

Monique Rafaella Anunciação

Órbitas Periódicas em Bilhares Convexos

Universidade Federal de Minas Gerais

2012

Monique Rafaella Anunciação

Órbitas Periódicas em Bilhares Convexos

Dissertação de mestrado apresentada como requisito da obtenção do título de Mestre pelo Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais.

Orientadora: Sônia Pinto de Carvalho

Universidade Federal de Minas Gerais

2012

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela dádiva da vida.

Aos meus pais pelo apoio de sempre.

As professoras Sônia e Sylvie pelos conhecimentos adquiridos.

Aos meus irmãos pelo carinho.

Ao meu noivo por todo amor e incentivo.

Aos meus colegas da pós-graduação, em especial a Vitor, Luiza e Luiz.

Resumo

O objetivo desse trabalho é mostrar que a aplicação de bilhar em uma curva plana, fechada, simples, de classe C^k , $k \geq 2$ e parametrizada pelo comprimento de arco admite pelo menos uma órbita periódica de período n , para cada n fixado, que é hiperbólica ou parabólica.

Sumário

1	Aplicação do Biliar e Propriedades	6
2	Estabilidade de Órbitas Periódicas	15
2.1	Existência de Órbitas Periódicas	15
2.2	As Fórmulas de Mackay-Meiss e Hill	20
2.3	Resultado	29

Introdução

Uma curva plana, fechada, simples, limitando uma região simplesmente conexa do plano onde consideramos uma partícula movendo-se em linha reta, com velocidade com módulo constante e satisfazendo a lei de reflexão nos impactos com o bordo, é chamada de bilhar. A aplicação de bilhar fornece, a partir de uma posição na fronteira e um ângulo que indica a direção de saída, o próximo ponto de impacto na fronteira e a próxima direção de saída.

Birkhoff provou em [6] que para quaisquer $n, k \in \mathbb{N}, n > k$, existem pelo menos duas trajetórias periódicas da aplicação do bilhar, onde uma trajetória corresponde a um máximo da aplicação que mede o perímetro do polígono inscrito na curva. Se o ponto de máximo for um ponto crítico dessa aplicação, então a outra trajetória não é um máximo da aplicação.

No presente trabalho verificamos, via fórmulas de Mackay-Meiss e Hill, que a aplicação de bilhar admite, para cada $n \geq 2$ fixo, pelo menos uma órbita periódica de período n , que é hiperbólica ou parabólica.

O primeiro capítulo aborda algumas definições acerca do bilhar e resultados que mostram que a aplicação de bilhar é um difeomorfismo que preserva a medida de Lebesgue. A dissertação [9] foi utilizada como referência para esse capítulo.

No capítulo dois verificamos quando uma órbita periódica em um bilhar convexo é hiperbólica, parabólica ou elíptica. Apresentamos as fórmulas de Mackay-Meiss e de Hill, donde obtivemos hipóteses para classificar uma órbita periódica em um bilhar convexo. Estudamos essas fórmulas em [2], [5] e [1].

Por fim, mostramos nosso principal resultado: a aplicação de bilhar admite pelo menos uma órbita periódica de período n , para cada n fixado, que é hiperbólica ou parabólica.

Capítulo 1

Aplicação do Bilhar e Propriedades

Neste capítulo apresentaremos algumas definições acerca de bilhares, em particular a aplicação do bilhar e algumas propriedades.

Seja Γ uma curva plana, fechada, simples, de classe C^k , $k \geq 2$, orientada no sentido anti-horário, com curvatura estritamente positiva, parametrizada pelo comprimento de arco $s \in [0, \ell)$, onde ℓ é o comprimento de Γ , que limita uma região Ω simplesmente conexa do plano \mathbb{R}^2 .

Consideremos uma partícula movendo-se em linha reta em Ω com velocidade constante, e com colisão elástica na fronteira, satisfazendo a lei de reflexão: o ângulo de incidência é igual ao ângulo de reflexão. O caminho descrito por uma partícula é dita a **trajetória do bilhar**. Essa trajetória é identificada com uma poligonal, e cada segmento dessa poligonal é um **segmento da trajetória do bilhar**.

A dinâmica do movimento no bilhar é dada pela sequência de posições s_i da partícula nos momentos de colisão com Γ e direção de movimento após cada impacto, dada pelo ângulo α_i , medido entre o vetor tangente a Γ em s_i e o segmento da trajetória de saída.

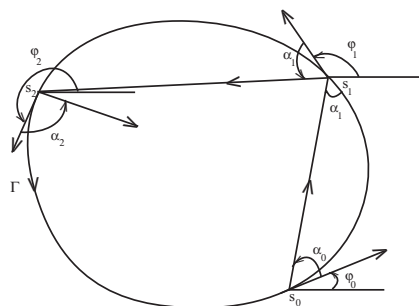


Figura 1: Trajetória de bilhar.

Temos a seguinte definição.

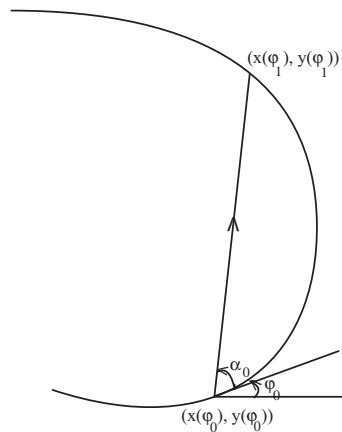
Definição 1.1. *Seja $T : [0, \ell) \times (0, \pi) \rightarrow [0, \ell) \times (0, \pi)$ dada por $T(s_0, \alpha_0) = (s_1, \alpha_1)$, onde ℓ é o comprimento da curva Γ . A aplicação T é chamada a **aplicação de bilhar da curva Γ** .*

Seja φ_i o ângulo orientado entre a direção positiva do eixo dos x e o vetor tangente a Γ em s_i . Como a curvatura de Γ é estritamente positiva, então o raio de curvatura $R(\varphi) = \frac{ds}{d\varphi}$ é estritamente positivo, e é possível reparametrizar Γ por φ .

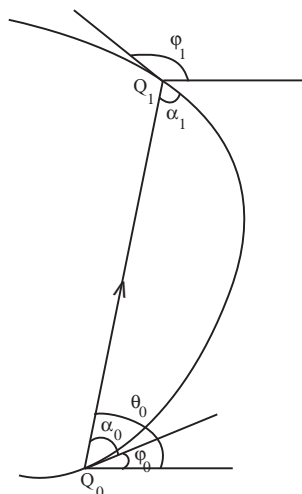
Se a curva Γ está parametrizada pelo comprimento de arco, então $\Gamma(s) = (x(s), y(s))$ e o vetor unitário tangente é dado por

$$t(s) = \left(\frac{dx}{ds}, \frac{dy}{ds} \right) = \Gamma'(s) = (\cos(\varphi(s)), \text{sen}(\varphi(s))).$$

Consideremos as equações paramétricas de Γ no parâmetro φ , $x = x(\varphi)$ e $y = y(\varphi)$. Pela figura abaixo vemos que $\text{tg}(\varphi_0 + \alpha_0) = \frac{y(\varphi_1) - y(\varphi_0)}{x(\varphi_1) - x(\varphi_0)}$.



Temos também que $\varphi_1 - \alpha_1 = \varphi_0 + \alpha_0$, ou seja, $\alpha_1 = \varphi_1 - \varphi_0 - \alpha_0$. Definindo o ângulo θ_0 entre a parte positiva do eixo x e o segmento da trajetória de saída, obtemos que $\alpha_0 = \theta_0 - \varphi_0$ e $\alpha_1 = \varphi_1 - \theta_0$.



Mostramos abaixo que a aplicação do bilhar é um difeomorfismo de classe C^{k-1} , para depois calcular o determinante da matriz da derivada de T .

Teorema 1.1. *Consideremos Γ uma curva plana, fechada, simples, de classe C^k , $k \geq 2$, com curvatura estritamente positiva e de comprimento ℓ . Sejam C o cilindro $[0, \ell) \times (0, \pi)$ e $T : C \rightarrow C$ a aplicação de bilhar de Γ . A aplicação T é um difeomorfismo C^{k-1} .*

Demonstração. Consideremos as equações paramétricas de Γ , $x = f(s)$, $y = g(s)$ e seja $(\hat{s}_0, \hat{\alpha}_0) \in C$ com $T(\hat{s}_0, \hat{\alpha}_0) = (\hat{s}_1, \hat{\alpha}_1)$. Dados $\hat{Q}_0 = (f(\hat{s}_0), g(\hat{s}_0)) \in \Gamma$ e $\hat{Q}_1 = (f(\hat{s}_1), g(\hat{s}_1)) \in \Gamma$, sejam $Q_0 = (f(s_0), g(s_0))$ e $Q_1 = (f(s_1), g(s_1))$ pontos em uma vizinhança de \hat{Q}_0 e em uma vizinhança de \hat{Q}_1 , respectivamente, tomando essas vizinhanças disjuntas.

Suponhamos que $f'(\hat{s}_0) \neq 0$ e $f'(\hat{s}_1) \neq 0$, rodando a região Ω no plano se necessário. Por continuidade, podemos supor que $f'(s_0) \neq 0$ e $f'(s_1) \neq 0$ em vizinhanças suficientemente pequenas de \hat{s}_0 e \hat{s}_1 , respectivamente. Temos:

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \varphi_0 &= \frac{\operatorname{sen} \varphi_0}{\operatorname{cos} \varphi_0} = \frac{g'(s_0)}{f'(s_0)}, \\ \operatorname{tg} \varphi_1 &= \frac{g'(s_1)}{f'(s_1)}, \\ \operatorname{tg} \theta_0 &= \operatorname{tg}(\varphi_0 + \alpha_0) = \frac{g(s_1) - g(s_0)}{f(s_1) - f(s_0)}. \end{aligned}$$

Desse modo,

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \operatorname{arctg} \left(\frac{g'(s_0)}{f'(s_0)} \right), \\ \varphi_1 &= \operatorname{arctg} \left(\frac{g'(s_1)}{f'(s_1)} \right), \\ \theta_0 &= \operatorname{arctg} \left(\frac{g(s_1) - g(s_0)}{f(s_1) - f(s_0)} \right). \end{aligned}$$

Logo,

$$\alpha_0 = \operatorname{arctg} \left(\frac{g(s_1) - g(s_0)}{f(s_1) - f(s_0)} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{g'(s_0)}{f'(s_0)} \right) := M(s_0, s_1), \quad (1.1)$$

$$\alpha_1 = \operatorname{arctg} \left(\frac{g'(s_1)}{f'(s_1)} \right) - \operatorname{arctg} \left(\frac{g(s_1) - g(s_0)}{f(s_1) - f(s_0)} \right) := N(s_0, s_1). \quad (1.2)$$

Pelo Teorema da Função Implícita, para que existam funções $s_1 = s_1(s_0, \alpha_0)$ e $\alpha_1 = \alpha_1(s_0, \alpha_0)$ de classe C^{k-1} em alguma vizinhança de $(\hat{s}_0, \hat{\alpha}_0)$ tal que

$$M(s_0, s_1) - \alpha_0 := U(s_0, \alpha_0, s_1, \alpha_1) = 0,$$

$$N(s_0, s_1) - \alpha_1 := V(s_0, \alpha_0, s_1, \alpha_1) = 0,$$

$$(s_1(\hat{s}_0, \hat{\alpha}_0), \alpha_1(\hat{s}_0, \hat{\alpha}_0)) = (\hat{s}_1, \hat{\alpha}_1),$$

é suficiente que o determinante jacobiano seja diferente de zero, ou seja,

$$J = \det \begin{bmatrix} U_{s_1}(\hat{s}_0, \hat{\alpha}_0, \hat{s}_1, \hat{\alpha}_1) & U_{\alpha_1}(\hat{s}_0, \hat{\alpha}_0, \hat{s}_1, \hat{\alpha}_1) \\ V_{s_1}(\hat{s}_0, \hat{\alpha}_0, \hat{s}_1, \hat{\alpha}_1) & V_{\alpha_1}(\hat{s}_0, \hat{\alpha}_0, \hat{s}_1, \hat{\alpha}_1) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Observemos que

$$J = \det \begin{bmatrix} M_{s_1}(\hat{s}_0, \hat{s}_1) & 0 \\ N_{s_1}(\hat{s}_0, \hat{s}_1) & -1 \end{bmatrix} = -M_{s_1}(\hat{s}_0, \hat{s}_1).$$

Então, basta mostrar que $M_{s_1}(\hat{s}_0, \hat{s}_1) \neq 0$. Derivando (1.1) em relação a s_1 , obtemos:

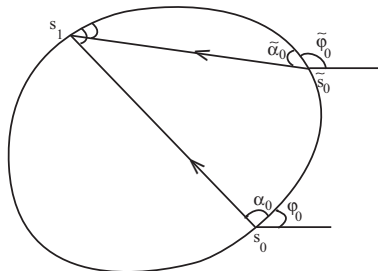
$$\begin{aligned} M_{s_1}(\hat{s}_0, \hat{s}_1) &= \frac{g'(\hat{s}_1)[f(\hat{s}_1) - f(\hat{s}_0)] - f'(\hat{s}_1)[g(\hat{s}_1) - g(\hat{s}_0)]}{[f(\hat{s}_1) - f(\hat{s}_0)]^2} \\ &= \frac{1 + \left[\frac{g(\hat{s}_1) - g(\hat{s}_0)}{f(\hat{s}_1) - f(\hat{s}_0)} \right]^2}{\det \begin{bmatrix} f'(\hat{s}_1) & f(\hat{s}_0) - f(\hat{s}_1) \\ g'(\hat{s}_1) & g(\hat{s}_0) - g(\hat{s}_1) \end{bmatrix}} \\ &= \frac{1 + \left[\frac{g(\hat{s}_1) - g(\hat{s}_0)}{f(\hat{s}_1) - f(\hat{s}_0)} \right]^2}{[f(\hat{s}_0) - f(\hat{s}_1)]^2 + [g(\hat{s}_0) - g(\hat{s}_1)]^2}. \end{aligned} \quad (1.3)$$

Notemos que o denominador da expressão acima nunca se anula, pois $[f(\hat{s}_0) - f(\hat{s}_1)]^2 + [g(\hat{s}_0) - g(\hat{s}_1)]^2 = 0 \Leftrightarrow f(\hat{s}_0) - f(\hat{s}_1) = 0$ e $g(\hat{s}_0) - g(\hat{s}_1) = 0 \Leftrightarrow f(\hat{s}_0) = f(\hat{s}_1)$ e $g(\hat{s}_0) = g(\hat{s}_1) \Leftrightarrow \hat{Q}_0 = \hat{Q}_1$. Desse modo,

$$M_{s_1}(\hat{s}_0, \hat{s}_1) \neq 0 \Leftrightarrow \det \begin{bmatrix} f'(\hat{s}_1) & f(\hat{s}_0) - f(\hat{s}_1) \\ g'(\hat{s}_1) & g(\hat{s}_0) - g(\hat{s}_1) \end{bmatrix} \neq 0.$$

Essa desigualdade é equivalente a dizer que os vetores $(f'(\hat{s}_1), g'(\hat{s}_1))$ e $(f(\hat{s}_0) - f(\hat{s}_1), g(\hat{s}_0) - g(\hat{s}_1))$ não são paralelos, o que é verdade, pois $\hat{\alpha}_1 \neq 0$ e $\hat{\alpha}_1 \neq \pi$. Assim, T é uma aplicação de classe C^{k-1} em alguma vizinhança de $(\hat{s}_0, \hat{\alpha}_0)$.

Vamos verificar se a aplicação T é inversível. Para isso, vejamos que T é injetiva. Com efeito, consideremos o ponto de coordenadas (s_0, α_0) tal que $T(s_0, \alpha_0) = (\hat{s}_1, \hat{\alpha}_1)$. Seja $(\tilde{s}_0, \tilde{\alpha}_0)$ um ponto tal que $T(\tilde{s}_0, \tilde{\alpha}_0) = (\hat{s}_1, \hat{\alpha}_1) = T(s_0, \alpha_0)$.



Observemos que a inclinação da reta que une s_0 e s_1 é dada por $\text{tg}(\alpha_0 + \varphi_0) = \text{tg}(\varphi_1 - \alpha_1)$, e a inclinação da reta que une \tilde{s}_0 e s_1 é dada por $\text{tg}(\tilde{\alpha}_0 + \tilde{\varphi}_0) = \text{tg}(\varphi_1 - \alpha_1)$.

Desse modo, as duas retas tem a mesma inclinação e o ponto s_1 em comum, logo os pontos s_0, s_1 e \tilde{s}_0 são colineares. Mas a curva Γ tem curvatura estritamente positiva, logo o segmento de reta que une s_0 e s_1 está inteiramente contido em Ω , e o mesmo ocorre com o segmento de reta que une \tilde{s}_0 e s_1 . Como $s_0, \tilde{s}_0 \in \Gamma$, resulta que $s_0 = \tilde{s}_0$.

Consideremos a aplicação $\mathcal{R} : C \rightarrow C$ dada por $\mathcal{R}(s, \alpha) = (s, \pi - \alpha)$. Como $T(s_0, \alpha_0) = (s_1, \alpha_1)$, temos que $T^{-1}(s_1, \alpha_1) = (s_0, \alpha_0)$. Logo, $\mathcal{R} \circ T^{-1}(s_1, \alpha_1) = T \circ \mathcal{R}(s_1, \alpha_1)$, e assim, $T^{-1}(s_1, \alpha_1) = \mathcal{R} \circ T \circ \mathcal{R}(s_1, \alpha_1) = (s_0, \alpha_0)$, pois $\mathcal{R}^{-1} = \mathcal{R}$.

Se no lugar de T em uma vizinhança de $(\hat{s}_0, \hat{\alpha}_0)$, consideramos a aplicação T^{-1} em uma vizinhança de $(\hat{s}_1, \hat{\alpha}_1)$ obtemos de modo análogo que T^{-1} é uma aplicação de classe C^{k-1} em alguma vizinhança de $(\hat{s}_1, \hat{\alpha}_1)$. Portanto, T é um difeomorfismo local de classe C^{k-1} em uma vizinhança de $(\hat{s}_0, \hat{\alpha}_0)$.

Como a aplicação T é um difeomorfismo local de classe C^{k-1} e é injetiva, segue que T é um difeomorfismo global de classe C^{k-1} . \square

Teorema 1.2. *Seja $T : C \rightarrow C$ a aplicação de bilhar em Γ , onde C é o cilindro $[0, \ell) \times (0, \pi)$ e ℓ é o comprimento da curva Γ . A aplicação T preserva a medida μ dada por*

$$\mu(\sigma_0) = \iint_{\sigma_0} \text{sen } \alpha_0 \, d\alpha_0 \, ds_0,$$

onde $\sigma_0 \subset C$, ou seja, $\mu(\sigma_0) = \mu(\sigma_1)$, com $\sigma_1 = T(\sigma_0) \subset C$.

Demonstração. Temos que $\mu(\sigma_0) = \mu(\sigma_1)$ se e somente se $\iint_{\sigma_0} \text{sen } \alpha_0 \, d\alpha_0 \, ds_0 = \iint_{\sigma_1} \text{sen } \alpha_1 \, d\alpha_1 \, ds_1$, onde α_i e s_i são tomadas sobre $\sigma_i, i = 0, 1$. Efetuando uma troca de variáveis na segunda integral, obtemos:

$$\iint_{\sigma_1} \text{sen } \alpha_1 \, d\alpha_1 \, ds_1 = \iint_{\sigma_0} \text{sen } \alpha_1 |J| \, d\alpha_0 \, ds_0,$$

onde J é o determinante jacobiano

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial s_0} & \frac{\partial s_1}{\partial \alpha_0} \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_0} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_0} \end{pmatrix} = \frac{\partial s_1}{\partial s_0} \cdot \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_0} - \frac{\partial s_1}{\partial \alpha_0} \cdot \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_0}.$$

Então, $\mu(\sigma_0) = \mu(\sigma_1)$ se e somente se $\iint_{\sigma_0} \text{sen } \alpha_0 \, d\alpha_0 \, ds_0 = \iint_{\sigma_0} \text{sen } \alpha_1 |J| \, d\alpha_0 \, ds_0$, logo, se e somente se $\text{sen } \alpha_1 |J| = \text{sen } \alpha_0$. Como $\text{sen } \alpha_0$ e $\text{sen } \alpha_1$ são positivos, basta mostrar que $J = \frac{\text{sen } \alpha_0}{\text{sen } \alpha_1}$.

Consideremos as equações paramétricas de Γ em coordenadas retangulares, $x = f(s)$ e $y = g(s)$. Derivando (1.2) implicitamente em relação a α_0 e s_0 , obtemos:

$$\frac{\partial N}{\partial s_1}(s_0, s_1) \cdot \frac{\partial s_1}{\partial \alpha_0}(s_0, \alpha_0) = \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_0}(s_0, \alpha_0); \quad (1.4)$$

$$\frac{\partial N}{\partial s_0}(s_0, s_1) + \frac{\partial N}{\partial s_1}(s_0, s_1) \cdot \frac{\partial s_1}{\partial s_0}(s_0, \alpha_0) = \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_0}(s_0, \alpha_0). \quad (1.5)$$

Logo, $J = \frac{\partial s_1}{\partial s_0} \cdot N_{s_1} \cdot \frac{\partial s_1}{\partial \alpha_0} - \frac{\partial s_1}{\partial \alpha_0} \cdot \left[N_{s_0} + N_{s_1} \cdot \frac{\partial s_1}{\partial s_0} \right] = -N_{s_0} \cdot \frac{\partial s_1}{\partial \alpha_0}$.

Derivando implicitamente (1.1) em relação a α_0 , obtemos:

$$\frac{\partial M}{\partial s_1}(s_0, s_1) \cdot \frac{\partial s_1}{\partial \alpha_0}(s_0, \alpha_0) = 1. \quad (1.6)$$

Desse modo, $J = -N_{s_0} \cdot \frac{1}{M_{s_1}} = -\frac{N_{s_0}}{M_{s_1}}$.

De (1.3), temos:

$$M_{s_1} = \frac{[g(s_0) - g(s_1)]f'(s_1) - [f(s_0) - f(s_1)]g'(s_1)}{[f(s_0) - f(s_1)]^2 + [g(s_0) - g(s_1)]^2}.$$

Derivando parcialmente (1.2) em relação a s_0 , obtemos:

$$\begin{aligned} N_{s_0}(s_0, s_1) &= -\frac{-g'(s_0)[f(s_1) - f(s_0)] + f'(s_0)[g(s_1) - g(s_0)]}{[f(s_1) - f(s_0)]^2} \\ &= \frac{[f(s_1) - f(s_0)]g'(s_0) - [g(s_1) - g(s_0)]f'(s_0)}{[f(s_1) - f(s_0)]^2 + [g(s_1) - g(s_0)]^2}. \end{aligned} \quad (1.7)$$

Logo, $J = -\frac{N_{s_0}}{M_{s_1}} = -\frac{[f(s_1) - f(s_0)]g'(s_0) - [g(s_1) - g(s_0)]f'(s_0)}{[f(s_1) - f(s_0)]g'(s_1) - [g(s_1) - g(s_0)]f'(s_1)}$.

Observemos que

$$\cos \varphi_0 = \frac{df}{ds}(s_0) = f'(s_0);$$

$$\cos \varphi_1 = \frac{df}{ds}(s_1) = f'(s_1);$$

$$\text{sen } \varphi_0 = \frac{dg}{ds}(s_0) = g'(s_0);$$

$$\text{sen } \varphi_1 = \frac{dg}{ds}(s_1) = g'(s_1);$$

$$\operatorname{tg} \theta_0 = \frac{g(s_1) - g(s_0)}{f(s_1) - f(s_0)} \Rightarrow \cos \theta_0 = \frac{f(s_1) - f(s_0)}{d(Q_0, Q_1)} \Rightarrow \operatorname{sen} \theta_0 = \frac{g(s_1) - g(s_0)}{d(Q_0, Q_1)},$$

onde $Q_0 = (f(s_0), g(s_0))$, $Q_1 = (f(s_1), g(s_1))$ e $d(Q_0, Q_1)$ é o comprimento do segmento de trajetória que une os pontos Q_0 e Q_1 .

Assim

$$J = -\frac{d(Q_0, Q_1) \cos \theta_0 \operatorname{sen} \varphi_0 - d(Q_0, Q_1) \operatorname{sen} \theta_0 \cos \varphi_0}{d(Q_0, Q_1) \cos \theta_0 \operatorname{sen} \varphi_1 - d(Q_0, Q_1) \operatorname{sen} \theta_0 \cos \varphi_1} = \frac{\operatorname{sen}(\theta_0 - \varphi_0)}{\operatorname{sen}(\varphi_1 - \theta_0)} = \frac{\operatorname{sen} \alpha_0}{\operatorname{sen} \alpha_1}.$$

□

Proposição 1.1. Dado $(s_0, \alpha_0) \in [0, \ell] \times (0, \pi)$, onde ℓ é o comprimento da curva Γ , a matriz derivada $DT(s_0, \alpha_0)$ da aplicação $T : (s_0, \alpha_0) \mapsto (s_1, \alpha_1)$ é dada por:

$$DT(s_0, \alpha_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial s_0} & \frac{\partial s_1}{\partial \alpha_0} \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_0} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d(Q_0, Q_1)}{R_0 \operatorname{sen} \alpha_1} - \frac{\operatorname{sen} \alpha_0}{\operatorname{sen} \alpha_1} & \frac{d(Q_0, Q_1)}{\operatorname{sen} \alpha_1} \\ \frac{d(Q_0, Q_1)}{R_0 R_1 \operatorname{sen} \alpha_1} - \frac{\operatorname{sen} \alpha_0}{R_1 \operatorname{sen} \alpha_1} - \frac{1}{R_0} & \frac{d(Q_0, Q_1)}{R_1 \operatorname{sen} \alpha_1} - 1 \end{bmatrix},$$

onde R_0 e R_1 são os raios de curvatura em Q_0 e Q_1 , respectivamente.

Demonstração. Derivando implicitamente (1.1) em relação a s_0 , obtemos:

$$\frac{\partial M}{\partial s_0}(s_0, s_1) + \frac{\partial M}{\partial s_1}(s_0, s_1) \cdot \frac{\partial s_1}{\partial s_0}(s_0, \alpha_0) = 0 \Leftrightarrow \frac{\partial s_1}{\partial s_0}(s_0, \alpha_0) = -\frac{M_{s_0}(s_0, s_1)}{M_{s_1}(s_0, s_1)}.$$

De (1.6), temos que

$$\frac{\partial s_1}{\partial \alpha_0}(s_0, \alpha_0) = \frac{1}{M_{s_1}(s_0, s_1)}.$$

Observemos que, a partir de (1.3), obtemos:

$$\begin{aligned} M_{s_1}(s_0, s_1) &= \frac{\det \begin{bmatrix} f'(s_1) & f(s_0) - f(s_1) \\ g'(s_1) & g(s_0) - g(s_1) \end{bmatrix}}{[f(s_0) - f(s_1)]^2 + [g(s_0) - g(s_1)]^2} \\ &= \frac{\|(f'(s_1), g'(s_1)) \times (f(s_0) - f(s_1), g(s_0) - g(s_1))\|}{d^2(Q_0, Q_1)} \\ &= \frac{\|(f'(s_1), g'(s_1))\| \cdot \|(f(s_0) - f(s_1), g(s_0) - g(s_1))\| \cdot \operatorname{sen}(\pi - \alpha_1)}{d^2(Q_0, Q_1)} \\ &= \frac{1 \cdot d(Q_0, Q_1) \cdot \operatorname{sen} \alpha_1}{d^2(Q_0, Q_1)} \\ &= \frac{\operatorname{sen} \alpha_1}{d(Q_0, Q_1)} \end{aligned}$$

$\Rightarrow \frac{\partial s_1}{\partial \alpha_0} = \frac{1}{M_{s_1}} = \frac{d(Q_0, Q_1)}{\text{sen } \alpha_1}$, onde na segunda igualdade usamos que aquele determinante é a área do paralelogramo gerado pelos vetores $(f'(s_1), g'(s_1))$ e $(f(s_0) - f(s_1), g(s_0) - g(s_1))$.

Derivando (1.1) em relação a s_0 :

$$\begin{aligned} M_{s_0}(s_0, s_1) &= \frac{1}{1 + \left[\frac{g(s_1) - g(s_0)}{f(s_1) - f(s_0)} \right]^2} \cdot \frac{-g'(s_0)[f(s_1) - f(s_0)] + f'(s_0)[g(s_1) - g(s_0)]}{[f(s_1) - f(s_0)]^2} - \\ &= \frac{1}{1 + \left[\frac{g'(s_0)}{f'(s_0)} \right]^2} \cdot \frac{g''(s_0)f'(s_0) - f''(s_0)g'(s_0)}{[f'(s_0)]^2} - \\ &= \frac{\det \begin{bmatrix} f'(s_0) & f(s_1) - f(s_0) \\ g'(s_0) & g(s_1) - g(s_0) \end{bmatrix}}{[f(s_1) - f(s_0)]^2 + [g(s_1) - g(s_0)]^2} - \frac{f'(s_0)g''(s_0) - g'(s_0)f''(s_0)}{[f'(s_0)]^2 + [g'(s_0)]^2} \\ &= \frac{d(Q_0, Q_1) \text{sen } \alpha_0}{d^2(Q_0, Q_1)} - \frac{f'(s_0)g''(s_0) - g'(s_0)f''(s_0)}{\{[f'(s_0)]^2 + [g'(s_0)]^2\}^{3/2}} \\ &= \frac{\text{sen } \alpha_0}{d(Q_0, Q_1)} - \frac{1}{R_0} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial s_1}{\partial s_0} = -\frac{M_{s_0}}{M_{s_1}} = \frac{d(Q_0, Q_1) - R_0 \text{sen } \alpha_0}{R_0 d(Q_0, Q_1)} \cdot \frac{d(Q_0, Q_1)}{\text{sen } \alpha_1} = \frac{d(Q_0, Q_1) - R_0 \text{sen } \alpha_0}{R_0 \text{sen } \alpha_1}.$$

Derivando (1.2) em relação a s_1 :

$$\begin{aligned} N_{s_1}(s_0, s_1) &= \frac{1}{1 + \left[\frac{g'(s_1)}{f'(s_1)} \right]^2} \cdot \frac{g''(s_1)f'(s_1) - f''(s_1)g'(s_1)}{[f'(s_1)]^2} - \\ &= \frac{1}{1 + \left[\frac{g(s_1) - g(s_0)}{f(s_1) - f(s_0)} \right]^2} \cdot \frac{g'(s_1)[f(s_1) - f(s_0)] - f'(s_1)[g(s_1) - g(s_0)]}{[f(s_1) - f(s_0)]^2} \\ &= \frac{f'(s_1)g''(s_1) - g'(s_1)f''(s_1)}{[f'(s_1)]^2 + [g'(s_1)]^2} - \frac{\det \begin{bmatrix} f'(s_1) & f(s_0) - f(s_1) \\ g'(s_1) & g(s_0) - g(s_1) \end{bmatrix}}{[f(s_1) - f(s_0)]^2 + [g(s_1) - g(s_0)]^2} \\ &= \frac{1}{R_1} - \frac{d(Q_0, Q_1) \text{sen } \alpha_1}{d^2(Q_0, Q_1)} \\ &= \frac{1}{R_1} - \frac{\text{sen } \alpha_1}{d(Q_0, Q_1)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_0} = N_{s_1} \cdot \frac{\partial s_1}{\partial \alpha_0} = \frac{d(Q_0, Q_1) - R_1 \text{sen } \alpha_1}{R_1 d(Q_0, Q_1)} \cdot \frac{d(Q_0, Q_1)}{\text{sen } \alpha_1} = \frac{d(Q_0, Q_1) - R_1 \text{sen } \alpha_1}{R_1 \text{sen } \alpha_1}.$$

De (1.7), obtemos:

$$\begin{aligned}
N_{s_0} &= -\frac{\det \begin{bmatrix} f'(s_0) & f(s_1) - f(s_0) \\ g'(s_0) & g(s_1) - g(s_0) \end{bmatrix}}{[f(s_1) - f(s_0)]^2 + [g(s_1) - g(s_0)]^2} \\
&= -\frac{d(Q_0, Q_1) \operatorname{sen} \alpha_0}{d^2(Q_0, Q_1)} \\
&= -\frac{\operatorname{sen} \alpha_0}{d(Q_0, Q_1)}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_0} &= N_{s_0} + N_{s_1} \cdot \frac{\partial s_1}{\partial s_0} = -\frac{\operatorname{sen} \alpha_0}{d(Q_0, Q_1)} + \frac{d(Q_0, Q_1) - R_1 \operatorname{sen} \alpha_1}{R_1 d(Q_0, Q_1)} \cdot \frac{d(Q_0, Q_1) - R_0 \operatorname{sen} \alpha_0}{R_0 \operatorname{sen} \alpha_1} = \\
&= \frac{d(Q_0, Q_1)}{R_0 R_1 \operatorname{sen} \alpha_1} - \frac{\operatorname{sen} \alpha_0}{R_1 \operatorname{sen} \alpha_1} - \frac{1}{R_0}.
\end{aligned}$$

Assim,

$$DT(s_0, \alpha_0) = \begin{bmatrix} \frac{\partial s_1}{\partial s_0} & \frac{\partial s_1}{\partial \alpha_0} \\ \frac{\partial \alpha_1}{\partial s_0} & \frac{\partial \alpha_1}{\partial \alpha_0} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{d(Q_0, Q_1) - R_0 \operatorname{sen} \alpha_0}{R_0 \operatorname{sen} \alpha_1} & \frac{d(Q_0, Q_1)}{\operatorname{sen} \alpha_1} \\ \frac{d(Q_0, Q_1)}{R_0 R_1 \operatorname{sen} \alpha_1} - \frac{\operatorname{sen} \alpha_0}{R_1 \operatorname{sen} \alpha_1} - \frac{1}{R_0} & \frac{d(Q_0, Q_1) - R_1 \operatorname{sen} \alpha_1}{R_1 \operatorname{sen} \alpha_1} \end{bmatrix}.$$

□

Calculando o determinante da matriz $DT(s_0, \alpha_0)$, verificamos que $\det DT(s_0, \alpha_0) = \frac{\operatorname{sen} \alpha_0}{\operatorname{sen} \alpha_1}$.

Capítulo 2

Estabilidade de Órbitas Periódicas

2.1 Existência de Órbitas Periódicas

Definição 2.1. *Seja Γ uma curva plana, fechada, simples, de classe C^k , $k \geq 2$, com curvatura estritamente positiva, parametrizada pelo comprimento de arco $s \in [0, \ell)$, onde ℓ é o comprimento de Γ . Uma seqüência de pares $(s_i, \alpha_i) \in [0, \ell) \times (0, \pi)$, que corresponde ao i -ésimo impacto obtido a partir de uma condição inicial (s_0, α_0) , é uma **órbita** de um bilhar.*

A poligonal identificada com um segmento da trajetória do bilhar une dois elementos (s_i, α_i) e (s_{i+1}, α_{i+1}) da órbita do bilhar, onde $T(s_i, \alpha_i) = (s_{i+1}, \alpha_{i+1})$.

Definição 2.2. *O espaço de fase do bilhar é constituído por todos os pontos das possíveis órbitas de um bilhar.*

O espaço de fase do bilhar é o cilindro $0 \leq s < \ell, 0 < \alpha < \pi$, denotado por C , onde ℓ é o comprimento da curva Γ e s é uma coordenada periódica, já que s é equivalente a $s + \ell$.

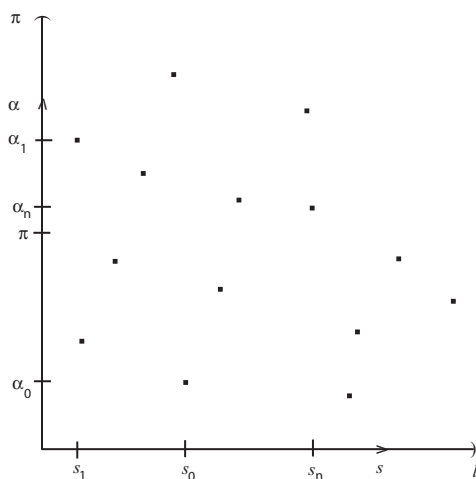


Figura 2: Exemplos de pontos de uma órbita do bilhar.

Definição 2.3. Seja $\mathcal{O}_T(s_0, \alpha_0) = \{T^i(s_0, \alpha_0) = (s_i, \alpha_i) | i \in \mathbb{Z}\}$ uma órbita com condição inicial (s_0, α_0) . Tal órbita será **periódica** se existir um menor inteiro $n > 0$ tal que $(s_n, \alpha_n) = T^n(s_0, \alpha_0) = (s_0, \alpha_0)$. Ao número n chamamos de **período** da órbita.

Suponhamos que $\mathcal{O}_T(s_0, \alpha_0)$ seja uma órbita periódica de período n e denotemos

$$B = DT^n(s_0, \alpha_0).$$

Os autovalores de B satisfazem a equação característica

$$\lambda^2 - (\text{tr } B)\lambda + \det B = 0.$$

Observemos que $\det B = 1$. De fato, pelo Teorema 1.2, obtemos $\det DT(s_0, \alpha_0) = \frac{\text{sen } \alpha_0}{\text{sen } \alpha_1}$. De modo análogo, verifica-se que $\det DT(s_i, \alpha_i) = \frac{\text{sen } \alpha_i}{\text{sen } \alpha_{i+1}}$. Logo

$$\det B = \frac{\text{sen } \alpha_{n-1}}{\text{sen } \alpha_n} \cdot \frac{\text{sen } \alpha_{n-2}}{\text{sen } \alpha_{n-1}} \cdot \frac{\text{sen } \alpha_{n-3}}{\text{sen } \alpha_{n-2}} \cdots \frac{\text{sen } \alpha_1}{\text{sen } \alpha_2} \cdot \frac{\text{sen } \alpha_0}{\text{sen } \alpha_1} = \frac{\text{sen } \alpha_0}{\text{sen } \alpha_n} = \frac{\text{sen } \alpha_0}{\text{sen } \alpha_0} = 1.$$

Desse modo, os autovalores de B são dados por

$$\lambda_{\pm} = \frac{1}{2}[\text{tr } B \pm \sqrt{(\text{tr } B)^2 - 4}].$$

Temos três possibilidades:

- i) λ_+ e λ_- são reais e distintos se $|\text{tr } B| > 2$. Como $\lambda_+ \lambda_- = \det B = 1$, segue que $|\lambda_{\pm}| \neq 1$, pois caso contrário, teríamos $\lambda_+ = \lambda_-$. Nesse caso, a órbita $\mathcal{O}_T(s_0, \alpha_0)$ é dita **instável** e o ponto (s_0, α_0) é um ponto fixo **hiperbólico** de T^n . A órbita $\mathcal{O}_T(s_0, \alpha_0)$ é chamada de órbita periódica **hiperbólica**.
- ii) λ_+ e λ_- são números não reais se $|\text{tr } B| < 2$. Observemos que

$$|\lambda_{\pm}| = \left| \frac{1}{2}[\text{tr } B \pm \sqrt{4 - (\text{tr } B)^2}i] \right| = \frac{1}{4}[(\text{tr } B)^2 + 4 - (\text{tr } B)^2] = 1.$$

Nesse caso, (s_0, α_0) é um ponto fixo **elíptico** de T^n . A órbita $\mathcal{O}_T(s_0, \alpha_0)$ é chamada de órbita periódica **elíptica**.

- iii) $\lambda_+ = \lambda_- = \pm 1$ se e só se $|\text{tr } B| = 2$. Nesse caso, não podemos afirmar nada sobre a estabilidade da órbita. O ponto (s_0, α_0) é um ponto fixo **parabólico** de T^n . A órbita $\mathcal{O}_T(s_0, \alpha_0)$ é chamada de órbita periódica **parabólica**.

Definiremos agora a função comprimento L . Considerando a curva Γ parametrizada

pelo comprimento de arco, seja $L : [0, \ell) \times [0, \ell) \rightarrow \mathbb{R}$ definida por

$$L(s_i, s_{i+1}) = \|\Gamma(s_{i+1}) - \Gamma(s_i)\| = \sqrt{\langle \Gamma(s_{i+1}) - \Gamma(s_i), \Gamma(s_{i+1}) - \Gamma(s_i) \rangle},$$

onde s_i e s_{i+1} são pontos sobre Γ . A aplicação L mede o comprimento do segmento de reta da poligonal que une os pontos s_i e s_{i+1} .

Pela regra da cadeia, podemos calcular as derivadas dessa aplicação:

$$\frac{\partial L^2}{\partial s_i}(s_i, s_{i+1}) = 2L(s_i, s_{i+1}) \frac{\partial L}{\partial s_i}(s_i, s_{i+1}) = 2 \langle -\Gamma'(s_i), \Gamma(s_{i+1}) - \Gamma(s_i) \rangle.$$

Desse modo,

$$\frac{\partial L}{\partial s_i}(s_i, s_{i+1}) = \frac{-\langle t(s_i), \Gamma(s_{i+1}) - \Gamma(s_i) \rangle}{L(s_i, s_{i+1})} = -\cos(\alpha_i),$$

onde $t(s_i)$ é o vetor tangente a Γ em s_i . De modo análogo, obtem-se que

$$\frac{\partial L}{\partial s_{i+1}}(s_i, s_{i+1}) = \frac{\langle t(s_{i+1}), \Gamma(s_{i+1}) - \Gamma(s_i) \rangle}{L(s_i, s_{i+1})} = \cos(\alpha_{i+1}).$$

Definição 2.4. Chamamos a função L de **função geradora do bilhar**.

Fazendo $p_i = \cos \alpha_i$, obtem-se que

$$\frac{\partial L}{\partial s_i}(s_i, s_{i+1}) = -p_i \text{ e } \frac{\partial L}{\partial s_{i+1}}(s_i, s_{i+1}) = p_{i+1}$$

e a aplicação de bilhar nas coordenadas (s, p) é dada por $T : [0, \ell) \times (-1, 1) \rightarrow [0, \ell) \times (-1, 1)$, onde $T(s_0, p_0) = (s_1, p_1)$.

Seja $\mathcal{A} : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ dada por

$$\mathcal{A}(s_0, \dots, s_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} L(s_i, s_{i+1}),$$

com $s_n = s_0$, onde 0 e ℓ estão identificados e $\mathbb{T}^n = [0, \ell)^n$ é o toro n -dimensional. Tal aplicação é a ação que associa a cada polígono inscrito em Γ com n lados e vértices em $\Gamma(s_0), \dots, \Gamma(s_{n-1})$ o seu perímetro.

Consideremos o conjunto

$$D_n = \{(s_0, \dots, s_{n-1}) \in \mathbb{T}^n \mid s_i \neq s_{i+1}, \forall i \in \mathbb{Z}_n\},$$

onde \mathbb{Z}_n é o anel dos inteiros módulo n .

Seja $(s_0, \dots, s_{n-1}) \in D_n$. O polígono inscrito em Γ com vértices em $\Gamma(s_0), \dots, \Gamma(s_{n-1})$ é polígono de n lados. Se existir $k \in \mathbb{Z}_n$ tal que $s_k = s_{k+1}$, então o polígono inscrito em

Γ com vértices em $\Gamma(s_0), \dots, \Gamma(s_k), \Gamma(s_{k+1}) = \Gamma(s_k), \dots, \Gamma(s_{n-1})$ é um polígono de $n-1$ lados, e seu comprimento é menor que o comprimento do polígono com vértices em inscrito em Γ com vértices em $\Gamma(s_0), \dots, \Gamma(s_{n-1})$, onde $(s_0, \dots, s_{n-1}) \in D_n$. Desse modo, uma órbita (s_0, \dots, s_{n-1}) de comprimento máximo, isto é, uma órbita (s_0, \dots, s_{n-1}) que é um ponto de máximo da aplicação \mathcal{A} , estará no conjunto D_n .

Proposição 2.1. *A aplicação \mathcal{A} é diferenciável em D_n , mas não é diferenciável em $\mathbb{T}^n - D_n$.*

Demonstração. Seja $(s_0, \dots, s_{n-1}) \in D_n$. As derivadas parciais $\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial s_i}(s_0, \dots, s_{n-1}) = \frac{\partial L}{\partial s_i}(s_{i-1}, s_i) + \frac{\partial L}{\partial s_i}(s_i, s_{i+1})$ existem e são contínuas, logo \mathcal{A} é diferenciável em D_n .

Consideremos agora $(\bar{s}_0, \dots, \bar{s}_{n-1}) \in \mathbb{T}^n - D_n$. Então $\bar{s}_k = \bar{s}_{k+1}$, para algum $k \in \mathbb{Z}_n$. Suponha que a derivada parcial de \mathcal{A} em relação a \bar{s}_k no ponto $(\bar{s}_0, \dots, \bar{s}_{n-1})$ existe. Então ela é dada por $\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial \bar{s}_k}(\bar{s}_0, \dots, \bar{s}_{n-1}) = \frac{\partial L}{\partial \bar{s}_k}(\bar{s}_{k-1}, \bar{s}_k) + \frac{\partial L}{\partial \bar{s}_k}(\bar{s}_k, \bar{s}_{k+1})$. Como $\bar{s}_k = \bar{s}_{k+1}$, segue que $L(\bar{s}_k, \bar{s}_{k+1}) = \|\Gamma(\bar{s}_{k+1}) - \Gamma(\bar{s}_k)\| = \|0\|$, logo a derivada parcial de L em relação a \bar{s}_k no ponto $(\bar{s}_k, \bar{s}_{k+1})$ não existe, pois pelo lema abaixo, a norma não é diferenciável na origem.

Desse modo, a derivada parcial de \mathcal{A} em relação a \bar{s}_k no ponto $(\bar{s}_0, \dots, \bar{s}_{n-1})$ também não existe, e assim \mathcal{A} não é diferenciável em $\mathbb{T}^n - D_n$. \square

Lema 1. *A função norma $\psi : \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\psi(x) = \|x\|$ não é diferenciável na origem.*

Demonstração. Seja $\psi(x) = \|x\| = \|(x_1, \dots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \dots + x_n^2}$. As derivadas parciais de ψ na origem são dadas por

$$\frac{\partial \psi}{\partial x_i}(0, \dots, 0) = \lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{\psi(0, \dots, 0, h_i, 0, \dots, 0) - \psi(0, \dots, 0)}{h_i} = \lim_{h_i \rightarrow 0} \frac{|h_i|}{h_i}, \forall i = 1, \dots, n.$$

Como os limites laterais são distintos, segue que as derivadas parciais não existem, e assim ψ não é diferenciável na origem. \square

Lema 2. *Uma trajetória periódica de período n da aplicação de bilhar corresponde a um ponto crítico da aplicação \mathcal{A} em D_n . Reciprocamente, um ponto crítico de \mathcal{A} em D_n corresponde a uma trajetória periódica de período n da aplicação de bilhar.*

Demonstração. Um ponto $(s_0, \dots, s_{n-1}) \in D_n$ é um ponto crítico da aplicação \mathcal{A} se e somente se, $\nabla \mathcal{A}(s_0, \dots, s_{n-1}) = 0$, ou seja, se e somente se,

$$\left(\frac{\partial L}{\partial s_0}(s_0, s_1) + \frac{\partial L}{\partial s_0}(s_{n-1}, s_0), \frac{\partial L}{\partial s_1}(s_0, s_1) + \frac{\partial L}{\partial s_1}(s_1, s_2), \dots, \frac{\partial L}{\partial s_{n-1}}(s_{n-2}, s_{n-1}) + \frac{\partial L}{\partial s_{n-1}}(s_{n-1}, s_0) \right) = (0, 0, \dots, 0),$$

o que é equivalente a

$$\frac{\partial L(s_{n-1}, s_0)}{\partial s_0} = -\frac{\partial L(s_0, s_1)}{\partial s_0} = \cos \alpha_0; \quad \frac{\partial L(s_{n-2}, s_{n-1})}{\partial s_{n-1}} = -\frac{\partial L(s_{n-1}, s_0)}{\partial s_{n-1}} = \cos \alpha_{n-1};$$

$$\frac{\partial L(s_{i-1}, s_i)}{\partial s_i} = -\frac{\partial L(s_i, s_{i+1})}{\partial s_i} = \cos \alpha_i, \quad i = 1, \dots, n-2.$$

Isto é, se e somente se, o ângulo de incidência for igual ao ângulo de reflexão, o que é equivalente a esses pontos determinarem uma órbita no bilhar. \square

Proposição 2.2. *O conjunto D_n possui uma trajetória periódica da aplicação de bilhar de comprimento máximo.*

Demonstração. A aplicação $\mathcal{A} : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$ é contínua, pois a função geradora $L(s_i, s_{i+1})$ é contínua $\forall i \in \mathbb{Z}_n$, com $s_n = s_0$. Como o conjunto \mathbb{T}^n é compacto, segue pelo teorema de Weierstrass (encontrado em [8], cap. 1, p. 45) que \mathcal{A} admite um ponto de máximo $(\bar{s}_0, \dots, \bar{s}_{n-1})$ e um ponto de mínimo $(\hat{s}_0, \dots, \hat{s}_{n-1})$ em \mathbb{T}^n .

Seja $(s_0, \dots, s_{n-1}) \in \mathbb{T}^n - D_n$. Então existe pelo menos um $k \in \mathbb{Z}_n$ tal que $s_k = s_{k+1}$. Consideremos $(s_0, \dots, s_k, \tilde{s}_{k+1}, s_{k+2}, \dots, s_{n-1}) \in \mathbb{T}^n$, onde $\tilde{s}_{k+1} \neq s_i, \forall i = 0, \dots, k, k+2, \dots, n-1$. Então, $(s_0, \dots, s_k, \tilde{s}_{k+1}, s_{k+2}, \dots, s_{n-1}) \in D_n$, e seu comprimento é maior que o comprimento de $(s_0, \dots, s_{n-1}) \in \mathbb{T}^n - D_n$. Desse modo, o ponto de mínimo $(\hat{s}_0, \dots, \hat{s}_{n-1})$ de \mathcal{A} ocorre em $\mathbb{T}^n - D_n$.

O ponto de máximo é um ponto crítico de \mathcal{A} . Com efeito, para cada $i = 1, \dots, n$, seja $f_i(t) = \mathcal{A}(\bar{s}_0, \dots, \bar{s}_{i-1}, t, \bar{s}_{i+1}, \dots, \bar{s}_{n-1})$. O ponto \bar{s}_i é um ponto de máximo de f_i , para cada $i = 1, \dots, n$, pois $f_i(\bar{s}_i) = \mathcal{A}(\bar{s}_0, \dots, \bar{s}_{n-1}) \geq \mathcal{A}(\bar{s}_0, \dots, \bar{s}_{i-1}, t, \bar{s}_{i+1}, \dots, \bar{s}_{n-1}) = f_i(t), \forall t \in [0, l)$, pois $(\bar{s}_0, \dots, \bar{s}_{n-1})$ é um ponto de máximo de \mathcal{A} . Então $f'_i(\bar{s}_i) = 0$ para cada $i = 1, \dots, n$, ou seja, $\frac{\partial \mathcal{A}}{\partial s_i}(\bar{s}_0, \dots, \bar{s}_{n-1}) = 0$, para cada $i = 1, \dots, n$.

Como a aplicação \mathcal{A} é diferenciável apenas em D_n , segue que \mathcal{A} admite o ponto de máximo nesse conjunto. Assim, temos uma trajetória periódica da aplicação de bilhar de comprimento máximo em D_n . \square

A aplicação \mathcal{A} é no mínimo de classe C^2 . Com efeito, temos que a curva Γ é de classe $C^k, k \geq 2$. Como $L(s_i, s_{i+1}) = \|\Gamma(s_{i+1}) - \Gamma(s_i)\|$, então L é no mínimo de classe C^2 , e como $\mathcal{A} = \sum_{i=0}^{n-1} L(s_i, s_{i+1})$, segue que \mathcal{A} é no mínimo de classe C^2 . Assim, podemos classificar os pontos críticos de \mathcal{A} através de sua matriz hessiana. Para isso, utilizamos o seguinte lema.

Lema 3. *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}$ uma função de classe C^2 onde $U \subset \mathbb{R}^n$ é um aberto. Sejam $p_0 \in U$ um ponto crítico de f e $\delta_1, \dots, \delta_n$ os autovalores da matriz hessiana \mathcal{H} de f em p_0 . Temos:*

1. se $\delta_j > 0$ para todo $1 \leq j \leq n$ então p_0 é um ponto de mínimo local de f ;
2. se $\delta_j < 0$ para todo $1 \leq j \leq n$ então p_0 é um ponto de máximo local de f ;

3. se existem dois autovalores δ_i e δ_j com sinais opostos então p_0 é um ponto de sela de f ;

4. se $\delta_j \geq 0$ para todo $1 \leq j \leq n$ e existe um autovalor $\delta_i = 0$, ou se $\delta_j \leq 0$ para todo $1 \leq j \leq n$ e existe um autovalor $\delta_i = 0$, então nada podemos afirmar sobre a natureza do ponto crítico p_0 .

A demonstração desse lema pode ser encontrado em [3].

2.2 As Fórmulas de Mackay-Meiss e Hill

Nesta seção apresentamos as fórmulas de Mackay-Meiss e Hill, que nos fornecem hipóteses para classificar uma órbita periódica. Inicialmente, vamos calcular as derivadas segundas da função geradora.

Lema 4. *As derivadas segundas da função $L(s_i, s_{i+1})$ são:*

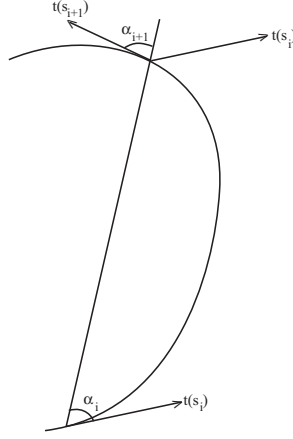
$$\frac{\partial^2 L}{\partial s_i^2}(s_i, s_{i+1}) = \text{sen } \alpha_i \left(\frac{R_i \text{sen } \alpha_i - L(s_i, s_{i+1})}{R_i L(s_i, s_{i+1})} \right);$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial s_i \partial s_{i+1}}(s_i, s_{i+1}) = \frac{\text{sen } \alpha_i \text{sen } \alpha_{i+1}}{L(s_i, s_{i+1})};$$

$$\frac{\partial^2 L}{\partial s_{i+1}^2}(s_i, s_{i+1}) = \text{sen } \alpha_{i+1} \left(\frac{R_{i+1} \text{sen } \alpha_{i+1} - L(s_i, s_{i+1})}{R_{i+1} L(s_i, s_{i+1})} \right).$$

Demonstração. Calculando $\frac{\partial^2 L}{\partial s_i \partial s_{i+1}}(s_i, s_{i+1})$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 L}{\partial s_i \partial s_{i+1}}(s_i, s_{i+1}) &= \frac{\partial}{\partial s_{i+1}} \left[\frac{-\langle t(s_i), \Gamma(s_{i+1}) - \Gamma(s_i) \rangle}{L(s_i, s_{i+1})} \right] \\ &= [-\langle t(s_i), \Gamma'(s_{i+1}) \rangle L(s_i, s_{i+1})] \cdot \frac{1}{L^2(s_i, s_{i+1})} + \\ &\quad \left[\langle t(s_i), \Gamma(s_{i+1}) - \Gamma(s_i) \rangle \frac{\langle t(s_{i+1}), \Gamma(s_{i+1}) - \Gamma(s_i) \rangle}{L(s_i, s_{i+1})} \right] \cdot \frac{1}{L^2(s_i, s_{i+1})} \\ &= -\frac{\langle t(s_i), t(s_{i+1}) \rangle}{L(s_i, s_{i+1})} + \\ &\quad \frac{\langle t(s_i), \Gamma(s_{i+1}) - \Gamma(s_i) \rangle}{L(s_i, s_{i+1})} \cdot \frac{\langle t(s_{i+1}), \Gamma(s_{i+1}) - \Gamma(s_i) \rangle}{L(s_i, s_{i+1})} \cdot \frac{1}{L(s_i, s_{i+1})} \\ &= -\cos(\alpha_i + \alpha_{i+1}) \cdot \frac{1}{L(s_i, s_{i+1})} + \cos \alpha_i \cdot \cos \alpha_{i+1} \cdot \frac{1}{L(s_i, s_{i+1})} \\ &= \frac{\text{sen } \alpha_i \text{sen } \alpha_{i+1}}{L(s_i, s_{i+1})}. \end{aligned}$$

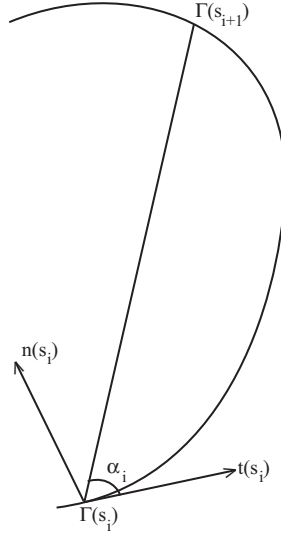


Agora, calculando $\frac{\partial^2 L}{\partial s_i^2}(s_i, s_{i+1})$:

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 L}{\partial s_i^2}(s_i, s_{i+1}) &= \frac{\partial}{\partial s_i} \left[\frac{-\langle t(s_i), \Gamma(s_{i+1}) - \Gamma(s_i) \rangle}{L(s_i, s_{i+1})} \right] \\
&= \frac{[-\langle t'(s_i), \Gamma(s_{i+1}) - \Gamma(s_i) \rangle - \langle t(s_i), -\Gamma'(s_i) \rangle] \cdot L(s_i, s_{i+1})}{L^2(s_i, s_{i+1})} \\
&\quad + \frac{\langle t(s_i), \Gamma(s_{i+1}) - \Gamma(s_i) \rangle}{L^2(s_i, s_{i+1})} \cdot \left(-\frac{\langle t(s_i), \Gamma(s_{i+1}) - \Gamma(s_i) \rangle}{L(s_i, s_{i+1})} \right) \\
&= -\frac{\langle k(s_i)n(s_i), \Gamma(s_{i+1}) - \Gamma(s_i) \rangle}{L(s_i, s_{i+1})} + \frac{\langle t(s_i), t(s_i) \rangle}{L(s_i, s_{i+1})} \\
&\quad - \left[\frac{\langle t(s_i), \Gamma(s_{i+1}) - \Gamma(s_i) \rangle}{L(s_i, s_{i+1})} \right]^2 \cdot \frac{1}{L(s_i, s_{i+1})},
\end{aligned}$$

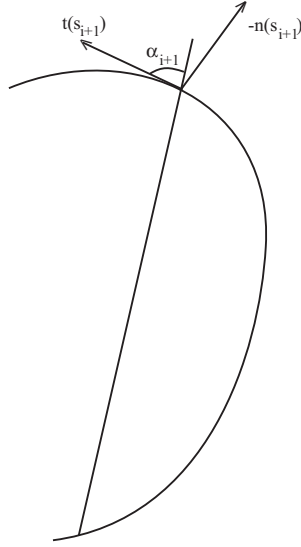
onde $n(s_i)$ é o vetor normal a Γ em s_i . Logo,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 L}{\partial s_i^2}(s_i, s_{i+1}) &= -k(s_i) \frac{\langle n(s_i), \Gamma(s_{i+1}) - \Gamma(s_i) \rangle}{L(s_i, s_{i+1})} + \frac{1}{L(s_i, s_{i+1})} - \cos^2 \alpha_i \cdot \frac{1}{L(s_i, s_{i+1})} \\
&= -\frac{1}{R_i} \cdot \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_i \right) + \frac{\text{sen}^2 \alpha_i}{L(s_i, s_{i+1})} \\
&= -\frac{1}{R_i} \cdot \text{sen} \alpha_i + \frac{\text{sen}^2 \alpha_i}{L(s_i, s_{i+1})} \\
&= \text{sen} \alpha_i \left(\frac{\text{sen} \alpha_i}{L(s_i, s_{i+1})} - \frac{1}{R_i} \right).
\end{aligned}$$



Por fim,

$$\begin{aligned}
\frac{\partial^2 L}{\partial s_{i+1}^2}(s_i, s_{i+1}) &= \frac{\partial}{\partial s_{i+1}} \left[\frac{\langle t(s_{i+1}), \Gamma(s_{i+1}) - \Gamma(s_i) \rangle}{L(s_i, s_{i+1})} \right] \\
&= \frac{[\langle t'(s_{i+1}), \Gamma(s_{i+1}) - \Gamma(s_i) \rangle + \langle t(s_{i+1}), \Gamma'(s_{i+1}) \rangle] \cdot L(s_i, s_{i+1})}{L^2(s_i, s_{i+1})} \\
&\quad - \frac{\langle t(s_{i+1}), \Gamma(s_{i+1}) - \Gamma(s_i) \rangle}{L^2(s_i, s_{i+1})} \cdot \frac{\langle t(s_{i+1}), \Gamma(s_{i+1}) - \Gamma(s_i) \rangle}{L(s_i, s_{i+1})} \\
&= \frac{\langle k(s_{i+1})n(s_{i+1}), \Gamma(s_{i+1}) - \Gamma(s_i) \rangle}{L(s_i, s_{i+1})} + \langle t(s_{i+1}), t(s_{i+1}) \rangle \cdot \frac{1}{L(s_i, s_{i+1})} \\
&\quad - \left[\frac{\langle t(s_{i+1}), \Gamma(s_{i+1}) - \Gamma(s_i) \rangle}{L(s_i, s_{i+1})} \right]^2 \cdot \frac{1}{L(s_i, s_{i+1})} \\
&= k(s_{i+1}) \frac{\langle n(s_{i+1}), \Gamma(s_{i+1}) - \Gamma(s_i) \rangle}{L(s_i, s_{i+1})} + \frac{1}{L(s_i, s_{i+1})} - \cos^2 \alpha_{i+1} \cdot \frac{1}{L(s_i, s_{i+1})} \\
&= -\frac{1}{R_{i+1}} \frac{\langle -n(s_{i+1}), \Gamma(s_{i+1}) - \Gamma(s_i) \rangle}{L(s_i, s_{i+1})} + \frac{\text{sen}^2 \alpha_{i+1}}{L(s_i, s_{i+1})} \\
&= -\frac{1}{R_{i+1}} \cos \left(\frac{\pi}{2} - \alpha_{i+1} \right) + \frac{\text{sen}^2 \alpha_{i+1}}{L(s_i, s_{i+1})} \\
&= -\frac{1}{R_{i+1}} \text{sen} \alpha_{i+1} + \frac{\text{sen}^2 \alpha_{i+1}}{L(s_i, s_{i+1})} \\
&= \text{sen} \alpha_{i+1} \left(\frac{\text{sen} \alpha_{i+1}}{L(s_i, s_{i+1})} - \frac{1}{R_{i+1}} \right).
\end{aligned}$$



□

Seja $F : [0, \ell) \times [0, \ell) \rightarrow [0, \ell) \times [0, \ell)$ dada por $F(s_{i-1}, s_i) = (s_i, s_{i+1})$. Definamos

$$a_i = \frac{\partial^2 [L(s_{i-1}, s_i) + L(s_i, s_{i+1})]}{\partial s_i^2},$$

$$b_i = \frac{\partial^2 L}{\partial s_i \partial s_{i+1}}(s_i, s_{i+1}),$$

$$P_i = \left[\frac{\partial F(s_i, s_{i+1})}{\partial (s_i, s_{i+1})} \right],$$

com $i = 0, \dots, n-1$ e $s_n = s_0$.

Do lema 2, concluímos que a uma sequência $(s_i)_{i \in \mathbb{N}}$, com $s_i \neq s_{i+1}$, associa-se uma órbita da aplicação de bilhar $T(s_i, p_i) = (s_{i+1}, p_{i+1})$ se e somente se, $p_{i+1} =$

$$\frac{\partial L}{\partial s_{i+1}}(s_i, s_{i+1}) = -\frac{\partial L}{\partial s_{i+1}}(s_{i+1}, s_{i+2}).$$

Desse modo,

$$dp_{i+1} = \frac{\partial^2 L}{\partial s_i \partial s_{i+1}}(s_i, s_{i+1}) ds_i + \frac{\partial^2 L}{\partial s_{i+1}^2}(s_i, s_{i+1}) ds_{i+1}$$

e

$$dp_{i+1} = -\frac{\partial^2 L}{\partial s_{i+1}^2}(s_{i+1}, s_{i+2}) ds_{i+1} - \frac{\partial^2 L}{\partial s_{i+1} \partial s_{i+2}}(s_{i+1}, s_{i+2}) ds_{i+2}.$$

Então,

$$\frac{\partial^2 L}{\partial s_i \partial s_{i+1}}(s_i, s_{i+1}) ds_i + \frac{\partial^2 L}{\partial s_{i+1}^2}(s_i, s_{i+1}) ds_{i+1} + \frac{\partial^2 L}{\partial s_{i+1}^2}(s_{i+1}, s_{i+2}) ds_{i+1} + \frac{\partial^2 L}{\partial s_{i+1} \partial s_{i+2}}(s_{i+1}, s_{i+2}) ds_{i+2} = 0,$$

o que é equivalente a

$$b_i ds_i + a_{i+1} ds_{i+1} + b_{i+1} ds_{i+2} = 0.$$

Logo, $\frac{\partial s_{i+2}}{\partial s_i} = -\frac{b_i}{b_{i+1}}$ e $\frac{\partial s_{i+2}}{\partial s_{i+1}} = -\frac{a_{i+1}}{b_{i+1}}$, e assim,

$$P_i = \begin{bmatrix} \frac{\partial s_{i+1}}{\partial s_i} & \frac{\partial s_{i+1}}{\partial s_{i+1}} \\ \frac{\partial s_{i+2}}{\partial s_i} & \frac{\partial s_{i+2}}{\partial s_{i+1}} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{b_i}{b_{i+1}} & -\frac{a_{i+1}}{b_{i+1}} \end{bmatrix}.$$

Seja $P = DF^n(s_0, s_1)$, onde n é o período da órbita periódica no bilhar. P é a matriz que representa a derivada de F^n no ponto (s_0, s_1) . Temos que

$$P = P_{n-1} \cdots P_1 \cdot P_0.$$

Com efeito, $P = DF^n(s_0, s_1) = D(F^{n-1} \circ F)(s_0, s_1) = DF^{n-1}(s_1, s_2)DF(s_0, s_1) = D(F^{n-2} \circ F)(s_1, s_2)P_0 = \dots = DF(s_{n-1}, s_0)P_{n-2} \cdots P_0 = P_{n-1} \cdot P_{n-2} \cdots P_0$.

Logo

$$\det P = \det P_{n-1} \cdot \det P_{n-2} \cdots \det P_0 = \frac{b_{n-1}}{b_n} \frac{b_{n-2}}{b_{n-1}} \cdots \frac{b_1}{b_2} \frac{b_0}{b_1} = \frac{b_0}{b_n} = \frac{b_0}{b_0} = 1. \quad (2.1)$$

Sejam ρ_1 e ρ_2 as raízes da equação característica $\det(P - \rho I) = 0$, onde I é a matriz identidade. Essas raízes são chamadas de **multiplicadores**, e satisfazem a equação $\rho^2 - (\text{tr } P)\rho + \det P = 0$, isto é, $\rho^2 - (\text{tr } P)\rho + 1 = 0$. O produto dos multiplicadores resulta em $\rho_1 \cdot \rho_2 = \det P = 1$. Desse modo, podemos classificar a órbita (s_0, \dots, s_{n-1}) da seguinte maneira.

1. Se ρ_1 e ρ_2 são reais e possuem módulo diferente de 1, então a órbita (s_0, \dots, s_{n-1}) é dita **hiperbólica**. Nesse caso, $\text{tr } P > 2$ ou $\text{tr } P < -2$.
2. Se ρ_1 e ρ_2 não são reais, então a órbita (s_0, \dots, s_{n-1}) é dita **elíptica**. Nesse caso, $-2 < \text{tr } P < 2$.
3. Se $\rho_1 = \rho_2 = \pm 1$, então a órbita (s_0, \dots, s_{n-1}) é dita **parabólica**. Nesse caso, $\text{tr } P = \pm 2$.

Teorema 2.1. (Fórmula de Mackay-Meiss) *Sejam $P = DF^n$, onde $F(s_{i-1}, s_i) = (s_i, s_{i+1})$, $b_i = \frac{\partial^2 L}{\partial s_i \partial s_{i+1}}(s_i, s_{i+1})$ e H a matriz Hessiana da aplicação $\mathcal{A} : D \rightarrow \mathbb{R}$. Então,*

$$\text{tr } P - 2 = \frac{(-1)^n \det H}{\prod_{i=0}^{n-1} b_i}.$$

Demonstração. Sejam ρ um autovalor de P e $\begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix}$ o autovetor associado, isto é,

$P \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} = \rho \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix}$. Consideremos a sequência de v_i dada por:

$$\begin{pmatrix} v_i \\ v_{i+1} \end{pmatrix} = P_{i-1} \begin{pmatrix} v_{i-1} \\ v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{b_{i-1}}{b_i} & -\frac{a_i}{b_i} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v_{i-1} \\ v_i \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} v_i \\ -\frac{b_{i-1}}{b_i}v_{i-1} - \frac{a_i}{b_i}v_i \end{pmatrix}.$$

Temos:

$$\begin{aligned} \rho \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} &= P \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} = P_{n-1} \cdots P_1 \cdot P_0 \begin{pmatrix} v_0 \\ v_1 \end{pmatrix} = P_{n-1} \cdots P_1 \begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = \cdots = \\ P_{n-1} \begin{pmatrix} v_{n-1} \\ v_n \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} v_n \\ v_{n+1} \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

Logo, $v_n = \rho v_0$ e $v_{n+1} = \rho v_1$.

Definimos a matriz $H_n(t)$ por:

$$H_2(t) = \begin{bmatrix} a_0 & t^{-1}(b_0 + b_1) \\ t(b_0 + b_1) & a_1 \end{bmatrix}$$

e

$$H_n(t) = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & t^{-1}b_{n-1} \\ b_0 & a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & b_{n-2} \\ tb_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-2} & a_{n-1} \end{bmatrix}, n \geq 3.$$

Observemos que a matriz H é dada por:

$$H = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 + b_1 \\ b_0 + b_1 & a_1 \end{bmatrix} = H_2(1), \text{ para } n = 2$$

e

$$H = \begin{bmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & b_{n-1} \\ b_0 & a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & b_{n-2} \\ b_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-2} & a_{n-1} \end{bmatrix}, \text{ para } n \geq 3.$$

Notemos que $H_n(1) = H$. Vamos mostrar que $H_n(\rho)$ é singular, ou seja, que $\exists v \neq 0$ tal que $H_n(\rho)v = 0$. Colocando $v = \begin{pmatrix} v_0 \\ \vdots \\ v_{n-1} \end{pmatrix}$ e $u = H_n(\rho)v$, obtemos:

$$\begin{aligned}
u_0 &= a_0v_0 + b_0v_1 + \rho^{-1}b_{n-1}v_{n-1} \\
&= a_0\rho^{-1}v_n + b_0\rho^{-1}v_{n+1} + \rho^{-1}b_{n-1}v_{n-1} \\
&= \rho^{-1} \left(a_0v_n + b_0 \left(-\frac{b_{n-1}}{b_0}v_{n-1} - \frac{a_0}{b_0}v_n \right) + b_{n-1}v_{n-1} \right) = 0; \\
u_1 &= b_0v_0 + a_1v_1 + b_1v_2 \\
&= b_0v_0 + a_1v_1 + b_1 \left(-\frac{b_0}{b_1}v_0 - \frac{a_1}{b_1}v_1 \right) = 0; \\
&\vdots \\
u_{n-2} &= b_{n-3}v_{n-3} + a_{n-2}v_{n-2} + b_{n-2}v_{n-1} \\
&= b_{n-3}v_{n-3} + a_{n-2}v_{n-2} + b_{n-2} \left(-\frac{b_{n-3}}{b_{n-2}}v_{n-3} - \frac{a_{n-2}}{b_{n-2}}v_{n-2} \right) = 0; \\
u_{n-1} &= \rho b_{n-1}v_0 + b_{n-2}v_{n-2} + a_{n-1}v_{n-1} \\
&= b_{n-1}v_n + b_{n-2}v_{n-2} + a_{n-1}v_{n-1} \\
&= b_{n-1} \left(-\frac{b_{n-2}}{b_{n-1}}v_{n-2} - \frac{a_{n-1}}{b_{n-1}}v_{n-1} \right) + b_{n-2}v_{n-2} + a_{n-1}v_{n-1} = 0.
\end{aligned}$$

Logo, $H_n(\rho)v = u = 0$, então $H_n(\rho)$ é singular, e assim, $\det H_n(\rho) = 0$. Por outro lado, desenvolvendo o determinante de $H_n(\rho)$ pela primeira coluna, obtemos:

$$\begin{aligned}
\det H_n(\rho) &= a_0 \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & b_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-2} & a_{n-1} \end{bmatrix} - \\
&\quad - b_0 \det \begin{bmatrix} b_0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \rho^{-1}b_{n-1} \\ b_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & b_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-2} & a_{n-1} \end{bmatrix} +
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + (-1)^{n+1} \rho b_{n-1} \det \begin{bmatrix} b_0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \rho^{-1} b_{n-1} \\ a_1 & b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & b_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-2} \end{bmatrix} = \\
& = a_0 \det M_1 - b_0^2 \det \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ b_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & b_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-2} & a_{n-1} \end{bmatrix} + \\
& + (-1)^{n+1} b_0 \rho^{-1} b_{n-1} \det \begin{bmatrix} b_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & b_4 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-2} \end{bmatrix} + \\
& + (-1)^{n+1} \rho b_{n-1} b_0 \det \begin{bmatrix} b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_2 & b_2 & 0 & \dots & 0 \\ b_2 & a_3 & b_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-2} \end{bmatrix} + \\
& + (-1)^{2n+1} b_{n-1}^2 \det \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} \end{bmatrix} =
\end{aligned}$$

$$= a_0 \det M_1 - b_0^2 \det M_2 + (-1)^{n+1} \rho^{-1} \prod_{i=0}^{n-1} b_i + (-1)^{n+1} \rho \prod_{i=0}^{n-1} b_i - b_{n-1}^2 \det M_3,$$

$$\text{onde } M_1 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & b_{n-2} \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-2} & a_{n-1} \end{bmatrix}, M_2 = \begin{bmatrix} a_2 & b_2 & \dots & 0 & 0 \\ b_2 & a_3 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & a_{n-2} & b_{n-2} \\ 0 & 0 & \dots & b_{n-2} & a_{n-1} \end{bmatrix} \text{ e}$$

$$M_3 = \begin{bmatrix} a_1 & b_1 & 0 & \dots & 0 \\ b_1 & a_2 & b_2 & \dots & 0 \\ 0 & b_2 & a_3 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & a_{n-2} \end{bmatrix}.$$

Então, $\det H_n(1) = a_0 \det M_1 - b_0^2 \det M_2 + (-1)^{n+1} \prod_{i=0}^{n-1} b_i + (-1)^{n+1} \prod_{i=0}^{n-1} b_i - b_{n-1}^2 \det M_3$. Logo

$\det H_n(\rho) - \det H_n(1) = (-1)^{n+1} \rho^{-1} \prod_{i=0}^{n-1} b_i + (-1)^{n+1} \rho \prod_{i=0}^{n-1} b_i - (-1)^{n+1} \prod_{i=0}^{n-1} b_i - (-1)^{n+1} \prod_{i=0}^{n-1} b_i$. Assim

$0 - \det H = (\rho^{-1} + \rho - 1 - 1)(-1)^{n+1} \prod_{i=0}^{n-1} b_i = (\operatorname{tr} P - 2)(-1)^{n+1} \prod_{i=0}^{n-1} b_i$. Portanto

$$\operatorname{tr} P - 2 = \frac{(-1)^n \det H}{\prod_{i=0}^{n-1} b_i}. \quad \square$$

Corolário 2.1.1. Se $(-1)^n \det H > 0$ então (s_0, \dots, s_{n-1}) é uma órbita periódica hiperbólica. Se $(-1)^n \det H = 0$ então (s_0, \dots, s_{n-1}) é uma órbita periódica parabólica.

Demonstração. Observemos que $b_i > 0$. De fato,

$$b_i = \frac{\partial^2 L}{\partial s_{i+1} \partial s_i}(s_i, s_{i+1}) = \frac{\operatorname{sen} \alpha_i \operatorname{sen} \alpha_{i+1}}{L(s_i, s_{i+1})} > 0,$$

pois $\alpha_i \in (0, \pi)$ e $\alpha_{i+1} \in (0, \pi)$, então $\operatorname{sen} \alpha_i > 0$ e $\operatorname{sen} \alpha_{i+1} > 0$.

Logo, se $(-1)^n \det H > 0$ então, pela fórmula de Mackay-Meiss, $\operatorname{tr} P - 2 > 0$, logo (s_0, \dots, s_{n-1}) é uma órbita hiperbólica. Se $(-1)^n \det H = 0$ então, pela fórmula de Mackay-Meiss, $\operatorname{tr} P - 2 = 0$, e assim (s_0, \dots, s_{n-1}) é uma órbita parabólica. \square

Caso $(-1)^n \det H < 0$, então pela fórmula de Mackay-Meiss, $\operatorname{tr} P - 2 < 0$, logo a órbita (s_0, \dots, s_{n-1}) poderá ser hiperbólica, elíptica ou parabólica.

Apresentaremos agora a fórmula de Hill:

Teorema 2.2. (Fórmula de Hill) Sejam $P = DF^n$, onde $F(s_{i-1}, s_i) = (s_i, s_{i+1})$, $b_i = \frac{\partial^2 L}{\partial s_i \partial s_{i+1}}(s_i, s_{i+1})$ e H a matriz Hessiana da aplicação $\mathcal{A} : D \rightarrow \mathbb{R}$. Então,

$$\det(P - I) = \frac{(-1)^{n+1} \det H}{\prod_{i=0}^{n-1} b_i}.$$

Demonstração. Observemos que $\det(P - I) = 2 - \operatorname{tr} P$.

De fato, P é uma matriz 2×2 , digamos $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Então, $\det(P - I) = (a - 1)(d - 1) - bc = ad - a - d + 1 - bc = \det P - \operatorname{tr} P + 1 = 2 - \operatorname{tr} P$, pois $\det P = 1$.

Desse modo, pela fórmula de Mackay-Meiss

$$\det(P - I) = 2 - \operatorname{tr} P = \frac{(-1)^{n+1} \det H}{\prod_{i=0}^{n-1} b_i}.$$

□

Antes de apresentar o corolário da fórmula de Hill, vejamos a seguinte proposição.

Proposição 2.3. *Se $\det(P - I) < 0$, então P tem um autovalor real $\rho > 1$.*

Demonstração. Consideremos o polinômio característico $G(\rho) = \det(P - \rho I)$. Suas raízes são os autovalores da solução periódica (s_0, \dots, s_{n-1}) .

Observemos que $G(\rho) \rightarrow +\infty$ quando $\rho \rightarrow +\infty$. Por hipótese, $G(1) < 0$. Então, $\exists \rho \in (1, +\infty)$ tal que $G(P - \rho I) = 0$. □

Corolário 2.2.1. *Se (s_0, \dots, s_{n-1}) é um máximo local não-degenerado da ação \mathcal{A} , então (s_0, \dots, s_{n-1}) é uma órbita hiperbólica.*

Demonstração. Pela fórmula de Hill, $\frac{(-1)^n \det(P - I) \prod_{i=0}^{n-1} b_i}{\det H} = (-1)^{2n+1} < 0$. Como $\prod_{i=0}^{n-1} b_i > 0$ e (s_0, \dots, s_{n-1}) é um máximo local não-degenerado da ação \mathcal{A} , obtemos:

- se n é par, então $\det H > 0$, logo $\det(P - I) < 0$;
- se n é ímpar, então $\det H < 0$, logo $\det(P - I) < 0$.

Assim, pela proposição anterior, P tem um autovalor real $\rho > 1$. Portanto, a órbita (s_0, \dots, s_{n-1}) é hiperbólica. □

2.3 Resultado

Temos agora resultados suficientes para demonstrar o seguinte teorema.

Teorema 2.3. *Seja Γ uma curva plana, fechada, simples, de classe C^k , $k \geq 2$, parametrizada pelo comprimento de arco $s \in [0, l)$, onde l é o comprimento de Γ . Consideremos $T : [0, l) \times (0, \pi) \rightarrow [0, l) \times (0, \pi)$ a aplicação de bilhar de Γ . Dado $n \geq 2$, a aplicação T possui pelo menos uma órbita periódica de período n , hiperbólica ou parabólica.*

Demonstração. Como Γ é de classe C^k , $k \geq 2$, provamos que T é um difeomorfismo de classe C^{k-1} , $k \geq 2$.

Pela proposição 2.2, o conjunto $D_n = \{(s_0, \dots, s_{n-1}) \in \mathbb{T}^n = [0, l)^n \mid s_i \neq s_{i+1} \forall i \in \mathbb{Z}_n\}$ possui uma trajetória periódica (s_0, \dots, s_{n-1}) de período n da aplicação T que corresponde a um máximo da aplicação $\mathcal{A} : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{R}$, onde $\mathcal{A}(s_0, \dots, s_{n-1}) = \sum_{i=0}^{n-1} L(s_i, s_{i+1})$ e $L(s_i, s_{i+1}) = \|\Gamma(s_{i+1}) - \Gamma(s_i)\|$ é a função geradora do bilhar.

Conforme vimos na demonstração da proposição 2.2, (s_0, \dots, s_{n-1}) é um ponto crítico de \mathcal{A} em D_n , que pelo lema 2 corresponde a uma órbita periódica de período n da aplicação de bilhar T .

Seja H a matriz hessiana de \mathcal{A} em (s_0, \dots, s_{n-1}) . Se H é uma matriz não-degenerada, como (s_0, \dots, s_{n-1}) é um ponto de máximo em \mathcal{A} , segue pelo corolário 2.2.1 que a órbita (s_0, \dots, s_{n-1}) é hiperbólica.

Se H é uma matriz degenerada, então $\det H = 0$, logo pelo corolário 2.1.1, a órbita (s_0, \dots, s_{n-1}) é parabólica. \square

O teorema de Birkhoff afirma que dada uma curva suave, fechada, plana, com curvatura estritamente positiva, existem, para qualquer $n > 0$, pelo menos duas órbitas periódicas de período n da aplicação de bilhar, onde uma delas é um máximo da aplicação \mathcal{A} . Se esse máximo for um ponto crítico de \mathcal{A} , então a outra trajetória não é um máximo da aplicação \mathcal{A} .

Mostramos através das fórmulas de Mackay-Meiss e Hill, que a aplicação do bilhar tem pelo menos uma órbita periódica de período n , que pode ser hiperbólica ou parabólica. Pelo teorema de Birkhoff, existe outra órbita que não é um máximo da aplicação \mathcal{A} , logo essa órbita poderá ser parabólica, hiperbólica ou elíptica.

Referências

- [1] BOLOTIN, Sergey; TRESCHÉV, Dmitry. *Hill's Formula*. 2010.
- [2] CARNEIRO, Mário Jorge D.; RAGAZZO, Clodoaldo G.; ZANATA, Salvador A. *Introdução à Dinâmica de Aplicações do Tipo Twist*. 25º Colóquio Brasileiro de Matemática. Rio de Janeiro: IMPA, 2005.
- [3] CARVALHO, Alexandre N.; NUNES, Wagner V. L.; ZANI, Sérgio L. *Cálculo III*. Disponível em: <http://www.icmc.usp.br/sma/suporte/sma303/sma303.pdf>, acesso em 23/02/2012.
- [4] DO CARMO, Manfredo P. *Geometria Diferencial de Curvas e Superfícies*. Rio de Janeiro: Sociedade Brasileira de Matemática, 2006.
- [5] FERREIRA, Geraldo César G. *Bilhares em Ovais com Simetria*. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 2006.
- [6] KOZLOV, Valerii V.; TRESHCHĚV, Dmitrii V. *Billiards: A Genetic Introduction to the Dynamics of Systems with Impacts*. Providence, Rhode Island: American Mathematical Society, 1991.
- [7] LIMA, Elon L. *Curso de Análise Vol. 1*. Rio de Janeiro: IMPA, 2007.
- [8] LIMA, Elon L. *Curso de Análise Vol. 2*. Rio de Janeiro: IMPA, 2008. 10 ed.
- [9] PIMENTEL, Felipe Rogério. *Pontos Heteróclinos de um Bilhar Elíptico Perturbado*. Dissertação (Mestrado em Matemática) - Instituto de Ciências Exatas, Universidade Federal de Minas Gerais, Belo Horizonte, 1993.