamente da equação, quando não se era possível obtê-las analiticamente. Desde então, diversos artigos em Matemática, Física e Engenharias, por exemplo, vem sendo publicados sobre esse assunto.

Nos dois últimos séculos, principalmente no estudo de equações diferenciais parciais, desenvolveram-se diversos métodos que permitem a obtenção de soluções para tais equações, podendo destacar dentre estes, o método da separação de variáveis, em que a EDP é substituída por um conjunto de equações diferenciais ordinárias satisfazendo determinadas condições iniciais e de contorno. Nessa situação, os problemas de Sturm-Liouville aparecem naturalmente.

Segundo [20], em 1910, Hermann Weyl publicou um dos artigos mais citados em Análise Matemática, tratando de problemas de Sturm-Liouville singulares. Além disso, como consequência do desenvolvimento da Mecânica Quântica nas décadas de 20 e 30, da prova do teorema espectral geral para operadores auto-adjuntos em espaços de Hilbert realizada por Neumann e Stone e, finalizando com o trabalho fundamental de Titchmarsh, desenvolveram-se as investigações acerca da teoria espectral para operadores de Sturm-Liouville.

Os artigos [13] e [14], de Morse, e [15] e [9], de Lidskii e Arnold, respectivamente, forneceram as primeiras versões simpléticas, no caso real, da teoria de Sturm, enquanto os artigos [17] e [16], de Bott e Edwards, nessa ordem, se dedicaram ao caso hermitiano.

Na teoria clássica de Sturm-Liouville, os teoremas da separação e da comparação

descrevem a rotação de uma reta no plano de fase da equação. De modo superficial, na versão simplética desses teoremas, trocamos retas por planos lagrangianos e os instantes de intersecção com uma reta dada por momentos de não-transversalidade com um plano dado (em geral, o vertical). Esses momentos de não-transversalidade são calculados através do índice de Maslov, que indica quantas vezes uma curva sobre a Grassmaniana Lagrangiana intersecta o estrato do plano vertical.

Pretendemos estudar sistemas de equações diferenciais não-autônomos da forma  $(B(t)x)′ = A(t)x$ , em que as matrizes  $A(t)$  e  $B(t)$  são simétricas para todo  $t$  real, e, com o auxílio da Geometria Simplética, obtermos generalizações dos teoremas clássicos de Sturm (teoremas da separação e da comparação e suas consequências) para o caso  $n$ -dimensional.

Tais sistemas de equações, sob certas hipóteses, são equivalentes ao sistema hamiltoniano  $\begin{cases} \dot{q} = [B(t)]^{-1}p \\ \dot{p} = -A(t)q \end{cases}$ , induzido pela função hamiltoniana (que depende do tempo)  $H(q, p, t) = \frac{1}{2}\langle [B(t)]^{-1}p, p \rangle + \frac{1}{2}\langle A(t)q, q \rangle$ . Novamente, as geodésicas nos mostram a importância de estudos dessa natureza. Elas desempenham um papel importante dentro da Geometria. Em particular, no estudo do fluxo geodésico em uma superfície completa  $S \subseteq \mathbb{R}^3$ , obtemos a função hamiltoniana  $H(q, p, t) = \frac{1}{2}\langle p, p \rangle + \frac{K(t)}{2}\langle q, q \rangle$ , em que  $K(t)$  representa a curva guassiana da superfície  $S$  no ponto  $\gamma(t)$ . Em geral, principalmente na mecânica, as geodésicas são interpretadas como trajetórias que minimizam energia e, localmente, são soluções do problema variacional envolvendo o comprimento de arco sendo, portanto, dentre todas as curvas que ligam dois pontos suficientemente próximos, a curva que realiza a menor distância entre eles.

A dissertação baseia-se no artigo “Sturms Theorems and Symplectic Geometry”, de V.I. Arnol’d (1985) e está organizada em três capítulos. No primeiro capítulo, intitulado “Resultados preliminares”, apresentamos algumas noções básicas de Cálculo Variacional e Geometria Simplética destacando-se, dentro dessa última, os sistemas Hamiltonianos.

Para nossos interesses, eles serão obtidos de Lagrangianos (de classe  $C^r$ ,  $r \geq 3$ , estritamente convexos e superlineares) através da transformada de Legendre, via transformada de Fenchel. As geodésicas minimizantes em superfícies ilustram e fornecem um exemplo interessante sobre essa teoria. No segundo capítulo, intitulado “Propriedades gerais da Grassmaniana Lagrangiana”, apresentamos cartas locais para  $\Lambda(n)$ , mostrando que a mesma é uma subvariedade mergulhada de  $G_{2n}(n)$ . Além disso, identificamo-na (via difeomorfismo) com  $U(n)/O(n)$ , donde concluimos que ela é uma variedade homogênea, compacta e conexa. Por fim, a orientação transversal de  $\Lambda^1(\alpha)$  permitiu-nos definir o índice (de Maslov), que é invariante por symplectomorfismos e homotopias, para curvas sobre  $\Lambda(n)$ , cujos pontos extremais pertencem ao estrato  $\Lambda^0(\alpha)$ . Tal índice fornece o número de intersecções (orientadas) da curva com o estrato. Finalizando, descrevemos, detalhadamente, a fibração de Hopf. Ela é umas das ferramentas utilizadas para mostrar que a fibração  $det^2 : \Lambda(2) \rightarrow \mathbb{S}^1$  é não-trivial, com fibra típica difeomorfa a  $\mathbb{S}^2$ . No último capítulo, intitulado “Generalizações dos Teoremas de Sturm”, iniciamos apresentando alguns resultados acerca de formas quadráticas no  $\mathbb{R}^n$ . Em seguida, fizemos um paralelo entre os resultados clássicos da teoria de Sturm e suas versões simpléticas, apresentando as demonstrações desses últimos. Em essência, os principais resultados a serem apresentados são, respectivamente:

**Teorema 0.1.** *(Teorema dos zeros) Sobre qualquer segmento contendo  $n+1$  momentos de verticalidade de um plano lagrangiano, qualquer outro plano lagrangiano torna-se vertical pelo menos uma vez. Mais ainda, a diferença entre os momentos de verticalidade de dois planos lagrangianos arbitrários, evoluídos sobre o mesmo sistema hamiltoniano, não excede  $n$ .*

**Teorema 0.2.** *(Teorema da Comparação) Se  $H$  e  $H'$  são duas funções hamiltonianas positivas-definidas sobre o plano lagrangiano  $\alpha$  tais que  $H' \geq H$ , então  $\nu(H') \geq \nu(H) - n$ , em que  $\nu(\cdot)$  representa o número de momentos de não-transversalidade*

*de um plano lagrangiano qualquer, evoluído sobre o sistema hamiltoniano correspondente, em relação ao plano lagrangiano  $\alpha$ .*

Por fim, apresentamos as considerações finais desse estudo e as referências bibliográficas utilizadas.

# Capítulo 1

## Resultados Preliminares

Neste capítulo, apresentaremos alguns resultados que serão utilizados ao longo do texto. Na primeira seção serão apresentadas algumas noções básicas de Álgebra Linear Simplética. Em seguida, trabalharemos alguns conceitos e resultados básicos sobre Lagrangianos e Hamiltonianos. Finalizando esse capítulo, é dado o exemplo das Geodésicas.

### 1.1 Noções básicas de Álgebra Linear Simplética

Esta seção é dedicada a dar breves noções sobre espaços vetoriais simpléticos, suas propriedades e teoremas correlatos. Veremos que a forma simplética definida sobre esses espaços permite-nos definir o complemento ortogonal simplético, o qual tem significado diferente do complemento ortogonal da Álgebra Linear clássica. Outra característica dos espaços vetoriais simpléticos é que sempre admitem uma base simplética. O principal resultado a ser enunciado é o Teorema de Darboux, o qual afirma que na vizinhança de qualquer ponto de uma variedade simplética é sempre possível definir um simplectomor-

## 1.1 Noções básicas de Álgebra Linear Simplética

---

fismo com uma vizinhança de  $0 \in \mathbb{R}^{2n}$ .

**Definição 1.1.** *Seja  $V$  um espaço vetorial sobre  $\mathbb{R}$ , com  $\dim V < \infty$ . Considere a aplicação  $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$  com as seguintes propriedades:*

1. (Anti-simetria)  $\omega(u, v) = -\omega(v, u)$ ,  $\forall u, v \in V$ ;
2. (Não - degeneracidade)  $\omega(u, v) = 0$ ,  $\forall v \in V$ ,  $\implies u = 0$ ;
3. (Bilinearidade)  $\omega(a_1u + v, z + a_2w) = a_1\omega(u, z) + a_1a_2\omega(u, w) + \omega(v, z) + a_2\omega(v, w)$ ,  
 $\forall u, v, z, w \in V$ ,  $\forall a_1, a_2 \in \mathbb{R}$ .

Então  $\omega$  é dita uma forma simplética sobre  $V$ . O par  $(V, \omega)$  é chamado espaço vetorial simplético.

**Exemplo 1.1.** *Se  $V = \mathbb{R}^{2n}$  com coordenadas  $(q, p)$ , então  $\omega_0 = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$  é uma forma simplética. Ela é conhecida como forma simplética canônica do  $\mathbb{R}^{2n}$ .*

Dado um espaço vetorial simplético  $(V, \omega)$  e  $W \subseteq V$  subespaço vetorial. Então definimos

$$W^\perp = \{v \in V; \omega(w, v) = 0, \forall w \in W\}$$

como o complemento ortogonal simplético de  $W$  com respeito à forma simplética  $\omega$ . É imediato verificar que  $W^\perp$  é subespaço vetorial de  $V$ .

**Definição 1.2.** *Seja  $W \subseteq V$  subespaço vetorial. Diremos que:*

- $W$  é um subespaço lagrangiano (ou plano lagrangiano) de  $V$  se  $W = W^\perp$ ;
- $W$  é um subespaço isotrópico de  $V$  se  $W \subset W^\perp$ ;

## 1.1 Noções básicas de Álgebra Linear Simplética

---

- $W$  é um subespaço co-isotrópico de  $V$  se  $W^\perp \subset W$ ;
- $W$  é um subespaço simplético de  $V$  se  $W \cap W^\perp = \{0\}$ .

É possível demonstrarmos que  $\dim W^\perp = \dim V - \dim W$ . Como consequência dessa relação, segue que todo espaço vetorial simplético tem dimensão par. Além disso, se  $W$  é um subespaço Lagrangiano de  $V$  é sempre possível tomarmos um subespaço  $\overline{W}$ , também Lagrangiano, tal que  $V = W \oplus \overline{W}$ .

Assim como ocorre na Álgebra Linear Clássica, todo espaço vetorial simplético  $(V, \omega)$  admite uma base. Uma demonstração desse fato pode ser encontrada em [3].

**Definição 1.3.** *Seja  $(V, \omega)$  espaço vetorial simplético de dimensão  $2n$ . Então a base  $\{e_1, \dots, e_n, f_1, \dots, f_n\}$  é dita base simplética canônica de  $V$  se  $\omega(e_i, f_j) = \delta_{ij}$  e  $\omega(e_i, e_j) = \omega(f_i, f_j) = 0$ , em que  $\delta_{ij}$  é o delta de Kronecker.*

Na base canônica simplética, a forma simplética  $\omega$  pode ser representada pela seguinte matriz anti-simétrica de ordem  $2n$ :

$$-J = \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -I_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{pmatrix}$$

**Definição 1.4.** *Diremos que a aplicação linear  $T : (V, \omega) \rightarrow (V, \omega)$  é um simplectomorfismo se  $T$  é bijetiva e, além disso,  $\omega(Tu, Tv) = \omega(u, v)$ ,  $\forall u, v \in V$ , isto é,  $T$  preserva a forma simplética  $\omega$ .*

O conjunto de todos os simplectomorfismos de  $(V, \omega)$  é chamado de Grupo Linear Simplético e será denotado por  $Sp(V, \omega)$ . As matrizes simpléticas podem ser caracterizadas por  $A \in L(\mathbb{R}^{2n})$  tal que  $A^t J A = J$ . Decorre, trivialmente, que todo espaço vetorial simplético é simplectomorfo à  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  para algum  $n \in \mathbb{N}$ .

## 1.1 Noções básicas de Álgebra Linear Simplética

---

Generalizaremos, agora, o conceito de espaço vetorial simplético para variedades suaves quaisquer. Seja, então,  $M$  uma variedade suave e  $\omega$  uma 2-forma sobre ela. Para cada  $p \in M$ , considere a aplicação  $\omega_p : T_pM \times T_pM \rightarrow \mathbb{R}$  que é bilinear, anti-simétrica, não-degenerada e varia continuamente com  $p$ .

**Definição 1.5.** *Diremos que a 2-forma  $\omega$  é simplética se  $d\omega = 0$  e  $\omega_p$  é simplética  $\forall p \in M$ . O par  $(M, \omega)$  é dito variedade simplética. Mais ainda, seja  $N \subseteq M$ , subvariedade imersa. Diremos que  $N$  é subvariedade Lagrangiana (respectivamente, isotrópica) de  $M$  se, para cada  $p \in N$ , o espaço  $T_pN$  é subespaço Lagrangiano (respectivamente, isotrópico) de  $T_pM$ .*

**Exemplo 1.2.** *Segue, imediatamente, da definição anterior que toda curva de uma superfície é uma subvariedade Lagrangiana. Mais geralmente, toda curva numa variedade é uma subvariedade isotrópica.*

Podemos estender, também, a noção de simplectomorfismo para aplicações entre variedades. Sejam  $(M_1, \omega_1)$  e  $(M_2, \omega_2)$  duas variedades simpléticas.

**Definição 1.6.** *Diremos que as variedades  $(M_1, \omega_1)$  e  $(M_2, \omega_2)$  são simplectomorfas, se existe um difeomorfismo  $f : M_1 \rightarrow M_2$  tal que  $f^*\omega_2 = \omega_1$ , isto é,  $\omega_2(df(x)u, df(x)v) = \omega_1(u, v)$ ,  $\forall u, v \in T_xM_1$*

**Exemplo 1.3.** *Sejam  $(M_1, \omega_1)$  e  $(M_2, \omega_2)$  duas variedades simpléticas. Então o difeomorfismo  $f : M_1 \rightarrow M_2$  é um simplectomorfismo se, e somente se, o gráfico de  $f$  é subvariedade lagrangiana de  $M_1 \times M_2$ . Com efeito, denotemos por  $\pi_i : M_1 \times M_2 \rightarrow M_i$  a projeção canônica sobre a variedade  $M_i$  e, observemos que  $\pi_1^*\omega_1 - \pi_2^*\omega_2$  é uma forma simplética sobre  $M_1 \times M_2$ . Seja  $g : M_1 \rightarrow M_1 \times M_2$  dada por  $g(x) = (x, f(x))$ . Denote*

## 1.2 Sistemas Hamiltonianos

---

por  $G$  o gráfico de  $f$ . Então:

$$\begin{aligned}g^*(\pi_1^*\omega_1 - \pi_2^*\omega_2) &= (\pi_1 \circ g)^*\omega_1 - (\pi_2 \circ g)^*\omega_2 \\ &= \omega_1 - f^*\omega_2\end{aligned}$$

Portanto, segue que  $f$  é *simplectomorfismo* se, e somente se,  $(\pi_1^*\omega_1 - \pi_2^*\omega_2)|_G \equiv 0$ , fato que prova o resultado.

Finalizando esta seção, enunciaremos o Teorema de Darboux. Ele nos afirma que se  $U$  é uma pequena vizinhança de um ponto arbitrário de uma variedade simplética, então existe um simplectomorfismo  $f : U \rightarrow \tilde{U}$ ,  $\tilde{U}$  vizinhança de  $0 \in \mathbb{R}^n$ . A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [3] e [4] e utiliza o “truque” de Moser, isto é, a construção de uma família a um parâmetro de simplectomorfismos através da deformação de difeomorfismos da identidade. Em Geometria Simplética, o “truque” de Moser é utilizado para obtenção de muitos resultados sobre a rigidez de estruturas simpléticas.

**Teorema 1.1.** (*Teorema de Darboux*) *Sejam  $(M, \omega)$  uma variedade simplética e  $p \in M$  um ponto arbitrário. Então é possível escolher uma carta coordenada centrada em  $p$ , digamos  $(\mathcal{U}, q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n)$ , tal que  $\omega = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge dp_i$ .*

A carta coordenada mencionada no Teorema 1.1 é comumente chamada, em Geometria Simplética, de carta de Darboux e as coordenadas correspondentes à ela de coordenadas de Darboux.

## 1.2 Sistemas Hamiltonianos

Toda teoria que será apresentada aqui pode ser desenvolvida para uma variedade  $M$  qualquer,  $C^\infty$  e sem bordo. Contudo, restringiremos nossa atenção à  $M = \mathbb{R}^n$ . Para

## 1.2 Sistemas Hamiltonianos

---

este caso, o fibrado tangente é  $TM \simeq \mathbb{R}^{2n}$ . Denotaremos por  $\pi : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$ , definida por  $\pi(x, v) = x$  a projeção canônica do fibrado tangente. Diremos, também, que  $\pi^{-1}(x) = T_x\mathbb{R}^n$  é uma fibra do fibrado tangente.

### 1.2.1 Ações e fórmulas da primeira e segunda variações

**Definição 1.7.** *Seja  $L : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$  uma função contínua.  $L$  é dita ser um lagrangiano de  $\mathbb{R}^n$ . Para nossos propósitos, consideraremos  $L$  de classe  $C^r$ ,  $r \geq 3$ , estritamente convexo nas fibras e superlinear (ver [2]).*

**Observação 1.** *As hipóteses apresentadas na definição 1.7 garantirão uma mudança das coordenadas  $(x, v)$  para as coordenadas  $(q, p)$  através da transformada de Legendre. Na verdade, a transformada de Legendre (via transformada de Fenchel) traduz sistemas Lagrangianos em sistemas Hamiltonianos, já que com tais hipóteses, a transformada de Legendre é um difeomorfismo global. Para maiores referências, consultar [2].*

**Definição 1.8.** *Diremos que uma curva  $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$  é absolutamente contínua se  $\forall \varepsilon > 0$  dado,  $\exists \delta > 0$  tal que para cada família  $\{(a_i, b_i), i = 1, \dots, k\}$  de subintervalos de  $[a, b]$ , disjuntos dois a dois, e satisfazendo  $\sum_{i=1}^k (b_i - a_i) < \delta$ , tivermos que*

$$\sum_{i=1}^k d(\gamma(b_i), \gamma(a_i)) < \varepsilon.$$

Consideraremos, agora, um problema variacional em  $\mathbb{R}^n$ . Seja  $L : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}$  um Lagrangiano de  $\mathbb{R}^n$  e  $\gamma : [a, b] \longrightarrow \mathbb{R}^n$  uma curva absolutamente contínua. Defina o

## 1.2 Sistemas Hamiltonianos

---

funcional

$$A_L(\gamma) = \int_a^b L(\gamma(t), \gamma'(t)) dt$$

em que a curva  $\gamma$  satisfaz as condições de contorno  $\gamma(a) = A$  e  $\gamma(b) = B$ , com  $A, B \in \mathbb{R}^n$  fixados.

**Definição 1.9.** *O funcional  $A_L$  definido anteriormente é chamado de ação de  $\gamma$  para  $L$ .*

Se denotarmos  $\gamma(t) = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$  então podemos reescrever a ação de  $\gamma$  para  $L$  da seguinte maneira:

$$A_L(\gamma) = \int_a^b L(\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t), \gamma_1'(t), \dots, \gamma_n'(t)) dt$$

De agora em diante, suporemos que a curva  $\gamma$  é de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ . Nosso objetivo central é encontrar condições necessárias para a existência de um extremo desse funcional. Para isto, consideraremos uma variação  $C^r$  de  $\gamma$ , isto é, uma aplicação  $\Gamma : [a, b] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}^n$  de classe  $C^r$ , com  $\varepsilon > 0$ , tal que  $\Gamma(t, 0) = \gamma(t)$ ,  $\forall t \in [a, b]$ . No nosso caso, consideraremos a aplicação  $\Gamma(t, s) = \gamma(t) + s\varphi(t)$ , com  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ . Nesse contexto,  $\varphi$  é dita variação admissível de  $\gamma$ .

**Definição 1.10.** *Uma curva  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  é dita um extremal de  $A_L$  se  $\frac{d}{ds} A_L(\Gamma(t, s))|_{s=0} = 0$ , para toda  $\varphi$  satisfazendo  $\varphi(a) = \varphi(b) = 0$ . No caso particular em que  $A_L(\gamma) \leq A_L(\psi)$ , para toda curva  $\psi : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  absolutamente contínua, diremos que  $\gamma$  é uma curva minimizante.*

Queremos, agora, obter condições que nos permitam identificar os possíveis “candidatos” a minimizarem o funcional  $A_L$ . A idéia central é construir uma função  $g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $g(s) = A_L(\Gamma(t, s))$ ,  $|s| < 1$ ,  $g \in C^2, \forall \psi \in \mathcal{F}$ , e aplicar os resultados clássicos de Cálculo Diferencial e Integral para extremos de uma função de uma variável. É fácil

## 1.2 Sistemas Hamiltonianos

---

notar que, se  $\gamma$  é uma curva minimizante para  $A_L$ , então  $g$  tem um mínimo local em  $s = 0$ . Segue daí que,  $g'(0) = 0$  e  $g''(0) \geq 0$  são condições necessárias para que  $\gamma$  seja um mínimo do funcional  $A_L$ . Cálculos simples mostram que nós temos:

$$g'(0) = \frac{d}{ds} A_L(\Gamma(t, s))|_{s=0} = \int_a^b \left( \left\langle \frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v}, \varphi \right\rangle \right) dt \quad (1.1)$$

e

$$g''(0) = \frac{d^2}{ds^2} A_L(\Gamma(t, s))|_{s=0} = \int_a^b \left( \langle L_{xx} \varphi, \varphi \rangle + \langle L_{xv} \varphi, \varphi' \rangle + \langle L_{vv} \varphi', \varphi' \rangle \right) dx, \quad (1.2)$$

em que,  $x = (\gamma_1(t), \dots, \gamma_n(t))$ ,  $v = (\gamma'_1(t), \dots, \gamma'_n(t))$ ,  $\varphi(t) = (\varphi_1(t), \dots, \varphi_n(t))^T$  e  $L_{lk} = \left[ \frac{\partial^2 L}{\partial l_i \partial k_j} \right]_{ij}$  representa a matriz das derivadas parciais em relação as coordenadas  $l$  e  $k$ . Supondo a matriz  $L_{xv}$  simétrica e integrando o termo central da equação (1.2), obtemos a seguinte igualdade:

$$g''(0) = \int_a^b \left( \langle P \varphi', \varphi' \rangle + \langle Q \varphi, \varphi \rangle \right) dx, \quad (1.3)$$

em que  $P = L_{vv}$  e  $Q = L_{xx} - \frac{d}{dt} L_{xv}$ . Ao integrarmos por partes, a expressão obtida em (1.3), obtemos:

$$g''(0) = \int_a^b \left\langle -\frac{d}{dt} (P \varphi') + Q \varphi, \varphi \right\rangle dx \quad (1.4)$$

**Definição 1.11.** A equação dada por  $\frac{\partial L}{\partial x} - \frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v} = 0$  é chamada Equação de Euler - Lagrange. Já a equação  $-\frac{d}{dt}(P\varphi') + Q\varphi = 0$  é conhecida na literatura como Equação de Jacobi.

Pode-se demonstrar que  $\gamma$  é uma solução da equação de Euler-Lagrange se, e somente se, for um extremal do funcional  $A_L$  (ver [2]). O campo vetorial associado a equação de Jacobi é dito ser um campo de Jacobi.

Suponhamos que  $\gamma$  seja um extremal do funcional  $A_L$ . Usualmente, interpretamos um campo de Jacobi como um campo de vetores ao longo da curva  $\gamma$ . Daí, segue a noção de pontos conjugados.

**Definição 1.12.** Dois pontos  $A$  e  $B$  da curva  $\gamma$  são ditos pontos conjugados, se existe um campo de Jacobi não-nulo que se anula em  $A$  e  $B$ .

**Exemplo 1.4.** Consideremos o problema de determinar a curva que realiza a menor distância entre dois pontos fixados  $A = (a_1, \dots, a_n)$  e  $B = (b_1, \dots, b_n)$  no espaço euclidiano  $n$ -dimensional. Seja  $\gamma : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^n$  um caminho no  $\mathbb{R}^n$  dado por  $\gamma(x) = (\gamma_1(x), \dots, \gamma_n(x))$ . Desejamos minimizar a seguinte ação:

$$A_L(\gamma) = \int_a^b \left( \sum_{i=1}^n (\gamma'_i)^2 \right)^{\frac{1}{2}} dx$$

Logo, a equação de Euler - Lagrange, coordenada a coordenada, neste caso, é dada por:

$$\frac{d}{dt} \frac{\partial L}{\partial v_i} = \frac{v'_i \sum_{j \neq i} v_j^2}{\left[ \sum_{i=1}^n (v_i)^2 \right]^{\frac{3}{2}}} = 0$$

Segue daí que  $\gamma''_i(t) = v'_i(t) = 0$ ,  $\forall i \in \{1, \dots, n\}$ , ou seja,  $\gamma_i(t) = c_i t + d_i$ . Logo,  $\gamma(t) = Ct + D$  é uma reta no  $\mathbb{R}^n$ , em que  $C = (c_1, \dots, c_n)$  e  $D = (d_1, \dots, d_n)$  são de-

terminados de tal forma que  $\gamma(a) = A$  e  $\gamma(b) = B$ . Portanto, se tal problema admite solução, o menor caminho ligando dois pontos será uma reta.

### 1.2.2 Funções hamiltonianas

Consideremos, agora, o fibrado cotangente do  $\mathbb{R}^n$ , isto é,  $T^*\mathbb{R}^n = \{(x, \xi); x \in \mathbb{R}^n \text{ e } \xi \in (T_x\mathbb{R}^n)^*\}$ . Podemos fazer a seguinte identificação:  $T^*\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ . Seja  $\mathcal{L} : T\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow T^*\mathbb{R}^n \simeq \mathbb{R}^{2n}$ , definida por  $\mathcal{L}(x, v) = (x, \frac{\partial L}{\partial v})$ . Denotaremos por  $(q, p) = (x, \frac{\partial L}{\partial v})$  essas novas coordenadas. Na terminologia da Mecânica Clássica,  $p$  é conhecido como momento generalizado. Como estamos supondo que o Lagrangiano é de classe  $C^r$ ,  $r \geq 3$ , estritamente convexo nas fibras e superlinear, é possível demonstrar que a aplicação  $\mathcal{L}$  é um difeomorfismo global entre os fibrados tangente e cotangente. Assim, a mecânica Lagrangiana (campos de Euler-Lagrange) pode ser traduzida, via essa transformação, na mecânica Hamiltoniana que definiremos a seguir. Em outras palavras,  $\mathcal{L}$  conjuga os campos Lagrangiano e Hamiltoniano, constituindo-se, portanto, de uma mudança de coordenadas. Para maiores referências, ver [2].

**Definição 1.13.** *A aplicação  $\mathcal{L}$ , definida acima, é chamada transformada de Legendre associada ao Lagrangiano  $L$ .*

Temos que se  $(\mathcal{U}, q_1, \dots, q_n)$  é uma carta coordenada do  $\mathbb{R}^n$ , em que  $q_i : \mathcal{U} \longrightarrow \mathbb{R}$ , então, dado  $q \in \mathbb{R}^n$ , as diferenciais  $(dq_i)_q$  constituem uma base para o  $(T_q\mathbb{R}^n)^*$ . Consideremos a aplicação  $X : T^*\mathbb{R}^n \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$ , dada por  $X(q, \xi) = (q_1, \dots, q_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$ , em que  $\xi_1, \dots, \xi_n \in \mathbb{R}$  são tais que  $\xi = \sum_{i=1}^n \xi_i (dq_i)_q$ . Então  $(T^*\mathbb{R}^n, x_1, \dots, x_n, \xi_1, \dots, \xi_n)$  é uma carta local do fibrado cotangente do  $\mathbb{R}^n$ .

Sejam, agora,  $\pi : T^*\mathbb{R}^{2n} \longrightarrow \mathbb{R}^n$  e  $d\pi : T_{(q, \xi)}(T^*\mathbb{R}^n) \longrightarrow T_q\mathbb{R}^n$ , a projeção canônica do fibrado cotangente e sua derivada, respectivamente. A forma tautológica, ou 1-forma

## 1.2 Sistemas Hamiltonianos

---

de Liouville é definida, sem o auxílio de coordenadas locais, por  $\alpha_{(q,\xi)} = (d\pi_{(q,\xi)})^*\xi$ , isto é,  $\alpha_{(q,\xi)}(v) = \xi((d\pi_{(q,\xi)})v)$ ,  $\forall v \in T_q\mathbb{R}^n$ . A forma simplética canônica em  $T^*\mathbb{R}^n$  é definida como  $\omega = -d\alpha$  (2-forma fechada e não-degenerada). De forma que, representamos a forma de Liouville e a forma simplética canônica, respectivamente, por  $\alpha = \sum_{i=1}^n \xi_i dq_i$  e

$$\omega = \sum_{i=1}^n dq_i \wedge d\xi_i.$$

Logo, observamos que todo fibrado cotangente possui uma estrutura simplética canônica. Na teoria desenvolvida acima, podemos trocar  $\mathbb{R}^n$  por uma variedade suave  $M$ , com  $\dim M < \infty$ . Assim, existe uma associação natural entre variedades e variedades simpléticas. Mais geralmente, sejam  $M_1$  e  $M_2$  duas variedades  $n$  dimensionais e  $T^*M_1$  e  $T^*M_2$  seus fibrados contangentes, respectivamente. Se  $f : M_1 \rightarrow M_2$  é difeomorfismo, então o levantamento de  $f$ ,  $f_{\sharp} : T^*M_1 \rightarrow T^*M_2$ , definido por  $f_{\sharp}(q_1, \xi_1) = (q_2, \xi_2)$ , em que  $q_2 = f(q_1)$  e  $\xi_1 = (df_{q_1})^*\xi_2$ , preserva a forma de Liouville. Como consequência imediata, segue que  $f_{\sharp}$  é um symplectomorfismo.

**Definição 1.14.** *Sejam  $X$  um campo vetorial numa variedade  $M$  e  $\omega$  uma  $k$ -forma diferencial. O produto interior de  $X$  por  $\omega$ , denotado por  $i_X\omega$ , é uma  $(k-1)$ -forma diferencial definida por  $(i_X\omega)(p)(\xi_1, \dots, \xi_{n-1}) = \omega(X(p), \xi_1, \dots, \xi_{n-1})$ , em que  $p \in M$  e  $\xi_1, \dots, \xi_{n-1} \in T_pM$ .*

Como vimos,  $(T^*\mathbb{R}^n, \omega)$  é uma variedade simplética. Seja  $H : T^*\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  uma função suave. Mostraremos que a não-degeneracidade da forma simplética  $\omega$  acarreta na existência de um único campo vetorial  $X_H$  em  $T^*\mathbb{R}^n$  satisfazendo  $i_{X_H}\omega = dH$ .

Para provarmos a afirmação anterior, é suficiente demonstrarmos que existe um isomorfismo entre o espaço  $\mathcal{X}$  dos campos vetoriais de classe  $C^r$ ,  $r \geq 1$ , e o espaço das 1-formas, que denotaremos por  $\mathcal{W}$ . Seja, então,  $T : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{W}$ , definida por  $T(X) = i_X\omega$ ,  $\omega$  forma simplética. Afirmamos que  $T$  é linear. Com efeito,  $\forall \alpha \in \mathbb{R}$ ,  $\forall p \in M$  e  $\forall \xi_1 \in T_pM$ , temos:

$$\begin{aligned}
 T(X + \alpha Y)(p)(\xi_1) &= (i_{(X+\alpha Y)}\omega)(p)(\xi_1) \\
 &= \omega((X + \alpha Y)(p), \xi_1) \\
 &= \omega(X(p), \xi_1) + \alpha\omega(Y(p), \xi_1) \\
 &= T(X)(p)(\xi_1) + \alpha T(Y)(p)(\xi_1) \\
 &= (T(X) + \alpha T(Y))(p)(\xi_1),
 \end{aligned}$$

provando que  $T$  é linear. Supondo  $T(X) = T(Y)$ , temos que,  $\omega(X, \xi_1) = \omega(Y, \xi_1)$ , isto é,  $\omega(X - Y, \xi_1) = 0$ . A não-degeneracidade de  $\omega$  garante que  $X = Y$ , provando a injetividade de  $T$ . A sobrejetividade segue do teorema do núcleo e da imagem.

O campo vetorial  $X_H$  é simplético, isto é, o fluxo associado a ele  $(\phi_t^{X_H})$  preserva a forma simplética  $\omega$ . De fato, usando a definição de derivada de Lie e a fórmula de Cartan, chegamos à:

$$\frac{d}{dt}(\phi_t^{X_H})^*\omega = (\phi_t^{X_H})^*\mathcal{L}_{X_H}\omega = (\phi_t^{X_H})^*(di_{X_H}\omega + i_{X_H}d\omega) = (\phi_t^{X_H})^*(d(dH) + i_{X_H}(0)) = 0,$$

ou seja,  $(\phi_t^{X_H})^*\omega = \omega$  já que  $(\phi_0^{X_H})^*\omega = \omega$ .

**Observação 2.** (*Derivada de Lie*) A derivada de Lie de uma  $k$ -forma diferencial  $\omega$  é uma  $k$ -forma diferencial  $\mathcal{L}_{X_H}$  definida por  $\mathcal{L}_{X_H} = \frac{d}{dt}(\phi_t^{X_H})^*\omega \Big|_{t=0}$ .

**Observação 3.** A fórmula de Cartan, ou fórmula da homotopia, é dada por  $di_{X_H} + i_{X_H}d = \mathcal{L}_{X_H}$ .

**Definição 1.15.** O campo vetorial  $X_H$  tal que  $i_{X_H}\omega = dH$ ,  $H \in C^\infty(T^*\mathbb{R}^n)$ , é dito campo vetorial Hamiltoniano com função Hamiltoniana  $H$ .

## 1.2 Sistemas Hamiltonianos

---

O campo Hamiltoniano  $X_H$ , em coordenadas locais, define o seguinte sistema de equações diferenciais ordinárias:

$$\begin{cases} \dot{q} = H_p \\ \dot{p} = -H_q \end{cases}, \quad (1.5)$$

em que  $H_q$  e  $H_p$  representam as derivadas parciais de  $H$  em relação às variáveis  $q = (q_1, \dots, q_n)$  e  $p = (p_1, \dots, p_n)$ . Desta maneira, temos que:

$$X_H = -J\nabla H, \quad \text{em que } J = \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & -I_{n \times n} \\ I_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{pmatrix}.$$

Outra característica dos campos Hamiltonianos é que a função Hamiltoniana é uma integral primeira para  $X_H$ . Uma integral primeira para um campo vetorial  $X$  é uma função que é constante ao longo de  $\phi^{X_H}(t, x)$ , isto é, ao longo das órbitas. Para provarmos a afirmação feita, basta observarmos que:

$$\frac{d}{dt}H(\phi^{X_H}(t, q)) = \frac{d}{dt}H(q(t), p(t)) = H_q\dot{q} + H_p\dot{p} = 0,$$

isto é,  $H(\phi^{X_H}(t, q)) = c$ ,  $c \in \mathbb{R}$ . Como consequência deste fato, segue que as órbitas de  $X_H$  ficam confinadas nos níveis de energia da função Hamiltoniana  $H$ .

No que se segue, estaremos interessados apenas em funções Hamiltonianas da forma:

$$H(q, p) = \sup_{v \in T_q\mathbb{R}^n} \{pv - L(q, v)\} \quad (1.6)$$

Elas são obtidas através da transformada de Legendre (via transformada de Fenchel) das funções Lagrangianas  $L$ .

**Definição 1.16.** *A transformada de Fenchel de uma função  $f : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  é dada por:*

$$f^*(p) = \sup_{x \in \mathbb{R}^n} \{px - f(x)\}$$

Pode-se demonstrar que a transformada de Fenchel de uma função contínua, superlinear e convexa é também superlinear e convexa (consultar [2]). Portanto, de acordo com nossas hipóteses, as funções Hamiltonianas dadas em (1.6) sempre terão tais propriedades.

Finalizando essa seção, definimos a função energia  $E : T\mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$  como  $E(q, v) = L_v(q, v)v - L(q, v)$ . Observemos que  $E = H \circ \mathcal{L}$ , em que  $\mathcal{L}$  é a transformada de Legendre. Por fim, como as curvas extremais  $\gamma$  do funcional  $A_L$  satisfazem as equações de Euler-Lagrange, segue, como consequência imediata, que  $E|_\gamma$  é constante.

## 1.3 Geodésicas minimizantes em superfícies regulares

O que pretendemos nesta seção é exemplificar, no caso de superfícies em  $\mathbb{R}^3$  com a métrica usual, quando uma geodésica  $\gamma$  minimiza a distância entre dois pontos dados  $p$  e  $q$ . Para isto, as geodésicas serão tratadas sob outra perspectiva: como extremais de um determinado funcional. O Teorema de Jacobi, principal resultado dessa seção, estabelece uma equivalência entre a não-existência de pontos conjugados sobre  $\gamma$  e geodésicas minimizantes. Por convenção, a superfície  $S$  será sempre completa e a geodésica  $\gamma$  parametrizada pelo comprimento de arco. Para maiores detalhes sobre o tema, consultar [5], seções 5.5 e 5.9.

### 1.3.1 Definições básicas

**Definição 1.17.** *Seja  $\mathcal{C}$  uma curva regular e conexa em uma superfície  $S$ , com  $\gamma(s)$  parametrização pelo comprimento de arco de  $\mathcal{C}$ . Dizemos que  $\mathcal{C}$  é uma geodésica, se  $\gamma'(s)$  é um campo de vetores paralelo ao longo de  $\gamma(s)$ . Em outras palavras, a derivada*

### 1.3 Geodésicas minimizantes em superfícies regulares

---

covariante do campo vetorial  $\gamma'(s)$  é zero ao longo de  $\gamma$ , isto é,  $\frac{D}{ds}\gamma'(s) = 0$ .

Seja, então,  $\gamma : [0, l] \rightarrow S$  uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco em  $S$ . Se  $h : [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$  é uma variação admissível para  $\gamma$ , no sentido que  $h_t(s) = h(s, t)$  é ainda uma geodésica com  $h(0, t) = \gamma(0)$  e  $h(l, t) = \gamma(l)$ ,  $\forall t \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ , então o campo de Jacobi  $J$  ao longo  $\gamma$  é definido por  $\frac{\partial h}{\partial t}(s, 0) = J(s)$ . A equação de Jacobi para este caso é dada por:

$$\frac{D}{ds} \frac{D}{ds} J(s) + K(s)(\gamma'(s) \wedge J(s)) \wedge \gamma'(s) = 0, \quad (1.7)$$

em que,  $K(s)$  representa a curvatura gaussiana de  $S$  em  $\gamma(s)$ . Notemos que  $J(s)$  satisfaz a equação (1.7). Além disso, é possível demonstrar que, se  $J(s)$  é qualquer campo diferenciável de vetores ao longo de  $\gamma$  satisfazendo a equação (1.7), então  $J(s)$  é um campo de Jacobi, estabelecendo, assim, uma equivalência entre campos de Jacobi e as soluções da equação (1.7). Outra característica importante dos campos de Jacobi ao longo da geodésica  $\gamma$  é que, se  $\gamma(0)$  e  $\gamma(l)$  são pontos conjugados, então  $\langle J(s), \gamma'(s) \rangle = 0$ ,  $\forall s \in [0, l]$ , isto é, o campo de Jacobi é ortogonal à curva  $\gamma$ . Na observação a seguir, é dada a motivação dos conceitos apresentados no início dessa seção.

**Observação 4.** *Desejamos comparar o comprimento de arco de  $\gamma$  com o comprimento de arco de geodésicas próximas a  $\gamma$ . Para isto, precisamos estudar o comportamento do funcional  $L : (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow \mathbb{R}$  numa vizinhança de  $t = 0$ :*

$$L(t) = \int_0^l \left\| \frac{\partial h}{\partial s}(s, t) \right\| ds$$

*$L$  é diferenciável numa vizinhança de  $t = 0$ . Assim, a primeira e segunda variações de  $L$  são dadas, respectivamente, por:*

### 1.3 Geodésicas minimizantes em superfícies regulares

---

$$L'(0) = - \int_0^l \langle A(s), J(s) \rangle ds,$$

em que  $A(s) = \frac{D}{\partial s} \frac{\partial h}{\partial s}(s, 0)$  e  $J(s)$  é um campo diferenciável de vetores ao longo de uma curva parametrizada regular  $\gamma$ , e,

$$L''(0) = \int_0^l \left( \left\| \frac{D}{\partial s} J(s) \right\|^2 - K \|J(s)\|^2 \right) ds = - \int_0^l \left\langle \frac{D^2 J}{ds^2} + K J, J \right\rangle ds$$

em que  $K(s)$  representa a curvatura gaussiana restrita à  $\gamma$ .

É possível estabelecer uma equivalência entre as geodésicas e os extremais do funcional  $L$ . Em [5] prova-se que uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco,  $\alpha : [0, l] \rightarrow S$ , é uma geodésica se, e somente se, para toda variação admissível  $h : [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$  de  $\alpha$  temos  $L'(0) = 0$ .

**Exemplo 1.5.** Consideremos uma superfície  $S$  com curvatura gaussiana  $K$  não-positiva. Então  $S$  não tem pontos conjugados. A constatação desse fato segue por absurdo. Suponhamos, então, que exista um campo de Jacobi  $J$  não identicamente nulo satisfazendo  $J(0) = J(l) = 0$ . Como  $(\gamma'(s) \wedge J(s)) \wedge \gamma'(s) = J(s)$ , podemos reescrever a equação de Jacobi da seguinte maneira:

$$\frac{D}{ds} \frac{D J}{ds} + K J = 0$$

Segue daí que  $\left\langle \frac{D}{ds} \frac{D J}{ds}, J \right\rangle = \langle -K J, J \rangle \geq 0$ , pois  $K \leq 0$  por hipótese. Se definirmos a função real  $\tilde{g}(s) = \left\langle \frac{D J}{ds}(s), J(s) \right\rangle$ , então  $\tilde{g}$  é não-decrescente em  $[0, l]$ . De fato,

$$\tilde{g}'(s) = \frac{d}{ds} \left\langle \frac{D J}{ds}(s), J(s) \right\rangle = \left\langle \frac{D}{ds} \frac{D J}{ds}(s), J(s) \right\rangle + \left\langle \frac{D J}{ds}(s), \frac{D J}{ds}(s) \right\rangle \geq 0$$

### 1.3 Geodésicas minimizantes em superfícies regulares

---

Além disso,  $\tilde{g}(0) = \tilde{g}(l) = 0$ . Logo,  $\tilde{g} \equiv 0$ . Por fim, observando que  $\frac{d}{ds} \langle J, J \rangle = 2 \left\langle \frac{DJ}{ds}, J \right\rangle = 0$ , concluímos que  $\langle J, J \rangle = \|J\|^2$  é constante. De  $J(0) = J(l) = 0$ , segue que  $J \equiv 0$ , gerando um absurdo.

Dessa maneira, se  $S$  é uma superfície nas condições do exemplo anterior, então segue, como consequência imediata, que a aplicação  $\exp_p : T_p S \rightarrow S$  não possui pontos críticos (ver [5], página 439). Do Teorema da função inversa, vem que a aplicação  $\exp_p$  é difeomorfismo local,  $\forall p \in S$ .

#### 1.3.2 O teorema de Jacobi

Apresentaremos, agora, o principal resultado dessa seção: o Teorema de Jacobi. De modo grosseiro, ele nos afirma que, se um arco geodésico  $\gamma$  de uma superfície  $S$  contém pontos conjugados, então  $\gamma$  não é uma geodésica minimizante. Em notação mais precisa, temos:

**Teorema 1.2.** (Teorema de Jacobi) *Consideremos  $\gamma : [0, l] \rightarrow S$  uma geodésica de uma superfície  $S$ . Se  $\gamma(s_0)$ ,  $s_0 \in (0, l)$ , é um ponto conjugado ao ponto  $\gamma(0)$ , então existe uma variação admissível  $h : [0, l] \times (-\varepsilon, \varepsilon) \rightarrow S$  de  $\gamma$  e um número real  $\delta > 0$ ,  $\delta \leq \varepsilon$ , tal que o comprimento da geodésica  $h_t(s) = h(s, t)$  em  $[0, l]$  é estritamente menor que o comprimento da geodésica  $\gamma$ , neste mesmo intervalo, para  $t \in (-\delta, \delta)$ ,  $t \neq 0$ .*

*Demonstração.* Denotemos por  $L(t)$  o comprimento do arco geodésico  $h_t(s)$ ,  $0 \leq s \leq l$ . Por hipótese, sabemos que existe um campo de Jacobi  $J$ , não identicamente nulo, satisfazendo  $J(0) = J(s_0) = 0$ . Como consequência imediata, temos que  $\frac{DJ}{ds}(s_0) \neq 0$ . Além disso,  $\langle J(s), \gamma'(s) \rangle = 0$ ,  $\forall s \in [0, l]$ .

Consideremos, agora, um campo de vetores  $\bar{Z}$ , com  $\bar{Z}(s_0) = -\frac{DJ}{ds}(s_0)$  e  $\frac{D\bar{Z}}{ds} = 0$ . Seja, também,  $f : [0, l] \rightarrow \mathbb{R}$  diferenciável com  $f(0) = f(l) = 0$  e  $f(s_0) = 1$ . Definimos o

### 1.3 Geodésicas minimizantes em superfícies regulares

---

seguinte campo de vetores:  $Z(s) = f(s)\bar{Z}(s)$ ,  $s \in [0, l]$ .

Para cada  $\eta > 0$ , temos que o campo  $Y_\eta$ , definido a seguir, é um campo de vetores diferenciável por partes ortogonal a  $\gamma$ :

$$Y_\eta(s) = \begin{cases} J(s) + \eta Z(s), & s \in [0, s_0] \\ \eta Z(s), & s \in [s_0, l] \end{cases}$$

Observando que  $Y_\eta(0) = Y_\eta(l) = 0$ , segue que  $Y_\eta$  gera uma variação admissível  $h$  de  $\gamma$  (ver [5], página 410, proposição 1). Como  $\gamma$  é uma geodésica de  $S$ , segue que  $L'(0) = 0$ . A idéia central, agora, é demonstrarmos que  $L''(0) < 0$ , fato que acarreta  $t = 0$  ponto de máximo local para o funcional  $L$ , isto é, para  $t$  suficientemente pequeno, podemos encontrar uma geodésica  $h_t(s)$  tal que  $L(t) < L(0)$ , ou seja,  $\gamma$  não minimiza a distância entre  $\gamma(0) = p$  e  $\gamma(l) = q$ .

Observemos que  $L''(0)$  é uma forma quadrática associada a aplicação bilinear simétrica  $I : \mathcal{V} \times \mathcal{V} \rightarrow \mathbb{R}$ , dada por:

$$I(V, W) = \int_0^l \left( \left\langle \frac{D}{ds} V(s), \frac{D}{ds} W(s) \right\rangle - K \langle V(s), W(s) \rangle \right), \quad (1.8)$$

em que  $\mathcal{V}$  é o conjunto dos campos diferenciáveis por partes, munido das operações usuais de adição e multiplicação por um número real. Além disso, se  $V$  é um campo de Jacobi, a igualdade (1.8) pode ser reescrita como:

$$I(V, W) = \left\langle \frac{DV}{ds}(l), W(l) \right\rangle - \left\langle \frac{DV}{ds}(0), W(0) \right\rangle \quad (1.9)$$

Para consultar uma prova desta última afirmação, ver [5], página 508, lema 2.

Para não sobrecarregar a notação,  $I_{s_0}$  representará que a integral correspondente foi tomada de 0 a  $s_0$ . Então, temos:

$$\begin{aligned}
 I_{s_0}(Y_\eta, Y_\eta) &= I_{s_0}(J + \eta Z, J + \eta Z) \\
 &= I_{s_0}(J, J) + 2\eta I_{s_0}(J, Z) + \eta^2 I_{s_0}(Z, Z) \quad (\text{pela bilinearidade de } I) \\
 &= 2\eta \left\langle \frac{DJ}{ds}(s_0), Z(s_0) \right\rangle + \eta^2 I_{s_0}(Z, Z) \quad (\text{por (1.9)}) \\
 &= -2\eta \left\| \frac{DJ}{ds}(s_0) \right\|^2 + \eta^2 I_{s_0}(Z, Z) \quad (\text{pela definição de } Z)
 \end{aligned}$$

Procedendo de maneira análoga de  $s_0$  a  $l$ , e lembrando que a integral é aditiva, obtemos:

$$I(Y_\eta, Y_\eta) = -2\eta \left\| \frac{DJ}{ds}(s_0) \right\|^2 + \eta I(Z, Z),$$

em que  $I$  representa a integral de 0 a  $l$ . Assim, observamos que  $I(Y_\eta, Y_\eta) < 0$ , para  $\eta < \frac{2\left\|\frac{DJ}{ds}(s_0)\right\|^2}{|I(Z, Z)|}$ , com  $I(Z, Z) \neq 0$ . O caso  $I(Z, Z) = 0$  é óbvio. Seja  $\eta_0$  nestas condições. Então, a partir de  $Y_{\eta_0}$ , obtemos uma variação de  $\gamma$  tal que  $L''(0) < 0$  e o resultado segue trivialmente.  $\square$

Na verdade, podemos mostrar que existe uma equivalência entre geodésicas minimizantes e a não-existência de pontos conjugados. Se demonstrarmos que  $\gamma(0)$  não possui pontos conjugados ao longo de  $\gamma$ , obtemos tal equivalência. Mas para isto, precisamos de uma associação entre campos de Jacobi e a nulidade da forma  $L''(0)$ . Ela é dada pelo lema abaixo, cuja demonstração pode ser encontrada em [1], página 87.

**Lema 1.3.** *Se  $\gamma : [0, l] \rightarrow S$  é uma geodésica, então um campo de vetores  $V$ , ao longo de  $\gamma$ , é de Jacobi se, e somente se,  $V$  pertence a nulidade da forma quadrática  $L''(0)$ .*

$\square$

Suponhamos, então, que  $\gamma(0)$  não possui pontos conjugados ao longo de  $\gamma$ . Logo, qualquer campo de Jacobi não-nulo que se anule em  $\gamma(0)$  não volta a se anular sobre

### 1.3 Geodésicas minimizantes em superfícies regulares

---

$\gamma$ . Assim, para qualquer variação  $h(s, t)$  admissível de  $\gamma$ , temos que se  $X(s)$  é qualquer campo não-nulo ao longo de  $\gamma$  que se anula em  $s = 0$  e  $s = l$ , então  $X$  não pertence a nulidade de  $L''(0)$ . Portanto, pela natureza do problema, chegamos à  $I(X, X) > 0$ . Assim,  $L''(0) > 0$  (pois  $L''(0)$  é tomado sobre todos os campos vetoriais ao longo de  $\gamma$  que se anulam em  $\gamma(0)$  e  $\gamma(l)$ ), provando que  $\gamma$  é um mínimo local para o funcional  $L$ .

Em síntese, o Teorema de Jacobi nos mostra que uma geodésica  $\gamma$ , iniciando-se em  $\gamma(0) = p$ , minimiza a distância até o primeiro ponto conjugado a  $p$ . De acordo com [5], o Teorema de Jacobi nada mais é que um caso particular do Teorema do índice de Morse, o qual afirma que o índice da forma quadrática  $I$  (dimensão máxima de um subespaço  $\mathcal{E}$  de  $\mathcal{V}$  tal que  $I|_{\mathcal{E}} < 0$ ) sobre a geodésica  $\gamma$  é finito e igual ao número de pontos conjugados a  $\gamma(0)$  em  $\gamma([0, l])$ .

# Capítulo 2

## Propriedades gerais da

## Grassmaniana Lagrangiana $\Lambda(n)$

Neste capítulo abordaremos algumas propriedades topológicas e geométricas de  $\Lambda(n)$ . Iniciamos mostrando que a Grassmaniana Lagrangiana é uma subvariedade mergulhada compacta e conexa de  $G_n(2n)$ . São apresentadas, também, algumas propriedades do estrato  $\Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$ . Em particular, observamos que os vetores positivos determinam uma orientação transversal para o estrato  $\Lambda^1(\alpha)$ . Definimos o índice de Maslov para caminhos lagrangianos, mostrando que o mesmo é um invariante simplético e homotópico. Por fim, a passagem para o espaço de recobrimento  $\tilde{\Lambda}(n)$  de  $\Lambda(n)$  permite-nos obter algumas propriedades aritméticas do índice de Maslov. Finalizamos com o exemplo da Grassmaniana Lagrangiana  $\Lambda(2)$ , identificando a fibra típica da fibração  $\det^2 : \Lambda(2) \rightarrow \mathbb{S}^1$  com a esfera bidimensional.

### 2.1 Geometria da Grassmaniana Lagrangiana $\Lambda(n)$

Essa seção é destinada a fornecer algumas propriedades geométricas e topológicas da Grassmaniana Lagrangiana e de seus estratos. Descreveremos uma maneira de obter cartas coordenadas locais para  $\Lambda(n)$ , mostrando que a mesma é uma subvariedade de  $G_n(2n)$ . Sob outro ponto de vista, obtemos  $\Lambda(n)$  como quociente dos grupos unitário e ortogonal, nessa ordem, comentando mais alguns resultados topológicos.

#### 2.1.1 Definições e resultados gerais

Inicialmente, vamos recordar alguns fatos básicos sobre variedades. Seja  $M$  um conjunto. Uma carta para  $M$  é uma função bijetora  $\phi : U \rightarrow \tilde{U}$ , em que  $U \subseteq M$  e  $\tilde{U}$  é um aberto de  $\mathbb{R}^n$  (ou, mais geralmente, de qualquer espaço vetorial com dimensão finita). Dadas duas cartas de  $M$ ,  $\phi : U \rightarrow \tilde{U}$  e  $\psi : V \rightarrow \tilde{V}$ , dizemos que  $\phi$  e  $\psi$  são compatíveis se a mudança de coordenadas  $\psi \circ \phi^{-1} : \phi(U \cap V) \rightarrow \psi(U \cap V)$  é um difeomorfismo. O conjunto de cartas que são, duas a duas compatíveis, e cujo domínio cobre  $M$  é dito um atlas diferenciável em  $M$  e é denotado por  $\mathcal{A}$ . Um atlas diferenciável  $\mathcal{A}$  induz sobre  $M$  uma única topologia  $\tau$  tal que cada carta de  $\mathcal{A}$  é um homeomorfismo definido em um subconjunto aberto de  $(M, \tau)$ . Diremos que  $A \subseteq M$  é um aberto, se  $\phi(A \cap U) \subseteq \tilde{U}$  é aberto, para toda carta  $\phi : U \rightarrow \tilde{U}$  de  $\mathcal{A}$ . Por simplicidade, assumiremos que essa topologia satisfaz a propriedade de Hausdorff (separação de pontos) e da base enumerável. O par  $(M, \mathcal{A})$  é chamado de variedade e um sistema de coordenadas locais para  $M$  é uma carta que pertence a  $\mathcal{A}$ .

**Definição 2.1.** *Sejam  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$  espaço vetorial simplético e  $G_n(2n)$  a Grassmaniana dos subespaços  $n$  dimensionais de  $\mathbb{R}^{2n}$ . O conjunto  $\Lambda(n) = \{\alpha \subset G_n(2n); \alpha \text{ é Lagrangiano}\}$*

## 2.1 Geometria da Grassmaniana Lagrangiana $\Lambda(n)$

---

é denominado *Grassmaniana Lagrangiana* de  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ .

Nosso primeiro objetivo é mostrar que  $\Lambda(n)$  é uma subvariedade mergulhada de  $G_n(2n)$ , isto é, do conjunto dos subespaços  $n$ -dimensionais de  $\mathbb{R}^{2n}$ . Para isto, construiremos um sistema de cartas locais para  $\Lambda(n)$ .

Sejam  $W_1$  e  $W_2$  dois subespaços  $n$ -dimensionais transversais, isto é,  $W_1 \cap W_2 = \{0\}$ . Então, podemos expressar  $\mathbb{R}^{2n} = W_1 \oplus W_2$ . Um subespaço  $W$   $n$ -dimensional é um gráfico de uma aplicação linear  $T : W_1 \rightarrow W_2$  se, e somente se,  $W \cap W_2 = \{0\}$ . Se denotarmos por  $\pi_1$  e  $\pi_2$ , respectivamente, as projeções sobre os planos  $W_1$  e  $W_2$ , então podemos expressar a aplicação linear por  $T = (\pi_2|_W) \circ (\pi_1|_W)^{-1}$ . A condição de transversalidade entre  $W_2$  e  $W$  é equivalente a  $\pi_1|_W$  ser um isomorfismo sobre  $W_1$ . No nosso contexto,  $G_n^0(W_2) = \{W \in G_n(2n); W \cap W_2 = \{0\}\}$  representará o conjunto dos espaços  $n$ -dimensionais transversais à  $W_2$ .

Dessa forma, observamos que cada  $W \in G_n(2n)$ , transversal a  $W_2$ , está associado biunivocamente à uma aplicação linear  $T \in \mathcal{L}(W_1, W_2)$ . Seja  $\Phi_{W_1, W_2} : G_n^0(W_2) \rightarrow L(W_1, W_2)$ , dada por  $\Phi_{W_1, W_2}(W) = T$ , com  $W = \text{Gráfico}(T)$ , a bijeção mencionada. Como todo espaço vetorial  $n$ -dimensional admite um subespaço complementar, segue que, quando o par  $(W_1, W_2)$  “varre” o conjunto de todas as somas diretas de  $\mathbb{R}^{2n}$ , a coleção de cartas  $\Phi_{W_1, W_2}$  cobre  $G_n(2n)$ , constituindo, assim, um atlas para a grassmaniana dos subespaços  $n$ -dimensionais. Em [7], mostra-se que a mudança entre duas cartas coordenadas quaisquer é diferenciável.

Observemos que, na construção feita anteriormente, não há nenhuma particularidade na escolha da dimensão dos subespaços de  $\mathbb{R}^{2n}$ . Dessa maneira, construção análoga vale para a grassmaniana dos subespaços  $k$ -dimensionais de  $\mathbb{R}^{2n}$ . Obtemos, então, uma identificação de  $G_k(2n)$  com o espaço das aplicações lineares  $L(W_1, W_2) \simeq \mathbb{R}^{k(2n-k)}$ , donde segue que  $\dim G_k(2n) = k(2n - k)$ .

## 2.1 Geometria da Grassmaniana Lagrangiana $\Lambda(n)$

---

**Definição 2.2.** *Seja  $\alpha$  um subespaço lagrangiano fixado. Então, definimos:*

$$\Lambda^k(\alpha) = \{\gamma \in \Lambda(n); \dim(\alpha \cap \gamma) = k\}$$

*Em particular,  $\Lambda^0(\alpha)$  representa o conjunto de todos os planos lagrangianos transversais a  $\alpha$ . Comumente,  $\Lambda^k(\alpha)$  são denominados estratos.*

**Lema 2.1.** *Sejam  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$  espaço vetorial simplético e  $\alpha, \beta$  planos lagrangianos tais que  $\mathbb{R}^{2n} = \beta \oplus \alpha$ . Então a aplicação linear*

$$\begin{aligned} \rho_{\beta, \alpha} : \alpha &\longrightarrow \beta^* \\ v &\mapsto \rho_{\beta, \alpha}(v) = \omega(v, \cdot)|_{\beta} \end{aligned}$$

*é um isomorfismo.*

*Demonstração.* Primeiramente, notemos que os espaços  $\alpha$  e  $\beta^*$  possuem dimensão finita  $n$ . Se  $\rho_{\beta, \alpha}(v) = 0$ , então  $\omega(v, u) = 0, \forall u \in \beta$ , ou seja,  $v \in \beta^\omega = \beta$ . Logo,  $v \in \alpha \cap \beta = \{0\}$ , o que garante a injetividade de  $\rho_{\beta, \alpha}$ . A sobrejetividade sai como consequência do Teorema do núcleo e da imagem.  $\square$

**Lema 2.2.** *Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  nas condições do Lema (2.1). O subespaço  $W \in G_n^0(\alpha)$  é lagrangiano se, e somente se, a forma bilinear dada a seguir é simétrica:*

$$(\rho_{\beta, \alpha} \circ \Phi_{\beta, \alpha})(W) \in L(\beta, \beta^*) \simeq B(\beta)$$

*Nesse contexto,  $B(\beta) : \beta \times \beta \longrightarrow \mathbb{R}$  é uma aplicação bilinear.*

*Demonstração.* Como  $\dim W = n$ , temos que  $W$  é lagrangiano se, e somente se,  $\omega|_W = 0$ . Observemos que, para  $T = \Phi_{\beta, \alpha}(W)$ ,  $W = \text{Gráfico}(T)$  e  $w_1, w_2 \in \beta$ , temos:

$$\begin{aligned} \omega(w_1 + Tw_1, w_2 + Tw_2) &= \omega(w_1, w_2) + \omega(w_1, Tw_2) + \omega(Tw_1, w_2) + \omega(Tw_1, Tw_2) \\ &= \omega(Tw_1, w_2) - \omega(Tw_2, w_1) \end{aligned}$$

## 2.1 Geometria da Grassmaniana Lagrangiana $\Lambda(n)$

---

Além disso,  $(\rho_{\beta,\alpha} \circ \Phi_{\beta,\alpha})(W)(w_1, w_2) = \omega(Tw_1, w_2)$ . Logo,  $(\rho_{\beta,\alpha} \circ \Phi_{\beta,\alpha})(W) = \omega(T\cdot, \cdot)|_{\beta \times \beta}$ . Portanto,  $W$  é lagrangiano se, e somente se,  $\omega(Tw_1, w_2) = \omega(Tw_2, w_1)$ , donde segue que  $(\rho_{\beta,\alpha} \circ \Phi_{\beta,\alpha})(W)(w_1, w_2) = (\rho_{\beta,\alpha} \circ \Phi_{\beta,\alpha})(W)(w_2, w_1)$ , isto é,  $(\rho_{\beta,\alpha} \circ \Phi_{\beta,\alpha})(W)$  é simétrica.  $\square$

O Lema (2.2) pode ser interpretado da seguinte maneira: a cada decomposição lagrangiana  $\mathbb{R}^{2n} = \beta \oplus \alpha$ , associamos uma bijeção  $\varphi_{\beta,\alpha} : \Lambda^0(\alpha) \rightarrow B_{sim}(\beta)$ , dada por  $\varphi_{\beta,\alpha}(\gamma) = (\rho_{\beta,\alpha} \circ \Phi_{\beta,\alpha})(\gamma)$ . Dessa forma, como todo lagrangiano admite complemento lagrangiano, quando  $(\beta, \alpha)$  “varre” todas as decomposições lagrangianas de  $\mathbb{R}^{2n}$ , as cartas  $\varphi_{\beta,\alpha}$  cobrem  $\Lambda(n)$ , constituindo, portanto, um atlas diferenciável para a Grassmaniana Lagrangiana. Lembrando que  $B_{sim}(\beta) \simeq \mathbb{R}^{\frac{n(n+1)}{2}}$  e com base nos comentários anteriores, obtemos o seguinte resultado:

**Teorema 2.3.** *A Grassmaniana Lagrangiana  $\Lambda(n)$  é uma subvariedade mergulhada na Grassmaniana  $G_n(2n)$ , com  $\dim \Lambda(n) = \frac{n(n+1)}{2}$ , em que o atlas é formado pelas aplicações  $\varphi_{\beta,\alpha}$ , definidas anteriormente, quando o par  $(\beta, \alpha)$  percorre todas as decomposições lagrangianas de  $\Lambda$ .*

$\square$

**Corolário 2.4.** *O estrato  $\Lambda^k(\alpha)$  é uma subvariedade de  $\Lambda(n)$  e tem codimensão  $\frac{k(k+1)}{2}$ .*

*Demonstração.* Consideremos  $\mathbb{R}^{2n} = \alpha \oplus \beta$  uma decomposição lagrangiana. Já sabemos que  $\gamma \in \Lambda^0(\beta)$  se, e somente se,  $\gamma = \text{Gráfico } T, T \in L(\alpha, \beta)$ . Dessa forma, associamos  $\Lambda^0(\beta) \cap \Lambda^k(\alpha)$  ao subconjunto  $\{T \in L(\alpha, \beta); \text{posto } T = n - k\}$ . Além disso, temos que  $\gamma \in \Lambda(n)$  se, e somente se,  $T = T^t$ . Logo,  $\Lambda^k(\alpha)$  é localmente difeomorfo ao conjunto das matrizes simétricas de posto  $n - k$ , o qual tem codimensão  $\frac{k(k+1)}{2}$ , provando o resultado.  $\square$

**Observação 5.** Podemos expressar um plano lagrangiano  $\alpha$  como imagem de uma aplicação linear injetiva  $T : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  tal que  $\text{Im } T = \alpha$ . Em termos matriciais,

$$T = \begin{pmatrix} X \\ Y \end{pmatrix}_{2n \times n},$$

em que  $X$  e  $Y$  são matrizes de ordem  $n$ .  $T$  é dito um referencial para  $\alpha$ , pois escolhida uma base  $\mathcal{B} = \{\alpha_1, \dots, \alpha_n\}$  de  $\alpha$  obtemos a matriz  $T = (\alpha_1, \dots, \alpha_n)$ , com  $\alpha_i$  formando as colunas de  $T$ .

**Observação 6.** O plano  $\alpha$  é lagrangiano se, e somente se,  $Y^t X = X^t Y$ . Com efeito, dados  $z, z' \in \gamma$ , então existem únicos  $u, u' \in \mathbb{R}^n$  tais que  $z = (Xu, Yu)$  e  $z' = (Xu', Yu')$ . Segue daí que:

$$\begin{aligned} \omega(z, z') &= \omega((Xu, Yu), (Xu', Yu')) \\ &= \langle Xu, Yu' \rangle - \langle Yu, Xu' \rangle \\ &= (u')^t Y^t Xu - (u)^t X^t Yu \\ &= \langle (Y^t X - X^t Y)u, u' \rangle \end{aligned}$$

donde segue o resultado. Tomando, em particular,  $X = I_{n \times n}$  e  $Y = G$ , em que  $\alpha = \text{Graf}(G)$ ,  $G \in L(\mathbb{R}^n)$ , obtemos que  $G^t = G$  se, e somente se,  $\alpha$  for lagrangiano.

**Definição 2.3.** Para cada  $k = 0, 1, \dots, n$ , definimos os conjuntos  $\Lambda^{\geq k}(\alpha) = \bigcup_{i=k}^n \Lambda^i(\alpha)$  e

$$\Lambda^{\leq k}(\alpha) = \bigcup_{i=1}^k \Lambda^i(\alpha).$$

Como consequência imediata da carta  $\Phi_{\beta, \alpha}$  obtida, segue que  $G_k^0(\alpha)$  é um conjunto aberto de  $G_k(n)$ . Além disso, observando que  $\Lambda^0(\alpha) = \Lambda(n) \cap G_n^0(\alpha)$ , segue que  $\Lambda^0(\alpha)$  é um aberto de  $\Lambda(n)$  (na topologia induzida). Mais geralmente, em [7] prova-se que

$\overline{W} = \{W \in G_n(2n); \dim(W \cap \alpha) \leq k\}$  é um aberto de  $G_n(2n)$ . Assim, como  $\Lambda^{\leq k}(\alpha) = \overline{W} \cap \Lambda(n)$ , segue que  $\Lambda^{\leq k}(\alpha)$  é um aberto (induzido) de  $\Lambda(n)$ . Por fim,  $\Lambda^{\geq k}(\alpha)$  é fechado em  $\Lambda(n)$ , já que o seu complementar (em  $\Lambda(n)$ ) é  $\Lambda^{\leq k-1}(\alpha)$  que é aberto.

### 2.1.2 $\Lambda(n)$ como espaço homogêneo

Uma variedade  $M$  é dita homogênea se ela pode ser expressa como quociente de grupos de Lie. Em outras palavras, uma variedade  $M$  é homogênea, se ela é uma variedade em que um grupo de Lie  $G$  age transitivamente, permitindo-nos identificá-la, via difeomorfismo, ao quociente de grupos  $G/G_m$ .

Essa caracterização interessante de  $\Lambda(n)$  como espaço homogêneo nos permite obter informações sobre a sua topologia. Ela é dada por  $\Lambda(n) \simeq \frac{U(n)}{O(n)}$ , em que  $U(n)$  e  $O(n)$  representam, respectivamente, os grupos unitário de  $\mathbb{C}^n$  e ortogonal de  $\mathbb{R}^n$ . Para isto, recordemos alguns fatos básicos de Álgebra Linear.

Consideremos  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega_0)$  espaço vetorial simplético. A estrutura complexa  $J: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ , dada por  $J(q, p) = (-p, q)$  é compatível com a forma simplética  $\omega$ , isto é, a aplicação  $(q, p) \mapsto \omega(q, Jp)$  define um produto interno em  $\mathbb{R}^n$ . Seja, agora, o isomorfismo  $\tilde{T}: \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{C}^n$ , dado por  $\tilde{T}(q, p) = q + ip$ . Dessa forma,  $J$ , vista através desse isomorfismo, equivale à multiplicação por  $i$ .

Por outro lado, se  $\alpha$  é lagrangiano, segue que  $J(\alpha)$  também é lagrangiano. Com efeito, dado  $(q, p) \in \alpha$ , temos que  $J(q, p) = (-p, q)$ . Assim,  $\omega((-p_1, q_1), (-p_2, q_2)) = \langle -p_1, q_2 \rangle - \langle q_1, -p_2 \rangle = 0$ , já que  $\alpha$  é lagrangiano por hipótese. Além disso, no sentido usual da palavra,  $J(\alpha) \perp \alpha$ . Logo,  $\mathbb{R}^{2n} = \alpha \oplus J(\alpha)$ . Deste modo, pelo isomorfismo  $\tilde{T}$ ,  $\alpha \oplus J(\alpha)$  corresponde a complexificação do subespaço lagrangiano  $\alpha$ . A compatibilidade de  $J$  com  $\omega$ , define um produto hermitiano  $g_s(w, v) = \omega(w, Jv) - i\omega(w, v)$ .

## 2.1 Geometria da Grassmaniana Lagrangiana $\Lambda(n)$

---

Uma transformação linear  $T : \mathbb{C}^n \longrightarrow \mathbb{C}^n$  é dita unitária quando  $T$  preserva o produto hermitiano  $g_s$ . Em outras palavras,  $T$  preserva as partes real (ou seja,  $T$  é ortogonal) e imaginária (ou seja,  $T$  é simplética) de  $g_s$ . Reciprocamente, se  $T$  é um isomorfismo simplético e ortogonal, então são válidas, respectivamente,  $\omega(T\cdot, T\cdot) = \omega(\cdot, \cdot)$  e  $\omega(T^{-1}\cdot, J\cdot) = \omega(\cdot, JT\cdot)$ . Logo,

$$\begin{aligned} g_s(Tw, Tv) &= \omega(Tw, JTv) - i\omega(Tw, Tv) \\ &= \omega(w, Jv) - i\omega(w, v) = g_s(w, v), \end{aligned}$$

mostrando que  $T$  é unitária. Dessa forma, obtemos a seguinte identificação:  $U(\mathbb{R}^{2n}, J, g_s) \simeq O(\mathbb{R}^{2n}, g) \cap Sp(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ , em que  $g$  representa o produto interno usual de  $\mathbb{R}^{2n}$ .

**Teorema 2.5.** *A Grassmaniana Lagrangiana  $\Lambda(n)$  é difeomorfa ao quociente  $\frac{U(n)}{O(n)}$ .*

*Demonstração.* Seja  $A = A_1 + iA_2 \in M_n(\mathbb{C})$ . Podemos identificá-la com  $B = \begin{pmatrix} A_1 & -A_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$ . Se  $A \in U(n)$  então, da condição  $AA^* = I_{n \times n}$ , segue que:

$$\begin{aligned} (A_1 + iA_2)(A_1^t - iA_2^t) &= (A_1A_1^t + A_2A_2^t) + i(A_2A_1^t - A_1A_2^t) \\ &= I_{n \times n}, \end{aligned}$$

ou seja,  $A_1A_1^t + A_2A_2^t = I_{n \times n}$  e  $A_2A_1^t - A_1A_2^t = 0$ .

O grupo  $U(\mathbb{R}^{2n}, J, g_s)$  age transitivamente na variedade  $\Lambda(n)$ , isto é, dados  $\alpha$  e  $\beta$  planos lagrangianos quaisquer, existe um isomorfismo  $\mathbb{C}$ -linear

$$T : \mathbb{C}^n \simeq (\mathbb{R}^{2n}, J, g_s) \longrightarrow \mathbb{C}^n \simeq (\mathbb{R}^{2n}, J, g_s)$$

## 2.1 Geometria da Grassmaniana Lagrangiana $\Lambda(n)$

---

que preserva o produto hermitiano  $g_s$ , tal que  $T(\alpha) = \beta$  (Ver [7], corolário 1.4.27). Em particular, se  $\alpha$  é o  $p$ -plano, então  $U(\mathbb{R}^{2n}, J, g_s)_\alpha = \{A \in U(\mathbb{R}^{2n}, J, g_s); A(\alpha) = \alpha\} = O(n)$ , pois:

$$\begin{pmatrix} A_1 & -A_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix} = (-A_2p, A_1p)^t \in \alpha$$

se, e somente se,  $A_2p = 0, \forall p \in \mathbb{R}^n$ , isto é,  $A_2 = 0$ . Logo,  $B = \text{diag}(A_1, A_1)$  e  $A_1A_1^t = I_{n \times n}$ , isto é,  $A = A_1 \in O(n)$ . Ainda em [7], à página 40, apresenta-se o seguinte resultado sobre grupos de Lie:

**Teorema 2.6.** *Se  $G$  é um grupo que age transitivamente na variedade  $M$ , então  $\forall m \in M$ , a aplicação  $\Omega : G/G_m \rightarrow M$  é um difeomorfismo, em que  $G_m$  representa o grupo de isotropia do elemento  $m \in M$ .*

Portanto, tomando  $G = U(\mathbb{R}^{2n}, J, g_s) \simeq U(n)$ ,  $G_m = U(\mathbb{R}^{2n}, J, g_s)_\alpha$  e  $M = \Lambda(n)$  no teorema anterior, obtemos o difeomorfismo  $\Omega : U(n)/O(n) \rightarrow \Lambda(n)$  desejado.

□

Através dessa identificação, é possível extraírmos algumas informações sobre a topologia de  $\Lambda(n)$ . Notemos que se  $A \in O(n)$ , então  $\det(A) = \pm 1$  e, portanto, o homomorfismo de grupos  $d = \det^2 : U(n) \rightarrow \mathbb{S}^1$ , definido por  $d(A) = [\det(A)]^2$ , tem  $O(n)$  contido no núcleo. Logo,  $d$  induz um homomorfismo  $\bar{d} : U(n)/O(n) \rightarrow \mathbb{S}^1$ ,  $A \mapsto \bar{d}(A.O(n)) = \det^2(A.O(n)) = \det^2(A)$ . Este último, induz um isomorfismo que nos permite identificar o grupo fundamental de  $\Lambda(n)$  com  $\mathbb{Z}$ . Na última seção desse capítulo daremos um esboço da prova desse resultado, usando sequência exata de homotopia. Para maiores referências sobre esse assunto, consultar [7] (proposição 4.2.1, à página 122). Por fim, como a projeção canônica  $\pi : U(n) \rightarrow U(n)/O(n)$  é contínua, a conexidade e compacidade de  $U(n)$  acarretam essas mesmas propriedades para  $U(n)/O(n) \simeq \Lambda(n)$ .

## 2.2 Orientação transversal de $\Lambda^1(\alpha)$

---

**Observação 7.** A topologia induzida em  $U(n)$  é a topologia das matrizes de ordem  $n$  com entradas complexas ( $M_n(\mathbb{C})$ ), isto é, a topologia usual de  $\mathbb{R}^{4n^2}$ . A compacidade de  $U(n)$  segue do teorema de Heine-Borel e do fato que ele é fechado e limitado como subconjunto de  $M_n(\mathbb{C}) \simeq \mathbb{R}^{4n^2}$ . Já a conexidade segue de dois fatos: o primeiro é que toda matriz complexa unitária é diagonalizável, com matriz diagonal associada formada somente por números complexos de módulo 1. Em outras palavras, existe uma matriz  $S$  tal que  $A = S \text{diag}(e^{i\theta_1}, \dots, e^{i\theta_n}) S^{-1}$ . Por último,  $U(n)$  é conexo por caminhos, pois  $t \mapsto S \text{diag}(e^{it\theta_1}, \dots, e^{it\theta_n}) S^{-1}$ ,  $0 \leq t \leq 1$ , é um caminho em  $U(n)$  ligando  $A$  a matriz identidade  $I_{n \times n}$ .

**Exemplo 2.1.** No caso particular  $n = 1$  estamos em  $\mathbb{R}^2$  e os planos lagrangianos são retas emanando da origem. A Grassmaniana Lagrangiana  $\Lambda(1)$  é a reta projetiva  $\mathbb{RP}^1$  que pode ser identificada com  $\mathbb{S}^1$  com os pontos antípodas identificados. Por outro lado, temos que  $\Lambda(1) \simeq \frac{U(1)}{O(1)}$ , em que  $U(1)$  é o grupo dos números complexos de módulo 1 e  $O(1) = \{-1, +1\}$ . Tal identificação nos mostra que, fixada uma reta  $\alpha \in \mathbb{R}^2$ , qualquer outra reta  $\gamma$  pode ser expressa por  $\gamma = e^{i\theta}\alpha$ , em que  $\theta$  está definido, a menos de translações por  $\pi$ .

## 2.2 Orientação transversal de $\Lambda^1(\alpha)$

Essa breve seção foi introduzida com o objetivo de mostrar que o estrato  $\Lambda^1(\alpha)$  admite uma orientação transversal. Tal orientação é dada pelos vetores positivos que serão definidos a seguir.

Sejam  $\gamma$  um plano lagrangiano e  $S(t)$  uma família diferenciável de transformações simpléticas,  $S(t) \in Sp(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ . Seja  $\gamma(t) = S(t)\gamma$ , com  $S(0) = I_{2n \times 2n}$ . Então  $\gamma(t)$  representa uma curva que passa por  $\gamma$ . Associaremos a forma bilinear simétrica

## 2.2 Orientação transversal de $\Lambda^1(\alpha)$

---

$B : \gamma \times \gamma \longrightarrow \mathbb{R}$ , definida por  $B_{\gamma, \gamma'(0)}(u, v) = \omega(S'(0)u, v)$ , ao vetor tangente  $\gamma'(0)$ . Primeiramente, notemos que essa forma bilinear está bem definida. Com efeito, se  $t \mapsto \tilde{S}(t)$  é uma outra curva de transformações simpléticas, então  $\tilde{S}(t) = S(t)Q(t)$ , em que  $Q(t)$  preserva  $\gamma$  e  $Q(0) = I_{2n \times 2n}$ . Como  $\left. \frac{d}{dt} \omega(u, Q(t)v) \right|_{t=0} = \omega(u, Q'(0)v) = 0$  ( $\gamma$  é lagrangiano), segue que  $\omega([S'(0)Q(0) + S(0)Q'(0)]u, v) = \omega(S'(0)u, v)$ , mostrando que a forma bilinear depende somente de  $(\gamma, \gamma'(0))$  e não da curva  $\gamma(t)$  considerada. Observemos que  $S(t)u, S(t)v \in \gamma(t)$  que é lagrangiano, logo,

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{dt} \omega(S(t)u, S(t)v) \right|_{t=0} \\ &= \omega(S'(0)u, S(0)v) + \omega(S(0)u, S'(0)v) \\ &= \omega(S'(0)u, v) + \omega(u, S'(0)v) \\ &= B_{\gamma, \gamma'(0)}(u, v) - B_{\gamma, \gamma'(0)}(v, u), \end{aligned}$$

mostrando a simetria de  $B_{\gamma, \gamma'(0)}$ .

Obtemos, dessa forma, uma identificação (isomorfismo)  $T_\gamma \Lambda(n) \simeq B_{sim}(\gamma)$ . De fato, sejam  $S(t)$  e  $\tilde{S}(t)$  duas famílias de transformações simpléticas e consideremos  $\gamma(t) = S(t)\gamma$  e  $\tilde{\gamma}(t) = \tilde{S}(t)\gamma$  duas curvas na Grassmaniana Lagrangiana. Seja, também,  $L : T_\gamma \Lambda(n) \longrightarrow B_{sim}(\gamma)$ , definida por  $L(\gamma'(0)) = B_{\gamma, \gamma'(0)}$ . Então,

$$\begin{aligned} B_{\gamma, \gamma'(0) + a\tilde{\gamma}'(0)}(u, v) &= \omega([S'(0) + a\tilde{S}'(0)]u, v) \\ &= \omega(S'(0)u, v) + a\omega(\tilde{S}'(0)u, v) \\ &= B_{\gamma, \gamma'(0)}(u, v) + aB_{\gamma, \tilde{\gamma}'(0)}(u, v), \end{aligned}$$

provando a linearidade da aplicação  $L$ .

Suponhamos, agora, que  $L(\gamma'(0)) = L(\tilde{\gamma}'(0))$ . Então,  $B_{\gamma, \gamma'(0)}(u, v) = B_{\gamma, \tilde{\gamma}'(0)}(u, v)$ ,  $\forall u, v \in \mathbb{R}^{2n}$ . Logo,

$$\begin{aligned} \omega(S'(0)u, v) &= \omega(\tilde{S}'(0)u, v) \\ \omega((S' - \tilde{S}')(0)u, v) &= 0 \end{aligned}$$

## 2.2 Orientação transversal de $\Lambda^1(\alpha)$

---

Da não degeneracidade da forma simplética  $\omega$ , segue que  $S' = \tilde{S}'$  e, portanto,  $\gamma'(0) = \tilde{\gamma}'(0)$ , mostrando a injetividade da aplicação  $L$ . Por fim, como os espaços  $T_\gamma\Lambda(n)$  e  $B_{sim}(\gamma)$  possuem a mesma dimensão (finita), concluímos que a aplicação  $L$  também é sobrejetora, sendo, portanto um isomorfismo entre estes espaços.

Através desse isomorfismo, podemos identificar  $\frac{T_\gamma\Lambda(n)}{T_\gamma\Lambda^k(\alpha)} \simeq B_{sim}((\gamma \cap \alpha) \times (\gamma \cap \alpha))$ . Com efeito, suponhamos que  $\dim(\alpha \cap \gamma) = k$  e seja  $\tilde{L} : \frac{T_\gamma\Lambda(n)}{T_\gamma\Lambda^k(\alpha)} \rightarrow B_{sim}((\gamma \cap \alpha) \times (\gamma \cap \alpha))$ , definida por  $\tilde{L}(s + T_\gamma\Lambda^k(\alpha)) = B_{\gamma, \gamma'(0)} \Big|_{(\gamma \cap \alpha) \times (\gamma \cap \alpha)}$ . Para que  $\tilde{L}$  esteja bem definida, devemos mostrar que a aplicação independe da escolha do representante da classe de equivalência. Sejam  $S(t)$  e  $\tilde{S}(t)$  duas famílias de aplicações simpléticas. Suponhamos, então, que  $(s + T_\gamma\Lambda^k(\alpha)) = (t + T_\gamma\Lambda^k(\alpha))$ . Então,  $(s - t) \in T_\gamma\Lambda^k(\alpha)$ , isto é,  $\psi'(0) = [S'(0) - \tilde{S}'(0)]\gamma$  é o vetor tangente à curva  $\psi(t)$ , para  $t = 0$ , em  $\Lambda^k(\alpha)$ , tal que  $\psi(0) = \gamma$ . Logo, para  $u, v \in \gamma \cap \alpha$ , temos:

$$\tilde{L}(s + T_\gamma\Lambda^k(\alpha)) = B_{\gamma, \gamma'(0)}(u, v) = \omega(S'(0)u, v)$$

$$\tilde{L}(t + T_\gamma\Lambda^k(\alpha)) = B_{\gamma, \tilde{\gamma}'(0)}(u, v) = \omega(\tilde{S}'(0)u, v)$$

Além disso, suponhamos que  $\psi(t)$  preserva  $\alpha$ . Como  $\psi(t)u \in \alpha$  que é lagrangiano, segue que:

$$\begin{aligned} 0 &= \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \omega(\psi(t)u, v) \\ &= \omega(\psi'(0)u, v) \\ &= B_{\gamma, \psi'(0)}(u, v) \\ &= \omega([S'(0) - \tilde{S}'(0)]u, v) \\ &= B_{\gamma, \gamma'(0)}(u, v) - B_{\gamma, \tilde{\gamma}'(0)}(u, v), \end{aligned}$$

mostrando que a aplicação está bem definida.

---

## 2.3 Caminhos Lagrangianos e o índice de Maslov

---

Por fim, notemos que  $\widehat{L} : T_\gamma\Lambda(n) \longrightarrow B_{sim}((\gamma \cap \alpha) \times (\gamma \cap \alpha))$ , definida por  $\widehat{L}(l) = B_{\gamma, \gamma'(0)} \Big|_{(\gamma \cap \alpha) \times (\gamma \cap \alpha)}$  é sobrejetora. Além disso,  $\widehat{L}(T_\gamma\Lambda^k(\alpha)) = 0$ , ou seja,  $T_\gamma\Lambda^k(\alpha) \subseteq \text{Ker } \widehat{L}$ . Logo,  $\dim \text{Ker } \widehat{L} \geq \dim \Lambda^k(\alpha)$ , pois  $T_\gamma\Lambda^k(\alpha)$  e  $\Lambda^k(\alpha)$  tem a mesma dimensão. Ora, mas  $\dim B_{sim}((\gamma \cap \alpha) \times (\gamma \cap \alpha)) = \frac{k(k+1)}{2}$  e, do teorema do núcleo e da imagem, segue que  $\dim(\text{Ker } \widehat{L}) + \frac{k(k+1)}{2} = \dim T_\gamma\Lambda(n)$ , isto é,  $\text{codim Ker } \widehat{L} = \frac{k(k+1)}{2} = \text{codim } T_\gamma\Lambda^k(\alpha)$ . Logo,  $\text{Ker } \widehat{L} = T_\gamma\Lambda^k(\alpha)$ . Portanto  $\widehat{L}$ , por passagem ao quociente, induz o isomorfismo  $\widetilde{L}$  mencionado.

**Definição 2.4.** *Definimos a orientação transversal de  $\Lambda^1(\alpha)$  da seguinte maneira:  $[\gamma'(0)] \in \frac{T_\gamma\Lambda(n)}{T_\gamma\Lambda^1(\alpha)}$  é positivo se, e somente se,  $B_{\gamma, \gamma'(0)} \Big|_{(\gamma \cap \alpha) \times (\gamma \cap \alpha)}$  é positiva-definida.*

**Definição 2.5.** *Seja  $\Gamma : [a, b] \longrightarrow \Lambda(n)$  um caminho lagrangiano de classe  $C^1$ . Diremos que  $\Gamma$  intercepta transversalmente o estrato  $\Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$ , em  $t = t_0$ , se  $\Gamma(t_0) \in \Lambda^1(\alpha)$  e  $\Gamma'(t_0) \notin T_{\Gamma(t_0)}\Lambda^1(\alpha)$ . Mais ainda, a intersecção transversal será denominada positiva, se  $[\Gamma'(t_0)] \in T_{\Gamma(t_0)}\Lambda(n)/T_{\Gamma(t_0)}\Lambda^1(\alpha)$  estabelece uma orientação positiva. Analogamente, define-se intersecção transversal negativa.*

## 2.3 Caminhos Lagrangianos e o índice de Maslov

Introduziremos, nessa seção, o conceito do índice de Maslov. Fixado um plano lagrangiano  $\alpha$ , tal índice nos indicará quantas vezes um caminho lagrangiano terminando em  $\alpha$  interceptará o estrato  $\Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$ . Mostraremos que o índice de Maslov é invariante por homotopias e symplectomorfismos. Por fim, obtemos alguns resultados quando nos restringimos a caminhos lagrangianos da forma  $\gamma(t) = d\phi_t^H \gamma$ .

Sejam  $\alpha$  e  $\beta$  dois planos lagrangianos transversais no espaço vetorial simplético  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ . A forma quadrática correspondente ao par  $(\beta, \alpha)$  em  $\mathbb{R}^{2n}$ , denotada por  $\Phi[\beta, \alpha]$ ,

## 2.3 Caminhos Lagrangianos e o índice de Maslov

---

é definida da seguinte maneira:  $\Phi[\beta, \alpha](\zeta) = \omega(\xi, \eta)$ , em que  $\zeta \in \mathbb{R}^{2n}$ ,  $\zeta = \xi + \eta$ , com  $\xi \in \beta$ ,  $\eta \in \alpha$ .

**Definição 2.6.** *O índice  $I(\beta, \alpha, \gamma)$  da tripla  $(\beta, \alpha, \gamma)$  é definido como o índice da forma quadrática  $\Phi[\beta, \alpha] \Big|_{\gamma}$ .*

**Observação 8.** *É imediato verificarmos que o índice  $I(\beta, \alpha, \gamma)$  da tripla  $(\beta, \alpha, \gamma)$  possui as seguintes propriedades:*

1.  $I(\beta, \alpha, \gamma) + I(\alpha, \beta, \gamma) = n$ ;
2.  $I(\beta, \alpha, \gamma) = I(\alpha, \gamma, \beta)$ ;

Mostraremos que, para  $\alpha$  e  $\beta$  nas condições anteriores, sempre existe um simplectomorfismo  $T : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$ , tal que  $T(\alpha) = \beta$ . Com efeito, escolhamos bases ortonormais  $\mathcal{B}_1 = \{e_1, \dots, e_n\}$  e  $\mathcal{B}_2 = \{f_1, \dots, f_n\}$  de  $\alpha$  e  $\beta$ , respectivamente. Seja  $J : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  estrutura complexa tal que  $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_{n \times n} \\ I_{n \times n} & 0 \end{pmatrix}$ . Consideremos  $\tilde{\mathcal{B}}_1 = \{e_1, \dots, e_n, Je_1, \dots, Je_n\}$  e  $\tilde{\mathcal{B}}_2 = \{f_1, \dots, f_n, Jf_1, \dots, Jf_n\}$  as extensões das bases  $\mathcal{B}_1$  e  $\mathcal{B}_2$ , nessa ordem, a bases de  $\mathbb{R}^{2n}$ .

Tomemos  $T_\alpha : \alpha \rightarrow \mathbb{R}^n$ , definida por  $T_\alpha(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = (x_1, \dots, x_n)$ . Analogamente, definimos  $T_\beta : \beta \rightarrow \mathbb{R}^n$ , tal que  $T_\beta(y_1f_1 + \dots + y_nf_n) = (y_1, \dots, y_n)$ . Definimos  $\tilde{T} : \alpha \rightarrow \beta$  por  $\tilde{T}(x_1e_1 + \dots + x_ne_n) = y_1f_1 + \dots + y_nf_n$ . Notemos que  $\tilde{T} = T_\beta^{-1} \circ T_\alpha$ . Segue daí que  $\tilde{T}\tilde{T}^t = T_\beta^{-1} \circ T_\alpha \circ T_\alpha^t \circ (T_\beta^{-1})^t = I_{n \times n}$ , mostrando que  $\tilde{T}$  é uma transformação ortogonal. Então a aplicação linear cuja representação matricial é dada por  $T = \begin{pmatrix} \tilde{T} & 0 \\ 0 & \tilde{T} \end{pmatrix}$

### 2.3 Caminhos Lagrangianos e o índice de Maslov

---

é simplética com  $T(\alpha) = \beta$ . De fato,

$$\begin{aligned} T^t J T &= \begin{pmatrix} \tilde{T}^t & 0 \\ 0 & \tilde{T}^t \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & -I_{n \times n} \\ I_{n \times n} & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{T} & 0 \\ 0 & \tilde{T} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -\tilde{T}^t \\ \tilde{T}^t & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \tilde{T} & 0 \\ 0 & \tilde{T} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} 0 & -I_{n \times n} \\ I_{n \times n} & 0 \end{pmatrix} = J, \end{aligned}$$

pois  $\tilde{T}^t \tilde{T} = I_{n \times n}$  ( $\tilde{T}$  é ortogonal), provando que  $T$  é simplética. Por fim,  $T(x_1 e_1 + \dots + x_n e_n + 0J e_1 + \dots + 0J e_n) = y_1 f_1 + \dots + y_n f_n + 0J f_1 + \dots + 0J f_n$ , isto é,  $T(\alpha) = \beta$ .

Dessa maneira, é sempre possível introduzir coordenadas de Darboux tais que  $\alpha$  seja o  $p$ -plano e  $\beta$  seja o  $q$ -plano. Nessas novas coordenadas, temos que  $\omega = dq \wedge dp$  e  $\Phi[\beta, \alpha](q, p) = \langle q, p \rangle$ . Mais ainda, acabamos de mostrar que o grupo  $Sp(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$  age transitivamente em  $\Lambda(n)$ .

Em particular, podemos reconstruir, de modo único, os planos lagrangianos  $\alpha$  e  $\beta$  a partir da forma quadrática  $\Phi[\beta, \alpha]$  dada. Para isto, consideremos o seguinte sistema hamiltoniano:

$$\begin{cases} \dot{q} = q \\ \dot{p} = -p \end{cases}$$

associado à função hamiltoniana  $H(q, p) = \Phi[\beta, \alpha](q, p) = \langle q, p \rangle$ . Então, para este caso,

$$\phi_t^H = \begin{pmatrix} E^+ & 0 \\ 0 & E^- \end{pmatrix}, \text{ em que } E^+ = \text{diag}(e^t, \dots, e^t) \text{ e } E^- = \text{diag}(e^{-t}, \dots, e^{-t}). \text{ Logo,}$$

$$\begin{aligned}\phi_t^H(q_0, p_0) &= \begin{pmatrix} E^+ & 0 \\ 0 & E^- \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} e^t q_0 \\ e^{-t} p_0 \end{pmatrix}\end{aligned}$$

Se  $(q_0, p_0) \neq (0, 0)$ , então observamos que, quando  $t \rightarrow +\infty$ ,  $\phi_t^H \in q$ -plano. Analogamente, quando  $t \rightarrow -\infty$ ,  $\phi_t^H \in p$ -plano. Portanto,  $\alpha$  ( $p$ -plano) e  $\beta$  ( $q$ -plano) são, respectivamente, as variedades instável e estável do sistema hamiltoniano definido anteriormente.

Vimos nas seções anteriores que  $\Lambda(n)$  é uma subvariedade mergulhada de  $G_n(2n)$  de dimensão  $\frac{n(n+1)}{2}$ . Mais ainda,  $\Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$  é um subconjunto estratificado de codimensão 1 (pois  $\frac{k(k+1)}{2} \geq 1$ , para  $k \geq 1$ ). No que se segue, focaremos nossa atenção no estrato  $\Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$ . Nesse contexto,  $\alpha$  será chamado de vértice.

Consideremos a aplicação  $\det^2 : \Lambda^{k \geq 1}(\alpha) \rightarrow \mathbb{C}$ . O conjunto  $\Sigma = \Lambda^{k \geq 2}(\alpha)$  é o conjunto das singularidades de  $\Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$ . Ele é uma subvariedade de codimensão 3 em  $\Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$  (pois  $\frac{k(k+1)}{2} \geq 3$ , para  $k \geq 2$ ). De fato, sejam  $\alpha$   $p$ -plano e  $\beta$  o  $q$ -plano. Então,  $\mathbb{R}^{2n} = \beta \oplus \alpha$ . Consideremos  $\gamma \in \Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$  arbitrário tomado numa vizinhança de  $\alpha$  e representemo-lo na forma matricial, isto é,  $T = \begin{pmatrix} A & B \\ C & D \end{pmatrix}$ , tal que  $T : \alpha \rightarrow \beta$ , com  $\gamma = \text{gráfico } T$ . Suponhamos que  $T$  tem posto  $k$ . Sem perda de generalidade, podemos supor que  $A_{k \times k}$  é uma matriz invertível. Nessas condições,  $T$  é equivalente a uma matriz da forma  $\begin{pmatrix} I_{k \times k} & * \\ 0_{(n-k) \times k} & 0_{(n-k) \times (n-k)} \end{pmatrix}$ . Temos que:

$$\begin{aligned}
 & \begin{pmatrix} I_{k \times k} & I_{k \times (n-k)} \\ 0_{(n-k) \times k} & W_{(n-k) \times (n-k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{k \times k}^{-1} & 0_{k \times (n-k)} \\ -CA_{(n-k) \times k}^{-1} & I_{(n-k) \times (n-k)} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} A_{k \times k} & B_{k \times (n-k)} \\ C_{(n-k) \times k} & D_{(n-k) \times (n-k)} \end{pmatrix} = \\
 & = \begin{pmatrix} I_{k \times k} & (I_{(n-k) \times k} - C_{(n-k) \times k} A_{(n-k) \times k}^{-1} B_{(n-k) \times k} + D_{(n-k) \times (n-k)}) \\ 0_{(n-k) \times k} & 0_{(n-k) \times (n-k)} \end{pmatrix},
 \end{aligned}$$

em que,  $W_{(n-k) \times (n-k)}$  é uma matriz tal que  $WCA^{-1}B = WD$ . De modo que, se  $k = n - 1$  então  $\dim(\gamma \cap \alpha) = 1$ . Mais geralmente, para  $k = n - l$ , temos  $\dim(\gamma \cap \alpha) = l$ , com  $0 \leq l \leq n$ . Assim, numa vizinhança de  $\alpha$ , o conjunto  $\Sigma \subseteq \Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$  de pontos em que a aplicação  $\det^2$  tem posto menor que  $n - 1$  é dado por gráficos de aplicações lineares  $T : \alpha \rightarrow \beta$ , com posto  $T \leq n - 2$ , isto é,  $\Sigma = \Lambda^{k \geq 2}(\alpha)$ , mostrando o afirmado.

A vizinhança  $U$  de qualquer plano lagrangiano na Grassmaniana Lagrangiana é difeomorfa a variedade das formas quadráticas não-degeneradas no  $\mathbb{R}^n$ . Com efeito, dado  $\alpha \in \Lambda(n)$ , e fixado um complemento lagrangiano  $\beta$ , temos que para qualquer plano lagrangiano  $\gamma$  pertencente a essa vizinhança de  $\alpha$ , o difeomorfismo mencionado é dado por  $\Xi : U \subseteq \Lambda(n) \rightarrow \{\text{Formas quadráticas no } \mathbb{R}^n\}$ , tal que  $\Xi(\gamma) = \Phi[\beta, \alpha] \Big|_{\gamma}$ . Claramente, se  $\gamma = \alpha$ , então  $\Phi[\beta, \alpha] \equiv 0$ . Assim, se  $\dim(\gamma \cap \alpha) = k$ , então  $\Phi[\beta, \alpha] \Big|_{\gamma \cap \alpha} \equiv 0$ , donde segue que o conjunto das formas degeneradas corresponde ao estrato  $\Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$ .

Recordemos que o co-índice de uma forma quadrática é a quantidade de  $+1$ 's na forma diagonal canônica garantida pelo Teorema de Sylvester. Como consequência do difeomorfismo local mencionado anteriormente, concluímos que a vizinhança  $U$  de  $\alpha$  é particionada em  $n + 1$  subconjuntos, segundo o co-índice das formas quadráticas não degeneradas  $\Phi[\beta, \alpha] \Big|_{\gamma}$ , com  $\gamma \in U$ . Por fim, a orientação transversal de  $\Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$  permite-nos definir uma ordem nesses subconjuntos, de acordo com o crescimento do co-índice das formas quadráticas relacionadas. Em particular, numa pequena vizinhança de  $\alpha$  é possível determinar uma região positiva com respeito a ordem introduzida anteriormente. Esse região corresponderá as formas quadráticas positivas definidas. Analogamente, é

### 2.3 Caminhos Lagrangianos e o índice de Maslov

---

possível determinar também uma região negativa que corresponderá as formas negativas definidas, conforme pode ser observado na figura 1.

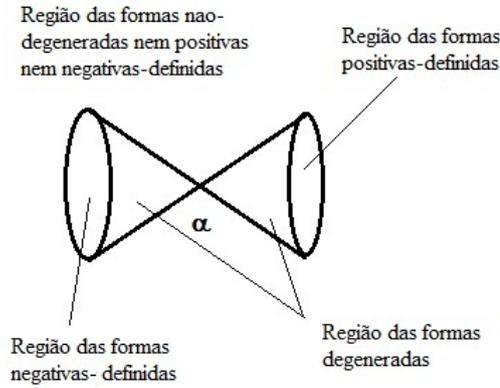


Figura 1: Regiões do estrato  $\Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$ .

A orientação transversal de  $\Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$  permite-nos definir o índice de intersecção de curvas orientadas sobre ele. Assumiremos que os pontos inicial e final da referida curva não pertencem a  $\Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$ . Dessa maneira, o índice de intersecção é igual ao incremento do co-índice da forma quadrática  $\Phi[\beta, \alpha] \Big|_{\gamma}$ , chamada também de função geradora e, portanto, não excede  $n$ . Nesse contexto, esse índice de intersecção é conhecido como índice de Maslov e será definido a seguir.

**Definição 2.7.** *O índice de Maslov de um caminho lagrangiano  $\Gamma$  começando em  $\gamma$ ,  $\gamma \notin \Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$ , e terminando em  $\alpha$  é, por definição, o índice de intersecção de um caminho lagrangiano  $\bar{\Gamma}$  com  $\Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$ , isto é, do caminho  $\bar{\Gamma}$  iniciando-se em  $\gamma$  e terminando em  $\alpha'$ , em que o ponto final  $\alpha'$  pertence ao domínio positivo (Ver figura 2).*

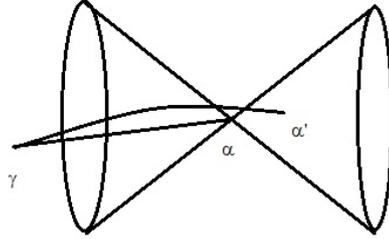


Figura 2: Interpretação geométrica do índice de Maslov.

### 2.3.1 Breves noções sobre fibrações e grupos de homologia

Usando a caracterização de  $\Lambda(n)$  como uma variedade homogênea, é possível definirmos o índice de Maslov em termos de Homologia. Na verdade, a definição (2.7) apresentada anteriormente é uma consequência de uma definição mais geral que envolve classes de homologia. Daremos uma breve exposição a seguir. Para esta finalidade, apresentaremos, sucintamente, alguns conceitos relacionados a espaços de recobrimento, fibrações e grupos de homologia. Para obter maior detalhes sobre o tema, consultar [7].

Seja  $\pi : E \rightarrow B$  uma aplicação contínua e sobrejetora. Diremos que  $\pi$  é aplicação de recobrimento se, para cada  $b \in B$ , existe uma vizinhança  $U$  de  $b$  tal que  $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha} V_{\alpha}$ ,  $\alpha \in A$  conjunto de índices, com  $V_{\alpha} \cap V_{\beta} = \emptyset$ ,  $\alpha \neq \beta$ , e satisfazendo  $\pi|_{V_{\alpha}}$  homeomorfismo para cada  $\alpha \in A$ .

**Definição 2.8.** *Uma fibração localmente trivial é uma quádrupla  $(E, B, F, \pi)$ , em que  $E, B$  e  $F$  são espaços topológicos e  $\pi : E \rightarrow B$  é uma aplicação diferenciável sobrejetora com as seguintes propriedades:*

1. Para cada  $b \in B$ , existe uma vizinhança  $U$  de  $b$ , tal que  $\pi^{-1}(U)$  é difeomorfa a

$U \times F$ ;

2. A aplicação  $\psi : U \times F \rightarrow \pi^{-1}(U)$  é consistente com a aplicação  $\pi$ , isto é,  $\pi \circ \psi = \pi_U$ , em que  $\pi_U : U \times F \rightarrow U$  indica a projeção canônica sobre  $U$ ;

Os espaços  $E$ ,  $B$  e  $F$  são chamados, respectivamente, de espaço total, espaço base e fibra. Suporemos, também, que quando temos duas trivializações locais para o fibrado  $(E, B, F, \pi)$ , digamos  $(U_\alpha, \pi_\alpha)$  e  $(U_\beta, \pi_\beta)$ , com  $U_\alpha \cap U_\beta \neq \emptyset$ , então, para cada  $x \in U_\alpha \cap U_\beta$ , com  $\psi_\alpha : U \times F \rightarrow \pi_\alpha^{-1}(x)$  e  $\psi_\beta : U \times F \rightarrow \pi_\beta^{-1}(x)$ , a aplicação  $(\pi_F \circ \psi_\beta^{-1}) \circ (\psi_\alpha \circ \pi_F^{-1}) : F \rightarrow F$  é um difeomorfismo. De modo que, a aplicação  $\gamma_{\beta, \alpha} : U_\alpha \cap U_\beta \rightarrow \text{Diff } F$  é chamada função de transição entre as trivializações  $\alpha$  e  $\beta$ .

**Exemplo 2.2.** Um exemplo de fibração é dado por  $(M \times F, M, F, \pi)$ , em que  $\pi : M \times F \rightarrow M$  é a projeção canônica sobre  $M$ . Tal fibração é conhecida como fibração trivial.

Notemos que, para cada  $b \in B$ , temos um difeomorfismo entre  $\pi^{-1}(b)$  e  $F$ . De fato,  $\psi|_{\{b\} \times F}$  é um difeomorfismo entre  $\{b\} \times F$  e  $\pi^{-1}(b)$ . Como  $\pi_F : \{b\} \times F \rightarrow F$ ,  $(b, f) \mapsto f$ , é, claramente, um difeomorfismo, concluímos o afirmado. Utilizaremos a notação  $F \hookrightarrow E \xrightarrow{\pi} B$  para indicar que  $F$  é uma fibra de  $E$ . Observemos que, localmente, a fibração permite-nos encarar  $E$  como  $B \times F$ . Ainda mais, o espaço  $E$  pode ser escrito como uma união disjunta de suas fibras, isto é,  $E = \bigcup_{x \in B} \pi^{-1}(x)$ .

**Exemplo 2.3.** Seja  $E$  espaço de recobrimento do espaço topológico  $B$ . Então, por definição, para cada  $b \in B$ , existe um aberto  $U$  contendo  $b$ . Além disso, de acordo com os comentários dos parágrafos precedentes,  $\pi^{-1}(U) = \bigcup_{\alpha \in A} V_\alpha$ . De modo que,  $(E, B, A, \pi)$  é uma fibração, com difeomorfismo  $\psi : U \times A \rightarrow E$ ,  $U \times \{\alpha\} \mapsto V_\alpha$ , mostrando que toda aplicação de recobrimento é, na verdade, uma fibração.

Assim, podemos reformular a definição de aplicação de recobrimento da seguinte

### 2.3 Caminhos Lagrangianos e o índice de Maslov

---

forma: uma aplicação  $\pi : E \rightarrow B$  é um recobrimento se  $\pi$  é uma fibração localmente trivial com fibra típica  $F$ , em que  $F$  é um conjunto discreto.

Consideremos o homomorfismo de grupos  $d = \det^2 : U(n) \rightarrow \mathbb{S}^1, A \mapsto \det^2(A)$ . Observamos, claramente, que se  $A \in O(n)$  então  $\det^2(A) = \pm 1$ , de modo que  $O(n) \subseteq \text{Ker}(d)$ . Obtemos, então, a aplicação

$$\begin{aligned} \bar{d} : \frac{U(n)}{O(n)} &\longrightarrow \mathbb{S}^1 \\ A.O(n) &\mapsto \det^2(A.O(n)) = \det^2(A) \end{aligned} ,$$

induzida por  $d$  por passagem ao quociente.

**Teorema 2.7.** *Seja  $f : G \rightarrow G'$  homomorfismo de grupos de Lie e sejam  $H \subseteq G, H' \subseteq G'$  subgrupos fechados tais que  $f(H) \subseteq H'$ . Consideremos a aplicação  $\bar{f} : \frac{G}{H} \rightarrow \frac{G'}{H'}$ , induzida por  $f$  por passagem ao quociente, isto é,  $\bar{f}(gH) = f(g)H', \forall g \in G$ . Se  $\bar{f}$  é sobrejetora, então  $\bar{f}$  é uma fibração diferenciável com fibra típica  $f^{-1}(H')/H$ .*

*Demonstração.* Seja  $\phi : G \times G'/H', (g, g'H') \mapsto (f(g)g')H'$ , a ação de  $G$  sobre  $G'/H'$ . Temos que  $G(1H') = \{(f(g).1)H'; g \in G\} = \{f(g)H'; g \in G\} = \bar{f}(G/H)$  e  $G_{1H'} = \{g \in G; (f(g).1)H' = 1H'\} = \{g \in G; f(g) \in H'\} = f^{-1}(H')$ . Como, por hipótese,  $\bar{f}$  é sobrejetora, segue do teorema (2.6), que a aplicação  $\hat{f} : G/f^{-1}(H') \rightarrow G'/H'$ , induzida de  $f$  por passagem ao quociente, é um difeomorfismo. Obtemos o seguinte diagrama comutativo:

$$\begin{array}{ccc} G/H & & \\ p \downarrow & \searrow \bar{f} & \\ G/f^{-1}(H') & \xrightarrow{\hat{f}} & G'/H' \end{array}$$

em que  $p$  é induzida da identidade de  $G$  por passagem ao quociente. Com base no teorema a seguir, cuja demonstração pode ser encontrada em [7], concluímos que  $p$  é uma fibração com fibra típica  $f^{-1}(H')/H$ .

## 2.3 Caminhos Lagrangianos e o índice de Maslov

---

**Teorema 2.8.** *Seja  $G$  um grupo de Lie e  $H, K$  subgrupos fechados de  $G$  com  $K \subseteq H$ . Então a aplicação  $p : G/K \rightarrow G/H$ ,  $gK \mapsto gH$  é uma fibração com fibra típica  $H/K$ .*

□

De modo que, tomando  $G = U(n)$ ,  $H = O(n)$ ,  $G' = \mathbb{S}^1$  e  $H' = \{1\}$ , concluímos que  $\bar{d}$  é uma fibração com fibra típica  $\text{Ker}(d)/O(n)$ . Consideremos

$$\begin{aligned} \chi : SU(n) \times \text{Ker}(d)/O(n) &\longrightarrow \text{Ker}(d)/O(n) \\ (A, BO(n)) &\mapsto (AB)O(n) \end{aligned} ,$$

a ação de  $SU(n)$  sobre  $\text{Ker}(d)$ . Claramente,  $\chi$  é transitiva. Mais ainda,

$$\begin{aligned} SU(n)_{I_n \times n \cdot O(n)} &= \{A \in SU(n); A \cdot O(n) = I_n \times n \cdot O(n)\} \\ &= \{A \in SU(n); A \in O(n)\} \\ &= SU(n) \cap O(n) = SO(n). \end{aligned}$$

Do teorema (2.6), segue que  $SU(n)/SO(n)$  é difeomorfo a  $\text{Ker}(d)/O(n)$ . Por fim, obtemos a seguinte seqüência exata da fibração  $\bar{d}$ :

$$0 = \pi_1(SU(n)/SO(n)) \longrightarrow \pi_1(U(n)/O(n)) \xrightarrow{\bar{d}_*} \pi_1(\mathbb{S}^1) \longrightarrow \pi_0(SU(n)/SO(n)) = 0$$

Segue daí que o homomorfismo  $\bar{d}_*$  é injetor e sobrejetor sendo, portanto, um isomorfismo entre os grupos fundamentais  $\pi_1(U(n)/O(n))$  e  $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ . A obtenção de tal seqüência foge ao escopo desse trabalho. Para maiores referências sobre o tema, consultar [7] (capítulo 3, seção 3.2).

Daremos, agora, uma breve exposição sobre grupos de homologia. Seja  $X$  um espaço topológico. Uma cadeia de complexos, que denotaremos por  $\mathbf{C} = (C_n, \partial_n)$ , é uma seqüência de grupos abelianos  $C_0, C_1, \dots$  conectados por homomorfismo  $\partial_n : C_n \rightarrow C_{n-1}$ , denominados operadores de fronteira, isto é,

$$\dots \xrightarrow{\partial_{n+1}} C_n \xrightarrow{\partial_n} C_{n-1} \xrightarrow{\partial_{n-1}} \dots \xrightarrow{\partial_2} C_1 \xrightarrow{\partial_1} C_0 \xrightarrow{\partial_0} 0$$

## 2.3 Caminhos Lagrangianos e o índice de Maslov

---

e  $C_i \equiv 0$ , para  $i < 0$ , em que  $0$  denota o grupo trivial. Aqui,  $C_n(X)$  denotará o grupo abeliano livre gerado por todos os  $p$ -simpliciais de  $X$ . Vamos exigir, também, que  $\partial_n \circ \partial_{n+1} = 0$ , ou seja, os elementos do grupo  $C_{n+1}$  são levados na identidade de  $C_{n-1}$ . Claramente, notamos que  $Im(\partial_{n+1}) \subseteq Ker(\partial_n)$ . Quando ocorre a igualdade para todo  $n \in \mathbb{Z}$ , a sequência é denominada exata. Como  $C_n$  é abeliano, segue que todos os seus subgrupos são normais. Em particular,  $Im(\partial_{n+1}), Ker(\partial_n)$  são subgrupos de  $C_n$ . Mais ainda,  $Im(\partial_{n+1})$  é normal em  $Ker(\partial_n)$ . Faz sentido, portanto, considerarmos o quociente  $Ker(\partial_n)/Im(\partial_{n+1})$ .

**Definição 2.9.** *O grupo quociente  $H_n := Ker(\partial_n)/Im(\partial_{n+1})$  é denominado  $n$ -ésimo grupo de homologia de  $X$ . Em particular, denotamos  $Ker(\partial_n) = Z_n(X)$  e  $Im(\partial_{n+1}) = B_n(X)$  que são denominados de, respectivamente, grupo dos  $n$ -ciclos singulares e grupo das  $n$ -fronteiras singulares de  $\mathbf{C}$ .*

Podemos estender a definição anterior para subconjuntos do espaço topológico  $X$ . Seja, então,  $A$  subespaço topológico de  $X$ . Definiremos a cadeia complexa  $\mathbf{C}(X, A)$  pondo  $C_n(X, A) = C_n(X)/C_n(A)$ . O conjunto  $H_n(X, A)$  será denominado  $n$ -ésimo grupo de homologia relativa do par  $(X, A)$ .

### 2.3.2 O índice de Maslov e Homologia

Em particular,  $H_1(X)$  pode ser calculado através do grupo fundamental de  $X$ . No nosso caso, consideraremos  $X = \Lambda(n)$  e  $A = \Lambda^0(\alpha)$ , em que  $\alpha$  é um plano lagrangiano fixado (em geral, o plano vertical). Dessa forma, obtemos o grupo  $H_1(\Lambda(n), \Lambda^0(\alpha))$  que é cíclico infinito (isomorfo a  $\mathbb{Z}$ ) (consultar [7], corolário 4.2.3). Ainda de acordo com [7], o caminho lagrangiano  $\Gamma : [a, b] \rightarrow \Lambda(n)$ , cujos pontos extremos pertencem a  $\Lambda^0(\alpha)$ , define uma classe de homologia relativa em  $H_1(\Lambda(n), \Lambda^0(\alpha))$ . De modo que, a orientação transversal do estrato  $\Lambda^1(\alpha)$  induz uma escolha canônica do gerador do grupo  $H_1(\Lambda(n), \Lambda^0(\alpha))$ .

Seja  $A : \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \rightarrow U(n)$ ,  $t \mapsto A(t) = \begin{pmatrix} e^{it} & & & \\ & i & & \\ & 0 & \ddots & \\ & & & i \end{pmatrix}$ , um caminho de matri-

zes unitárias. O caminho  $\bar{A}(t) = A(t).O(n)$  em  $U(n)/O(n)$ , construído a partir de  $A(t)$ , é fechado. De fato, basta observarmos que  $A\left(\frac{\pi}{2}\right) = \text{diag}(i, \dots, i)$  e  $A\left(\frac{3\pi}{2}\right) = \text{diag}(-i, \dots, -i)$  pertencem a mesma classe de equivalência em  $U(n)/O(n)$ :

$$\left[ A\left(\frac{3\pi}{2}\right) \right]^{-1} \cdot A\left(\frac{\pi}{2}\right) \in O(n).$$

**Observação 9.** *Seja  $\mathbb{S}^1$  o grupo multiplicativo dos números complexos de módulo 1 e  $\pi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{S}^1$ ,  $t \mapsto e^{2\pi it}$ , aplicação de recobrimento. Claramente, observamos que  $\text{Ker}(\pi) = \mathbb{Z}$ . Mais ainda, a ação  $\tau : \mathbb{Z} \times \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ ,  $(n, x) \mapsto \tau(n, x) = n + x$ , é livre e  $\mathbb{Z}_x = \{n + x \in \mathbb{R}; n \in \mathbb{Z}\}$  são as fibras de  $\pi$ . Nessas condições, obtemos um isomorfismo  $\delta_* : \pi_1(\mathbb{S}^1, 1) \rightarrow \mathbb{Z}$ ,  $\delta_*([\gamma]) = \tilde{\gamma}(0)$ , em que  $\tilde{\gamma} : I \rightarrow \mathbb{R}$  é um levantamento de  $\gamma$  tal que  $\tilde{\gamma}(1) = 0$ . Tomando, em particular, a classe de homotopia do caminho  $\gamma : I \rightarrow \mathbb{S}^1$ ,  $t \mapsto e^{2\pi it}$ , observamos que  $[\gamma]$  é um gerador de  $\pi_1(\mathbb{S}^1) \simeq \mathbb{Z}$ . Para maiores detalhes da construção do isomorfismo  $\delta_*$ , consultar [7] à página 83.*

De modo que, com base na observação 9, a classe de equivalência do caminho  $\zeta : \left[ \frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2} \right] \rightarrow \mathbb{S}^1$ ,  $t \mapsto \det^2(A(t)) = (-1)^{n-1}e^{2it}$  é um gerador de  $\pi_1(\mathbb{S}^1)$ . Do isomorfismo  $\bar{d}_*$  descrito anteriormente, segue que  $\bar{A}(t)$  define um gerador para  $\pi_1(U(n)/O(n))$ . Portanto, através do difeomorfismo

$$\begin{aligned} \Omega : U(n)/O(n) &\longrightarrow \Lambda(n) \\ A.O(n) &\longmapsto \Omega(A.O(n)) = A(\mathbb{R}^n \oplus \{0\}^n) \end{aligned}$$

obtemos que os planos lagrangianos  $A(t)(\mathbb{R}^n \oplus \{0\}^n)$  são dados por:

$$\begin{pmatrix} A_1 & -A_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix} (x_1, \dots, x_n, 0, \dots, 0)^t = (x_1 \cos t, 0, \dots, x_1 \sin t, x_2, \dots, x_n)^t$$

em que  $A = A_1 + iA_2 \in M_n(\mathbb{C})$  está identificada com a matriz  $\begin{pmatrix} A_1 & -A_2 \\ A_2 & A_1 \end{pmatrix} \in M_{2n}(\mathbb{R})$ . No nosso caso,  $A_1 = \begin{pmatrix} J(t)_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ , com  $J(t)_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} \cos t & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  e  $A_2 = \begin{pmatrix} K(t)_{2 \times 2} & 0 \\ 0 & I_{(n-2) \times (n-2)} \end{pmatrix}$ , com  $K(t)_{2 \times 2} = \begin{pmatrix} \sin t & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ . Assim, percebemos que  $\{e_1 \cos t + e_{n+1} \sin t, e_{n+2}, \dots, e_{2n}\}$  é o conjunto de vetores geradores de  $A(t)(\mathbb{R}^n \oplus \{0\}^n)$ , em que  $\{e_j\}_{j=1}^{2n}$  denota a base canônica do  $\mathbb{R}^{2n}$ . Por fim, baseando-nos nos comentários feitos em [7], é possível demonstrarmos que  $l(t) = \mathbb{R}(e_1 \cos t + e_{n+1} \sin t) + \sum_{j=n+2}^{2n} \mathbb{R}e_j$  é um gerador do grupo de homologia  $H_1(\Lambda(n), \Lambda^0(\alpha))$ .

**Teorema 2.9.** *Fixado um plano lagrangiano  $\alpha$ , sejam  $\Gamma_1, \Gamma_2 : [a, b] \rightarrow \Lambda(n)$  dois caminhos lagrangianos, cujos pontos extremos pertencem a  $\Lambda^0(\alpha)$ , que interceptam o estrato  $\Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$  somente uma vez. Suponhamos, que tais intersecções sejam transversais e positivas. Então,  $\Gamma_1, \Gamma_2$  são homólogas em  $H_1(\Lambda(n), \Lambda^0(\alpha))$ . Além disso, qualquer uma dessas curvas define um gerador de  $H_1(\Lambda(n), \Lambda^0(\alpha)) \simeq \mathbb{Z}$ .*

*Demonstração.* A verificação da primeira afirmação pode ser consultada em [7]. Para vermos a validade da segunda afirmação, exibiremos uma curva  $\Gamma : [a, b] \rightarrow \Lambda(n)$  na condição das hipóteses do teorema, que define um gerador de  $H_1(\Lambda(n), \Lambda^0(\alpha))$ . Seja, então,  $l$  caminho lagrangiano, em que  $l(t) = \mathbb{R}(e_1 \cos t + e_{n+1} \sin t) + \sum_{j=n+2}^{2n} \mathbb{R}e_j$  é um gerador de  $H_1(\Lambda(n), \Lambda^0(\alpha))$  como descrito anteriormente. Tomemos  $(e_j)_{j=1}^{2n}$  base simplética do  $\mathbb{R}^{2n}$ , tal que  $(e_j)_{j=1}^n$  é uma base de  $\alpha$  (toda base de um plano lagrangiano pode ser completada de maneira a ser uma base do  $\mathbb{R}^{2n}$ ).

Observamos que  $l(t) \cap \Lambda^{k \geq 1}(\alpha) \neq \emptyset$  se, e somente se,  $t = \pi$ . Claramente, vemos que  $l(\pi) \cap \Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$  é gerado por  $e_1$  e, portanto, tem dimensão um. Além disso, a forma

## 2.3 Caminhos Lagrangianos e o índice de Maslov

---

quadrática associada a classe de equivalência do vetor tangente  $l'(\pi)$  é dada por:

$$B(e_1, e_1) = \omega(S'(\pi)e_1, e_1) = \omega(e_{n+1}, e_1) = -1,$$

em que  $S'(\pi) = \begin{pmatrix} 0 & -M \\ M & 0 \end{pmatrix}$ , com  $M = \text{diag}(-1, 1, 1, \dots, 1)$ . Daí, observamos que  $l^{-1}$  tem intersecção única com o estrato  $\Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$ , e tal intersecção é transversal e positiva. Por fim, como  $l^{-1}$  é homóloga a  $-l$  (ver [7], proposição 3.3.27, à página 103) e tomando  $\Gamma = -l$ , concluímos o resultado.  $\square$

Desse modo, podemos definir um isomorfismo  $\mu_\alpha : H_1(\Lambda(n), \Lambda^0(\alpha)) \longrightarrow \mathbb{Z}$  da seguinte maneira: tomemos uma curva  $\Gamma$  de classe  $C^1$ , cujos pontos extremais pertencem a  $\Lambda^0(\alpha)$  e cuja intersecção com  $\Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$  seja única, transversal e positiva. Exigiremos, na definição de  $\mu_\alpha$ , que a classe de homologia de  $\Gamma$  seja levada em  $1 \in \mathbb{Z}$  (gerador do grupo dos inteiros). O teorema (2.9) garante que a aplicação  $\mu_\alpha$  está bem definida. Daí, vem a seguinte definição:

**Definição 2.10.** *Fixemos  $\alpha$  plano lagrangiano. Seja  $\Gamma : [a, b] \longrightarrow \Lambda(n)$  caminho lagrangiano, cujos pontos extremos pertencem a  $\Lambda^0(\alpha)$ . O número inteiro  $\mu_\alpha([\Gamma])$ , dado pelo isomorfismo definido anteriormente, é chamado de índice de Maslov da curva  $\Gamma$ , relativo ao plano lagrangiano  $\alpha$ .*

Segundo [7] e [8], o índice de Maslov goza das seguintes propriedades:

1. É invariante por reparametrizações da curva  $\Gamma$  que mantém fixos os pontos extremais;
2. É aditivo, isto é, se  $\Gamma : [a, b] \longrightarrow \Lambda(n)$  e  $\Psi : [a', b'] \longrightarrow \Lambda(n)$  são dois caminhos lagrangianos, cujos pontos extremais pertencem a  $\Lambda^0(\alpha)$ , tais que  $\Gamma(b) = \Psi(a')$ , então  $\mu_\alpha(\Psi.\Gamma) = \mu_\alpha(\Psi) + \mu_\alpha(\Gamma)$ , em que  $\Psi.\Gamma$  representa a concatenação desses caminhos;
3.  $\mu_\alpha(\Gamma^{-1}) = -\mu_\alpha(\Gamma)$ ;

4.  $\Gamma[a, b] \subseteq \Lambda^0(\alpha) \implies \mu_\alpha(\Gamma) = 0$ ;
5. Se  $A : (\mathbb{R}^{2n}, \omega) \longrightarrow (\mathbb{R}^{2n}, \omega)$  é um symplectomorfismo,  $\alpha \in \Lambda(n)$  e  $\alpha' = A(\alpha)$ , então  $\mu_\alpha(\Gamma) = \mu_{\alpha'}(A \circ \Gamma)$ , isto é,  $\mu_\alpha$  é symplecto-invariante;

Ainda mais, é sabido que dois caminhos lagrangianos homotópicos  $\Gamma$  e  $\Psi$ , em que os pontos extremais são mantidos em  $\Lambda^0(\alpha)$ , definem a mesma classe de homologia em  $H_1(\Lambda(n), \Lambda^0(\alpha))$ . Portanto, para  $\Gamma$  e  $\Psi$  nas condições descritas anteriormente, concluímos que o índice de Maslov  $\mu_\alpha$  é um invariante homotópico. A verificação dessas propriedades envolve resultados da teoria de homologia e foge aos nossos objetivos.

Assim, com base nas propriedades 2, 3 e 4, se  $\Gamma : [a, b] \longrightarrow \Lambda(n)$  é um caminho lagrangiano de classe  $C^1$ , cujos pontos extremais pertencem a  $\Lambda^0(\alpha)$  e cujas intersecções com  $\Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$  são todas transversais, então  $\mu_\alpha(\Gamma) = \kappa_+ - \kappa_-$ , em que  $\kappa_+$  e  $\kappa_-$  representam, respectivamente, o número de intersecções positivas e negativas de  $\Gamma$  com o estrato  $\Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$ . Isto nos mostra que  $\mu_\alpha(\Gamma)$  pode ser encarado como o número de intersecções de  $\Gamma$  com o estrato  $\Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$ , conforme já foi afirmado anteriormente.

Os próximos três resultados, de natureza topológica, nos indicam que, ao fixarmos  $\alpha \in \Lambda(n)$  (por exemplo, o  $p$ -plano), a classe de homotopia de caminhos lagrangianos ligando  $\gamma$  a  $\alpha$  pode ser representada por um par de pontos, denotado por  $(\tilde{\gamma}, \tilde{\alpha})$ , no recobrimento universal  $\tilde{\Lambda}(n)$  de  $\Lambda(n)$ . O teorema (2.10), enunciado a seguir, garante a propriedade do levantamento de homotopias. Sua demonstração pode ser encontrada em [21]. Contudo, focaremos nossa atenção no corolário (2.12), o qual garante a representação mencionada anteriormente. Para nosso caso, tomamos  $X = \tilde{\Lambda}(n)$ ,  $Y = \Lambda(n)$  e  $y_0 = \alpha$ .

**Teorema 2.10.** *Seja  $\pi : X \longrightarrow Y$  aplicação de recobrimento e consideremos  $f : Z \longrightarrow Y$  aplicação contínua tal que  $F : Z \longrightarrow X$  é seu levantamento, isto é,  $f = \pi \circ F$ . Se  $h : [0, 1] \times Z \longrightarrow Y$ , definida por  $h(t, z) = h_t(z)$  é uma homotopia de  $f$ , ( $h_0(z) = f(z)$ ), então existe um único levantamento de  $h$ ,  $H : [0, 1] \times Z \longrightarrow X$ , definido por*

## 2.3 Caminhos Lagrangianos e o índice de Maslov

---

$H(t, z) = H_t(z)$  tal que  $H_0(z) = F(z)$ .

□

**Corolário 2.11.** *Sejam  $\pi : X \rightarrow Y$  aplicação de recobrimento e  $\gamma : [0, 1] \rightarrow Y$  caminho contínuo iniciando em  $y_0$ . Então,  $\forall x_0 \in \pi^{-1}(y_0)$ , existe um único levantamento  $\Gamma : [0, 1] \rightarrow X$  de  $\gamma$  iniciando em  $x_0$ .*

*Demonstração.* No teorema (2.10), tomamos  $f : \{z_0\} \rightarrow Y$ , com  $f(z_0) = y_0$ , e  $h_t(z_0) = \gamma(t)$ . De modo que, para cada  $x_0 \in \pi^{-1}(y_0)$ , o único caminho  $\Gamma : [0, 1] \rightarrow X$ , satisfazendo  $\Gamma(0) = x_0$ , é dado por  $\Gamma(t) = H_t(z_0)$ , com  $F(z_0) = x_0$ . □

**Corolário 2.12.** *Sejam  $\pi : X \rightarrow Y$  aplicação de recobrimento e  $y_0 \in Y$ . Se  $\gamma_0, \gamma_1 \in \Omega(Y, y_0)$  são caminhos homotópicos, então para quaisquer levantamentos  $\Gamma_0$  e  $\Gamma_1$  que se iniciam no mesmo ponto temos, necessariamente, que eles terminam no mesmo ponto, isto é,  $\Gamma_0(1) = \Gamma_1(1)$ .*

*Demonstração.* Como  $\gamma_0, \gamma_1$  são caminhos homotópicos, existe uma aplicação contínua  $h : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow Y$ , tal que  $h(0, s) = \gamma_0(s)$  e  $h(1, s) = \gamma_1(s)$ . Pelo teorema (2.10), existe um único levantamento  $H : [0, 1] \times [0, 1] \rightarrow X$ ,  $(t, s) \mapsto H(t, s) = H_t(s)$ , satisfazendo  $H_0(s) = \Gamma_0(s)$  e  $H_1(s) = \Gamma_1(s)$ . Se  $\Gamma_0(0) = \Gamma_1(0)$ , então o caminho contínuo  $\Gamma_t(1) = H_t(1)$  é um caminho na fibra  $\pi^{-1}(y_0)$  que liga  $\Gamma_0(1)$  a  $\Gamma_1(1)$ . Ora, mas a fibra  $\pi^{-1}(y_0)$  é um conjunto discreto. Portanto, segue que o caminho  $\Gamma_t(1)$  é constante, provando o resultado. □

Segundo [21], a menos de isomorfismo, todo espaço topológico admite um recobrimento universal (ver corolário 6.2.23, à página 211). Seja, então,  $(\tilde{\gamma}, \tilde{\alpha})$  um par de pontos no recobrimento universal  $\tilde{\Lambda}(n)$  de  $\Lambda(n)$  e denotemos por  $m(\tilde{\gamma}, \tilde{\alpha})$  o índice de Maslov de qualquer caminho ligando  $\tilde{\gamma}$  a  $\tilde{\alpha}$  que representa tal classe de homotopia.

## 2.3 Caminhos Lagrangianos e o índice de Maslov

---

Como já mencionado, a identificação  $\Lambda(n) \simeq \frac{U(n)}{O(n)}$  permite-nos concluir que  $\pi_1(\Lambda(n), \alpha) \simeq \mathbb{Z}$ . Consideremos  $\pi : \tilde{\Lambda}(n) \longrightarrow \Lambda(n)$  aplicação de recobrimento e  $\alpha \in \Lambda(n)$ . Para todo  $\tilde{\alpha} \in \pi^{-1}(\alpha)$  e qualquer caminho  $\Gamma$  satisfazendo  $\Gamma(0) = \Gamma(1) = \alpha$ , denotaremos por  $\tilde{\Gamma}_{\tilde{\alpha}}$  o único levantamento de  $\Gamma$ , garantido pelo corolário (2.11), que inicia-se em  $\tilde{\alpha}$ . Então, escreveremos  $\tilde{\alpha} + \Gamma := \tilde{\Gamma}_{\tilde{\alpha}}(1)$ .

Do corolário (2.12), vem que se  $\Upsilon$  é qualquer outro caminho homotópico a  $\Gamma$ , satisfazendo  $\Upsilon(0) = \Upsilon(1) = \alpha$ , então  $\tilde{\alpha} + \Gamma = \tilde{\alpha} + \Upsilon$ . De modo que, o símbolo  $\tilde{\alpha} + \Gamma$  depende somente da classe de equivalência tomada em  $\pi_1(\Lambda(n), \alpha)$ . Além disso, temos que  $\tilde{\alpha} + ([\Gamma] + [\Upsilon]) = (\tilde{\alpha} + [\Gamma]) + [\Upsilon]$  e  $\tilde{\alpha} + e_\alpha = \tilde{\alpha}$ , em que  $[\cdot]$  representa a classe de equivalência e  $e_\alpha$  representa o caminho constante  $e_\alpha(t) = \alpha$ . De fato, a primeira igualdade é facilmente verificável (por concatenação de caminhos). Para a segunda igualdade, notemos que  $\pi(\tilde{\Gamma}(t)) = \Gamma(t) = \alpha, \forall t \in [0, 1]$ , isto é,  $\tilde{\Gamma}(t) \in \pi^{-1}(\alpha)$  que é discreto. De modo que, da continuidade do levantamento e da definição seguem que  $\tilde{\alpha} + e_\alpha = \tilde{\Gamma}_{\tilde{\alpha}}(1) = \tilde{\alpha}$ .

Assim, a aplicação  $\pi^{-1}(\alpha) \times \pi_1(\Lambda(n), \alpha) \longrightarrow \pi^{-1}(\alpha), (\tilde{\alpha}, [\Gamma]) \mapsto \tilde{\alpha} + [\Gamma]$ , define uma ação à direita do grupo fundamental de  $\Lambda(n)$  sobre a fibra  $\pi^{-1}(\alpha)$ . Com a identificação  $\pi_1(\Lambda(n), \alpha) \simeq \mathbb{Z}$ , reescrevemos a ação  $\pi^{-1}(\alpha) \times \mathbb{Z} \longrightarrow \pi^{-1}(\alpha), (\tilde{\alpha}, z) \mapsto \tilde{\alpha} + z$ . De modo que,  $\pi_1(\Lambda(n), \alpha) \simeq \mathbb{Z}$  atua em  $\tilde{\Lambda}(n)$  por translações. Por fim, denotaremos por  $+1$  a ação do gerador de  $\pi_1(\Lambda(n), \alpha)$  (que é homomorfo a  $H_1(\Lambda(n), \Lambda^0(\alpha))$ , via homomorfismo de Hurewicz) que intercepta o estrato  $\Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$  com índice 1.

**Observação 10.** *Seja  $G$  um grupo topológico com identidade  $e$  e  $X$  um conjunto qualquer. A ação à direita de  $G$  sobre  $X$  é uma aplicação contínua*

$$\begin{aligned} \phi : X \times G &\longrightarrow X \\ (x, g) &\mapsto \phi(x, g) \end{aligned} ,$$

tal que  $\phi(x, e) = x, \forall x \in X$ , e  $\phi(\phi(x, g), h) = \phi(x, gh), \forall g, h \in G, \forall x \in X$ .

O próximo resultado nos dá a seguinte “aritmética” do índice de Maslov:

**Teorema 2.13.** *No espaço de recobrimento  $\tilde{\Lambda}(n)$ , o índice de Maslov  $m(\tilde{\gamma}, \tilde{\alpha})$  tem as seguintes propriedades:*

1.  $m(\tilde{\gamma}, \tilde{\alpha} + 1) = m(\tilde{\gamma}, \tilde{\alpha}) + 1$ ;
2.  $m(\tilde{\gamma}, \tilde{\alpha}) + m(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}) = n$ ;
3.  $m(\tilde{\beta}, \tilde{\alpha}) + m(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}) + m(\tilde{\gamma}, \tilde{\beta}) = n + I(\beta, \alpha, \gamma)$ ;

em que  $I(\cdot, \cdot, \cdot)$  representa o índice da tripla  $(\cdot, \cdot, \cdot)$ .

*Demonstração.* (1) Notemos que o par  $(\tilde{\gamma}, \tilde{\alpha} + 1)$  em  $\tilde{\Lambda}(n)$  representa, em  $\Lambda(n)$ , a adição de um laço no caminho correspondente ao par  $(\tilde{\gamma}, \tilde{\alpha})$ , cujo índice de intersecção com o estrato  $\Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$  é 1. O resultado segue de imediato.

(2) Primeiramente, devemos notar que o índice de Maslov  $m(\tilde{\gamma}, \tilde{\alpha})$  não muda sob deformações do caminho, em  $\Lambda(n)$ , correspondente ao par  $(\tilde{\gamma}, \tilde{\alpha})$ , enquanto o plano lagrangiano  $\gamma(t)$  não intercepta o estrato  $\Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$ . Suponhamos, então, que ocorra a intersecção na direção positiva. Então,  $m(\tilde{\gamma}, \tilde{\alpha})$  cresce de 1 (o co-índice da forma quadrática correspondente aumenta), enquanto  $m(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma})$  decresce de 1 (o co-índice da forma quadrática correspondente diminui). Seja  $\Gamma$  um caminho lagrangiano arbitrário em  $\Lambda(n)$  ligando  $\gamma$  a  $\alpha$  e  $(\tilde{\gamma}, \tilde{\alpha})$  o par de pontos que o representa no recobrimento universal  $\tilde{\Lambda}(n)$ . Suponhamos, sem perda de generalidade, que o caminho lagrangiano  $(\gamma, \alpha)$  está contido numa única carta coordenada. De modo que, nestas condições, estamos na situação descrita na figura 2, isto é,  $\gamma$  representa uma forma quadrática negativa-definida e  $\alpha$  a forma quadrática nula. Portanto,  $m(\tilde{\gamma}, \tilde{\alpha}) = n$ , pois o co-índice da forma quadrática cresce de 0 a  $n$ . Em contrapartida, podemos escolher o caminho contrário de tal modo que ele não intercepta o estrato  $\Lambda^{k \geq 1}(\gamma)$ , isto é,  $m(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}) = 0$ . Segue daí o resultado.

(3) Primeiramente, devemos notar que a soma presente no primeiro membro da igualdade só depende da tripla de planos lagrangianos  $(\beta, \alpha, \gamma)$  e não dos caminhos que os conectam dois a dois. Com efeito, se os pares de planos lagrangianos são mantidos transversais,

### 2.3 Caminhos Lagrangianos e o índice de Maslov

---

então a soma permanece invariante por deformações da tripla. Além disso, a substituição de  $\tilde{\beta}$  por  $\tilde{\beta} + 1$  também não afeta a soma, pois  $m(\tilde{\beta} + 1, \tilde{\alpha}) + m(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}) + m(\tilde{\gamma}, \tilde{\beta} + 1) =$

$$\begin{aligned} &= n - m(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta} + 1) + m(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}) + m(\tilde{\gamma}, \tilde{\beta} + 1) \quad (\text{por (2)}) \\ &= n - m(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) - 1 + m(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}) + m(\tilde{\gamma}, \tilde{\beta}) + 1 \quad (\text{por (1)}) \\ &= m(\tilde{\beta}, \tilde{\alpha}) + m(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}) + m(\tilde{\gamma}, \tilde{\beta}) \quad (\text{por (2)}) \end{aligned}$$

Por fim, ao trocarmos  $\tilde{\alpha}$  por  $\tilde{\gamma}$  a soma também permanece invariante, já que:

$$\begin{aligned} m(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma}) + m(\tilde{\gamma}, \tilde{\alpha}) + m(\tilde{\alpha}, \tilde{\beta}) &= n - m(\tilde{\gamma}, \tilde{\beta}) + n - m(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}) + n - m(\tilde{\beta}, \tilde{\alpha}) \quad (\text{por (2)}) \\ &= 3n - [m(\tilde{\gamma}, \tilde{\beta}) + m(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}) + m(\tilde{\beta}, \tilde{\alpha})] \end{aligned}$$

De modo que, para caminhos lagrangianos particulares podemos calcular tal soma explicitamente. Tomemos, então, dois planos lagrangianos transversais fixos  $\alpha$  e  $\beta$ , de tal maneira que  $\beta$  pertença a região das formas positiva-definidas em relação ao estrato  $\Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$ . Neste contexto, os planos lagrangianos  $\gamma$ , transversais a  $\beta$ , serão expressos pela função geradora  $\Pi_\gamma : \alpha \rightarrow \beta$ , dada por  $\Pi_\gamma(p) = \frac{1}{2}\pi^*\Phi[\beta, \alpha](p)$ , em que  $\pi : \alpha \rightarrow \gamma$  representa a projeção de  $\alpha$  em  $\gamma$ , ao longo de  $\beta$ . Supondo, sem perda de generalidade, que  $\alpha$  é o  $p$ -plano e  $\beta$  é o  $q$ -plano, obtemos que  $\Pi_\gamma(p) = \langle \pi_\beta(\pi(p)), \pi_\alpha(\pi(p)) \rangle$ , em que  $\pi_\beta$  e  $\pi_\alpha$  representam, respectivamente, as projeções em  $\beta$  e  $\alpha$  na decomposição  $\mathbb{R}^{2n} = \beta \oplus \alpha$ . Claramente, para  $\gamma = \alpha$  temos que  $\Pi_\alpha \equiv 0$ , pois  $\pi(p) = p$ ,  $\pi_\alpha(\pi(p)) = p$  e  $\pi_\beta(\pi(p)) = 0$ ,  $\forall p \in \alpha$ . Mais ainda, se  $\gamma \in \Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$ , então  $\Pi_\gamma|_{\gamma \cap \alpha} \equiv 0$ , de modo que os planos lagrangianos sobre o estrato  $\Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$  correspondem a formas quadráticas degeneradas.

Consideremos, então,  $\gamma$  plano lagrangiano transversal a  $\beta$  e  $\alpha$  simultaneamente. Como  $\alpha$  e  $\gamma$  são transversais a  $\beta$ , podemos expressá-los em termos de funções geradoras  $\Pi_\alpha$  e  $\Pi_\gamma$ , respectivamente. Os caminhos dados por  $\Pi_\alpha + sP$  e  $\Pi_\gamma + sP$ , com  $s \geq 0$ , ligam  $\alpha$  e  $\gamma$  a  $\beta$ , respectivamente, para alguma forma quadrática positiva-definida  $P$ . Já

o segmento de reta, no espaço das formas quadráticas, dado por  $s \mapsto s\Pi_\gamma$ ,  $0 \leq s \leq 1$ , liga os planos lagrangianos  $\alpha$  e  $\gamma$ .

De modo que,  $m(\tilde{\beta}, \tilde{\alpha}) = 0$ , pois  $\Pi_\alpha + sP$  é uma forma positiva-definida,  $\forall s > 0$ , donde segue que  $\Pi_\alpha + sP$  não intercepta o estrato  $\Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$ . Analogamente, temos que  $m(\tilde{\beta}, \tilde{\gamma}) = 0$ , pois  $\Pi_\gamma + sP$ ,  $\forall s > 0$ , é sempre uma forma quadrática positiva-definida, para  $P$  escolhida adequadamente. Assim,  $\Pi_\gamma + sP$  também não intercepta o estrato  $\Lambda^{k \geq 1}(\gamma)$ . Por fim,  $m(\tilde{\gamma}, \tilde{\alpha})$  é, por definição, o incremento do co-índice da função geradora  $\Pi_\gamma$ , isto é, em outras palavras, o incremento do co-índice sobre o caminho lagrangiano que liga  $\Pi_\gamma$  a  $\varepsilon P$ ,  $\varepsilon > 0$ . Portanto, de acordo com os itens (1) e (2) e usando a propriedade (1) do índice da tripla, concluimos que  $m(\tilde{\beta}, \tilde{\alpha}) + m(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}) + m(\tilde{\gamma}, \tilde{\beta}) = 0 + n - I(\alpha, \beta, \gamma) + n = 0 + I(\beta, \alpha, \gamma) + n = n + I(\beta, \alpha, \gamma)$ , provando o afirmado.

□

### 2.3.3 Caso particular: hamiltoniano linear

No estudo de equações diferenciais do tipo  $\ddot{x} = -A(t)x$ , cujo sistema hamiltoniano correspondente é dado por  $\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -A(t)q \end{cases}$  tem sentido em falar no fluxo  $\phi_t^H$  agindo nos planos lagrangianos. Obtemos a seguinte caracterização: sejam  $\alpha$  plano lagrangiano e  $\alpha(t) = \phi_t^H(\alpha)$  sua evolução pelo fluxo do sistema (1.5). Fixado um complemento lagrangiano  $\beta$  de  $\alpha$ , consideremos, para  $t$  suficientemente pequeno e  $v \in \alpha$ ,  $w(t) \in \beta$  tal que  $v + w(t) \in \alpha(t)$ .

**Definição 2.11.** *Com base na construção anterior, definimos a forma quadrática dada por  $Q(v) = \frac{d}{dt}|_{t=0} \omega(v, w(t))$ .*

O próximo resultado nos informa que a forma quadrática dada na definição (2.11) independe da escolha do complemento lagrangiano  $\beta$ .

### 2.3 Caminhos Lagrangianos e o índice de Maslov

---

**Teorema 2.14.** *Seja  $Q(v)$  forma quadrática definida como anteriormente. Então ela independe da escolha do complemento lagrangiano  $\beta$ . Ainda mais, em termos do referencial de  $\gamma(t)$ , podemos expressá-la por  $Q(v) = \langle X(0)u, \dot{Y}(0)u \rangle - \langle Y(0)u, \dot{X}(0)u \rangle$ , em que  $v = T(0)u$ .*

*Demonstração.* Escolhamos coordenadas de Darboux tais que  $\alpha$  seja o  $p$ -plano. Então, qualquer plano lagrangiano  $\beta$  transversal a  $\alpha$  pode ser expresso como o gráfico de uma aplicação  $G \in L(\mathbb{R}^n)$ ,  $G_{n \times n}$  simétrica:

$$\beta = \{(q, Gq); q \in \mathbb{R}^n\}$$

Além disso, se  $t$  for suficientemente pequeno, podemos expressar  $\alpha(t)$  como o gráfico de uma transformação linear  $A(t) \in \mathbb{R}^{n \times n}$ :

$$\alpha(t) = \{(A(t)p, p); p \in \mathbb{R}^n\}$$

Logo,  $v = (0, p)$ ,  $w(t) = (q(t), Gq(t))$  e  $v + w(t) = (q(t), p + Gq(t)) = (A(t)p, p)$ , donde vem que  $\omega(v, w(t)) = -\langle p, q(t) \rangle$ . Portanto,  $Q(v) = \langle p, \dot{A}(0)p \rangle$ , que independe da matriz  $G$ , provando a primeira parte do teorema.

Para a segunda parte, escolhamos coordenadas de Darboux tais que  $\beta$  seja o  $q$ -plano. Além disso, seja  $T(t) = (X(t), Y(t))$  um referencial para  $\alpha(t)$ . Então,  $v = (X(0)u, Y(0)u)$ ,  $w(t) = (q(t), 0)$  e  $X(0)u + q(t) = X(t)[Y(t)]^{-1}Y(0)u$ . Logo,  $\omega(v, w(t)) = -\langle Y(0)u, q(t) \rangle$ . Por fim, segue que:

$$\begin{aligned}
 Q(v) &= - \langle Y(0)u, \dot{q}(0) \rangle \\
 &= - \langle Y(0)u, \dot{X}(0)[Y(0)]^{-1}Y(0)u - X(0)[Y(0)]^{-1}\dot{Y}(0)[Y(0)]^{-1}Y(0)u \rangle \\
 &= - \langle Y(0)u, \dot{X}(0)u \rangle + \langle Y(0)u, X(0)[Y(0)]^{-1}\dot{Y}(0)u \rangle \\
 &= -u^t(\dot{X}(0))^t + u^t(\dot{Y}(0))^t([Y(0)]^{-1})^t(X(0))^tY(0)u \\
 &= \langle X(0)u, \dot{Y}(0)u \rangle - \langle Y(0)u, \dot{X}(0)u \rangle,
 \end{aligned}$$

em que, na última igualdade, usamos o fato que  $[X(0)]^tY(0) = [Y(0)]^tX(0)$ . □

**Observação 11.** Para cada  $t \in [a, b]$ ,  $\alpha(t)$  é um plano lagrangiano, pois  $d\phi_t^H(z)$  preserva a forma simplética, isto é, fixado  $z = (q, p) \in \alpha$ , temos:

$$\omega(d\phi_t^H(z)u, d\phi_t^H(z)v) = \omega(u, v) = 0,$$

em que,  $u, v \in T_z\alpha$ .

Para nossos interesses, definiremos o índice de Maslov para o par  $(\gamma, \alpha)$  no caso particular em que  $\alpha$  é o  $p$ -plano. Entretanto, o índice de Maslov pode ser definido para dois planos lagrangianos quaisquer de modo análogo. Seja, então,  $\Gamma(\alpha, \gamma, t) = \mathcal{Q}|_{\alpha \cap \gamma(t)}$ .

**Definição 2.12.** Um ponto  $\tau \in [a, b]$  é um momento de não-transversalidade para  $(\alpha, \gamma)$  se  $\gamma(\tau) \cap \alpha \neq \{0\}$ .

Claramente, se  $t$  não é um momento de não-transversalidade para  $(\alpha, \gamma)$ , então  $\Gamma \equiv 0$ . Diremos que um momento de não-transversalidade  $t$  é regular se a forma quadrática  $\Gamma$  é não-degenerada. Caso contrário, diremos que ele é singular.

Da Álgebra Linear, sabemos que dada uma forma bilinear simétrica  $B$ , o índice  $(n_-(B))$ , o co-índice  $(n_+(B))$  e a degenerescência  $(n_0(B))$  são definidos, respectivamente, pelo número de  $-1$ 's,  $1$ 's e  $0$ 's na forma diagonal canônica de  $B$  dada pelo Teorema

### 2.3 Caminhos Lagrangianos e o índice de Maslov

---

de Sylvester. A assinatura de  $B$  ( $\sigma(B)$ ) é definida como  $\sigma(B) = n_+(B) - n_-(B)$ . Por fim, se o espaço vetorial considerado é  $n$ -dimensional, então sempre é válido que  $n_+(B) + n_-(B) + n_0(B) = n$ .

Como os autovalores de uma família suave de matrizes simétricas  $B(t)$  são funções contínuas de  $t$ , segue que o conjunto de momentos de não-transversalidade regulares é isolado, donde vem que existe, no máximo, um número finito deles em  $[a, b]$ .

**Definição 2.13.** *O índice de Maslov do par  $(\gamma, \alpha)$  é dado por:*

$$\mu(\gamma, \alpha) = \sigma(\Gamma(\alpha, \gamma, a)) + \sum_{a < t < b} \sigma(\Gamma(\alpha, \gamma, t)) + \sigma(\Gamma(\alpha, \gamma, b)),$$

em que o somatório é tomado sobre todos os momentos de não-transversalidade.

Consideremos, sem perda de generalidade, que  $\alpha$  seja o  $p$ -plano. Seja  $A(t)$  uma família de transformações simpléticas. Então, para cada  $t \in [a, b]$ , o subespaço  $A(t)\alpha$  é lagrangiano. Se  $(X(t), Y(t))$  é um referencial para  $A(t)\alpha$ , então vale  $\dim(A(t)\alpha \cap \alpha) = \dim(\text{Ker } X(t))$ .

**Definição 2.14.** *Seja o sistema de  $2n$  equações diferenciais ordinárias de  $1^a$  ordem dado por  $Jz' = B(t)z$ ,  $z \in \mathbb{R}^{2n}$ , com  $B$  positiva definida,  $t \in [a, b]$ . Diremos que  $\tau$  é um momento de verticalidade para a equação anterior se o seguinte problema de valores de contorno possui uma solução não trivial:*

$$\begin{cases} Jz' = B(t)z \\ x(0) = 0 = x(\tau) \end{cases} \quad (2.1)$$

O número de momentos de verticalidade é, então, dado por  $j(B) = \sum_{a < t < b} m(t)$ , em que  $m(\cdot)$  representa a multiplicidade e o somatório é tomado sobre todos os momentos de verticalidade.

## 2.3 Caminhos Lagrangianos e o índice de Maslov

---

Os momentos de não-transversalidade e os momentos de verticalidade estão relacionados da seguinte maneira: um ponto  $\tau$  é um momento de não-transversalidade para  $A(t)\alpha$  se, e somente se,  $\tau$  for um momento de verticalidade para (2.1). Mais ainda, em termos do referencial,  $m(\tau) = \dim \text{Ker } (X(\tau))$ .

Assim, o próximo resultado, cuja demonstração pode ser encontrada em [18], além de estabelecer uma relação entre o índice de Maslov e o número de momentos de verticalidade, permite-nos concluir que este último também é finito.

### Teorema 2.15.

$$\mu(A(t)\alpha, \alpha) = -[N + j(B) + m(b)]$$

**Observação 12.** Consideremos a equação diferencial de segunda ordem  $\ddot{x} = -\psi(t)x$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $\psi(t)$  simétrica  $\forall t \in [a, b]$ . Podemos reescrevê-la como um sistema de equações diferenciais de 1ª ordem:

$$J \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}' = J \begin{pmatrix} 0 & I_{n \times n} \\ -\psi(t) & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \psi(t) & 0 \\ 0 & I_{n \times n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

No nosso contexto,  $B(t) = \begin{pmatrix} \psi(t) & 0 \\ 0 & I_{n \times n} \end{pmatrix}$ . Mais ainda, se  $A(t)$  satisfaz a equação diferencial matricial  $JA'(t) = BA(t)$ , com  $A(0) = I_{2n \times 2n}$ , isto é,  $A(t)$  é uma matriz fundamental para  $\ddot{x} = -\psi(t)x$ , então  $A(t)$  é simplética. Com efeito, observemos que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} ([A(t)]^t JA(t)) &= [A'(t)]^t JA(t) + [A(t)]^t JA'(t) \\ &= (-JB(t)A(t))^t JA(t) + [A(t)]^t JA'(t) \\ &= [A(t)]^t B(t) JJA(t) + [A(t)]^t B(t)A(t) \\ &= -[A(t)]^t B(t)A(t) + [A(t)]^t B(t)A(t) = 0, \end{aligned}$$

isto é,  $[A(t)]^t JA(t)$  é constante. Em particular, temos que  $[A(0)]^t JA(0) = [A(t)]^t JA(t)$ ,

## 2.4 Exemplo: a Grassmaniana Lagrangiana $\Lambda(2)$

---

$\forall t \in [a, b]$ . Ora, mas  $A(0) = I_{2n \times 2n}$ , donde segue que  $[A(t)]^t J A(t) = J$  e, portanto,  $A(t)$  é simplética.

## 2.4 Exemplo: a Grassmaniana Lagrangiana $\Lambda(2)$

Essa seção é destinada a explorar propriedades de  $\Lambda(2)$ . Iniciamos, descrevendo a fibração de Hopf, de duas maneiras: a primeira no espaço projetivo complexo e a segunda através dos quatérnios e rotações em  $\mathbb{R}^3$ . Mostraremos, com o auxílio da fibração de Hopf, que a aplicação  $det^2 : U(2)/O(2) \rightarrow \mathbb{S}^1$  é uma fibração não-trivial, cuja fibra é difeomorfa a  $\mathbb{S}^2$ . Por fim, identificamos o estrato  $\Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$ , em  $\Lambda(2)$ , com um cone quadrático em  $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$ .

A aplicação  $\pi : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^1 \simeq \mathbb{S}^2$  foi estudada por Heinz Hopf, em 1931, no artigo “Über die Abbildungen der dreidimensionalen sphäre auf die Kugelfläche”, fornecendo um exemplo de fibração não-trivial de  $\mathbb{S}^3$  sobre  $\mathbb{S}^2$  cuja fibra é  $\mathbb{S}^1$ . Mais geralmente, a aplicação  $\pi_n : \mathbb{S}^{2n+1} \rightarrow \mathbb{C}\mathbb{P}^n$ ,  $\forall n \in \mathbb{N}$ , é denominada fibração de Hopf. Ela constitui-se um objeto importante dentro da Física e Matemática, tendo aplicações em monopólos magnéticos, corpos mecânicos rígidos e teoria quântica da informação.

Seja  $\mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{R}^4$  o conjunto de todas as quadrúplas ordenadas  $(x, y, z, w)$  satisfazendo  $x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$ , isto é, a esfera tridimensional. Sob o ponto de vista do isomorfismo  $\mathbb{R}^4 = \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C} \times \mathbb{C} = \mathbb{C}^2$ , podemos reescrever  $\mathbb{S}^3$  da seguinte maneira:  $\mathbb{S}^3 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2; |z_1|^2 + |z_2|^2 = 1\}$ .

Diremos que o par ordenado  $(z_1, z_2)$  está relacionado com o par ordenado  $(w_1, w_2)$ , se existe  $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$ , tal que  $(z_1, z_2) = c(w_1, w_2)$ . Se este for o caso, escreveremos  $(z_1, z_2) \sim (w_1, w_2)$ . Facilmente, verificamos que  $\sim$  é uma relação de equivalência em  $\mathbb{C}^2$ , isto é,  $\sim$  goza das propriedades reflexiva, simétrica e transitiva. Denotaremos por  $\mathbb{C}\mathbb{P}^1$  o conjunto das classes de equivalência em  $\mathbb{C}^2 \setminus \{0\}$ , denominado reta projetiva complexa. A classe de equivalência do par  $(z_1, z_2)$  será denotada por  $[z_1 : z_2]$ . Em síntese,

## 2.4 Exemplo: a Grassmaniana Lagrangiana $\Lambda(2)$

---

$\mathbb{CP}^1 = \{[z : 1] \mid z \in \mathbb{C}\} \cup [1 : 0]$ . De modo que, através desse ponto de vista, observamos que  $\mathbb{CP}^1$  possui uma cópia de  $\mathbb{C}$  com a adição de um ponto. Mais ainda, podemos encarar  $\mathbb{CP}^1$  como o conjunto das classes de equivalência em  $\mathbb{S}^3$ , em que os pontos antípodas estão identificados. Obtemos, então, o seguinte resultado:

**Teorema 2.16.**  $\mathbb{CP}^1$  é homeomorfo a  $\widehat{\mathbb{C}} = \mathbb{C} \cup \{\infty\}$ .

*Demonstração.* Primeiramente, observemos que  $\widehat{\mathbb{C}}$  é homeomorfo a  $\mathbb{S}^2$  via projeção estereográfica (esfera de Riemann). Seja, então,  $f : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$ ,  $(z_1, z_2) \mapsto \frac{z_1}{z_2}$ , em que  $|z_1|^2 + |z_2|^2 = 1$ . Da Análise Complexa, vem que  $f$  é contínua. Ademais,  $f(z_1, z_2) = f(w_1, w_2)$  se, e somente se,  $\frac{z_1}{z_2} = \frac{w_1}{w_2}$ , isto é, se existe  $c \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  tal que  $(z_1, z_2) = c(w_1, w_2)$ , ou seja, se  $(z_1, z_2) \sim (w_1, w_2)$ . Logo,  $f$  induz a relação de equivalência  $\sim$  em  $\mathbb{S}^3$ . Portanto, ao passarmos o quociente  $\mathbb{S}^3 / \sim$  (que é homeomorfo a  $\mathbb{CP}^1$ ), observamos que este é homeomorfo a  $\mathbb{S}^2$  (que é homeomorfo a  $\widehat{\mathbb{C}}$ ), provando o resultado.  $\square$

**Exemplo 2.4.** (*Fibração de Hopf*) A quádrupla  $(\mathbb{S}^3, \mathbb{S}^2, \mathbb{S}^1, \pi)$ , em que  $\pi : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$  é a aplicação definida por  $\pi(z_1, z_2) = [z_1 : z_2]$ , é chamada *fibração de Hopf*. Notemos que,  $\pi(z_1, z_2) = \pi(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2)$  se, e somente se, existe  $\lambda \in \mathbb{C} \setminus \{0\}$  tal que  $\tilde{z}_1 = \lambda z_1$  e  $\tilde{z}_2 = \lambda z_2$ . Da condição  $(\tilde{z}_1, \tilde{z}_2) \in \mathbb{S}^3$  segue que:

$$\begin{aligned} 1 &= \tilde{z}_1 \overline{\tilde{z}_1} + \tilde{z}_2 \overline{\tilde{z}_2} \\ &= \lambda \overline{\lambda} z_1 \overline{z_1} + \lambda \overline{\lambda} z_2 \overline{z_2} \\ &= \lambda \overline{\lambda} (z_1 \overline{z_1} + z_2 \overline{z_2}) = \lambda \overline{\lambda} \end{aligned}$$

De modo que,  $|\lambda| = 1$ , isto é,  $\lambda \in \mathbb{S}^1$ . Então,  $\pi^{-1}([z_1 : z_2]) = \{(e^{i\varphi} z_1, e^{i\varphi} z_2) \in \mathbb{S}^3; 0 \leq \varphi \leq 2\pi\}$ , mostrando que a pré-imagem de cada ponto de  $\mathbb{S}^2$  é um grande círculo em  $\mathbb{S}^3$ . Portanto, para todo  $b \in \mathbb{S}^2$ , temos que  $\pi^{-1}(b)$  é homeomorfo a  $\mathbb{S}^1$ .

## 2.4 Exemplo: a Grassmaniana Lagrangiana $\Lambda(2)$

---

Consideremos  $\mathbb{S}^2 \setminus \{0\}$  e  $\mathbb{R}^2$  uma cobertura aberta de  $\mathbb{S}^2$  dada, respectivamente, por  $\mathbb{S}^2 \setminus [0 : 1]$  e  $\mathbb{S}^2 \setminus [1 : 0]$ . Seja  $\mu \in \mathbb{S}^2$  o número complexo estendido dado por  $\mu = \frac{z_1}{z_2}$ . Definimos:

$$\psi_1(\mu, \theta) = \begin{cases} \left( \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{1 + \frac{1}{|\mu|^2}}}, \frac{e^{i\theta}}{\mu \sqrt{1 + \frac{1}{|\mu|^2}}} \right), & \mu \neq \infty \\ (e^{i\theta}, 0), & \mu = \infty \end{cases}$$

$$\psi_2(\mu, \theta) = \left( \frac{\mu e^{i\theta}}{\sqrt{1 + |\mu|^2}}, \frac{e^{i\theta}}{\sqrt{1 + |\mu|^2}} \right)$$

em que  $\psi_1 : \mathbb{S}^2 \setminus \{0\} \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \pi^{-1}(\mathbb{S}^2 \setminus \{0\})$  e  $\psi_2 : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{S}^1 \rightarrow \pi^{-1}(\mathbb{R}^2)$ . Podemos demonstrar que  $\psi_1$  e  $\psi_2$  são homeomorfismos. De modo que, para todo  $b \in \mathbb{S}^2$ , existe uma vizinhança  $U$  de  $b$  tal que  $\pi^{-1}(U)$  é homeomorfa a  $U \times \mathbb{S}^1$ , através de um dos homeomorfismos restrito a  $U$ . Mais ainda,  $(\pi \circ \psi_i)(\theta, \mu) = \mu$ , com  $i \in \{1, 2\}$ . Portanto,  $\mathbb{S}^1 \hookrightarrow \mathbb{S}^3 \xrightarrow{\pi} \mathbb{S}^2$ .

Daremos, agora, uma interpretação da fibração de Hopf sob o ponto de vista do conjunto dos números quatérnios  $\mathbb{H}$ , isto é,  $\mathbb{H} = \{a + bi + cj + dk; a, b, c, d \in \mathbb{R}\}$ . Da álgebra abstrata, sabemos que  $\mathbb{H}$  é um anel de divisão, ou seja, satisfaz todas as condições para ser um corpo, excetuando-se, a comutatividade. As relações fundamentais presentes em  $\mathbb{H}$  são  $i^2 = j^2 = k^2 = -1$ ,  $ijk = -1$ . Notemos que existe uma associação natural entre  $\mathbb{H}$  e  $\mathbb{R}^4$ , em que o quatérnio  $q = a + bi + cj + dk$  está associado à quádrupla ordenada  $(a, b, c, d)$ . Similarmente ao conjunto dos números complexos, podemos definir o conjugado do quatérnio  $q = a + bi + cj + dk$  por  $\bar{q} = q = a - bi - cj - dk$ . Por fim, a norma de  $q$  é dada por  $\|q\| = \sqrt{q\bar{q}}$  e possui a seguinte propriedade:  $\|qr\| = \|q\|\|r\|$ . Facilmente, notamos que, para  $q \neq 0$ ,  $q^{-1} = \frac{1}{\|q\|^2} q\bar{q}$ .

Para cada quatérnio  $r$ , podemos associar uma rotação de  $\mathbb{R}^3$  da seguinte forma: associaremos ao ponto  $p = (x, y, z) \in \mathbb{R}^3$  o quatérnio imaginário  $xi + yj + zk$ . Cálculos simples

## 2.4 Exemplo: a Grassmaniana Lagrangiana $\Lambda(2)$

---

nos mostram que  $rpr^{-1}$  é, também, um quaternário imaginário, digamos,  $x'i + y'j + z'k$ . De modo que, se definirmos  $R_r : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$ ,  $p \mapsto rpr^{-1}$ , obtemos a rotação desejada. Observemos que  $R_r(p_1 + \alpha p_2) = r(p_1 + \alpha p_2)r^{-1} = rp_1r^{-1} + \alpha rp_2r^{-1} = R_r(p_1) + \alpha R_r(p_2)$ , mostrando que a aplicação  $R_r$  é linear. Além disso,  $R_{\lambda r}(p) = \lambda r p \lambda^{-1} r^{-1} = r p r^{-1} = R_r(p)$ , para  $\lambda \in \mathbb{R}$ ,  $\lambda \neq 0$ . Finalmente,  $(R_{r^{-1}} \circ R_r)(p) = r^{-1}(rpr^{-1})r = p$  e  $(R_r \circ R_{r^{-1}})(p) = r(r^{-1}pr)r^{-1} = p$ , mostrando que  $R_{r^{-1}} = (R_r)^{-1}$ . Assim, de acordo com os comentários anteriores, podemos escolher, sem perda de generalidade,  $r \in \mathbb{H}$  de tal maneira que  $\|r\| = 1$ .

Claramente, se  $r = \pm 1$  então  $R_r = Id$ . Além disso,  $\|R_r(p)\| = \|rpr^{-1}\| = \|p\|$ , mostrando que  $R_r$  é uma isometria. Observemos, também, que:

$$\begin{aligned} R_r((b, c, d)) &= (a + bi + cj + dk)(bi + cj + dk)(a - bi - cj - dk) \\ &= ((-b^2 - c^2 - d^2) + abi + acj + adk)(a - bi - cj - dk) \\ &= -b(-b^2 - c^2 - d^2)i - c(-b^2 - c^2 - d^2)j - d(-b^2 - c^2 - d^2)k - a^2(-bi - cj - dk) \\ &= bi + cj + dk = (b, c, d) \end{aligned}$$

mostrando que  $(b, c, d)$  é autovetor de  $R_r$  associado ao autovalor 1. Por outro lado, tomemos  $w \in \mathbb{R}^3$  tal que  $w \perp (b, c, d)$ . Consideraremos dois casos:

1. Se  $b \neq 0$  ou  $c \neq 0$ , então tomamos  $w = ci - bj$ ;
2. Se  $b = c = 0$ , então tomamos  $w = i$ ;

Cálculos simples nos mostram que, em qualquer um dos casos,  $\cos \theta = \frac{\langle w, R_r w \rangle}{\|w\|^2} = a^2 - b^2 - c^2 - d^2 = 2a^2 - 1$ , isto é,  $a^2 = \frac{1 + \cos \theta}{2}$ , ou seja,  $a = \cos\left(\frac{\theta}{2}\right)$ , donde segue que  $\theta = 2 \arccos a = 2 \arcsin \sqrt{b^2 + c^2 + d^2}$ . Assim, dado  $r = a + bi + cj + dk \in \mathbb{H}$ , temos que  $R_r(p)$  é uma rotação de  $p$  em  $\mathbb{R}^3$  de um ângulo  $\theta$  em torno do eixo  $(b, c, d)$ .

Notemos, também, que se  $r, s \in \mathbb{H}$  então  $(R_r \circ R_s)(p) = r(sps^{-1})r^{-1} = (rs)p(rs)^{-1} = R_{rs}(p)$ , isto é, a composição de rotações pode ser interpretada como o produto dos

## 2.4 Exemplo: a Grassmaniana Lagrangiana $\Lambda(2)$

---

quatérnios unitários  $r$  e  $s$  a elas correspondentes. Mais ainda, sabemos que  $\mathbb{S}^3 \subseteq \mathbb{H}$  é um grupo com a operação de multiplicação de quatérnios e  $SO(3)$  é um grupo com a operação de composição de rotações. De modo que, a aplicação sobrejetora  $h : \mathbb{S}^3 \rightarrow SO(3)$ , definida por  $h(r) = R_r$  é um homomorfismo de grupos com núcleo  $\{-1, 1\}$ . Logo, pelo teorema do homomorfismo, concluímos que  $\mathbb{S}^3/\{-1, 1\}$  é isomorfo a  $SO(3)$ .

Fixemos  $P_0 = (1, 0, 0) \in \mathbb{S}^2$ . Definimos  $\pi : \mathbb{S}^3 \rightarrow \mathbb{S}^2$  por  $\pi(r) = ri\bar{r}$ . Notemos que  $\|\pi(r)\| = \|r\|\|i\|\|r^{-1}\| = 1$ , mostrando a boa definição da aplicação  $\pi$ . Geometricamente, buscamos o quatérnio unitário  $r$ , associado a rotação  $R_r$ , que leva  $(1, 0, 0) \in \mathbb{S}^2$  no ponto  $P = (x, y, z)$ . Claramente, percebemos que  $\pi(a + bi + cj + dk) = (a^2 + b^2 - c^2 - d^2, 2(ad + bc), 2(bd - ac))$ , para  $r = a + bi + cj + dk$ .

Dados  $A, B \in \mathbb{S}^2$ , tomemos  $\overline{AB}$  um arco do grande círculo que passa em  $A$  e  $B$ . Existem duas possibilidades de rotações  $R_r$  que levam  $A$  em  $B$ . Primeiramente, notemos que o eixo de rotação situa-se sobre o grande círculo que bissecta  $\overline{AB}$ , conforme indica a figura 3. De modo que, ou o eixo de rotação passa pelo ponto médio de  $\overline{AB}$  ou o eixo de rotação é perpendicular aos raios  $\overline{OA}$  e  $\overline{OB}$ . No primeiro caso, o ângulo de rotação é  $\theta = \pi$  radianos, enquanto que no segundo caso o ângulo de rotação é dado pela relação  $\cos \theta = \langle \overline{OA}, \overline{OB} \rangle$ . Em particular, para nosso caso, tomaremos  $A = (1, 0, 0)$  e  $B = P = (p_1, p_2, p_3)$ .

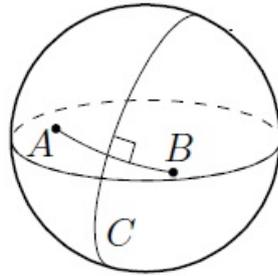


Figura 3: Posições relativas do eixo de rotação de  $R_r$ .

## 2.4 Exemplo: a Grassmaniana Lagrangiana $\Lambda(2)$

---

De modo que, obtemos duas rotações  $R_{r_1}$  e  $R_{r_2}$ , respectivamente, associadas aos quatérnios unitários  $r_1$  e  $r_2$ , os quais obteremos, explicitamente, agora (Veja figura 4). Como vimos, ao quatérnio  $r = a + bi + cj + dk$  está associada a rotação  $R_r$  com eixo de rotação  $(b, c, d)$  e ângulo de rotação  $\theta = 2 \arccos a$ . Para  $R_{r_1}$ , o eixo de rotação é dado por  $\left(\frac{1+p_1}{2}, \frac{p_2}{2}, \frac{p_3}{2}\right)$  e o ângulo de rotação é dado por  $\theta = \pi$ , donde segue que  $r_1 = 0 + \frac{1+p_1}{2}i + \frac{p_2}{2}j + \frac{p_3}{2}k$ . Cálculos simples nos mostram que  $\|r_1\| = \frac{2}{\sqrt{2(1+p_1)}}$ . Tomando  $r_1$  normalizado temos  $r_1 = \frac{2}{\sqrt{2(1+p_1)}} \left(0 + \frac{1+p_1}{2}i + \frac{p_2}{2}j + \frac{p_3}{2}k\right)$ . Analogamente, para  $R_{r_2}$ , o eixo de rotação é dado por  $(0, -p_3, p_2)$  e o ângulo de rotação  $\theta$  é tal que  $\cos \theta = p_1$ . Daí segue que  $r_2 = \sqrt{\frac{1+p_1}{2}} - p_3j + p_2k$ . Normalizando  $r_2$ , obtemos  $r_2 = \sqrt{\frac{2}{(p_1+1)(3-2p_1)}} \left(\sqrt{\frac{1+p_1}{2}} - p_3j + p_2k\right)$ .

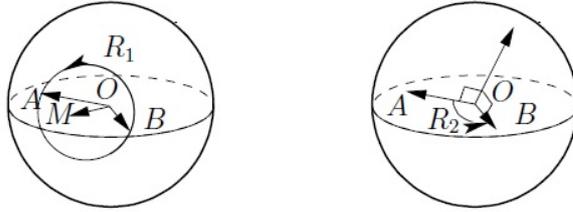


Figura 4: Visualização geométrica das rotações  $R_{r_1}$  e  $R_{r_2}$ , respectivamente.

Escrevendo  $e^{i\varphi} = \cos \varphi + (\sin \varphi)i$ , observamos que, para o primeiro caso,  $\pi(r_1 e^{i\varphi}) = (r_1 e^{i\varphi})i(r_1 e^{i\varphi})^{-1} = r_1 e^{i\varphi} i e^{-i\varphi} r_1^{-1} = r_1 i r_1^{-1} = P$ , mostrando que  $\pi^{-1}(P) = \{r_1 e^{i\varphi}\}_{0 \leq \varphi \leq 2\pi}$ . Analogamente, para o segundo caso, notamos que  $\pi^{-1}(P) = \{r_2 e^{i\varphi}\}_{0 \leq \varphi \leq 2\pi}$ . Particularmente, quando  $P = (-1, 0, 0)$ , notemos que  $\pi(k e^{i\varphi}) = k e^{i\varphi} i e^{-i\varphi} (-k) = -i = (-1, 0, 0)$ , isto é,  $\pi^{-1}(P) = \{k e^{i\varphi}\}_{0 \leq \varphi \leq 2\pi}$ . Assim, como já afirmado anteriormente, concluímos que  $h^{-1}(P)$  é homeomorfo a  $\mathbb{S}^1$ .

A projeção estereográfica

$$p : \mathbb{S}^3 \setminus \{(1, 0, 0, 0)\} \longrightarrow \mathbb{R}^3$$

$$(w, x, y, z) \mapsto \left( \frac{x}{1-w}, \frac{y}{1-w}, \frac{z}{1-w} \right),$$

nos auxiliará a “enxergar” a fibração de Hopf em  $\mathbb{R}^3$ . É sabido que a aplicação  $p$  preserva círculos de  $\mathbb{S}^3$ , isto é, a imagem por  $p$  de um círculo de  $\mathbb{S}^3$  é um círculo no espaço euclidiano  $\mathbb{R}^3$ , exceto no caso em que o círculo contém o ponto  $(1, 0, 0, 0)$ , cuja imagem por  $p$  é uma reta que passa pela origem. Logo, excetuando-se o caso mencionado anteriormente, e relembrando que  $\pi^{-1}(P) \in \mathbb{S}^3$ , concluímos que, via projeção estereográfica  $p$ ,  $p(\pi^{-1}(P))$  é um círculo em  $\mathbb{R}^3$ .

Notemos que  $\pi^{-1}((1, 0, 0))$  é representada por quatérnios da forma  $r = a_1 + a_2i$ , em que  $a_1^2 + a_2^2 = 1$ . Segue daí que  $p(\pi^{-1}((1, 0, 0))) = \left( \frac{a_2}{1-a_1}, 0, 0 \right)$ , isto é,  $p(\pi^{-1}((1, 0, 0)))$  representa o eixo das abscissas (eixo  $-x$ ). Por outro lado,  $\pi^{-1}((-1, 0, 0))$  é representada por quatérnios da forma  $r = a_3j + a_4k$ , com  $a_3^2 + a_4^2 = 1$ . Logo,  $p(\pi^{-1}((-1, 0, 0))) = (0, a_3, a_4)$ , isto é, o círculo unitário do plano  $yz$ . Por fim, tomando  $P \in \mathbb{S}^2 \setminus \{(1, 0, 0), (-1, 0, 0)\}$ , notamos que  $\pi^{-1}(P) = \{r_s e^{i\varphi}\}_{0 \leq \varphi \leq 2\pi}$ ,  $s \in \{1, 2\}$ , isto é, para  $a_1, a_2, a_3, a_4$  adequados, podemos representar, em termos matriciais,

$$\pi^{-1}(P) = \begin{pmatrix} \cos \varphi & -\sin \varphi & 0 & 0 \\ \sin \varphi & \cos \varphi & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos \varphi & \sin \varphi \\ 0 & 0 & -\sin \varphi & \cos \varphi \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \\ a_4 \end{pmatrix},$$

com  $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ . Seja, então,  $(\tilde{a}_1, \tilde{a}_2, \tilde{a}_3, \tilde{a}_4) \in \pi^{-1}(P)$  arbitrário. De modo que,  $p(\pi^{-1}(P)) = \left( \frac{\tilde{a}_2}{1-\tilde{a}_1}, \frac{\tilde{a}_3}{1-\tilde{a}_1}, \frac{\tilde{a}_4}{1-\tilde{a}_1} \right)$  é um círculo em  $\mathbb{R}^3$ . Mais ainda, impondo  $\tilde{a}_2 = 0$ , obtemos  $a_1 \sin \varphi + a_2 \cos \varphi = 0$ , isto é,  $\tan \varphi = \left( \frac{-a_2}{a_1} \right)$ ,  $a_1 \neq 0$ . Caso contrário,  $\varphi = \frac{\pi}{2}$  ou  $\varphi = \frac{3\pi}{2}$ . Em qualquer um dos casos, mostramos que o círculo  $p(\pi^{-1}(P))$  intercepta o plano  $yz$  em dois pontos  $A$  e  $B$ .

## 2.4 Exemplo: a Grassmaniana Lagrangiana $\Lambda(2)$

---

Se  $a_1 = 0$ , então  $\tilde{a}_1 = \pm a_2$ . Segue daí que o comprimento dos segmentos de retas  $\overline{OA}$  e  $\overline{OB}$  são dados, respectivamente, por  $\frac{1-a_2}{1+a_2}$  e  $\frac{1+a_2}{1-a_2}$ . A igualdade  $\frac{1-a_2}{1+a_2} = 1$  é válida se, e somente se,  $a_2 = 0$ . Logo,  $p(\pi^{-1}(P))$  é o círculo unitário no plano  $yz$ . Suponhamos, então, que  $a_2 \neq 0$ . Segue daí que  $\frac{1-a_2}{1+a_2} > 1$  ou  $\frac{1-a_2}{1+a_2} < 1$ . Em qualquer caso temos, respectivamente,  $\frac{1+a_2}{1-a_2} < 1$  e  $\frac{1+a_2}{1-a_2} > 1$ , isto é, se  $A$  está no interior do círculo unitário, então  $B$  está no exterior do mesmo, e vice-versa.

Se  $a_1 \neq 0$ , então os comprimentos dos segmentos de retas  $\overline{OA}$  e  $\overline{OB}$  são dados, respectivamente, por  $\frac{a_3^2 + a_4^2}{(1 - \tilde{a}_1)^2}$ , em que  $\tilde{a}_1 = a_1 \cos \varphi - a_2 \sin \varphi$ . O caso  $a_2 = 0$  é análogo ao caso  $a_1 = 0$  descrito anteriormente. Suponhamos, então, que  $-\frac{a_2}{a_1} > 0$ . Segue daí que  $\text{sgn}(a_1) = -\text{sgn}(a_2)$ .

1. *Caso 1:*  $\tilde{a}_1 = a_1 \cos \varphi - a_2 \sin \varphi$ , com  $\varphi \in 1^\circ$  quadrante

$$\begin{aligned} (1 - a_1 \cos \varphi + a_2 \sin \varphi)^2 &= 1 + 2(-a_1 \cos \varphi + a_2 \sin \varphi) + a_1^2 \cos^2 \varphi - 2a_1 a_2 \cos \varphi \sin \varphi + a_2^2 \sin^2 \varphi \\ &= 1 + 2 \left( \frac{-a_1 |a_1|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} + \frac{a_2 |a_2|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \right) + \frac{a_1^4}{a_1^2 + a_2^2} - 2a_1 a_2 \frac{|a_1| |a_2|}{a_1^2 + a_2^2} + \frac{a_2^4}{a_1^2 + a_2^2} \\ &= 1 - 2 \text{sgn}(a_1) \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + a_1^2 + a_2^2 \\ &= \left( 1 - \text{sgn}(a_1) \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \right)^2 \end{aligned}$$

$$\text{Donde segue que } \frac{a_3^2 + a_4^2}{(1 - \tilde{a}_1)^2} = \frac{1 - a_1^2 - a_2^2}{\left( 1 - \text{sgn}(a_1) \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \right)^2} = \frac{1 + \text{sgn}(a_1) \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{1 - \text{sgn}(a_1) \sqrt{a_1^2 + a_2^2}}.$$

2. *Caso 2:*  $\tilde{a}_1 = a_1 \cos \varphi - a_2 \sin \varphi$ , com  $\varphi \in 3^\circ$  quadrante

$$\begin{aligned} (1 - a_1 \cos \varphi + a_2 \sin \varphi)^2 &= 1 + 2(-a_1 \cos \varphi + a_2 \sin \varphi) + a_1^2 \cos^2 \varphi - 2a_1 a_2 \cos \varphi \sin \varphi + a_2^2 \sin^2 \varphi \\ &= 1 + 2 \left( \frac{-a_1(-|a_1|)}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} + \frac{a_2(-|a_2|)}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} \right) + \frac{a_1^4}{a_1^2 + a_2^2} - 2a_1 a_2 \frac{|a_1| |a_2|}{a_1^2 + a_2^2} + \frac{a_2^4}{a_1^2 + a_2^2} \\ &= 1 + 2 \text{sgn}(a_1) \sqrt{a_1^2 + a_2^2} + a_1^2 + a_2^2 \\ &= \left( 1 + \text{sgn}(a_1) \sqrt{a_1^2 + a_2^2} \right)^2 \end{aligned}$$

## 2.4 Exemplo: a Grassmaniana Lagrangiana $\Lambda(2)$

---

Donde segue que 
$$\frac{a_3^2 + a_4^2}{(1 - \tilde{a}_1)^2} = \frac{1 - a_1^2 - a_2^2}{\left(1 + \operatorname{sgn}(a_1)\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\right)^2} = \frac{1 - \operatorname{sgn}(a_1)\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{1 + \operatorname{sgn}(a_1)\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}$$

Claramente,  $\frac{1 + \operatorname{sgn}(a_1)\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{1 - \operatorname{sgn}(a_1)\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} = 1$  acarreta  $a_1 = a_2 = 0$ , isto é,  $p(\pi^{-1}(P))$  é um

círculo no plano  $yz$ . Segue daí que  $\frac{1 + \operatorname{sgn}(a_1)\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{1 - \operatorname{sgn}(a_1)\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} < 1$  ou

$\frac{1 + \operatorname{sgn}(a_1)\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{1 - \operatorname{sgn}(a_1)\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} > 1$ , ou seja, temos, respectivamente, que  $\frac{1 - \operatorname{sgn}(a_1)\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{1 + \operatorname{sgn}(a_1)\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} > 1$

e  $\frac{1 - \operatorname{sgn}(a_1)\sqrt{a_1^2 + a_2^2}}{1 + \operatorname{sgn}(a_1)\sqrt{a_1^2 + a_2^2}} < 1$ . Geometricamente falando, se  $A$  está no interior do círculo unitário do plano  $yz$  então  $B$  está no exterior desse mesmo círculo, e vice-versa. Os cálculo

referentes a suposição  $-\frac{a_2}{a_1} < 0$  são análogos aos que foram efetuados anteriormente. Isto significa que os círculos  $p(\pi^{-1}(P))$  e  $p(\pi^{-1}(-1, 0, 0))$  estão ligados.

Mais ainda, cálculos simples nos mostram que  $l(t) = (1 - 2t)(0, m, n)$  é a equação da reta que liga os pontos  $A$  e  $B$ , com

$$m = \frac{a_3|a_1| + a_4|a_2|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \left|1 - \operatorname{sgn}(a_1)\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\right|}$$

$$n = \frac{-a_3|a_2| + a_4|a_1|}{\sqrt{a_1^2 + a_2^2} \left|1 - \operatorname{sgn}(a_1)\sqrt{a_1^2 + a_2^2}\right|}$$

Fazendo  $t = \frac{1}{2}$ , observamos que  $l$  passa pela origem. Além disso, substituindo  $a_1, a_2, a_3, a_4$  por suas expressões em termos de  $p_1, p_2$  e  $p_3$ , notamos que  $(0, p_3, -p_2)$  é o vetor diretor de  $l$ . Por fim, com base nas considerações anteriores, afirmamos que o plano que contém o círculo  $p(\pi^{-1}(P))$  não pode conter o eixo- $x$ . Com efeito, suponhamos, por absurdo, que ele contenha tal eixo. Então, temos que  $p(\pi^{-1}(P)) \cap p(\pi^{-1}(1, 0, 0)) \neq \emptyset$ , fato que gera um absurdo, pois as fibras são disjuntas. Dessa forma, concluímos que o eixo- $x$  atravessa pelo interior do círculo  $p(\pi^{-1}(P))$ , conforme nos indica a figura 5.

## 2.4 Exemplo: a Grassmaniana Lagrangiana $\Lambda(2)$

---

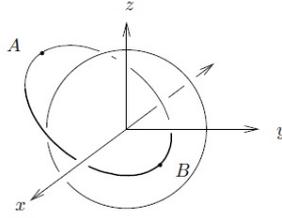


Figura 5: Esquema da projeção estereográfica de duas fibras da fibração de Hopf.

Finalizando, mostraremos que quaisquer dois círculos  $C = p(\pi^{-1}(P_1))$  e  $D = p(\pi^{-1}(P_2))$ , obtidos através das projeções das fibras  $\pi^{-1}(P_1)$  e  $\pi^{-1}(P_2)$ , respectivamente, estão ligados. Sejam  $\tilde{S} \in C$  fixado,  $r = p^{-1}(\tilde{S})$  e  $f : \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^4$ , aplicação linear definida por  $f(x) = kr^{-1}x$ . Claramente  $f$  é contínua. Suponhamos que  $f(x) = f(y)$ , isto é,  $kr^{-1}x = kr^{-1}y$ . Segue daí que  $kr^{-1}(x - y) = 0$ , donde vem que  $x = y$ , mostrando que  $f$  é injetora. Definimos a aplicação contínua  $\psi : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^3$  por  $\psi(\tilde{P}) = (p \circ f \circ p^{-1})(\tilde{P})$ . Observamos que, se  $\psi(\tilde{P}) = \psi(\tilde{Q})$ , então  $p(f(p^{-1}(\tilde{P}))) = p(f(p^{-1}(\tilde{Q})))$ . Da injetividade das aplicações  $p$ ,  $p^{-1}$  e  $f$ , segue que  $\tilde{P} = \tilde{Q}$ , isto é,  $\psi$  também é uma aplicação injetora. Além disso, dado  $\tilde{P} \in C$  arbitrário, temos que  $\psi(\tilde{P}) = p(kr^{-1}(re^{i\varphi})) = p(ke^{i\varphi}) = p((\sin \varphi)j + (\cos \varphi)k) = (0, 0, \sin \varphi, \cos \varphi)$ , em que  $p^{-1}(\tilde{P}) = re^{i\varphi}$ , para algum  $\varphi \in [0, 2\pi]$ . Logo,  $\psi(C)$  é o círculo unitário no plano  $yz$ . Por outro lado, o círculo  $D$  também é levado sobre algum círculo que é projeção alguma fibra. Já sabemos que os círculos  $\psi(C)$  e  $\psi(D)$  são ligados. Por fim, a bijeção contínua  $\psi$  acarreta que os círculos  $C$  e  $D$  também são ligados. As figuras 6 e 7 ilustram a fibração de Hopf, via projeção estereográfica.

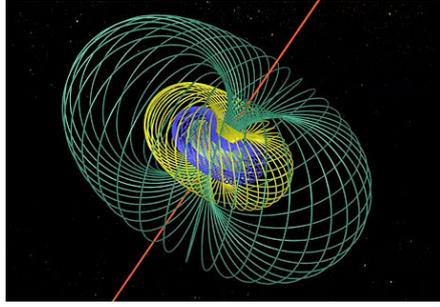


Figura 6: Visualização da fibração de Hopf em  $\mathbb{R}^3$ .

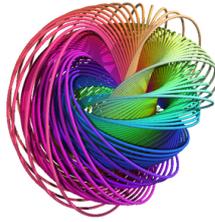


Figura 7: O espaço euclidiano tridimensional decomposto em toros.

O próximo teorema nos fornece outro exemplo de fibração não-trivial. A fibração de Hopf descrita anteriormente nos auxiliará a compreender a estrutura das suas fibras.

**Teorema 2.17.** *A aplicação  $\det^2 : \Lambda(2) \rightarrow \mathbb{S}^1$  é uma fibração não-trivial, cuja fibra  $F$  é difeomorfa a  $\mathbb{S}^2$ , sendo obtida através do produto  $\mathbb{S}^2 \times [0, 1]$  pela identificação  $(p, 0) \sim (-p, 1)$  (aplicação antípoda).*

*Demonstração.* Seja  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in U(2)$  arbitrária. Da condição  $AA^* = I_{2 \times 2}$ , em que  $A^*$  representa a adjunta clássica de  $A$ , segue que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \bar{a} & \bar{c} \\ \bar{b} & \bar{d} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |a|^2 + |b|^2 & a\bar{c} + b\bar{d} \\ c\bar{a} + d\bar{b} & |c|^2 + |d|^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Expressamos  $a, b, c, d \in \mathbb{C}$  na forma polar, isto é,  $a = r_1 e^{i\theta_1}$ ,  $b = r_2 e^{i\theta_2}$ ,  $c = r_3 e^{i\theta_3}$  e

## 2.4 Exemplo: a Grassmaniana Lagrangiana $\Lambda(2)$

---

$d = r_4 e^{i\theta_4}$ , com  $r_1, r_2, r_3, r_4 > 0$ . Então, obtemos as seguintes igualdades:

$$r_1^2 + r_2^2 = 1 \quad (2.2)$$

$$r_1 r_3 e^{i(\theta_1 - \theta_3)} + r_2 r_4 e^{i(\theta_2 - \theta_4)} = 0 \quad (2.3)$$

$$r_3^2 + r_4^2 = 1 \quad (2.4)$$

Multiplicando (2.3) por  $r_4 e^{i\theta_3} e^{i\theta_4}$  e impondo  $r_1 r_4 e^{i(\theta_1 + \theta_4)} - r_2 r_3 e^{i(\theta_2 + \theta_3)} = 1$ , obtemos:

$$\begin{aligned} r_1 r_3 r_4 e^{i(\theta_1 + \theta_4)} &= -r_2 r_4^2 e^{i(\theta_2 + \theta_3)} \\ r_3(1 + r_2 r_3 e^{i(\theta_2 + \theta_3)}) &= -r_2 r_4^2 e^{i(\theta_2 + \theta_3)} \\ r_3 &= -r_2(r_3^2 + r_4^2) \\ r_3 &= -r_2 e^{i(\theta_2 + \theta_3)} \quad (\text{por (2.4)}) \end{aligned}$$

Segue daí que  $e^{i(\theta_2 + \theta_3)} = -1$  e  $r_3 = r_2$ . Analogamente, multiplicando (2.3) por  $r_3 e^{i\theta_3} e^{i\theta_4}$ , impondo  $r_1 r_4 e^{i(\theta_1 + \theta_4)} - r_2 r_3 e^{i(\theta_2 + \theta_3)} = 1$  e usando (2.2), obtemos  $r_1 e^{i(\theta_1 + \theta_4)} = r_4$ , donde segue que  $e^{i(\theta_1 + \theta_4)} = 1$  e  $r_1 = r_4$ . Assim, novamente de (2.3) vem que  $e^{i(\theta_1 - \theta_3)} = -e^{i(\theta_2 - \theta_4)}$ , isto é,  $\theta_1 - \theta_3 = \theta_2 - \theta_4 + \pi$ , ou ainda,  $\theta_1 + \theta_4 = \theta_2 + \theta_3 + \pi$ .

Obtemos, então, que:

$$\begin{aligned} \det^2 A = (\det A)^2 &= (r_1 r_4 e^{i(\theta_1 + \theta_4)} - r_2 r_3 e^{i(\theta_2 + \theta_3)})^2 \\ &= (r_1 r_4 e^{i(\theta_1 + \theta_4)} + r_2 r_3 e^{i(\theta_1 + \theta_4)})^2 \\ &= (r_1 r_4 + r_2 r_3)^2 e^{2i(\theta_1 + \theta_4)} \end{aligned}$$

## 2.4 Exemplo: a Grassmaniana Lagrangiana $\Lambda(2)$

---

Ora, mas temos que:

$$\begin{aligned} (r_1 r_4 + r_2 r_3)^2 &= r_1^2 r_4^2 + 2r_1 r_4 r_2 r_3 + r_2^2 r_3^2 \\ &= r_1^4 + 2r_1^2 r_2^2 + r_2^4 \\ &= (r_1^2 + r_2^2)^2 = 1^2 = 1 \end{aligned}$$

Dessa maneira, percebemos que  $\det^2 A = e^{2i(\theta_1 + \theta_4)} \in \mathbb{S}^1$ . Mais ainda,  $(\det^2)^{-1}(1) = \{A \in U(2); 2(\theta_1 + \theta_4) = 0 \pmod{2\pi}\}$ .

Mostraremos, agora, que se  $A \in SU(2)$ , em que  $SU(2)$  representa o grupo unitário especial, então  $A = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}$ . Com efeito, seguindo a notação já introduzida anteriormente, temos:

$$\begin{aligned} A &= \begin{pmatrix} r_1 e^{i\theta_1} & r_2 e^{i\theta_2} \\ r_3 e^{i\theta_3} & r_4 e^{i\theta_4} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r_1 e^{i\theta_1} & r_2 e^{i\theta_2} \\ r_2 e^{i(\theta_1 + \theta_4 - \theta_2 - \pi)} & r_1 e^{i(\theta_2 + \theta_3 + \pi - \theta_1)} \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} r_1 e^{i\theta_1} & r_2 e^{i\theta_2} \\ -r_2 e^{-i\theta_2} & r_1 e^{i\theta_1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix}, \end{aligned}$$

provando o afirmado.

Logo, obtemos que, para  $A \in SU(2)$ , temos  $\det^2 A = |a|^2 + |b|^2 = 1$ . Através da identificação  $\mathbb{R}^2 \simeq \mathbb{C}$ , podemos escrever  $a = (x, y)$  e  $b = (z, w)$ , donde segue que  $\det^2 A = x^2 + y^2 + z^2 + w^2 = 1$ , isto é,  $(x, y, z, w) \in \mathbb{S}^3$ . Dessa maneira, a aplicação  $SU(2) \rightarrow \mathbb{S}^3$ , definida por  $\begin{pmatrix} a & b \\ -\bar{b} & \bar{a} \end{pmatrix} \mapsto (x, y, z, w)$ , é um difeomorfismo.

Analogamente, seja  $B = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in SO(2)$  arbitrária, em que  $SO(2)$  representa o grupo especial ortogonal. Da condição  $BB^t = I_{2 \times 2}$  segue que:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2 + b^2 & ac + bd \\ ac + bd & c^2 + d^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Obtemos as seguintes relações:

$$ad - bc = 1 \tag{2.5}$$

$$a^2 + b^2 = 1 \tag{2.6}$$

$$c^2 + d^2 = 1 \tag{2.7}$$

$$ac + bd = 0 \tag{2.8}$$

Multiplicando (2.8) por  $d$  e usando (2.7) e (2.5), obtemos  $c = -b$ . Multiplicando (2.8) por  $c$ , e usando agora (2.6), obtemos  $a = d$ . Dessa forma, se  $B \in SO(2)$  então  $B = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix}$ . Segue daí que,  $\det B = a^2 + b^2 = 1$ . Logo, a aplicação  $SO(2) \rightarrow \mathbb{S}^1$ , definida por  $\begin{pmatrix} a & b \\ -b & a \end{pmatrix} \mapsto (a, b)$  é um difeomorfismo.

**Observação 13.** No contexto acima,  $\mathbb{S}^1$  é encarado como o grupo multiplicativo dos números complexos de módulo 1, enquanto  $\mathbb{S}^3$  é tratado como o grupo multiplicativo dos quatérnios de módulo 1. A identificação  $a + ib \mapsto a + ib + 0j + 0k$  permite-nos olhar  $\mathbb{S}^1$  como subgrupo de  $\mathbb{S}^3$ , isto é, quadrúplas da forma  $(a, b, 0, 0) \in \mathbb{R}^4$  satisfazendo  $a^2 + b^2 = 1$ .

Recordemos que, como consequência do teorema (2.7), obtemos que a aplicação  $\bar{d} : U(n)/O(n) \rightarrow \mathbb{S}^1$  é uma fibração. Em particular, para  $n = 2$ , temos que  $\det^2 : \Lambda(2) \rightarrow \mathbb{S}^1$  é uma fibração com fibra típica  $(\det^2)^{-1}(1) = SU(2)/SO(2)$ , em que  $\Lambda(2)$  está identificada com  $U(2)/O(2)$ . Ora, mas  $SU(2)$  e  $SO(2)$  são difeomorfos, respectivamente, a  $\mathbb{S}^3$  e  $\mathbb{S}^1$ . Logo,  $SU(2)/SO(2)$  é difeomorfo a  $\frac{\mathbb{S}^3}{\mathbb{S}^1}$ . Do exemplo (2.4),

## 2.4 Exemplo: a Grassmaniana Lagrangiana $\Lambda(2)$

---

vem que  $\pi : \mathbb{S}^3 \longrightarrow \mathbb{S}^2$  é uma fibração não-trivial com fibra típica  $\mathbb{S}^1$ . De modo que, ao passarmos o quociente por  $\mathbb{S}^1$ , obtemos que  $\frac{\mathbb{S}^3}{\mathbb{S}^1}$  é difeomorfo a  $\mathbb{S}^2$ .

Finalizando, dado  $A.SO(2) \in SU(2)/SO(2)$ , observamos que  $\det^2(e^{i\varphi}A.SO(2)) = \det(e^{i\varphi}A.SO(2))^2 = e^{4i\varphi}\det^2(A)$ . Logo, para  $0 \leq \varphi \leq \frac{\pi}{2}$ ,  $e^{4i\varphi}\det^2(A)$  percorre todo  $\mathbb{S}^1$ . Em contrapartida,  $e^{i\varphi}A.SO(2)$  desloca-se transversalmente preenchendo o espaço total  $\Lambda(2)$ . Finalmente, para  $\varphi = \frac{\pi}{2}$ ,  $e^{4i\varphi}\det^2(A)$  retorna ao ponto de partida no espaço base e  $e^{i\varphi}A.SO(2)$  atinge a classe  $(iA).SO(2)$ , correspondendo a multiplicação de  $A$  por  $i$ . Invocando, novamente, o difeomorfismo entre  $\Lambda(2)$  e  $U(2)/O(2)$ , a multiplicação de  $A$  por  $i$  equivale a levar o plano lagrangiano  $\gamma$  no plano lagrangiano ortogonal  $J(\gamma)$ , em que  $J = \begin{pmatrix} 0 & -I_{2 \times 2} \\ I_{2 \times 2} & 0 \end{pmatrix}$  é a estrutura complexa do  $\mathbb{R}^4$ . Por fim, isto significa identificar um ponto da fibra  $SU(2)/SO(2)$ , que é difeomorfa a  $\mathbb{S}^2$ , com o seu antípoda.  $\square$

**Teorema 2.18.** *Seja  $\alpha$  um plano lagrangiano em  $\Lambda(2)$ . Então o estrato  $\Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$  é difeomorfo a um cone quadrático em  $\mathbb{R}\mathbb{P}^3$ , com vértice em  $\Lambda^2(\alpha) = \alpha$ .*

*Demonstração.* Primeiramente, notemos que, para  $n = 2$ , estamos em  $\mathbb{R}^4$  e os planos lagrangianos são subespaços vetoriais de dimensão 2. Dessa forma, o estrato é dado por  $\Lambda^{k \geq 1}(\alpha) = \Lambda^1(\alpha) \cup \Lambda^2(\alpha)$ . Lembremos que  $\dim \Lambda(2) = 3$ ,  $\text{codim } \Lambda^1(\alpha) = 1$  e  $\text{codim } \Lambda^2(\alpha) = 3$ , donde segue que  $\Lambda^2(\alpha) = \alpha$ .

Sem perda de generalidade, suponhamos que  $\alpha$  seja o  $p$ -plano, isto é, em coordenadas de Darboux ele é dado por  $x_1 = x_2 = 0$ . Além disso,  $\mathbb{R}^4 = \alpha \oplus J(\alpha)$ . Sabemos que os planos lagrangianos podem ser dados como gráficos de aplicações lineares simétricas. De modo que, uma vizinhança coordenada  $U$  de  $\alpha$  pode ser representada da seguinte maneira:

$$\begin{aligned} A : \alpha &\longrightarrow J(\alpha) \\ p &\mapsto A(p) = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} p, \end{aligned}$$

## 2.4 Exemplo: a Grassmaniana Lagrangiana $\Lambda(2)$

---

isto é, planos lagrangianos da forma  $\gamma = \{(ax_3 + bx_4, bx_3 + cx_4, x_3, x_4) \in \mathbb{R}^4; a, b, c, x_3, x_4 \in \mathbb{R}\}$ . A figura 8 esquematiza uma vizinhança coordenada  $U$  do plano lagrangiano  $\alpha$ .

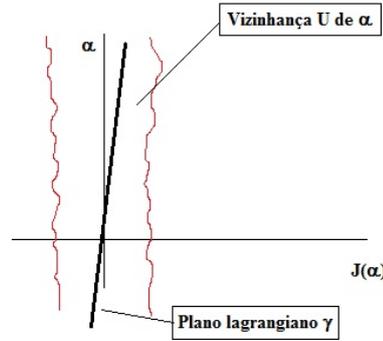


Figura 8: Vizinhança coordenada de alfa.

Desejamos encontrar condições sobre os parâmetros  $a, b$  e  $c$  tais que  $\gamma \in \Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$ . Para isto, devemos impor:

$$\begin{cases} ax_3 + bx_4 = 0 \\ bx_3 + cx_4 = 0 \end{cases}$$

Daí, vem a condição imediata  $ac - b^2 = 0$ . É fácil verificarmos que se  $b = c = 0$  então  $a = 0$ , donde vem que  $\gamma = \alpha$ . Se  $a = 0$ , temos, necessariamente,  $b = 0$ . Se  $c = 0$ , recaímos no caso anterior. Se  $c \neq 0$ , então  $\alpha \cap \gamma = \{(0, 0, x_3, 0) \in \mathbb{R}^4; x_3 \in \mathbb{R}\}$ . Finalmente, se  $a^2 + b^2 + c^2 \neq 0$ , então  $\alpha \cap \gamma = \left\{ (0, 0, -\frac{b}{a}x_4, x_4) \in \mathbb{R}^4; x_4 \in \mathbb{R} \right\}$ .

Mostraremos, agora, que a condição  $ac - b^2 = 0$  representa, geometricamente, um cone quadrático em  $\mathbb{RP}^3$ . As quádricas projetivas  $\mathcal{C}$  de um espaço projetivo  $\mathbb{RP}^n$  são definidas como o conjunto dos pontos de  $\mathbb{RP}^n$  que tem coordenadas homogêneas satisfazendo uma forma quadrática  $Q$  de  $\mathbb{R}^{n+1}$  igual a zero, isto é,  $\mathcal{C} = \pi(\{x \in \mathbb{R}^{n+1}; Q(x) = 0\})$ . No

## 2.4 Exemplo: a Grassmaniana Lagrangiana $\Lambda(2)$

---

no nosso caso, temos  $x = (a, b, c, d) \in \mathbb{R}^4$  e  $Q(x) = ac - b^2$ . Notemos que:

$$Q(x) = Q((a, b, c, d)) = (a, b, c, d) \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ \frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} = x^t \tilde{Q} x$$

Como  $\tilde{Q}$  é simétrica, concluímos que  $\tilde{Q}$  é diagonalizável, com matriz diagonal associada:

$$D = \begin{pmatrix} -\frac{1}{2} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Logo, na base de autovetores, a quádrica é descrita por  $\mathcal{C} = x^t D x = 0$ , isto é,  $2b^2 = a^2 + c^2$ , ou seja, um cone quadrático em  $\mathbb{R}P^3$  com vértice em  $(0, 0, 0, 1)$ , conforme é mostrado na figura 9. Por fim, notemos que  $a = b = c = 0$  representa o plano lagrangiano  $\Lambda^2(\alpha) = \alpha$ , mostrando que ele é o vértice do referido cone.  $\square$

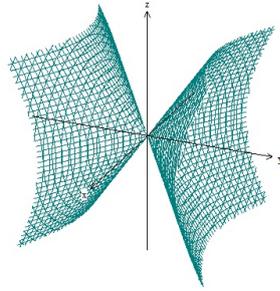


Figura 9: Representação geométrica de  $2b^2 = a^2 + c^2$  na “cópia” de  $\mathbb{R}^3$  em  $\mathbb{R}P^3$ .

# Capítulo 3

## Generalizações dos Teoremas de Sturm

Esse capítulo é dedicado a apresentar os principais resultados dessa dissertação, a saber, a versão simplética dos teoremas da separação e da comparação de Sturm e suas consequências.

### 3.1 Formas quadráticas no $\mathbb{R}^n$

Essa breve seção foi introduzida com o objetivo de estabelecer alguns resultados importantes sobre famílias de formas quadráticas dependendo suavemente de um parâmetro. Tais resultados serão de fundamental importância na demonstração das versões simpléticas dos teoremas da separação e da comparação de Sturm. Ao final, apresentamos resultados correlatos à formas quadráticas associadas a uma decomposição lagrangiana  $(\beta, \alpha)$  de  $(\mathbb{R}^{2n}, \omega)$ .

### 3.1 Formas quadráticas no $\mathbb{R}^n$

---

**Teorema 3.1.** *Seja  $\psi_t$  uma família de formas quadráticas no  $\mathbb{R}^n$  que depende suavemente do parâmetro  $t$ . Se  $\psi_\tau$  é degenerada e  $\frac{d}{dt}\psi_t|_{Z(\psi_\tau)}$  é positiva definida, em que  $Z(\psi_\tau) = \{u \in \mathbb{R}^n; \psi_\tau(u) = 0\}$ , então o índice da forma cresce quando  $t$  passa por  $\tau$  e o incremento é, precisamente, a dimensão do núcleo.*

*Demonstração.* Suponhamos, inicialmente, que a forma  $\psi_\tau \equiv 0$ . Fixado  $u \in Z(\psi_\tau) = \mathbb{R}^n$ , então a função real  $t \mapsto \psi_t(u)$  é crescente, exceto se  $u = 0$ , em que temos  $\psi_t(u) = 0$ ,  $\forall t \in \mathbb{R}$ . A figura 10 mostra um esquema dessa situação.

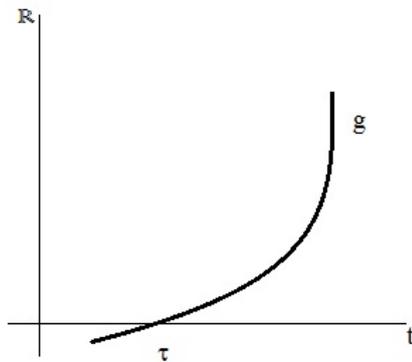


Figura 10: Esboço gráfico de  $g(t) = \psi_t(u)$ , para  $u \in Z(\psi_\tau) \setminus \{0\}$ .

Logo, a passagem de  $t$  pelo momento de não-transversalidade  $\tau$  aumenta a quantidade de termos quadráticos de  $\psi_t$  precedida do sinal “+” na forma canônica dada pelo Teorema de Sylvester. Para observarmos que esse aumento corresponde a, exatamente,  $\dim \alpha \cap \gamma(\tau) = k$ , suponhamos o contrário. Então, podemos expressar  $\psi_t$ , para  $t > \tau$ , da seguinte forma:

$$\psi_t(u) = u^t \begin{pmatrix} A_j & 0 & 0 \\ 0 & A_{j+(k-1)} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} u,$$

### 3.1 Formas quadráticas no $\mathbb{R}^n$

---

em que,  $A_j = \text{diag}(\lambda_1, \dots, \lambda_j)$  e  $A_{j+(k-1)} = \text{diag}(\lambda_{j+1}, \dots, \lambda_{j+(k-1)})$ . Logo,  $\psi_t(u) = 0$ , para  $u = (0, \dots, u_k, \dots, 0)$ ,  $u_k \in \mathbb{R}$ , contrariando o fato de  $\psi_t$ ,  $t > \tau$ , ser uma forma quadrática positiva-definida. Portanto, o aumento corresponde a, exatamente,  $k$ .

Para o caso geral, suponhamos que  $\psi_\tau$  seja uma forma degenerada e que  $A(\tau)$  seja a matriz associada a ela. Então, podemos representar  $A(\tau)$  da seguinte maneira:

$$A(\tau) = \begin{pmatrix} A_+(\tau) & 0 & 0 \\ 0 & A_0(\tau) & 0 \\ 0 & 0 & A_-(\tau) \end{pmatrix},$$

em que  $A_+(\tau)$ ,  $A_0(\tau)$  e  $A_-(\tau)$  representam, respectivamente, os blocos de autovalores positivos, nulos e negativos. A função  $t \mapsto \psi_t(u)$ , com  $u \in Z(\psi_\tau) \setminus \{0\}$ , é crescente, sendo que, em  $t = \tau$ , temos  $\psi_\tau(u) = 0$ . Dessa forma, podemos concluir que a quantidade de termos quadráticos precedida do sinal “+” de  $\psi_t$  aumenta quando  $t$  atinge  $\tau$ . Lembremos que as partes não-degeneradas depende suavemente do parâmetro  $t$ . Por fim, argumento análogo ao anterior mostra que esse aumento corresponde a exatamente  $k$ .  $\square$

**Teorema 3.2.** *Seja  $\psi_t$  forma quadrática no  $\mathbb{R}^n$  e suponhamos que  $\frac{d}{dt}\psi_t(u) \geq 0$ ,  $\forall u \in \mathbb{R}^n$ . Suponhamos, ainda, que  $\psi_\tau$  seja degenerada e  $\frac{d}{dt}\psi_t \Big|_{Z(\psi_\tau)}$  tem posto  $k$ . Então, a quantidade de termos de  $\psi_t$  precedida do sinal “+” cresce, pelo menos  $k$ , quando  $t$  atinge  $\tau$ .*

*Demonstração.* Suponhamos, sem perda de generalidade, que  $\tau = 0$  e  $A(t)$  é matriz que representa a forma quadrática  $\psi_t$ . Denotaremos por  $P$  o autoespaço positivo da forma  $\psi_0$ , isto é,  $\langle A(0)u, u \rangle = \rho \|u\|^2 > 0$ ,  $\forall u \in P \setminus \{0\}$ , e por  $Q$  o autoespaço positivo da forma  $\psi'_t$ , restrita à  $Z(\psi_0)$ , isto é,  $\langle A'(t)v, v \rangle = \tilde{\rho} \|v\|^2 > 0$ ,  $\forall v \in Q \setminus \{0\}$ .

Para  $t > 0$  suficientemente próximo de 0, podemos expandir  $A(t)$  em série de Taylor:

$$A(t) = A(0) + A'(0)t + \varrho(t)|t|,$$

em que  $\varrho(t) = \begin{cases} \frac{r(t)}{t}, & t \neq 0 \\ 0, & t = 0 \end{cases}$ . De  $\lim_{t \rightarrow 0} \varrho(t) = 0$ , vem que, dado  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists \delta > 0$  tal que  $|t| < \delta \implies -\varepsilon < \|\varrho(t)\| < \varepsilon$ .

Temos que:

$$\begin{aligned} \langle A(t)u, u \rangle &= \langle A(0)u, u \rangle + t \langle A'(0)u, u \rangle + |t| \langle \varrho(t)u, u \rangle \\ &\geq \rho \|u\|^2 - \varepsilon \delta \|u\|^2 \\ &= c_1 \|u\|^2, \text{ em que } c_1 = \rho - \varepsilon \delta. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \langle A(t)v, v \rangle &= \langle A(0)v, v \rangle + t \langle A'(0)v, v \rangle + |t| \langle \varrho(t)v, v \rangle \\ &\geq t \tilde{\rho} \|v\|^2 - \varepsilon |t| \|v\|^2 \\ &= c_2 t \|v\|^2, \text{ em que } c_2 = \tilde{\rho} - \varepsilon. \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} |\langle A(t)v, u \rangle| &= |\langle A(0)v, u \rangle + t \langle A'(0)v, u \rangle + |t| \langle \varrho(t)v, u \rangle| \\ &\leq |t \langle A'(0)v, u \rangle| + |t| |\langle \varrho(t)v, u \rangle| \\ &\leq |t| \|A'(0)\| \|v\| \|u\| + |t| \|\varrho(t)\| \|v\| \|u\| \\ &= c_3 t \|u\| \|v\|, \text{ em que } c_3 = \|A'(0)\| + \varepsilon. \end{aligned}$$

A determinação de uma cota superior para  $\langle A(t)u, v \rangle$  é desnecessária, já que podemos utilizar a bilinearidade da forma quadrática  $A(t)$ . Logo,

$$\begin{aligned} \langle A(t)(u+v), (u+v) \rangle &= \langle A(t)u, u \rangle + \langle A(t)u, v \rangle + \langle A(t)v, u \rangle + \langle A(t)v, v \rangle \\ &\geq c_1 \|u\|^2 - 2c_3 t \|u\| \|v\| + c_2 t \|v\|^2 \\ &= c_1 \|u\|^2 - 2c_3 t^{\frac{1}{3}} \|u\| t^{\frac{2}{3}} \|v\| + c_2 t \|v\|^2 \\ &\geq c_1 \|u\|^2 - c_3 \left( t^{\frac{2}{3}} \|u\|^2 + t^{\frac{4}{3}} \|v\|^2 \right) + c_2 t \|v\|^2 \\ &= (c_1 - c_3 t^{\frac{2}{3}}) \|u\|^2 + (c_2 - c_3 t^{\frac{1}{3}}) t \|v\|^2 \\ &\geq (c_1 - c_3 t^{\frac{1}{3}}) \|u\|^2 + (c_2 - c_3 t^{\frac{1}{3}}) t \|v\|^2 \end{aligned}$$

### 3.1 Formas quadráticas no $\mathbb{R}^n$

---

Tomando  $\tilde{c} = \min\{c_1, c_2\}$  e, lembrando que  $0 < t < \delta$ , segue que:

$$\langle A(t)(u + v), (u + v) \rangle \geq c_4(\|u\|^2 + t\|v\|^2),$$

em que  $c_4 = \tilde{c} - c_3\delta^{\frac{1}{3}}$ , mostrando que  $A(t)$  é positiva-definida sobre  $P + Q$  para  $t > 0$ , suficientemente pequeno (basta tomarmos  $\varepsilon$  e  $\delta$  suficientemente pequenos).

Consideremos a matriz  $A(0)$  decomposta em blocos da seguinte maneira:

$$A(0) = \begin{pmatrix} A_+(0) & 0 & 0 \\ 0 & A_0(0) & 0 \\ 0 & 0 & A_-(0) \end{pmatrix},$$

em que  $A_+(0)$ ,  $A_0(0)$  e  $A_-(0)$  representam, respectivamente, os blocos de autovalores positivos, nulos e negativos. Pelo o que acabamos de obter, podemos expressar a matriz  $A(t)$ , em blocos, da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} A_+(0) & 0 & 0 \\ 0 & \begin{pmatrix} \tilde{Q} \\ \tilde{A}_0(0) \end{pmatrix} & 0 \\ 0 & 0 & A_-(0) \end{pmatrix},$$

em que  $\tilde{Q}$  é a matriz diagonal formada pelos autovalores positivos de  $A(t)|_Q$ . Logo, a passagem de  $t$  pelo momento de não-transversalidade  $t = 0$ , aumenta a quantidade de termos quadráticos precedida do sinal “+” da forma  $A(t)$ . Por fim, a condição  $\frac{d}{dt}\psi_t|_{Z(\psi_t)}$  ter posto  $k$ , acarreta que essa quantidade aumenta, no mínimo,  $k$ .  $\square$

**Lema 3.3.** *A restrição da derivada da forma quadrática correspondente aos planos lagrangianos  $\alpha$  e  $\beta$  ao plano lagrangiano  $\alpha$  é igual a  $2H$ , em que  $H$  representa a função hamiltoniana. Em síntese,  $\dot{\Phi}[\beta, \alpha]|_{\alpha} = 2H$ .*

### 3.1 Formas quadráticas no $\mathbb{R}^n$

---

*Demonstração.* Escolhamos coordenadas de Darboux tais que  $\alpha$  seja o  $p$ -plano e  $\beta$  seja o  $q$ -plano. Nessas condições,

$$\begin{aligned}\Phi[\beta, \alpha](\zeta) &= \omega((q_1, \dots, q_n, 0, \dots, 0), (0, \dots, 0, p_1, \dots, p_n)) \\ &= \sum_{i=1}^n q_i p_i = \langle q, p \rangle.\end{aligned}$$

Logo,  $\dot{\Phi}[\beta, \alpha](q(t), p(t)) = \langle \dot{q}(t), p(t) \rangle + \langle q(t), \dot{p}(t) \rangle = H_p p(t) - q(t) H_q$ . Portanto, restringindo ao plano lagrangiano  $\alpha$  ( $q = 0$ ), obtemos  $\dot{\Phi}[\beta, \alpha](q(t), p(t)) = H_p p(t) = 2(T + 0) = 2H$ , em que  $T = \frac{1}{2} \langle B^{-1} p, p \rangle$  representa a energia cinética, provando o resultado.  $\square$

Baseando-nos nos teoremas anteriores sobre formas quadráticas, obtemos os seguintes resultados acerca de vetores positivos, complementando a teoria desenvolvida na seção 2.2:

**Teorema 3.4.** *Seja  $\alpha$  um plano lagrangiano dado. Suponhamos que  $\varphi_0$  é uma forma quadrática degenerada tal que  $\frac{d}{dt} \varphi_t \Big|_{Z(\varphi_0)}$  é positiva-definida. Então  $\frac{d}{dt} \varphi_t$  não pertence ao espaço tangente de  $\Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$  num dado ponto.*

*Demonstração.* Seja  $T_\gamma \Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$  o espaço tangente de  $\Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$  em  $\gamma$ . Primeiramente, notemos que se  $v \in T_\gamma \Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$ , então existe uma curva  $\chi : [0, T] \rightarrow \Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$  tal que  $\chi(0) = \gamma$  e  $v = \chi'(0)$ . Suponhamos, por absurdo, que  $\frac{d}{dt} \varphi_t \in T_{\varphi_t} \Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$ . Então, pelos comentários anteriores, a curva  $\chi$  correspondente em  $\Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$  satisfaz:

1.  $\chi(t)$  é uma família de formas dependendo suavemente de um parâmetro;
2.  $\chi$  é degenerada para  $t = 0$ ;
3.  $\frac{d}{dt} \varphi_t$  é positiva-definida;

De modo que, pelo lema (3.1), quando  $t$  atinge 0, a quantidade de termos quadráticos precedida do sinal “+” da forma  $\chi(t)$  aumenta, precisamente, de  $\dim Z(\varphi_0)$ . Geometricamente, isto indica que a curva  $\chi$  deforma-se e deixa de estar contida em  $\Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$ . Ora, mas  $\chi$  é uma curva inteiramente contida em  $\Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$ . Isso gera uma contradição, provando o teorema.  $\square$

Os vetores positivos não pertencem ao espaço tangente ao estrato  $\Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$  num ponto  $\gamma$  arbitrário. De fato, seja  $\gamma$  plano lagrangiano tal que  $\gamma \cap \alpha \neq \{0\}$ . Tome-mos  $\beta$  plano lagrangiano transversal a  $\alpha$  e  $\gamma$ . As funções geradoras dos planos  $\gamma(t)$  podem ser dadas por  $\varphi_t(p) = \frac{1}{2}\pi^* \circ i^* \circ (\phi_t^H)^* \Phi[\beta, \alpha](p)$ , em que  $i : \gamma \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  e  $\pi : \alpha \rightarrow \gamma$  representam, respectivamente, a inclusão e a projeção de  $\alpha$  sobre  $\gamma$  ao longo de  $\beta$ . Observemos que  $\varphi_0 = \frac{1}{2}\Phi[\beta, \alpha](\pi(p)) = \frac{1}{2}\langle \pi_\alpha(\pi(p)), \pi_\beta(\pi(p)) \rangle$  é uma forma degenerada que se anula sobre  $\alpha \cap \gamma$ , em que  $\pi_\alpha$  e  $\pi_\beta$  representam, respectivamente, as projeções sobre  $\alpha$  (ao longo de  $\beta$ ) e sobre  $\beta$  (ao longo de  $\alpha$ ). Além disso, pelo lema (3.3) (ver seção 3.1),  $\frac{d}{dt}\varphi_t(p) = \frac{d}{dt}\Phi[\beta, \alpha](\phi_t^H(\pi(p))) = 2H > 0$  sobre  $\alpha \cap \gamma$ . Do teorema (3.4), segue que  $\frac{d}{dt}\varphi_t$  não pertence ao espaço tangente das formas degeneradas no ponto arbitrário  $\gamma$ . Logo,  $\frac{d\gamma}{dt}$  não pertence ao espaço tangente ao estrato  $\Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$  em nenhum ponto. Com base nos comentários anteriores, obtemos o seguinte corolário.

**Corolário 3.5.** *Qualquer estrato  $\Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$  é orientado transversalmente pela direção dos vetores positivos.*

$\square$

**Exemplo 3.1.** *Seja  $H$  função hamiltoniana estritamente convexa nas fibras, ou seja, em coordenadas de Darboux,  $H_{pp}$  é positiva-definida. Consideremos o fluxo correspondente ao sistema hamiltoniano (1.5) induzido por  $H$ . Já sabemos que  $\phi_t^H$  é um symplectomorfismo. Tome-mos  $\alpha$   $p$ -plano,  $\gamma$  plano lagrangiano arbitrário, com  $\dim(\gamma \cap \alpha) = 1$ , e*

### 3.1 Formas quadráticas no $\mathbb{R}^n$

---

$\gamma(t) = d\phi_t^H(q, p)\gamma$ , em que  $d$  representa a derivada em relação a variável espacial. Note-mos que  $\gamma(0) = \gamma$ , pois  $d\phi_0^H = I_{2n \times 2n}$ . Além disso,  $\gamma'(0) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} d\phi_t^H(q, p) = \left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^H(q, p)$ . Observemos que  $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^H(q, p) = X_H((q, p))$ , com  $(q, p) \in \gamma$ . De modo que,  $\left. \frac{d}{dt} \right|_{t=0} \phi_t^H(q, p) = dX_H((q, p))$ . Assim, a forma bilinear associada ao vetor  $\gamma'(0)$  é expressa por  $B_{\gamma, \gamma'(0)} \Big|_{\gamma \cap \alpha}$ , isto é,

$$B_{\gamma, \gamma'(0)}(u, v) = \omega \left( dX_H((q, p)) \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{u} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{v} \end{pmatrix} \right).$$

Daí, obtemos a seguinte forma quadrática:

$$B_{\gamma, \gamma'(0)}(v, v) = \omega \left( dX_H((q, p)) \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{v} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{v} \end{pmatrix} \right).$$

Como  $dX_H = \begin{pmatrix} H_{pq} & H_{pp} \\ -H_{qq} & -H_{qp} \end{pmatrix}$ , vem que:

$$\begin{aligned} B_{\gamma, \gamma'(0)}(v, v) &= \omega \left( \begin{pmatrix} H_{pq} & H_{pp} \\ -H_{qq} & -H_{qp} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{v} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{v} \end{pmatrix} \right) \\ &= \omega \left( \begin{pmatrix} H_{pp}\tilde{v} \\ -H_{qp}\tilde{v} \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ \tilde{v} \end{pmatrix} \right) \\ &= \langle H_{pp}\tilde{v}, \tilde{v} \rangle = \tilde{v}^t H_{pp} \tilde{v}, \end{aligned}$$

que é positiva-definida. Logo,  $\gamma'(0)$  é um vetor positivo e, portanto, transversal a  $\Lambda^1(\alpha)$ .

Mais ainda, o exemplo anterior nos mostra que uma função hamiltoniana  $H$  convexa é óptica com respeito a seção vertical, no nosso caso, o  $p$ -plano  $\alpha$ . Dizemos que uma função hamiltoniana  $H : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$  é óptica com respeito a uma seção lagrangiana diferenciável

## 3.2 Análogos simpléticos dos Teoremas de Sturm

---

$\alpha$  se, para qualquer  $\gamma \in \Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$ , a forma quadrática dada por

$$B : \alpha \cap \gamma \times \alpha \cap \gamma \longrightarrow \mathbb{R}$$

$$(\xi, \xi) \mapsto \omega \left( \frac{d}{dt} d\phi_t^H \xi, \xi \right),$$

for positiva-definida. Para maiores referências sobre o tema, consulte [22].

O próximo resultado nos mostra que o índice de Maslov (ver definição na seção 2.3) é sempre um número não - negativo.

**Corolário 3.6.** *Sejam  $\gamma$  plano lagrangiano fixado e  $\gamma(t) = \phi_t^H \gamma$  sua evolução pelo fluxo gerado pelo sistema (1.5) com função hamiltoniana  $H$  positiva-definida. Então, o índice de intersecção de  $\gamma(t)$  com o estrato  $\Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$  é não-negativo.*

*Demonstração.* Este resultado segue, imediatamente, do fato que os vetores positivos são transversais a  $\Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$ . □

## 3.2 Análogos simpléticos dos Teoremas de Sturm

A teoria clássica de Sturm-Liouville concentra-se no estudo das propriedades de soluções de equações da forma

$$(p(x)y')' + (q(x) - \lambda r(x))y = 0, \tag{3.1}$$

definida em  $[a, b]$ , em que  $p, p', q, r$  são contínuas com  $p(x) > 0$  nesse intervalo e  $\lambda \in \mathbb{R}$ . Nesse contexto, essas equações são ditas regulares. De modo superficial, a função  $q(x)$  na teoria clássica de Sturm será substituída pela função hamiltoniana ( $H = T + U$ ) na versão simplética.

Geometricamente, na versão clássica, os teoremas da separação e da comparação de Sturm descrevem a rotação de uma reta no plano de fase da equação. Veremos que na

### 3.2 Análogos simpléticos dos Teoremas de Sturm

---

versão simplética desses teoremas, trocamos retas por planos lagrangianos e os instantes de intersecção com uma reta dada por momentos de não-transversalidade com um plano lagrangiano dado (em geral, o vertical). Esses momentos de não-transversalidade são calculados através do índice de Maslov, que indica quantas vezes uma curva sobre a Grassmaniana Lagrangiana intersecta o estrato do plano vertical. Todas as demonstrações dos resultados da teoria clássica de Sturm-Liouville podem ser estudados em [6].

Consideremos o sistema de equações lagrangianas

$$(B(t)\dot{x})' = -A(t)x, \quad (3.2)$$

em que,  $x \in \mathbb{R}^n$ ,  $A(t)$ ,  $B(t)$  são simétricas para todo  $t$ , com energia potencial  $U = \frac{1}{2}\langle A(t)x, x \rangle$  e energia cinética positiva definida  $T = \frac{1}{2}\langle B(t)\dot{x}, \dot{x} \rangle$ . No caso, em particular, que  $B(t) \equiv I_{n \times n}$ , dizemos que o sistema é newtoniano.

O sistema de equações (3.2) é equivalente ao sistema de equações (1.5). De fato, façamos  $q = x$  e  $v = \dot{q}$ . Então, a função lagrangiana é dada por:

$$L(q, v) = \frac{1}{2}\langle B(t)v, v \rangle - \frac{1}{2}\langle A(t)q, q \rangle$$

Através da transformada de Legendre, introduzimos a variável  $p = B(t)v$ , obtendo a seguinte função hamiltoniana:

$$H(q, p) = \frac{1}{2}\langle B^{-1}(t)p, p \rangle + \frac{1}{2}\langle A(t)q, q \rangle,$$

provando a equivalência mencionada. Notemos que  $H_p = B^{-1}(t)p$  e  $H_q = A(t)q$ . Por fim, para nossos propósitos, consideraremos a função hamiltoniana  $H$  positiva-definida sobre o plano lagrangiano  $\alpha$  (em geral, a menos de uma transformação simplética,  $\alpha$  será considerado o  $p$ -plano).

### 3.2.1 O teorema da não-oscilação

A partir de agora, faremos um paralelo entre os resultados clássicos da teoria de Sturm e suas versões simpléticas. Começaremos com o teorema da não-oscilação:

**Teorema 3.7.** *Consideremos a equação  $(b(t)x')' + a(t)x = 0$ , definida em  $[a, b]$ , com  $p$ ,  $p'$  e  $q$  funções contínuas e  $b(t) > 0$ . Se  $a(t) \leq 0$ ,  $t \in [a, b]$ , então as soluções não-triviais dessa equação tem, no máximo, um zero nesse intervalo.*

Como o fluxo hamiltoniano é linear simplético, estudaremos a evolução de subespaços lagrangianos  $\gamma(t) = \phi_t^H(\gamma)$  ou, seguindo a notação introduzida anteriormente,  $\gamma(t) = S(t)\gamma$ , em  $S(t)$  é a matriz fundamental. Em sua versão simplética, o enunciamos da seguinte forma:

**Teorema 3.8.** *Se a energia potencial é não-positiva, então o número de momentos de não-transversalidade não excede o número  $n$  de graus de liberdade do sistema (número de variáveis independentes necessário para especificar a posição de todas as partes do sistema).*

*Demonstração.* Começamos com o seguinte lema:

**Lema 3.9.** *Seja  $\phi : \mathbb{R}^{2n} \rightarrow \mathbb{R}$ , definida por,  $\phi(q, p) = \langle q, p \rangle$ . Então, a derivada de  $\phi$  ao longo das soluções de (1.5) é igual a  $2L$ , em que  $L = T - U$  é a função lagrangiana.*

### 3.2 Análogos simpléticos dos Teoremas de Sturm

---

*Demonstração:* Seja  $\psi(t) = (q(t), p(t))$  uma solução de (1.5). Segue daí que:

$$\begin{aligned}
 \frac{d}{dt}\phi(q(t), p(t)) &= \frac{d}{dt}\langle q(t), p(t) \rangle \\
 &= \langle \dot{q}(t), p(t) \rangle + \langle q(t), \dot{p}(t) \rangle \\
 &= \langle H_p, p(t) \rangle + \langle q(t), -H_q \rangle \\
 &= \langle B^{-1}p(t), p(t) \rangle - \langle q(t), A(t)q(t) \rangle \\
 &= 2T - 2U = 2(T - U) = 2L,
 \end{aligned}$$

demonstrando o lema.

Seja, então,  $\gamma$  um plano lagrangiano e  $\gamma(t) = \phi_t^H(\gamma)$  sua evolução pelo fluxo de (1.5). Suponhamos que  $\tau$  é um momento de não-transversalidade para  $\gamma$ , isto é,  $\gamma(\tau) \cap \alpha \neq \{0\}$ . Por hipótese, o lagrangiano é não-negativo, já que  $T > 0$  e  $U \leq 0$ . Denotemos por  $\phi_{\tau-t}^H$  a evolução do fluxo do tempo  $\tau$  ao tempo  $t$ . Definimos a forma quadrática  $\psi_t = i^* \circ (\phi_{\tau-t}^H)^* \phi$  sobre  $\gamma(\tau)$ , em que  $i : \gamma(\tau) \rightarrow \mathbb{R}^{2n}$  denota a inclusão. Dessa forma,  $\psi_t(q, p) = \phi(\phi_{\tau-t}^H(i(q, p))) = \phi(q(t), p(t))$  e, com base, no lema (3.9), concluímos que  $\frac{d}{dt}\psi_t = 2L \geq 0$ , isto é, a função  $t \mapsto \psi_t$  é não-decrescente. Podemos considerar, sem perda de generalidade, que a forma quadrática  $\psi_t$  tem representação  $\sum_{i=1}^k \pm q_i^2 \pm p_i^2$ , garantida pelo Teorema de Sylvester. Logo, a quantidade de termos quadráticos precedida do sinal “+” só pode aumentar à medida que  $t$  cresce.

Afirmamos que a quantidade de termos quadráticos precedida do sinal “+” aumenta, em pelo menos um, quando  $t$  atinge um momento de não-transversalidade  $\tau$ . De fato,  $\psi_\tau(q, p) = \langle q, p \rangle$ . Claramente,  $\psi_\tau$  se anula sobre  $\alpha \cap \gamma(\tau)$ . Além disso, ainda restrito a essa intersecção,  $\frac{d}{dt}\psi_t \Big|_{t=\tau} = 2T > 0$ , já que  $U \equiv 0$ . Logo, pelo teorema (3.1), obtemos o afirmado. Por fim, como a quantidade de termos quadráticos precedida do sinal “+” de uma forma no  $\mathbb{R}^n$  não pode exceder  $n$ , segue que o número de momentos de não-transversalidade também não excede  $n$ , provando o teorema.

□

### 3.2.2 O teorema da separação e suas consequências

A próxima generalização que apresentaremos refere-se ao teorema da separação de Sturm:

**Teorema 3.10.** *Sejam  $u$  e  $v$  duas soluções linearmente independentes de  $x'' + p(t)x' + q(t)x = 0$ , em que  $p, q$  são funções contínuas de  $t$ . Então, os zeros de  $u$  e  $v$  são alternados.*

**Observação 14.** *Multiplicando a equação anterior pelo fator integrante  $\mu(t) = \exp \int_a^t p(s)ds$ , podemos reescrevê-la da seguinte forma  $(b(t)x')' + a(t)x = 0$ .*

Na sua versão simplética, ele é conhecido como teorema dos zeros:

**Teorema 3.11.** *Sobre qualquer segmento contendo  $n+1$  momentos de não-transversalidade de um plano lagrangiano, qualquer outro plano lagrangiano tem, ao menos, um momento de não-transversalidade. Mais ainda, a diferença entre os momentos de não-transversalidade de dois planos lagrangianos arbitrários, evoluídos sobre o sistema (1.5), sobre qualquer intervalo de tempo, não excede  $n$ .*

*Demonstração.* Iniciemos a demonstração enunciando dois lemas auxiliares:

**Lema 3.12.** *Seja  $\tau$  momento de não-transversalidade de  $\gamma(t)$ . Então, no índice de intersecção do caminho  $\{\gamma(t)\}$  com  $\Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$ ,  $\tau$  contribui, numericamente, com  $\dim(\alpha \cap \gamma(\tau))$ .*

*Demonstração.* Seja um plano lagrangiano  $\beta$  transversal, simultaneamente, aos planos lagrangianos  $\alpha$  e  $\gamma$ . Consideremos a seguinte família de funções geradoras para os planos  $\gamma(t)$ ,  $t \geq \tau$ :

$$\varphi_t(p) = \frac{1}{2} (\pi^* i^* (\phi_{\tau-(\tau+t)}^H)^* \Phi[\alpha, \beta]) (p),$$

em que  $\pi : \alpha \longrightarrow \gamma(\tau)$  e  $i : \gamma(\tau) \longrightarrow \mathbb{R}^{2n}$  representam, respectivamente, a projeção de  $\alpha$  em  $\gamma(\tau)$  ao longo de  $\beta$  e a inclusão canônica. Para  $t = 0$ ,  $\varphi_0(p)$  é uma função geradora para o plano lagrangiano  $\gamma(\tau)$ .

Temos que  $\varphi_0 \Big|_{\alpha \cap \gamma(\tau)} = 0$ . Com efeito,  $\varphi_0(p) = \frac{1}{2} \Phi[\alpha, \beta](\pi(p)) = \frac{1}{2} \langle \pi_\alpha(\pi(p)), \pi_\beta(\pi(p)) \rangle$ , em que  $\pi_\alpha$  e  $\pi_\beta$  representam, respectivamente, as projeções sobre  $\alpha$  (ao longo de  $\beta$ ) e sobre  $\beta$  (ao longo de  $\alpha$ ). Dessa forma, se  $p \in \alpha \cap \gamma(\tau)$ , então  $\pi(p) = p$ . Logo,  $\pi_\beta(\pi(p)) = \pi_\beta(p) = 0$ , pois  $p \in \alpha$  e  $\mathbb{R}^{2n} = \alpha \oplus \beta$ , provando o afirmado.

Além disso,  $\frac{d}{dt} \varphi_t \Big|_{\alpha \cap \gamma(\tau)}$  é positiva-definida pelo lema (3.3). Em síntese, temos:

1.  $\varphi_t$  é uma forma quadrática no  $\mathbb{R}^n$ ;
2.  $\varphi_t$  depende suavemente de  $t$ ;
3.  $\varphi_0$  é degenerada;
4.  $\frac{d}{dt} \varphi_t \Big|_{\alpha \cap \gamma(\tau)} > 0$ ;

Logo, pelo lema (3.1), concluímos que o índice de  $\varphi_t$  cresce, precisamente, de  $\dim(\alpha \cap \gamma(\tau))$ , quando  $t$  atinge  $\tau$ , provando assim o resultado.  $\square$

**Lema 3.13.** *Seja  $\nu(\cdot)$  o número de momentos de não-transversalidade da evolução, pelo fluxo  $\phi_t^H$ , do plano lagrangiano  $\gamma$  em relação a  $\alpha$ . Então,  $\nu(\gamma) = \mu(\Gamma_1) - \mu(\Gamma_2)$ , em que  $\mu(\cdot)$  representa o índice de Maslov e  $\Gamma_i$  representa o caminho lagrangiano ligando  $\gamma(t_i)$  a  $\alpha$ .*

*Demonstração.* Consideremos uma família  $\{\Gamma(t)\}$  de caminhos ligando  $\gamma(t)$  a  $\alpha$  dependendo continuamente de  $t$ . Por convenção, suporemos que  $\gamma(t_1)$  e  $\gamma(t_2)$  são planos lagrangianos transversais a  $\alpha$ . Sem perda de generalidade, faremos a prova para apenas um

### 3.2 Análogos simpléticos dos Teoremas de Sturm

---

momento de não-transversalidade em  $[t_1, t_2]$ . O caso geral segue por indução matemática, já que o número de momentos de não-transversalidade de  $\gamma$  em  $[t_1, t_2]$  é finito. Pelo lema (3.12), sabemos que a contribuição de  $\tau$  no índice de intersecção do caminho  $\{\gamma(t)\}$  com  $\Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$  é, numericamente, igual a  $\dim(\alpha \cap \gamma(\tau))$ . A figura 11 esquematiza o fato descrito anteriormente:

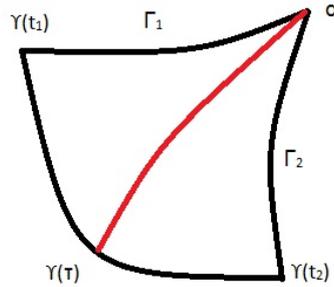


Figura 11: Índice de Maslov dos pares  $(\gamma(t_1), \alpha)$  e  $(\gamma(t_2), \alpha)$ .

Como sabemos, o índice de Maslov é invariante por homotopias de caminhos. Logo,  $\mu(\Gamma_1) = \dim(\alpha \cap \gamma(\tau)) + \mu(\Gamma_2)$ , donde segue que  $\dim(\alpha \cap \gamma(\tau)) = \mu(\Gamma_1) - \mu(\Gamma_2)$ , provando o resultado.  $\square$

Passemos, agora, a prova do teorema dos zeros. Estudemos a evolução de dois planos lagrangianos distintos pelo mesmo fluxo, isto é, sejam dois planos lagrangianos distintos  $\gamma$  e  $\gamma'$ , e consideremos  $\gamma(t)$  e  $\gamma'(t)$  as evoluções pelo fluxo  $\phi_t^H$ , nessa ordem. Denotaremos por  $\Gamma(t)$  e  $\Gamma'(t)$ , respectivamente, os caminhos lagrangianos ligando  $\gamma(t)$  e  $\gamma'(t)$  a  $\alpha$ . No espaço de recobrimento  $\tilde{\Lambda}(n)$  de  $\Lambda(n)$ , tomamos  $\tilde{\alpha}$  recobrindo  $\alpha$  e os caminhos  $\tilde{\Gamma}(t)$  e  $\tilde{\Gamma}'(t)$  recobrindo, respectivamente, os caminhos  $\Gamma(t)$  e  $\Gamma'(t)$ :

Notemos que, o resultado obtido no lema (3.13) pode ser reescrito usando a notação do teorema (2.13) da seguinte forma: se  $\gamma(t)$  representa a evolução do plano lagrangiano

### 3.2 Análogos simpléticos dos Teoremas de Sturm

---

$\gamma$  pelo fluxo  $\phi_t^H$ ,  $t \in [t_1, t_2]$ , então  $\nu(\gamma) = m(\tilde{\gamma}_2, \tilde{\alpha}) - m(\tilde{\gamma}_1, \tilde{\alpha})$ , em que  $\tilde{\gamma}_i = \tilde{\gamma}(t_i)$ . Usando os itens (2) e (3) do teorema (2.13), obtemos a seguinte relação:

$$m(\tilde{\gamma}(t), \tilde{\alpha}) + m(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}'(t)) + m(\tilde{\gamma}'(t), \tilde{\gamma}(t)) = I(\gamma(t), \alpha, \gamma'(t)) \quad (3.3)$$

O termo  $m(\tilde{\gamma}'(t), \tilde{\gamma}(t))$  independe de  $t$ , já que o índice de Maslov é invariante por simplectomorfismos (neste caso, por  $\phi_t^H$ ). Por outro lado, o índice da tripla é sempre um número natural que não excede  $n$ ,  $\forall t \in [t_1, t_2]$ . Dessa forma, ao fazermos a diferença na igualdade (3.3) para  $t = t_2$  e  $t = t_1$ , respectivamente, obtemos o incremento do índice da tripla quando  $t$  varia de  $t_1$  a  $t_2$ , isto é:

$$\begin{aligned} n &\geq |I(\gamma(t_2), \alpha, \gamma'(t_2)) - I(\gamma(t_1), \alpha, \gamma'(t_1))| = \\ &= |m(\tilde{\gamma}(t_2), \tilde{\alpha}) + m(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}'(t_2)) + m(\tilde{\gamma}'(t_2), \tilde{\gamma}(t_2)) - m(\tilde{\gamma}(t_1), \tilde{\alpha}) - m(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}'(t_1)) - m(\tilde{\gamma}'(t_1), \tilde{\gamma}(t_1))| = \\ &= |m(\tilde{\gamma}(t_2), \tilde{\alpha}) + m(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}'(t_2)) - m(\tilde{\gamma}(t_1), \tilde{\alpha}) - m(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}'(t_1))| = \\ &= |[m(\tilde{\gamma}(t_2), \tilde{\alpha}) - m(\tilde{\gamma}(t_1), \tilde{\alpha})] - [m(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}'(t_2)) - m(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}'(t_1))]| = \\ &= |[m(\tilde{\gamma}(t_2), \tilde{\alpha}) - m(\tilde{\gamma}(t_1), \tilde{\alpha})] - [n - m(\tilde{\gamma}'(t_2), \tilde{\alpha}) - n + m(\tilde{\gamma}'(t_1), \tilde{\alpha})]| = \\ &= |\nu(\gamma) - \nu(\gamma')| \end{aligned}$$

Portanto, acabamos de obter que a diferença entre os momentos de não-transversalidade de dois planos lagrangianos arbitrários, evoluídos sobre o sistema (1.5), sobre qualquer intervalo de tempo, não excede  $n$ . Por fim, suponhamos, por absurdo, que sobre qualquer segmento contendo  $n + 1$  momentos de não-transversalidade do plano lagrangiano  $\gamma$ , existe um plano lagrangiano  $\gamma'$  que não torna-se transversal. Ora, mas acabamos de obter que  $n < n + 1 = |\nu(\gamma) - \nu(\gamma')| \leq n$ , fato que gera um absurdo, provando o resultado.  $\square$

Uma consequência imediata do teorema dos zeros é o teorema da alternância que provaremos a seguir:

## 3.2 Análogos simpléticos dos Teoremas de Sturm

---

**Teorema 3.14.** *Seja  $H$  função hamiltoniana tal que  $H|_{\alpha}$  e  $H|_{\beta}$  são positivas-definidas. Se  $\nu(\cdot)$  denota o número de momentos de não-transversalidade de um plano lagrangiano qualquer em relação ao plano  $(\cdot)$ , então  $|\nu(\alpha) - \nu(\beta)| \leq n$ .*

*Demonstração.* Usando as idéias apresentadas na demonstração do teorema dos zeros e os itens (2) e (3) do teorema (2.13) segue que:

$$\begin{aligned}\nu(\alpha) &= m(\tilde{\gamma}(t_2), \tilde{\alpha}) - m(\tilde{\gamma}(t_1), \tilde{\alpha}) = \\ &= I(\gamma(t_2), \alpha, \gamma(t_1)) - m(\tilde{\gamma}(t_2), \tilde{\gamma}(t_1))\end{aligned}$$

Analogamente, obtemos que  $\nu(\beta) = I(\gamma(t_2), \beta, \gamma(t_1)) - m(\tilde{\gamma}(t_2), \tilde{\gamma}(t_1))$ . Portanto,

$$|\nu(\beta) - \nu(\alpha)| = |I(\gamma(t_2), \beta, \gamma(t_1)) - I(\gamma(t_2), \alpha, \gamma(t_1))| \leq n,$$

provando o resultado. □

**Corolário 3.15.** *Seja  $\gamma$  um plano lagrangiano qualquer e suponhamos que, em  $I = [t_1, t_2]$ , tenhamos  $\nu(\alpha) = n + 1$ . Então,  $\nu(\beta) \geq 1$ .*

*Demonstração.* A constatação desse resultado dar-se-á por absurdo. Suponhamos, então, que  $\nu(\beta) = 0$ . Logo, pelo teorema (3.14), temos:

$$n < n + 1 = |n + 1 - 0| \leq n,$$

gerando um absurdo. Portanto,  $\nu(\beta) \geq 1$ , provando o resultado. □

### 3.2.3 O teorema da comparação e suas consequências

A próxima generalização que apresentaremos será o teorema da comparação. Na sua versão clássica, ele lida com soluções não-triviais de duas equações distintas fornecendo

## 3.2 Análogos simpléticos dos Teoremas de Sturm

---

informações sobre os zeros de uma das equações quando temos uma relação entre as funções  $a(t)$  e  $a_1(t)$  e conhecemos dois zeros consecutivos de uma solução de uma das equações em particular. De modo superficial, quanto maior for  $a_1$  mais rápido oscilarão suas soluções não-triviais:

**Teorema 3.16.** *Sejam  $u$  e  $v$  soluções reais não-triviais de*

$$\begin{aligned}(b(t)u')' + a(t)u &= 0 \\ (b(t)v')' + a_1(t)v &= 0,\end{aligned}$$

em que  $b, b', a, a_1$  são contínuas,  $b(t) > 0$  e  $a_1(t) \geq a(t)$ ,  $\forall t \in [a, b]$ . Se  $t_1 < t_2$  são zeros consecutivos de  $u$ , então  $v$  se anula pelo menos uma vez em  $(t_1, t_2)$ , exceto no caso em que tenhamos  $a(t) \equiv a_1(t)$  e  $v(t) \equiv ku(t)$ ,  $k \in \mathbb{R}$ , nesse mesmo intervalo.

A versão simplética do teorema da comparação é dada pela evolução de um plano lagrangiano por dois fluxos hamiltonianos distintos:

**Teorema 3.17.** *Se  $H$  e  $H'$  são duas funções hamiltonianas positivas-definidas sobre o plano lagrangiano  $\alpha$  tais que  $H' \geq H$ , então  $\nu(H') \geq \nu(H) - n$ , em que  $\nu(\cdot)$  representa o número de momentos de não-transversalidade de um plano lagrangiano qualquer, evoluído sobre o sistema hamiltoniano correspondente, em relação ao plano lagrangiano  $\alpha$ .*

*Demonstração.* A verificação desse resultado segue as idéias da demonstração do teorema dos zeros. Fixemos a notação: sejam  $\gamma(t)$  e  $\gamma'(t)$ , respectivamente, a evolução de  $\gamma$  pelos fluxos  $\phi_t^H$  e  $\phi_t^{H'}$ . Adaptando a relação (3.3), obtemos:

$$m(\tilde{\gamma}, \tilde{\alpha}) + m(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}') + m(\tilde{\gamma}', \tilde{\gamma}) = I(\gamma, \alpha, \gamma') \quad (3.4)$$

Em contraste com a demonstração do teorema dos zeros, o termo  $m(\tilde{\gamma}'(t), \tilde{\gamma}(t))$  depende de  $t$  (neste caso, estão envolvidas duas funções hamiltonianas  $H$  e  $H'$ ). Necessitamos, então, do seguinte lema auxiliar:

### 3.2 Análogos simpléticos dos Teoremas de Sturm

---

**Lema 3.18.** *Se  $H' \geq H$ , então o termo  $m(\tilde{\gamma}', \tilde{\gamma})$  não decresce quando  $t$  cresce.*

*Demonstração.* Suponhamos, inicialmente, que  $H' > H$ . Podemos assumir, sem perda de generalidade, que  $\tau$  é momento de não-transversalidade de  $\gamma$  e  $\gamma'$  em relação ao plano lagrangiano  $\alpha$  (basta reparametrizarmos um dos caminhos lagrangianos), isto é,  $\gamma(\tau) \cap \alpha \neq \{0\}$  e  $\gamma'(\tau) \cap \alpha \neq \{0\}$ . Observemos os seguintes esquemas:

$$\begin{array}{c} \gamma \xrightarrow{\phi_{\tau}^H} \gamma(\tau) \xrightarrow{\phi_{\tau-t}^H} \gamma(t) \xrightarrow{(\phi_{\tau-t}^H)^{-1}} \gamma(\tau) \\ \gamma \xrightarrow{\phi_{\tau}^{H'}} \gamma'(\tau) \xrightarrow{\phi_{\tau-t}^{H'}} \gamma'(t) \xrightarrow{(\phi_{\tau-t}^H)^{-1}} \sigma(t) \end{array}$$

Com base nas configurações anteriores, definiremos a família de simplectomorfismos:

$$\begin{aligned} g_t &= (\phi_{\tau-t}^H)^{-1} : \mathbb{R}^{2n} \longrightarrow (\phi_{\tau-t}^H)^{-1}(\mathbb{R}^{2n}) \\ &\quad \gamma(t) \quad \mapsto \quad \gamma(\tau) \\ &\quad \gamma'(t) \quad \mapsto \quad \sigma(t) \end{aligned}$$

Mais ainda, para  $t = 0$ , observamos que a função hamiltoniana  $\tilde{H}(t)$ , associada ao movimento de  $\sigma(t)$  é igual a  $H' - H$ , que é positiva-definida sobre  $\alpha$ . Como o índice de Maslov é simplecto-invariante, temos que  $m(\tilde{\gamma}'(t), \tilde{\gamma}(t)) = m(\tilde{\sigma}(t), \tilde{\gamma}(\tau))$ . Baseando-nos no lema (3.12), observamos que, à medida que  $t$  cresce,  $m(\tilde{\sigma}(t), \tilde{\gamma}(\tau))$  não decresce, provando o resultado para este caso. Por fim, se  $H' = H$ , basta fazermos  $H' = H + \varepsilon^2$ ,  $\varepsilon > 0$ , e aplicarmos o resultado obtido anteriormente. Tomando  $\varepsilon \rightarrow 0$ , obtemos o resultado desejado.

De modo que, ao fazermos a diferença na igualdade (3.4) para  $t = t_2$  e  $t = t_1$ , respectivamente, obtemos:

$$\begin{aligned} n &\geq |I(\gamma(t_2), \alpha, \gamma'(t_2)) - I(\gamma(t_1), \alpha, \gamma'(t_1))| = \\ &= |m(\tilde{\gamma}(t_2), \tilde{\alpha}) + m(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}'(t_2)) + m(\tilde{\gamma}'(t_2), \tilde{\gamma}(t_2)) - m(\tilde{\gamma}(t_1), \tilde{\alpha}) - m(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}'(t_1)) - m(\tilde{\gamma}'(t_1), \tilde{\gamma}(t_1))| = \\ &= |[m(\tilde{\gamma}(t_2), \tilde{\alpha}) - m(\tilde{\gamma}(t_1), \tilde{\alpha})] + [m(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}'(t_2)) - m(\tilde{\alpha}, \tilde{\gamma}'(t_1))] + [m(\tilde{\gamma}'(t_2), \tilde{\gamma}(t_2)) - m(\tilde{\gamma}'(t_1), \tilde{\gamma}(t_1))]| = \\ &= \nu(H) - \nu(H') + [m(\tilde{\gamma}'(t_2), \tilde{\gamma}(t_2)) - m(\tilde{\gamma}'(t_1), \tilde{\gamma}(t_1))] \geq \nu(H) - \nu(H') \end{aligned}$$

## 3.2 Análogos simpléticos dos Teoremas de Sturm

---

Portanto,  $\nu(H') \geq \nu(H) - n$ , provando o resultado.  $\square$

O próximo resultado da teoria clássica de Sturm nos dá uma estimativa para diferença entre dois zeros consecutivos de uma solução não-trivial de  $u'' + q(x)u = 0$ , em que a função  $q$  satisfaz uma determinada desigualdade. Em termos mais precisos, temos:

**Teorema 3.19.** *Sejam  $c, K \in \mathbb{R}$  tal que  $0 < c^2 \leq a(t) \leq K^2$ ,  $\forall t \in [a, b]$ , e  $u(t)$  uma solução não-trivial de  $u'' + a(t)u = 0$ . Se  $u(a) = u(b) = 0$  e  $u$  tem  $n - 1$  zeros em  $(a, b)$ , então  $\frac{K(b-a)}{\pi} \geq n \geq \frac{c(b-a)}{\pi}$ .*

Em sua versão simplética, temos o seguinte corolário do teorema da comparação:

**Corolário 3.20.** *Seja  $\gamma$  plano lagrangiano qualquer, evoluído pelo fluxo  $\phi_t^H$ , e suponhamos que, em  $[t_1, t_2]$ , temos  $\nu(H) = n + 1$ , em que  $\nu(\cdot)$  representa o número de momentos de não-transversalidade nesse intervalo em relação ao plano lagrangiano  $\alpha$ . Se  $H'$  é outra função hamiltoniana, tal que  $H' \geq H$ , então  $\nu(H') \geq 1$ .*

*Demonstração.* Suponhamos, por absurdo, que  $\nu(H') = 0$ . Então, pelo teorema (3.17), segue que:

$$\nu(H') = 0 \geq (n + 1) - n = 1,$$

gerando um absurdo. Portanto,  $\nu(H') \geq 1$ .  $\square$

**Corolário 3.21.** *Suponhamos que, para a equação  $x'' = -A(t)x$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , a energia potencial seja uniformemente positiva-definida, isto é,  $U(x, t) \geq k^2 \frac{\langle x, x \rangle}{2}$ ,  $k \in \mathbb{R}$ . Então, em  $[0, t]$ , temos  $\nu(H') \geq \left\lfloor \frac{kt}{\pi} \right\rfloor + 1 - n$ , em que  $\nu(\cdot)$  representa o número de momentos de não-transversalidade de um plano lagrangiano qualquer  $\gamma$  em relação ao plano lagrangiano  $\alpha$  e  $\lfloor \cdot \rfloor$  denota o menor inteiro.*

### 3.2 Análogos simpléticos dos Teoremas de Sturm

---

*Demonstração.* Sejam  $H = T + k^2 \frac{\langle x, x \rangle}{2}$  e  $H' = T + U(x)$  duas funções hamiltonianas para a equação  $x'' = A(t)x$ . Da hipótese, segue que  $H' \geq H$ . Sabemos que o sistema anterior é um sistema hamiltoniano e pode ser expresso da seguinte maneira:

$$\begin{pmatrix} \dot{q} \\ \dot{p} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0_{n \times n} & I_{n \times n} \\ -k^2 I_{n \times n} & 0_{n \times n} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q \\ p \end{pmatrix}, \quad (3.5)$$

em que,  $T(p) = \frac{1}{2} \langle p, p \rangle$  e  $U(q) = \frac{1}{2} k^2 \langle q, q \rangle$ .

As soluções de (3.5) são dadas por:

$$\begin{pmatrix} q(t) \\ p(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} C & S \\ -S & C \end{pmatrix} \begin{pmatrix} q_0 \\ p_0 \end{pmatrix},$$

em que,  $C = \text{diag}(\cos(kt), \dots, \cos(kt))$ ,  $S = \text{diag}(\sin(kt), \dots, \sin(kt))$  e  $(q_0, p_0)^t$  é uma condição inicial fixada.

Se  $q_0 = p_0 = 0$ , então  $x(t) = 0$  é a singularidade da equação. Suporemos, então, que ou  $p_0$  ou  $q_0$  é um vetor não-nulo. Escolhemos coordenadas de Darboux, tais que  $\alpha$  seja o  $p$ -plano. Nessas condições, devemos ter, necessariamente,  $q_0 = 0$ . Desejamos, então, encontrar a quantidade de instantes  $\tau$ ,  $0 \leq \tau \leq t$ , tais que  $\phi_\tau^H(0, p_0) \in \alpha$ , isto é,  $x(\tau) \in \alpha$ . Ora, mas  $\phi_\tau^H(0, p_0) = (\sin(k\tau)p_0, \cos(k\tau)p_0)$ . Logo, devemos impor  $\sin(k\tau)p_0 = 0$ , donde segue que  $k\tau = n\pi$ , ou seja,  $\frac{k\tau}{\pi} = n$ ,  $n \in \mathbb{Z}$ . Portanto,  $\nu(H) = \left\lfloor \frac{kt}{\pi} \right\rfloor + 1$ , já que  $\tau = 0$  também satisfaz a igualdade. Por fim, pelo teorema (3.17), concluimos que  $\nu(H') \geq \left\lfloor \frac{kt}{\pi} \right\rfloor + 1 - n$ , provando o resultado.  $\square$

Em particular, segue como consequência imediata do corolário (3.21), que o número de momentos de não-transversalidade cresce ilimitadamente quando  $t \rightarrow +\infty$ . Este fato generaliza o seguinte resultado da teoria clássica de Sturm-Liouville:

Primeiramente, é possível demonstrarmos (ver [6]) que todo problema de Sturm-Liouville regular admite uma sequência infinita de autovalores que tende a  $+\infty$ . Além

### 3.3 Fluxos geodésicos e campos de Jacobi

---

disso, para cada  $\lambda \in \mathbb{R}$ , seja  $u_\lambda$  a única solução de (3.1) com  $u_\lambda(a) = 0$  e  $u'_\lambda(a) = 1$ . Consideramos  $N : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{N}$ ,  $\lambda \mapsto N(\lambda)$ , em que  $N(\lambda)$  indica o número de zeros de  $u_\lambda$  em  $(a, b]$ .

**Teorema 3.22.** *A função  $N$ , definida anteriormente, possui as seguintes propriedades:*

1.  $\lambda > \nu \implies N(\lambda) \geq N(\nu)$ ;
2.  $u_\lambda(b) = 0 \implies N$  descontínua em  $\lambda$ ;
3.  $0 \in N(\mathbb{R})$ ;
4.  $\lim_{\lambda \rightarrow +\infty} N(\lambda) = +\infty$ .

Observemos que, para o nosso caso, a função  $t \mapsto \left\lfloor \frac{kt}{\pi} \right\rfloor + 1 - n$  é a análoga simplética da função  $N$ .

### 3.3 Fluxos geodésicos e campos de Jacobi

Nessa seção apresentaremos alguns exemplos que ilustrarão a teoria desenvolvida nas seções anteriores. Mostraremos que a equação de Jacobi é uma equação diferencial do tipo  $(B(t)\dot{x})' = -A(t)x$ , estudada nessa dissertação. Por fim, comentamos alguns resultados correlatos a essa identificação.

**Exemplo 3.2.** *Seja  $\gamma : [0, l] \rightarrow S$  uma geodésica parametrizada pelo comprimento de arco numa superfície  $S$  e  $J(s)$  um campo de Jacobi ao longo de  $\gamma$ , satisfazendo  $J(0) = 0$  e  $\left\langle \frac{D}{ds} J(s) \Big|_{s=0}, \gamma'(0) \right\rangle = 0$ . Temos que:*

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \langle J(s), \gamma'(s) \rangle &= \left\langle \frac{D}{ds} J(s), \gamma'(s) \right\rangle + \left\langle J(s), \frac{D}{ds} \gamma'(s) \right\rangle \\ &= \left\langle \frac{D}{ds} J(s), \gamma'(s) \right\rangle \end{aligned}$$

### 3.3 Fluxos geodésicos e campos de Jacobi

---

Daí, segue que:

$$\begin{aligned} \frac{d}{ds} \left\langle \frac{D}{ds} J(s), \gamma'(s) \right\rangle &= \left\langle \frac{D}{ds} \frac{D}{ds} J(s), \gamma'(s) \right\rangle \\ &= \left\langle -K(s)(\gamma'(s) \wedge J(s)) \wedge \gamma'(s), \gamma'(s) \right\rangle \\ &= 0 \end{aligned}$$

De modo que,  $\langle J(s), \gamma'(s) \rangle = as + b$ . Por fim, das hipóteses  $J(0) = 0$  e  $\left\langle \frac{D}{ds} J(s) \Big|_{s=0}, \gamma'(0) \right\rangle = 0$ , concluímos que  $\langle J(s), \gamma'(s) \rangle = 0, \forall s \in [0, l]$ .

Suponhamos, então, que  $\left\| \frac{D}{ds} J(s) \Big|_{s=0} \right\| = 1$ . Seja  $\{e_1(0), e_2(0)\}$  base ortonormal de  $T_{\gamma(0)}S$ , com  $e_1(0) = \gamma'(0)$  e  $e_2(0) = \frac{D}{ds} J(s) \Big|_{s=0}$ . Efetuando o transporte paralelo desses vetores ao longo de  $\gamma$ , obtemos bases ortonormais  $\{e_1(s), e_2(s)\}$  de  $T_{\gamma(s)}S, \forall s \in [0, l]$ . Daí, vem que  $J(s) = u(s)e_2(s)$ , para alguma função  $u = u(s)$ . Logo,

$$\begin{aligned} \frac{D}{ds} \frac{D}{ds} J(s) + K(s)(\gamma'(s) \wedge J(s)) \wedge \gamma'(s) &= u''(s)e_2(s) + K(s)(e_1(s) \wedge u(s)e_2(s)) \wedge e_1(s) \\ &= (u''(s) + K(s)u(s))e_2(s) \end{aligned}$$

Portanto, a equação de Jacobi para  $J$  pode ser escrita como  $u''(s) + K(s)u(s) = 0$ , satisfazendo as condições iniciais  $u(0) = 0$  e  $u'(0) = 1$ .

**Exemplo 3.3.** Sejam  $S$  e  $\tilde{S}$  duas superfícies completas. Tomemos  $p \in S, \tilde{p} \in \tilde{S}$  e  $i : T_p S \rightarrow T_{\tilde{p}} \tilde{S}$  isometria linear. Sejam  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow S$  uma geodésica de  $S$ , satisfazendo  $\gamma(0) = p, \|\gamma'(0)\| = 1$ , e  $J = J(s)$  um campo de Jacobi ao longo de  $\gamma$ , satisfazendo  $J(0) = 0, \left\langle \frac{D}{ds} J(s) \Big|_{s=0}, \gamma'(0) \right\rangle = 0$  e  $\left\| \frac{D}{ds} J(s) \Big|_{s=0} \right\| = 1$ . Utilizando a isometria  $i$  é possível construirmos uma geodésica  $\tilde{\gamma} : [0, \infty) \rightarrow \tilde{S}$ , com  $\tilde{\gamma}(0) = \tilde{p}, \tilde{\gamma}'(0) = i(\gamma'(0))$ , e um campo de Jacobi  $\tilde{J} = \tilde{J}(s)$  ao longo de  $\tilde{\gamma}$ , satisfazendo  $\tilde{J}(0) = 0$  e  $\frac{D}{ds} \tilde{J}(s) \Big|_{s=0} = i \left( \frac{D}{ds} J(s) \Big|_{s=0} \right)$ .

Seguindo as idéias apresentadas no exemplo (3.2), podemos mostrar que  $J(s) = u(s)e_2$  e  $\tilde{J}(s) = \tilde{u}(s)\tilde{e}_2(s)$ , em que  $u = u(s), \tilde{u} = \tilde{u}(s)$  são funções diferenciáveis e

### 3.3 Fluxos geodésicos e campos de Jacobi

---

$e_2(s)$ ,  $\tilde{e}_2(s)$  são, respectivamente, os transportes paralelos de  $\frac{D}{ds}J(s)\Big|_{s=0}$  e  $\frac{D}{ds}\tilde{J}(s)\Big|_{s=0}$  ao longo de  $\gamma$  e  $\tilde{\gamma}$ , nessa ordem. De modo que, as equações de Jacobi para  $J$  e  $\tilde{J}$  são dadas, respectivamente, por:

$$\begin{aligned} u''(s) + K(s)u(s) &= 0, \text{ com } u(0) = 0, u'(0) = 1 \\ \tilde{u}''(s) + \tilde{K}(s)\tilde{u}(s) &= 0, \text{ com } \tilde{u}(0) = 0, \tilde{u}'(0) = 1 \end{aligned}$$

Suponhamos que  $K(s) \leq \tilde{K}(s)$ ,  $\forall s \in [0, \infty)$ . Assim, se  $a$  é o primeiro zero de  $\tilde{u}$  em  $(0, \infty)$ , isto é  $\tilde{u}(a) = 0$  e  $\tilde{u}(s) > 0$ ,  $\forall s \in (0, a)$ , e  $b$  é o primeiro zero de  $u$  em  $(0, \infty)$ , então, como consequência imediata do teorema da comparação de Sturm,  $b \geq a$ . Ou seja, o primeiro ponto conjugado de  $p$  em relação a  $\gamma$  não ocorre antes do primeiro ponto conjugado de  $\tilde{p}$  em relação a  $\tilde{\gamma}$ .

Mais ainda, por integração por partes, temos,  $\forall s \in [0, a)$ :

$$\begin{aligned} 0 &= \int_0^s [\tilde{u}(u'' + Ku) - u(\tilde{u}'' + \tilde{K}\tilde{u})] ds \\ &= (\tilde{u}u' - u\tilde{u}')\Big|_0^s + \int_0^s u\tilde{u}(K - \tilde{K})ds \end{aligned}$$

Donde vem que  $\int_0^s u\tilde{u}(\tilde{K} - K)ds = (\tilde{u}u' - u\tilde{u}')\Big|_0^s$ , isto é,  $(\tilde{u}u' - u\tilde{u}')\Big|_0^s \geq 0$ , pois  $u, \tilde{u} > 0$  em  $(0, a)$ . Logo,  $\forall s \in (0, a)$ ,

$$\begin{aligned} \tilde{u}(s)u'(s) &\geq u(s)\tilde{u}'(s) \Rightarrow \\ \Rightarrow \frac{u'(s)}{u(s)} &\geq \frac{\tilde{u}'(s)}{\tilde{u}(s)} \Rightarrow \\ \Rightarrow (\ln u(s))' &\geq (\ln \tilde{u}(s))' \Rightarrow \\ \Rightarrow u(s) &\geq \tilde{u}(s) \end{aligned}$$

Portanto, nesse intervalo,  $\|J(s)\| \geq \|\tilde{J}(s)\|$ . Os resultados obtidos anteriormente constituem os chamados primeiro e segundo teoremas da comparação de Sturm para su-

---

### 3.3 Fluxos geodésicos e campos de Jacobi

---

*perfícies. Consequentemente, se  $S$  é uma superfície completa com  $K \geq K_1 > 0$ , em que  $K$  é a curvatura gaussiana de  $S$  e  $K_1$  é uma constante real, então toda geodésica  $\gamma : [0, \infty) \rightarrow S$  tem um ponto conjugado ao ponto  $\gamma(0) = p$  no intervalo  $(0, \pi/\sqrt{K_1}]$ . Em particular, toda geodésica de  $\mathbb{S}^2$  tem um ponto conjugado ao ponto  $\gamma(0) = p$  no intervalo  $(0, \pi]$ .*

A equação de Jacobi  $u''(s) + K(s)u(s) = 0$  pertence a classe de equações diferenciais do tipo  $(B(s)\dot{x})' = -A(s)x$ , com  $A(s), B(s)$  simétricas para todo  $s$ , abordada nessa dissertação. Ela é um sistema newtoniano com energia potencial  $U = \frac{1}{2}K(s)\|u\|^2$  e energia cinética  $T = \frac{1}{2}\|u'\|^2$ . As funções lagrangiana e hamiltoniana associadas a ela são, respectivamente,  $L(q, v) = \frac{1}{2}\|v\|^2 - \frac{1}{2}K(s)\|q\|^2$  e  $H(q, p) = \frac{1}{2}\|p\|^2 + \frac{1}{2}K(s)\|q\|^2$ . Daí, obtemos o seguinte sistema hamiltoniano:

$$\begin{cases} \dot{q} = p \\ \dot{p} = -K(s)q \end{cases} \quad (3.6)$$

Estamos no caso particular  $n = 1$ , isto é, no espaço vetorial simplético  $(\mathbb{R}^2, \omega_0)$ ,  $\omega_0$  forma simplética canônica. Nesse caso, os planos lagrangianos são unidimensionais. Geometricamente, eles são retas emanando da origem. Fixemos, sem perda de generalidade,  $\alpha$  como o  $p$ -plano (o plano vertical). Sejam, também,  $\phi_s^H$  o fluxo associado ao campo de vetores  $X_H$  e  $\alpha(s) = \phi_s^H \alpha$  a sua evolução pelo fluxo.

Suporemos que  $J(0) = 0$ , isto é,  $u(0) = 0$ . Claramente, notamos que  $u \equiv 0$  é solução da equação de Jacobi. De modo que, interessa-nos saber se existem soluções não-triviais satisfazendo  $u(0) = 0 = u(l)$ . A existência de tais soluções nos indica que a geodésica  $\lambda$  em  $S$ , ligando os pontos  $\lambda(0)$  e  $\lambda(l)$ , não é o menor caminho que une tais pontos. Em outras palavras,  $\lambda(0)$  e  $\lambda(l)$  são pontos conjugados. O que pretendemos aqui é dar uma noção geométrica desse fato, em termos de estratos e momentos de não-transversalidade.

Notemos, inicialmente, que  $\Lambda(1) = \mathbb{R}\mathbb{P}^1$  e  $\Lambda^{k \geq 1}(\alpha) = \Lambda^1(\alpha) = \alpha$ . Logo, se  $\tau$  é momento de não-transversalidade de  $\alpha$ , ou seja,  $\alpha(\tau) \cap \alpha = \alpha$ , então  $\phi_\tau^H(q, p) = (0, \tilde{p})$ ,

### 3.3 Fluxos geodésicos e campos de Jacobi

---

para algum  $\tilde{p} \in \alpha$  e  $\forall (q, p) \in \alpha$ . Ora, isso implica que toda solução não-trivial  $\zeta(s) = (q(s), p(s))$  de (3.6), com condições iniciais  $(0, p) \in \alpha$ , satisfaz  $\zeta(\tau) = (0, \tilde{p})$ , isto é,  $q(\tau) = u(\tau) = 0$ . Nessa situação, o campo de Jacobi  $J$  não identicamente nulo se anula em  $\lambda(0)$  e  $\lambda(l)$ .

Em particular, para  $K(s) \leq 0$  em  $[0, l]$ , segue do teorema (3.8), que o número de momentos de não-transversalidade do plano lagrangiano  $\alpha$  não excede 1. Ora, mas  $s = 0$  já é um momento de não-transversalidade. Logo, não existem mais momentos de não-transversalidade e, conseqüentemente,  $u$  não volta a se anular mais em  $(0, l)$ , isto é,  $\lambda(0)$  não possui ponto conjugado, em conformidade com o resultado obtido no exemplo (1.5).

Para exemplificarmos, suponhamos que  $K(s) = K_0 \geq 0, \forall s \in [0, l]$ . As soluções de (3.6) são dadas por:

$$\zeta(s) = \begin{pmatrix} \cos(\sqrt{K_0}s) & -\sin(\sqrt{K_0}s) \\ \sin(\sqrt{K_0}s) & \cos(\sqrt{K_0}s) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ p \end{pmatrix}$$

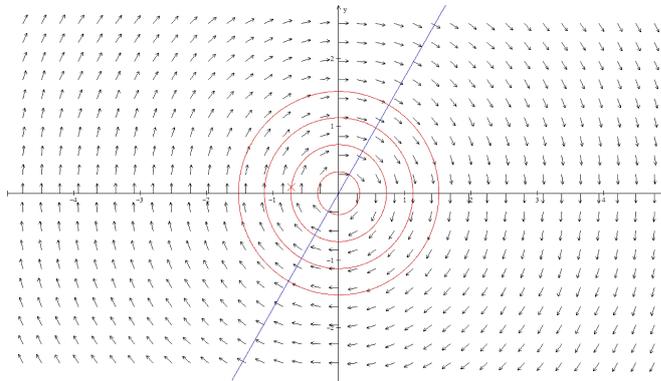


Figura 12: Evolução do plano lagrangiano  $\alpha$  sob ação do fluxo  $\phi_s^H$ .

No plano de fase dessa equação, as soluções descrevem circunferências (ou elipses) concêntricas na origem. Na figura 12, esquematizamos a evolução do plano lagrangiano  $\alpha$  sob a ação do fluxo  $\phi_s^H$ . Observemos que, nesse caso, as autointersecções ocorrerão

### 3.3 Fluxos geodésicos e campos de Jacobi

---

para valores de  $s$  que ocasionem rotações de múltiplos inteiros de  $\pi$ . De modo que, para esses valores de  $s$ , teremos pontos conjugados do ponto  $\lambda(0)$ . Em especial, para  $\mathbb{S}^2$ , temos  $K_0 = 1$  e, por conseguinte,  $s = k\pi$ ,  $k \in \mathbb{Z}$ , momentos de não-transversalidade para o plano lagrangiano  $\alpha$ .

# Considerações Finais

Através desse estudo, foi possível constatar que equações diferenciais da forma  $(B(t)\dot{x})' = -A(t)x$ ,  $x \in \mathbb{R}^n$ , em  $A(t)$ ,  $B(t)$  simétricas para todo  $t$ , com energia potencial  $U(x) = \frac{1}{2}\langle Ax, x \rangle$  e energia cinética positiva-definida  $T = \frac{1}{2}\langle B\dot{x}, \dot{x} \rangle$  podem ser transformadas em uma classe de sistemas de equações em  $\mathbb{R}^{2n}$  especial: os sistemas hamiltonianos.

Vimos que a Grassmaniana Lagrangiana  $\Lambda(n)$  é uma subvariedade mergulhada de  $G_n(2n)$  e sua dimensão é dada por  $\frac{n(n+1)}{2}$ . Através de um difeomorfismo, identificamos  $\Lambda(n)$  com  $U(n)/O(n)$  e pudemos concluir que ela é uma variedade homogênea, compacta e conexa. Além disso, fixado um plano lagrangiano  $\alpha$ , os estratos  $\Lambda^k(\alpha)$  também são variedades e possuem codimensão  $\frac{k(k+1)}{2}$ . Em particular,  $\Lambda^1(\alpha)$  admite uma orientação transversal dada pelos vetores positivos. Tal orientação nos permitiu definir o índice de Maslov, que conta o número de intersecções (orientadas) de um caminho lagrangiano, cujos pontos extremais pertencem a  $\Lambda^0(\alpha)$ , com o estrato  $\Lambda^{k \geq 1}(\alpha)$ . Mais precisamente, ele nos informa o número de momentos de não-transversalidade de um plano lagrangiano em relação ao plano lagrangiano  $\alpha$ . Essas ferramentas permitiu-nos estabelecer os análogos simpléticos dos teoremas clássicos da teoria de Sturm e suas consequências. Em especial, para  $n = 2$ , obtemos uma fibração não-trivial entre  $\Lambda(2)$  e  $\mathbb{S}^1$ , com fibra típica difeomorfa a  $\mathbb{S}^2$ .

# Referências Bibliográficas

- [1] BARBOSA, João Lucas M. *Geometria Diferencial e Cálculo das Variações*. Poços de Caldas: 10º Colóquio Brasileiro de Matemática. Instituto de Matemática Pura e Aplicada (IMPA), 1975.
- [2] MUNIZ JÚNIOR, Justino. *Subvariedades lagrangianas e a equação de Hamilton-Jacobi*. 2009. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2009.
- [3] BURSZTYN, Henrique.; Leonardo, MACARINI. *Introdução a Geometria Simplética*. Rio de Janeiro: IMPA, XIV Escola de Geometria Diferencial, 2006.
- [4] CANNAS DA SILVA, Ana. *Lectures on symplectic geometry: lectures notes in mathematics*. Springer - Valerg.
- [5] CARMO, Manfredo Perdigão do. *Geometria Diferencial de curvas e superfícies*. 4ª ed. - Rio de Janeiro: SBM, 2010.
- [6] SOTOMAYOR, Jorge. *Lições de Equações Diferenciais Ordinárias*. Rio de Janeiro: IMPA, 1979. (Projeto Euclides).
- [7] PICCIONE, Paolo; TAUSK, Daniel V. *On the geometry of grassmannians and symplectic group: the maslov index and its applications*. Niterói: UFF, XI Escola de Geometria Diferencial.

- [8] PICCIONE, Paolo; TAUSK, Daniel V. *A student's guide to symplectic spaces, grassmannians and Maslov index*. Rio de Janeiro: IMPA, 2009.
- [9] ARNOLD, V. I. *The Sturm theorems and symplectic geometry*. Funkts. Anal. Prilozhen, 19, n°4, 1-10, 1985.
- [10] ARNOLD, V. I. *On the characteristic class entering into conditions of quantization*. Funkts. Anal. Prilozhen, 1, n°1, 1-14, 1967.
- [11] ARNOLD, V. I. *Métodos matemáticos da mecânica clássica*. Moscou: MIR, 1987.
- [12] CARNEIRO, Mário J. D. *Tópicos em dinâmica lagrangiana*. Arequipa: 2003. (XXI Colóquio da Sociedade Peruana de Matemática).
- [13] MORSE, M. *A generalization of the Sturm theorems in  $n$ -space*. Math. Ann., 103, 52-59, 1930.
- [14] MORSE, M. *The calculus of variation in the large*. In: AMS Coll. Publ., Vol. 18, New York, 1934, pp. 80-106.
- [15] LIDSKII, V. B. *Oscillation theorems for canonical system of differential equations*. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 105, n°5, 877-880, 1955.
- [16] EDWARDS, H. M. *A generalized Sturm theorem*. Ann. Math., 80, n°1, 22-57, 1964.
- [17] BOTT, R. *On the iterations of closed geodesics and the Sturm intersection theory*. Comm. Pure Appl. Math., 9, n°2, 171-206, 1956.
- [18] BOSCAGGIN, Alberto; CAPIETTO, Anna; DAMBROSIO, Walter. *The Maslov index and global bifurcation for nonlinear boundary value problems*. To appear in CIME Lectures notes. Springer.

- [19] PUSHKAR, P.E. *Maslov index and symplectic Sturm theorems*. Funkts. Anal. Prilozhen, 32:3, 35-49, 1998.
- [20] ZETTL, Anton. *Sturm-Liouville theory*. Mathematical surveys and monographs vol 121. American Mathematical Society (2005).
- [21] NICOLAESCU, Liviu I. *Lectures on the geometry of Manifolds*. Notredame: World Scientific, 2007.
- [22] CONTRERAS, Gonzalo; GAMBAUDO, Jean-Marc; ITURRIAGA, Renato; PATERNAIN, Gabriel P. *The asymptotic Maslov index and its applications*. Ergodic Theory Dynamical Systems 23 (2003) 1415 – 1443.