UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

BOA E MÁ COLOCAÇÃO PARA A EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER NÃO-LINEAR

Carlos Manuel Guzmán Jiménez

Belo Horizonte - MG
2012

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG
MESTRADO EM MATEMÁTICA

Carlos Manuel Guzmán Jiménez

Orientador:
Prof. Luiz Gustavo Farah

BOA E MÁ COLOCAÇÃO PARA A EQUAÇÃO DE SCHRÖDINGER NÃO-LINEAR

Dissertação submetida à banca examinadora, designada pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMG, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Matemática.

Belo Horizonte - MG
Fevereiro - 2012

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradecer ao meu Deus, que nunca desiste de minha vida e insiste em me abençoar mesmo sem eu merecer. Tenho plena consciência que sem Ele não estaria aqui, sem Ele não sou nada e não posso nada.

Gostaria de agradecer aos meus pais, Antonio Guzmán e Modesta Jiménez, que são as pessoas mais importantes para min e sempre fizeram o possível e até o impossível para que eu prossiguesse os estudos. Agradeço também aos meus irmãos Roxana, Uber e Diana, pelo grande amor que me dão.

Queria igualmente agradecer a Eduardo Cabrera, Alberto Sarmiento e Ana Cristina pela ajuda, os conselhos e pela amizade.

Os amigos foram peças fundamentais que ajudaram à tornar a vida longe de casa bem mais agradável. Gostaria de agradecer a todos os colegas da UFMG, mas gostaria de mencionar alguns em particular. Farley, Danilo, Celso, Luiz, Vitor, Monique, Joselmo, Marcio, Camila, Juliano, Weler, Antônio, Leandro, Jailton, Carlos, Mario, Renato, José e Miguel sempre estiveram presentes ao longo desses anos. Acredito que formamos uma grande família e com certeza levarei isso para o resto da vida.

Agradeço a todos os professores que tive na UFMG pela qualidade dos cursos ministrados. Sem dúvida, eles foram fundamentais para minha formação matemática. Gostaria de agradecer a Viviane, Marcio, César, Susana, Hamilton e Marcos.

Ao meu orientador, professor Luiz Farah, dedico meus agradecimentos. Não só pela excelente orientação matemática, mas também pela confiança que depositou em mim desde a nossa primeira conversa. Sem dúvida, foi uma das pessoas responsáveis pelo sucesso deste trabalho.

Agradeço à toda estrutura administrativa da UFMG por proporcionar um excelente ambiente de trabalho e de pesquisa. Queria agradecer em especial a Kelli e Andréa.

Sou grato também aos membros da banca, os professores Gastão de Almeida, Felipe

Linares e Jussara de Matos.

Finalmente, agradeço a Capes pelo apoio financeiro.

A grandeza de um ser humano não está no quanto ele sabe, mas no quanto ele tem consciência de que não sabe.

Augusto Cury

Resumo

O propósito deste trabalho é estudar a *boa e má colocação* do problema de valor inical (PVI) associado a equação de Schrödinger não linear

$$i\partial_t u + \Delta u + \lambda |u|^\alpha u = 0, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^N, \tag{1}$$

em que $0 < \alpha < \frac{4}{N}$ (caso subcrítico) e $\alpha = \frac{4}{N}$ (caso crítico).

No primeiro capítulo, apresentaremos alguns resultados importantes de Análise Harmônica e estudaremos os espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^N)$, que serão a base fundamental de nosso trabalho.

No segundo capítulo, mostraremos, no caso subcrítico, *boa colocação local e global* do PVI associado a equação (1) com dado em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Além disso, no caso crítico, mostraremos *boa colocação local* e, em caso particular, *boa colocacão global*.

Finalmente, no capítulo 3, estudaremos o PVI associado a equação (1) em $H^s(\mathbb{R}^N)$ para índice negativo s. Mostraremos *má colocação* para $s \in (\frac{N}{2} - \frac{2}{\alpha}, 0)$ e *má colocação* do PVI com dado inicial a função Delta de Dirac.

Palavras-chave: Análise Harmônica. Boa Colocação Local. Má colocação. Equação de Schrödinger não Linear. Boa Colocação Global.

Abstract

The purpose of this work is to study well-posedness and ill-posedness of the initial-value problem (IVP) for the nonlinear Schrödinger equation

$$i\partial_t u + \Delta u + \lambda |u|^\alpha u = 0, \quad t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^N, \tag{2}$$

for, $0 < \alpha < \frac{4}{N}$ (subcritical case) and $\alpha = \frac{4}{N}$ (critical case).

In the first chapter, we present some important results of Harmonic Analysis and we study the Sobolev spaces $H^s(\mathbb{R}^N)$, which provide the fundamental basis of our work.

In the second chapter, we will show, in the subcritical case, local and global well-posedness of the (IVP) associated to equation (2) with data in $L^2(\mathbb{R}^N)$. Furthermore, in the critical case, we will show local well-posedness and, on special case, global well-posedness.

Finally, in the chapter 3, we study the (IVP) associated to equation (2) in $H^s(\mathbb{R}^N)$ for negative indices s. We will show ill-posedness for $s \in (\frac{N}{2} - \frac{2}{\alpha}, 0)$ and ill-posedness of the (IVP) with the Delta function as initial datum.

Keywords: Harmonic Analysis. Local well-posedness. Ill-posedness. Nonlinear Schrödinger equation. Global well-posedness.

Sumário

Notações

- $(x, y) = x_1y_1 + x_2y_2 + ... + x_Ny_N$: Produto interno em $\mathbb{R}^N$;
- $B_r(x) = \{y \in \mathbb{R}^N : |y - x| < r\}$: Bola aberta de raio r e centro em $x \in \mathbb{R}^N$;
- $M[u] = \|u(t)\|_{L^2}$: Massa de u;
- $C(\mathbb{R} : X)$: Espaço das funções contínuas de $\mathbb{R}$ em X;
- $\|u\|_{C(\mathbb{R}:X)} = \sup_{t\in\mathbb{R}} \|u(t)\|_X$;
- $\mathbb{N}^N = \{\alpha = (\alpha_1, ..., \alpha_N) : \alpha_i \in \mathbb{N}\}$: Conjunto de Multi-índices;
- $x^\alpha = x_1^{\alpha_1}, ..., x_N^{\alpha_N}$;
- $D^\alpha = (\frac{\partial}{\partial_1})^{\alpha_1}, ..., (\frac{\partial}{\partial_N})^{\alpha_N}$;
- $\nabla u(x) = (\partial_{x_1}u(x), ..., \partial_{x_2}u(x))$: Gradiente de u;
- $\Delta u(x) = \sum_{i=1}^N \partial^2_{x_i^2}u(x)$: Laplaciano de u;
- $p' = \frac{p}{p-1}$: Expoente conjugado de p;
- X^*: Espaço dual de X;
- $\tau_h u(x) = u(x - h)$: Translação de u por $h \in \mathbb{R}^N$;
- $\delta_a u(x) = u(ax)$: Dilatação de u por $a > 0$;
- $(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x - y)g(y)dy$: Convolução de f e g;
- $c(N, \alpha, p)$ denota uma constante que depende de N, α e p;
- $a \sim b$ é equivalente a $c_1a \le b \le c_2a$, onde c_1 e c_2 são constantes positivas;
- $\|T\|_{L^p\to L^q} = \sup_{\|f\|\neq 0} \frac{\|Tf\|_{L^p}}{\|f\|_{L^q}}$;

Utilizaremos a letra c para denotar diversas constantes positivas que poderão variar de uma linha a outra.

Introdução

Neste trabalho estudaremos o problema de Cauchy, também chamado de problema de valor inicial ou simplesmente PVI, associado a equação de Schrödinger não linear

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + \lambda |u|^\alpha u = 0, & t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^N, \\ \quad u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{3}$$

em que $\lambda = \pm 1$, $0 < \alpha < \frac{4}{N}$ (caso subcrítico) e $\alpha = \frac{4}{N}$ (caso crítico).

A equação de Schrödinger não linear, denotada simplesmente por NLS, recebeu esse nome em homenagem ao Físico Austríaco Erwin Schrödinger que foi um dos primeiros pesquisadores da Mecânica Quântica. Essa equação tem sido o motivo de intensa pesquisa, pois ela modela vários problemas físicos (veja [17], [20] e [24]). Devido a sua grande aplicabilidade em fenômenos físicos, essa equação também tem sido de grande interesse para os matemáticos e tem-se desenvolvido rapidamente nos últimos anos.

Pelo princípio de Duhamel,

$$u(t,x) = U(t)u_0(x) + i\lambda \int_0^t U(t-t')\left(|u(t',x)|^\alpha u(t',x)\right) dt' \tag{4}$$

é a equação integral associada a equação de Schrödinger (3), em que $U(t)$ é o grupo associado a equação de Schrödinger linear e é definido por

$$U(t)u_0 = u_0 * (e^{-i|y|^2 t})^\vee.$$

Definição 0.1. *Dizemos que o PVI (3) é* localmente bem colocado *se para todo $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^N)$, existe $T > 0$ e uma única função u tal que*

1. *u é solução da equação integral (4);*

2. *$u \in C([-T,T] : H^s(\mathbb{R}^N))$ (Persistência);*

3. *Há a dependência contínua com relação aos dados iniciais*

$$u_0^n \to u_0 \text{ em } H^s(\mathbb{R}^N) \Longrightarrow u^n \to u \text{ em } C([-T,T] : H^s(\mathbb{R}^N)). \tag{5}$$

Se estas três propriedades podem ser estendidas para qualquer $T > 0$, dizemos que o PVI (3) é *globalmente bem colocado*. Por outro lado, se alguma das condições $1, 2, 3$ é violada, dizemos que é *mal colocado*.

Surgem questões importantes:

- Existe $s \in \mathbb{R}$ tal que o PVI (3) é bem colocado em $H^s(\mathbb{R}^N)$?
- Qual o menor $s \in \mathbb{R}$ onde temos boa colocação?

Essas questões foram respondidas por Ginibre e Velo [9], Cazenave e Weissler [7] e Tsutsumi [23]. Eles mostraram que o PVI (3) é *bem posto local e globalmente* em $H^s(\mathbb{R}^N)$ para $s \geq 0$. Sendo $s = 0$, ou seja, $H^0(\mathbb{R}^N) = L^2(\mathbb{R}^N)$ o menor valor s onde temos *boa colocação*. Por argumentos de scaling, é esperado que se $s > \dfrac{N}{2} - \dfrac{2}{\alpha}$, então teríamos *boa colocação*. No entanto, Kenig, Ponce e Vega [13], provaram que se $\lambda = 1$, $N = 1$ e $\alpha = 2$, ou seja, se $-\dfrac{1}{2} < s < 0$, não há *boa colocação*, pois o item 3 da Definição 0.1 não é verificado. Além disso, no mesmo artigo, foi mostrado que se $u_0 = \delta$ (função delta de Dirac), o problema de Cauchy (3) não é *bem colocado* se $N = 1$ e $\alpha = 2$ pois, neste caso, o item 2 não é verificado.

O objetivo desta dissertação é estudar a *boa colocação* em $L^2(\mathbb{R}^N)$ do PVI (3) e generalizar os dois resultados de *má colocação* sugeridos em [13] para dimensão N. A fim de obter *boa colocação* para o problema de Cauchy (3) usaremos o teorema de ponto fixo de Banach, para encontrar um ponto fixo do seguinte operador

$$G(u)(t) = U(t)u_0 + i\lambda \int_0^t U(t-t')(|u|^\alpha u(t'))dt'. \tag{6}$$

Para a *má colocação*, com $s \in (\frac{N}{2} - \frac{2}{\alpha}, 0)$, demonstraremos que a aplicação dado-solução não é uniformemente contínua, isto é,

$$\forall \delta > 0,\ \exists\, c > 0 \text{ tal que } \|u_0^1 - u_0^2\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} < \delta\ , \quad \text{mas} \quad \|u^1 - u^2\|_{C([-T,T]:H^s(\mathbb{R}^N))} \geq c. \tag{7}$$

Para o problema de Cauchy (3) com $u_0 = \delta$, provaremos que a Persistência (item 2 da Definição 0.1) não é verificada, isto é, a solução u não pertence a $C([0,T] : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N))$, em que $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ é o espaço das distribuições temperadas.

Esta dissertação é composta de três capítulos, além desta introdução. Descrever-se-á abaixo, o conteúdo de cada capítulo.

No Capítulo 1, é registrada uma breve revisão de alguns conceitos básicos de Análise Harmônica nos quais estabeleceremos algumas ferramentas importantes para a compreensão dos próximos capítulos. Serão introduzidos alguns espaços funcionais onde procuraremos a solução e estudaremos alguns resultados de interpolação de operadores nesses espaços. Também definiremos a transformada de Fourier e enunciaremos alguns resultados importantes dela. Finalmente, serão apresentados os espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^N)$, ferramenta fundamental do nosso estudo (veja [18], [16], [5], [2], [1], [11] e [6]).

O Capítulo 2 é dedicado ao estudo do PVI (3) para a equação de Schrödinger linear, obtendo uma família de soluções a qual denotaremos por $U(t)u_0$ e demonstraremos que essa família é um grupo unitário em $H^s(\mathbb{R}^N)$, para $s \geq 0$. Em seguida, mostraremos as estimativas de Strichartz, o que será fundamental para provar a *boa colocação* do problema de Cauchy (3). Especificamente demonstraremos os seguintes resultados:

1. Caso Subcrítico

   Teorema 0.1. *Considere o PVI (3). Se* $0 < \alpha < \frac{4}{N}$*, então para todo* $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$*, existe* $T = T(\|u_0\|_{L^2}, N, \alpha) > 0$ *e uma única solução* u *da equação integral* (4) *no intervalo* $[0, T]$ *com*

   $$u \in \left([0,T] : L^2(\mathbb{R}^N)\right) \bigcap L^r \left([0,T] : L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N)\right),$$

   em que $r = 4\frac{(\alpha+2)}{N\alpha}$.

   Corolário 0.1.1. *Com as mesmas condicões do Teorema 0.1, temos que o PVI (3) é* bem posto globalmente.

2. Caso Crítico

   Teorema 0.2. *Considere o PVI (3). Se* $\alpha = \frac{4}{N}$*, então para todo* $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$*, existe* $T = T(u_0, \alpha) > 0$ *e uma única solução* u *da equação integral (4) no intervalo* $[0, T]$ *com*

   $$u \in C\left([0,T] : L^2(\mathbb{R}^N)\right) \bigcap L^r \left([0,T] : L^r(\mathbb{R}^N)\right),$$

   em que $r = 2 + \frac{4}{N}$.

   Corolário 0.2.1. *Existe* $0 < \epsilon_0 = \epsilon_0(N)$ *tal que para todo* $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ *com a norma* $\|u_0\| < \epsilon_0$*, temos que a solução dada no Teorema 0.2 é global e ainda*

   $$u \in C\left(\mathbb{R} : L^2(\mathbb{R}^N)\right) \bigcap L^r \left(\mathbb{R} : L^r(\mathbb{R}^N)\right), \tag{8}$$

   em que $r = 2 + \frac{4}{N}$.

No capítulo 3, iremos expor o argumento de scaling que nos fornece uma intuição para *boa colocação* do PVI (3) em $H^s(\mathbb{R}^n)$, e serão mostrados dois resultados de *má colocação*. Mais precisamente, mostraremos os seguintes teoremas.

Teorema 0.3. *Considere o PVI (3), $\lambda = 1$ e $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^N)$. Se $0 < \alpha < \frac{4}{N}$ e $s \in (\dfrac{N}{2} - \dfrac{2}{\alpha}, 0)$, então a aplicação dado-solução não é uniformemente contínua.*

Teorema 0.4. *Considere o PVI (3). Se $u_0 = \delta$ e $\alpha \geq \frac{2}{N}$, então não há solução fraca u na classe*

$$u, |u|^\alpha u \in L^\infty([0,\infty) : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)) \;\; \textit{com} \;\; \lim_{t\to 0^+} u(t,.) = \delta \;\; \textit{em} \;\; \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N);$$

ou existe mais que uma.

CAPÍTULO 1

Preliminares

Neste capítulo temos como objetivo apresentar a teoria básica necessária a ser utilizada no estudo do problema de Cauchy (3). Estudaremos conceitos e resultados da Análise Harmônica e as propriedades principais do operador transformada de Fourier que tem um papel fundamental na teoria que será desenvolvida neste trabalho. Algumas demonstrações serão omitidas, mas indicaremos precisamente onde encontrá-las.

1.1 Espaços Funcionais

Nesta seção estudaremos alguns espaços funcionais, assim como teoremas e desigualdades que serão aplicados nos próximos capítulos. Resultados importantes como as desigualdades de Hölder e Minkowski e o teorema do Ponto Fixo de Banach.

Definição 1.1. *Sejam $(X, \mathbb{A}, \mu)$ um espaço de medida e $1 \leq p \leq \infty$. Definimos o espaço $L^p(X) = L^p(X, \mathbb{A}, \mu)$ como sendo o conjunto das funcões $f : X \to \mathbb{C}$ mensuráveis, tais que*

$$\begin{aligned} \|f\|_{L^p} &= \left(\int_X |f|^p d\mu \right)^{\frac{1}{p}} \quad < \quad \infty\,, \quad \textit{se} \quad 1 \leq p < \infty \quad \textit{e} \\ \|f\|_{L^\infty} &= \sup_{x \in X} ess|f(x)| = \inf\{C : |f(x)| \leq C, \;\; \mu - q\ t\ p\ em\ X\} \quad < \quad \infty\,. \end{aligned}$$

Observação 1.1. $L^p(X)$ é um espaço de Banach e quando $p = 2$, $L^2(X)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno definido por

$$\langle f, g \rangle = \int_X f(x) \overline{g(x)} d\mu.$$

Além disso, denotaremos $L^{p'}(X)$ o espaço dual de $L^p(X)$ onde p e p' são expoentes conjugados, isto é,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Definição 1.2. *Sejam $1 \leq p < \infty$. Denotaremos por $L^p_{Loc}(X) = L^p_{Loc}(X, \mathbb{A}, \mu)$ o espaço das funções pertencentes a $L^p(X)$, localmente sobre cada subconjunto compacto $E \subset X$, isto é,*

$$L^p_{Loc}(X) = \{f : X \to \mathbb{C} \text{ mensurável } : \int_E |f|^p d\mu < \infty\}.$$

Teorema 1.1. ***(Desigualdade de Hölder Generalizada).*** *Sejam $(X, \mathbb{A}, \mu)$ um espaço de medida e $p_i \geq 1$ $(i = 1, 2, ..., m)$ tais que*

$$\sum_{i=1}^{m} \frac{1}{p_i} = 1.$$

Se $f_i \in L^{p_i}(X)$ para todo $i = 1, ..., m$. Então $\prod_{i=1}^m f_i \in L^{p_1}(X)$ e vale a desigualdade

$$\|\prod_{i=1}^{m} f_i\|_{L^1} \leq \prod_{i=1}^{m} \|f\|_{L^{p_i}}.$$

Demonstração. Veja [5], página 57. ■

Corolário 1.1.1. ***(Desigualdade de Hölder).*** *Sejam $f \in L^p(X)$ e $g \in L^q(X)$, então $fg \in L^r(X)$ e vale*

$$\|fg\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}\|g\|_{L^q},$$

em que

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = \frac{1}{r}.$$

Corolário 1.1.2. ***(Desigualdade de Cauchy-Schwarz).*** *Sejam f e $g \in L^2(X)$, então $fg \in L^1(X)$ e vale*

$$\|fg\|_{L^1} \leq \|f\|_{L^2}\|g\|_{L^2}.$$

Corolário 1.1.3. ***(Interpolação entre espaços $L^p(X)$).*** *Sejam $1 \leq p \leq r \leq q \leq \infty$ tais que*

$$\frac{1}{r} = \frac{\theta}{p} + \frac{1-\theta}{q}$$

para algum $\theta \in [0, 1]$. Suponha que $f \in L^p(X) \bigcap L^q(X)$, então $f \in L^r(X)$ e vale

$$\|f\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p}{}^{\theta}\|f\|_{L^q}{}^{1-\theta}.$$

A seguir, vamos a definir os espaços mistos denotado por $L^p(X_1, L^q(X_2))$.

Definição 1.3. *Sejam $(X_1, \mathbb{A}_1, \mu_1)$ e $(X_2, \mathbb{A}_2, \mu_2)$ dois espaços de medida. Defina-se para $1 \leq p, q \leq \infty$ o espaço misto*

$$L^p(X_1, L^q(X_2)) = \{f : X \to \mathbb{C} \text{ mensurável } : \|f\|_{L^p_{X_1} L^q_{X_2}} < \infty\},$$

em que

$$\|f\|_{L^p_{X_1}L^q_{X_2}} = \|\|f(x_1,.)\|_{L^q_{X_2}}\|_{L^p_{X_1}} = \left(\int_{X_1}\left(\int_{X_2}|f(x_1,x_2)|^q d\mu_2\right)^{\frac{p}{q}} d\mu_1\right)^{\frac{1}{p}}, \quad se\ 1 \leq\ p\ <\ \infty$$

e

$$\|f\|_{L^\infty_{X_1}L^q_{X_2}} = \|\|f(x_1,.)\|_{L^q_{X_2}}\|_{L^\infty_{X_1}} = \max_{x_1\in X_1}\|f(x_1,.)\|_{L^q_{X_2}}.$$

Observação 1.2. $L^p(X_1, L^q(X_2))$ é um espaço de Banach e quando $p = q = 2$, $L^2(X_1, L^2(X_2))$ é um espaço de Hilbert com o produto interno definido por

$$\langle f, g\rangle_{L^2(X_1,L^2(X_2))} = \int_{X_1}\langle f(x_1,.), g(x_1,.)\rangle_{L^2(X_2)} d\mu_1.$$

Notação. Denotaremos o espaço $L^p(X_1, L^q(X_2))$ simplesmente por $L^p_{X_1}L^q_{X_2}$ e quando $p = q$ por $L^p_{X_1X_2}$. Além disso, $L^{p'}_{X_1}L^{q'}_{X_2}$ denota o espaço dual de $L^p_{X_1}L^q_{X_2}$ onde p' e q' são os expoentes conjugados de p e q respectivamente.

No que segue provaremos a Desigualdade de Hölder para os espaços mistos.

Teorema 1.2. *Sejam* $(X_1, \mathbb{A}_1, \mu_1)$ *e* $(X_2, \mathbb{A}_2, \mu_2)$ *dois espaços de medida. Se* $f \in L^{p_1}_{X_1}L^{q_1}_{X_2}$ *e* $f \in L^{p_2}_{X_1}L^{q_2}_{X_2}$*, então* $fg \in L^p_{X_1}L^q_{X_2}$*. Além disso, vale a desigualdade*

$$\|fg\|_{L^p_{X_1}L^q_{X_2}} \leq \|f\|_{L^{p_1}_{X_1}L^{q_1}_{X_2}}\|g\|_{L^{p_2}_{X_1}L^{q_2}_{X_2}}, \tag{1.1}$$

em que

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \quad e \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}.$$

Demonstração. Usando duas vezes o Corolário 1.1.1, segue-se

$$\begin{aligned}
\|fg\|_{L^p_{X_1}L^q_{X_2}} &= \left\|\|fg(x_1,.)\|_{L^q_{X_2}}\right\|_{L^p_{X_1}} \\
&\leq \left\|\|f(x_1,.)\|_{L^{q_1}_{X_2}}\|g(x_1,.)\|_{L^{q_2}_{X_2}}\right\|_{L^p_{X_1}} \\
&\leq \left\|\|f(x_1,.)\|_{L^{q_1}_{X_2}}\right\|_{L^{p_1}_{X_1}}\left\|\|g(x_1,.)\|_{L^{q_2}_{X_2}}\right\|_{L^{p_2}_{X_1}} \\
&= \|f\|_{L^{p_1}_{X_1}L^{q_1}_{X_2}}\|g\|_{L^{p_2}_{X_1}L^{q_2}_{X_2}},
\end{aligned}$$

em que

$$\frac{1}{p} = \frac{1}{p_1} + \frac{1}{p_2} \quad e \quad \frac{1}{q} = \frac{1}{q_1} + \frac{1}{q_2}.$$

■

Agora vamos a enunciar um resultado dos espaços $L^p(X)$, que será usado para provar a Desigualdade de Minkowski e provar algumas estimativas no Capítulo 2.

Lema 1.1. *Sejam $(X,\mathbb{A},\mu)$ um espaço de medida , $1\leq p\leq\infty$ e f uma função mensurável. Se*

$$\sup_{\|g\|_{L^{p'}}\leqslant 1}\int_X |f.g|d\mu \;<\; \infty\ ,$$

então $f\in L^p(X)$. Além disso,

$$\|f\|_{L^p} \;=\; \sup_{\|g\|_{L^{p'}}\leqslant 1}\left\{\int_X f.\overline{g}d\mu\right\}.$$

Demonstração. Veja [2], página 2. ■

Teorema 1.3. ***(Desigualdade de Minkowski).*** *Sejam $(X_1,\mathbb{A}_1,\mu_1)$ e $(X_2,\mathbb{A}_2,\mu_2)$ dois espaços de medida. Se $f:X_1\times X_2\longrightarrow\mathbb{C}$ é uma função mensurável, então para todo $1\leqslant p\leqslant q\leqslant\infty$ vale a desigualdade*

$$\|f\|_{L^q_{X_2}L^p_{X_1}} \;\leq\; \|f\|_{L^p_{X_1}L^q_{X_2}}.$$

Demonstração.

1. Se $q=\infty$, o resultado é claro.

2. Se $q<\infty$ então fazendo $r=\frac{q}{p}$, segue que

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^q_{X_2}L^p_{X_1}} &= \left(\int_{X_2}\left(\int_{X_1}|f(x_1,x_2)|^p d\mu_1\right)^{\frac{q}{p}} d\mu_2\right)^{\frac{1}{q}}\\
&= \left(\int_{X_2}\left(\int_{X_1}|f(x_1,x_2)|^p d\mu_1\right)^{r} d\mu_2\right)^{\frac{1}{rp}}\\
&= \left(\int_{X_2}|F(x_2)|^r d\mu_2\right)^{\frac{1}{rp}},
\end{aligned}$$

em que $F(x_2)=\int_{X_1}|f(x_1,x_2)|^p d\mu_1$. Assim usando o Lema 1.1, Teorema de Fubini e a Desigualdade de Hölder com expoentes conjugados r e r', temos

$$\begin{aligned}
\|f\|_{L^q_{X_2}L^p_{X_1}} &= \|F\|^{\frac{1}{p}}_{L^r_{X_2}}\\
&= \left(\sup_{\|g\|_{L^{r'}_{X_2}}\leq 1}\{\int_{X_2}F(x_2)\overline{g(x_2)}\,d\mu_2\}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \left(\sup_{\|g\|_{L^{r'}_{X_2}}\leq 1}\{\int_{X_1}\left(\int_{X_2}|f(x_1,x_2)|^{pr}d\mu_2\right)^{\frac{1}{r}}\|g\|_{L^{r'}_{X_2}}d\mu_1\}\right)^{\frac{1}{p}}\\
&\leq \left(\int_{X_1}\left(\int_{X_2}|f(x_1,x_2)|^q d\mu_2\right)^{\frac{p}{q}}d\mu_1\right)^{\frac{1}{p}}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|f\|_{L^q_{X_2} L^p_{X_1}} \;\leq\; \|f\|_{L^p_{X_1} L^q_{X_2}}.$$

■

Observe que, se $p = 1$ então

$$\left(\int_{X_2}\left(\int_{X_1}|f(x_1,x_2)|d\mu_1\right)^q d\mu_2\right)^{\frac{1}{q}} \leq \int_{X_1}\left(\int_{X_2}|f(x_1,x_2)|^q d\mu_2\right)^{\frac{1}{q}} d\mu_1. \tag{1.2}$$

O próximo teorema é análogo ao Lema 1.1 para os espaços mistos.

Teorema 1.4. *Sejam $(X_1, \mathbb{A}_1, \mu_1)$ e $(X_2, \mathbb{A}_2, \mu_2)$ dois espaços de medida, $1 \leqslant p, q \leqslant \infty$ e $f : X_1 \times X_2 \longrightarrow C$ é uma função mensurável. Se*

$$\sup_{\|g\|_{L^{p'}_{x_1} L^{q'}_{X_2}} \leqslant 1} \int_{X_1}\int_{X_2} f(x_1,x_2).\overline{g(x_1,x_2)}\, d\mu_2\, d\mu_1 \;<\; \infty\,,$$

então f pertence a $L^p_{X_1} L^q_{X_2}$. Além disso, vale a igualdade

$$\|f\|_{L^p_{X_1} L^q_{X_2}} \;=\; \sup_{\|g\|_{L^{p'}_{x_1} L^{q'}_{X_2}} \leqslant 1} \{\int_{X_1}\int_{X_2} f(x_1,x_2).\overline{g(x_1,x_2)}\, d\mu_2\, d\mu_1\}. \tag{1.3}$$

Demonstração. A demostração é análoga à do Lema 1.1. ■

Encerramos esta seção enunciando um resultado que usaremos para nosso estudo de *boa colocação.*

Teorema 1.5. *Seja S um espaço métrico completo, onde $S \neq \emptyset$, e $f : S \to S$ uma contração, ou seja,*

$$d(f(x), f(y)) \leq \alpha\, d(x,y),\ \forall\, x, y \in\ S \text{ e } \alpha < 1.$$

Então, f possui um único ponto fixo em S, isto é, existe $x \in S$ tal que $f(x) = x$.

Demonstração. Veja [15]. ■

1.2 Interpolacão de Operadores

Nesta seção estudaremos o teorema de interpolação de Riesz - Thorin. Como consequência dele, provaremos a desigualdade de Young e o teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev para o potencial de Riesz que serão utilizados para provar algumas estimativas para nosso estudo de *boa colocação.*

Definição 1.4. *Sejam X, Y espaços de Banach. Denotamos por $\mathfrak{L}(X,Y)$ o espaço dos operadores lineares contínuos, isto é,*

$$\mathfrak{L}(X,Y) = \{T : X \to Y : T \textit{ é linear e contínua}\}.$$

Quando $X = Y$, denotaremos $\mathfrak{L}(X,Y)$ simplesmente por $\mathfrak{L}(X)$.

Teorema 1.6. *Sejam X, Y espaços de Banach. Então,*

i) *$\mathfrak{L}(X,Y)$ é um espaço de Banach com a norma definida por*

$$\|T\| = \inf\{C > 0 : \|T(x)\|_Y \leq C\|x\|_X, \forall x \in X\} = \sup\{\|T(x)\|_Y : \|x\|_X \leq 1\}.$$

ii) *O operador $T \in \mathfrak{L}(S,Y)$ admite única extensão $\widetilde{T} \in \mathfrak{L}(X,Y)$, onde S é um subconjunto denso em X, e vale*

$$\|T\| = \|\widetilde{T}\|.$$

Demonstração. Veja [19], capítulo 8. ∎

O lema que enunciaremos a seguir é conhecido como o Teorema das Três Linhas.

Lema 1.2. ***(Teorema de Phragmen-Lindelöf).*** *Seja F uma função contínua e limitada definida na faixa*

$$S = \{x + iy : \ 0 \leq x \leq 1\}$$

tal que F é analítica no interior de S. Se para todo $y \in R$

$$|F(j+i)| \leq A_j \quad \textit{onde} \ \ j \in \{0,1\}$$

então, para todo $z \in S$, tem-se

$$|F(z)| \leq A_0^{1-x} A_1^x.$$

Demonstração. Veja [16], página 26. ∎

Agora vamos a provar o teorema de interpolação de Riesz - Thorin para o caso dos espaços mistos.

Teorema 1.7. ***(Teorema Interpolação de Riesz - Thorin).*** *Sejam $(X_k, \mathbb{A}_k, \mu_k)_{1\leq k\leq 3}$ três espaços de medida e $1 \leqslant p_j, q_j, r_j \leqslant \infty$ para todo $j = 0, 1$. Se $T : L^{p_j}_{X_1} L^{q_j}_{X_2} \to L^{r_j}_{X_3}$ é um operador contínuo com norma M_j respectivamente para todo $j \in \{0,1\}$. Então $T : L^{p_\theta}_{X_1} L^{q_\theta}_{X_2} \to L^{r_\theta}_{X_3}$ é um operador contínuo com norma M_θ tal que*

$$M_\theta \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta,$$

em que

$$\left(\frac{1}{p_\theta},\frac{1}{q_\theta},\frac{1}{r_\theta}\right)=(1-\theta)\left(\frac{1}{p_0},\frac{1}{q_0},\frac{1}{r_0}\right)\;+\;\theta\left(\frac{1}{p_1},\frac{1}{q_1},\frac{1}{r_1}\right)\;,\quad \theta\in[0,1].$$

Demonstração.

Considere $f\in L^{p_\theta}_{X_1}L^{q_\theta}_{X_2}$ e $f\in L^{r_\theta}_{X_3}$. Usando o Teorema 1.4 é suficiente provar que

$$\int_{X_3}(Tf)(x)\overline{g(x_3)}d\mu_3\le M_0^{1-\theta}M_1^\theta\|f\|_{L^{p_\theta}_{X_1}L^{q_\theta}_{X_2}}\|g\|_{L^{r'_\theta}_{X_3}}.$$

Seja $z\in S$, onde $S=\{x+iy:\ 0\le x\le 1\}$. Defina

$$f_z(x_1,x_2)=\frac{f(x_1,x_2)}{|f(x_1,x_2)|}\left(\frac{f(x_1,x_2)}{\|f(x_1,.)\|_{L^{q_\theta}_{X_2}}}\right)^{q_\theta(\frac{1-z}{q_0}+\frac{z}{q_1})}\|f(x_1,.)\|_{L^{q_\theta}_{X_2}}^{p_\theta(\frac{1-z}{p_0}+\frac{z}{p_1})}$$

e

$$g_z(x_3)=\frac{g(x_3)}{|g(x_3)|}|g(x_3)|^{r'_\theta(\frac{1-z}{r'_0}+\frac{z}{r'_1})},$$

se $z=\theta$, temos que $f_z=f$ e $g_z=g$. Agora, considere a função

$$F(z)=\int_{X_3}Tf_z(x_3)\overline{g_z(x_3)}d\mu_3.$$

Temos que F é contínua e limitada em S e é analítica em seu interior. Como $F(\theta)=\int_{X_3}Tf(x_3)\overline{g(x_3)}d\mu_3$, pelo teorema das Três Linhas, é suficiente mostrar que

$$|F(j+i)|\le A_j\qquad\forall\ j=0,1$$

e assim, obtemos o resultado desejado.

Afirmação 1: $f\in L^{p_j}_{X_1}L^{q_j}_{X_2}$ para todo $j=0,1$ e vale a igualdade

$$\|f_{j+iy}\|_{L^{p_j}_{X_1}L^{q_j}_{X_2}}=\|f\|_{L^{p_\theta}_{X_1}L^{q_\theta}_{X_2}}^{\frac{p_\theta}{p_j}}\quad. \tag{1.4}$$

De fato, usando que $|a^{it}|=1$ para todo $a>0$ e $t\in\mathbb{R}$, temos

$$\begin{aligned}|f_{j+iy}(x_1,x_2)| &= \left|\left(\frac{f(x_1,x_2)}{\|f(x_1,.)\|_{L^{q_\theta}_{X_2}}}\right)^{q_\theta(\frac{1-j-iy}{q_0}+\frac{j+iy}{q_1})}\right|\left|\|f(x_1,.)\|_{L^{q_\theta}_{X_2}}^{p_\theta(\frac{1-j-iy}{p_0}+\frac{j+iy}{p_1})}\right|\\ &= \left(\frac{|f(x_1,x_2)|}{\|f(x_1,.)\|_{L^{q_\theta}_{X_2}}}\right)^{\frac{q_\theta}{q_j}}\|f(x_1,.)\|_{L^{q_\theta}_{X_2}}^{\frac{p_\theta}{p_j}}.\end{aligned}$$

Logo, usando o fato que $\|f^m\|_{L^p}=\|f\|^m_{L^{pm}}$ temos

$$\begin{aligned}\|f_{j+iy}\|_{L^{p_j}_{X_1}L^{q_j}_{X_2}} &= \left\|\|f_{j+iy}(x_1,.)\|_{L^{q_j}_{X_2}}\right\|_{L^{p_j}_{X_1}}=\left\|\||f(x_1,.)|^{\frac{q_\theta}{q_j}}\|_{L^{q_j}_{X_2}}\|f(x_1,.)\|_{L^{q_\theta}_{X_2}}^{\frac{p_\theta}{p_j}-\frac{q_\theta}{q_j}}\right\|_{L^{p_j}_{X_1}}\\ &= \left\|\|f(x_1,.)\|_{L^{q_\theta}_{X_2}}^{\frac{q_\theta}{q_j}}\|\|f(x_1,.)\|_{L^{q_\theta}_{X_2}}^{\frac{p_\theta}{p_j}-\frac{q_\theta}{q_j}}\right\|_{L^{p_j}_{X_1}}\\ &= \left\|\|f(x_1,.)\|_{L^{q_\theta}_{X_2}}\right\|_{L^{p_\theta}_{X_1}}^{\frac{p_\theta}{p_j}}\\ &= \|f\|_{L^{p_\theta}_{X_1}L^{q_\theta}_{X_2}}^{\frac{p_\theta}{p_j}}\ <\infty.\end{aligned}$$

Isto mostra a afirmação $f \in L^{p_j}_{X_1} L^{q_j}_{X_2}$ e vale (1.4).

Continuando com a prova, note também que $|g_{j+iy}(x_3)| = |g(x_3)|^{\frac{r'_\theta}{r'_j}}$. Daí, usando a Desigualdade de Hölder com expoentes conjugados r_j e r'_j. Segue-se

$$
\begin{aligned}
|F(j+iy)| &\leq \int_{X_3} |Tf_{j+iy}(x_3)||g_{j+iy}(x_3)|d\mu_3 = \int_{X_3} |Tf_{j+iy}(x_3)||g(x_3)|^{\frac{r'_\theta}{r'_j}} d\mu_3 \\
&\leq \|Tf_{j+iy}\|_{L^{r_j}_{X_3}} \||g|^{\frac{r'_\theta}{r'_j}}\|_{L^{r'_j}_{X_3}} \\
&\leq M_j \|f_{j+iy}\|_{L^{p_j}_{X_1} L^{q_j}_{X_2}} \|g\|^{\frac{r'_\theta}{r'_j}}_{L^{r'_\theta}_{X_3}} \\
&= M_j \|f\|^{\frac{p_\theta}{p_j}}_{L^{p_\theta}_{X_1} L^{q_\theta}_{X_2}} \|g\|^{\frac{r'_\theta}{r'_j}}_{L^{r'_\theta}_{X_3}},
\end{aligned}
$$

onde na penúltima desigualdade usamos que $T \in \mathfrak{L}(L^{p_j}_{X_1} L^{q_j}_{X_2}, L^{r_j}_{X_3})$ e na última igualdade a Afirmação 1. Assim, se $j = 0$ e $j = 1$, tem-se respectivamente

$$|F(iy)| \leq M_0 \|f\|^{\frac{p_\theta}{p_0}}_{L^{p_\theta}_{X_1} L^{q_\theta}_{X_2}} \|g\|^{\frac{r'_\theta}{r'_0}}_{L^{r'_\theta}_{X_3}} = A_0$$

e

$$|F(1+iy)| \leq M_1 \|f\|^{\frac{p_\theta}{p_1}}_{L^{p_\theta}_{X_1} L^{q_\theta}_{X_2}} \|g\|^{\frac{r'_\theta}{r'_1}}_{L^{r'_\theta}_{X_3}} = A_1.$$

Portanto, usando $\frac{1}{p_\theta} = \frac{1-\theta}{p_0} + \frac{\theta}{p_1}$, $\frac{1}{r'_\theta} = \frac{1-\theta}{r'_0} + \frac{\theta}{r'_1}$ e a estimativa do teorema das Três Linhas obtemos o resultado desejado:

$$|F(\theta)| = |\int_{X_3} Tf(x_3)\overline{g(x_3)}d\mu_3| \leq A_0^{1-\theta} A_1^\theta = M_0^{1-\theta} M_1^\theta \|f\|_{L^{p_\theta}_{X_1} L^{q_\theta}_{X_2}} \|g\|_{L^{r'_\theta}_{X_3}}.$$

Portanto $M_\theta \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta$.

■

Corolário 1.7.1. *Sejam $(X_k, \mathbb{A}_k, \mu_k)_{1 \leq k \leq 2}$ dois espaços de medida e $1 \leqslant p_j, q_j \leqslant \infty$ para todo $j = 0, 1$. Se $T : L^{p_j}_{X_1} \to L^{q_j}_{X_2}$ é um operador contínuo com norma M_j respectivamente para todo $j \in \{0, 1\}$. Então $T : L^{p_\theta}_{X_1} \to L^{q_\theta}_{X_2}$ é um operador contínuo com norma M_θ tal que*

$$M_\theta \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta,$$

em que

$$\left(\frac{1}{p_\theta}, \frac{1}{q_\theta}\right) = (1-\theta)\left(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{q_0}\right) + \theta\left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1}\right) \quad , \quad \theta \in [0, 1].$$

Corolário 1.7.2. *Sejam* $(X_k, \mathbb{A}_k, \mu_k)_{1\leq k\leq 2}$ *dois espaços de medida e* $1 \leqslant p_j, q_j \leqslant \infty$ *para todo* $j = 0, 1$. *Se* $T : L^{p_j}_{X_1} L^{q_j}_{X_2} \to \mathbb{C}$ *é um operador contínuo como norma* M_j *respectivamente para todo* $j \in \{0, 1\}$. *Então* $T : L^{p_\theta}_{X_1} L^{q_\theta}_{X_2} \to \mathbb{C}$ *é um operador contínuo com norma* M_θ *tal que*

$$M_\theta \leq M_0^{1-\theta} M_1^\theta,$$

em que

$$\left(\frac{1}{p_\theta}, \frac{1}{q_\theta}\right) = (1-\theta)\left(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{q_0}\right) \; + \; \theta\left(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1}\right) \quad , \quad \theta \in [0, 1].$$

As demonstrações dos dois últimos corolários seguem diretamente do Teorema 1.7.

Observação 1.3. Daqui em diante $(X_1, \mathbb{A}_1, \mu_1)$ e $(X_2, \mathbb{A}_2, \mu_2)$ serão os espaços de medida de Lebesgue na reta e no R^N respectivamente, onde $(X_1, \mathbb{A}_1, \mu_1)$ será o espaço da variável temporal e $(X_2, \mathbb{A}_2, \mu_2)$ será o espaço da variável espacial.

Uma consequência importante do Teorema 1.7 é a seguinte desigualdade.

Teorema 1.8. ***(Desigualdade de Young).*** *Sejam* $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$ *e* $1 \leq p, q \leq \infty$ *com* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$. *Então* $f * g \in L^r(\mathbb{R}^N)$ *onde* $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 + \frac{1}{r}$. *Além disso,*

$$\|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}. \tag{1.5}$$

Demonstração. Para $g \in L^q(\mathbb{R}^N)$ definamos o operador

$$T(f(x)) = \int_{\mathbb{R}^n} f(x-y) g(y) dy = (f * g)(x).$$

Logo, pela Desigualdade de Minkowski (1.2) e usando que a convolução é comutativa, temos

$$\begin{aligned}
\|Tf\|_{L^q} &= \left(\int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} g(x-y) f(y) dy\right)^q dx\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}^N} |g(x-y)|^q |f(y)|^q dx\right)^{\frac{1}{q}} dy \\
&= \|g\|_{L^q} \|f\|_{L^1}.
\end{aligned}$$

Por outro lado, usando a desigualdade de Hölder temos

$$\|Tf\|_{L^\infty} \leq \|g\|_{L^q} \|f\|_{L^{q'}}.$$

Assim, $T \in \mathfrak{L}\left(L^1(\mathbb{R}^N), L^q(\mathbb{R}^N)\right) \bigcap \mathfrak{L}\left(L^{q'}(\mathbb{R}^N), L^\infty(\mathbb{R}^N)\right)$ com norma limitada por $\|g\|_{L^q}$, logo pelo teorema de Riesz-Thorin implica $T \in \mathfrak{L}(L^p(\mathbb{R}^N), L^r(\mathbb{R}^N))$, em que

$$\frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{1} + \frac{\theta}{q'} = (1-\theta) + \theta(1 - \frac{1}{q}) = 1 - \frac{\theta}{q} \qquad e$$

$$\frac{1}{r} = \frac{1-\theta}{q} + 0 = \frac{1}{q} - (1 - \frac{1}{p}) = \frac{1}{p} + \frac{1}{q} - 1.$$

Além disso,

$$\|T\|_{\mathfrak{L}(L^p,L^r)} \leq \|T\|^{1-\theta}_{\mathfrak{L}(L^1,L^q)} \|T\|^{\theta}_{\mathfrak{L}(L^{q'},L^\infty)} \leq \|g\|^{1-\theta}_{L^q} \|g\|^{\theta}_{L^q} = \|g\|_{L^q} ,$$

e portanto,

$$\|Tf\|_{L^r} = \|f * g\|_{L^r} \leq \|f\|_{L^p} \|g\|_{L^q}.$$

∎

Agora vamos a definir a função maximal e o potencial de Riesz, ferramentas necessárias para mostrar o Teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev que será determinado posteriormente.

Definição 1.5. *Seja $f \in L^1_{loc}(\mathbb{R}^N)$, definimos a função Maximal associada a f denotada por $M(f)$*

$$\begin{aligned} Mf(x) &= \sup_{r>0} \left\{ \frac{1}{|B_r(x)|} \int_{|B_r(x)|} |f(y)| dy \right\} = \sup_{r>0} \left\{ \frac{1}{\omega_N} \int_{|B_1(0)|} |f(x - rz)| dz \right\} \\ &= \sup_{r>0} \left(f * \frac{1}{|B_r(0)|} I_{B_r(0)} \right). \end{aligned}$$

Observação 1.4. Se $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$, então $\|Mf\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^\infty}$.

Proposição 1.1. ***(Teorema de Hardy-Littlewood).*** *Seja $1 < p \leq \infty$. Então $M : L^p(\mathbb{R}^N) \to L^p(\mathbb{R}^N)$ é um operador quase-linear contínuo, isto é,*

$$\|Mf\|_{L^p} \leq c(p)\|f\|_{L^p} \quad , \quad \textit{para todo } \ f \in L^p(\mathbb{R}^N). \tag{1.6}$$

Demonstração. Veja [16], página 37. ∎

Lema 1.3. *Seja $g \in L^1(\mathbb{R}^N)$ uma função radial, positiva e não crescente de $r = \|x\|$. Então*

$$\sup_{t>0} |g_t * f(x)| \leq \|g\|_{L^1} Mf(x), \quad \textit{onde } \ g_t(x) = \frac{1}{t^N} g(\frac{x}{t}).$$

Demonstração. Veja [16], página 38. ∎

Definição 1.6. ***(Potencial de Riesz).*** *Seja $0 < \alpha < N$. O potencial de Riesz de ordem α, denotado por I_α é definido por*

$$I_\alpha f(x) = c_\alpha \int_{\mathbb{R}^N} \frac{f(y)}{|x-y|^{N-\alpha}} dy = c_\alpha k_\alpha * f(x), \tag{1.7}$$

onde

$$c_\alpha = \pi^{\frac{N}{2}} 2^\alpha \Gamma(\frac{\alpha}{2}) \Gamma(\frac{N}{2} - \frac{\alpha}{2}), \quad k_\alpha(x) = \frac{1}{|x|^{N-\alpha}} \ \ e \ \ \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt, \ x \in \mathbb{R}.$$

Teorema 1.9. *(Teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev). Sejam* $0 < \alpha < N$ *e* $1 < p < q < \infty$ *tal que* $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{N}$. *Então* $I_\alpha : L^p(\mathbb{R}^N) \to L^q(\mathbb{R}^N)$ *é um operador linear e contínuo, isto é,*

$$\|I_\alpha f\|_{L^q} \leq c(N,\alpha,p)\|f\|_{L^p} \quad , \quad para\ todo\ \ f \in L^p(\mathbb{R}^N). \tag{1.8}$$

Demonstração. Dividimos o kernel $k_\alpha(x) = k'_\alpha(x) \ + \ k^\infty_\alpha(x)$,

$$k'_\alpha(x) = \begin{cases} \quad 0 & , \text{ se } |x| > \epsilon \\ k_\alpha(x) & , \text{ se } |x| \leq \epsilon, \end{cases}$$

onde $\epsilon > 0$ será determinado. Assim,

$$|I_\alpha f(x)| \leq c_\alpha(|k'_\alpha * f(x)| + |k^\infty_\alpha * f(x)|) = c_\alpha(I + II). \tag{1.9}$$

Observe que $k'_\alpha \in L^1(\mathbb{R}^N)$ pois

$$\int_{\mathbb{R}^N} |k'_\alpha(x)| dx = \int_{|x|\leq\epsilon} |k_\alpha(x)| dx = c(N,\alpha) \int_0^\epsilon \frac{r^{N-1}}{r^{N-\alpha}} dr = c(N,\alpha)\epsilon^\alpha < \infty.$$

Logo considerando $\varphi(x) = \frac{1}{|x|^{N-\alpha}} \chi_{[|x|\leq 1]}$ e usando o Lema 1.3 temos

$$\begin{aligned} I = |k'_\alpha * f(x)| \quad &= \quad \left| \left(\frac{1}{|.|^{N-\alpha}} \chi_{[|.|\leq\epsilon]} \right) * f(x) \right| \\ &= \quad \epsilon^\alpha \left| \left(\frac{1}{\epsilon^N} \varphi(\frac{\cdot}{\epsilon}) * f \right)(x) \right| = \epsilon^\alpha |(\varphi_\epsilon * f)(x)| \\ &\leq \quad \epsilon^\alpha \|\varphi\|_{L^1} Mf(x) = c(N,\alpha)\epsilon^\alpha Mf(x), \end{aligned}$$

ou seja,

$$I \leq c(N,\alpha)\epsilon^\alpha Mf(x)\ . \tag{1.10}$$

Por outro lado, considerando $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ e usando a Desigualdade de Hölder, segue-se

$$II = |k^\infty_\alpha * f(x)| = | \int_{\mathbb{R}^N} k^\infty_\alpha(x-y) f(y) dy| \leq \|f\|_{L^p} \|k^\infty_\alpha\|_{L^{p'}}$$

mas,

$$\begin{aligned} \|k^\infty_\alpha\|_{L^{p'}} \quad &= \quad \left(\int_{|x|>\epsilon} \frac{1}{|x|^{(N-\alpha)p'}} dx \right)^{\frac{1}{p'}} = c(N,p) \left(\int_\epsilon^\infty \frac{r^{N-1}}{r^{(N-\alpha)p'}} dr \right)^{\frac{1}{p'}} \\ &= \quad c(N,p) r^{\frac{N}{p'} - N + \alpha} |_\epsilon^\infty \ . \end{aligned}$$

Como $0 < \alpha < N$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$, temos que $\frac{N}{p'} - N + \alpha < 0$, isto implica

$$\|k^\infty_\alpha\|_{L^{p'}} \leq c(N,p,\alpha)\epsilon^{\frac{N}{p'} - N + \alpha}.$$

Assim,

$$II \leq c(N,p,\alpha)\epsilon^{\frac{N}{p'}-N+\alpha}\|f\|_{L^p} \,. \tag{1.11}$$

Agora escolhemos $\epsilon = \epsilon(x)$ tal que as estimativas (1.10) e (1.11) sejam iguais, ou seja,

$$\epsilon^{\alpha} Mf(x) = \epsilon^{\frac{N}{p'}-N+\alpha}\|f\|_{L^p} \,,$$

logo, já que p e p' são expoentes conjugados temos que $\frac{N}{p'} - N = -\frac{N}{p}$, e assim,

$$\epsilon^{-\frac{N}{p}} = \frac{Mf(x)}{\|f\|_{L^p}} \tag{1.12}$$

combinando (1.9), (1.10), (1.11) e (1.12), tem-se

$$\begin{aligned}
|I_\alpha f(x)| &\leq c(N,p,\alpha)(\epsilon^{\alpha} Mf(x) + \epsilon^{\frac{N}{p'}-N-\alpha}\|f\|_{L^p}) \\
&= c(N,p,\alpha)\epsilon^{\alpha} Mf(x) \\
&= c(N,p,\alpha)\left(\frac{Mf(x)}{\|f\|_{L^p}}\right)^{\frac{-p\alpha}{N}} Mf(x) \\
&= c(N,p,\alpha)(Mf(x))^{1-\frac{p\alpha}{N}}\|f\|_{L^p}^{\frac{p\alpha}{N}} \\
&= c(N,p,\alpha)(Mf(x))^{1-\theta}\|f\|_{L^p}^{\theta} \qquad \theta = \frac{p\alpha}{N} \ \in (0,1).
\end{aligned}$$

Finalmente, pelo Teorema de Hardy-Littlewood e tomando a norma $L^q(\mathbb{R}^N)$ concluímos que

$$\begin{aligned}
\|I_\alpha f\|_{L^q} &\leq c(N,p,\alpha)\|f\|_{L^p}^{\theta}\|(Mf)^{1-\theta}\|_{L^q} = c(N,p,\alpha)\|f\|_{L^p}^{\theta}\|(Mf)\|_{L^{q(1-\theta)}}^{1-\theta} \\
&\leq c(N,p,\alpha)\|f\|_{L^p}^{\theta}\|f\|_{L^{q(1-\theta)}}^{1-\theta} \,.
\end{aligned}$$

Note que $(1-\theta)q = (1-\frac{p\alpha}{N})q = p$, pois $\frac{1}{q} = \frac{1}{p} - \frac{\alpha}{N}$. Portanto,

$$\|I_\alpha f\|_{L^q} \leq c(N,\alpha,p)\|f\|_{L^p}.$$

■

1.3 A Transformada de Fourier

Nesta seção estudaremos a transformada de Fourier. Começamos estudando tal conceito para funções em $L^1(\mathbb{R}^N)$ e posteriormente veremos que a transformada pode ser considerada em outros espaços como $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ (espaço das distribuições temperadas).

1.3.1 A Transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^N)$

Definição 1.7. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. A transformada de Fourier de f, denotada por $\mathcal{F}(f)$ ou $\widehat{f}$, é a função dada por*

$$\mathcal{F}(f)(y) = \widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x,y)} f(x)dx \quad , \text{ para todo } y \in \mathbb{R}^N, \tag{1.13}$$

em que $(x, y) = x_1 y_1 + ... + x_N y_N$.

Teorema 1.10. *Seja $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Então*

i) A lei que associa $f \to \widehat{f}$, define um operador linear de $f \in L^1(\mathbb{R}^N)$ em $L^\infty(\mathbb{R}^N)$, satisfazendo

$$\|\mathcal{F}(f)\|_{L^\infty} \leq \|f\|_{L^1}. \tag{1.14}$$

ii) A função $\widehat{f} : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C}$ é contínua.

iii) $\widehat{f}(y) \to 0$ quando $y \to \infty$ (Lema de Riemann - Lebesgue).

iv)

$$\widehat{\tau_h f}(y) = e^{-i(h,y)}\widehat{f}(y) \, , \quad \text{onde } \tau_h f(x) = f(x-h) \quad e \tag{1.15}$$

$$\widehat{e^{i(h,y)} f}(y) = \widehat{f}(y-h) = \tau_h \widehat{f}(y). \tag{1.16}$$

v)

$$\widehat{\delta_a f}(y) = a^{-N} \widehat{f}\left(\frac{y}{a}\right) \, , \quad \text{onde } \delta_a f(x) = f(ax). \tag{1.17}$$

Demonstração. veja [11], capítulo IV. ∎

Observação 1.5. Note que se $f \geq 0$, então em (1.14) vale a igualdade

$$\widehat{f}(0) = \|\widehat{f}\|_{L^\infty} = \|f\|_{L^1}.$$

Na tentativa de caracterizar a transformada de Fourier em $L^1(\mathbb{R}^N)$, uma questão natural surge: será que a transformada também pertence a $L^1(\mathbb{R}^N)$? A reposta é negativa, veja o seguinte exemplo.

Exemplo 1.1. Sejam $N = 1$, $f(x) = \chi_{[-1,1]}(x)$. Então $\widehat{f}$ não pertence a $L^1(\mathbb{R})$.

De fato, é claro que $f \in L^1(\mathbb{R})$. Logo,

$$\widehat{f}(y) = \int_{\mathbb{R}} e^{-ix.y} f(x)dx = \int_{-1}^{1} e^{-ix.y}dx = 2\frac{\text{sen}(y)}{y}.$$

Note que $\widehat{f} \notin L^1(\mathbb{R})$.

O próximo teorema mostra a relação existente entre a transformada de Fourier da convolução e a transformada das funções envolvidas.

Teorema 1.11. *Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{R}^N)$, então*

$$\widehat{(f * g)}(y) = \widehat{f}(y)\widehat{g}(y) \tag{1.18}$$

Demonstração. Utilizando o Teorema de Fubini e uma mudança de variáveis, obtemos

$$\begin{aligned}
\widehat{(f * g)}(y) &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x,y)}(f * g)(x)dx = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x,y)} \int_{\mathbb{R}^N} f(x-z)g(z)dzdx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x,y)} f(x-z)g(z)dxdz \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} g(z)e^{-i(z,y)}dz \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(x-z,y)} f(x-z)dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-i(w,y)} f(w)dw \int_{\mathbb{R}^N} g(z)e^{-i(z,y)}dz \\
&= \widehat{f}(y)\widehat{g}(y).
\end{aligned}$$

■

1.3.2 A Transformada de Fourier no Espaço de Schwartz

Nesta subseção apresentaremos o espaço de Schwartz denotado por $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, que será a ferramenta básica para estender a transformada de Fourier a uma classe maior de distribuições.

Definição 1.8. *Definimos o espaço de Schwartz ou das funções C^∞ rapidamente decrescentes por*

$$\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) = \{f : \mathbb{R}^N \to \mathbb{C} : f \in C^\infty(\mathbb{R}^N) \text{ e } \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |x^\alpha D^\beta f(x)| < \infty\}$$

para quaisquer multi-índices $\alpha, \beta \in \mathbb{N}^N$.

Observações.

i) $C_0^\infty(\mathbb{R}^N) \subsetneq \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Note que a função $f(x) = e^{-|x|^2}$ pertence a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ mas não a $C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

ii) O conjunto $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ é um espaço vetorial sobre os complexos e tem uma topologia natural induzida pela família de seminormas $\|f\|_{\alpha,\beta}$ definidas por

$$\|f\|_{\alpha,\beta} = \sup_{x \in \mathbb{R}^N} |x^\alpha D^\beta f(x)|.$$

Mais precisamente, $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ é um espaço métrico completo, quando munido da distância

$$d(f,g)=\sum_{\alpha,\beta}2^{-(|\alpha|+|\beta|)}\frac{\|f-g\|_{\alpha,\beta}}{1+\|f-g\|_{\alpha,\beta}}. \tag{1.19}$$

iii) $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ é um subespaço denso em $L^p(\mathbb{R}^N)$, para todo $1\leq p<\infty$.

Agora vamos introduzir uma noção de convergência em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, para definir o espaço das distribuições temperadas.

Definição 1.9. *Dizemos que a sequência $(\varphi_n)_{n\in\mathbb{N}}$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ converge a $\varphi\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ se, somente, se*

$$\lim_{n\to\infty}\|\varphi_n-\varphi\|_{\alpha,\beta}=0 \qquad \forall\ \alpha,\beta\in\mathbb{N}^N.$$

Teorema 1.12. *Suponha que $f_n\to f$ em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Então $f_n\to f$ na norma $L^p(\mathbb{R}^N)$ para todo $p\in[1,\infty]$.*

Demonstração. Veja [11], página 200. ■

No próximo teorema trataremos da relação existente entre f, $D^\alpha f$ e a transformada de Fourier de f no espaço $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Teorema 1.13. *Seja $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, então $\widehat{f}$, $x^\alpha f$ e $D^\alpha f$ pertencem a $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Além disso, para todo multi-índice $\alpha\in\mathbb{N}^N$*

$$\widehat{D^\alpha} f(y)=i^{|\alpha|}y^\alpha\widehat{f}(y). \tag{1.20}$$

$$D^\alpha\widehat{f}(y)=(-i)^{|\alpha|}\widehat{x^\alpha} f(y). \tag{1.21}$$

Demonstração. Veja [18], página 103. ■

Teorema 1.14. ***(Teorema de Inversão).*** *Se $f\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, então vale o teorema de inversão*

$$f(x)=\int_{\mathbb{R}^N}e^{i(x,y)}\widehat{f}(y)dy, \quad \textit{para todo } x\in\mathbb{R}^N. \tag{1.22}$$

Demonstração. Veja [11], página 196. ■

Corolário 1.14.1. *$f,g\in\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, então*

i) $\int_{R^N}f(x)\overline{g(x)}dx=\int_{\mathbb{R}^N}\widehat{f}(y)\overline{\widehat{g}(y)}dy$ *(fórmula de Parseval)*

ii) $\int_{R^N}\widehat{f}(x)\overline{g(x)}dx=\int_{\mathbb{R}^N}f(y)\overline{g(y)}^{\wedge}dy$

iii) $\|f\|_{L^2}=\|\widehat{f}\|_{L^2}$.

Definição 1.10. *Seja $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, definimos a transformada inversa de Fourier por*

$$\mathcal{F}^{-1}(f)(x) = (f)^{\vee}(x) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{i(x,y)} f(y)dy \quad \textit{para todo } x \in \mathbb{R}^N. \tag{1.23}$$

Observação 1.6. Note que $\mathcal{F}^{-1}$ está bem definida pois $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \subset L^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, tem-se

$$(f)^{\vee}(x) = \widehat{f}(-x) \qquad \forall\, x \in \mathbb{R}^N$$

$$(\widehat{f})^{\vee} = f = (\widehat{f})^{\vee} \qquad f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

A Transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^N)$

A transformada de Fourier não pode ser definida em $L^2(\mathbb{R}^N)$, através de (1.13), uma vez que a integral não faz sentido em geral se $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$.

Exemplo 1.2.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } x \in (-\infty, 1] \\ x^{-1} & , \text{ se } x \in (1, \infty) \end{cases}$$

temos que $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$, mas não pertence a $L^1(\mathbb{R}^N)$.

Não entanto, pelo Teorema 1.13 e a identidade de Parseval temos que a transformada de Fourier define um operador linear e contínuo $\mathcal{F} : (\mathcal{S}, \|.\|_{L^2}) \longrightarrow (\mathcal{S}, \|.\|_{L^2})$, que é uma isometria na norma $L^2(\mathbb{R}^N)$. Deste modo, como $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^N)$ o Teorema 1.3 (ii) nos afirma que $\mathcal{F}$ pode ser estendido como un operador contínuo de $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Observação. O mesmo concluímos com a transformada de Fourier inversa.

Definição 1.11. *Definimos a transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^N)$ dada por*

$$\mathcal{F} : L^2(\mathbb{R}^N) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$$

$$f \longmapsto \mathbf{F}(f) = \widehat{f},$$

em que $\widehat{f}$ é a única extensão da transformada em $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Teorema 1.15. *A transformada de Fourier $\mathcal{F}$: $L^2(\mathbb{R}^N) \to L^2(\mathbb{R}^N)$ é um isomorfismo topológico, isto é, ela e a sua inversa são contínuas.*

1.3.3 Distribuições Temperadas

O propósito desta subseção é estudar a classe de funções generalizadas ou distribuições temperadas. Os conceitos e propriedades da transformada de Fourier estudados na subseção anterior serão estendidos a essa classe.

Definição 1.12. *Uma aplicação* $T : \mathcal{S}(\mathbb{R}^N) \to \mathbb{C}$ *é uma distribuição temperada se*

i) T *é linear*

ii) T *é contínua , isto é, se* $\varphi_n \to \varphi$ *em* $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$*, então* $T(\varphi_n) \to T(\varphi)$ *em* $\mathbb{C}$.

Denotaremos por $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ ao conjunto de todas as distribuições temperadas e $T(\varphi)$ por $< T, \varphi >$.

Observação. $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ é o dual topológico de $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Exemplo 1.3. Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$. Defina

$$T_f(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\overline{\varphi(x)}dx \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N), \tag{1.24}$$

então $T_f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.
A prova segue-se imediatamente da Desigualdade de Hölder.

Exemplo 1.4. Seja $x_0 \in \mathbb{R}^N$ e defina

$$\delta_{x_0}(\varphi) = \varphi(x_0) \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N), \tag{1.25}$$

então $\delta \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.
δ_{x_0} é conhecido como a distribuição Delta de Dirac centrada no ponto x_0.

Exemplo 1.5. Seja μ uma medida finita no $\mathbb{R}^N$ e defina

$$T_\mu(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi d\mu \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N),$$

então $T_\mu \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

Observação 1.7. Observe que no Exemplo 1.3, uma distribuição provém de uma função $L^p(\mathbb{R}^N)$, mas nem toda distribuição provém de uma função. O exemplo clássico é a Delta de Dirac (Exemplo 1.4).

Definição 1.13. *Dizemos que uma sequência* $(T_n)_{n\in\mathbb{N}}$ *em* $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *converge a* $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ *se, e somente se*

$$\lim_{n\to\infty} < T_n, \varphi > = < T, \varphi > \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Esta noção de convergência é muito fraca. De fato, se $f_n \to f$ em $L^p(\mathbb{R}^N)$, então $T_{f_n} \to T_f$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, o que é uma consequência imediata da Desigualdade de Hölder. Além disso, a aplicação $f \mapsto T_f$ é contínua é injetiva. Assim, podemos identificar $L^p(\mathbb{R}^N)$ como um subespaço de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

No que segue, estenderemos a operação de derivação e a transformada de Fourier para o espaço $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

Definição 1.14. ***(Derivada de Distribuição).*** *Sejam $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ e $\alpha \in \mathbb{N}^N$, definimos a derivada de T de ordem α por*

$$< D^\alpha T, \varphi >= (-1)^{|\alpha|} < T, D^\alpha \varphi > \qquad \forall\, \varphi \in \mathbb{S}(\mathbb{R}^N).$$

Observe que, $D^\alpha T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, pois $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

Definição 1.15. ***(Transformada de Distribuição).*** *Sejam $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, definimos a transformada de Fourier de T e respectivamente a transformada inversa de T por*

$$< \widehat{T}, \varphi >=< T, (\varphi)^\vee > \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$$

e

$$< (T)^\vee, \varphi >=< T, \widehat{\varphi} > \qquad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Note que, $\widehat{T}$ e $\check{T}$ pertencem a $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

Observação 1.8. As definições (1.14) e (1.15) são coerentes com a teoria desenvolvida na subseção anterior. De fato, se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ então $f' \in \mathcal{S}(\mathbb{R})$ (Teorema 1.13). Usando integração por partes temos

$$< T_{f'}, \varphi >= \int_{\mathbb{R}} f'(x)\overline{\varphi(x)}dx = - \int_{\mathbb{R}} f(x)\overline{\varphi'(x)}dx = - < T_f, \varphi' > \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}).$$

Do mesmo modo, se $f \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ então $\widehat{f} \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Logo usando o Corolário 1.14.1 (ii) temos, $\forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$

$$< T_{\widehat{f}}, \varphi >= \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(x)\overline{\varphi(x)}dx = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\widehat{\overline{\varphi}}(y)dy = \int_{\mathbb{R}^N} f(y)\overline{\check{\varphi}(y)}dy =< T_f, \check{\varphi} > .$$

Teorema 1.16. *A transformada $\mathcal{F} : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \to \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ é um isomorfismo topológico, ou seja, ela e a sua inversa são contínuas. Além disso,*

$$\mathcal{F}\mathcal{F}^{-1}(T) = T = \mathcal{F}^{-1}\mathcal{F}(T) \qquad \forall\, T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N). \tag{1.26}$$

A demonstração segue diretamente da definição da transformada em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ e a definição de continuidade.

Definimos agora o produto de uma distribuição com uma função. Isso nem sempre está bem definido, no entanto podemos fazê-lo em certos casos.

Definição 1.16. *Seja $\psi \in C^\infty(\mathbb{R}^N)$, dizemos que ψ é de crescimento lento se, e somente se, para todo multi-índice α, existem uma constante $c = c(\alpha)$ e um inteiro não negativo $k = k(\alpha)$ tal que*

$$|D^\alpha \psi(x)| \leq c(1 + |x|^2)^k \quad \forall x \in \mathbb{R}^N.$$

Notação: Denotaremos por $\mathbb{Q}(\mathbb{R}^N)$ ao conjunto de todas as funções de crescimento lento.

Definição 1.17. *Sejam $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ e $\psi \in \mathbb{Q}(\mathbb{R}^N)$, definimos o produto da distribuição T com a função ψ por*

$$< \psi T, \varphi > = < T, \psi\varphi > \qquad \forall\ \varphi\ \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N). \tag{1.27}$$

Note que $\psi T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, pois claramente $\varphi\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$.

Teorema 1.17. *Seja $T \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, então valem as fórmulas*

$$\widehat{D^\alpha T} = i^{|\alpha|} y^\alpha \widehat{T}. \tag{1.28}$$

e

$$D^\alpha \widehat{T} = (-i)^{|\alpha|} \widehat{x^\alpha T}. \tag{1.29}$$

onde $x^\alpha T$ (respectivamente $y^\alpha T$) denota o produto da função $\psi(x) = x^\alpha$ ($\psi(y) = y^\alpha$) com a distribuição T (respectivamente $\widehat{T}$).

Demonstração. Veja [18]. ∎

Encerramos esta subseção observando que para simplificar a notação, daqui por diante passaremos a denotar os elementos de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$ por $f, g, h, etc.$, ou seja, usaremos a notação usual de função, mas fica subentendido que quando falamos de derivada ou transformada destes elementos estaremos sempre falando no sentido de distribuições. Em particular a distribuição T_f será identificada simplesmente por f.

1.4 Os Espaços de Sobolev

Nesta seção introduziremos os espaços de Sobolev. Começaremos definindo os espaços $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$, logo serão apresentados os espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^N)$ tanto homogêneo como não homogêneo e estudaremos algumas de suas propriedades tais como as imersões de Sobolev. Esses espaços constituem uma ferramenta fundamental para nosso estudo.

Definição 1.18. *Sejam $1 \le p \le \infty$ e $m \in \mathbb{N}$. Definimos o espaço de Sobolev $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ por*

$$W^{m,p}(\mathbb{R}^N) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)\ : D^\alpha f \in L^p(\mathbb{R}^N),\ com\ 0 \le |\alpha| \le m\}.$$

Observações

i) $D^\alpha f$ é a derivada no sentido das distribuições.

ii) O espaço $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Banach com a norma

$$\|f\|_{W^{m,p}} = \sum_{|\alpha|\leq m} \|D^\alpha f\|_{L^p}. \tag{1.30}$$

iii) Quando $p = 2$, $W^{m,p}(\mathbb{R}^N)$ denotado simplesmente por $H^m(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Hilbert com o produto interno dado por

$$\langle f, g\rangle_{H^m} = \sum_{|\alpha|\leq m} \langle D^\alpha f, D^\alpha g\rangle_{L^2}.$$

Agora vamos definir os espaços de Sobolev não homogêneos.

Definição 1.19. *Seja $s \in \mathbb{R}$. Definimos o espaço de Sobolev de ordem s, denotado por $H^s(\mathbb{R}^N)$ como um subespaço de $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$*

$$H^s(\mathbb{R}^N) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \;:\; \Lambda^s f(y) = (1 + |y|^2)^{\frac{s}{2}} \widehat{f}(y) \in L^2(\mathbb{R}^N)\} \tag{1.31}$$

onde o produto em (1.31) é como o definido em (1.27).

Note que, pela fórmula de Parseval, quando $s = 0$ temos $H^0(\mathbb{R}^N) = L^2(\mathbb{R}^N)$.

Teorema 1.18. *O espaço $H^s(\mathbb{R}^N)$, $s \in \mathbb{R}$, é um espaço de Hilbert quando munido do produto interno,*

$$\langle f, g\rangle_{H^s} = \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |y|^2)^s \widehat{f}(y)\overline{\widehat{g}(y)} dy.$$

Demonstração. Veja [18]. ∎

A norma correspondente é dada por

$$\|f\|_{H^s} = \|\Lambda^s f\|_{L^2} = \left(\int_{\mathbb{R}^N} (1 + |y|^2)^s |\widehat{f}(y)|^2 dy\right)^{\frac{1}{2}}. \tag{1.32}$$

Denotaremos simplesmente por $\|f\|_s$ quando não houver perigo de confusão.

O próximo teorema reúne algumas propriedades básicas dos espaços de Sobolev $H^s(\mathbb{R}^N)$.

Teorema 1.19. *Sejam $s, s' \in \mathbb{R}$, então*

i) $H^s(\mathbb{R}^N) \subset H^{s'}(\mathbb{R}^N)$ se $s \geq s'$. Além disso, esta inclusão é contínua e densa.

ii) O espaço de Schwartz $\mathbf{S}(\mathbb{R}^N)$ é denso em $H^s(\mathbb{R}^N)$.

iii) O dual topológico de $H^s(\mathbb{R}^N)$ é isometricamente isomorfo a $H^{-s}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Veja [11], página 337. ∎

Observação 1.9. O Teorema 1.19(i) mostra em particular que os elementos de $H^s(\mathbb{R}^N)$, com $s \geqslant 0$, são funções quadrado integráveis, mais precisamente são distribuções que provém de funções em $L^2(\mathbb{R}^N)$ pois, neste caso, $H^s(\mathbb{R}^N) \subset H^0(\mathbb{R}^N) = L^2(\mathbb{R}^N)$. Isso é falso para $s < 0$.

O próximo exemplo mostra que a distribuição Delta de Dirac pertence a $H^s(\mathbb{R}^N)$ com s negativo.

Exemplo 1.6. $\delta \in H^s(\mathbb{R}^N)$, sempre que $s < -\frac{N}{2}$. De fato,

$$< \widehat{\delta}, \varphi >=< \delta, \check{\varphi} >= \check{\varphi}(0) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{i0.y} \varphi(y) dy = \int_{\mathbb{R}^N} \varphi(y) dy =< 1, \varphi >,$$

assim, $\widehat{\delta} = 1$. Logo

$$\int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} (1 + |y|^2)^s |\widehat{\delta}(y)|^2 dy = \int_{\mathbb{R}^{\mathbb{N}}} (1 + |y|^2)^s dy \ < \infty, \quad \text{se } s < -\frac{N}{2}.$$

Portanto, $\delta \in H^s(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ se $s < -\frac{N}{2}$.

Observação. A distribuição de Dirac não provém de uma função, ou seja, não existe f tal que $T_f = \delta$ (veja, por exemplo, [18]).

O próximo teorema mostra que quando $s \in \mathbb{N}$, o espaço $H^s(\mathbb{R}^N)$ é igual ao espaço de Sobolev da definição (1.18) com $p = 2$. Além disso as normas (1.30), com $p = 2$ e (1.32) são equivalentes.

Teorema 1.20. *Seja $s \in \mathbb{N}$. Então $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$ se, e somente se, $D^\alpha f \in L^2(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ para todo multi-índice α tal que $|\alpha| \leq s$, onde as derivadas são calculadas no sentido das distribuições.*

Demonstração. Veja [11], página 339. ■

Vamos agora definir os espaços de Sobolev homogêneos denotado por $\dot{H}^s(\mathbb{R}^N)$ para todo $s \in \mathbb{R}^N$.

Definição 1.20. *Seja $s \in \mathbb{R}$. Definimos o espaço de Sobolev homogêneo de ordem s por*

$$\dot{H}^s(\mathbb{R}^N) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \ : \ \widehat{D^s f}(y) = (|y|^s \widehat{f}(y)) \in L^2(\mathbb{R}^N)\}. \tag{1.33}$$

Definimos também a norma em $\dot{H}^s(\mathbb{R}^N)$ dada por

$$\|f\|_{\dot{H}^s}^2 = \|\widehat{D^s f}\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^N} |y|^{2s} |\widehat{f}(y)|^2 dy \tag{1.34}$$

Observação 1.10. Se $s \geq 0$ então $H^s(\mathbb{R}^N) \subset \dot{H}^s(\mathbb{R}^N)$. Alem disso,

$$\|f\|_{\dot{H}^s} \leq \|f\|_{H^s}. \tag{1.35}$$

De fato, seja $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$. Logo,

$$\|f\|^2_{\dot{H}^s} = \int_{\mathbb{R}^N} |y|^{2s}|\widehat{f}(y)|^2 dy \leq \int_{\mathbb{R}^N} (1+|y|^2)^s |\widehat{f}(y)|^2 dy = \|f\|^2_{H^s} < \infty.$$

Encerramos esta seção provando duas imersões de Sobolev.

Lema 1.4. *Sejam $s > \frac{N}{2}$ e $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$, então $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, vale a desigualdade*

$$\|\widehat{f}\|_{L^1} \leq c(s)\, \|f\|_s. \tag{1.36}$$

Demonstração. Usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, temos

$$\begin{aligned} \|\widehat{f}\|_{L^1} &= \int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{f}(y)| dy = \int_{\mathbb{R}^N} (1+|y|^2)^{\frac{-s}{2}} (1+|y|^2)^{\frac{s}{2}} |\widehat{f}(y)| dy \\ &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^N} (1+|y|)^{-s} dy \right)^{\frac{1}{2}} \|f\|_s = c(s)\|f\|_s \end{aligned}$$

como $s > \frac{N}{2}$, então $c(s)$ é finito. Assim $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^N)$ e vale (1.36). ■

Teorema 1.21. *Seja $s > \frac{N}{2}$. Então $H^s(\mathbb{R}^N)$ pode ser imerso continuamente em $C_\infty(\mathbb{R}^N)$ (a coleção das funções contínuas de $\mathbb{R}^N$ em $\mathbb{C}$ que tendem a zero quando $|x| \to \infty$) e vale a desigualdade*

$$\|f\|_{L^\infty} \leq c(s)\, \|f\|_s. \tag{1.37}$$

Demonstração. Seja $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$, logo pelo Lema 1.4 temos que $\widehat{f} \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Combinando (1.14) e (1.36), segue-se

$$\|f\|_{L^\infty} = \|(\widehat{f})^\vee\|_{L^\infty} \leq \|\widehat{f}\|_{L^1} \leq c(s)\, \|f\|_s.$$

Isto é, $f \in C_\infty(\mathbb{R}^N)$ e vale (1.37). ■

Teorema 1.22. *Seja $s \in (0, \frac{N}{2})$, então $H^s(\mathbb{R}^N)$ é continuamente imerso em $L^p(\mathbb{R}^N)$ com $p = \frac{2N}{N-2s}$. Além disso, para todo $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$ temos*

$$\|f\|_{L^p} \leq c(N,s,p)\, \|f\|_s. \tag{1.38}$$

Demonstração. Considere $g = D^s f$. Usando a fórmula de Parseval e (1.35), obtemos que $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$, pois

$$\|g\|_{L^2} = \|D^s f\|_{L^2} = \|\widehat{D^s f}\|_{L^2} = \|f\|_{\dot{H}^s} \leq \|f\|_s < \infty.$$

Aplicando a transformada de Fourier a g e usando a definiçâo de D^s, temos

$$\widehat{g}(y) = |y|^s \widehat{f}(y) \iff \widehat{f}(y) = \frac{1}{|y|^s}\widehat{g}(y).$$

Logo, aplicando a transformada inversa a $\widehat{f}$ e usando (1.18), segue-se

$$f(x) = (\mathcal{F}^{-1}(\frac{1}{|y|^s}) * g)(x) = c(N,s)\left(\frac{1}{|.|^{N-s}}\right)(x) = I_s g(x)$$

onde I_s é o potencial de Riesz definido por (1.7). Por outro lado, como $s < \frac{N}{2} < N$, $g \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e $p = \frac{2N}{N-2s}$, obtemos pelo Teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev que

$$\|f\|_{L^p} = \|I_s g\|_{L^p} \ \leq c(N,s,p)\ \|g\|_{L^2} \leq c(N,s,p)\|f\|_s.$$

■

CAPÍTULO 2

Boa Colocação Para a Equação de Schrödinger não Linear

O objetivo deste capítulo é estudar *boa colocação* do problema de Cauchy para a equação de Schrödinger não linear, isto é,

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + \lambda |u|^\alpha u = 0, & t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^N, \\ \quad u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{2.1}$$

onde $\lambda = \pm 1, \alpha > 0$ e $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Mostraremos *boa colocação local e global* no caso subcrítico, isto é, quando $\alpha < \frac{4}{N}$. Além disso, provaremos no caso crítico, quando $\alpha = \frac{4}{N}$, *boa colocação local* e, em caso particular, *boa colocação global.*

2.1 Equação de Schrödinger Linear

Nesta seção estudaremos algumas propriedades do grupo associado à equação de Schrödinger linear, que serão úteis nas demonstrações dos teoremas de *boa colocação.*

Considere o problema de Cauchy envolvendo a equação de Schrödinger linear, isto é,

$$\begin{cases} i\partial_t u(t,x) + \Delta u(t,x) = 0, & t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^N, \\ \quad u(0,x) = u_0(x). \end{cases} \tag{2.2}$$

Seja $u_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Aplicando a transformada de Fourier em relação a variável x em (2.2) e usando (1.20), obtemos

$$\begin{cases} i\partial_t \widehat{u}(t,y) = -i|y|^2 \widehat{u}(t,y) \\ \quad \widehat{u}(0,y) = \widehat{u}_0(y). \end{cases} \tag{2.3}$$

Fixando $y \in \mathbb{R}^N$, reduzimos o problema de Cauchy de uma EDP a um PVI para uma EDO de primeira ordem. Sabe-se que a solução do problema (2.3), é dada por

$$\widehat{u}(t,y) = \widehat{u}_0(y)e^{-i|y|^2 t}. \tag{2.4}$$

Logo, aplicando a transformada de Fourier inversa e usando (1.18), obtemos

$$u(t,x) = (\widehat{u}_0(y)e^{-i|y|^2 t})^{\vee} = u_0 * (e^{-i|y|^2 t})^{\vee}(x). \tag{2.5}$$

Fixado $s \in \mathbb{R}$, denotaremos por $U(t)$ ou $e^{it\Delta}$ o operador de $H^s(\mathbb{R}^N)$ em $H^s(\mathbb{R}^N)$ dado por

$$U(t)u_0 = e^{it\Delta}u_0 = u_0 * (e^{-i|y|^2 t})^{\vee} \tag{2.6}$$

Assim, temos o grupo associado a equação de Schrödinger linear

$$u(t) = U(t)u_0 = e^{it\Delta}u_0. \tag{2.7}$$

Agora, mostraremos algumas das propriedades do operador $U(t) = e^{it\Delta}$.

Proposição 2.1. *A família $\{U(t)\}$ é um grupo unitário de operadores em $H^s(\mathbb{R}^N)$, isto é,*

1) *$\forall t \in \mathbb{R}, e^{it\Delta} : H^s(\mathbb{R}^N) \longrightarrow H^s(\mathbb{R}^N)$ é uma isometria, ou seja,*

$$\|e^{it\Delta}u_0\|_{H^s} = \|u_0\|_{H^s}.$$

2) *$e^{it\Delta}e^{it'\Delta} = e^{i(t+t')\Delta}$ com $(e^{it\Delta})^{-1} = e^{(-it)\Delta}$.*

3) *$e^{0t\Delta} = I$.*

4) *Se $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$, então a função $G_f : \mathbb{R} \to H^s(\mathbb{R}^N)$ definida por $G_f(t) = e^{it\Delta}f$ é contínua, isto e, G_f descreve uma curva contínua em $H^s(\mathbb{R}^N)$.*

Demonstração.

1) Seja $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^N)$. Usando (2.4), segue-se

$$\begin{aligned}
\|e^{it\Delta}u_0\|_{H^s}^2 &= \int_{\mathbb{R}^N}(1+|y|^2)^s|\widehat{e^{it\Delta}u_0}|^2 dy = \int_{\mathbb{R}^N}(1+|y|^2)^s|\widehat{u_0}(y)e^{-i|y|^2 t}|^2 dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N}(1+|y|^2)^s|\widehat{u_0}(y)|^2 dy \\
&= \|u_0\|_{H^s}^2.
\end{aligned}$$

2) Seja $y \in \mathbb{R}^N$

$$\begin{aligned}
\left(e^{it\Delta}e^{it'\Delta}u_0\right)^{\widehat{}}(y) &= \left(e^{i(t')\Delta}u_0\right)^{\widehat{}}(y)e^{-i|y|^2 t} \\
&= \widehat{u_0}(y)e^{-i|y|^2 t'}e^{-i|y|^2 t} = \widehat{u_0}(y)e^{-i|y|^2(t+t')} \\
&= \left(e^{i(t+t')\Delta}u_0\right)^{\widehat{}}(y).
\end{aligned}$$

então $e^{it\Delta}e^{it'\Delta} = e^{i(t+t')\Delta}$. A outra parte segue do item 3.

3) $e^{0t\Delta}u_0 = \left(\widehat{u}_0 e^{-i0|.|^2}\right)^{\vee} = (\widehat{u}_0)^{\vee} = u_0.$

4) Seja $f \in H^s(\mathbb{R}^N)$. Combinando (2.4) e o Teorema da Convergência Dominada, segue-se

$$\begin{aligned}
\lim_{t_n \to t} \|G_f(t) - G_f(t_n)\|_{H^s}^2 &= \lim_{t_n \to t} \int_{\mathbb{R}^N} (1+|y|^2)^s |\widehat{e^{it\Delta} f} - \widehat{e^{it_n\Delta} f}|^2 dy \\
&= \lim_{t_n \to t} \int_{\mathbb{R}^N} (1+|y|^2)^s |\widehat{f}(y)(e^{-it|y|^2} - e^{-it_n|y|^2})|^2 dy \\
&= 0.
\end{aligned}$$

■

2.2 Estimativas Strichartz

Nesta seção definiremos o conceito de par admissível e em seguida, provaremos as estimativas de Strichartz que serão fundamentais para mostrar os teoremas de *boa colocação.*

Definição 2.1. *Dizemos que o par (p,q) é admissível se,*

$$\frac{2}{q} = \frac{N}{2} - \frac{N}{p} \qquad e \tag{2.8}$$

$$\begin{cases} 2 \leq \ p < \frac{2N}{N-2} & se \quad N \geq 3, \\ 2 \leq \ p < \infty & se \quad N = 2, \\ 2 \leq \ p \leq \infty & se \quad N = 1. \end{cases} \tag{2.9}$$

Observação 2.1. Se (p,q) é um par admissível, então $2 \leq q \leq \infty$. Além disso, observamos que $(2,\infty)$ é sempre admissível.

A seguir, mostraremos um resultado que será usado na demonstração do próximo lema e no Capítulo 3.

Proposição 2.2. *Considere $x \in \mathbb{R}^N$ e a função*

$$f(x) = e^{\frac{i|x|^2}{4t}}. \tag{2.10}$$

Então, a transformada de Fourier de f está dada por

$$\widehat{f}(y) = c(it)^{\frac{N}{2}} e^{-it|y|^2}, \tag{2.11}$$

em que c é uma constante independente de t.

Demonstração. Note que $f \notin L^1(\mathbb{R}^N)$, então não podemos usar a fórmula (1.13). Para calcular a transformada vamos usar o método de regularização da função f. Considere $\epsilon > 0$ e defina a função $f_\epsilon(x) = e^{\frac{(-\epsilon+i)|x|^2}{4t}}$. Pela Desigualdade de Hölder temos que $f_\epsilon \in L^1(\mathbb{R}^N)$, pois $f \in L^\infty(\mathbb{R}^N)$ e $e^{-\frac{\epsilon|x|^2}{4t}} \in L^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, temos

$$f_\epsilon \to f \text{ quando, } \epsilon \to 0.$$

Por outro lado, T_{f_ϵ} e T_f pertencem a $\mathcal{S}'(R^N)$, com T_f dada por (1.24). Como $|f_\epsilon| \leq 1$, então

$$T_{f_\epsilon} \to T_f \text{ em } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \text{ quando } \epsilon \to 0.$$

De fato, seja $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$, logo

$$\lim_{\epsilon\to 0} T_{f_\epsilon}(\varphi) = \lim_{\epsilon\to 0} \int_{\mathbb{R}^N} f_\epsilon(x)\overline{\varphi(x)}dx.$$

Considere $g_\epsilon = f_\epsilon(x)\overline{\varphi(x)}$. Temos que g_ϵ é limitada pela função φ que é integrável, logo pelo Teorema da Convergência Dominada, segue-se

$$\lim_{\epsilon\to 0} T_{f_\epsilon}(\varphi) = \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\overline{\varphi(x)}dx = T_f(\varphi).$$

Agora denotaremos T_{f_ϵ} simplesmente por f_ϵ. Como a transformada de Fourier é um isomorfismo em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, temos que

$$\widehat{f_\epsilon} \to \widehat{f} \text{ em } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N).$$

Por outro lado, já que $f_\epsilon \in L^1(\mathbb{R}^N)$, podemos calcular a transformada pela fórmula (1.13), isto é,

$$\widehat{f_\epsilon}(y) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ixy} e^{\frac{(-\epsilon+i)|x|^2}{4t}} dx.$$

Denotemos $\widehat{f_\epsilon}$ por h. Novamente, pelo Teorema da Convergência Dominada, segue-se que a derivada parcial de h em relação a y_j está dada por

$$\begin{aligned}
\partial_{y_j} h(y) &= \int_{\mathbb{R}^N} -ix_j e^{-ixy} e^{\frac{(-\epsilon+i)|x|^2}{4t}} dx \\
&= \frac{-i(2t)}{-\epsilon+i} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-ixy} \frac{(-\epsilon+i)}{2t} x_j e^{\frac{(-\epsilon+i)|x|^2}{4t}} dx.
\end{aligned}$$

Consequentemente, fazendo $u = e^{-ixy}$, $\partial_{x_j} v = e^{\frac{(-\epsilon+i)|x|^2}{4t}}$ e usando integração por partes, obtemos

$$\partial_{y_j} h(y) = \frac{-i(2t)}{-\epsilon+i} \int_{\mathbb{R}^N} iy_j e^{-ixy} e^{\frac{(-\epsilon+i)|x|^2}{4t}} dx,$$

isto é,

$$\partial_{y_j} h(y) = \frac{2ty_j}{i-\epsilon} h(y). \tag{2.12}$$

Derivando novamente (2.12) em relação a y_j

$$\partial^2_{y_j^2} h(y) = \frac{2t}{i-\epsilon} + \frac{2ty_j}{i-\epsilon}\partial_{y_j} h(y) = (\frac{2t}{i-\epsilon} + \frac{4t^2y_j^2}{(i-\epsilon)^2})h(y).$$

Portanto, o laplaciano de h é dado pela seguinte EDP

$$\Delta h(y) = \left(\frac{2tN}{i-\epsilon} + \frac{4t^2|y|^2}{(i-\epsilon)^2}\right) h(y). \tag{2.13}$$

Além do mais,

$$h(0) = c\left(\frac{t}{\epsilon - i}\right)^{\frac{N}{2}}, \tag{2.14}$$

em que c é uma constante que independe de t.

De fato, fazendo $z = \frac{\sqrt{\epsilon-i}}{2\sqrt{t}}x$ e usando o fato que $e^{-|z|^2}$ é integrável, segue-se

$$h(0) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{\frac{(-\epsilon+i)|x|^2}{4t}}dx = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-(\frac{\sqrt{\epsilon-i}|x|}{2\sqrt{t}})^2}dx = \left(\frac{2\sqrt{t}}{\sqrt{\epsilon-i}}\right)^N \int_{\mathbb{R}^N} e^{-|z|^2}dz = c\left(\frac{t}{\epsilon-i}\right)^{\frac{N}{2}}$$

Logo, a solução da EDP (2.13) com a condição (2.14) é dada por

$$h(y) = \widehat{f}_\epsilon(y) = c\left(\frac{t}{\epsilon - i}\right)^{\frac{N}{2}} e^{\frac{t|y|^2}{i-\epsilon}}.$$

Finalmente, tomando $\epsilon \to 0$ obtemos a transformada de Fourier de f

$$\widehat{f}(y) = c\left(\frac{t}{-i}\right)^{\frac{N}{2}} e^{\frac{t|y|^2}{i}} = c(it)^{\frac{N}{2}}e^{-it|y|^2}.$$

■

Observação 2.2. Combinando (1.26) e a Proposição 2.2 temos o seguinte resultado

$$(e^{-i|y|^2t})^{\vee} = c\frac{1}{(it)^{\frac{N}{2}}}e^{\frac{i|x|^2}{4t}}. \tag{2.15}$$

Mostraremos agora um lema o qual será usado para provar as estimativas de Strichartz.

Lema 2.1. *Sejam* $t \neq 0$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1$ *e* $p' \in [1,2]$. *Então, o operador*

$$U(t) : L^{p'}(\mathbb{R}^N) \to L^p(\mathbb{R}^N)$$

é contínuo e vale a desigualdade

$$\|U(t)f\|_{L^p} \leq c|t|^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{p'}-\frac{1}{p})}\|f\|_{L^{p'}}, \quad \forall\ f \in L^{p'}(\mathbb{R}^N).$$

Demonstração. A Proposição 2.1, para $s = 0$, nos diz que $U(t) : L^2(\mathbb{R}^N) \longrightarrow L^2(\mathbb{R}^N)$ é limitado com norma

$$\|U(t)\|_{L^2 \to L^2} = \sup_{\|f\| \neq 0} \frac{\|U(t)f\|_{L^2}}{\|f\|_{L^2}} = 1.$$

Por outro lado, o operador $U(t) : L^1(\mathbb{R}^N) \to L^\infty(\mathbb{R}^N)$ é limitado e sua norma é dada por

$$\|U(t)\|_{L^\infty \to L^1} = \sup_{\|f\| \neq 0} \frac{\|U(t)f\|_{L^\infty}}{\|f\|_{L^1}} \leq c(N) \frac{1}{t^{\frac{N}{2}}}.$$

De fato, combinando (2.15) e a Desigualdade de Young, segue-se

$$\begin{aligned} \|U(t)f\|_{L^\infty} &= \left\| c \frac{e^{\frac{i|.|}{4t}}}{(it)^{\frac{N}{2}}} * f \right\|_{L^\infty} \\ &\leq \left\| c \frac{e^{\frac{i|.|}{4t}}}{(it)^{\frac{N}{2}}} \right\|_{L^\infty} \|f\|_{L^1} \\ &= c|t|^{-\frac{N}{2}} \|f\|_{L^1}. \end{aligned}$$

Logo, pelo Teorema de Riesz-Thorin obtemos que $U(t) : L^{p'}(\mathbb{R}^N) \to L^p(\mathbb{R}^N)$ é limitado. Além disso,

$$\|U(t)\| \leq \|U(t)\|_0^{1-\theta} \|U(t)\|_1^\theta \leq c|t|^{-\frac{N}{2}\theta}, \tag{2.16}$$

desde que,

$$\frac{1}{p'} = \frac{1-\theta}{2} + \theta \quad \text{e} \quad \frac{1}{p} = \frac{1-\theta}{2} \quad \text{com} \ \ 0 \leq \theta \leq 1,$$

isto é,

$$\frac{1}{p} + \frac{1}{p'} = 1.$$

Além do mais, note que

$$\theta = \frac{1}{p'} - \frac{1}{p}$$

e assim, usando (2.16) obtemos o resultado desejado

$$\|U(t)f\|_{L^p} \leq c|t|^{-\frac{N}{2}(\frac{1}{p'} - \frac{1}{p})} \|f\|_{L^{p'}}.$$

■

Teorema 2.1. ***(Desigualdade Strichartz).*** *Seja $g \in L^{q'}\Big(\mathbb{R} : L^{p'}(\mathbb{R}^N)\Big)$. Então, o grupo $\{U(t)\}$ satisfaz*

$$\| \int_{\mathbb{R}} U(t-t')g(.,t')dt' \|_{L_t^q L_x^p} \leq c\|g\|_{L_t^{q'} L_x^{p'}}, \tag{2.17}$$

em que (p,q) *é um par admissível.*

Demonstração. Combinando a Desigualdade de Minkowski (1.2) e o Lema 2.1, tem-se

$$\begin{aligned}\|\int_{\mathbb{R}} U(t-t')g(.,t')dt'\|_{L^p_x} &\leq \int_{\mathbb{R}} \|U(t-t')g(.,t')\|_{L^p_x}dt' \\ &\leq c\int_{\mathbb{R}} \frac{1}{|t-t'|^a}\|g(.,t')\|_{L^{p'}_x}dt' \\ &= c\frac{1}{|t|^a} * \|g(.,t')\|_{L^{p'}_x} \\ &= I_{1-a}(\|g(.,t')\|_{L^{p'}_x})(x),\end{aligned}$$

em que

$$a = \frac{N}{2}(\frac{1}{p'} - \frac{1}{p})$$

e I_{1-a} é o potencial de Riesz definido por (1.7). Logo, pelo Teorema de Hardy-Littlewood-Sobolev temos

$$\begin{aligned}\left\|\|\int_{\mathbb{R}} U(t-t')g(.,t')dt'\|_{L^p_x}\right\|_{L^q_t} &\leq \left\|I_{1-a}(\|g(.,t')\|_{L^{p'}_x})\right\|_{L^{q'}_t} \\ &\leq c\left\|\|g(.,t')\|_{L^{p'}_x}\right\|_{L^{q'}_t}.\end{aligned}$$

Isto é,

$$\left(\int_{\mathbb{R}} \|\int_{\mathbb{R}} U(t-t')g(.,t')dt'\|^q_{L^p_x}dt\right)^{\frac{1}{q}} \leq c\left(\int_{\mathbb{R}} \|g(.,t)\|^{q'}_{L^{p'}_x}dt\right)^{\frac{1}{q'}}$$

desde que,

$$\frac{1}{q} = \frac{1}{q'} - (1-a) \;\Leftrightarrow\; \frac{1}{q} = (1-\frac{1}{q}) - \left(1 - \frac{N}{2}(1-\frac{2}{p})\right) \;\Leftrightarrow \frac{2}{q} = \frac{N}{2} - \frac{N}{p}.$$

Por outro lado, como $(1-a) > 0$ então $1 - \frac{2}{q} > 0$, ou seja,

$$\frac{2}{q} < 1. \tag{2.18}$$

Logo, combinando (2.18) e o fato que (p,q) é par admissível obtemos

$$\frac{N}{2} - \frac{N}{p} < 1$$

Isto é,

$$\frac{N-2}{2N} < \frac{1}{p}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} i)\; 2 &\leq p < \frac{2N}{N-2} \quad \text{se} \quad N \geq 3, \\ ii)\; 2 &\leq p < \infty \quad \text{se} \quad N = 2, \\ iii)\; 2 &\leq p \leq \infty \quad \text{se} \quad N = 1.\end{aligned}$$

■

Observação 2.3. Note que, se $N = 2$ e $p = \infty$ então $\frac{N}{2} - \frac{N}{p} = \frac{2}{q} \Leftrightarrow q = 2$.
Se $N = 2,\ p = \infty$ não é admissível e se $N \geq 3,\ p = \frac{2N}{N-2}$ é admissível. Isto foi provado por Keel e Tao [12].

Corolário 2.1.1. *Sejam (p, q) um par admissível, $g \in L^{q'}\left(\mathbb{R} : L^{p'}(\mathbb{R}^N)\right)$ e $f \in L^2(\mathbb{R}^N)$. Então, valem as seguintes desigualdades:*

$$i)\ \|\int_{\mathbb{R}} U(t)g(.,t)dt\|_{L^2_x} \leq c\|g\|_{L^{q'}_t L^{p'}_x}. \tag{2.19}$$

$$ii)\ \|U(t)f\|_{L^q_t L^p_x} \leq c\|f\|_{L^2_x}. \tag{2.20}$$

Demonstração.

i)

$$\begin{aligned} \|\int_{\mathbb{R}} U(t)g(.,t)dt\|^2_{L^2_x} &= \int_{\mathbb{R}^N} \left(\int_{\mathbb{R}} U(t)g(x,t)dt\right)\left(\int_{\mathbb{R}} \overline{U(t')g(x,t')}dt'\right)dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}} g(x,t)\left(\int_{\mathbb{R}} U(t-t')\overline{g(x,t')}dt'\right)dtdx \end{aligned}$$

daí, usando a Desigualdade de Hölder para espaços mistos (1.1) obtemos

$$\|\int_{\mathbb{R}} U(t)g(.,t)dt\|^2_{L^2_x} \leq \|g\|_{L^{q'}_t L^{p'}_x}\|\int_{\mathbb{R}} U(t-t')\overline{g(x,t')}dt'\|_{L^q_t L^p_x}.$$

Finalmente, usando a Desigualdade Strichartz (2.17) concluímos

$$\|\int_{\mathbb{R}} U(t)g(.,t)dt\|^2_{L^2_x} \leq c\|g\|_{L^{q'}_t L^{p'}_x}\|g\|_{L^{q'}_t L^{p'}_x}.$$

Portanto,

$$\|\int_{\mathbb{R}} U(t)g(.,t)dt\|_{L^2_x} \leq c\|g\|_{L^{q'}_t L^{p'}_x}.$$

ii) Pelo Teorema 1.4 temos

$$\|U(t)f\|_{L^q_t L^p_x} = \sup_g\left\{\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^N} U(t)f(x)g(x,t)dxdt : \|g\|_{L^{q'}_t L^{p'}_x} \leq 1\right\}$$

entretanto, usando duas vezes a fórmula de Parseval obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^N} U(t)f(x)g(x,t)dx &= \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{(U(t)f)}(y)\widehat{g}(y,t)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} e^{-it|y|^2}\widehat{f}(y)\widehat{g}(y,t)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{f}(y)e^{-it|y|^2}\widehat{g}(y,t)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f(x)U(t)g(x,t)dx. \end{aligned}$$

Logo, combinando o Teorema de Fubini e a Desigualdade de Cauchy-Schwarz, e o item i, tem-se

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^N} U(t)f(x)g(x,t)dxdt &= \int_{\mathbb{R}^N}\int_{\mathbb{R}} f(x)U(t)g(x,t)dtdx\\ &= \int_{\mathbb{R}^N} f(x)\left(\int_{\mathbb{R}} U(t)g(x,t)dt\right)dx\\ &\leq \|f\|_{L^2_x}\|\int_{\mathbb{R}} U(t)g(.,t)dt\|_{L^2_x}\\ &\leq \|f\|_{L^2_x}\|g\|_{L^{q'}_t L^{p'}_x}.\end{aligned}$$

Assim, tomando o supremo em ambos os membros da desigualdade acima e usando o fato de que $\|g\|_{L^{q'}_t L^{p'}_x} \leq 1$, obtemos

$$\|U(t)f\|_{L^{q'}_t L^{p'}_x} = \sup_g\left\{\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^N} U(t)f(x)g(x,t)dxdt : \|g\|_{L^{q'}_t L^{p'}_x} \leq 1\right\} \leq c\|f\|_{L^2_x}.$$

■

Corolário 2.1.2. *Sejam* (p_0, q_0) *e* (p_1, q_1) *pares admissíveis. Se* $g \in L^{q_0'}\left(\mathbb{R} : L^{p_0'}(\mathbb{R}^N)\right)$ *então o grupo* $\{U(t)\}$ *satisfaz*

$$\|\int_0^t U(t-t')g(.,t')dt'\|_{L^{q_1}_t L^{p_1}_x} \leq c\|g\|_{L^{q_0'}_t L^{p_0'}_x}. \tag{2.21}$$

Demonstração. Defina

$$p(N) = \begin{cases} \frac{2N}{N-2}\,, & N \geq 3,\\ \infty, & N = 1, 2.\end{cases}$$

Observe que,

$$\begin{aligned} 2 &\leq p_0, p_1 < p(N) \Leftrightarrow \frac{1}{p(N)} < \frac{1}{p_0}, \frac{1}{p_1} \leq \frac{1}{2}\\ p &= p(N) \Rightarrow \frac{2}{q} = \frac{N}{2} - \frac{N}{p(N)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{q} = \frac{N}{4} - \frac{N}{2p(N)}.\end{aligned}$$

Sejam

$$P = \left(\frac{1}{2}, 0\right) \quad \text{e} \quad Q = \left(\frac{1}{p(N)}, \frac{N}{4} - \frac{N}{2p(N)}\right),$$

então podemos concluir que $(\frac{1}{p_1}, \frac{1}{q_1})$ $(\frac{1}{p_0}, \frac{1}{q_0})$ estão na reta que ligam os pontos PQ.

Afirmação 1.

$$\|\int_0^t U(t-t')g(.,t')dt'\|_{L^{\infty}_t L^2_x} \leq c\|g\|_{L^{q_1'}_t L^{p_1'}_x} \tag{2.22}$$

De fato,

$$\begin{aligned}\left\|\|\int_0^t U(t-t')g(.,t')dt'\|_{L^2_x}\right\|_{L^\infty_t} &= \sup_{t\in\mathbb{R}}\|\int_0^t U(t-t')g(.,t')dt'\|_{L^2_x}\\ &= \sup_{t\in\mathbb{R}}\|U(t)\int_0^t U(-t')g(.,t')dt'\|_{L^2_x}\\ &= \sup_{t\in\mathbb{R}}\|\int_0^t U(-t')g(.,t')dt'\|_{L^2_x}\\ &\leq c\|g\|_{L^{q_1'}_t L^{p_1'}_x}\end{aligned}$$

em que na penúltima igualdade usamos que $U(t)$ é uma isometria em $L^2(\mathbb{R}^N)$ e na desigualdade utilizamos (2.19). Assim, a Afirmação 1 está provada.

Agora suponha sem perda de generalidade $p_0 \in [2, p_1)$. Logo, aplicando o Corolário 1.1.3, obtemos

$$\begin{aligned}
\|\int_0^t U(t-t')g(.,t')dt'\|_{L_t^{q_0}L_x^{p_0}} &= \left(\int_{\mathbb{R}} \left\|\int_0^t U(t-t')g(.,t')dt'\right\|_{L_x^{p_0}}^{q_0} dt\right)^{\frac{1}{q_0}} \\
&\le \left(\int_{\mathbb{R}} \left\|\int_0^t U(t-t')g(.,t')dt'\right\|_{L_x^{2}}^{q_0(1-\theta)} \cdot \right. \\
&\quad \left. \left\|\int_0^t U(t-t')g(.,t')dt'\right\|_{L_x^{p_1}}^{q_0(\theta)} dt\right)^{\frac{1}{q_0}} \\
&\le \sup_{t\in\mathbb{R}} \left\|\int_0^t U(t-t')g(.,t')dt'\right\|_{L_x^{2}}^{(1-\theta)} \\
&\quad \left(\int_{\mathbb{R}} \left\|\int_0^t U(t-t')g(.,t')dt'\right\|_{L_x^{p_1}}^{q_0(\theta)} dt\right)^{\frac{1}{q_0}},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$I \le \|\int_0^t U(t-t')g(.,t')dt'\|_{L_t^{\infty}L_x^2}^{(1-\theta)} \|\int_0^t U(t-t')g(.,t')dt'\|_{L_t^{q_0\theta}L_x^{p_1}}^{\theta}, \tag{2.23}$$

em que

$$I = \|\int_0^t U(t-t')g(.,t')dt'\|_{L_t^{q_0}L_x^{p_0}}.$$

Desde que,

$$\frac{1}{p_0} = \frac{1-\theta}{2} + \frac{\theta}{p_1},$$

isto é,

$$\theta = \frac{p_1(2-p_0)}{p_0(2-p_1)} \tag{2.24}$$

Por outro lado, como (p_0, q_0), (p_1, q_1) são pares admissíveis temos

$$\frac{2}{q_1} = \frac{N}{2} - \frac{N}{p_1} \quad e \quad \frac{2}{q_0} = \frac{N}{2} - \frac{N}{p_0}.$$

Assim,

$$\frac{N}{4} = \frac{p_0}{q_0(p_0-2)} = \frac{p_1}{q_1(p_1-2)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{q_0}{q_1} = \frac{p_0(2-p_1)}{p_1(2-p_0)}. \tag{2.25}$$

Logo, usando (2.24) e (2.25), obtemos que

$$q_1 = q_0\theta \tag{2.26}$$

Portanto, combinando (2.23), (2.26), a Afirmação 1 e a Desigualdade Strichartz (2.17), segue-se

$$\|\int_0^t U(t-t')g(.,t')dt'\|_{L_t^{q_0}L_x^{p_0}} \le c\|g\|_{L_t^{q_1'}L_x^{p_1'}}^{(1-\theta)} \|g\|_{L_t^{q_1'}L_x^{p_1'}}^{\theta}. \tag{2.27}$$

Para finalizarmos a demonstração, provaremos a seguinte afirmação

Afirmação 2.

$$\|\int_0^t U(t-t')g(.,t')dt'\|_{L_t^{q_1}L_x^{p_1}} \leq c\|g\|_{L_t^{q_0'}L_x^{p_0'}}. \tag{2.28}$$

De fato, utilizando o Teorema 1.4 e a Desigualdade de Hölder para espaços mistos (1.1), segue-se

$$\begin{aligned}
\|\int_0^t U(t-t')g(.,t')dt'\|_{L_t^{q_1}L_x^{p_1}} &= \sup_{\|h\|_{L_t^{q_1'}L_x^{p_1'}}\leq 1} \left\{\int_{\mathbb{R}}\int_{\mathbb{R}^N}\left(\int_0^t U(t-t')g(x,t')dt'\right)h(x,t)dxdt\right\}\\
&\leq \sup_{\|h\|_{L_t^{q_1'}L_x^{p_1'}}} \|g\|_{L_t^{q_0'}L_x^{p_0'}}\|\int_0^t U(t-t')h(.,t')dt'\|_{L_t^{q_0}L_x^{p_0}}\\
&\leq \|g\|_{L_t^{q_0'}L_x^{p_0'}} \sup_{\|h\|_{L_t^{q_1'}L_x^{p_1'}}\leq 1}\left(c\|h\|_{L_t^{q_1'}L_x^{p_1'}}\right)\\
&\leq c\|g\|_{L_t^{q_0'}L_x^{p_0'}},
\end{aligned}$$

onde na penúltima desigualdade usamos a estimativa (2.27) e assim obtemos o resultado desejado. ■

2.3 Boa Colocação em $L^2(\mathbb{R}^N)$

O objetivo desta seção é estudar a *boa colocação* do PVI (2.1) no caso subcrítico ($0 < \alpha < \frac{4}{N}$) em $L^2(\mathbb{R}^N)$.

2.3.1 Caso Subcrítico

Nesta subseção provaremos a *boa colocação local e global* do PVI (2.1) no caso subcrítico em $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Antes de enunciar e provar o teorema de *boa colocação local*, denotaremos por $\|u\|_{L_T^pL_x^q}$ a norma definida por

$$\|u\|_{L_T^pL_x^q} = \left(\int_0^T \|u(t)\|_{L_x^q}^p dt\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Observe que a diferença desta norma para a norma $\|u\|_{L_t^pL_x^q}$ é o domínio de integração em relação a variável t.

Teorema 2.2. *Considere o PVI (2.1). Se* $0 < \alpha < \frac{4}{N}$*, então para todo* $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$*, existe* $T = T(\|u_0\|_{L^2}, N, \alpha) > 0$ *e uma única solução* u *da equação integral (4) no intervalo* $[0,T]$ *com*

$$u \in C\left([0,T] : L^2(\mathbb{R}^N)\right)\bigcap L^r\left([0,T] : L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N)\right),$$

em que $r = \frac{4(\alpha+2)}{N\alpha}$.

Demonstração.

Afirmação 1: O par $(\alpha+2, r)$ é admissível.

De fato,

$$\frac{2}{r} = \frac{N}{2} - \frac{N}{\alpha+2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{2}{r} = \frac{N(\alpha+2)-2N}{2(\alpha+2)} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{r} = \frac{N\alpha}{4(\alpha+2)}.$$

Como $\alpha < \frac{4}{N}$, então $2+\alpha < 2+\frac{4}{N} = \frac{2N+4}{N}$. Daí, $\frac{2N+4}{N} < \frac{2N}{N-2}$ pois

$$\frac{2N+4}{N} < \frac{2N}{N-2} \;\Leftrightarrow\; 2N^2 - 8 < 2N^2 \;\Leftrightarrow\; -8 < 0.$$

Portanto, o par $(\alpha+2, r)$ é admissível.

Seja $X = C\left(([0,T] : L^2(\mathbb{R}^N)\right) \bigcap L^r\left([0,T] : L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N)\right)$ e defina o operador

$$\begin{array}{rcl} G : X & \longrightarrow & X \\ u & \longmapsto & G(u) = U(t)u_0 + i\lambda \displaystyle\int_0^t U(t-t')(|u|^\alpha u(t'))dt'. \end{array}$$

Vamos utilizar o teorema do ponto fixo de Banach, assim desejamos encontrar um subconjunto $S \subseteq X$ fechado tal que

i) $G(S) \subseteq S$,

ii) G é uma contração em S.

Defina

$$S(a,T) = \{u \in X : \|u\|_T \leq a\}, \tag{2.29}$$

em que

$$\|u\|_T = \sup_{t\in[0,T]} \|u(t)\|_{L^2} + \|u\|_{L^r_T L^{\alpha+2}_x}. \tag{2.30}$$

Afirmação 2: Existem $a > 0$, $T > 0$ tal que $G(S(a,T)) \subseteq S(a,T)$.

De fato, usando a Desigualdade Strichartz (2.17) e (2.20), segue-se

$$\begin{array}{rcl} \|G(u)\|_{L^r_T L^{\alpha+2}_x} & \leq & \|U(t)u_0\|_{L^r_T L^{\alpha+2}_x} + \| \displaystyle\int_0^t U(t-t')(|u|^\alpha u(t'))dt'\|_{L^r_T L^{\alpha+2}_x} \\ & \leq & c_1\|u_0\|_{L^2_x} + c_2\||u|^\alpha u\|_{L^{r'}_T L^{(\alpha+2)'}_x}, \end{array}$$

ou seja,

$$\|G(u)\|_{L^r_T L^{\alpha+2}_x} \leq c_1\|u_0\|_{L^2_x} + c_2\||u|^\alpha u\|_{L^{r'}_T L^{(\alpha+2)'}_x}. \tag{2.31}$$

Entretanto,

$$\begin{array}{rcl} \||u|^\alpha u\|_{L^{r'}_T L^{(\alpha+2)'}_x} & = & \left\|\||u|^{\alpha+1}\|_{L^{(\alpha+2)'}_x}\right\|_{L^{r'}_T} = \left\|\||u|^{\alpha+1}\|_{L_x^{\frac{\alpha+2}{\alpha+1}}}\right\|_{L^{r'}_T} \\ & = & \left\|\|u\|^{\alpha+1}_{L^{\alpha+2}_x}\right\|_{L^{r'}_T} = \|u\|^{\alpha+1}_{L^{r'(\alpha+1)}_T L^{\alpha+2}_x} \end{array}$$

em que usamos os seguintes fatos

$$\frac{1}{(\alpha+2)'} = 1 - \frac{1}{(\alpha+2)} \ \text{ e } \ \| |u|^m \|_{L^p} = \|u\|_{L^{pm}}^m.$$

Logo,

$$\|G(u)\|_{L_T^r L_x^{\alpha+2}} \leq c_1 \|u_0\|_{L_x^2} + c_2 \|u\|_{L_T^{r'(\alpha+1)} L_x^{\alpha+2}}^{\alpha+1}. \tag{2.32}$$

Note que, como $\alpha < \frac{4}{N}$ então $(\alpha+1)r' < r$, pois

$$(\alpha+1)r' < r \ \Leftrightarrow \ \alpha+1 < \frac{r}{r'} = r-1 \ \Leftrightarrow \ \alpha+2 = r = 4\frac{(\alpha+2)}{N\alpha} \ \Leftrightarrow \ \alpha < \frac{4}{N}.$$

Daí, usando 1.1.1 temos

$$\|u\|_{L_T^{r'(\alpha+1)} L_x^{\alpha+2}} = \Big\| \|u\|_{L_x^{\alpha+2}} \Big\|_{L_T^{r'(\alpha+1)}} \leq \|1\|_{L_T^b} \Big\| \|u\|_{L_x^{\alpha+2}} \Big\|_{L_T^r} = (T)^{\frac{1}{b}} \|u\|_{L_T^r L_x^{\alpha+2}} \tag{2.33}$$

desde que,

$$\frac{1}{r'(\alpha+1)} = \frac{1}{b} + \frac{1}{r},$$

isto é,

$$\frac{1}{b} = \frac{1}{\alpha+1}\left(1 - \frac{N\alpha}{4}\right). \tag{2.34}$$

Assim, combinando (2.32), (2.33), (2.30) e (2.34), segue-se

$$\begin{aligned} \|G(u)\|_{L_T^r L_x^{\alpha+2}} &\leq c_1 \|u_0\|_{L_x^2} + c_2 (T)^{\frac{\alpha+1}{b}} \|u\|_{L_T^r L_x^{\alpha+2}}^{\alpha+1} \\ &\leq c_1 \|u_0\|_{L_x^2} + c_2 (T)^{1-\frac{N\alpha}{4}} \|u\|_T^{\alpha+1}. \end{aligned}$$

Por outro lado, utilizando (2.20) e (2.22) obtemos

$$\begin{aligned} \|G(u)\|_{L_T^\infty L_x^2} &\leq \|U(t)u_0\|_{L_T^\infty L_x^2} + \| \int_0^t U(t-t')(|u|^\alpha u(t'))dt' \|_{L_T^\infty L_x^2} \\ &\leq c_1 \|u_0\|_{L_x^2} + c_2 \| |u|^\alpha u \|_{L_T^{r'} L_x^{(\alpha+2)'}}, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\|G(u)\|_{L_T^\infty L_x^2} \leq c_1 \|u_0\|_{L_x^2} + c_2 \| |u|^\alpha u \|_{L_T^{r'} L_x^{(\alpha+2)'}}. \tag{2.35}$$

Observe que, (2.35) é a mesma estimativa que (2.31), então obtemos o mesmo resultado, isto é,

$$\|G(u)\|_{L_T^\infty L_x^2} \leq c_1 \|u_0\|_{L_x^2} + c_2 (T)^{1-\frac{N\alpha}{4}} \|u\|_T^{\alpha+1}. \tag{2.36}$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \|G(u)\|_T &= \|G(u)\|_{L_T^r L_x^{\alpha+2}} + \|G(u)\|_{L_T^\infty L_x^2} \\ &\leq c_1 \|u_0\|_{L_x^2} + c_2 (T)^{1-\frac{N\alpha}{4}} \|u\|_T^{\alpha+1}. \end{aligned}$$

Assim, se $u \in S(a,T)$ então

$$\|G(u)\|_T \leq c_1\|u_0\|_{L^2_x} + c_2(T)^{1-\frac{N\alpha}{4}} a^{\alpha+1}. \tag{2.37}$$

Agora escolhendo

$$a = 2c_1\|u_0\|_{L^2_x} \text{ com } c_2(T)^{1-\frac{N\alpha}{4}} a^{\alpha+1} \leq \frac{a}{2}, \tag{2.38}$$

obtemos de (2.37) que $G(u) \in S(a,T)$, ou seja,

$$\|G(u)\|_T \leq \frac{a}{2} + \frac{a}{2} = a.$$

Portanto, $G(S(a,T)) \subseteq S(a,T)$.

Afirmação 3: Existem $a > 0$, $T > 0$ tal que G é uma contração em $S(a,T)$. De fato, primeiro provaremos a seguinte estimativa

$$\||u|^\alpha u - |v|^\alpha v\|_{L^{r'}_T L^{(\alpha+2)'}_x} \leq cT^{(1-\frac{N\alpha}{4})}\left(\|u\|^\alpha_{L^{\alpha b}_T L^{\alpha+2}_x} + \|v\|^\alpha_{L^{\alpha b}_T L^{\alpha+2}_x}\right)\|u-v\|_{L^r_T L^{\alpha+2}_x}. \tag{2.39}$$

Já que,

$$\frac{1}{(\alpha+2)'} = \frac{1}{\alpha+2} + \frac{\alpha}{\alpha+2} \text{ e } \frac{1}{r'} = 1 - \frac{2}{r} + \frac{1}{r},$$

então pela Desigualdade de Hölder (1.1), segue-se

$$\begin{aligned}
\||u|^\alpha u - |v|^\alpha v\|_{L^{r'}_T L^{(\alpha+2)'}_x} &\leq c\,\|(|u|^\alpha + |v|^\alpha)|u-v|\|_{L^{r'}_T L^{(\alpha+2)'}_x} \\
&\leq c\,\||u|^\alpha|u-v|\|_{L^{r'}_T L^{(\alpha+2)'}_x} + \||v|^\alpha|u-v|\|_{L^{r'}_T L^{(\alpha+2)'}_x} \\
&\leq c\left(\||u|^\alpha\|_{L^{\frac{r}{r-2}}_T L^{\frac{\alpha+2}{\alpha}}_x} + \||v|^\alpha\|_{L^{\frac{r}{r-2}}_T L^{\frac{\alpha+2}{\alpha}}_x}\right)\|u-v\|_{L^r_T L^{(\alpha+2)}_x} \\
&\leq c\left(\left\|\|u\|^\alpha_{L^{\alpha+2}_x}\right\|_{L^{\frac{r}{r-2}}_T} + \left\|\|v\|^\alpha_{L^{\alpha+2}_x}\right\|_{L^{\frac{r}{r-2}}_T}\right)\|u-v\|_{L^r_T L^{(\alpha+2)}_x}.
\end{aligned}$$

Logo, usando o Corolário 1.1.1 na variável temporal t temos

$$\begin{aligned}
\||u|^\alpha u - |v|^\alpha v\|_{L^{r'}_T L^{(\alpha+2)'}_x} &\leq c\|1\|_{L^a_T}\left(\left\|\|u\|^\alpha_{L^{\alpha+2}_x}\right\|_{L^b_T} + \left\|\|v\|^\alpha_{L^{\alpha+2}_x}\right\|_{L^b_T}\right)\|u-v\|_{L^r_T L^{\alpha+2}_x} \\
&= c(T)^{\frac{1}{a}}\left(\|u\|^\alpha_{L^{\alpha b}_T L^{\alpha+2}_x} + \|v\|^\alpha_{L^{\alpha b}_T L^{\alpha+2}_x}\right)\|u-v\|_{L^r_T L^{\alpha+2}_x},
\end{aligned}$$

isto é,

$$\||u|^\alpha u - |v|^\alpha v\|_{L^{r'}_T L^{(\alpha+2)'}_x} \leq c(T)^{\frac{1}{a}}\left(\|u\|^\alpha_{L^{\alpha b}_T L^{\alpha+2}_x} + \|v\|^\alpha_{L^{\alpha b}_T L^{\alpha+2}_x}\right)\|u-v\|_{L^r_T L^{\alpha+2}_x}, \tag{2.40}$$

desde que,

$$\frac{r-2}{r} = \frac{1}{a} + \frac{1}{b}.$$

Note que,

$$\text{Se } \frac{1}{b} = \frac{\alpha}{r}, \text{ então } \frac{1}{a} = 1 - \frac{\alpha+2}{r}$$

ou seja,

$$\frac{1}{a} = 1 - \frac{N\alpha}{4}. \tag{2.41}$$

Portanto, combinando (2.40) e (2.41) obtemos a estimativa desejada.

Desta maneira, utilizando a Desigualdade Strichartz (2.17), (2.39) e $u, v \in S(a,T)$, temos

$$\begin{aligned}
\|G(u) - G(v)\|_{L^r_T L^{\alpha+2}_x} &= \left\| \int_0^t U(t-t')(|u|^\alpha u - |v|^\alpha v)(t') dt' \right\|_{L^r_T L^{\alpha+2}_x} \\
&\leq c\| |u|^\alpha u - |v|^\alpha v\|_{L^{r'}_T L^{(\alpha+2)'}_x} \\
&\leq cT^{(1-\frac{N\alpha}{4})}(\|u\|^\alpha_{L^r_T L^{\alpha+2}_x} + \|v\|^\alpha_{L^r_T L^{\alpha+2}_x})\|u - v\|_{L^r_T L^{\alpha+2}_x} \\
&\leq cT^{(1-\frac{N\alpha}{4})} a^\alpha \|u - v\|_{L^r_T L^{\alpha+2}_x},
\end{aligned}$$

ou seja,

$$\|G(u) - G(v)\|_{L^r_T L^{\alpha+2}_x} \leq cT^{(1-\frac{N\alpha}{4})} a^\alpha \|u - v\|_{L^r_T L^{\alpha+2}_x}. \tag{2.42}$$

De forma similar à prova da Afirmação 2, obtemos para $\|G(u) - G(v)\|_{L^\infty_T L^2_x}$ a mesma estimativa que para $\|G(u) - G(v)\|_{L^r_T L^{\alpha+2}_x}$. Isto é,

$$\|G(u) - G(v)\|_{L^\infty_T L^2_x} \leq cT^{(1-\frac{N\alpha}{4})} a^\alpha \|u - v\|_{L^r_T L^{\alpha+2}_x}. \tag{2.43}$$

Portanto, somando (2.42) e (2.43) obtemos

$$\|G(u) - G(v)\|_T \leq cT^{(1-\frac{N\alpha}{4})} a^\alpha \|u - v\|_{L^r_T L^{\alpha+2}_x} \leq cT^{(1-\frac{N\alpha}{4})} a^\alpha \|u - v\|_T. \tag{2.44}$$

Consequentemente, escolhendo T e a como em (2.38), ou seja,

$$a = 2c_1\|u_0\|_{L^2_x} \text{ com } c(T)^{1-\frac{N\alpha}{4}} a^{\alpha+1} \leq \frac{a}{2},$$

temos que $c(T)^{1-\frac{N\alpha}{4}} a^\alpha \leq \frac{1}{2}$. Portanto, utilizando (2.44) concluímos que G é uma contração em $S(a,T)$.

Finalmente pelo Teorema do ponto fixo de Banach existe uma única u tal que

$$G(u) = u \tag{2.45}$$

Dependência Contínua.

Sejam u e v únicas funcões que satisfazem (2.45) com dados iniciais u_0 e v_0 respectivamente. Logo,

$$\begin{aligned}
\|u - v\|_T &= \|G(u) - G(v)\|_T \\
&\leq c_1\|u_0 - v_0\|_{L^2} + c_2 T^{(1-\frac{N\alpha}{4})} a^\alpha \|u - v\|_T,
\end{aligned}$$

em que na última desigualdade usamos (2.44). Finalmente, novamente escolhendo T, a como em (2.38), ou seja,

$$c_2 T^{(1-\frac{N\alpha}{4})} a^\alpha \leq \frac{1}{2}$$

obtemos que

$$\|u - v\|_T \leq c\|u_0 - v_0\|_{L^2}.$$

Portanto, se u_0 está perto de v_0 na norma $L^2(R^N)$, então u está perto de v na norma definida por (2.30).

■

Corolário 2.2.1. *Com as mesmas condições do Teorema 2.2, temos*

$$u \in C\Big([0,T] : L^2(\mathbb{R}^N)\Big) \bigcap L^q\Big([0,T] : L^p(\mathbb{R}^N)\Big) \tag{2.46}$$

para qualquer (p, q) *par admissível.*

Demonstração. Usando o Corolário 2.1.2, ou seja,

$$\| \int_0^t U(t-t')g(.,t')dt'\|_{L_t^{q_1} L_x^{p_1}} \leq c\|g\|_{L_t^{q_0'} L_x^{p_0'}}, \tag{2.47}$$

em que (p_0, q_0) e (p_1, q_1) são pares admissíveis e tomando em particular

$$(p_1, q_1) = (p, q) \ \text{ e } \ (p_0, q_0) = (\alpha + 2, r),$$

temos

$$\| \int_0^t U(t-t')g(.,t')dt'\|_{L_t^q L_x^p} \leq c\|g\|_{L_t^{r'} L_x^{(\alpha+2)'}},$$

onde $(\alpha + 2, r)$ é o par admissível da Afirmação 1 do Teorema 2.2.
Logo, considerando $X = C\Big(([-T,T] : L^2(\mathbb{R}^N)\Big) \cap L^q\Big([-T,T] : L^p(\mathbb{R}^N)\Big)$ e usando o mesmo argumento da prova do Teorema 2.2, segue-se o resultado desejado (2.46).

■

Antes da prova de boa colocação global, provaremos a propriedade conhecida como conservação da massa, isto é,

$$M[u] = \|u(t)\|_{L^2} = c, \ \forall \ t \in \mathbb{R},$$

onde $M[u]$ denota a masa de u e c é constante.

De fato, suponha que $u(t) \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$. Agora multiplicando a equação NLS (1) por $\overline{u}$, temos

$$i\partial_t u(t,x)\overline{u}(t,x) + \Delta u \overline{u}(t,x) + \lambda |u(t,x)|^\alpha u(t,x)\overline{u}(t,x) = 0, \tag{2.48}$$

logo integrando em relação a variável x, tem-se

$$i\int_{\mathbb{R}^N}\partial_t u(t,x)\overline{u}(t,x)dx+\int_{\mathbb{R}^N}\Delta u(t,x)\overline{u}(t,x)dx+\int_{\mathbb{R}^N}\lambda|u(t,x)|^{\alpha+2}dx=0. \quad (2.49)$$

No entanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N}\Delta u(t,x)\overline{u}(t,x)dx=-\int_{\mathbb{R}^N}\nabla u(t,x)\nabla\overline{u}(t,x)dx\ \in\mathbb{R}^N, \quad (2.50)$$

$$i\int_{\mathbb{R}^N}\partial_t u(t,x)\overline{u}(t,x)dx=i\int_{\mathbb{R}^N}Re(\partial_t u(t,x)\overline{u}(t,x))dx-\int_{R^N}Im(\partial_t u(t,x)\overline{u}(t,x))dx. \quad (2.51)$$

Desta maneira, combinando (2.49), (2.50) e (2.51), segue-se que

$$i\int_{\mathbb{R}^N}Re(\partial_t u(t,x)\overline{u}(t,x))dx=0. \quad (2.52)$$

Como

$$2Re(\partial_t u(t,x)\overline{u}(t,x))=(\partial_t u(t,x))\overline{u}(x)+u(t,x)\partial_t\overline{u}(t,x)=\partial_t|u|^2, \quad (2.53)$$

obtemos

$$\frac{i}{2}\int_{\mathbb{R}^N}\partial_t|u(t,x)|^2dx=0, \quad (2.54)$$

isto é,

$$\partial_t\int_{\mathbb{R}^N}|u(t,x)|^2dx=0.$$

Portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N}|u(t,x)|^2dx=\|u(t)\|_{L^2}=c.$$

Como $\mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^N)$, temos dependência contínua da solução com relação aos dados iniciais e vale a identidade acima para soluções em $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Corolário 2.2.2. *Com as mesmas condições do Teorema 2.2, temos que o PVI (2.1) é bem posto globalmente.*

Demonstração. Pelo Teorema 2.2, existe $T_1=T_1(\|u_0\|_{L^2},N,\alpha)$ tal que o PVI (2.1) é *localmente bem colocado* e

$$u\in C\left([0,T_1]:L^2(\mathbb{R}^N)\right)\bigcap L^r\left([0,T_1]:L^{\alpha+2}(\mathbb{R}^N)\right),$$

em que $r=\frac{4(\alpha+2)}{N\alpha}$.

Se consideramos o PVI (2.1) com tempo inicial $t=T_1$, então pelo mesmo teorema, existe $T_2=T_2(\|u(T_1)\|_{L^2},N,\alpha)>T_1$ tal que temos *boa colocação local*.

Por outro lado, como a massa é conservada, ou seja,

$$\|u(T_1)\|_{L^2}=\|u_0\|_{L^2}=\|u(T_2)\|_{L^2}$$

então,

$$T_2 = T_2(\|u_0\|_{L^2}, N, \alpha).$$

Isto é, o tempo T_2 depende somente do tamanho do dado inicial no tempo $t = 0$, e não de $t = T_1$. Portanto, repetindo o mesmo procedimento temos que o PVI (2.1) é *globalmente bem colocado.* ■

2.3.2 Caso Crítico

O objetivo desta subseção é provar *boa colocação* do PVI (2.1) no caso crítico ($\alpha = \frac{4}{N}$) em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Primeiro provaremos *boa colocação local* e em seguida para um caso particular mostraremos *boa colocação global.*

Proposição 2.3. *Seja* (p,q) *um par admissível. Dados* $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ *e* $\epsilon > 0$, *então existem* $\delta > 0$ *e* $T > 0$ *tais que*

$$\text{se } \|u_0 - v_0\|_{L^2} < \delta, \text{ então } \left(\int_0^T \|U(t)v_0\|_{L^p}^q dt\right)^{\frac{1}{q}} < \epsilon. \tag{2.55}$$

Demonstração.

Afirmação 1. Seja $\widetilde{u}_0 \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ tal que $\|u_0 - \widetilde{u}_0\|_{L^2} < \frac{\epsilon}{4c}$, então

$$\left(\int_0^T \|U(t)u_0\|_{L^p}^q dt\right)^{\frac{1}{q}} < \frac{\epsilon}{2}. \tag{2.56}$$

De fato, combinando (2.20), a Proposição 2.1 e o Teorema 1.22, segue-se

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^T \|U(t)u_0\|_{L^p}^q dt\right)^{\frac{1}{q}} &\leq \|U(t)(u_0 - \widetilde{u}_0)\|_{L_T^q L_x^p} + \left(\int_0^T \|U(t)\widetilde{u}_0\|_{L^p}^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq c\|u_0 - \widetilde{u}_0\|_{L^2} + c\left(\int_0^T \|U(t)\widetilde{u}_0\|_{H^s}^q dt\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\leq \frac{\epsilon}{4} + cT^{\frac{1}{q}}\|\widetilde{u}_0\|_{H^s},
\end{aligned}$$

em que $s = \frac{N}{2} - \frac{N}{p}$. Fixando T tal que $cT^{\frac{1}{q}}\|\widetilde{u}_0\|_{H^s} < \frac{\epsilon}{4}$, obtemos (2.56).

Finalmente, novamente usando (2.20), a Afirmação 1 e escolhendo $\delta < \frac{\epsilon}{2c}$ concluímos a demonstração:

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^T \|U(t)v_0\|_{L^p}^q dt\right)^{\frac{1}{q}} &\leq \|U(t)(u_0 - v_0)\|_{L_T^q L_x^p} + \|U(t)u_0\|_{L_T^q L_x^p} \\
&\leq c\|u_0 - v_0\|_{L^2} + \frac{\epsilon}{2} \\
&< c\delta + \frac{\epsilon}{2} \\
&< \epsilon.
\end{aligned}$$

■

Teorema 2.3. *Considere o PVI (2.1). Se $\alpha = \frac{4}{N}$, então para todo $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$, existe $T = T(u_0, \alpha) > 0$ e uma única solução u da equação integral (4) no intervalo $[0, T]$ com*

$$u \in C\left([0,T] : L^2(\mathbb{R}^N)\right) \bigcap L^r\left([0,T] : L^r(\mathbb{R}^N)\right),$$

em que $r = 2 + \frac{4}{N}$.

Demonstração. Considere $X = C\left(([0,T] : L^2(\mathbb{R}^N)\right) \cap L^r\left([0,T] : L^r(\mathbb{R}^N)\right)$. Demonstraremos de forma similar à do Teorema 2.2, isto é, encontrar u que seja ponto fixo de G, onde G é o mesmo operador definido anteriormente.

Defina

$$\widetilde{S}(a,T) = \{u \in X : \|u\|_T \leq a\}, \tag{2.57}$$

em que

$$\|u\|_T = \sup_{t\in[0,T]} \|u(t) - U(t)u_0\|_{L^2} + \left(\int_0^T \|u(t)\|_{L^r}^r dt\right)^{\frac{1}{r}}. \tag{2.58}$$

Afirmação 1: Existem $a > 0$ e $T > 0$ tais que $G(\widetilde{S}(a,T)) \subseteq \widetilde{S}(a,T)$.

De fato, como o par (r, r) é admissível então usando (2.22) temos

$$\begin{aligned}
\sup_{[0,T]} \|G(u)(t) - U(t)u_0\|_{L^2} &\leq \sup_{[0,T]} \| \int_0^t U(t-t')\lambda(|u|^\alpha u(t'))dt' \|_{L^2} \\
&\leq c\left(\int_0^T \||u(t)|^{\alpha+1}\|_{L^{r'}}^{r'} dt\right)^{\frac{1}{r'}} \\
&= c\left(\int_0^T \|u(t)\|_{L^{r'(\alpha+1)}dt}^{r'(\alpha+1)}\right)^{\frac{1}{r'}} \\
&= c\left(\int_0^T \|u(t)\|_{L^r dt}^r\right)^{\frac{\alpha+1}{r}},
\end{aligned} \tag{2.59}$$

em que na última igualdade usamos os seguintes fatos:

$$r'(\alpha+1) = \left(\frac{2N+4}{N+4}\right)\left(1 + \frac{4}{N}\right) = 2 + \frac{4}{N} = r \text{ e } \frac{1}{r'} = \frac{\alpha+1}{r}.$$

Por outro lado, utilizando a Desigualdade Strichartz (2.17), segue-se

$$\begin{aligned}
\left(\int_0^T \|G(u)(t)\|_{L^r}^r dt\right)^{\frac{1}{r}} &\leq \|U(t)u_0\|_{L_T^r L_x^r} + \| \int_0^t U(t-t')(|u|^\alpha u(t'))dt' \|_{L_T^r L_x^r} \\
&\leq \|U(t)u_0\|_{L_T^r L_x^r} + c\left(\int_0^T \||u(t)|^{\alpha+1}\|_{L^{r'}}^{r'} dt\right)^{\frac{1}{r'}} \\
&\leq \|U(t)u_0\|_{L_T^r L_x^r} + c\left(\int_0^T \|u(t)\|_{L^r dt}^r\right)^{\frac{\alpha+1}{r}}.
\end{aligned} \tag{2.60}$$

Da Proposição 2.3 (aplicada a $u_0 = 0$), estimativas (2.59) e (2.60) temos que dado $\epsilon > 0$, existe $T > 0$ tal que se $u \in \widetilde{S}(T,a)$ temos

$$\|G(u)\|_T \leq c\epsilon + ca^{(\alpha+1)}. \tag{2.61}$$

Portanto, se

$$c\epsilon + ca^{(\alpha+1)} \leq a, \tag{2.62}$$

temos que $G(\widetilde{S}(a,T)) \subseteq \widetilde{S}(a,T)$.

Afirmação 2. G é uma contração.

De fato, como (r,r) é um par admissível então usando o mesmo argumento da prova do Teorema 2.2 (estimativa (2.42)), segue-se

$$\left(\int_0^T \|(G(u)-G(v))(t)\|_{L^r}^r dt\right)^{\frac{1}{r}} \leq ca^{\alpha}\left(\int_0^T \|(u-v)(t)\|_{L^r}^r dt\right)^{\frac{1}{r}}. \tag{2.63}$$

Assim, para

$$ca^{\alpha} < \frac{1}{2}, \tag{2.64}$$

temos que G é uma contração. Agora, fixando $\epsilon > 0$ tal que

$$c\epsilon^{\alpha} < \frac{1}{2}, \tag{2.65}$$

note que, (2.62) e (2.64) são verificados. Portanto, combinando as Afirmações 1 e 2 temos pelo teorema do ponto fixo de Banach existe uma única u tal que

$$G(u) = u.$$

Finalmente, para provar dependência contínua da solução em relação aos dados iniciais utilizamos o mesmo argumento da prova do Teorema 2.2.

■

Observação 2.4. O Teorema 2.2 nos diz que o PVI (2.1), no caso crítico, é *localmente bem colocado* em $L^2(\mathbb{R}^N)$. No entanto, a *boa colocação global* ainda está em aberto.

Conjectura. Com as mesmas condições do Teorema 2.3, temos que o PVI (2.1) é *bem posto globalmente* em $L^2(\mathbb{R}^N)$.

A seguir, mostraremos que, em caso particular, temos *boa colocação global.*

Corolário 2.3.1. *Existe* $0 < \epsilon_0 = \epsilon_0(N)$ *tal que para todo* $u_0 \in L^2(\mathbb{R}^N)$ *com a norma* $\|u_0\| < \epsilon_0$*, temos que a solução dada no Teorema 2.3 é global e ainda*

$$u \in C\left([0,\infty) : L^2(\mathbb{R}^N)\right) \bigcap L^r\left([0,\infty) : L^r(\mathbb{R}^N)\right), \tag{2.66}$$

em que $r = 2 + \frac{4}{N}$.

Demonstração. Da prova do Teorema 2.3 temos a seguinte estimativa (2.62), isto é,

$$c\epsilon + ca^{(\alpha+1)} \leq a.$$

Agora, tomando $\epsilon = \|u_0\|_{L^2}$ e $a = 2c\|u_0\|_{L^2}$ temos que a desigualdade acima é equivalente a

$$ca^{\alpha} < \frac{1}{2},$$

e assim obtemos que a estimativa (2.64) do Teorema 2.3 é verificada. Logo, como ϵ e a são independentes de T, segue-se que a solução dada no Teorema 2.3 é global.

$\blacksquare$

CAPÍTULO 3

Má Colocação Para a Equação de Schrödinger não Linear

Neste capítulo, estudaremos dois resultados de *má colocação* do problema de Cauchy (2.1). No primeiro resultado, mostraremos *má colocação* da equação (NLS) com dado inicial em $H^s(\mathbb{R}^N)$, com $\frac{N}{2} - \frac{2}{\alpha} < s < 0$ e no segundo resultado, mostraremos *má colocação* da equação (NLS) com a função Delta como dado inicial.

3.1 Má Colocação em $H^s(\mathbb{R}^N)$, para $\frac{N}{2} - \frac{2}{\alpha} < s < 0$

3.1.1 Introdução

O objetivo desta seção é estudar o problema de valor inicial (PVI) associado à equação de Schrödinger naõ linear, isto é,

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u + \lambda |u|^\alpha u = 0, & t \in \mathbb{R},\ x \in \mathbb{R}^N, \\ u(0,x) = u_0(x), \end{cases} \tag{3.1}$$

em que, $\lambda = \pm 1$ e $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^N)$.

No capítulo anterior estudamos *boa colocação* do PVI (3.1) em $L^2(\mathbb{R}^N)$. Depois disso, a seguinte questão é natural: será que temos *boa colocação* para valores de s negativos?

Argumento de Scaling

Afirmação. Se $u(t,x)$ é solução do PVI (3.1), então $u^a(t,x) = a^{\frac{2}{\alpha}} u(a^2 t, ax)$ também é solução de (3.1), com $a > 0$.

Demonstração. De fato,

$$\begin{aligned}
\partial_t u^a &= a^{\frac{2}{\alpha}}a^2 u(a^2t, ax)\\
\Delta u^a &= a^{\frac{2}{\alpha}}a^2 \Delta u(a^2t, ax)\\
|u^a|^\alpha u^a &= a^{\frac{2\alpha}{\alpha}}|u|^\alpha a^{\frac{2}{\alpha}}u(a^2t, ax).
\end{aligned}$$

Colocando em evidência $a^{\frac{2}{\alpha}}a^2$ e usando o fato que u é solução, segue-se

$$i\partial_t u^a + \Delta u^a + \lambda|u^a|^\alpha u^a = a^{\frac{2}{\alpha}}a^2(i\partial_t u + \Delta u + \lambda|u|^\alpha u) = a^{\frac{2}{\alpha}}a^2(0) = 0.$$

Isto é, u^a é solução de (3.1) com dado inicial $u_0^a = a^{\frac{2}{\alpha}}u_0(ax)$.

■

Agora queremos saber quantas derivadas são permitidas para $\|D^s u^a\|_{L^2}$ se tornar invariante. Tomando a derivada homôgenea de ordem s^* em $L^2(\mathbb{R}^N)$ obtemos

$$\begin{aligned}
\|D^{s^*}u_0^a\|_{L^2}^2 &= \|\widehat{D^{s*}u_0^a}\|_{L^2}^2 = \|(y)^{s^*}\widehat{u_0^a}\|_{L^2}^2 = \int_{\mathbb{R}^N}|y|^{2s^*}|u_0^a(y)|^2dy\\
&= \int_{\mathbb{R}^N} a^{\frac{4}{\alpha}}|y|^{2s^*}|a^{-N}\widehat{u_0}(\frac{y}{a})|^2dy = \int_{\mathbb{R}^N} a^{\frac{4}{\alpha}-N+2s^*}|z|^{2s^*}|\widehat{u_0}(z)|^2dz\\
&= a^{\frac{4}{\alpha}-N+2s^*}\|\widehat{D^{s^*}u_0}\|_{L^2}^2\\
&= a^{\frac{4}{\alpha}-N+2s^*}\|D^{s^*}u_0\|_{L^2}^2
\end{aligned}$$

em que utilizamos a fórmula de Parseval, a propriedade de dilatação (1.17) e a mudança de variável $z = \frac{y}{a}$. Portanto, $D^{s*}u_0^a$ é invariante se $\frac{4}{\alpha} - N + 2s^* = 0$, ou seja, $s^* = \frac{N}{2} - \frac{2}{\alpha}$.

O argumento de Scaling sugere que a *boa colocação* do PVI (3.1) deveria acontecer se $s \geq s^*$. Kenig, Ponce e Vega [13] mostraram que isso não é verdade para a equação (3.1) no caso particular, $\lambda = 1$, $N = 1$ e $\alpha = 2$, ou seja, se $-\frac{1}{2} < s < 0$ o PVI (3.1) é *mal colocado*, pois a aplicação dado - solução não é uniformemente contínua.

O objetivo desta seção é mostrar que esse resultado vale para dimensão N e para $0 < \alpha < \frac{4}{N}$ (isto foi sugerido em [13] (página 662, remark 3)). Mais precisamente, mostraremos o seguinte teorema.

Teorema 3.1. *Considere o PVI (3.1) e $u_0 \in H^s(\mathbb{R}^N)$. Se $\lambda = 1$, $0 < \alpha < \frac{4}{N}$ e $s \in \left(\frac{N}{2} - \frac{2}{\alpha}, 0\right)$, então a aplicação dado-solução não é uniformemente contínua, isto é,*

$$\forall\delta > 0,\ \exists\, c > 0,\ \textit{tal que}\ \|u_0^1 - u_0^2\|_{H^s(\mathbb{R}^N)} < \delta\ , \quad \textit{mas}\ \ \|u^1 - u^2\|_{C([-T,T]:H^s(\mathbb{R}^N))} \geq c.$$

Antes da prova deste teorema, enunciaremos dois resultados que serão utilizados na demonstração. O primeiro resultado não será provado pois é um resultado de EDP, do tipo elíptica, que não é o objetivo de nosso trabalho. No entanto, indicaremos precisamente onde encontrá-lo.

Considere a seguinte EDP elíptica

$$- f(x) + \Delta f(x) + |f(x)|^\alpha f(x) = 0 \ , \qquad x \in \mathbb{R}^N, \tag{3.2}$$

em que $\alpha > 0$. A existência de soluções da equação (3.2) em dimensão $N \geq 3$, foi provada por Strauss [21]. No caso bi-dimensional, foi provada por Berestycki, Gallouët and Kavian [3] e a unicidade de soluções de (3.2) foi provada por Kwong [14]. Resumimos esses resultados na seguinte proposição:

Proposição 3.1. *Sejam $N \geq 2$ e $0 < \alpha < \frac{4}{N-2}$ ($0 < \alpha < \infty$, $N = 2$). Então existe uma única solução positiva, esfericamente simétrica de (3.2) em $H^1(\mathbb{R}^N)$. Além disso, f e suas derivadas até ordem 2 decaem exponencialmente ao infinito.*

O outro resultado que será usado na demonstração é chamado invariância Galileana.

Proposição 3.2. *Se u é solução do PVI* (3.1), *então*

$$u_v(t,x) = e^{-it|v|^2 + i(v,x)} u(t, x - 2tv) \ , \ \ \forall \ v \in \mathbb{R}^N,$$

é solução de (3.1) *com dado inicial $u_v(0,x) = e^{i(v,x)} u_0$.*

Demonstração. Faça $A = -it|v|^2 + i(v,x)$. Usando a regra da cadeia, temos

$$\partial_t u_v = e^A \left(-i|v|^2 u(t, x - 2tv) - 2(\nabla u(t, x-2tv), v) + \partial_t u(t, x - 2tv) \right) \tag{3.3}$$

e

$$\Delta u_v = e^A \left(-|v|^2 u(t, x - 2tv) + 2i(\nabla u(t, x-2tv), v) + \Delta u(t, x - 2tv) \right). \tag{3.4}$$

Logo, utilizando (3.3) e (3.4), segue-se

$$\begin{aligned} i\partial_t u_v + \Delta u_v + \lambda |u_v|^\alpha u_v &= e^A \left(i\partial_t u + \Delta u + \lambda |u|^\alpha u \right) \\ &= e^A(0) = 0, \end{aligned}$$

em que a última igualdade usamos o fato que u é solução de (3.1). ∎

3.1.2 Prova do Teorema 3.1

Seja o PVI (3.1) com dado inicial

$$u_0(x) = f_w(x) = w^{\frac{2}{\alpha}} f(wx), \tag{3.5}$$

em que $f_1(x) = f(x)$ resolve a EDP elíptica (3.2). Então

$$u(t,x) = e^{itw^2} f_w(x), \tag{3.6}$$

é solução da equação (3.1).

De fato,

$$\begin{aligned} i\partial_t u + \Delta u + |u|^\alpha u &= e^{itw^2} w^2 w^{\frac{2}{\alpha}} \left(-f(wx) + \Delta f(wx) + |f(wx)|^\alpha f(wx)\right) \\ &= e^{itw^2} w^2 w^{\frac{2}{\alpha}} (0) = 0, \end{aligned}$$

em que na última igualdade usamos o fato que f é solução de (3.2).

Agora, considere o dado inicial

$$u_v(0,x) = e^{i(v,x)} u_0(x), \quad \forall\, v \in \mathbb{R}^N, \tag{3.7}$$

logo pela invariância Galileana temos que

$$u_v(t,x) = e^{-it|v|^2 + i(v,x)} u(t, x - 2tv), \tag{3.8}$$

é solução do PVI (3.1). Isto é,

$$u_v(t,x) = e^{-it|v|^2 + i(v,x)} e^{itw^2} f_w(x - 2tv) = e^{-it(|v|^2 - w^2) + i(v,x)} w^{\frac{2}{\alpha}} f\left(w(x - 2tv)\right). \tag{3.9}$$

Afirmação 1. Sejam $v_2 = v$, $v_1 = v - \frac{\delta}{|v|^a}$ e $w = |v|^{-a}$. Então

$$\|u_0^{v_1} - u_0^{v_2}\|_{H^s} < \delta,$$

em que $a = \frac{2\alpha s}{4 - N\alpha}$ e $u_0^{v_j} = u_{v_j}(0,x)$, com $j = 1, 2$.

De fato, sem perda de generalidade podemos supor que $\widehat{f}$ está concentrada na bola unitária. Logo, usando (1.16) e (1.17) obtemos

$$\widehat{f_w}(y) = w^{\frac{2}{\alpha}} w^{-N} \widehat{f}\left(\frac{y}{w}\right), \tag{3.10}$$

assim, $\widehat{f_w}$ concentra-se na bola $B_w(0) = \{y \in \mathbb{R}^N : |y| < w\}$.

Afirmação 2. Se $y \in B_w(\pm v)$, então $|y| \simeq |v|$ e $(1 + |y|^2)^s \simeq |v|^{2s}$, w e a com na Afirmação 1.

Com efeito, se $y \in B_w(\pm v)$ então $|y - v| \leq w$. Usando a Desigualdade Triangular temos

$$\begin{aligned} |v| - w \leq |v| - |v - y| &\leq |y| \leq |y - v| + |v| \leq w + |v|, \\ |v|(1 - |v|^{-1-a}) &\leq |y| \leq |v|(|v|^{-1-a} + 1). \end{aligned}$$

Como $s > \frac{N}{2} - \frac{2}{\alpha}$, então $-1 - a < 0$. Portanto, existem c_1 e c_2 tais que

$$c_1|v| \leq |y| \leq c_2|v|. \tag{3.11}$$

Agora, elevando ao quadrado e somando 1 a todos os termos de (3.11) obtemos

$$1 + c_1|v|^2 \leq 1 + |y|^2 \leq 1 + c_2|v|^2, \tag{3.12}$$

no entanto, como $c_1|v|^2 \le 1 + c_1|v|^2$ e $1 + c_2|v|^2 \le |v|^2(1 + c_2)$ temos

$$c_1|v|^2 \le 1 + |y|^2 \le (1 + c_2)|v|^2. \tag{3.13}$$

Finalmente, elevando ao expoente s a (3.13), tem-se

$$(1 + c_2)^s|v|^{2s} \le (1 + |y|^2)^s \le (c_1)^s|v|^{2s}, \tag{3.14}$$

isto é, $(1 + |y|^2)^s \simeq |v|^{2s}$.

Desta maneira, usando a Afirmação 2, segue-se

$$\begin{aligned}
\|u_0^{v_1} - u_0^{v_2}\|_{H^s}^2 &= \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |y|^2)^s |\widehat{u_0^{v_1}}(y) - \widehat{u_0^{v_2}}(y)|^2 dy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N} (1 + |y|^2)^s |\widehat{f_w}(y - v_1) - \widehat{f_w}(y - v_2)|^2 dy \\
&\le c|v|^{2s} \int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{f_w}(y - v_1) - \widehat{f_w}(y - v_2)|^2 dy,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\|u_0^{v_1} - u_0^{v_2}\|_{H^s}^2 \le c|v|^{2s} \int_{\mathbb{R}^N} |\widehat{f_w}(y - v_1) - \widehat{f_w}(y - v_2)|^2 dy. \tag{3.15}$$

Agora, considere $\beta(t) = y - tv_1 + (t - 1)v_2$ para $t \in [0, 1]$, a parametrização do segmento de reta $[y - v_2, y - v_1]$ e seja $g = \widehat{f_w} \circ \beta$. Logo, pelo Teorema Fundamental do Cálculo temos

$$g(1) - g(0) = \int_0^1 g'(t)dt.$$

Isto implica que

$$\widehat{f_w}(y - v_1) - \widehat{f_w}(y - v_2) = \int_0^1 \widehat{f_w}'(\beta(t))(\beta'(t))dt = \int_0^1 \Big(\nabla\widehat{f_w}(\beta(t)), \beta'(t)\Big)\, dt.$$

Logo, usando a Desigualdade de Cauchy-Schwarz e usando o fato que $\beta'(t) = v_2 - v_1$, obtemos

$$|\widehat{f_w}(y - v_1) - \widehat{f_w}(y - v_2)|^2 \le |v_2 - v_1|^2 \int_0^1 |\nabla\widehat{f_w}(\beta(t))|^2 dt. \tag{3.16}$$

Consequentemente, fazendo $z = \beta(t) = y - tv_1 + (t - 1)v_2$ e combinando (3.15), (3.16) e o Teorema de Fubini temos

$$\begin{aligned}
\|u_0^{v_1} - u_0^{v_2}\|_{H^s}^2 &\le c|v|^{2s}|v_2 - v_1|^2 \int_{\mathbb{R}^N} \int_0^1 |\nabla\widehat{f_w}(\beta(t))|^2 dtdy \\
&= c|v|^{2s}|v_2 - v_1|^2 \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\widehat{f_w}(\beta(t))|^2 dydt \\
&= c|v|^{2s}|v_2 - v_1|^2 \int_0^1 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\widehat{f_w}(z)|^2 dzdt \\
&= c|v|^{2s}|v_2 - v_1|^2 \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla\widehat{f_w}(z)|^2 dz.
\end{aligned}$$

Por outro lado, já que $\widehat{f_w}(z)=w^{\frac{2}{\alpha}}w^{-N}\widehat{f}(\frac{z}{w})$ implica que $\nabla\widehat{f_w}(z)=w^{\frac{2}{\alpha}-N}w^{-1}\nabla\widehat{f}(\frac{z}{w})$ e assim

$$\int_{R^N}|\nabla\widehat{f_w}(z)|^2dz=w^{(\frac{2}{\alpha}-N-1)2}\int_{R^N}|\nabla\widehat{f}(\frac{z}{w})|^2dz$$

Finalmente, fazendo $u=\frac{z}{w}$ e usando o fato que $f\in H^1(R^N)$ segue que

$$\begin{aligned}\|u_0^{v_1}-u_0^{v_2}\|_{H^s}^2 &\le c|v|^{2s}|v_2-v_1|^2w^{(\frac{2}{\alpha}-N-1)2}w^N\int_{R^N}|\nabla\widehat{f}(u)|^2du\\ &\le c|v|^{2s}|v_2-v_1|^2w^{(\frac{4}{\alpha}-N-2)}\\ &= c|v_2-v_1|^2|v|^{2s}|v|^{-a(\frac{4}{\alpha}-N-2)}\\ &= c|v_2-v_1|^2|v|^{2a}.\\ &= c\delta^2.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\|u_0^{v_1}-u_0^{v_2}\|_{H^s}\le c\delta.$$

Afirmação 3. Sejam u^1 e u^2 soluções de (3.1) associadas às condições iniciais $u_0^{v_1}$ e $u_0^{v_2}$ respectivamente. Então,

$$\|u^1-u^2\|_{C([-T,T]:H^s(\mathbb{R}^N))}\ge c.$$

De fato, considere $u^1(t)$ e $u^2(t)$ no tempo $t=T^*$. Provaremos primeiro que existe T^* tal que

$$\|u^1(T^*)-u^2(T^*)\|_{H^s}\ge c. \tag{3.17}$$

Utilizando a Afirmação 2 e a fórmula de Parseval, segue-se

$$\|u^1(T^*)-u^2(T^*)\|_{H^s}^2=\|(1+|y|)^{\frac{s}{2}}(u^1(T^*)-u^2(T^*))^\wedge\|_{L^2}^2\simeq|v|^{2s}\|u^1(T^*)-u^2(T^*)\|_{L^2}^2. \tag{3.18}$$

Agora, sem perda de generalidade podemos supor também que f está concentrada na bola unitária, então

$$u^j(T^*,x)=e^{-i(T^*|v_j|^2-(v_j,x)-T^*w^2)}w^{\frac{2}{\alpha}}f(w(x-2T^*v_j)),\ \ j=1,2, \tag{3.19}$$

está concentrada na bola $B_{w^{-1}}(2T^*v_j)$, j=1,2. Portanto, se escolhemos T^* tal que

$$2T^*|v_2-v_1|\gg w^{-1}=|v|^a, \tag{3.20}$$

temos que não há interação entre as soluções e

$$\|u^1(T^*)-u^2(T^*)\|_{L^2}^2\simeq\|u^1(T^*)\|_{L^2}^2+\|u^2(T^*)\|_{L^2}^2. \tag{3.21}$$

No entanto,

$$\|u^j(T^*)\|_{L^2}^2=\|u^j(0)\|_{L^2}^2=\|f_w\|_{L^2}^2=cw^{\frac{4}{\alpha}}w^{-N}. \tag{3.22}$$

Logo, combinando (3.18), (3.21) e (3.22), tem-se

$$\begin{aligned}
\|u^1(T^*) - u^2(T^*)\|_{H^s}^2 &\geq c|v|^{2s} w^{\frac{4}{\alpha}-N} \\
&= c|v|^{2s-a(\frac{4}{\alpha}-N)} \\
&= c|v|^{2s-\frac{2\alpha s}{4-\alpha N}(\frac{4-\alpha N}{\alpha})} \\
&= c,
\end{aligned}$$

isto é,

$$\|u^1(T^*) - u^2(T^*)\|_{H^s} \geq c.$$

Observe que, tomando $v_1 = v - \frac{\delta}{|v|^a}$ e $v_2 = v$ (igual à Afirmação 1), temos que (3.20) é equivalente a

$$T^* \frac{2\delta}{|v|^a} \gg |v|^a,$$

ou seja,

$$T^* \gg \frac{|v|^{2a}}{2\delta}. \tag{3.23}$$

Desta maneira, tomando T^* como em (3.23) obtemos

$$\|u^1 - u^2\|_{C([-T,T]:H^s(\mathbb{R}^N))} \geq \|u^1(T^*) - u^2(T^*)\|_{H^s} \geq c.$$

Portanto, das Afirmações 1 e 3 concluímos a prova do teorema.

Observação 3.1. O Teorema 3.1 não vale, quando $\lambda = -1$, pois, nesse caso, a função dada por (3.6), ou seja, $u(t,x) = e^{itw^2} f_w(x)$, não é solução da equação

$$i\partial_t u + \Delta u - |u|^\alpha u = 0.$$

O caso $\lambda = -1$ foi estudado por Christ, Colliander e Tao [8].

3.2 Má Colocação do Problema de Cauchy com a Função Delta como Dado Inicial

O objetivo desta seção é estudar o Problema de Cauchy (3.1) com $u_0 = \delta$, isto é,

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u \pm |u|^\alpha u = 0, & t > 0,\ x \in \mathbb{R}^N, \\ u(0,x) = \delta(x). \end{cases} \tag{3.24}$$

Provaremos que nesse caso a propriedade de persistência não é verificada, isto é, o PVI (3.24) é *mal colocado*. Antes de enunciar e provar o teorema, primeiro provaremos alguns resultados que serão usados em sua demonstração.

Proposição 3.3. *Seja a função* $u(t,x) = e^{-it|v|^2+i(v,x)}u(t, x-2tv)$ *onde* $v \in \mathbb{R}^N$, *então*

i) o Laplaciano de u *em relação a* v *é dado por*

$$\Delta_v u(t, x-2tv) = \left(\frac{iN}{2t} - \frac{|x-2tv|^2}{4t^2}\right) u(t, x-2tv) \tag{3.25}$$

ii) a função w *dada por* $w(t, x-2tv) = G(t)e^{\frac{i|x-2tv|^2}{4t}}$ *é solução da EDP* (3.25), *onde* G *é uma função que depende de* t.

Demonstração.

i) Faça $A = -it|v|^2 + i(v,x)$. Usando a regra da cadeia, temos a derivada de u em relação a v_j dada por

$$\begin{aligned} 0 &= \partial_{x_j}(e^A)u(t,x-2tv) + e^A\partial_{v_j}u(t,x-2tv) \\ 0 &= e^A[(-2tiv_j + ix_j)u(t,x-2tv) - 2t\partial_{v_j}u(t,x-2tv)]. \end{aligned}$$

Como e^A é diferente de zero, obtemos

$$2t\partial_{v_j}u(t,x-2tv) = i(x_j - 2tv_j)u(t,x-2tv). \tag{3.26}$$

Derivando novamente com relação a v_j e usando (3.26), segue-se

$$\begin{aligned} -4t^2\partial^2_{v_j^2}u(t,x-2tv) &= i(x_j-2tv_j)u(t,x-2tv) \\ &= i[-2tu(t,x-2tv) - (x_j-2tv_j)2t\partial_{v_j}u(t,x-2tv)] \\ &= i[-2tu(t,x-2tv) - (x_j-2tv_j)i(x_j-2tv_j)u(t,x-2tv)] \\ &= -2tiu(t,x-2tv) + (x_j-2tv_j)^2u(t,x-2tv). \end{aligned}$$

Consequentemente,

$$\partial^2_{v_j^2}u(t,x-2tv) = i\frac{u(t,x-2tv)}{2t} - \frac{(x_j-2tv_j)^2}{4t^2}u(t,x-2tv). \tag{3.27}$$

Finalmente, obtemos o Laplaciano de u em relação a v

$$\Delta_v u(t,x-2tv) = (\frac{iN}{2t} - \frac{|x-2tv|^2}{4t^2})u(t,x-2tv).$$

ii) $w(t,x-2tv) = G(t)e^{\frac{i|x-2tv|^2}{4t}}$ é solução da EDP (3.25).

Para verificar que w satisfaz a equação, primeiro achamos o Laplaciano de w

$$\Delta w(t,x-2tv) = G(t)\Delta(e^{\frac{i|x-2tv|^2}{4t}}). \tag{3.28}$$

No entanto,

$$\Delta(e^{\frac{i|x-2tv|^2}{4t}}) = e^{\frac{i|x-2tv|^2}{4t}}(\frac{iN}{2t} - \frac{|x-2tv|^2}{4t^2}), \tag{3.29}$$

de fato,

$$\begin{aligned}
\partial_{x_j}(e^{\frac{i|x-2tv|^2}{4t}}) &= e^{\frac{i|x-2tv|^2}{4t}} i\frac{x_j - 2tv_j}{2t} \\
\partial^2_{x_j^2}(e^{\frac{i|x-2tv|^2}{4t}}) &= e^{\frac{i|x-2tv|^2}{4t}} \frac{i}{2t} - \frac{(x_j - 2tv_j)^2}{4t^2} e^{\frac{i|x-2tv|^2}{4t}}.
\end{aligned}$$

Assim, obtemos o Laplaciano de $e^{\frac{i|x-2tv|^2}{4t}}$ dado por

$$\Delta(e^{\frac{i|x-2tv|^2}{4t}}) = e^{\frac{i|x-2tv|^2}{4t}}(\frac{iN}{2t} - \frac{|x-2tv|^2}{4t^2}).$$

Portanto, usando (3.29) em (3.28) e o fato que w é a multiplicação de G com a exponencial obtemos

$$\Delta w(t, x-2tv) = G(t)e^{\frac{i|x-2tv|^2}{4t}}(\frac{iN}{2t} - \frac{|x-2tv|^2}{4t^2}) = w(t, x-2tv)(\frac{iN}{2t} - \frac{|x-2tv|^2}{4t^2}).$$

Isto mostra o resultado desejado, ou seja, w é solução da EDP (3.25).

■

Proposição 3.4. *Seja a equação diferencial ordinária*

$$iG'(t) + \frac{iN}{2t}G(t) \pm |G(t)|^\alpha G(t) = 0. \tag{3.30}$$

Então a solução está dada por

$$G(t) = \begin{cases} \frac{a}{(it)^{N/2}} e^{\pm i|a|^\alpha log(t)} & se \;\; \alpha = \frac{2}{N}, \\ \frac{a}{(it)^{N/2}} e^{i\frac{|a|^\alpha}{1-\frac{N\alpha}{2}} t^{1-\frac{N\alpha}{2}}} & se \;\; \alpha \neq \frac{2}{N}, \end{cases} \tag{3.31}$$

em que $a \in \mathbb{C}$.

Demonstração. Dividiremos a prova em dois casos.

1. **C**aso $\alpha = \frac{2}{N}$. Considere $B = \pm i|a|^\alpha log(t)$. Um cálculo direto nos fornece

$$G'(t) = -\frac{Na}{i^{\frac{N}{2}} 2(t)^{\frac{N}{2}+1}} e^B \pm \frac{ia|a|^\alpha}{i^{\frac{N}{2}} t^{\frac{N}{2}} t} e^B. \tag{3.32}$$

$$|G(t)|^\alpha G(t) = \frac{|a|^\alpha}{t^{\frac{N\alpha}{2}}} e^B \frac{a}{i^{\frac{N}{2}} t^{\frac{N}{2}}}. \tag{3.33}$$

Logo, como $\alpha = \frac{2}{N}$ e usando (3.32)-(3.33), segue-se

$$\begin{aligned}
iG'(t) + \frac{iN}{2t}G(t) \pm |G(t)|^\alpha G(t) &= \frac{ie^B}{i^{\frac{N}{2}}}\left[(-\frac{Na}{2t^{\frac{N}{2}+1}} \pm \frac{ia|a|^\alpha}{t^{\frac{N}{2}+1}}) + \frac{Na}{2t^{\frac{N}{2}+1}} \pm \frac{|a|^\alpha}{t^{\frac{N\alpha}{2}}}\frac{a}{t^{\frac{N}{2}}}\right] \\
&= \frac{e^B}{i^{\frac{N}{2}}}\left(-i\frac{Na}{2t^{\frac{N}{2}+1}} \mp \frac{a|a|^\alpha}{t^{\frac{N}{2}+1}} + \frac{iN}{2t}\frac{a}{t^{N/2}} \pm \frac{|a|^\alpha}{t}\frac{a}{t^{\frac{N}{2}}}\right) \\
&= \frac{e^B}{i^{\frac{N}{2}}}(0) = 0.
\end{aligned}$$

Portanto G é solução de (3.30).

2. **C**aso $\alpha \neq \frac{2}{N}$. Considere $C = i\frac{|a|^\alpha}{1-\frac{N\alpha}{2}}t^{1-\frac{N\alpha}{2}}$. Novamente um cálculo direto nos dá

$$G'(t) = \frac{1}{i^{\frac{N}{2}}}\left(-\frac{Na}{2t^{\frac{N}{2}+1}} \pm \frac{ia|a|^\alpha}{t^{\frac{N}{2}}t^{\frac{N\alpha}{2}}}\right)e^C. \tag{3.34}$$

$$|G(t)|^\alpha G(t) = \frac{|a|^\alpha}{t^{\frac{N\alpha}{2}}}e^C\frac{1}{i^{\frac{N}{2}}}\frac{a}{t^{\frac{N}{2}}}. \tag{3.35}$$

Logo, usando (3.34)-(3.35), segue-se

$$\begin{aligned} iG'(t) + \frac{iN}{2t}G(t) \pm |G(t)|^\alpha G(t) &= \frac{ie^C}{i^{\frac{N}{2}}}\left[(-\frac{Na}{2t^{\frac{N}{2}+1}} \pm \frac{ia|a|^\alpha}{t^{\frac{N}{2}}t^{\frac{N\alpha}{2}}}) + \frac{iN}{2t}\frac{a}{t^{N/2}} \pm \frac{|a|^\alpha}{t^{\frac{N\alpha}{2}}}\frac{a}{t^{\frac{N}{2}}}\right] \\ &= \frac{e^C}{i^{\frac{N}{2}}}\left(-i\frac{Na}{2t^{\frac{N}{2}+1}} \mp \frac{a|a|^\alpha}{t^{\frac{N}{2}}t^{\frac{N\alpha}{2}}} + \frac{iN}{2t}\frac{a}{t^{N/2}} \pm \frac{|a|^\alpha}{t^{\frac{N\alpha}{2}}}\frac{a}{t^{\frac{N}{2}}}\right) \\ &= \frac{e^C}{i^{\frac{N}{2}}}(0) = 0. \end{aligned}$$

Portanto G é solução de (3.30).

■

A seguir, enunciaremos e provaremos o teorema de má colocação do problema de Cauchy (3.24), com a função Delta como dado inicial.

Teorema 3.2. *Não há solução fraca u para o PVI (3.24) na classe*

$$u, |u|^\alpha u \in L^\infty([0,\infty) : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)) \;\; com \;\; \lim_{t\to 0^+} u(t,.) = \delta \;\; em \;\; \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N),$$

ou existe mais que uma.

Demonstração.

Suponha que $u = u(t,x)$ com $u, |u|^\alpha u \in L^\infty([0,\infty) : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N))$, é a única solução fraca do PVI (3.24). Isto é, para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N+1})$, tem-se

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^\infty (iu\partial_t\varphi - u\Delta\varphi \mp \varphi|u|^\alpha u)(t,x)dtdx = \varphi(0).$$

Seja $v \in \mathbb{R}^N$, então $e^{iv.x}\delta = \delta$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. De fato, como $e^{iv.x} \in \mathbb{Q}(\mathbb{R}^N)$ e usando (1.27) temos

$$< e^{iv.x}\delta, \varphi > = < \delta, e^{iv.x}\varphi > = e^{iv.0}\varphi(0) = \varphi(0) = < \delta, \varphi > \quad \forall\, \varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N).$$

Agora, usando a invariância Galileana, obtemos

$$u_v(t,x) = e^{-it|v|^2 + i(v,x)}u(t, x - 2tv)\ , \ \ \forall\, v \in \mathbb{R}^N.$$

Afirmação 1. u_v também é solução fraca de (3.24).

De fato, considere $\psi(t,x) = e^A\varphi(x - 2tv)$, em que $A = -it|v|^2 + i(v,x)$. Temos que $\psi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N+1})$, pois $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^{N+1})$ e $e^A \in \mathbb{Q}$. Logo, fazendo $y = x - 2tv$ temos

$$\int_{\mathbb{R}^N}\int_0^\infty (iu_v\partial_t\varphi - u_v\Delta\varphi \mp \varphi|u_v|^\alpha u_v)(t,x)dtdx = \int_{\mathbb{R}^N}\int_0^\infty ie^A u(t,y)\partial_t\varphi(t, y + 2tv)dtdy$$

$$
\begin{aligned}
&- \int_{\mathbb{R}^N}\int_0^\infty e^A u(t,y)\left(\Delta\varphi(t,y+2tv) \pm \varphi(t,y+2tv)|u(t,y)|^\alpha\right) dtdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\int_0^\infty iu(t,y)\partial_t\left(e^A\varphi(t,y+2tv)\right) dtdy - \int_{\mathbb{R}^N}\int_0^\infty u(t,y)\Delta\left(e^A\varphi(t,y+2tv)\right) dtdy \\
&\mp \int_{\mathbb{R}^N}\int_0^\infty |u(t,y)|^\alpha u(t,y)e^A\varphi(t,y+2tv)dtdy \\
&= \int_{\mathbb{R}^N}\int_0^\infty \left(iu\partial_t\psi - u\Delta\psi \mp \psi|u|^\alpha u\right)(t,y)dtdy \\
&= \psi(0) = \varphi(0),
\end{aligned}
$$

em que a última igualdade usamos o fato que u é solução fraca. Portanto u_v também e solução fraca de (3.24).

No entanto, pela suposição da unicidade da solução fraca de (3.24), segue-se

$$u(t,x) = u_v(t,x) = e^{-it|v|^2+iv.x}u(t,x-2tv). \tag{3.36}$$

Logo, pela Proposição 3.3(i), o Laplaciano de u em relação a v em (3.36) é dado por

$$\Delta u(t,x-2tv) = \left(\frac{iN}{2t} - \frac{|x-2tv|^2}{4t^2}\right)u(t,x-2tv). \tag{3.37}$$

Combinando a mudança de variável $y = x - 2tv$ e (3.37), temos a seguinte EDP

$$\Delta u(t,y) = \left(\frac{iN}{2t} - \frac{|y|^2}{4t^2}\right)u(t,y), \tag{3.38}$$

assim, pela Proposição 3.3(ii) a solução de (3.38) está dada por

$$u(t,y) = G(t)e^{\frac{i|y|^2}{4t}}. \tag{3.39}$$

Por outro lado, se G é escolhido tal que $u(t,y)$ resolva a equação em (3.24), obtemos a seguinte EDO

$$iG'(t) + \frac{iN}{2t}G(t) \pm |G(t)|^\alpha G(t) = 0. \tag{3.40}$$

De fato,

$$
\begin{aligned}
\partial_t u &= e^{\frac{i|y|^2}{4t}}\left(G'(t) - \frac{i|y|^2}{4t^2}G(t)\right), \\
\Delta_y u &= \left(\frac{iN}{2t} - \frac{|y|^2}{4t^2}\right)u(t,y) = \left(\frac{iN}{2t} - \frac{|y|^2}{4t^2}\right)G(t)e^{\frac{i|y|^2}{4t}}, \\
|u|^\alpha u &= |G(t)|^\alpha G(t)e^{\frac{i|y|^2}{4t}}.
\end{aligned}
$$

Então, $i\partial_t u + \Delta_y u \pm |u|^\alpha u \ = \ 0$ é equivalente a

$$iG'(t) + \frac{|y|^2}{4t^2}G(t) + \left(\frac{iN}{2t} - \frac{|y|^2}{4t^2}\right)G(t) \pm |G(t)|^\alpha G(t) = 0$$

e obtemos (3.40).

Consequentemente, temos que a solução da EDO (3.40), pela Proposição 3.4 está dada por

$$G(t) = \begin{cases} \frac{a}{(it)^{N/2}} e^{\pm i|a|^\alpha log(t)} & , \text{ se } \alpha = \frac{2}{N}, \\ \frac{a}{(it)^{N/2}} e^{i\frac{|a|^\alpha}{1-\frac{N\alpha}{2}} t^{1-\frac{N\alpha}{2}}} & , \text{ se } \alpha \neq \frac{2}{N}. \end{cases} \tag{3.41}$$

Portanto, combinando (3.41), (3.39) e voltando a variável x, segue-se

$$u(t,x) = \begin{cases} \frac{a}{(it)^{N/2}} e^{\pm i|a|^\alpha log(t) + i\frac{|x|^2}{4t}} & , \text{ se } \alpha = \frac{2}{N}, \\ \frac{a}{(it)^{N/2}} e^{i\frac{|a|^\alpha}{1-\frac{N\alpha}{2}} t^{1-\frac{N\alpha}{2}} + i\frac{|x|^2}{4t}} & , \text{ se } \alpha \neq \frac{2}{N}. \end{cases} \tag{3.42}$$

No entanto, na demonstração do Lema 3.1 que será provado a seguir temos que

$$\lim_{t\to 0^+} u(t,.) \text{ não existe em } \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$$

e isto contradiz o fato que $\lim_{t\to 0^+} u(t,.) = \delta$ em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$. ■

Antes de mostrar o lema, vamos definir o espaço de Besov $\mathcal{B}^{2,\infty}_{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^N)$.

Definição 3.1. *Definimos o espaço de Besov* $\mathcal{B}^{2,\infty}_{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^N)$, *como um subespaço das distribuições temperadas, isto é,*

$$\mathcal{B}^{2,\infty}_{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^N) = \{f \in \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N) \ : \|f\|_{\mathcal{B}^{2,\infty}_{-\frac{1}{2}}} < \infty\},$$

em que

$$\|f\|_{\mathcal{B}^{2,\infty}_{-\frac{1}{2}}} = \sup_j \left\{ 2^{-j} \int_{2^j<|y|<2^{j+1}} |\widehat{f}(y)|^2 dy \right\}.$$

Observação 3.2. $\mathcal{B}^{2,\infty}_{-\frac{1}{2}}(\mathbb{R}^N)$ é um espaço de Banach. Para mais detalhes sob os espaços de Besov (veja [2]).

Lema 3.1. *Seja* $\alpha \geq \frac{2}{N}$, *então o PVI*

$$\begin{cases} i\partial_t u + \Delta u \pm |u|^\alpha u = 0, & t < 1, \ x \in \mathbb{R}^N, \\ u(1,x) = \frac{a}{(i)^{N/2}} e^{\frac{i|x|^2}{4}}, & se \ \ \alpha = \frac{2}{N}, \\ u(1,x) = \frac{a}{(i)^{N/2}} e^{i\frac{|a|^\alpha}{1-\frac{N\alpha}{2}} + i\frac{|x|^2}{4}}, & se \ \ \alpha \neq \frac{2}{N}, \end{cases} \tag{3.43}$$

é mal colocado em $C\left([0,1] : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)\right) \bigcap L^\infty\left([0,1] : \mathcal{B}^{2,\infty}_{-1/2}(\mathbb{R}^N)\right)$.

Demonstração.

Temos que (3.42) resolve o PVI (3.43), isto é, a função u

$$u(t,x) = \begin{cases} \frac{a}{(it)^{N/2}} e^{\pm i|a|^\alpha log(t) + i\frac{|x|^2}{4t}} & , \text{ se } \alpha = \frac{2}{N}, \\ \frac{a}{(it)^{N/2}} e^{i\frac{|a|^\alpha}{1-\frac{N\alpha}{2}} t^{1-\frac{N\alpha}{2}} + i\frac{|x|^2}{4t}} & , \text{ se } \alpha \neq \frac{2}{N} \end{cases} \tag{3.44}$$

em que $a \in \mathbb{C}$, satisfaz a equação de Schrödinger não linear

$$i\partial_t u + \Delta u \pm |u|^\alpha u = 0, \quad t > 0,\ x \in \mathbb{R}^N.$$

Usando a Proposição 2.2 temos que a transformada de Fourier de u na variável x é dada por

$$\widehat{u}(t,y) = \begin{cases} cae^{\pm i|a|^\alpha log(t)} e^{-it|y|^2} & , \text{ se } \alpha = \frac{2}{N}, \\ cae^{i\frac{|a|^\alpha}{1-\frac{N\alpha}{2}} t^{1-\frac{N\alpha}{2}}} e^{-it|y|^2} & , \text{ se } \alpha \neq \frac{2}{N}. \end{cases} \tag{3.45}$$

Assim,

$$|\widehat{u}(t,y)| = |ca|,$$

e consequentemente,

$$u \in L^\infty\left([0,1] : \mathcal{B}^{2,\infty}_{-1/2}(\mathbb{R}^N)\right). \tag{3.46}$$

De fato, usando coordenadas polares, segue-se

$$\begin{aligned} \|u\|_{L^\infty([0,1]:\mathcal{B}^{2,\infty}_{-1/2}(\mathbb{R}^N))} &= \sup_{0\le t\le 1}\left(\sup_j 2^{-j}\int_{2^j<|y|<2^{j+1}} |\widehat{u}(t,y)|^2 dy\right) \\ &= \sup_{0\le t\le 1}\left(\sup_j 2^{-j}\int_{2^j<|y|<2^{j+1}} |ca|^2 dy\right) \\ &= \sup_{0\le t\le 1}\left(\sup_j 2^{-j}|ca|^2\int_{2^j}^{2^{j+1}}\int_{S^{N-1}} r^{N-1} d\sigma dr\right) \\ &= c(N)\sup_{0\le t\le 1}\left(\sup_j 2^{-j} r^N \Big|_{2^j}^{2^{j+1}}\right) < \infty. \end{aligned}$$

Provaremos agora que $\lim_{t\to 0^+} u(t,.)$ não existe em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$, e portanto

$$u \notin C\left([0,1] : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)\right).$$

De fato, usando a fórmula de Parseval, para todo $\varphi \in \mathcal{S}(\mathbb{R}^N)$ temos

$$< u(t,x), \varphi(x) >=< \widehat{u}(t,y), \widehat{\varphi}(y) > \tag{3.47}$$

$$< \widehat{u}(t,y), \widehat{\varphi}(y) >= \begin{cases} cae^{\pm i|a|^\alpha log(t)} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-it|y|^2}\widehat{\varphi}(y)dy & , \text{ se } \alpha = \frac{2}{N}, \\ cae^{i\frac{|a|^\alpha}{1-\frac{N\alpha}{2}} t^{1-\frac{N\alpha}{2}}} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-it|y|^2}\widehat{\varphi}(y)dy & , \text{ se } \alpha \neq \frac{2}{N}. \end{cases} \tag{3.48}$$

Combinando (3.47) e (3.48), temos

$$< u(t,x), \varphi(x) >= A(t)b(t), \tag{3.49}$$

em que

$$b(t) = \int_{\mathbb{R}^N} e^{-it|y|^2}\widehat{\varphi}(y)dy$$

e

$$A(t) = \begin{cases} cae^{\pm i|a|^\alpha log(t)} & , \quad \text{se} \quad \alpha = \frac{2}{N}, \\ cae^{i\frac{|a|^\alpha}{1-\frac{N\alpha}{2}}t^{1-\frac{N\alpha}{2}}} & , \quad \text{se} \quad \alpha \neq \frac{2}{N}. \end{cases} \tag{3.50}$$

Observe que,

$$\lim_{t\to 0^+} b(t) = \lim_{t\to 0^+} \int_{\mathbb{R}^N} e^{-it|y|^2}\widehat{\varphi}(y)dy = \int_{\mathbb{R}^N} \widehat{\varphi}(y)dy =< \delta, \varphi >, \tag{3.51}$$

onde na igualdade acima usamos o Teorema da Convergência Dominada e a fórmula de inversão (1.22).

Por outro lado, temos que

$$\lim_{t\to 0^+} A(t) \quad \text{não existe.} \tag{3.52}$$

De fato, dividimos a demonstração em dois casos

Caso (I). $\alpha = \frac{2}{N}$. Seja $t = 10^{\frac{-n\pi}{|a|^\alpha}}$, então

$$\begin{aligned} \lim_{t\to 0^+} A(t) &= ca \lim_{n\to\infty} e^{\pm i|a|^\alpha log\left(10^{\frac{-n\pi}{|a|^\alpha}}\right)} = ca \lim_{n\to\infty} e^{\mp in\pi} \\ &= ca \lim_{n\to\infty} \cos(n\pi) = ca \lim_{n\to\infty} (-1)^n, \end{aligned}$$

e portanto não existe o limite.

Caso (II). $\alpha \neq \frac{2}{N}$. Como $\alpha > \frac{2}{N}$, então $1 - \frac{N\alpha}{2} < 0$. Assim

$$\lim_{t\to 0^+} A(t) = ca \lim_{t\to 0^+} e^{i\frac{|a|^\alpha}{1-\frac{N\alpha}{2}}t^{1-\frac{N\alpha}{2}}} = cae^{i\frac{|a|^\alpha}{1-\frac{N\alpha}{2}}\lim_{t\to 0^+} t^{1-\frac{N\alpha}{2}}},$$

não existe.

Finalmente de (3.49), (3.51) e (3.52), concluímos que $\lim_{t\to 0^+} u(t,.)$ não existe em $\mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)$.

Portanto o PVI (3.43) é mal colocado em

$$C\left([0,1] : \mathcal{S}'(\mathbb{R}^N)\right) \bigcap L^\infty\left([0,1] : \mathcal{B}^{2,\infty}_{-1/2}(\mathbb{R}^N)\right).$$

■

Referências Bibliográficas

[1] R. Adams - *Sobolev Spaces*, Academic Press, New York, 1975.

[2] H. Bahori, J-Y. Chemin and R. Danchin - *Fourier Analysis and Nonlinear Partial Differential Equations*, Grundlehren der mathematischen Wissenschaften 343, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, 2011.

[3] H. Berestycki, T. Gallouët and O. Kavian - *Équations de champs scalaires Euclidiens non linéaires dans le plan*, C.R. Acad. Sci. Paris Sér. I Math. 297 (1983), 307-310.

[4] L. Bergé - *Wave Collapse in Physics: Principles and Applications to light and plasma waves*, Phys. Rep.303: (1998), 259-370.

[5] H. Brézis - *Análisis funcional: Teoría y aplicaciones*, Versão Espanhola traduzida por Juan Ramón Esteban, París, Masson, 1983.

[6] T. Cazenave - *Semilinear Schrödinger Equations*, Courant Lecture Notes 10, American Mathematical Society, 2003.

[7] T. Cazenave and F. Weissler - *The Cauchy Problem for the Crítical Nonlinear Schrödinger Equation in H^s*, Nonlinear Anal. TMA 14 (1990) 807-836.

[8] M. Christ, J. Colliander, and T. Tao - *Ill-posedness for Schrödinger and wave equations*,\prepint,arxivmath/0311048v1[math.AP].

[9] J. Ginibre and G. Velo - *On the Class of Nonlinear Schrödinger Equations*, J. Funct. Anal. 32 (1979), 1-32, 33-72.

[10] D. Gilbarg, N. S. Trudinger - *Elliptic Partial Differential Equations of Second Order*, Springer-Verlag, Berlin, 2001.

[11] R. Iório e V. Iório - *Equações Diferenciais Parciais: uma introdução*. Projeto Euclides, Rio de Janeiro: IMPA (1988).

[12] M. Keel and T. Tao - *Endpoint Strichartz estimates*, Amer. J. Math., 120 (1998), 955-980.

[13] C. Kenig, G. Ponce e L.Vega - *On The Ill-Posedness of Some Canonical Dispersive Equations*, Duke Math.J.106 (2001) 617-633.

[14] K. M. Kwong - *Uniqueness of positive solutions* $\Delta f - f + f^p = 0$ *in* $\mathbb{R}^N$, Arch. Rational Mech. Anal. 105 (1989), 243-266.

[15] E. L. Lima - *Espaços Métricos*, Rio de Janeiro, Impa - CNPq, 2008.

[16] F. Linares and G. Ponce - *Introduction to nonlinear dispersive equations*, Springer, New York, 2008.

[17] A. Newell - *Solitons in Mathematics and Physics*, Regional Conference Series in Applied Math. 48, SIAM, 1985.

[18] A. Ortiz - *Topicos Sobre Ecuaciones En Derivada Parciales*, Lima, Pucp, 2004.

[19] D. Renardy and R. Roges - *An Introduction to Partial Differential Equations*, Springer-Verlag,New York, 1992.

[20] A. Scott, F. Chu, and D. McLaughlin - *The Soliton: a new concept in applied science*, Proc. IEEE 97 (1973), 1143-1183.

[21] W. Strauss - *Existence of solitary waves in higher dimensions*, Comm. Math. Phys. 55 (1977), 149-162

[22] C. Sulem and P. Sulem - *The Nonlinear Schrödinger Equation. Self-focusing and Wave Collapse*, Applied Mathematical Sciences, 139. Springer, New York, 1999.

[23] Y. Tsutsumi - L^2 *Solutions for Nonlinear Schrödinger Equations and Nonlinear Groups*, Funk. Ekva. 30 (1987), 115-125.

[24] V. Zakharov and A. Shabat - *Exact Theory of two Dimensional Self- Modulation of Waves in Nonlinear Media*, Sov. Phys. J.E.T.P. 34 (1972), 62-69.