

Universidade Federal de Minas Gerais  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

# Passeio Aleatório Bidimensional e Tempo Local

José Jozelmo Grangeiro Vieira

**Belo horizonte  
2012**



Universidade Federal de Minas Gerais  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

# Passeio Aleatório Bidimensional e Tempo Local

José Jozelmo Grangeiro Vieira

Dissertação apresentada à banca examinadora do corpo docente de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Sacha Friedli

**Belo Horizonte  
2012**

Vieira, J. J. G.

Passeio Aleatório Bidimensional e Tempo Local

51 páginas

Dissertação - Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais. Departamento de Matemática.

1. Passeio aleatório

2. Tempo local

I. Universidade Federal de Minas Gerais. Instituto de Ciências Exatas. Departamento de Matemática.

## Banca Examinadora:

---

Prof. Rémy de Paiva Sanches  
Universidade Federal de Minas Gerais  
Departamento de Matemática

---

Prof<sup>a</sup>. Aniura Milanês Barrientos  
Universidade Federal de Minas Gerais  
Departamento de Matemática

---

Prof.  
Sacha Friedli (Orientador)  
Universidade Federal de Minas Gerais  
Departamento de Matemática

*À minha família.*

## Agradecimentos

Agradeço a Deus, por esta conquista e por todas as outras que tenho alcançado.

Ao Sacha, por toda sua dedicação e paciência e por seus ensinamentos. Ele é parte fundamental deste trabalho.

Ao Cnpq, pelo apoio financeiro.

A meus pais, Sr. José e Dona Cecé, por todo amparo durante todo o período acadêmico. O que sou hoje devo tudo a eles.

A todos os meus irmãos: Jossi que, mesmo de longe, certamente torcia por mim, Lucinha, Celinha, Lene e em especial a Jocélio que me deu muito apoio no início desta caminhada.

Aos professores do departamento, em especial ao Bernardo que me ajudou chegar até aqui. Ao Rémy e à Aniura, por comporem a banca.

Aos meus amigos da Matemática, pelo companheirismo.

Às meninas da secretaria, Andréa e Kelli. E a todos os outros que participaram mesmo que indiretamente deste projeto.

Obrigado a todos.





## Resumo

Considere o passeio aleatório simples simétrico na rede  $\mathbb{Z}^d$  iniciado na origem e denotado por  $(X_n)_{n \geq 0}$ . É bem conhecido que o passeio é *recorrente*, quando  $d = 1, 2$ , e é *transiente* quando  $d \geq 3$ . Para  $x \in \mathbb{Z}^d$  denotamos por  $L_n^x$  o *tempo local em  $x$  até o tempo  $n$* , ou seja,

$$L_n^x := \sum_{i=0}^n 1_{\{X_i=x\}}.$$

Assim, também definimos

$$L_n^* := \max_{x \in \mathbb{Z}^d} L_n^x,$$

que representa o número de visitas ao sítio mais visitado na rede  $\mathbb{Z}^d$  pelo passeio até o tempo  $n$ .  $L_n^*$  é chamado de *tempo local máximo* do passeio aleatório até o tempo  $n$ . O objetivo deste trabalho é estudar o comportamento assintótico do tempo local máximo no limite quando  $n \rightarrow \infty$ , em  $d \geq 2$ . Para dimensões  $d \geq 3$ , Erdős e Taylor [1] mostraram que o tempo local máximo para o passeio aleatório é da ordem de  $\log n$ , ou seja,

$$\frac{L_n^*}{\log n} \rightarrow \lambda_d, \text{ q.c. ,}$$

em que  $\lambda_d$  é uma constante que depende da dimensão  $d$ . Quando  $d = 2$ , Erdős e Taylor conjecturaram que

$$\frac{L_n^*}{(\log n)^2} \rightarrow \frac{1}{\pi}, \text{ q.c. .}$$

A conjectura foi provada por A. Dembo, Y. Peres, J. Rosen e O. Zeitouni em [2] e novamente por J. Rosen em seu trabalho *A random walk proof of the Erdős-Taylor Conjecture*, de 2005 [3].



# Sumário

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>3</b>
1.1	Passeio aleatório . . . . .	3
1.1.1	Recorrência e Transiência . . . . .	3
1.1.2	Probabilidade de escapar . . . . .	4
1.2	Tempo local em $\mathbb{Z}^d$ . . . . .	8
<b>2</b>	<b>Tempo local em <math>\mathbb{Z}^2</math></b>	<b>13</b>
2.1	Cota superior para o tempo local em $\mathbb{Z}^2$ . . . . .	13
2.2	Função de Green e Pontos bem visitados . . . . .	15
2.2.1	Função de Green . . . . .	16
2.2.2	Pontos bem visitados . . . . .	19
2.3	Cota inferior para o tempo local em $\mathbb{Z}^2$ . . . . .	22
2.4	Prova do Lema Principal . . . . .	24
2.4.1	Pontos bem cercados . . . . .	25
2.5	Prova da Proposição 2.3 . . . . .	34
2.5.1	Prova do primeiro item . . . . .	34
2.5.2	Prova do segundo item . . . . .	42
<b>3</b>	<b>Apêndice</b>	<b>45</b>
3.1	Prova da Proposição 2.1 . . . . .	45
3.2	Prova do Lema 2.7 . . . . .	47
3.3	Estimativas . . . . .	48



## Notação

Para duas funções  $f$  e  $g$ , escreveremos  $f \simeq g$ , quando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{f(n)}{g(n)} = c_1,$$

para alguma constante  $c_1 \neq 0$ . Escreveremos, também  $f \sim g$ , quando

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log f(n)}{\log g(n)} = c_2,$$

para alguma constante  $c_2 \neq 0$ . Além disso, dizemos que

$$f(n) = O(g(n)),$$

quando  $n \rightarrow \infty$  se, e somente se, existem uma constante positiva  $c_3$  e  $n_0$ , tais que

$$|f(n)| \leq c_3 |g(n)|,$$

para todo  $n > n_0$ . Dizemos, também, que

$$f(n) = o(g(n)),$$

quando  $n \rightarrow \infty$  se, e somente se, para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $n_0$  tal que  $n > n_0$  implica

$$|f(n)| \leq \varepsilon |g(n)|.$$

Usaremos  $\#A$  para denotar a cardinalidade do conjunto  $A$ . Para denotar o complementar de  $A$ , usaremos  $A^c$ . Para  $x \in \mathbb{R}$ ,  $\lfloor x \rfloor$  denotará o maior inteiro, menor ou igual a  $x$ . Enquanto  $\lceil x \rceil$  denotará o menor inteiro, maior ou igual a  $x$ .  $|\cdot|$  denotará a norma do máximo em  $\mathbb{Z}^d$ , ou seja, para  $x \in \mathbb{Z}^d$   $|x| = \max\{|x_1|, \dots, |x_d|\}$ .



# Capítulo 1

## Introdução

Na Seção 1.1 definiremos o passeio aleatório simples simétrico e iremos estudar a recorrência e transiência do passeio. Na Seção 1.2 definiremos o tempo local máximo iremos provar o seu comportamento assintótico para  $d \geq 3$ . O material deste capítulo introdutório segue essencialmente o trabalho de Erdős e Taylor, [1].

### 1.1 Passeio aleatório

Considere uma sequência  $(\xi_j)_{j \geq 1}$  de variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas, definidas no mesmo espaço de probabilidade e que assumem valores no conjunto  $\{\pm e_1, \dots, \pm e_d\}$ , onde os  $e_i$ 's denotam os vetores da base canônica de  $\mathbb{R}^d$ . Em outras palavras, para todo  $j \geq 1$ ,

$$P(\xi_j = \pm e_i) = \frac{1}{2d}, \quad \forall i = 1, \dots, d.$$

Definimos a sequência de variáveis aleatórias  $(X_n)_{n \geq 0}$  por  $X_0 := x_0$ , para um ponto inicial  $x_0 \in \mathbb{Z}^d$  fixo, e  $X_n := X_0 + \sum_{j=1}^n \xi_j$  para  $n \geq 1$ . A sequência  $(X_n)_{n \geq 0}$  é uma Cadeia de Markov com espaço de estados  $\mathbb{Z}^d$  chamada *passeio aleatório simples simétrico iniciando em  $x_0$* . Usaremos  $P_{x_0}$  e  $E_{x_0}$  para denotar a distribuição e a esperança do passeio, respectivamente, iniciado no ponto  $x_0$  ( $X_0 = x_0$ ). Quando o passeio iniciar na origem ( $x_0 = 0$ ), escreveremos apenas  $P \equiv P_0$  e  $E \equiv E_0$ .

#### 1.1.1 Recorrência e Transiência

Seja  $X = (X_n)_{n \geq 0}$  um passeio aleatório simples em  $\mathbb{Z}^d$ , com  $X_0 = 0$ . Denotamos por  $\mathcal{T}$  o tempo do primeiro retorno à origem:

$$\mathcal{T} := \inf\{i > 0 : X_i = 0\},$$

com a convenção que  $\inf \emptyset := \infty$ . Dizemos que o passeio é *recorrente* se  $P(\mathcal{T} < \infty) = 1$ , ou seja, quase certamente o passeio volta à origem em um tempo finito. Caso contrário dizemos que o passeio é *transiente*.

Se o passeio é transiente ele pode sair do ponto inicial e não retornar, neste caso  $P(\mathcal{T} = \infty) > 0$ .  $P(\mathcal{T} = \infty)$  é chamado de *probabilidade de escapar*. A respeito da recorrência do passeio, temos o seguinte resultado, bem conhecido, que será provado na próxima seção.

**Teorema 1.1.** *O passeio aleatório simples simétrico é:*

1. *recorrente, se  $d = 1, 2$ ; e*
2. *transiente, se  $d \geq 3$ .*

### 1.1.2 Probabilidade de escapar

Para  $n \geq 1$ , defina

$$\gamma_d(n) := P(X_i \neq 0, \forall 1 \leq i \leq n),$$

ou seja, a *probabilidade do passeio não retornar à origem até o  $n$ -ésimo passo*. Observe que

$$\gamma_d(n+1) \leq \gamma_d(n), \quad (1.1)$$

para todo  $n$ . Assim, o limite

$$\gamma_d := \lim_{n \rightarrow \infty} \gamma_d(n)$$

existe. Além disso, como  $\gamma_d(n) = P(\mathcal{T} > n)$ , para todo  $n$ , e os eventos  $\{\mathcal{T} > n\}$  formam uma sequência decrescente de eventos, cuja interseção é  $\{\mathcal{T} = \infty\}$ , pela continuidade da probabilidade, temos

$$\gamma_d = P(\mathcal{T} = \infty).$$

Na sequência estudaremos  $\gamma_d$  para  $d \geq 2$ . O caso mais fácil  $d = 1$  pode ser encontrado em [4].

Decompondo a trajetória do passeio com respeito à última visita à origem até o tempo  $n$ , temos

$$\sum_{i=0}^n P(X_i = 0, X_j \neq 0, \forall j = i+1, i+2, \dots, n) = 1. \quad (1.2)$$

Mas,

$$\begin{aligned} & P(X_i = 0, X_j \neq 0, i+1 \leq j \leq n) \\ &= P(X_j \neq 0, i+1 \leq j \leq n | X_i = 0) P(X_i = 0) \\ &= P(X_j \neq 0, 1 \leq j \leq n-i) P(X_i = 0) \\ &= \gamma_d(n-i) P(X_i = 0). \end{aligned}$$



Já que  $P(X_{2j-1} = 0) = 0$ , para todo  $j \geq 1$ , pois para o passeio aleatório simples, com  $X_0 = 0$ , só é possível retornar à origem em um número par de passos, e de acordo com a observação acima, podemos reescrever (1.2) da forma

$$\sum_{j=0}^m P(X_{2j} = 0) \gamma_d(n - 2j) = 1, \quad (1.3)$$

onde  $m = \frac{n}{2}$ , se  $n$  é par, e  $m = \frac{n-1}{2}$ , se  $n$  é ímpar.

Fixando um inteiro  $k$  tal que  $0 < k < m$ , segue de (1.3) que

$$\begin{aligned} 1 &= \sum_{j=0}^k P(X_{2j} = 0) \gamma_d(n - 2j) + \sum_{j=k+1}^m P(X_{2j} = 0) \gamma_d(n - 2j) \\ &\leq \gamma_d(n - 2k) \sum_{j=0}^k P(X_{2j} = 0) + \sum_{j=k+1}^m P(X_{2j} = 0). \end{aligned} \quad (1.4)$$

O que fizemos até agora não depende da dimensão  $d$ . Mas, agora vamos assumir que  $d \geq 3$ .

Definimos

$$U := \sum_{j \geq 0} P(X_{2j} = 0).$$

O próximo teorema nos dá uma estimativa para o valor de  $P(X_{2j} = 0)$ . (Veja [4], Teorema 1.2.1, Seção 1.2.)

**Teorema 1.2** (Teorema limite local). *Para  $x \in \mathbb{Z}^d$  e  $d \geq 1$ ,*

$$P(X_n = x) = 2 \left( \frac{d}{2\pi n} \right)^{d/2} e^{-\frac{d|x|^2}{2n}} + O\left(n^{-\frac{d+2}{2}}\right), \quad \forall n \geq 1. \quad (1.5)$$

Logo para  $d \geq 3$ ,  $U < \infty$ . Assim, quando  $n \rightarrow \infty$  (consequentemente  $m \rightarrow \infty$ ) da equação (1.4) encontramos

$$1 \leq \gamma_d \sum_{j=0}^k P(X_{2j} = 0) + \sum_{j=k+1}^{\infty} P(X_{2j} = 0).$$

Em seguida tomando o limite  $k \rightarrow \infty$ , obtemos

$$1 \leq \gamma_d \sum_{j=0}^{\infty} P(X_{2j} = 0) = \gamma_d U.$$

Ou seja,

$$\frac{1}{U} \leq \gamma_d. \quad (1.6)$$

Por outro lado (1.3) nos dá

$$\begin{aligned}
& 1 - \frac{1}{U} \sum_{j=0}^m P(X_{2j} = 0) \\
&= \sum_{j=0}^m P(X_{2j} = 0) \gamma_d(n - 2j) - \frac{1}{U} \sum_{j=0}^m P(X_{2j} = 0) \\
&= \sum_{j=0}^m P(X_{2j} = 0) \left( \gamma_d(n - 2j) - \frac{1}{U} \right).
\end{aligned}$$

Observe que  $\gamma_d(n - 2j) - \frac{1}{U} \geq 0$ , para todo  $0 \leq j \leq m$ , já que  $\gamma_d(n) \geq \gamma_d$ , para todo  $n$  e, por (1.6),  $\gamma_d \geq \frac{1}{U}$ . Logo, deixando apenas o termo  $j = 0$ , obtemos

$$\begin{aligned}
& \sum_{j=0}^m P(X_{2j} = 0) \left( \gamma_d(n - 2j) - \frac{1}{U} \right) \\
& \geq P(X_0 = 0) \left( \gamma_d(n) - \frac{1}{U} \right) \\
& = \gamma_d(n) - \frac{1}{U}.
\end{aligned}$$

Portanto,

$$1 - \frac{1}{U} \sum_{j=0}^m P(X_{2j} = 0) \geq \gamma_d(n) - \frac{1}{U}. \quad (1.7)$$

Tomando o limite quando  $n \rightarrow \infty$  temos

$$\frac{1}{U} \geq \gamma_d,$$

que, junto com (1.6), nos dá

$$\gamma_d = \frac{1}{U}.$$

Como  $d \geq 3$ , temos  $U < \infty$ , logo  $\gamma_d > 0$  e, portanto, concluímos que o passeio é transiente. Assim, acabamos de provar o item 2 do Teorema 1.1.

Além disso, podemos estimar o valor de  $\gamma_d(n)$  para  $d \geq 3$ . De fato, de (1.7) segue que

$$\begin{aligned}
\gamma_d(n) &\leq \gamma_d + \frac{1}{U} \left( U - \sum_{j=0}^m P(X_{2j} = 0) \right) \\
&= \gamma_d + \frac{1}{U} \sum_{j>m} P(X_{2j} = 0).
\end{aligned}$$

Mas, pelo Teorema 1.2,

$$\sum_{j>m} P(X_{2j} = 0) \leq c_1 m^{1-d/2}.$$

Onde  $c_1$  é uma constante positiva. Logo

$$\gamma_d(n) \leq \gamma_d + O(n^{-\frac{d+2}{2}}), \forall n \geq 1.$$

Como  $\gamma_d \leq \gamma_d(n)$ , para todo  $n$ , isto prova a seguinte proposição.

**Proposição 1.1.** *Para  $d \geq 3$*

$$\gamma_d(n) = \gamma_d + O(n^{-\frac{d+2}{2}}), \forall n \geq 1. \quad (1.8)$$

Para  $d = 2$ , de acordo com (3.14) do Apêndice,

$$\sum_{j=0}^m P(X_{2j} = 0) = \frac{1 + o(1)}{\pi} \log m. \quad (1.9)$$

Agora usando (1.3) e (1.1),

$$\gamma_2(n) \sum_{j=0}^m P(X_{2j} = 0) \leq 1.$$

Então

$$\gamma_2(n) \leq \frac{\pi + o(1)}{\log n}, \forall n. \quad (1.10)$$

Além disso, a partir de (1.4) e (1.9), temos

$$1 \leq \gamma_2(n - 2k) \frac{1 + o(1)}{\pi} \log k + \frac{1 + o(1)}{\pi} \log \frac{m}{k}. \quad (1.11)$$

Agora tomando  $k = m - \lfloor \frac{m}{\log m} \rfloor$ , (1.11) implica

$$\gamma_2\left(\frac{n}{\log(n/2)}\right) \geq \frac{\pi(1 - o(1))}{\log n}. \quad (1.12)$$

Mas, dado  $N \in \mathbb{N}$ , defina

$$n_* := \min \left\{ n : \frac{n}{\log(n/2)} \geq N \right\},$$

segue então que

$$\log N > \log \left( \frac{n_* - 1}{\log((n_* - 1)/2)} \right) \simeq \log n_* \left( 1 - \frac{\log \log n_*}{\log n_*} \right). \quad (1.13)$$

Usando a monotonicidade de  $\gamma_2(n)$ , (1.12) e (1.13),

$$\gamma_2(N) \log N \geq \gamma_2\left(\frac{n_*}{\log(n_*/2)}\right) \log N \geq \pi(1 - o(1)).$$

Ou seja,

$$\gamma_2(N) \geq \frac{\pi(1 - o(1))}{\log N}, \forall N. \quad (1.14)$$

Portanto, (1.14) e (1.10) provam a seguinte proposição.

**Proposição 1.2.**

$$\gamma_2(n) = \frac{\pi + o(1)}{\log n}.$$

Segue que  $\gamma_2 = 0$  e, portanto, o passeio é recorrente. Isto mostra o item 1 do Teorema 1.1 para  $d = 2$ .

**1.2 Tempo local em  $\mathbb{Z}^d$** 

Considere o passeio aleatório simples simétrico  $(X_n)_{n \geq 0}$  na rede  $\mathbb{Z}^d$ , com  $X_0 = 0$ . Para  $x \in \mathbb{Z}^d$  e  $n \geq 0$  denotamos por  $L_n^x$  o tempo local em  $x$  até o tempo  $n$ , ou seja,

$$L_n^x := \sum_{i=0}^n 1_{\{X_i=x\}}.$$

Em particular, quando  $x = 0$ ,

$$E[L_n^0] = E\left[\sum_{i=0}^n 1_{\{X_i=0\}}\right] = \sum_{j=0}^m P(X_{2j} = 0).$$

Onde  $m = \frac{n}{2}$ , se  $n$  é par, e  $m = \frac{n-1}{2}$ , se  $n$  é ímpar. Usando o Teorema 1.2, obtemos

$$E[L_n^0] \sim \begin{cases} \sqrt{n}, & \text{se } d = 1, \\ \log n, & \text{se } d = 2, \\ C, & \text{se } d \geq 3, \end{cases} \quad (1.15)$$

em que  $C < \infty$  é uma constante.

Pelo Teorema 1.2 a probabilidade do passeio estar na origem tende a zero, quando  $n$  tende para o infinito. Apesar disso, (1.15) nos diz que o valor esperado do número de visitas à origem diverge nos casos  $d = 1, 2$ . Isto pode ser justificado pela recorrência do passeio nesses casos, garantida pelo Teorema 1.1. O Teorema 1.1 também nos garante a transiência do passeio no caso  $d \geq 3$ . Assim, é razoável pensar que assintoticamente o número de retornos à origem é finito, como afirma (1.15).

Definimos também,

$$L_n^* := \max_{x \in \mathbb{Z}^d} L_n^x,$$

que representa o número de visitas ao sítio mais visitado pelo passeio até o  $n$ -ésimo passo.  $L_n^*$  é chamado de *tempo local máximo* do passeio aleatório até o tempo  $n$ .

Como vimos, para  $d \geq 3$ , temos  $0 < \gamma_d < 1$ . Assim, seja  $\lambda_d$  constante positiva definida por

$$\lambda_d := -\frac{1}{\log(1 - \gamma_d)} > 0.$$

Erdős e Taylor [1] mostraram o seguinte resultado a respeito do tempo local máximo para o passeio aleatório simples simétrico em  $\mathbb{Z}^d$ , para  $d \geq 3$ .

**Teorema 1.3** (Erdős - Taylor). *Em dimensões  $d \geq 3$ ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n^*}{\log n} \rightarrow \lambda_d, \text{ q.c.}$$

Para  $d \geq 3$ , o número esperado de retornos a qualquer ponto da rede  $\mathbb{Z}^d$ , em particular a origem como mencionado anteriormente, é finito no limite quando  $n \rightarrow \infty$ . Mas, de acordo com o Teorema 1.3, o tempo local máximo diverge. Isto quer dizer que ao longo da trajetória o ponto mais visitado varia com o passar do tempo.

No caso de dimensão  $d = 2$ , Erdős e Taylor encontraram as seguintes cotas para o tempo local:

$$\frac{1}{4\pi} \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n^*}{(\log n)^2} \leq \limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n^*}{(\log n)^2} \leq \frac{1}{\pi}, \text{ q.c.} \quad (1.16)$$

Neste caso, deduz-se que o tempo local é da ordem de  $(\log n)^2$ , embora não se saiba a constante exata. Assim, conjecturaram que  $\frac{L_n^*}{(\log n)^2} \rightarrow \frac{1}{\pi}$ , quase certamente. Em [3], Jay Rosen melhorou esta cota inferior provando assim, a conjectura.

**Teorema 1.4.** *Para o passeio aleatório simples simétrico em  $\mathbb{Z}^2$ ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n^*}{(\log n)^2} = \frac{1}{\pi}, \text{ q.c.}$$

Por este motivo a cota inferior obtida por Erdős e Taylor em (1.16) não será estudada aqui. Nesta seção apresentaremos o caso  $d \geq 3$  e no capítulo seguinte vamos estudar o caso  $d = 2$ .

*Prova do Teorema 1.3 (Cota superior).* Primeiro provaremos que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n^*}{\log n} \leq \lambda_d, \text{ q.c.} \quad (1.17)$$

Para isso, dado  $\varepsilon > 0$  defina  $M_n^+ := (\lambda_d + \varepsilon) \log n$ . Afirmamos que para  $\delta := \frac{\varepsilon}{\lambda_d} > 0$ , temos

$$P(L_n^* > M_n^+) \leq \frac{1}{n^\delta}. \quad (1.18)$$

Suponhamos provada a afirmação (1.18). Escolhendo  $n_j = 2^j$ , (1.18) implica  $\sum_j P(L_{n_j}^* > M_{n_j}^+) < \infty$  e, pelo Lema de Borel-Cantelli, quase certamente, existe  $j_0$  tal que  $L_{n_j}^* \leq M_{n_j}^+$ , para todo  $j > j_0$ . Logo

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{L_{n_j}^*}{\log n_j} \leq \lambda_d + \varepsilon, \text{ q.c.}$$

Mas dado  $n$  existe um único  $j$  tal que  $n_j \leq n < n_{j+1}$  e

$$\frac{L_n^*}{\log n} \leq \frac{L_{n_{j+1}}^*}{\log n_j} = \frac{L_{n_{j+1}}^*}{\log n_{j+1}} \frac{j+1}{j}.$$

Logo, para todo  $\varepsilon > 0$

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n^*}{\log n} \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{L_{n_j}^*}{\log n_j} \leq \lambda_d + \varepsilon, \text{ q.c.}$$

Pegando  $\varepsilon := \frac{1}{k}$  para  $k \geq 1$ , concluímos que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n^*}{\log n} \leq \lambda_d, \text{ q.c.} \quad (1.19)$$

Portanto, (1.17) está provado.

Para provar (1.18) considere  $\tau_n^*$  definido como o *tempo de primeira visita ao sítio mais visitado até o  $n$ -ésimo passo*.<sup>1</sup>

Decompondo a trajetória do passeio com respeito ao tempo  $\tau_n^*$  e ao sítio mais visitado, temos

$$\begin{aligned} P(L_n^* > M_n^+) &= \sum_{j=0}^{n-1} P(L_n^* > M_n^+, \tau_n^* = j) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} P(L_n^x > M_n^+, \tau_n^* = j | X_j = x) P(X_j = x). \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} P(L_n^x > M_n^+, \tau_n^* = j | X_j = x) &= P(L_{n-j}^x \geq M_n^+, \tau_n^* = j | X_0 = x) \\ &\leq P(L_{n-j}^x \geq M_n^+ | X_j = x) \\ &\leq P(L_\infty^0 \geq M_n^+). \end{aligned}$$

Segue, então, que  $P(L_n^* > M_n^+) \leq nP(L_\infty^0 \geq M_n^+)$ . Além disso, pela Propriedade de Markov <sup>2</sup> forte,

$$P(L_\infty^0 = k) = (1 - \gamma_d)^k \gamma_d.$$

Logo,

$$P(L_n^* > M_n^+) \leq n\gamma_d \sum_{k \geq M_n^+} (1 - \gamma_d)^k = n(1 - \gamma_d)^{M_n^+} = \frac{1}{n^\delta}, \quad (1.20)$$

lembrando que  $0 < \gamma_d < 1$ . Portanto, (1.18) está provado.  $\square$

<sup>1</sup>Se houver mais de um ponto mais visitado, definimos  $\tau_n^*$  com respeito ao menor deles (na ordem lexicográfica).

<sup>2</sup>A Propriedade de Markov no tempo  $n$  afirma que para todo  $x_1, \dots, x_n$  em  $\mathbb{Z}^d$ ,

$$P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}, \dots, X_0 = x_0) = P(X_n = x_n | X_{n-1} = x_{n-1}).$$

A versão *forte* representa a mesma afirmação, onde  $n$  é trocado por um tempo aleatório (chamado *tempo de parada*)  $T$ . Um enunciado preciso se encontra em [6].

*Prova do Teorema 1.3 (Cota inferior).* Agora mostraremos que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n^*}{\log n} \geq \lambda_d \text{ q.c.} \quad (1.21)$$

Seja  $M_n^- := (\lambda_d - \varepsilon) \log n$ . Para mostrar (1.21) é suficiente mostrar que

$$P(L_n^* < M_n^-) \leq e^{-n^\delta}, \quad (1.22)$$

onde  $\delta = \frac{\varepsilon}{\lambda_d} > 0$ . De fato, (1.21) segue diretamente de (1.22) e do Lema de Borel-Cantelli.

Considere o número inteiro positivo  $l$ , tal que  $l^2 < n$  e seja  $m := \lfloor \frac{n}{l^2} \rfloor$ . Dividimos o intervalo  $[0, n] \cap \mathbb{Z}$  em  $m$  intervalos  $J_k$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$ , de tamanho  $l^2$  cada. Cada intervalo é da forma  $J_k = [j_k, j_k + l^2 - 1] \cap \mathbb{Z}$ , com  $j_k = (k - 1)l^2$ . Para todo  $k = 1, 2, \dots, m$  definimos

$$L_{J_k}^x := \sum_{j \in J_k} 1_{\{X_j = x\}},$$

isto é, o tempo local do sítio  $x$  restrito ao intervalo de tempo  $J_k$ . Definindo  $z_k := X_{j_k}$ , observe que se  $L_n^* < M_n^-$  então  $L_{J_k}^{z_k} < M_n^-$  para todo  $k = 1, 2, \dots, m$ . Segue pela Propriedade de Markov que

$$\begin{aligned} P(L_n^* < M_n^-) &\leq E \left[ \prod_{k=1}^m 1_{\{L_{J_k}^{z_k} < M_n^-\}} \right] \\ &= E \left[ \prod_{k=1}^{m-1} 1_{\{L_{J_k}^{z_k} < M_n^-\}} E_{z_{m-1}} \left[ 1_{\{L_{J_{m-1}}^{z_{m-1}} < M_n^-\}} \right] \right]. \end{aligned}$$

Mas

$$E_{z_{m-1}} \left[ 1_{\{L_{J_{m-1}}^{z_{m-1}} < M_n^-\}} \right] = P_{z_{m-1}}(L_{J_{m-1}}^{z_{m-1}} < M_n^-) = P(L_{l^2}^0 < M_n^-),$$

já que  $\#J_k = l^2$ , para todo  $k$ . Logo, recursivamente, obtemos

$$P(L_n^* < M_n^-) \leq \left( P(L_{l^2}^0 < M_n^-) \right)^m. \quad (1.23)$$

Agora encontraremos uma cota superior para  $P(L_{l^2}^0 < M_n^-)$ . Para isto, seja  $\mathcal{T}_j$  o tempo da  $j$ -ésima visita à origem, definido por  $\mathcal{T}_0 := 0$  e, para  $j \geq 1$ ,

$$\mathcal{T}_j := \inf\{k > \mathcal{T}_{j-1} : X_k = 0\},$$

com a convenção que  $\inf \emptyset = \infty$ . Se  $\mathcal{T}_{j-1} < \infty$ , definimos

$$\Delta_j := \mathcal{T}_j - \mathcal{T}_{j-1}$$

e, caso  $\mathcal{T}_{j-1} = \infty$ ,  $\Delta_j := \infty$ .  $\Delta_j$  é o tempo da  $j$ -ésima excursão na origem.

Escolhendo  $l \equiv \lfloor \log n \rfloor$ , observe que se  $\Delta_j \leq l$ , para todo  $j = 1, 2, \dots, \lfloor M_n^- \rfloor$ , então  $L_{l^2}^0 \geq M_n^-$ , ou seja, se o tempo de cada uma das  $\lfloor M_n^- \rfloor$  primeiras excursões é no máximo  $l$ , então o número de retornos à origem em  $l^2$  passos é pelo menos  $M_n^-$ . (Lembrando que  $M_n^- \simeq l$ .) Logo,

$$P(L_{l^2}^0 \geq M_n^-) \geq E \left[ \prod_{j=1}^{\lfloor M_n^- \rfloor} 1_{\{\Delta_j \leq l\}} \right].$$

Novamente, pela Propriedade de Markov forte, obtemos

$$E \left[ \prod_{j=1}^{\lfloor M_n^- \rfloor} 1_{\{\Delta_j \leq l\}} \right] = (P(\Delta_1 \leq l))^{\lfloor M_n^- \rfloor} = (1 - \gamma_d(l))^{\lfloor M_n^- \rfloor}.$$

Agora definindo  $\mu_n := (1 - \gamma_d(l))^{\lfloor M_n^- \rfloor}$  segue de (1.23) que <sup>3</sup>

$$P(L_n^* < M_n^-) \leq (1 - \mu_n)^m \leq e^{-m\mu_n}. \quad (1.24)$$

Por último, usando (1.8),  $m = \frac{n}{l^2}$ ,  $l = \lfloor \log n \rfloor$  e  $\delta = \frac{\varepsilon}{\lambda_d}$ , temos  $m\mu_n \geq n^\delta$  e, portanto, (1.22) está provado.  $\square$

---

<sup>3</sup>Aqui usamos que  $1 - x \leq e^{-x}$ , para todo  $x \in \mathbb{R}$ .



# Capítulo 2

## Tempo local em $\mathbb{Z}^2$

Neste capítulo vamos estudar o comportamento assintótico para o tempo local máximo na rede  $\mathbb{Z}^2$ . A conjectura de Erdős e Taylor sobre o tempo local máximo em  $\mathbb{Z}^2$  feita em [1], foi provada inicialmente por A. Dembo, Y. Peres, O. Zeitouni e J. Rosen em [2].

**Teorema 2.1** (Rosen, Dembo, Peres, Zeitouni). *Para o passeio aleatório simples simétrico em  $\mathbb{Z}^2$ ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n^*}{(\log n)^2} = \frac{1}{\pi}, \text{ q.c.} \quad (2.1)$$

Aqui apresentaremos a prova desse resultado dada por J. Rosen em [3]. Na Seção 2.1 mostraremos a cota superior para o tempo local. Na Seção 2.2.1 definiremos a *função de Green* que nos permite estudar o tempo local em caixas centradas na origem e provaremos a cota inferior do tempo local máximo, assumindo alguns resultados que serão provados no decorrer deste capítulo.

### 2.1 Cota superior para o tempo local em $\mathbb{Z}^2$

*Prova da cota superior em (2.1):* Seja  $l_n := \lfloor (1/\pi + \varepsilon)(\log n)^2 \rfloor$ . Como foi feito anteriormente no caso  $d \geq 3$ , decompondo a trajetória do passeio com respeito ao tempo de primeira visita ao sítio mais visitado até o tempo  $n$  e, também, com respeito ao sítio mais visitado, temos

$$P(L_n^* > l_n) \leq nP(L_n^0 \geq l_n). \quad (2.2)$$

Considere o tempo  $\mathcal{T}_j$  da  $j$ -ésima visita à origem e  $\Delta_j := \mathcal{T}_j - \mathcal{T}_{j-1}$  o tempo da  $j$ -ésima excursão na origem entre a  $j-1$  e a  $j$ -ésima visita à origem. Observe que, se até o tempo  $n$  a origem foi visitada pelo menos  $l_n$  vezes, então o tempo de cada uma das  $l_n$  primeiras excursões na origem é no máximo  $n$ . Assim, usando a

Propriedade de Markov forte obtemos

$$\begin{aligned} P(L_n^0 \geq l_n) &\leq E\left[\prod_{j=i}^{l_n} 1_{\{\Delta_j \leq n\}}\right] \\ &= E\left[\prod_{j=1}^{l_n-1} 1_{\{\Delta_j \leq n\}} E_{X_{\tau_{l_n-1}}}\left[1_{\{\Delta_{l_n} \leq n\}}\right]\right]. \end{aligned}$$

Mas,

$$E_{X_{\tau_{l_n-1}}}\left[1_{\{\Delta_{l_n} \leq n\}}\right] = P(\mathcal{T}_1 \leq n).$$

Logo, recursivamente obtemos

$$P(L_n^0 \geq n) \leq (1 - P(\mathcal{T}_1 > n))^{l_n} \leq e^{-l_n P(\mathcal{T}_1 > n)}.$$

De acordo com a Proposição 1.2, temos

$$P(\mathcal{T}_1 > n) = \gamma_2(n) = \frac{\pi + o(1)}{\log n},$$

que implica, para  $n$  suficientemente grande,

$$e^{-l_n P(\mathcal{T}_1 > n)} = e^{-(1+\varepsilon\pi+o(1))\log n} \leq e^{-(1+2\varepsilon\pi)\log n}.$$

Portanto, usando (2.2), obtemos

$$P(L_n^* > l_n) \leq n^{-\delta},$$

com  $\delta := 2\varepsilon\pi > 0$ .

Tomando a sequência  $n_j = 2^j$  e usando o Lema de Borel-Cantelli, temos

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{L_{n_j}^*}{(\log n_j)^2} \leq \frac{1}{\pi} + \varepsilon,$$

quase certamente. Com um raciocínio semelhante ao usado na prova da cota superior do Teorema 1.3, obtemos, para todo  $\varepsilon > 0$ ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n^*}{(\log n)^2} \leq \limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{L_{n_j}^*}{(\log n_j)^2} \leq \frac{1}{\pi} + \varepsilon, \text{ q.c.}$$

Pegando  $\varepsilon := \frac{1}{k}$ , com  $k \geq 1$ , e tomando  $k \rightarrow \infty$ ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n^*}{(\log n)^2} \leq \frac{1}{\pi}, \text{ q.c.} \quad (2.3)$$

Com isso a cota superior do Teorema 2.1 está provada.  $\square$

A cota inferior é a parte mais difícil da prova do Teorema 2.1. Daqui para frente nosso texto estará voltado para mostrá-la. Mas antes disso, faremos um breve comentário sobre a prova.

Existem técnicas que nos permitem estudar o tempo local  $L_{T_n}^x$  até o passeio sair da caixa  $\Lambda_n$  de centro zero e raio  $n$ , como será mostrado na Seção 2.2.1. Assim, ao invés de estudar o comportamento do tempo local até o tempo  $n$ , podemos estudar o seu comportamento até o passeio deixar a caixa  $\Lambda_n$ . Como mostra a Proposição 2.1 abaixo, o tempo  $T_n$ , que o passeio leva para sair da caixa  $\Lambda_n$ , é da ordem de  $n^2$ ,

$$T_n \sim n^2.$$

Logo,

$$\frac{L_{T_n}^*}{(\log T_n)^2} \sim \frac{L_{T_n}^*}{(\log n^2)^2} = \frac{L_{T_n}^*}{4(\log n)^2}.$$

Assim, veremos na Seção 2.2.2 que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{T_n}^*}{(\log n)^2} \geq \frac{4}{\pi}, \text{ q.c.}$$

implica

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{L_n^*}{(\log n)^2} \geq \frac{1}{\pi}, \text{ q.c.}$$

Ou seja, a prova da cota inferior do Teorema 2.1 se resume em mostrar que existe pelo menos um ponto  $x \in \Lambda_n$ , tal que  $L_{T_n}^x \geq \frac{4-\varepsilon}{\pi}(\log n)^2$ . Pontos com esta propriedade serão chamados de *pontos bem visitados*. Na seção seguinte iremos estudar estes pontos com mais detalhes.

Para mostrar a existência de pontos bem visitados, introduziremos a definição de *pontos bem cercados*, onde, grosso modo, dizemos que um ponto  $x$  pertencente à caixa  $\Lambda_n$  é bem cercado se o passeio passa um certo tempo caminhando em volta destes pontos antes de deixar a caixa  $\Lambda_n$ . A vantagem de se trabalhar com estes pontos é que, para  $n$  suficientemente grande e todo ponto  $x$  bem cercado com probabilidade grande, tem-se  $L_{T_n}^x \geq \frac{4-\varepsilon}{\pi}(\log n)^2$ . Ou seja, se o passeio fica um certo tempo em volta de um ponto bem cercado, quase certamente, o passeio o visita muitas vezes. Além disso, para dois pontos  $x$  e  $y$  bem visitados distantes, as excursões do passeio entre círculos centrados em  $x$  e próximos, de certa forma, a  $x$ , são quase independentes das excursões entre círculos centrados em  $y$  e próximos a  $y$ . A Seção 2.4.1 será destinada a estudar estes pontos e a sua relação com os pontos bem visitados.

## 2.2 Função de Green e Pontos bem visitados

Na Seção 2.2.1 falaremos sobre a *função de Green* que nos permite estudar o tempo local máximo  $L_{T_n}^*$  na caixa  $\Lambda_n$ . Na Seção 2.2.2 iremos introduzir a definição de *pontos bem visitados*. Apresentaremos o resultado, a respeito desses pontos, que

nos garante a existência de um ponto em  $\Lambda_n$ , cujo tempo local máximo até  $T_n$  é da ordem de  $(\log n)^2$ . A existência de pontos bem visitados será mostrada na Seção 2.3 quando introduziremos a definição de pontos *bem cercados*.

### 2.2.1 Função de Green

Para todo  $A \subset \mathbb{Z}^d$  definimos o *tempo de primeira visita a A* por

$$T_A := \inf\{i \geq 0 : X_i \in A\},$$

com a convenção que  $\inf \emptyset = \infty$ .

**Definição 2.1.** *Considere  $A \subset \mathbb{Z}^2$  e  $x, y \in A$ . Definimos a função de Green  $G_A(x, y)$  como o valor esperado do número de visitas a  $y$ , iniciando em  $x$ , até o passeio sair de  $A$ , i.e.,*

$$G_A(x, y) := E_x \left[ \sum_{i=0}^{T_{A^c}} 1_{\{X_i=y\}} \right] = E_x [L_{T_{A^c}}^y].$$

Para  $x \in \mathbb{Z}^d$  e  $n \in \mathbb{N}$  denotamos por  $\Lambda_n(x)$  a caixa de centro  $x$  e raio  $n$ , i.e.,

$$\Lambda_n(x) := \{y \in \mathbb{Z}^d : |x - y| \leq n\}.$$

Lembrando que  $|z| = \max\{|z_1|, \dots, |z_d|\}$ , para  $z \in \mathbb{Z}^d$ . Quando  $x = 0$  escrevemos  $\Lambda_n(0) \equiv \Lambda_n$ . Quando  $A = \Lambda_n(x)^c$  escrevemos  $T_n(x) \equiv T_{\Lambda_n(x)^c}$  e, consequentemente,  $T_n \equiv T_{\Lambda_n^c}$ .

O item 1 do Lema 2.1 nos fornece o comportamento da função de Green na caixa  $\Lambda_n$ . Os itens 2 e 3 determinam relações entre esta função e o tempo local do passeio em  $\Lambda_n$ . A prova do item 1 do Lema 2.1 é dada pelos Teoremas 1.6.6 e 1.6.7 da Seção 1.6 de [4]. A prova dos itens 2 e 3 foi dada em [3] e será apresentada na sequência.

**Lema 2.1.** 1. *Para  $x \in \Lambda_n$  e uma constante  $\beta$ ,*

$$G_{\Lambda_n}(x, 0) = \begin{cases} \frac{2}{\pi} \log n + \beta + O(n^{-1}), & \text{se } x = 0, \\ \frac{2}{\pi} \log\left(\frac{n}{|x|}\right) + O(|x|^{-1}), & \text{se } x \neq 0. \end{cases}$$

2. *Para  $x \in \Lambda_n$ ,  $x \neq 0$  e para todo  $0 < \varphi < 1$*

$$E_x \left[ e^{-\frac{\varphi}{G_{\Lambda_n}(0,0)} L_{T_n}^0} \right] = 1 - \frac{\log\left(\frac{n}{|x|}\right)}{\log n} \frac{\varphi}{1 + \varphi} \left( 1 + O\left(\frac{1}{\log|x|}\right) \right). \quad (2.4)$$

3. *Para  $k \geq 1$ ,  $x \neq 0$  e uma constante  $c$  independente de  $x$ ,  $k$  e  $n$*

$$P_x \left( L_{T_n}^0 \geq k G_{\Lambda_n}(0, 0) \right) \leq c \sqrt{k} e^{-k}.$$

*Prova do Lema 2.1 (itens 2 e 3).* Considere  $x \in \Lambda_n$ , com  $x \neq 0$ , fixado  $\varphi \in (0, 1)$  e seja  $\phi := \frac{\varphi}{G_{\Lambda_n}(0,0)}$ . Logo, a função geradora de momento do tempo local é dada por

$$E_x \left[ e^{-\phi L_{T_n}^0} \right] = P_x(L_{T_n}^0 = 0) + \sum_{k \geq 1} e^{-\phi k} P_x(L_{T_n}^0 = k). \quad (2.5)$$

Usando a Propriedade de Markov forte,

$$\begin{aligned} P_x(L_{T_n}^0 = k) &= E_x \left[ 1_{\{\mathcal{T} < T_n\}} E_{X_{\mathcal{T}}} \left[ 1_{\{L_{T_n}^0 = k\}} \right] \right] \\ &= P_x(\mathcal{T} < T_n) P(L_{T_n}^0 = k), \end{aligned} \quad (2.6)$$

onde  $\mathcal{T}$  é o tempo de primeiro retorno à origem definido na Seção 1.1.1. Em particular, se  $x = 0$

$$P(L_{T_n}^0 = k) = \left( P(\mathcal{T} < T_n) \right)^{k-1} P(\mathcal{T} > T_n).$$

Ou seja, quando o passeio inicia na origem,  $L_{T_n}^0$  tem distribuição geométrica<sup>1</sup> com média  $G_{\Lambda_n}(0, 0)$ .

Usando (2.6) em (2.5), temos

$$E_x \left[ e^{-\phi L_{T_n}^0} \right] = 1 - P_x(\mathcal{T} < T_n) \left( 1 - E \left[ e^{-\phi L_{T_n}^0} \right] \right). \quad (2.7)$$

Pela observação acima a função geradora de momento  $E \left[ e^{\phi L_{T_n}^0} \right]$  é dada por

$$E \left[ e^{-\phi L_{T_n}^0} \right] = \frac{1}{1 + (e^\phi - 1) G_{\Lambda_n}(0, 0)}. \quad (2.8)$$

Como  $G_{\Lambda_n}(0,0) = O(\log n)$ , segue que

$$1 + (e^\phi - 1) G_{\Lambda_n}(0, 0) = 1 + \varphi + O\left(\frac{1}{\log n}\right). \quad (2.9)$$

Pela Propriedade de Markov forte,

$$G_{\Lambda_n}(x, 0) = E \left[ 1_{\{\mathcal{T} < T_n\}} E_{X_{\mathcal{T}}} \left[ L_{T_n}^0 \right] \right] = P_x(\mathcal{T} < T_n) G_{\Lambda_n}(0, 0) \quad (2.10)$$

que implica

$$P_x(\mathcal{T} < T_n) = \frac{G_{\Lambda_n}(x, 0)}{G_{\Lambda_n}(0, 0)}.$$

---

<sup>1</sup>Uma variável aleatória geométrica  $Y \in \{1, 2, \dots\}$  com parâmetro  $p \in (0, 1)$  e média  $\frac{1}{p}$  tem distribuição

$$P(Y = k) = (1 - p)^{k-1} p,$$

e sua função geradora de momento é

$$E[e^{tY}] = \frac{pe^t}{1 - (1-p)e^t}, \quad \forall t < -\log(1-p).$$

Portanto, usando o item 1,

$$P_x(\mathcal{T} < T_n) = \frac{\log\left(\frac{n}{|x|}\right)}{\log n} \left(1 + O\left(\frac{1}{\log|x|}\right)\right). \quad (2.11)$$

Usando (2.11), (2.9) e (2.8) em (2.7), obtemos (2.4). Portanto o item 2 do Lema 2.1 está provado.

Agora iremos provar o item 3. Nos índices  $j_1, j_2, \dots, j_k$  das somas abaixo estamos sempre considerando  $0 \leq j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_k < T_n$ . Para o tempo local em zero, temos

$$\begin{aligned} (L_{T_n}^0)^k &= \left(\sum_{j=0}^{T_n} 1_{\{X_j=0\}}\right)^k \\ &\leq k! \sum_{j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_k} \prod_{i=1}^k 1_{\{X_{j_i}=0\}} \\ &= k! \sum_{j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_{k-1}} \prod_{i=1}^{k-1} 1_{\{X_{j_i}=0\}} \sum_{j_k=j_{k-1}}^{T_n} 1_{\{X_{j_k}=0\}}. \end{aligned}$$

Agora considerando  $x \in \Lambda_n$  e usando a Propriedade de Markov forte

$$\begin{aligned} E_x[(L_{T_n}^0)^k] &\leq k! E_x \left[ \sum_{j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_{k-1}} \prod_{i=1}^{k-1} 1_{\{X_{j_i}=0\}} E_{X_{j_{k-1}}} \left[ \sum_{j_k=0}^{T_n} 1_{\{X_{j_k}=0\}} \right] \right] \\ &= k! G_{\Lambda_n}(0, 0) E_x \left[ \sum_{j_1 \leq j_2 \leq \dots \leq j_{k-1}} \prod_{i=1}^{k-1} 1_{\{X_{j_i}=0\}} \right]. \end{aligned}$$

Assim, indutivamente, obtemos

$$E_x[(L_{T_n}^0)^k] \leq k! G_{\Lambda_n}(0, 0)^{k-1} E_x \left[ \sum_{j_1=0}^{T_n} 1_{\{X_{j_1}=0\}} \right] = k! G_{\Lambda_n}(0, 0)^{k-1} G_{\Lambda_n}(x, 0). \quad (2.12)$$

Logo por (2.10),

$$E_x[(L_{T_n}^0)^k] \leq k! G_{\Lambda_n}(0, 0)^k. \quad (2.13)$$

Pela Desigualdade de Tchebychev,

$$\begin{aligned} P_x(L_{T_n}^0 \geq k G_{\Lambda_n}(0, 0)) &= P_x((L_{T_n}^0)^k \geq k^k (G_{\Lambda_n}(0, 0))^k) \\ &\leq \frac{E_x[(L_{T_n}^0)^k]}{k^k (G_{\Lambda_n}(0, 0))^k} \\ &\leq \frac{k!}{k^k}. \end{aligned}$$

e usando a fórmula de Stirling  $k! = \sqrt{2\pi k} k^k e^{-k} \sqrt{k} (1 + o(1))$ , concluímos

$$P_x(L_{T_n}^0 \geq k G_{\Lambda_n}(0, 0)) \leq c e^{-k} \sqrt{k}.$$

Portanto o item 3 do Lema 2.1 está provado.  $\square$

### 2.2.2 Pontos bem visitados

Fixe  $a \in (0, 2)$ . Dizemos que um ponto  $x \in \Lambda_n$  é um *ponto bem visitado* se ele foi visitado pelo menos  $\frac{2a}{\pi}(\log n)^2$  vezes até o passeio sair da caixa  $\Lambda_n$ , ou seja, se  $L_{T_n}^x \geq \frac{2a}{\pi}(\log n)^2$ . Denotamos por  $B_n^a$  o conjunto dos pontos bem visitados em  $\Lambda_n$ :

$$B_n^a := \left\{ x \in \Lambda_n : L_{T_n}^x \geq \frac{2a}{\pi}(\log n)^2 \right\}.$$

O comportamento assintótico (quando  $n \rightarrow \infty$ ) do número de pontos bem visitados possui a seguinte propriedade, como mostra o próximo teorema:

$$\#B_n^a \sim n^{2-a}.$$

Assim, para  $n$  suficientemente grande, existe pelo menos um ponto bem visitado na caixa  $\Lambda_n$ , como foi mencionado no final do Capítulo 1. Portanto, podemos provar a cota inferior do Teorema 2.1.

**Teorema 2.2.** *Para  $a \in (0, 2)$*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\#B_n^a)}{\log n} = 2 - a, \text{ q.c.}$$

**Proposição 2.1.** *Para o passeio aleatório simples simétrico em  $\mathbb{Z}^2$ ,*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log T_n}{\log n} = 2, \text{ q.c.}$$

A demonstração da Proposição 2.1 se encontra na Seção 3.1 do Apêndice. Assumindo o Teorema 2.2 e a Proposição 2.1 iremos provar a cota inferior do Teorema 2.1.

*Prova do Teorema 2.1 (Cota inferior).* Pelo Teorema 2.2 e pela Proposição 2.1, dado  $\varepsilon > 0$  pequeno o suficiente de forma que  $2 - a - \varepsilon > 0$ , temos que, quase certamente, existe  $n_0$  (aleatório e que depende de  $\varepsilon$ ), tal que para  $n > n_0$ ,

$$n^{2-a-\varepsilon} \leq \#B_n^a \leq n^{2-a+\varepsilon} \tag{2.14}$$

e

$$n^{2-\varepsilon} \leq T_n \leq n^{2+\varepsilon}.$$

Uma consequência imediata de (2.14) é que  $B_n^a \neq \emptyset$  para todo  $n > n_0$ . Assim, existe pelo menos um ponto bem visitado  $x_* \in \Lambda_n$ , i.e., tal que  $L_{T_n}^{x_*} \geq \frac{2a}{\pi}(\log n)^2$ . Em particular, se  $n > n_0$ ,

$$\frac{L_{\lceil n^{2+\varepsilon} \rceil}^*}{(\log n)^2} \geq \frac{L_{T_n}^*}{(\log n)^2} \geq \frac{L_{T_n}^{x_*}}{(\log n)^2} \geq \frac{2a}{\pi}.$$

Agora, dado  $N \in \mathbb{N}$  existe  $n \in \mathbb{N}$  tal que  $\lceil n^{2+\varepsilon} \rceil \leq N < \lceil (n+1)^{2+\varepsilon} \rceil$ , então

$$\begin{aligned} \frac{L_N^*}{(\log N)^2} &\geq \frac{L_{\lceil n^{2+\varepsilon} \rceil}^*}{(\log n)^2} \left( \frac{\log n}{\log N} \right)^2 \\ &\geq \frac{L_{\lceil n^{2+\varepsilon} \rceil}^*}{(\log n)^2} \frac{1}{(2+\varepsilon)^2} \left( \frac{\log n}{\log(n+1)} \right)^2. \end{aligned}$$

Logo, para todo  $\varepsilon > 0$  e para todo  $a \in (0, 2)$ ,

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{L_N^*}{(\log N)^2} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{L_{\lceil n^{2+\varepsilon} \rceil}^*}{(\log n)^2} \frac{1}{(2+\varepsilon)^2} \geq \frac{2a}{\pi} \frac{1}{(2+\varepsilon)^2}, \text{ q.c.}$$

Portanto, tomando  $\varepsilon = \frac{1}{k}$  e  $a = 2 - \frac{1}{k}$ , com  $k \rightarrow \infty$ ,

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{L_N^*}{(\log N)^2} \geq \frac{1}{\pi}, \text{ q.c.} \quad (2.15)$$

Assim, (2.15) e (2.3) provam o Teorema 2.1.  $\square$

Observe que para provar o Teorema 2.1 precisamos apenas da cota inferior para  $\#B_n^a$ . Provaremos agora a cota superior. A cota inferior será provada na próxima seção.

*Prova do Teorema 2.2 (cota superior).* Considere  $\varepsilon > 0$ . Então, pela Desigualdade de Tchebychev,

$$\begin{aligned} P(\#B_n^a \geq n^{2-a+\varepsilon}) &\leq n^{-(2-a)-\varepsilon} E[\#B_n^a] \\ &= n^{-(2-a)-\varepsilon} \sum_{x \in \Lambda_n} P\left(L_{T_n}^x \geq \frac{2a}{\pi} (\log n)^2\right) \\ &\leq n^{-(2-a)-\varepsilon} \sum_{x \in \Lambda_n} P\left(L_{T_{2n}(x)}^x \geq \frac{2a}{\pi} (\log n)^2\right). \end{aligned}$$

Na segunda desigualdade usamos que, se um ponto  $x \in \Lambda_n$  é bem visitado, o número de visitas a ele, antes de sair da caixa  $\Lambda_{2n}(x)$ , é pelo menos  $\frac{2a}{\pi} (\log n)^2$ , pois  $\Lambda_n \subset \Lambda_{2n}(x)$ . Agora considere o seguinte lema o qual será provado no final desta seção.

**Lema 2.2.** *Para todo  $x \in \Lambda_n \setminus \{0\}$ , para todo  $\delta > 0$  e  $n$  suficientemente grande*

$$P\left(L_{T_{2n}(x)}^x \geq \frac{2a}{\pi} (\log n)^2\right) \leq \tilde{c} n^{-a+\delta}, \quad (2.16)$$

para alguma constante positiva  $\tilde{c}$ .



Logo, como  $\#\Lambda_n = 4(n+1)^2$  e escolhendo  $\delta$  tal que  $0 < \delta < \varepsilon$ , temos

$$P(\#B_n^a \geq n^{2-a+\varepsilon}) \leq c_1 n^{-(\varepsilon-\delta)}, \quad (2.17)$$

para alguma constante positiva  $c_1$ .

Tomando  $n_j = 2^j$ , pelo Lema de Borel-Cantelli, quase certamente, existe  $j_0 < \infty$  tal que  $j \geq j_0$  implica  $\#B_{n_j}^a < 2^{(2-a+\varepsilon)j}$ . Mas dado  $n$ , existe um único  $j$  tal que  $n_j \leq n < n_{j+1}$ . Segue que,

$$\begin{aligned} \#B_n^a &= \#\left\{x \in \Lambda_n : L_{T_n}^x \geq \frac{2a}{\pi}(\log n)^2\right\} \\ &= \#\left\{x \in \Lambda_{n_{j+1}} : L_{T_n}^x \geq \frac{2a}{\pi}(\log n)^2\right\}. \end{aligned}$$

Além disso, como

$$\frac{L_{T_n}^x}{(\log n)^2} \leq \frac{L_{T_{n_{j+1}}}^x}{(\log n_j)^2} = \frac{L_{T_{n_{j+1}}}^x}{(\log n_{j+1})^2} \left(\frac{\log n_{j+1}}{\log n_j}\right)^2,$$

temos

$$\begin{aligned} &\left\{x \in \Lambda_{n_{j+1}} : L_{T_n}^x \geq \frac{2a}{\pi}(\log n)^2\right\} \\ &\subset \left\{x \in \Lambda_{n_{j+1}} : \frac{L_{T_{n_{j+1}}}^x}{(\log n_{j+1})^2} \geq \frac{2a}{\pi}(1+1/j)^{-2}\right\}, \end{aligned}$$

com  $a(1+1/j)^{-2} \in (0, 2)$ , para todo  $j \geq 1$ . Então

$$\begin{aligned} \#B_n^a &\leq \#B_{n_{j+1}}^{a(1+1/j)^{-2}} \\ &\leq 2^{(2-a(1+1/j)^{-2}+\varepsilon)(j+1)} \\ &\leq n^{(2-a(1+1/j)^{-2}+\varepsilon)\frac{j+1}{j}}. \end{aligned}$$

Logo, para todo  $\varepsilon > 0$ ,

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\#B_n^a)}{\log n} \leq 2 - a + \varepsilon, \text{ q.c.} \quad (2.18)$$

Assim, provamos a cota superior no Teorema 2.2.  $\square$

*Prova do Lema 2.2.* Segue do item 1 do Lema 2.1 que

$$G_{\Lambda_{2n}(x)}(x, x) = G_{\Lambda_{2n}}(0, 0) = \frac{2}{\pi} \log n \left(1 + O\left(\frac{1}{\log n}\right)\right).$$

Além disso, usando o item 3 do mesmo lema temos que, para todo  $\delta' > 0$  e  $n$  suficientemente grande,

$$\begin{aligned} P\left(L_{T_{2n}(x)}^x \geq \frac{2a}{\pi}(\log n)^2\right) &= P\left(L_{T_{2n}(x)}^x \geq \frac{a \log n}{1 + O((\log n)^{-1})} G_{\Lambda_{2n}(x)}(x, x)\right) \\ &\leq P\left(L_{T_{2n}(x)}^x \geq \frac{a \log n}{1 + \delta'} G_{\Lambda_{2n}(x)}(x, x)\right) \\ &\leq c_1 \sqrt{\log n} n^{-\frac{a}{1+\delta'}}. \end{aligned}$$

Agora, dado  $\delta > 0$ ,  $\delta'$  deve ser tomado pequeno o suficiente de forma que  $\bar{\delta} := \delta - a(1 - \frac{1}{1+\delta'}) > 0$ . Segue que, para  $n$  suficientemente grande,

$$P\left(L_{T_{2n}(x)}^x \geq \frac{2a}{\pi}(\log n)^2\right) \leq c_2 n^{\bar{\delta}} n^{-\frac{a}{1+\delta'}} = c_2 n^{-a+\delta}.$$

□

## 2.3 Cota inferior para o tempo local em $\mathbb{Z}^2$

Queremos mostrar que, para todo  $a \in (0, 2)$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\#B_n^a)}{\log n} \geq 2 - a, \text{ q.c.} \quad (2.19)$$

Considere uma seqüência de números reais  $R_n$  tal que

$$R_n \nearrow \infty \quad \text{e} \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log R_{n+1}}{\log R_n} = 1. \quad (2.20)$$

A seqüência  $R_n$  será escolhida adequadamente. Para mostrar (2.19) é suficiente mostrar que, para todo  $a \in (0, 2)$

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\#B_{R_n}^a)}{\log R_n} \geq 2 - a, \text{ q.c.} \quad (2.21)$$

De fato, suponha (2.21) provado e fixe  $a \in (0, 2)$ . Dado  $N \in \mathbb{N}$  considere  $n$  tal que  $R_n \leq N < R_{n+1}$ . Segue que

$$\#B_N^a \geq \#\left\{x \in \Lambda_{R_n} : L_{T_N}^x \geq \frac{2a}{\pi}(\log N)^2\right\}$$

pois  $\Lambda_N \supset \Lambda_{R_n}$ . Além disso, como

$$\frac{L_{T_N}^x}{(\log N)^2} \geq \frac{L_{T_{R_n}}^x}{(\log N)^2} \geq \frac{L_{T_{R_n}}^x}{(\log R_{n+1})^2},$$

temos

$$\begin{aligned} \#B_N^a &\geq \#\left\{x \in \Lambda_{R_n} : L_{T_{R_n}}^x \geq \frac{2a}{\pi}(\log R_{n+1})^2\right\} \\ &= \#\left\{x \in \Lambda_{R_n} : \frac{L_{T_{R_n}}^x}{(\log R_n)^2} \geq \frac{2a}{\pi} \left(\frac{\log R_{n+1}}{\log R_n}\right)^2\right\}. \end{aligned}$$

Agora, como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log R_{n+1}}{\log R_n} = 1$ , para todo  $\varepsilon > 0$  e  $n$  suficientemente grande temos  $\frac{\log R_{n+1}}{\log R_n} \leq 1 + \varepsilon$ . Assim, pegando  $\varepsilon > 0$  pequeno o suficiente de forma que  $a(1 + \varepsilon) \in (0, 2)$ , temos

$$\#B_N^a \geq \#\left\{x \in \Lambda_{R_n} : \frac{L_{T_{R_n}}^x}{(\log R_n)^2} \geq \frac{2a}{\pi}(1 + \varepsilon)\right\} = \#B_{R_n}^{a(1+\varepsilon)}$$

e

$$\frac{\log(\#B_N^a)}{\log N} \geq \frac{\log(\#B_{R_n}^{a(1+\varepsilon)})}{\log R_{n+1}} = \frac{\log(\#B_{R_n}^{a(1+\varepsilon)})}{\log R_n} \frac{\log R_n}{\log R_{n+1}}.$$

Então, usando (2.21), temos, para todo  $\varepsilon > 0$  tal que  $a(1+\varepsilon) \in (0, 2)$ ,

$$\liminf_{N \rightarrow \infty} \frac{\log(\#B_N^a)}{\log N} \geq \liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\#B_{R_n}^{a(1+\varepsilon)})}{\log R_n} \geq 2 - a(1+\varepsilon).$$

O que prova (2.19).

A partir de agora vamos considerar a sequência  $R_n$  como sendo

$$R_n := \lfloor 16e^n n^{3n} \rfloor. \quad (2.22)$$

Observe que a sequência  $R_n$  definida desta forma satisfaz (2.20).

Para mostrar (2.21), considere o seguinte lema. A sua prova será dada na Seção 2.4.

**Lema 2.3** (Principal). *Dado  $\varepsilon > 0$  e  $a \in (0, 2)$  considere o seguinte subconjunto de  $\Lambda_{R_n}$ :*

$$A_n^a(\varepsilon) := \left\{ x \in \Lambda_{R_n} : L_{T_{R_n}}^x \geq \frac{2a - \varepsilon}{\pi} (\log R_{n+1})^2 \right\}.$$

Então para todo  $\varepsilon > 0$  existe  $p_\varepsilon$ ,  $0 < p_\varepsilon < 1$ , tal que

$$P(\#A_n^a(\varepsilon) < R_{n+1}^{2-a-2\varepsilon}) \leq 1 - p_\varepsilon,$$

para  $n$  suficientemente grande.

*Prova de (2.21) a partir do Lema 2.3.* Para  $x \in \mathbb{Z}^2$  e  $k = 1, 2, \dots, n^3$ , consideramos a sequência

$$T_{kR_n}(x) = T_{\Lambda_{kR_n}(x)^c}.$$

Com  $T_{kR_n} \equiv T_{\Lambda_{kR_n}^c}$ , se  $x = 0$ . Definimos  $z_k := X_{T_{kR_n}}$ , para  $k = 1, 2, \dots, n^3$ . Observe que  $P(T_{kR_n} < \infty) = 1$ , para todo  $k$ , logo os  $z_k$  são bem definidos. Dado  $\varepsilon > 0$  e  $a \in (0, 2)$ , definimos o conjunto

$$A_n^a(k, \varepsilon) := \left\{ x \in \Lambda_{R_n}(z_k) : L_{T_{R_n}(z_k)}^x \geq \frac{2a - \varepsilon}{\pi} (\log R_{n+1})^2 \right\},$$

para todo  $k = 1, 2, \dots, n^3$ . Temos

$$\{\#B_{R_{n+1}}^{a-\varepsilon/2} < R_{n+1}^{2-a-2\varepsilon}\} \subset \bigcap_{k=1}^{n^3} \{\#A_n^a(k, \varepsilon) < R_{n+1}^{2-a-2\varepsilon}\}.$$

Logo, usando a Propriedade de Markov forte,

$$\begin{aligned} & P(\#B_{R_{n+1}}^{a-\varepsilon/2} < R_{n+1}^{2-a-2\varepsilon}) \\ & \leq E \left[ \prod_{k=1}^{n^3} 1_{\{\#A_n^a(k, \varepsilon) < R_{n+1}^{2-a-2\varepsilon}\}} \right] \\ & = E \left[ \prod_{k=1}^{n^3-1} 1_{\{\#A_n^a(k, \varepsilon) < R_{n+1}^{2-a-2\varepsilon}\}} E_{z_{n^3}} \left[ 1_{\{\#A_n^a(n^3, \varepsilon) < R_{n+1}^{2-a-2\varepsilon}\}} \right] \right]. \end{aligned}$$

Mas, pelo Lema 2.3

$$E_{z_{n,3}} \left[ 1_{\{\#A_n^a(n^3, \varepsilon) < R_{n+1}^{2-a-2\varepsilon}\}} \right] = P(\#A_n^a(\varepsilon) < R_{n+1}^{2-a-2\varepsilon}) \leq 1 - p_\varepsilon,$$

para algum  $0 < p_\varepsilon < 1$ . Portanto, recursivamente, obtemos

$$P(\#B_{R_{n+1}}^{a-\varepsilon/2} < R_{n+1}^{2-a-2\varepsilon}) \leq (1 - p_\varepsilon)^{n^3}.$$

Segue, então, que  $\sum_n P(\#B_{R_{n+1}}^{a-\varepsilon/2} < R_{n+1}^{2-a-2\varepsilon}) < \infty$  e, pelo Lema de Borel-Cantelli, para todo  $\varepsilon > 0$  tal que  $a + 2\varepsilon \in (0, 2)$ , quase certamente existe  $n_0 := n_0(\varepsilon)$  tal que, para todo  $n > n_0$

$$\frac{\log(\#B_{R_{n+1}}^{a-\varepsilon/2})}{\log R_{n+1}} \geq 2 - a - 2\varepsilon.$$

Portanto, para todo  $a \in (0, 2)$ ,

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log(\#B_{R_n}^a)}{\log R_n} \geq 2 - a, \text{ q.c.}$$

Supondo o Lema 2.3 provado, isso prova (2.21) □

Como vimos, (2.21) implica (2.19) que por sua vez implica o Teorema 2.2.

A próxima seção será destinada à prova do Lema 2.3.

## 2.4 Prova do Lema Principal

Antes de provar o Lema 2.3, observe que, para todo  $\varepsilon > 0$  e  $n$  suficientemente grande, vale a seguinte desigualdade

$$P(\#A_n^a(\varepsilon) < R_{n+1}^{2-a-2\varepsilon}) \leq P(\#B_{R_n}^a < R_n^{2-a-\varepsilon}). \quad (2.23)$$

De fato, como  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\log R_{n+1}}{\log R_n} = 1$ , dado  $\varepsilon > 0$ , para  $n$  suficientemente grande, temos  $\left(\frac{\log R_n}{\log R_{n+1}}\right)^2 > 1 - \frac{\varepsilon}{2a}$  o que implica

$$\begin{aligned} \#B_{R_n}^a &= \#\left\{x \in \Lambda_{R_n} : \frac{L_{T_{R_n}}^z}{(\log R_{n+1})^2} \geq \frac{2a}{\pi} \left(\frac{\log R_n}{\log R_{n+1}}\right)^2\right\} \\ &\leq \#\left\{x \in \Lambda_{R_n} : \frac{L_{T_{R_n}}^z}{(\log R_{n+1})^2} \geq \frac{2a}{\pi} \left(1 - \frac{\varepsilon}{2a}\right)\right\} \\ &= \#A_n^a(\varepsilon). \end{aligned}$$

Além disso, como  $\frac{2-a-\varepsilon}{2-a-2\varepsilon} > 1$ , temos  $\frac{\log R_{n+1}}{\log R_n} \leq \frac{2-a-\varepsilon}{2-a-2\varepsilon}$ , para  $n$  suficientemente grande, o que implica  $R_{n+1}^{2-a-2\varepsilon} \leq R_n^{2-a-\varepsilon}$ . Portanto, para mostrar o Lema 2.3, basta mostrar que existe  $p_\varepsilon \in (0, 1)$  tal que

$$P(\#B_{R_n}^a < R_n^{2-a-\varepsilon}) \leq 1 - p_\varepsilon. \quad (2.24)$$

### 2.4.1 Pontos bem cercados

Para mostrar (2.24) vamos considerar alguns pontos específicos de  $\Lambda_{R_n}$  os quais chamaremos de *pontos bem cercados*.  $R_n$  será sempre considerado como definido em (2.22).

Para cada  $x \in \mathbb{Z}^2$ , denotamos a *fronteira* de  $\Lambda_n(x)$  por

$$\partial\Lambda_n(x) := \{y \in \Lambda_n(x)^c : \inf_{z \in \Lambda_n(x)} |z - y| = 1\}.$$

Quando  $x = 0$  denotamos  $\partial\Lambda_n(0) \equiv \partial\Lambda_n$ . Fixado  $n$ , considere a sequência

$$r_j := \lfloor e^n n^{3(n-j)} \rfloor, \quad j = 0, 1, \dots, n$$

e o seguinte subconjunto de  $\Lambda_{R_n}$ ,

$$K_n := [2r_0, 3r_0]^2 \cap \mathbb{Z}^2$$

Para cada  $x \in K_n$  e cada  $j = 1, \dots, n$  definiremos uma sequência de tempos em que o passeio visita  $\partial\Lambda_{r_{j-1}}(x)$  e  $\partial\Lambda_{r_j}(x)$ . Também definiremos excursões e o número de excursões do passeio de  $\partial\Lambda_{r_{j-1}}(x)$  para  $\partial\Lambda_{r_j}(x)$  (veja figura abaixo). Estas variáveis sempre vão depender de  $n$ , do ponto  $x \in K_n$  e  $j \in \{1, \dots, n\}$ , mas explicitaremos apenas alguns desses parâmetros afim de facilitar a notação.

Fixado  $x \in K_n$ , e  $j \in \{1, \dots, n\}$  sejam

$$\bar{T}_1 := T_{\partial\Lambda_{r_{j-1}}(x)}$$

e, para  $k \geq 1$ ,

$$\bar{T}_{2k} := \inf\{i > \bar{T}_{2k-1} : X_i \in \partial\Lambda_{r_j}(x)\}$$

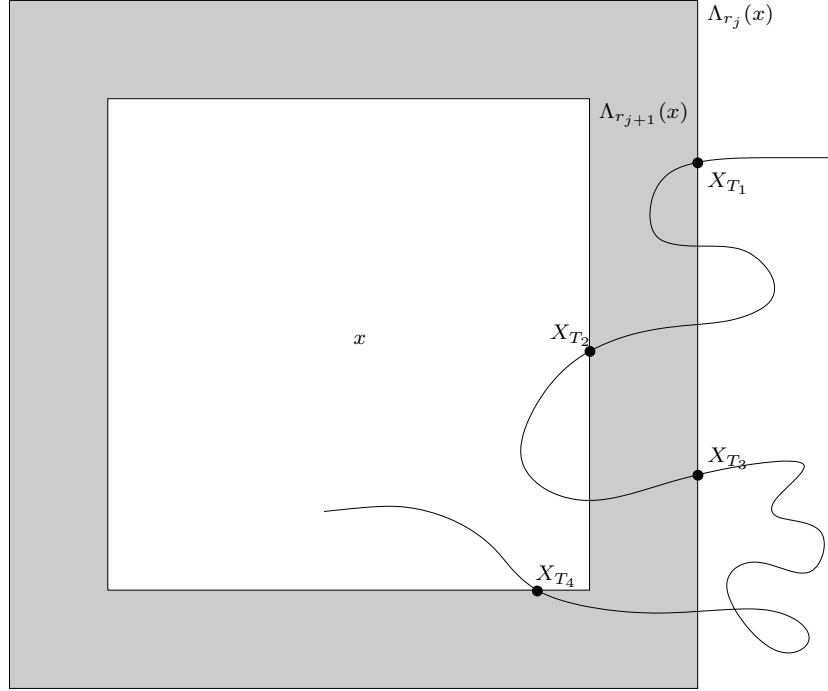
e

$$\bar{T}_{2k+1} := \inf\{i > \bar{T}_{2k} : X_i \in \partial\Lambda_{r_{j-1}}(x)\}.$$

Pela recorrência do passeio em  $\mathbb{Z}^2$ , todos os  $\bar{T}_i$  estão bem definidos. Definimos

$$\mathcal{E}_j(k) := \{X_i : \bar{T}_{2k-1} \leq i \leq \bar{T}_{2k}\}.$$

$\mathcal{E}_j(k)$  é a  $k$ -ésima excursão do passeio de  $\partial\Lambda_{r_{j-1}}(x)$  para  $\partial\Lambda_{r_j}(x)$ .



Para  $x \in K_n$  e para cada  $j \in \{1, 2, \dots, n\}$ , denotamos por  $N_j(x)$  o número de excursões  $\mathcal{E}_j(k)$  antes de sair de  $\Lambda_{R_n}$ , que pode ser definido como

$$N_j(x) := \max\{k : \bar{T}_{2k} < T_{R_n}\}.$$

**Definição 2.2.** Considere  $a \in (0, 2)$ . Sejam  $l_j(a) := 3aj^2 \log j$ , para  $j = 1, 2, \dots, n$ , e  $j_* := \min\{4, \inf\{j : l_j(a) \geq 2j\}\}$ . Dizemos que um ponto  $x \in K_n$  é bem cercado se

$$N_j(x) = 1, \quad \forall j = 1, 2, \dots, j_* - 1,$$

e

$$|N_j(x) - l_j(a)| \leq j, \quad \forall j = j_*, j_* + 1, \dots, n.$$

Denotamos por  $C_n^a$  o conjunto dos pontos bem cercados em  $K_n$ . Em geral, um ponto bem cercado é necessariamente bem visitado, como mostra o lema abaixo.

**Lema 2.4.** Para todo  $a \in (0, 2)$  e todo  $\delta > 0$ ,

$$P(C_n^a \setminus B_n^{a-\delta} \neq \emptyset) \leq ce^{-\tilde{c}n(\log n)^2}, \quad (2.25)$$

em que  $c > 0$  e  $\tilde{c} := \tilde{c}_a(\delta) > 0$  é tal que  $\tilde{c}_a(\delta) \searrow 0$ , quando  $\delta \rightarrow 0$ . Em particular, quase certamente, para todo  $n$  suficientemente grande

$$C_n^a \subset B_{R_n}^{a-\delta}. \quad (2.26)$$

Com isso, para  $x \in K_n$  concluímos que se o passeio passa um longo tempo fazendo excursões a partir da fronteira de uma caixa centrada em  $x$  para outra, quase certamente o passeio visita o ponto  $x$  um número grande de vezes.

*Prova do Lema 2.4.* Queremos mostrar que para todo  $a \in (0, 2)$  e  $\delta > 0$ , quase certamente,

$$C_n^a \setminus B_{R_n}^{a-\delta} = \emptyset,$$

a menos de um conjunto finito de índices  $n$ .

Observe que

$$P(C_n^a \setminus B_{R_n}^{a-\delta} \neq \emptyset) \leq \sum_{x \in K_n} P(\{x \in C_n^a\} \cap \{L_{T_{R_n}}^x < \frac{2a-\delta}{\pi}(\log R_n)^2\}). \quad (2.27)$$

Estudaremos agora a probabilidade

$$P_\delta(a, x) := P\left(\{x \in C_n^a\} \cap \left\{L_{T_{R_n}}^x \leq \frac{2(a-\delta)}{\pi}(\log R_n)^2\right\}\right).$$

Fixado  $x \in K_n$  e  $n$ , denotamos por  $L^{x,k}$  o número de visitas ao sítio  $x$  durante a  $k$ -ésima excursão de  $\partial\Lambda_{r_n}(x)$  para  $\partial\Lambda_{r_{n-1}}(x)$ . Estamos definindo  $L^{x,k}$  para excursões de  $\partial\Lambda_{r_n}(x)$  para  $\partial\Lambda_{r_{n-1}}(x)$ , pois estamos interessados em saber as chances de um ponto  $x$  ser bem visitado, sabendo que o passeio visitou a fronteira de  $\Lambda_{r_n}(x)$ . Usando os  $\bar{T}_i$ s definidos anteriormente podemos escrever

$$L^{x,k} := \sum_{i=\bar{T}_{2k}}^{\bar{T}_{2k+1}} 1_{\{X_i=x\}}.$$

Observe que, para  $x \in C_n^a$ , o número de excursões de  $\partial\Lambda_{r_n}(x)$  para  $\partial\Lambda_{r_{n-1}}(x)$  é igual a  $N_n(x)$  e, por definição,

$$N_n(x) \geq l_n(a) - n.$$

Além disso, se  $L_{T_{R_n}}^x \leq \frac{2(a-\delta)}{\pi}(\log R_n)^2$ , então o número de visitas a  $x$  durante as  $[l_n(a) - n]$  primeiras excursões de  $\partial\Lambda_{r_n}(x)$  para  $\partial\Lambda_{r_{n-1}}(x)$  satisfaz

$$\sum_{k=1}^{[l_n(a)-n]} L^{x,k} \leq \frac{2(a-\delta)}{\pi}(\log R_n)^2.$$

Logo

$$\begin{aligned} P_\delta(a, x) &\leq P\left(\{x \in C_n^a\} \cap \left\{\sum_{k=1}^{[l_n(a)-n]} L^{x,k} \leq \frac{2(a-\delta)}{\pi}(\log R_n)^2\right\}\right) \\ &\leq P\left(\sum_{k=1}^{[l_n(a)-n]} L^{x,k} \leq \frac{2(a-\delta)}{\pi}(\log R_n)^2\right). \end{aligned}$$

Para  $0 < \phi < \infty$  e usando a Desigualdade de Tchebychev, obtemos

$$P_\delta(a, x) \leq \exp\left\{\phi \frac{2(a-\delta)}{\pi}(\log R_n)^2\right\} E\left[e^{-\phi \sum_{k=1}^{[l_n(a)-n]} L^{x,k}}\right].$$

Mas, pela Propriedade de Markov

$$E\left[e^{-\phi \sum_{k=1}^{\lfloor l_n(a)-n \rfloor} L^{x,k}}\right] = E\left[e^{-\phi \sum_{k=1}^{\lfloor l_n(a)-n \rfloor - 1} L^{x,k}} E_{X_{\bar{T}_{2(l_n(a)-n)}}} \left[ e^{-\phi L_{T_{r_{n-1}(x)}}^x} \right]\right].$$

Pelo item 2 do Lema 2.1, com  $\phi \equiv \frac{\varphi}{G_{\Lambda_{r_{n-1}(x)}}(x,x)}$ , para  $0 < \varphi < 1$ , temos

$$E_y \left[ e^{-\phi L_{T_{r_{n-1}(x)}}^x} \right] = 1 - \frac{3 \log n}{n} \frac{\varphi}{1 + \varphi} \left( 1 + O\left(\frac{\log n}{n}\right) \right),$$

independente do ponto  $y$  escolhido em  $\partial \Lambda_{r_{n-1}(x)}$ . Logo

$$\begin{aligned} & \sup_{y \in \partial \Lambda_{r_{n-1}(x)}} E_y \left[ e^{-\phi L_{T_{r_{n-1}(x)}}^x} \right] \\ &= 1 - \frac{3 \log n}{n} \frac{\varphi}{1 + \varphi} \left( 1 + O\left(\frac{\log n}{n}\right) \right) \\ &\leq \exp \left\{ - \frac{3 \log n}{n} \frac{\varphi}{1 + \varphi} \left( 1 + O\left(\frac{\log n}{n}\right) \right) \right\}. \end{aligned}$$

Agora usando que  $l_n(a) - n = 3an^2 \log n \left( 1 + O\left(\frac{1}{n \log n}\right) \right)$ , obtemos

$$\begin{aligned} & E \left[ e^{-\phi \sum_{k=1}^{\lfloor l_n(a)-n \rfloor} L^{x,k}} \right] \\ &\leq \exp \left\{ - 9an(\log n)^2 \left( 1 + O\left(\frac{\log n}{n}\right) \right) \frac{\varphi}{1 + \varphi} \right\}. \end{aligned} \quad (2.28)$$

Vamos estimar agora  $\exp \left\{ \phi \frac{2(a-\delta)}{\pi} (\log R_n)^2 \right\}$ . Como, pelo item 1 do Lema 2.1,

$$G_{\Lambda_{r_{n-1}(x)}}(x,x) = G_{\Lambda_{r_{n-1}}}(0,0) = \frac{2}{\pi} n \left( 1 + O\left(\frac{\log n}{n}\right) \right),$$

e, além disso,

$$(\log R_n)^2 = (\log(16e^n n^{3n}))^2 = 9(n \log n)^2 \left( 1 + O\left(\frac{1}{\log n}\right) \right),$$

temos

$$\exp \left\{ \phi \frac{2(a-\delta)}{\pi} (\log R_n)^2 \right\} = \exp \left\{ \varphi 9(a-\delta)n(\log n)^2 \left( 1 + O\left(\frac{1}{\log n}\right) \right) \right\}. \quad (2.29)$$

Portanto, (2.29) com (2.28), nos dá

$$P_\delta(a,x) \leq \exp \left\{ \left( \varphi(1 - \delta/a) - \frac{\varphi}{1 + \varphi} \right) 9an(\log n)^2 \left( 1 + O\left(\frac{1}{\log n}\right) \right) \right\},$$

para todo  $0 < \varphi < 1$ . Agora vamos otimizar essa cota superior em função de  $\phi$ .



A função  $h(x) = xM - \frac{x}{1+x}N$ ,  $x \in (0, 1)$ , atinge o seu mínimo quando  $x = \sqrt{N/M} - 1$  e

$$h(\sqrt{N/M} - 1) = -(\sqrt{N} - \sqrt{M})^2.$$

Segue que, para  $n$  suficientemente grande e para alguma constante positiva  $c'$ ,

$$\begin{aligned} P_\delta(a, x) &\leq \exp \left\{ - \left( 1 - \sqrt{1 - \delta/a} \right)^2 9an(\log n)^2 \left( 1 + O\left( \frac{1}{\log n} \right) \right) \right\} \\ &\leq e^{-c'(1 - \sqrt{\delta/a})9an(\log n)^2}. \end{aligned}$$

Fazendo  $\tilde{c}_a(\delta) := c'(1 - \sqrt{1 - \delta/a})^2 9a > 0$ , usando (2.27) e que, para alguma constante  $c$ ,  $\#K_n = (r_0 + 1)^2 = (e^n n^{3n} + 1)^2 < cn^{8n} = ce^{8n \log n}$ , temos

$$P(C_n^a \setminus B_{R_n}^{a-\delta} \neq \emptyset) \leq \sum_{x \in K_n} P_\delta(a, x) \leq ce^{-\tilde{c}_a(\delta)n(\log n)^2}.$$

Portanto, (2.25) está provado. Aplicando o Lema de Borel-Cantelli prova (2.26) e completa a prova do Lema 2.4.  $\square$

Agora, dado  $\delta > 0$ , para  $n$  suficientemente grande

$$\begin{aligned} P(\#B_{R_n}^{a-\delta} \geq R_n^{2-a-\varepsilon}) &\geq P(\{\#(B_n^{a-\delta} \cap C_n^a) \geq R_n^{2-a-\varepsilon}\} \cap \{C_n^a \setminus B_{R_n}^{a-\delta} = \emptyset\}) \\ &= P(\{\#C_n^a \geq R_n^{2-a-\varepsilon}\} \cap \{C_n^a \setminus B_{R_n}^{a-\delta} = \emptyset\}). \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} &P(\{\#C_n^a \geq R_n^{2-a-\varepsilon}\} \cap \{C_n^a \setminus B_{R_n}^{a-\delta} = \emptyset\}) \\ &= P(\#C_n^a \geq R_n^{2-a-\varepsilon}) - P(\{\#C_n^a \geq R_n^{2-a-\varepsilon}\} \cap \{C_n^a \setminus B_{R_n}^{a-\delta} \neq \emptyset\}) \\ &\geq P(\#C_n^a \geq R_n^{2-a-\varepsilon}) - P(C_n^a \setminus B_{R_n}^{a-\delta} \neq \emptyset). \end{aligned}$$

Portanto para mostrar (2.24) basta verificar que, para todo  $\varepsilon > 0$ , existe  $p_\varepsilon \in (0, 1)$  tal que

$$P(\#C_n^a \geq R_n^{2-a-\varepsilon}) \geq 2p_\varepsilon. \quad (2.30)$$

De fato, supondo (2.30) provado e usando (2.25) do Lema 2.4,

$$P(\#B_{R_n}^{a-\delta} \geq R_n^{2-a-\varepsilon}) \geq P(\#C_n^a \geq R_n^{2-a-\varepsilon}) - P(\#C_n^a \setminus B_{R_n}^{a-\delta} \geq p_\varepsilon),$$

para  $n$  grande o suficiente. Assim, tomando  $\delta := \frac{1}{k}$ , para  $k \geq 1$ , temos

$$\{\#B_{R_n}^{a-1/k} \geq R_n^{2-a-\varepsilon}\} \searrow \{\#B_{R_n}^a \geq R_n^{2-a-\varepsilon}\},$$

quando  $k \rightarrow \infty$ , e concluímos portanto, que

$$P(\#B_{R_n}^a \geq R_n^{2-a-\varepsilon}) = \lim_{k \rightarrow \infty} P(\#B_{R_n}^{a-1/k} \geq R_n^{2-a-\varepsilon}) \geq p_\varepsilon. \quad (2.31)$$

Usaremos a Proposição 2.2 e a Proposição 2.3 para estudar (2.30).

**Proposição 2.2.** *Sejam  $0 < \alpha < 1$  e  $Z$  uma variável aleatória integrável com variância finita. Então*

$$P(Z \geq \alpha EZ) \geq (1 - \alpha)^2 \frac{[EZ]^2}{E[Z^2]}.$$

Apesar da Proposição 2.2 ser bem conhecida, daremos a prova a seguir.

*Prova da Proposição 2.2.* Considere  $\alpha \in (0, 1)$ . Podemos escrever

$$Z = Z1_{\{Z < \alpha EZ\}} + Z1_{\{Z \geq \alpha EZ\}}.$$

Assim,

$$EZ = E[Z1_{\{Z < \alpha EZ\}}] + E[Z1_{\{Z \geq \alpha EZ\}}]. \quad (2.32)$$

Para a primeira parcela em (2.32), temos

$$E[Z1_{\{Z < \alpha EZ\}}] \leq \alpha EZ \quad (2.33)$$

Além disso, pela Desigualdade de Cauchy-Schwarz,

$$\begin{aligned} E[Z1_{\{Z \geq \alpha EZ\}}] &\leq (E[Z^2])^{1/2} (E[1_{\{Z \geq \alpha EZ\}}])^{1/2} \\ &= (E[Z^2])^{1/2} P(Z \geq \alpha EZ)^{1/2}. \end{aligned} \quad (2.34)$$

Usando (2.34) e (2.33) em (2.32), acaba a prova da Proposição 2.2.  $\square$

Fazendo  $Z \equiv \#C_n^a$  na Proposição 2.2, temos

$$P(\#C_n^a \geq \alpha E[\#C_n^a]) \geq (1 - \alpha)^2 \frac{(E[\#C_n^a])^2}{E[(\#C_n^a)^2]}, \quad (2.35)$$

para  $\alpha \in (0, 1)$ . A Proposição 2.3 abaixo nos permite comparar  $E[\#C_n^a]$  com  $R_n^{2-a-\varepsilon}$  e, além disso, estudar a relação entre  $(E[\#C_n^a])^2$  e  $E[(\#C_n^a)^2]$ .

Seja  $\chi_n$  a indicadora do conjunto  $C_n^a$ , ou seja, para  $x \in K_n$ ,

$$\chi_n(x) = 1_{\{x \in C_n^a\}}.$$

Com isso, podemos escrever

$$\#C_n^a = \sum_{x \in K_n} \chi_n(x)$$

que implica

$$E[\#C_n^a] = \sum_{x \in K_n} P(x \text{ é bem cercado}) \quad (2.36)$$

Mas pela Proposição 2.3 veremos que, para todo  $x \in K_n$

$$P(x \text{ é bem cercado}) \geq R_n^{-(a+\varepsilon)},$$

para todo  $n$  suficientemente grande. Agora o segundo momento de  $\#C_n^a$  pode ser escrito como

$$\begin{aligned}
E[(\#C_n^a)^2] &= E\left[\left(\sum_{x \in K_n} \chi_n(x)\right)^2\right] \\
&= E\left[\sum_{x \in K_n} (\chi_n(x))^2 + \sum_{\substack{x, y \in K_n: \\ x \neq y}} \chi_n(x)\chi_n(y)\right] \\
&= E[\#C_n^a] + \sum_{\substack{x, y \in K_n: \\ x \neq y}} E[\chi_n(x)\chi_n(y)]. \tag{2.37}
\end{aligned}$$

Usaremos a Proposição 2.3 para estudar a correlação entre variáveis  $\chi_n(x)$  e  $\chi_n(y)$  para dois pontos  $x$  e  $y$  em  $K_n$  distintos.

**Proposição 2.3.** 1. *Existe uma seqüência  $(\delta_n)_{n \geq 1}$  de números positivos que converge para zero tal que, para todo  $n \geq 1$ ,*

$$p_n := \inf_{y \in K_n} P(\chi_n(y) = 1) \geq R_n^{-(a+\delta_n)}. \tag{2.38}$$

Além disso,

$$p_n \geq c_1 P(\chi_n(x) = 1), \tag{2.39}$$

para alguma constante positiva  $c_1$ , para todo  $n$  e todo  $x \in K_n$ .

2. *Seja*

$$l(x, y) := \min \{k \in \{0, 1, \dots, n\} : \Lambda_{r_k}(x) \cap \Lambda_{r_k}(y) = \emptyset\}.$$

*Existe uma seqüência  $(\delta'_n)_{n \geq 1}$  de números positivos que converge para zero tal que, para todo  $n \geq 1$  e  $x \neq y$ ,*

$$E[\chi_n(x)\chi_n(y)] \leq c_2 p_n^2 (l(x, y)!)^{3a+\delta'_{l(x, y)}}. \tag{2.40}$$

para alguma constante  $c_2$ .

De acordo com (2.38) da Proposição 2.3 existe uma seqüência  $\delta_n$  que converge para zero tal que,

$$E[\#C_n^a] = \sum_{x \in K_n} P(\chi_n(x) = 1) \geq (\#K_n) R_n^{-(a+\delta_n)} \geq c R_n^{2-a-\delta_n}.$$

Lembrando que  $\#K_n = c R_n^2$ , para alguma constante  $0 < c < 1$ . Agora, dado  $\varepsilon > 0$ , para  $n$  suficientemente grande, temos

$$c E[\#C_n^a] \geq c^2 R_n^{2-a-\delta_n} \geq R_n^{2-a-\varepsilon}. \tag{2.41}$$

Portanto, usando (2.41) e (2.35), dado  $\varepsilon > 0$  e para todo  $n$  suficientemente grande

$$P(\#C_n^a \geq R_n^{2-a-\varepsilon}) \geq (1-c)^2 \frac{(E[\#C_n^a])^2}{E[(\#C_n^a)^2]}. \tag{2.42}$$

Agora mostraremos que, para alguma constante  $\tilde{c}$  e  $n$  suficientemente grande, temos

$$E[(\#C_n^a)^2] \leq \tilde{c}(E[\#C_n^a])^2. \quad (2.43)$$

De (2.37), temos

$$E[(\#C_n^a)^2] = E[\#C_n^a] + \sum_{\substack{x,y \in K_n: \\ x \neq y}} E[\chi_n(x)\chi_n(y)].$$

Mas pelo item 1 da Proposição 2.3, existe  $\delta_n \searrow 0$  tal que  $R_n^{-(a+\delta_n)} \leq p_n$ , para todo  $n \geq 1$ . Assim, como  $a < 2$ , temos

$$R_n^{-2} \leq R_n^{-(a+\delta_n)} \leq p_n,$$

para  $n$  suficientemente grande. Logo,

$$1 \leq R_n^2 p_n = \tilde{c}(\#K_n)p_n \leq \tilde{c}E[\#C_n^a], \quad (2.44)$$

que implica

$$E[\#C_n^a] \leq \tilde{c} \left( E[\#C_n^a] \right)^2. \quad (2.45)$$

para alguma constante positiva  $\tilde{c}$  e  $n$  suficientemente grande.

Para a segunda parcela em (2.37), vamos mostrar que

$$\sum_{\substack{x,y \in K_n: \\ x \neq y}} E[\chi_n(x)\chi_n(y)] \leq \bar{c} \left( E[\#C_n^a] \right)^2, \quad (2.46)$$

para alguma constante positiva  $\bar{c}$  e  $n$  suficientemente grande. Para isso, dividiremos esta soma em duas partes, a primeira será sobre todos os pontos de  $K_n$  que estão a uma distância de, no máximo,  $2r_n$  entre si, e a segunda parte sobre os pontos que estão a uma distância entre  $2r_n$  e  $2r_0$ . Lembrando que  $r_j = e^n n^{3(n-j)}$ , com  $j = 0, 1, \dots, n$ , e  $K_n = [2r_0, 3r_0]^2 \cap \mathbb{Z}^2$ . Então,

$$\sum_{\substack{x,y \in K_n: \\ x \neq y}} E[\chi_n(x)\chi_n(y)] = S_1 + S_2, \quad (2.47)$$

em que

$$S_1 := \sum_{x \in K_n} \sum_{y \in \Lambda_{2r_n}(x) \setminus \{x\}} E[\chi_n(x)\chi_n(y)]$$

e

$$S_2 := \sum_{x \in K_n} \sum_{y \in K_n \setminus \Lambda_{2r_n}(x)} E[\chi_n(x)\chi_n(y)].$$

Para  $S_1$ , usando (2.39) da Proposição 2.3, temos

$$S_1 \leq \sum_{x \in K_n} \sum_{y \in \Lambda_{2r_n}(x)} E[\chi_n(y)] \leq c_2 e^{2n} \sum_{x \in K_n} p_n \leq c_2 e^{2n} E[\#C_n^a].$$

Além disso, para  $n$  suficientemente grande e usando (2.38),

$$e^{2n} \leq c_3 R_n^{2-(a+\delta_n)} \leq c_3 R_n^2 p_n \leq c_4 E[\#C_n^a].$$

Portanto

$$S_1 \leq c_5 \left( E[\#C_n^a] \right)^2. \quad (2.48)$$

Agora vamos analisar  $S_2$ . Para cada  $x \in K_n$  e  $k = 1, \dots, n$  defina

$$\mathcal{R}_k^x := \{y \in K_n : 2r_k < |x - y| \leq 2r_{k-1}\}$$

e, para  $x, y \in K_n$ , com  $x \neq y$ , considere  $l(x, y)$  definido no item 2 da Proposição 2.3. Observe que

$$k^* := \max_{y \in \mathcal{R}_k^x} \{l(x, y)\} = k, \forall k = 1, \dots, n. \quad (2.49)$$

Usando (2.40), temos

$$\begin{aligned} S_2 &= \sum_{x \in K_n} \sum_{y \in K_n \setminus \Lambda_{2r_n}(x)} E[\chi_n(x)\chi_n(y)] \\ &= \sum_{x \in K_n} \sum_{k=1}^n \sum_{y \in \mathcal{R}_k^x} E[\chi_n(x)\chi_n(y)] \\ &\leq c_1 \sum_{x \in K_n} \sum_{k=1}^n \sum_{y \in \mathcal{R}_k^x} p_n^2 (l(x, y)!)^{3a+\delta_{l(x,y)}}, \end{aligned}$$

para alguma sequência  $\delta_n$  tal que  $\delta_n \rightarrow 0$ . Mas, pela observação (2.49), usando (2.44) e que  $\mathcal{R}_k^x \subset \Lambda_{2r_{k-1}}(x)$ ,

$$\begin{aligned} \sum_{x \in K_n} \sum_{k=1}^n \sum_{y \in \mathcal{R}_k^x} p_n^2 (l(x, y)!)^{3a+\delta_{l(x,y)}} &\leq c_1 \sum_{x \in K_n} p_n^2 \sum_{k=1}^n \sum_{y \in \mathcal{R}_k^x} (k^*)^{3a+\delta_{k^*}} \\ &\leq c_2 E[\#C_n^a] p_n \sum_{k=1}^n \sum_{y \in \Lambda_{2r_{k-1}}(x)} (k!)^{3a+\delta_k}. \end{aligned}$$

Agora olhando para o número de pontos na caixa  $\Lambda_{2r_{k-1}}(x)$ ,

$$\#\Lambda_{2r_{k-1}}(x) = (2r_{k-1} + 1)^2 \leq c_3 R_n^2 k^6 (k!)^{-6}.$$

Portanto, temos

$$\begin{aligned} S_2 &\leq c_4 E[\#C_n^a] R_n^2 p_n \sum_{k=1}^n k^6 (k!)^{-6} (k!)^{3a+\delta_k} \\ &\leq c_5 \left( E[\#C_n^a] \right)^2 \sum_{k=1}^n \frac{k^6}{(k!)^\delta}, \end{aligned}$$

para algum  $\delta > 0$ . Como a série acima converge, segue que

$$S_2 \leq c_6 \left( E[\#C_n^a] \right)^2. \quad (2.50)$$

Logo (2.50) e (2.48) provam (2.46). Assim, junto com (2.45) e (2.37), (2.43) está provado.

Agora, voltando à desigualdade (2.42) temos, para todo  $n$  suficientemente grande,

$$P(\#C_n^a \geq R_n^{2-a-\varepsilon}) \geq (1-c)^2 \frac{(E[\#C_n^a])^2}{E[(\#C_n^a)^2]} \geq \frac{(1-c)^2}{\tilde{c}} =: 2p_\varepsilon > 0. \quad (2.51)$$

Logo, usando (2.31)

$$P(\#B_{R_n}^a \geq R_n^{2-a-\varepsilon}) \geq \frac{1}{2} P(\#C_n^a \geq R_n^{2-a-\varepsilon}) \geq p_\varepsilon. \quad (2.52)$$

Portanto, isto prova (2.24) e, consequentemente, o Lema 2.3 está provado.

## 2.5 Prova da Proposição 2.3

### 2.5.1 Prova do primeiro item

Nesta seção consideremos o conjunto  $K_n \subset \Lambda_{R_n}$  e, fixado um ponto  $x \in K_n$ , procuramos uma cota inferior sobre  $P(x \text{ bem cercado})$ . Antes de entrar nos detalhes da prova daremos uma descrição informal. A estratégia descrita abaixo pode ser acompanhada na Figura 2.1.

Lembramos que o evento  $\{x \text{ bem cercado}\}$  é definido da seguinte maneira. Considere a sequência decrescente de caixas centradas em  $x$ :

$$\Lambda_{r_0}(x) \supset \Lambda_{r_1}(x) \supset \cdots \supset \Lambda_{r_n}(x),$$

e defina  $N_j(x)$  como a número de excursões de  $\partial\Lambda_{r_{j-1}}(x)$  até  $\partial\Lambda_{r_j}(x)$ .  $x$  é *bem cercado* se

$$N_j(x) = 1, \forall j = 1, 2, \dots, j_* - 1,$$

e

$$|N_j(x) - l_j(a)| \leq j, \forall j = j_*, j_* + 1, \dots, n,$$

onde  $l_j(a) = 3aj^2 \log j$ .

Para começar, obrigaremos o passeio a intersectar  $\partial\Lambda_{r_1}(x)$  antes de sair de  $\Lambda_{R_n}$  e estudaremos

$$P(x \text{ bem cercado} | T_{\partial\Lambda_{r_1}(x)} < T_{\partial\Lambda_{R_n}}). \quad (2.53)$$

Diremos que  $j$  é o *índice* da caixa  $\Lambda_{r_j}(x)$ . A partir do instante  $\tau_0 := T_{\partial\Lambda_{r_1}(x)}$ , consideraremos somente a sequência aleatória de índices das sucessivas visitas

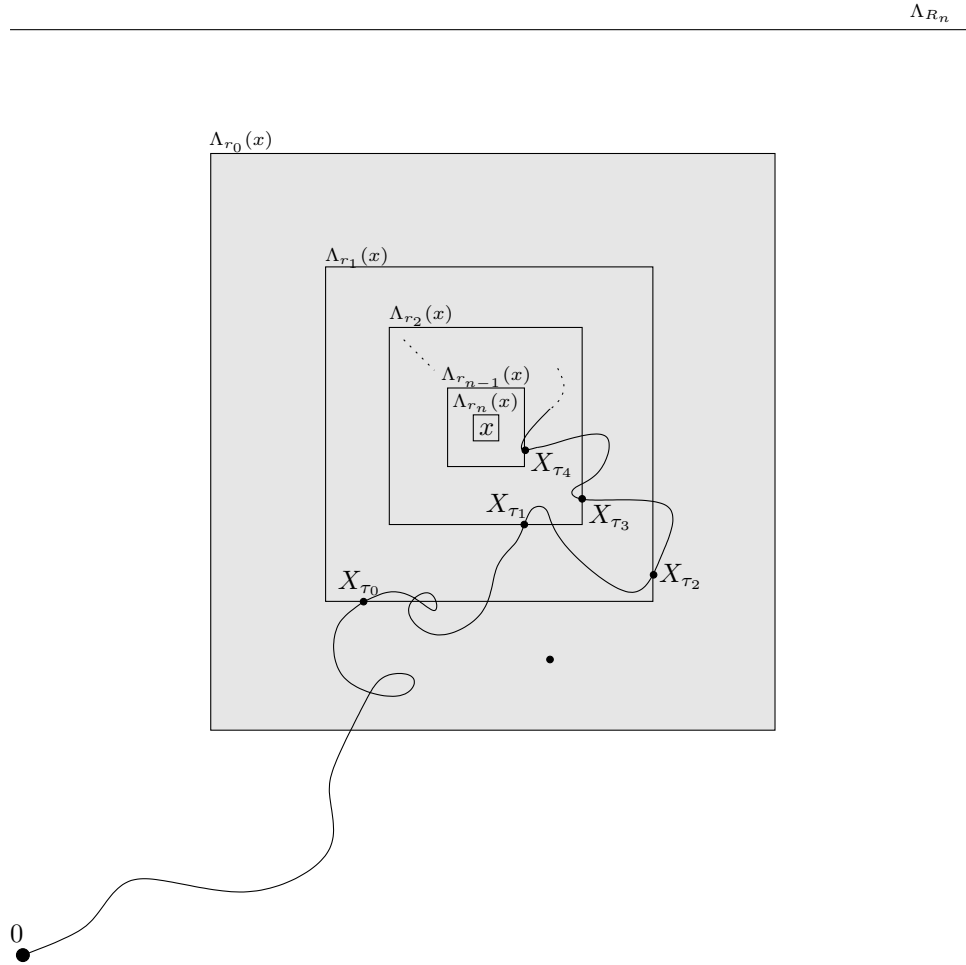


Figura 2.1: A estratégia para estudar o evento  $\{x \text{ é bem cercado}\}$  (Obs: esse desenho não respeita as relações de proporcionalidade entre as grandezas das caixas.) Primeiro, esperamos o tempo  $\tau_0$ , em que o passeio intersecta  $\Lambda_{r_1}(x)$ , antes de sair de  $\Lambda_{R_n}$ . Em seguida, consideremos somente os tempos  $\tau_1, \tau_2, \dots$ , em que o passeio passa ou para uma caixa de índice menor, ou para uma caixa de índice maior.

do passeio às fronteiras das caixas  $\Lambda_{r_1}(x)$ :  $\mathcal{J}(0), \mathcal{J}(1), \mathcal{J}(2), \dots$ . Por definição,  $\mathcal{J}(0) = 1$ ,  $\mathcal{J}(i+1) - \mathcal{J}(i) = \pm 1$ , e se  $\mathcal{J}(i) = n$  então  $\mathcal{J}(i+1) = n - 1$ . Por exemplo, à trajetória da Figura 2.1 correspondem os índices  $\mathcal{J}(1) = 2$ ,  $\mathcal{J}(2) = 1$ ,  $\mathcal{J}(3) = 2$ , etc..

A aplicação  $i \mapsto \mathcal{J}(i) \in \{0, 1, 2, \dots, n\}$  contém toda a informação sobre a maneira com a qual o passeio *cerca* o ponto  $x$ , em termos das visitas às fronteiras das caixas  $\Lambda_{r_j}(x)$ . Na Figura 2.2 estão representados os quatro primeiros valores de  $\mathcal{J}$  para a trajetória representada na Figura 2.1. Assim, a evolução do passeio se reduz a olhar a sequência de índices  $\mathcal{J}(0), \mathcal{J}(1), \dots$  até o passeio sair da caixa  $\Lambda_{r_0}(x)$ . Acontece que *os tamanhos das caixas  $\Lambda_{r_j}(x)$  foram escolhidos de maneira*

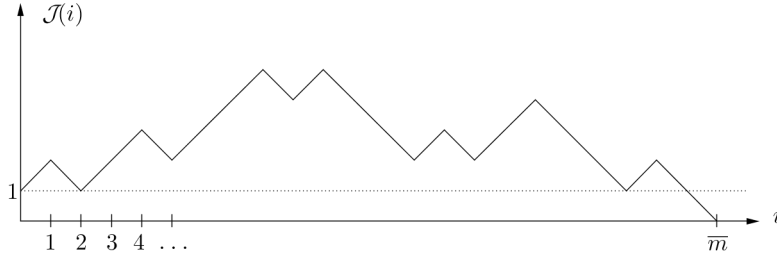


Figura 2.2: A seqüência de índices encontrada ao longo da trajetória do passeio na Figura 2.1.  $\bar{m}$  é o primeiro instante em que a trajetória alcança  $\partial\Lambda_{r_0}(x)$  após tocar  $\partial\Lambda_{r_1}(x)$  pela última vez antes de  $T_{R_n}$ .

tal que os eventos  $\mathcal{J}(i+1) = \mathcal{J}(i) + 1$  e  $\mathcal{J}(i+1) = \mathcal{J}(i) - 1$  têm probabilidades essencialmente iguais (ver (2.59) abaixo):

$$P(\mathcal{J}(i+1) = \mathcal{J}(i) + 1) = P(\mathcal{J}(i+1) = \mathcal{J}(i) - 1) \simeq \frac{1}{2}. \quad (2.54)$$

Quando  $x$  é bem cercado, a função  $i \mapsto \mathcal{J}(i)$  satisfaz uma condição equivalente a (2.55) e (2.56) abaixo, o que torna o estudo da probabilidade em (2.53) possível, via um problema de combinatória sobre funções do tipo  $\mathcal{J}$ .

Formalmente podemos definir como segue. Fixado  $x \in K_n$ , seja

$$\tau_0 := \inf\{s \geq 0 : X_s \in \partial\Lambda_{r_1}(x)\},$$

e para  $i \geq 0$

$$\tau_{i+1} := \inf\{s > \tau_i : X_s \in \partial\Lambda_{r_{k_{i+1}}}(x) \cup \partial\Lambda_{r_{k_{i-1}}}(x)\},$$

em que  $k_i \in \{0, 1, \dots, n\}$  é tal que  $X_{\tau_i} \in \partial\Lambda_{r_{k_i}}(x)$ . Lembrando que se  $k_i = 0$  e o passeio não saiu de  $\Lambda_{R_n}$ , só podemos ter  $X_{\tau_{i+1}} \in \partial\Lambda_{r_1}(x)$ . Além disso,  $k_i = n$  implica  $X_{\tau_{i+1}} \in \partial\Lambda_{r_{n-1}}(x)$ . Em particular,  $k_0 \equiv 1$ .

Seja  $H_x : \bigcup_{j=0}^n \partial\Lambda_{r_j}(x) \rightarrow \{0, 1, 2, \dots, n\}$ , tal que  $H_x(y) = j$ , se  $y \in \partial\Lambda_{r_j}(x)$ . Defina

$$\begin{aligned} \mathcal{J} : \{0, 1, 2, \dots\} &\rightarrow \{0, 1, 2, \dots, n\} \\ i &\mapsto \mathcal{J}(i) := H_x(X_{\tau_i}). \end{aligned}$$

Em particular, pela definição de  $\tau_i$ ,  $\mathcal{J}(0) \equiv 1$  e se  $\mathcal{J}(i) = n$ , para algum  $i$ , então  $\mathcal{J}(i+1) = n - 1$ . Definindo

$$\bar{m} := \inf\{i > 0 : X_{\tau_i} \in \partial\Lambda_{r_0}(x)\},$$

para estudar a função  $\mathcal{J}$ , até o passeio sair de  $\Lambda_{r_0}(x)$ , é equivalente estudar a função  $\Phi$  definida abaixo.



Dado um vetor  $\vec{m} := (m_2, m_3, \dots, m_n)$ , tal que  $m_n \neq 0$ , seja  $\bar{m} := 2 \sum_{j=2}^n m_j + 1$ . Defina  $\mathcal{H}_n(\vec{m})$ , como o conjunto das funções

$$\Phi : \{0, 1, \dots, \bar{m}\} \rightarrow \{0, 1, \dots, n\},$$

tais que,  $\bar{m} = \inf\{i > 0 : \Phi(i) = 0\}$ ,

$$\Phi(i) = \begin{cases} 1, & \text{se } i = 0, \\ \Phi(i-1) \pm 1, & \text{se } 1 \leq i \leq \bar{m} - 1 \end{cases} \quad (2.55)$$

e

$$m_j = \#\{(i, i+1) : (\Phi(i), \Phi(i+1)) = (j-1, j)\}. \quad (2.56)$$

Portanto, se  $y \in \partial\Lambda_{r_1}(x)$

$$\begin{aligned} P_y(x \text{ é bem cercado}) &= P_y\left(\mathcal{J} \in \bigcup_{\vec{m}} \mathcal{H}_n(\vec{m})\right) \\ &= \sum_{\vec{m}} \sum_{\Phi \in \mathcal{H}_n(\vec{m})} P_y(\mathcal{J} = \Phi), \end{aligned} \quad (2.57)$$

em que a união é feita sobre todos os vetores  $\vec{m}$  tais que  $(m_2, m_3, \dots, m_n) = (N_2(x), N_3(x), \dots, N_n(x))$ . Veremos mais a frente que a probabilidade  $P(\mathcal{J} = \Phi)$  depende apenas do vetor  $\vec{m}$  escolhido, portanto é útil saber o número de funções em  $\mathcal{H}_n(\vec{m})$ .

**Lema 2.5.** Dado um vetor  $\vec{m} = (m_2, m_3, \dots, m_n)$ ,

$$\#\mathcal{H}_n(\vec{m}) = \prod_{k=2}^{n-1} \binom{m_{k+1} + m_k - 1}{m_k - 1}.$$

*Prova do Lema 2.5.* Considere um vetor  $\vec{m} = (m_1, m_2, \dots, m_n)$ , com  $m_n \neq 0$  e o conjunto de símbolos  $\{c_1, c_2, \dots, c_n\}$  cada  $c_j$  será chamado de *letra*. Seja  $\mathcal{P}(\vec{m})$  um subconjunto de  $\{c_1, \dots, c_n\}^{\bar{m}}$ ,  $\bar{m} := 2 \sum_{j=1}^n m_j$ , definido da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\vec{m}) = \left\{ \pi = b_1 b_2 \dots b_{\bar{m}} \in \{c_1, \dots, c_n\}^{\bar{m}} : \right. \\ \left. \begin{aligned} &b_1 = c_1 \text{ e se } b_i = c_j \text{ então } b_{i+1} = c_{j+1} \text{ ou} \\ &b_{i+1} = c_k, k \leq j \text{ e } m_j = \#\{i : b_i = c_j\} \end{aligned} \right\}. \end{aligned}$$

Chamaremos os elementos de  $\mathcal{P}(\vec{m})$  de *palavras*. Existe uma correspondência biunívoca entre as palavras de  $\mathcal{P}(m_2, \dots, m_n)$  e as funções de  $\mathcal{H}(m_2, \dots, m_n)$ . Basta associar a cada par  $(i, i+1)$  tal que  $(\Phi(i), \Phi(i+1)) = (j-1, j)$  uma letra  $c_j$ .

Fixado  $\vec{m} = (m_1, \dots, m_n)$  podemos mostrar por indução no número de letras diferentes ( $=n$ ) que

$$\#\mathcal{P}(\vec{m}) = \prod_{j=1}^{n-1} \binom{m_{j+1} + m_j - 1}{m_j - 1}.$$

De fato, para  $n = 2$  é claro, pois  $\#\mathcal{P}(m_1, m_2)$  consiste no número de palavras  $b_1 b_2 \cdots b_{m_1+m_2}$  formadas a partir de  $m_1$  letras  $c_1$  e  $m_2$  letras  $c_2$  com  $b_1 = c_1$ :  $\binom{m_2+m_1-1}{m_1-1}$ .

Agora suponhamos que

$$\#\mathcal{P}(m_1, \dots, m_n) = \prod_{j=1}^{n-1} \binom{m_{j+1} + m_j - 1}{m_j}.$$

Pretendemos mostrar que

$$\#\mathcal{P}(m_0, m_1, \dots, m_n) = \prod_{j=0}^{n-1} \binom{m_{j+1} + m_j - 1}{m_j - 1}.$$

Onde  $m_0$  é número de novas letras  $c_0$  acrescentadas.

Para cada palavra  $\pi \in \mathcal{P}(m_1, \dots, m_n)$  e  $1 \leq k \leq m_1$  definimos a  $k$ -ésima sílaba de  $\pi$  como  $\bar{b}_k = b_k b_{k+1} \cdots b_{i_k^* - 1}$ , onde  $i_0^* := 1$  e  $i_k^* := \inf\{i > i_{k-1}^* : b_i = b_1\}$ . Agora observe que cada palavra  $\tilde{\pi} \in \mathcal{P}(m_0, m_1, \dots, m_n)$  é obtida a partir de uma palavra  $\pi \in \mathcal{P}(m_1, \dots, m_n)$  fazendo  $b_0 = c_0$  e ordenando as  $m_0 - 1$  letras  $c_0$  restantes com as  $m_1$  sílabas de  $\pi$ . Isto pode ser feito de  $\binom{m_1+m_0-1}{m_0-1}$  maneiras distintas. Logo

$$\begin{aligned} \#\mathcal{P}(m_0, m_1, \dots, m_n) &= \#\mathcal{P}(m_1, \dots, m_n) \binom{m_1 + m_0 - 1}{m_0 - 1} \\ &= \prod_{j=0}^{n-1} \binom{m_{j+1} + m_j - 1}{m_j - 1}. \end{aligned}$$

Portanto o Lema 2.5 está provado.  $\square$

Como mostra o lema abaixo, a função de Green nos permite calcular as probabilidades em (2.54).

**Lema 2.6.** *Considere  $n < m$  e  $x \in \Lambda_m \setminus \Lambda_n \subset \mathbb{Z}^2$ . Então*

$$P_x(T_n < T_m) = \frac{\log\left(\frac{m}{|x|}\right) + O(n^{-1})}{\log\left(\frac{m}{n}\right)}. \quad (2.58)$$

*Prova.* Usando a função de Green e a Propriedade de Markov forte,

$$\begin{aligned} G_{\Lambda_m}(x, 0) &= E_x \left[ 1_{\{T_n < T_m\}} E_{X_{T_n}} [L_{T_n}^0] \right] \\ &= P_x(T_n < T_m) E_x \left[ \sum_{y \in \partial \Lambda_n} 1_{\{X_{T_n} = y\}} E_y [L_{T_n}^0] \right] \\ &= P_x(T_n < T_m) \sum_{y \in \partial \Lambda_n} P_x(X_{T_n} = y) G_{\Lambda_m}(y, 0). \end{aligned}$$

Pelo item 1 do Lema 2.1 e usando que  $|y| = n$ , para todo  $y \in \partial\Lambda_n$ ,

$$P_x(T_n < T_m) = \frac{2/\pi \log\left(\frac{m}{|x|}\right) + O(|x|^{-1})}{2/\pi \log\left(\frac{m}{n}\right) + O(n^{-1})} = \frac{\log\left(\frac{m}{|x|}\right) + O(n^{-1})}{\log\left(\frac{m}{n}\right)}.$$

□

Usando o Lema 2.6, para todo  $1 \leq j \leq n-1$ , se  $y \in \partial\Lambda_{r_j}(x)$ , temos

$$P_y(T_{\partial\Lambda_{r_{j+1}}}(x) < T_{\partial\Lambda_{r_{j-1}}}) = \frac{\log\left(\frac{r_{j-1}}{|x-y|}\right) + O(r_{j+1}^{-1})}{\log\left(\frac{r_{j-1}}{r_{j+1}}\right)} = \frac{1}{2} + O((e^n \log n)^{-1}). \quad (2.59)$$

Consequentemente

$$P_y(T_{\partial\Lambda_{r_{j-1}}}(x) < T_{\partial\Lambda_{r_{j+1}}}) = \frac{1}{2} + O((e^n \log n)^{-1}). \quad (2.60)$$

Além disso, podemos estimar a probabilidade do passeio iniciando na origem alcançar  $\partial\Lambda_{r_1}(x)$  antes de sair de  $\Lambda_{R_n}$ . De fato, pelo Lema 2.6,

$$\begin{aligned} P(T_{\partial\Lambda_{r_1}}(x) < T_{\Lambda_{R_n}}) &= P_x(T_{\partial\Lambda_{r_1}} < T_{\Lambda_{R_n}}) \\ &= \frac{\log\left(\frac{R_n}{|x|}\right) + O(r_1^{-1})}{\log\left(\frac{R_n}{r_1}\right)}. \end{aligned}$$

Usando que  $\frac{R_n}{r_1} = 16n^3$  e que  $2r_0 \leq |x| \leq 3r_0$ , concluímos

$$\frac{c}{\log n} \leq P(T_{\partial\Lambda_{r_1}}(x) < T_{\Lambda_{R_n}}) \leq \frac{c'}{\log n}. \quad (2.61)$$

Agora usaremos a Propriedade de Markov para calcular a probabilidade da função  $\mathcal{J}$  ser igual a  $\Phi$ . Considere  $y \in \partial\Lambda_{r_1}(x)$ . Dado um vetor  $(m_2, m_3, \dots, m_n)$  com  $\bar{m} = \inf\{i : \Phi(i) = 0\}$ ,

$$P_y(\mathcal{J} = \Phi) = E_y \left[ \prod_{k=1}^{\bar{m}-1} 1_{\{\mathcal{J}(k)=\Phi(k)\}} E_{X_{\tau_{\bar{m}-1}}} [1_{\{\mathcal{J}(\bar{m})=0\}}] \right],$$

Mas, por (2.60) e pela definição de  $\mathcal{J}$ ,

$$\begin{aligned} E_{X_{\tau_{\bar{m}-1}}} [1_{\{\mathcal{J}(\bar{m})=0\}}] &= P_{X_{\tau_{\bar{m}-1}}}(T_{\partial\Lambda_{r_0}}(x) < T_{\partial\Lambda_{r_2}}(x)) \\ &= \frac{1}{2} + O((e^n \log n)^{-1}). \end{aligned}$$

Portanto indutivamente, obtemos

$$P_y(\mathcal{J} = \Phi) = \left( \frac{1}{2} + O((e^n \log n)^{-1}) \right)^{\bar{m}-m_n}. \quad (2.62)$$

O termo  $m_n$  aparece devido ao fato de que  $\mathcal{J}(i) = n$  implica  $\mathcal{J}(i+1) = n-1$  pela definição de  $\tau_i$ . Além disso, se  $\Phi(i) = n$ , então só podemos ter  $\Phi(i+1) = \Phi(i) - 1$ , pela definição de  $\Phi$ . Como  $\sum_{j=2}^n m_j = n^3 \log n (1 + O((\log n)^{-1}))$ , podemos reescrever (2.62),

$$P_y(\mathcal{J} = \Phi) = \left(\frac{1}{2}\right)^{\bar{m}-m_n} \left(1 + O(n^3/e^n)\right). \quad (2.63)$$

Portanto por (2.63), (2.57) e pelo Lema 2.5, para  $y \in \partial\Lambda_{r_1}(x)$ ,

$$\begin{aligned} & P_y(x \text{ é bem cercado}) \\ &= \left(1 + O(n^3/e^n)\right) \sum_{\vec{m}} (\#\mathcal{H}_n(\vec{m})) \left(\frac{1}{2}\right)^{\bar{m}-m_n} \\ &= \left(1 + O(n^3/e^n)\right) \sum_{\vec{m}} \prod_{j=2}^{n-1} \binom{m_{j+1} + m_j - 1}{m_j - 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{\bar{m}-m_n}. \end{aligned}$$

Usando que  $\bar{m} - m_n = 2 + \sum_{j=2}^{n-1} (m_{j+1} + m_j)$ , temos

$$\begin{aligned} & P_y(x \text{ é bem cercado}) \\ &= \left(1 + O(n^3/e^n)\right) \frac{1}{4} \sum_{\vec{m}} \prod_{j=2}^{n-1} \binom{m_{j+1} + m_j - 1}{m_j - 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{m_{j+1}+m_j}. \end{aligned} \quad (2.64)$$

Usaremos o Lema 2.7 abaixo para obter a cota em (2.64). A sua prova será dada no Apêndice.

**Lema 2.7.** *Para algumas constantes positivas  $c$  e  $\tilde{c}$ , todo  $j \geq 2$ ,  $m_{j+1}$  e  $m_j$  tais que  $|m_{j+1} - l_j(a)| \leq j+1$  e  $|m_j - l_j(a)| \leq j$ ,*

$$\frac{c j^{-3a-1}}{\sqrt{\log j}} \leq \binom{m_{j+1} + m_j - 1}{m_j - 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{m_{j+1}+m_j} \leq \frac{\tilde{c} j^{-3a-1}}{\sqrt{\log j}}.$$

Segue do Lema 2.7 que

$$\begin{aligned} \sum_{\vec{m}} \prod_{j=2}^{n-1} \binom{m_{j+1} + m_j - 1}{m_j - 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{m_{j+1}+m_j} &\geq \sum_{\vec{m}} \prod_{j=2}^{n-1} \frac{c j^{-3a-1}}{\sqrt{\log j}} \\ &= \prod_{j=2}^{n-1} \frac{c j^{-3a}}{\sqrt{\log j}} \sum_{\vec{m}} \frac{1}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

Usando que  $\#\{m_j : |m_j - l_j(a)| \leq j\} = 2j+1$  e que  $m_j = 1$  para todo  $j = 2, \dots, j_* - 1$

$$\begin{aligned} & \prod_{j=2}^{n-1} \frac{c j^{-3a}}{\sqrt{\log j}} \sum_{\vec{m}} \frac{1}{(n-1)!} \\ &= \left(\prod_{j=2}^{n-1} \frac{c j^{-3a}}{\sqrt{\log j}}\right) \frac{(2n+1)(2n-1)\cdots(2j_*+1)}{(n-1)!}. \end{aligned}$$

Mas

$$\begin{aligned} \frac{(2n+1)(2n-1)\cdots(2j_*+1)}{(n-1)!} &= \frac{2^{n-j_*}(n+1/2)(n-1/2)\cdots(j_*+1/2)}{(n-1)!} \\ &\geq \frac{2^{n-j_*}n(n-1)\cdots j_*(j_*-1)!}{(j_*-1)!(n-1)!} \\ &\geq 2^{n-2}. \end{aligned}$$

Logo

$$\sum_{\vec{m}} \prod_{j=2}^{n-1} \frac{c_j^{j-3a-1}}{\sqrt{\log j}} \geq \prod_{j=2}^{n-1} \frac{c_2 j^{-3a}}{\sqrt{\log j}}$$

e, portanto,

$$\sum_{\vec{m}} \prod_{j=2}^{n-1} \binom{m_{j+1} + m_j - 1}{m_j - 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{m_{j+1} + m_j} \geq \prod_{j=2}^{n-1} \frac{c_2 j^{-3a}}{\sqrt{\log j}}. \quad (2.65)$$

Agora usaremos (2.65) e (2.64), para estimar a probabilidade do ponto  $x$  ser bem cercado. Mas antes disso, observe que

$$\prod_{j=2}^{n-1} \frac{c_2 j^{-3a}}{\sqrt{\log j}} \geq (n!)^{-3a} c_2^{n-2} \left( \prod_{j=2}^{n-1} \frac{1}{\log j} \right)^{1/2}$$

e

$$\begin{aligned} \log \left\{ c_2^{n-2} \left( \prod_{j=2}^{n-1} \frac{1}{\log j} \right)^{1/2} \right\} &= (\log n!) \frac{(n-2) \log c_2 - \frac{1}{2} \sum_{j=2}^{n-1} \log \log j}{\sum_{j=1}^n \log j} \\ &\geq (\log n!) \frac{(n-2) \log c_2 - n \log \log n}{n \log n} \\ &\geq (\log n!) \left( -\frac{\log \log n}{\log n} \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\prod_{j=2}^{n-1} \frac{c_2 j^{-3a}}{\sqrt{\log j}} \geq (n!)^{-3a - \frac{\log \log n}{\log n}} \geq (n^{3n})^{-a - \frac{\log \log n}{3 \log n}} \geq R_n^{-a - \frac{\log \log n}{3 \log n}}. \quad (2.66)$$

De maneira análoga, obtemos

$$\prod_{j=2}^{n-1} \frac{c_3 j^{-3a}}{\sqrt{\log j}} \leq (n!)^{-3a - \frac{c_4}{\log n}}. \quad (2.67)$$

Pela Propriedade de Markov forte,

$$\begin{aligned} P(x \text{ é bem cercado}) &= E[1_{\{\chi_n(x)=1\}} 1_{\{T_{\partial\Lambda_{r_1}(x)} < T_{\Lambda_{\bar{R}_n}^c}\}}] \\ &= E[1_{\{T_{\partial\Lambda_{r_1}(x)} < T_{\Lambda_{\bar{R}_n}^c}\}} E_{X_{T_{\partial\Lambda_{r_1}(x)}}} [1_{\{\chi_n(x)=1\}}]] . \end{aligned}$$

Assim, por (2.64), (2.61) e para  $n$  suficientemente grande

$$\begin{aligned} &\frac{c}{8 \log n} \sum_{\bar{m}} \prod_{j=2}^{n-1} \binom{m_{j+1} + m_j - 1}{m_j - 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{m_{j+1} + m_j} \\ &\leq P(x \text{ é bem cercado}) \\ &\leq \frac{c'}{2 \log n} \sum_{\bar{m}} \prod_{j=2}^{n-1} \binom{m_{j+1} + m_j - 1}{m_j - 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{m_{j+1} + m_j}, \end{aligned} \quad (2.68)$$

para todo  $x \in K_n$ . Por um lado, usando (2.65), (2.66) e tomando  $\delta_n := 2 \frac{\log \log n}{3 \log n}$ , obtemos

$$p_n \geq R_n^{-(a+\delta_n)} .$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned} &P(x \text{ é bem cercado}) \\ &\leq \frac{4c'}{c} \frac{c}{8 \log n} \sum_{\bar{m}} \prod_{j=2}^{n-1} \binom{m_{j+1} + m_j - 1}{m_j - 1} \left(\frac{1}{2}\right)^{m_{j+1} + m_j} \\ &\leq \bar{c} p_n . \end{aligned}$$

Portanto o item 1 da Proposição 2.3 está provado.

## 2.5.2 Prova do segundo item

Nesta seção esboçaremos a prova do item 2 da Proposição 2.3; os detalhes encontram-se em [3]. Precisamos achar uma cota superior para

$$E[\chi_n(x)\chi_n(y)] \equiv P(x \text{ e } y \text{ bem cercados}) .$$

A dificuldade de estudar o evento  $\{x \text{ e } y \text{ bem cercados}\}$  é devida ao fato das excursões em torno de  $x$  e  $y$  serem fortemente dependentes. O primeiro passo é de reduzir essa dependência.

Fixados  $x, y \in K_n$ , lembramos que  $l(x, y)$  é definido como sendo o menor índice  $j$  tal que  $\Lambda_{r_j}(x) \cap \Lambda_{r_j}(y) = \emptyset$ . Seja então

$$\ell := l(x, y) + 1 ,$$

o que implica  $\Lambda_{r_\ell}(x) \cap \Lambda_{r_\ell}(y) = \emptyset$ . Definiremos a  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{G}_\ell(z)$  gerada pelas excursões de  $\partial\Lambda_{r_{\ell-1}}(z)$  para  $\partial\Lambda_{r_\ell}(z)$ . Para isso, seja  $\bar{\tau}_0 = 0$  e para  $i = 1, 2, \dots$

$$\tau_i := \inf\{s > \bar{\tau}_{i-1} : X_s \in \partial\Lambda_{r_\ell}(z)\} ,$$

$$\bar{\tau}_i := \inf\{s > \tau_i : X_s \in \partial\Lambda_{r_{\ell-1}}(z)\}.$$

As excursões de  $\partial\Lambda_{r_{\ell-1}}(z)$  para  $\partial\Lambda_{r_\ell}(z)$  são definidas por

$$e_i := \{X_s : \bar{\tau}_{i-1} < s < \tau_i\}, \quad i = 1, 2, \dots$$

A  $\sigma$ -álgebra gerada pelas excursões de  $\partial\Lambda_{r_{\ell-1}}(z)$  para  $\partial\Lambda_{r_\ell}(z)$  é definida como

$$\mathcal{G}_\ell(z) := \sigma(e_j, j = 1, 2, \dots).$$

Escreveremos  $m_j \sim l_j(a)$  se  $m_j$  satisfaz a condição da Definição 2.2, ou seja:  $m_j = 1$  se  $j = 2, \dots, j_* - 1$  e  $|m_j - l_j(a)| < j$  se  $j = j_*, j_* + 1, \dots, n$ . Para  $z \in \mathbb{Z}^2$  e  $I \subset \{1, 2, \dots, n\}$ , defina

$$\mathcal{N}_z(I) := \{N_j(z) \sim l_j(a), j \in I\}.$$

Observe que

$$\{x \text{ e } y \text{ bem cercados}\} \subset \bigcup_{\substack{m_\ell: \\ m_\ell \sim l_\ell(a)}} \mathcal{N}_x(I_\ell) \cap \mathcal{N}_y(J_\ell) \cap \{N_\ell(y) = m_\ell\}$$

onde  $I_\ell := \{2, 3, \dots, \ell - 3, \ell, \dots, n\}$ , e  $J_\ell := \{\ell + 1, \ell + 2, \dots, n\}$ . Portanto,

$$P(x \text{ e } y \text{ bem cercados}) \leq \sum_{\substack{m_\ell: \\ m_\ell \sim l_\ell(a)}} P(\mathcal{N}_x(I_\ell), \mathcal{N}_y(J_\ell), \{N_\ell(y) = m_\ell\})$$

Observe que  $\mathcal{G}_\ell(y)$  contém toda a informação sobre o passeio entre o tempo 0 e até sair da caixa  $\Lambda_{R_n}$ , menos os detalhes da trajetória dentro de  $\Lambda_{r_\ell}(y)$ . Portanto,

$$P(\mathcal{N}_x(I_\ell), \mathcal{N}_y(J_\ell), \{N_\ell(y) = m_\ell\}) = E\left[P(\mathcal{N}_y(J_\ell) | \mathcal{G}_\ell(y)) 1_{\{N_\ell(y) = m_\ell\}} 1_{\mathcal{N}_x(I_\ell)}\right]$$

Mas, olhando agora para  $y$ , observe que condicionalmente a  $\mathcal{G}_\ell(y)$ , a probabilidade do evento  $\mathcal{N}_y(J_\ell)$  é completamente determinada pelas posições  $X_{\tau_1}, X_{\tau_2}, \dots, X_{\tau_{N_\ell(y)}}$ . Na verdade, pode ser mostrado que essa probabilidade é determinada somente a partir do conhecimento do número  $N_\ell(y)$ , e não das posições exatas  $X_{\tau_1}, X_{\tau_2}, \dots, X_{\tau_{N_\ell(y)}}$ . Assim (veja o *Decoupling Lemma* em [3]), existe uma constante  $c_1 > 0$  tal que

$$P(\mathcal{N}_y(J_\ell) | \mathcal{G}_\ell(y)) 1_{\{N_\ell(y) = m_\ell\}} \leq c_1 P(\mathcal{N}_y(J_\ell) | N_\ell(y) = m_\ell).$$

Portanto,

$$P(x \text{ e } y \text{ bem cercados}) \leq c_1 P(\mathcal{N}_x(I_\ell)) \sum_{\substack{m_\ell: \\ m_\ell \sim l_\ell(a)}} P(\mathcal{N}_y(J_\ell) | N_\ell(y) = m_\ell)$$

Esta última expressão contém dois termos desacoplados, dependendo respectivamente de  $x$  e  $y$ . Esses termos podem ser calculados usando a técnica de combinatoria desenvolvida na Seção 2.5.1:

$$P(\mathcal{N}_x(I_\ell)) \leq c_2 p_n \ell^{15} ((\ell - 1)!)^{\delta'_{\ell-1}}$$

$$\sum_{\substack{m_\ell: \\ m_\ell \sim l_\ell(a)}} P(\mathcal{N}_y(J_\ell) | N_\ell(y) = m_\ell) \leq c_3 p_n ((\ell - 1)!)^{3a + \delta_{\ell-1}}$$

Lembrando que  $\ell - 1 = l(x, y)$ , multiplicando essas duas expressões obtemos (2.40).



# Capítulo 3

## Apêndice

### 3.1 Prova da Proposição 2.1

Seja  $X_n = \sum_{k=1}^n \xi_k$  o passeio aleatório simples simétrico em  $\mathbb{Z}^2$ , começando na origem. Considere dois passeios aleatórios simples simétricos  $(Z_n)_{n \geq 0}$  e  $(Y_n)_{n \geq 0}$  em  $\mathbb{Z}$  independentes, ambos iniciando na origem e com incrementos  $(\varphi_i)_{i \geq 1}$  e  $(\psi_i)_{i \geq 1}$ , respectivamente. O passeio aleatório  $X_n$  pode ser definido como

$$\xi_k := \frac{1}{2} \left\{ \varphi_k \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \psi_k \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$$

e

$$X_n := \frac{1}{2} \left\{ Z_n \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + Y_n \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}.$$

Assim, os passeios  $Z_n$  e  $Y_n$  descrevem o passeio aleatório  $X_n$  na rede  $\mathbb{Z}^2$ . Lembramos que  $T_n = T_{\Lambda_n^c}$ .

*Prova do Teorema 2.1.* Queremos mostrar que

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \frac{\log T_n}{\log n} \leq 2, \text{ q.c.} \quad (3.1)$$

Dado  $\varepsilon > 0$ ,

$$\begin{aligned} P(T_n > n^{2+\varepsilon}) &\leq P(X_{\lfloor n^{2+\varepsilon} \rfloor} \in \Lambda_n) \\ &\leq P(|Z_{\lfloor n^{2+\varepsilon} \rfloor}| < 2n, |Y_{\lfloor n^{2+\varepsilon} \rfloor}| < 2n, ) \\ &= \left( P(|Z_{\lfloor n^{2+\varepsilon} \rfloor}| < 2n) \right)^2 \\ &= \left( \sum_{k=-2n}^{2n} P(Z_{\lfloor n^{2+\varepsilon} \rfloor} = k) \right)^2. \end{aligned}$$

Pelo Teorema 1.2, para  $d = 1$

$$P(Z_{\lfloor n^{2+\varepsilon} \rfloor} = k) \leq \frac{c_1}{\sqrt{\lfloor n^{2+\varepsilon} \rfloor}} \simeq \frac{c_1}{n^{1+\varepsilon/2}}.$$

para constantes positivas  $c_1$  e  $c_2$ . Portanto

$$P(T_n > n^{2+\varepsilon}) \leq \frac{c_3}{n^\varepsilon}. \quad (3.2)$$

Pegando  $n_j := 2^j$ , para todo  $\varepsilon > 0$ , temos

$$\limsup_{j \rightarrow \infty} \frac{\log T_{n_j}}{\log n_j} \leq 2 + \varepsilon, \text{ q.c. .}$$

Um raciocínio semelhante ao usado na prova da cota superior da Proposição 1.3 completa a prova do Teorema 2.1.

Agora, queremos mostrar que

$$\liminf_{n \rightarrow \infty} \frac{\log T_n}{\log n} \geq 2, \text{ q.c. .} \quad (3.3)$$

Observe que, se  $T_n \leq n^{2-\varepsilon}$ , então existe  $n \leq k \leq \lfloor n^{2-\varepsilon} \rfloor$  tal que  $X_k \notin \Lambda_n$ . Logo,

$$P(T_n \leq n^{2-\varepsilon}) \leq \sum_{k=n}^{\lfloor n^{2-\varepsilon} \rfloor} P(X_k \notin \Lambda_n). \quad (3.4)$$

Mas,  $X_k \notin \Lambda_n$  implica  $|Z_k| > \frac{n}{\sqrt{2}}$  ou  $|Y_k| > \frac{n}{\sqrt{2}}$ . Usando que os passeios  $Z_n$  e  $Y_n$  são identicamente distribuídos e simétricos temos

$$P(X_k \notin \Lambda_n) \leq 4P(Z_k > \frac{n}{\sqrt{2}}).$$

Pegando  $t \in (0, 1)$ , temos

$$P(Z_k > \frac{n}{\sqrt{2}}) \leq e^{-t \frac{n}{\sqrt{2}}} (E[e^{t\varphi_1}])^k = e^{-t \frac{n}{\sqrt{2}}} (\cosh(t))^k.$$

Mas para  $t \in (0, 1)$  existe uma constante<sup>1</sup>  $c_4 > 1/2$  tal que  $\cosh(t) \leq 1 + c_4 t^2$ . Logo,

$$e^{-t \frac{n}{\sqrt{2}}} (\cosh(t))^k \leq e^{-t \frac{n}{\sqrt{2}}} (1 + c_4 t^2)^k \leq e^{kc_4 t^2 - t \frac{n}{\sqrt{2}}}.$$

para todo  $t \in (0, 1)$ .

A função  $f(t) = kc_4 t^2 - nt$  para  $t \in (0, 1)$ , atinge o mínimo quando  $t = \frac{n}{2\sqrt{2}c_4 k} \in (0, 1)$  e vale  $f(\frac{n}{2\sqrt{2}c_4 k}) = -c_5 \frac{n^2}{k}$ , com  $c_5 > 0$ . Usando (3.4),

$$P(T_n \leq n^{2-\varepsilon}) \leq n^{2-\varepsilon} \max_{n \leq k \leq n^{2-\varepsilon}} \left\{ e^{-c_5 \frac{n^2}{k}} \right\} = n^{2-\varepsilon} e^{-c_5 n^\varepsilon}.$$

Portanto, usando o Lema de Borel-Cantelli, obtemos (3.3) que junto com (3.1) prova a Proposição 2.1.  $\square$

<sup>1</sup>Usando a expansão de Taylor da função  $g(t) = \cosh t$ , com  $t \in (0, 1)$ , temos

$$\begin{aligned} \cosh t &\leq 1 + t^2 \left( \sum_{j \geq 1} \frac{1}{(2j)!} \right) \\ &= 1 + (\cosh(1) - 1)t^2. \end{aligned}$$

Basta fazer  $c_4 := \cosh(1) - 1 > 1/2$ .

## 3.2 Prova do Lema 2.7

Para facilitar a notação escreveremos  $m := m_{k+1}$  e  $l = m_k - 1$ . Portanto queremos mostrar que, para constantes positivas  $c$  e  $\tilde{c}$ ,

$$\frac{ck^{-3a-1}}{\sqrt{\log k}} \leq \binom{m+l}{l} \left(\frac{1}{2}\right)^{m+l+1} \leq \frac{\tilde{c}k^{-3a-1}}{\sqrt{\log k}}.$$

Usando que  $|m - l_k(a)| \leq k + 1$  e que  $|l + 1 - l_k(a)| \leq k$ , temos

$$\frac{m}{l} = 1 + \frac{2}{k} + O\left(\frac{1}{k \log k}\right). \quad (3.5)$$

Basta observar que

$$m = 3ak^2 \log k \left(1 + O\left(\frac{1}{\log k}\right)\right) + 6ak \log k \quad (3.6)$$

e

$$l = 3ak^2 \log k \left(1 + O\left(\frac{1}{k \log k}\right)\right). \quad (3.7)$$

Por (3.5) e pela fórmula de Stirling

$$m! = \sqrt{2\pi m} m^m e^{-m} \sqrt{m} (1 + o(1)),$$

temos

$$\binom{m+l}{l} \left(\frac{1}{2}\right)^{m+l} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{1 + \frac{l}{m}} \left(\frac{m}{l}\right)^{-m} \left(1 + \frac{m}{l}\right)^{m+l} \left(\frac{1}{2}\right)^{m+l} (1 + o(1)). \quad (3.8)$$

Agora usando (3.5) e (3.7),

$$\begin{aligned} & \frac{c_1}{\sqrt{k^2 \log k}} \left(\frac{m}{l}\right)^{-m} \left(1 + \frac{m}{l}\right)^{m+l} \left(\frac{1}{2}\right)^{m+l} \\ & \leq \binom{m+l}{l} \left(\frac{1}{2}\right)^{m+l} \\ & \leq \frac{c_2}{\sqrt{k^2 \log k}} \left(\frac{m}{l}\right)^{-m} \left(1 + \frac{m}{l}\right)^{m+l} \left(\frac{1}{2}\right)^{m+l}. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Além disso, temos

$$\begin{aligned} & \left(\frac{m}{l}\right)^{-m} \left(1 + \frac{m}{l}\right)^{m+l} \left(\frac{1}{2}\right)^{m+l} \\ & = \exp \left\{ \log \left( \left(\frac{m}{l}\right)^{-m} \left(1 + \frac{m}{l}\right)^{m+l} \left(\frac{1}{2}\right)^{m+l} \right) \right\} \\ & = \exp \left\{ -l g \left( \frac{m}{l} \right) \right\}, \end{aligned} \quad (3.10)$$

em que

$$g(x) = x \log x - (1+x) \log(1+x) + (1+x) \log 2.$$

A função  $g(x)$  é tal que  $g(1) = g'(1) = 0$ ,  $g''(1) = 1/2$ . Logo, se  $|x| < 1$  a expansão de Taylor da função  $g$  nos dá

$$g(x+1) = \frac{1}{4}x^2 + O(x^3).$$

Então, por (3.5)

$$\begin{aligned} g\left(\frac{m}{l}\right) &= \frac{1}{4}\left(\frac{m}{l} - 1\right)^2 + O\left(\left(\frac{m}{l} - 1\right)^3\right) \\ &= \frac{1}{k^2} + O\left(\frac{1}{k^2 \log k}\right) \end{aligned}$$

e, por (3.7),

$$-lg\left(\frac{m}{l}\right) = -3a \log k + O(1). \quad (3.11)$$

Portanto de (3.11), (3.10) e (3.9), obtemos

$$\frac{c_3 k^{-3a-1}}{\sqrt{\log k}} \leq \binom{m+l}{l} \left(\frac{1}{2}\right)^{m+l+1} \leq \frac{c_4 k^{-3a-1}}{\sqrt{\log k}},$$

provando, assim, o Lema 2.7.

### 3.3 Estimativas

Nesta seção daremos uma estimativa para a seguinte soma, usada para estudar a probabilidade de escapar na Seção 1.1.2,

$$\sum_{j=0}^m P(X_{2j} = 0).$$

Pelo Teorema 1.2, existe uma constante  $c_1$  tal que

$$\frac{1}{\pi j} - \frac{c_1}{j^2} \leq P(X_{2j} = 0) = \frac{1}{\pi j} + \frac{c_1}{j^2}.$$

Seja  $S := \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{j^2} < \infty$ . Logo, por um lado, temos

$$\sum_{j=0}^m P(X_{2j} = 0) \leq 1 + \frac{1}{\pi} + \sum_{j=2}^m \frac{1}{\pi j} + S.$$

Mas

$$\sum_{j=2}^m \frac{1}{\pi j} \leq \frac{1}{\pi} \int_1^m \frac{dx}{x} = \frac{1}{\pi} \log m.$$

Logo

$$\sum_{j=0}^m P(X_{2j} = 0) \leq \frac{1}{\pi} \log m + c_2, \quad (3.12)$$

onde  $c_2$  é uma constante positiva.

Do mesmo modo,

$$\sum_{j=0}^m P(X_{2j} = 0) \geq 1 + \sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{\pi j} - S.$$

Mas

$$\sum_{j=1}^{m-1} \frac{1}{\pi j} \geq \frac{1}{\pi} \int_1^m \frac{dx}{x} = \frac{1}{\pi} \log m.$$

Logo

$$\sum_{j=0}^m P(X_{2j} = 0) \geq \frac{1}{\pi} \log m - c_3, \quad (3.13)$$

para alguma constante positiva  $c_3$ . Portanto de (3.13) e (3.12) concluímos que

$$\sum_{j=0}^m P(X_{2j} = 0) = \frac{1 + o(1)}{\pi} \log m. \quad (3.14)$$



# Referências Bibliográficas

- [1] P. Erdős e S. J. Taylor (1960), *Some problems concerning the structure of random walk paths*, Acta Math. Acad. Sci. Hungar., **11**, 137-162.
- [2] A. Dembo, Y. Peres, J. Rosen e O. Zeitouni (2001), *Thick Points for Planar Brownian Motion and the Erdős-Taylor Conjecture on Random Walk*. Acta Math **186**, 239-270.
- [3] J. Rosen (2005), *A random walk proof of the Erdős-Taylor conjecture*, Periodica Mathematica Hungarica. **50**, 223-245.
- [4] G. Lawler (1991), *Intersections of random walks*, Birkhäuser.
- [5] P. Révész (1990), *Random Walk in Random and Non-Random Environments*, World Scientific, Singapore.
- [6] A.N. Shiryaev (1984), *Probability*, Springer- Verlag, New York.