

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS  
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS  
PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA

# Grafos aleatórios e Percolação

Rodrigo Botelho Ribeiro

Dissertação apresentada ao Programa de Pós-Graduação em  
Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais,  
como parte dos requisitos para obtenção do Título de  
Mestre em Matemática.

Orientador: Rémy de Paiva Sanchis

# Grafos aleatórios e Percolação

RODRIGO BOTELHO RIBEIRO

# Resumo

No presente trabalho formalizamos a técnica de comparar o processo de exploração de componentes de um grafo aleatório  $G(n, p)$  com um processo de ramificação de distribuição binomial. São provadas afirmações a respeito da comparação que precisam por quanto tempo a comparação é boa e difere por poucos indivíduos.

A abordagem é utilizada inicialmente para provar a transição de fase do modelo de Erdős-Rényi e pode ser encontrada em [9] e [7]. Essa mesma técnica é utilizada para provar o resultado obtido por Kesten em [2] seguindo o método de [1],[6] e [8].



# Tabela de conteúdos

<b>1 Introdução</b>	5
1.1 Grafos aleatórios	5
1.2 Percolação de elos em $\mathbb{Z}^d$	6
1.3 A relação entre percolação e grafos aleatórios finitos	7
<b>2 Transição de fase no modelo de Erdős-Rényi</b>	11
2.1 Cotas de Chernoff	11
2.2 O processo de Galton-Watson	14
2.3 A estrutura das componentes do grafo aleatório	22
2.4 A transição de fase	31
<b>3 Percolação e componentes gigantes</b>	39
3.1 Fase 1: Átomos	41
3.2 Fase 2: A união de átomos	44
3.3 Fase 3: Renormalização	46
<b>4 De percolação para componentes</b>	49
4.1 Um caminho inverso	49
4.2 Fase subcrítica	50
4.3 Fase supercrítica	52
<b>Bibliografia</b>	57



# Capítulo 1

## Introdução

O objetivo principal deste trabalho é mostrar o comportamento assintótico do ponto crítico,  $p_c(d)$ , para percolação de elos em  $\mathbb{Z}^d$ . A resposta para esse comportamento é dado pelo limite

$$\lim_{d \rightarrow \infty} p_c(d)2d = 1.$$

O resultado é conhecido, principalmente, devido a Kesten, entretanto daremos aqui uma prova diferente, encontrada em [1] e [8] que utiliza comparação com processos de ramificação e grafos aleatórios finitos. Para que a prova seja dada com o devido rigor apresentaremos diversos resultados sobre o processo de ramificação e como utilizá-lo para explorar componentes de grafos aleatórios. Também mostraremos como seguir o caminho inverso, utilizando percolação para determinar o tamanho de componentes de alguns grafos aleatórios.

Nesta pequena introdução definiremos os objetos de estudo de modo independente e discutiremos, brevemente, como relacioná-los.

### 1.1 Grafos aleatórios

Fixado um grafo  $G = (V, E)$ , um grafo aleatório,  $G(p)$ , é um grafo resultante do processo aleatório de remover cada elo de  $G$  com probabilidade  $1 - p$  de maneira independente. O conceito foi introduzido pela primeira vez em [10] por Erdős e Rényi e utilizado para provar a existência de grafos com uma propriedade específica. Trata-se de provar que a probabilidade de obter grafos com uma propriedade fixada é positiva, portanto tais grafos existem. Para maiores informações veja [9].

Neste trabalho trataremos em especial de grafos em que  $V$  é finito, i.e.  $|V| = n$ , e estudaremos o comportamento das maiores componentes conexas do grafo aleatório quando  $n$  cresce, portanto será conveniente denotarmos por  $G(n, p)$  o grafo aleatório.

Para o caso em que  $G = K_n$ , o grafo completo com  $n$  vértices, a probabilidade de obter um grafo fixo  $M$  com  $m$  elos é

$$\mathbb{P}(G(n, p) = M) = p^m(1 - p)^{N - m}$$

em que  $N = \binom{n}{2}$ . Chamaremos esse modelo de **modelo de Erdős-Rényi**.

Sobre os grafos aleatórios obtidos ao longo do texto, estamos interessados na ordem das componentes conexas deste grafo  $G(n, p)$ , i.e., na quantidade de vértices dos subgrafos conexas de  $G(n, p)$ . Denotaremos por  $L_1$  a ordem da maior componente conexa,  $L_2$  a ordem da segunda maior e assim por diante, além disso algumas vezes omitiremos a palavra conexa e abusaremos das notações utilizando a palavra tamanho no mesmo sentido de ordem da componente. Além disso, diremos que uma propriedade sobre os grafos, vale **assintoticamente quase certamente (a.q.c)** se a probabilidade de  $G(n, p)$  ter essa propriedade tende a 1 quando  $n$  tende a infinito. No nosso contexto, essa propriedade será a presença de uma componente de ordem  $n$ ,  $L_1 \sim n$ , que daremos o nome de **gigante**. Onde usamos o símbolo  $\sim$  para indicar ordem de grandeza assintótica, i.e.,  $a_n \sim b_n$  se  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = c$ ,  $c$  uma constante positiva. Para evitar repetições excessivas,  $n$  sempre denotará a quantidade de vértices, a menos que se diga o contrário.

Nos concentraremos no modelo de Erdős-Rényi em que  $p = p(n) = c/n$ , sendo  $c$  uma constante positiva. Para esse caso particular do modelo, os dois principais resultados são

**Teorema 1.1.** Para  $p = \frac{c}{n}$  com  $c < 1$  temos que, a.q.c,

$$L_1 \leq \frac{3}{(1-c)^2} \log(n)$$

**Teorema 1.2.** Para  $p = \frac{c}{n}$  com  $c > 1$  temos, a.q.c, que

1.  $L_1 = y(c)n$  em que  $y(c) < 1$  é a solução da equação

$$e^{-cy} = 1 - y.$$

2.  $L_2 = \Theta(\log(n))$

Em que  $f(n) = \Theta(g(n))$  se existem  $k_1, k_2 < \infty$  tais que  $k_1 g(n) \leq f(n) \leq k_2 g(n)$  assintoticamente em  $n$  e denotaremos por  $o(1)$  uma função de  $n$ , que tende a zero quando  $n$  tende a infinito. Os teoremas acima mostram a existência de uma transição de fase. Chamaremos de **fase subcrítica**, o caso  $c < 1$ , onde o modelo não exhibe componentes de ordem  $n$  a.q.c, e de **fase supercrítica**, o caso com  $c > 1$ , onde o modelo exhibe uma componente de ordem  $n$  a.q.c.

## 1.2 Percolação de elos em $\mathbb{Z}^d$

Antes de definir o que se entende por percolação de elos em  $\mathbb{Z}^d$ , justificaremos o abuso de linguagem que cometeremos em todo o texto, chamando  $\mathbb{Z}^d$  de grafo, ou algumas vezes, de rede hipercúbica. O conjunto  $\mathbb{Z}^d$ , formado pelos vértices  $x = (x_1, \dots, x_d)$  em que  $x_i \in \mathbb{Z}$  para  $i = 1, 2, \dots, d$ , é definido como um grafo tomando como conjunto de elos o conjunto,  $\mathbb{E}^d$ , constituído pelos pares de vértices que diferem por uma unidade em apenas uma coordenada, i.e., os pares de vértices  $x$  e  $y$  tais que

$$\|x - y\| = \sum_{i=1}^d |x_i - y_i| = 1.$$

Ou seja,  $x$  e  $y$  são vértices adjacentes se, e somente se,  $\|x - y\| = 1$ . Assim, obtemos o grafo  $\mathbb{L}^d = (\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$  que chamaremos somente de  $\mathbb{Z}^d$ .

Um processo de percolação i.i.d. de elos em  $\mathbb{Z}^d$  é uma família de variáveis aleatórias  $(\eta_e)_{e \in \mathbb{E}^d}$  i.i.d.'s, tais que  $\eta_e \sim \text{ber}(p)$ , i.e.,  $\eta_e = 1$  com probabilidade  $p$  e 0 com probabilidade  $1 - p$ . Dizemos que um elo  $e$  está aberto (respec. fechado) se  $\eta_e = 1$  (respec.  $\eta_e = 0$ ). Os resultados desse processo são elementos  $\omega \in \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$  que chamaremos de *configurações*. Cada configuração  $\omega$  induz um subgrafo de  $\mathbb{Z}^d$  em que o conjunto de vértices é  $\mathbb{Z}^d$  e o conjunto de elos é formado pelos elos abertos de  $\omega$ . Por vezes, chamaremos esse processo apenas de percolação de elos.

Posteriormente faremos uso da noção de caminho em  $\mathbb{Z}^d$ . Um *caminho*  $\gamma$  de comprimento  $n$  em  $\mathbb{Z}^d$  é uma sequência  $x_0, e_0, x_1, e_1, \dots, e_{n-1}, x_n$  de vértices e elos distintos, com  $e_i = \{x_i, x_{i+1}\}$ . Diremos que o caminho é *aberto* (resp. *fechado*) se todos os seus elos estão *abertos* (resp. *fechados*). E diremos que uma componente,  $C$ , de um grafo é *conexa* se para todo  $x$  e  $y$  em  $C$  existir um caminho aberto  $\gamma$  ligando  $x$  a  $y$ .

Denotaremos por  $C(x)$  a componente que contém o vértice  $x$ . As componentes são os principais objetos de estudo da teoria da percolação. Em particular, é de interesse a quantidade  $\theta(p) = \mathbb{P}_p(|C(0)| = \infty)$ . É claro que  $\theta(0) = 0$  e  $\theta(1) = 1$ . O que não é claro é a existência de  $p \in (0, 1)$  tal que  $\theta(p) > 0$ . Para o caso  $d = 1$ , por exemplo,  $\theta(p) = 0 \quad \forall p \in [0, 1)$ . Para  $d \geq 2$  temos o resultado seguinte

**Teorema.** *Para percolação iid de elos em  $\mathbb{Z}^d$  com  $d \geq 2$ ,  $\exists p_c(d) \in (0, 1)$  tal que*

$$\theta(p) \begin{cases} = 0, & \text{se } p < p_c(d) \\ > 0, & \text{se } p > p_c(d) \end{cases}$$

A  $p_c(d)$  damos o nome de *ponto crítico*.

O principal teorema desse trabalho trata do comportamento assintótico do ponto crítico da percolação de elos em  $\mathbb{Z}^d$ , denotado por  $p_c(d)$ .

**Teorema 1.3.** *Para percolação i.i.d. de elos em  $\mathbb{Z}^d$  temos que*

$$\lim_{d \rightarrow \infty} p_c(d) 2d = 1$$

O teorema acima foi provado por Kesten [2] e Gordon [1]. Apesar de não ter sido publicada, por motivos que desconhecemos, a demonstração de Gordon é citada no artigo de Kesten. A prova do Teorema 1.3 apresentada aqui segue as ideias dos artigos [8], [1] e [6].

## 1.3 A relação entre percolação e grafos aleatórios finitos

Como dito anteriormente, neste trabalho apresentamos dois caminhos de estudo. Um no sentido de utilizar grafos aleatórios finitos para obter resultados sobre percolação de elos em  $\mathbb{Z}^d$  e o outro no sentido de utilizar percolação para obter resultados sobre componentes de grafos aleatórios finitos.

No primeiro sentido, fixaremos o subgrafo  $H$  de  $\mathbb{Z}^d$ , cujo conjunto de vértices é  $V = \{1, 2, \dots, d\}^d$ , ou seja,  $d$ -uplas cujas entradas estão em  $\{1, 2, \dots, d\}$ . Denotaremos por  $H(p)$  o grafo aleatório obtido a partir de  $H$ . Nesse caso o resultado de interesse é a presença de uma componente gigante. Fixado  $\varepsilon > 0$ , tomando  $p = (1 + \varepsilon)/2d$ ,  $H(p)$  tem *a.q.c* uma única componente conexa de ordem  $d^d$ . Resultado enunciado no seguinte teorema

**Teorema 1.4.** *Seja  $\varepsilon > 0$  e  $p = \frac{1+\varepsilon}{2d}$ , existe  $c(\varepsilon) > 0$  constante dependendo apenas de  $\varepsilon$  tal que, a.q.c., a variável aleatória  $L_1$  que determina o tamanho da maior componente do grafo aleatório  $H(p)$  satisfaz*

$$\frac{L_1}{n} \geq c(\varepsilon)$$

em que  $n = d^d$ .

O teorema acima será importante para a prova da existência de uma componente infinita no processo de percolação em  $\mathbb{Z}^d$  quando  $p = (1 + \varepsilon)/2d$ , para  $d$  grande.

No sentido inverso a tarefa é determinar o tamanho das componentes (a.q.c em  $n$ ) do subgrafo aleatório de  $\mathbb{Z}^d$ ,  $G(n)$ , definido pelo conjunto de vértices  $v = (v_1, \dots, v_d)$  tais que  $1 \leq v_1, \dots, v_d \leq n$ . É um caminho intuitivo. Se o processo de percolação está em regime supercrítico, então, utilizando a densidade da componente infinita, esperamos que ao tomar  $G(n)$  suficientemente grande a interseção de  $G(n)$  com a componente infinita produza uma componente gigante dentro de  $G(n)$ . Por outro lado, se estamos em regime subcrítico, não podemos ter componentes muito grandes, em virtude do decaimento exponencial e assim não esperamos a presença de uma componente gigante nessa fase. Os teoremas abaixo resumem o que foi discutido neste parágrafo.

**Teorema 1.5.** *Para percolação de elos em  $\mathbb{Z}^d$ , se  $p < p_c$  então existe uma constante positiva  $\alpha(p)$ , dependendo somente de  $p$ , tal que*

$$\frac{1}{\log(n)} L_1(n) \rightarrow \alpha(p) \text{ em probabilidade.}$$

**Teorema 1.6.** *([13]) Para percolação de elos em  $\mathbb{Z}^2$ , se  $p > \frac{1}{2}$  então existem constantes positivas  $\beta(p)$ ,  $\gamma(p)$  e  $\delta(p)$ , dependendo somente de  $p$ , tal que*

$$\frac{1}{n^2} L_1(n) \rightarrow \beta(p) \text{ em probabilidade}$$

E mais,

$$\mathbb{P}(\gamma(p) \leq (\log(n))^{-2} L_2(n) \leq \delta(p)) \rightarrow 1.$$

Vale ressaltar que a prova do Teorema 1.5 para  $d = 2$  foi dada por Grimmett em [13]. Entretanto o ano antecede a prova do decaimento exponencial de  $\mathbb{P}(|C(v)| \geq n)$  dada por Menshikov em 1986 e Aizenman & Barsky em 1987. Este resultado nos permitirá adaptar a prova dada por Grimmett e obter o teorema para  $d \geq 2$ .

No capítulo seguinte, daremos os resultados e definições necessárias para a exploração de componentes de grafos aleatórios. Iniciaremos com algumas desigualdades importantes seguindo para a introdução do processo de Galton-Watson, do qual mostraremos uma série de propriedades importantes que permitirão, ao final do capítulo, provar a transição de fase. Neste mesmo capítulo descreveremos detalhadamente uma dinâmica de exploração de componentes de um grafo aleatório que permitirá a comparação com o processo de Galton-Watson.

O Capítulo 3 é inteiramente dedicado a prova do Teorema 1.3. A demonstração será feita em três fases. A primeira delas fará uso dos resultados obtidos a respeito da comparação entre os processos de ramificação e exploração de componentes, permitindo mostrar a existência de pequenas componentes de tamanho  $d^{100}$  em  $H(p)$ . Já na segunda fase, usaremos um argumento de *sprinkling* para unir todas as pequenas componentes obtidas na fase anterior obtendo assim o Teorema 1.4. E por fim, na última fase faremos uma renormalização de modo que as caixas  $H$  se tornem sítios obtendo assim um processo de percolação de sítios 2-dependente. E para finalizar, o Capítulo 4 apresenta a prova dos Teoremas 1.5 e 1.6.



## Capítulo 2

# Transição de fase no modelo de Erdős-Rényi

Iniciaremos este capítulo com algumas cotas para a probabilidade de uma variável aleatória  $X$  se distanciar da sua média  $\mathbb{E}X$ . No nosso caso, concentraremos nossa atenção em  $X \sim \text{Bin}(n, c/n)$  com  $c$  constante positiva. As desigualdades obtidas nesta primeira seção serão utilizadas para determinar o surgimento, ou não, da componente gigante, como veremos no final do capítulo.

Em seguida faremos a introdução do processo de ramificação de Galton-Watson e a demonstração de alguns resultados a respeito desse processo. Por fim, discutiremos detalhadamente a transição de fase no modelo de Erdős-Rényi mostrando a existência de uma fase sem componente gigante, fornecendo uma ordem precisa das maiores componentes, e uma fase com componente gigante. O ponto principal da demonstração passa pelo modo como a componente de um vértice fixo é explorada. Mostraremos que é possível explorar uma componente de modo a obter um processo semelhante a um processo de Galton-Watson.

### 2.1 Cotas de Chernoff

Para estimar a probabilidade de uma variável aleatória ficar longe da média temos como ferramenta duas desigualdades, a primeira delas, conhecida como *desigualdade de Markov*, afirma que se uma variável aleatória  $X$  é não negativa e tem  $\mathbb{E}X < \infty$ , então

$$\mathbb{P}(X \geq t) \leq \frac{\mathbb{E}X}{t}, \quad t > 0.$$

E a segunda, conhecida como *desigualdade de Chebyshev*, afirma que, se  $\text{Var}(X) < \infty$ , então

$$\mathbb{P}(|X - \mathbb{E}X| \geq t) \leq \frac{\text{Var}(X)}{t^2}, \quad t > 0.$$

Faremos uso da desigualdade de Markov para obter estimativas melhores para casos específicos de  $X$ . Usaremos o método de aplicar essa desigualdade à variável aleatória  $e^{uX}$ . Assim, para  $u \geq 0$ ,

$$\mathbb{P}(X \geq \mathbb{E}X + t) = \mathbb{P}(e^{uX} \geq e^{u(\mathbb{E}X+t)}) \leq e^{-u(\mathbb{E}X+t)} \mathbb{E}e^{uX}. \quad (2.1)$$

O mesmo para  $u < 0$

$$\mathbb{P}(X \leq \mathbb{E}X - t) = \mathbb{P}(e^{uX} \geq e^{u(\mathbb{E}X+t)}) \leq e^{-u(\mathbb{E}X-t)} \mathbb{E}e^{uX}. \quad (2.2)$$

Portanto, o método consiste em estimar  $\mathbb{E}e^{uX}$  e escolher  $u$  que a minimize.

O caso de interesse é  $X \sim \text{Bin}(n, p)$  ( $p = c/n$  e  $c$  constante positiva). Ou seja,  $X = \sum_{i=1}^n X_i$ , onde  $X_i$  são independentes e seguem uma distribuição de Bernoulli com parâmetro  $p$ . Além disso,  $\mathbb{E}X = c$ . Para esse caso, (2.1) nos conduz a

$$\mathbb{P}(X \geq \mathbb{E}X + t) \leq e^{-u(\mathbb{E}X+t)} \prod_{i=1}^n \mathbb{E}e^{uX_i}. \quad (2.3)$$

O que resume nosso trabalho em estimar somente  $\mathbb{E}e^{uX_i}$  e escolher  $u$  ótimo. Como  $\mathbb{E}e^{uX_i} = (1 - p + pe^u)$ , segue que

$$\mathbb{P}(X \geq c + t) \leq e^{-u(c+t)}(1 - p + pe^u)^n, \quad \forall u \geq 0. \quad (2.4)$$

Minimizaremos o lado direito da desigualdade acima, enxergando o termo  $e^{-u(c+t)}(1 - p + pe^u)^n$  como uma função de  $e^u$ , derivamos em relação a  $e^u$  e igualmos à zero para obter

$$\begin{aligned} -(c+t)e^{-u(c+t+1)}(1 - p + pe^u)^n &= -ce^{-u(c+t)}(1 - p + pe^u)^{n-1} \\ -(c+t)e^{-u}(1 - p + pe^u)^n &= -c(1 - p + pe^u)^{n-1}. \end{aligned}$$

Como  $1 - p + pe^u = 0 \Leftrightarrow e^u = \frac{p-1}{p} \leq 0$ . Dividindo por  $(1 - p + pe^u)^{n-1}$  a igualdade acima,

$$-(c+t)e^{-u}(1 - p + pe^u) = -c$$

e assim, assumindo  $c+t < n$ , obtemos um mínimo em,

$$e^u = \frac{(c+t)(1-p)}{p(n-c-t)}.$$

Portanto, substituindo em (2.4) a expressão para  $e^u$

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(X \geq c+t) &\leq \left( \frac{p(n-c-t)}{(c+t)(1-p)} \right)^{c+t} \left( 1 - p + \frac{(c+t)(1-p)}{n-c-t} \right)^n \\ &\leq \left( \frac{p(n-c-t)}{(c+t)(1-p)} \right)^{c+t} \left( \frac{n-c}{n-c-t} \right)^n \\ &\leq \left( \frac{c(n-c-t)}{(c+t)(n-c)} \right)^{c+t} \left( \frac{n-c}{n-c-t} \right)^n. \end{aligned}$$

Para  $0 \leq t < n - c$ ,

$$\mathbb{P}(X \geq c+t) \leq \left( \frac{c}{c+t} \right)^{c+t} \left( \frac{n-c}{n-c-t} \right)^{n-c-t}. \quad (2.5)$$

O caso  $t > n - c$  estamos no evento  $\{X > n\}$  que tem probabilidade zero.

Por comodidade, trocaremos a cota obtida acima por uma maior, porém com uma expressão mais simples. O Teorema seguinte, consequência de (2.5), nos diz quais são essas expressões.

**Teorema 2.1.** *Se  $X \sim \text{Bin}(n, c/n)$ , então, com  $\varphi(x) = (1+x)\log(1+x) - x$ ,  $x \geq -1$ , (e  $\varphi(x) = \infty$  se  $x < -1$ )*

$$\mathbb{P}(X \geq \mathbb{E}X + t) \leq \exp\left(-c\varphi\left(\frac{t}{c}\right)\right) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2(c+t/3)}\right), \quad t \geq 0; \quad (2.6)$$

$$\mathbb{P}(X \leq \mathbb{E}X - t) \leq \exp\left(-c\varphi\left(\frac{-t}{c}\right)\right) \leq \exp\left(-\frac{t^2}{2c}\right), \quad t \geq 0. \quad (2.7)$$

**Demostração.** Note que a expressão

$$-c\left[\frac{(c+t)}{c}\log\left(\frac{c+t}{c}\right) - \frac{t}{c}\right] - (n-c)\left[\left(\frac{n-c-t}{n-c}\right)\log\left(\frac{n-c-t}{n-c}\right) + \frac{t}{n-c}\right]$$

é exatamente

$$-c\varphi\left(\frac{t}{c}\right) - (n-c)\varphi\left(-\frac{t}{n-c}\right)$$

e também igual a

$$\log\left[\left(\frac{c+t}{c}\right)^{c+t}\left(\frac{n-c}{n-c-t}\right)^{n-c-t}\right].$$

Portanto, podemos reescrever (2.5) como

$$\mathbb{P}(X \geq \mathbb{E}X + t) \leq \exp\left\{-c\varphi\left(\frac{t}{c}\right) - (n-c)\varphi\left(-\frac{t}{n-c}\right)\right\}, \quad 0 \leq t \leq n-c. \quad (2.8)$$

Além disso, considerando  $Y = n - X$ , temos  $Y \sim \text{Bin}(n, 1-p)$  e  $\{X \leq c-t\} = \{Y \geq n-c+t\}$ , logo, por (2.5) em  $Y$ ,

$$\mathbb{P}(X \leq \mathbb{E}X - t) = \mathbb{P}(Y \geq n-c+t) \leq \left(\frac{n-c}{n-c+t}\right)^{n-c+t} \left(\frac{c}{c-t}\right)^{c-t}, \quad 0 < t \leq c.$$

Perceba que se  $t > c$  ou  $t > n-c$  os eventos  $\{X \geq \mathbb{E}X + t\}$  e  $\{X \leq \mathbb{E}X - t\}$  tem probabilidade zero o que faz com que as desigualdades acima sejam triviais.

O termo direito da última desigualdade acima pode ser reescrito como

$$\exp\left\{-c\varphi\left(-\frac{t}{c}\right) - (n-c)\varphi\left(\frac{t}{n-c}\right)\right\}.$$

Para obter

$$\mathbb{P}(X \leq \mathbb{E}X - t) \leq \exp\left\{-c\varphi\left(-\frac{t}{c}\right) - (n-c)\varphi\left(\frac{t}{n-c}\right)\right\} \quad 0 < t \leq c. \quad (2.9)$$

Um rápido exercício de cálculo nos leva a, para  $x \in (-1, \infty)$ ,

$$\varphi'(x) = \log(1+x)$$

logo,  $\varphi$  decresce em  $(-1, 0)$  e cresce em  $(0, \infty)$  com um ponto crítico em 1. Note também que  $\varphi''(x) = 1/(x+1) > 0$  em  $(-1, \infty)$  e assim  $\varphi$  tem concavidade voltada para cima no intervalo  $(-1, \infty)$ . Tudo isso nos permite concluir que  $\varphi(x) \geq 0$  para todo  $x$  e assim os termos  $-(n-c)\varphi\left(\frac{t}{n-c}\right)$  em (2.9) e  $-(n-c)\varphi\left(-\frac{t}{n-c}\right)$  em (2.8) podem ser esquecidos conduzindo a

$$\mathbb{P}(X \geq \mathbb{E}X + t) \leq \exp\left(-c\varphi\left(\frac{t}{c}\right)\right),$$

$$\mathbb{P}(X \leq \mathbb{E}X - t) \leq \exp\left(-c\varphi\left(\frac{-t}{c}\right)\right).$$

Como  $\varphi(0) = 0$  e  $\varphi'(x) = \log(1+x) \leq x$  então, no intervalo  $-1 < x \leq 0$  vale  $\varphi(x) \geq x^2/2$ . Portanto,  $-c\varphi(-t/c) \geq -\frac{c(-t/c)^2}{2} = -\frac{t^2}{2c}$  o que prova (2.7). Em um argumento similar,  $\varphi(0) = \varphi'(0)$  e

$$\varphi''(x) = \frac{1}{x+1} \geq \frac{1}{(1+x/3)^3} = \left(\frac{x^2}{2(1+x/3)}\right)''.$$

Logo,  $\varphi(x) \geq x^2/[2(1+x/3)]$  e portanto

$$\varphi\left(\frac{t}{c}\right) \geq \frac{t^2/c^2}{2(1+t/3c)} = \frac{t^2}{2c(c+t/3)}.$$

O que implica

$$-c\varphi\left(\frac{t}{c}\right) \leq -\frac{t^2}{2(c+t/3)}$$

provando (2.6). □

## 2.2 O processo de Galton-Watson

Nesta seção apresentaremos resultados clássicos sobre o processo de Galton-Watson, ou processo de ramificação, que serão utilizados mais tarde quando o processo de exploração de componentes de  $G(n, p)$  for comparado com o processo de Galton-Watson. Esses resultados permitirão quantificar a ordem de uma componente em  $G(n, p)$  determinando apenas a ordem de indivíduos produzidos no processo de ramificação.

Sejam  $\xi_i^{(n)}$ ,  $i, n \geq 1$  variáveis aleatórias positivas, inteiras, independentes e  $\xi_i^{(n)} \sim \xi$  para todo  $i, n \geq 1$  (aqui usamos o símbolo  $\sim$  para dizer que  $\xi_i^{(n)}$  e  $\xi$  possuem mesma distribuição de probabilidade). Defina a sequência  $X_n$ ,  $n \geq 0$ , da seguinte maneira, inicie com uma variável aleatória  $X_0$ , assumindo valores nos inteiros positivos e defina  $X_{n+1}$  como

$$X_{n+1} = \begin{cases} \xi_1^{(n+1)} + \dots + \xi_{X_n}^{(n+1)} & \text{se } X_n > 0 \\ 0 & \text{se } X_n = 0 \end{cases}.$$

Ao processo  $(X_n)_{n \geq 0}$  damos o nome de **processo de Galton-Watson**, por vezes chamaremos apenas de processo de ramificação i.i.d ou simplesmente processo de ramificação. Observamos que trata-se de uma cadeia de Markov. Esse processo pode ser visto como a evolução do número de descendentes de uma quantidade inicial,  $X_0$ , de indivíduos, onde  $X_n$  determina o número de descendentes gerados na  $n$ -ésima geração e  $\xi_i^{(n)}$  o número de filhos do  $i$ -ésimo indivíduo da  $n$ -ésima geração.

Como estaremos interessados no tamanho das componentes, em particular queremos garantir a existência de componentes gigantes, as proposições apresentadas nesta seção apontarão no sentido de garantir que o processo de ramificação sobreviva por tempo suficiente e que, além disso, seja grande o bastante, i.e., consiga gerar uma quantidade de indivíduos satisfatória para que, ao ser comparado com o processo de exploração da componente, seja possível afirmar se a componente é do tipo gigante ou não.

Diremos que o processo *morre* se, para algum  $n$ ,  $X_n = 0$ , i.e., o número de indivíduos gerados na geração  $n$  é zero. Nesse caso o *tempo de sobrevivência*, definido por

$$T = \inf \{n \mid X_n = 0\},$$

é finito. Quando  $T = \infty$  dizemos que o processo *sobrevive*. Aqui  $X_n > 0$  para todo  $n$ , i.e.,  $\{T = \infty\} = \bigcap_{n \geq 0} \{X_n > 0\}$ . A seguinte proposição nos dá condições para que o processo tenha probabilidade positiva de sobreviver

**Proposição 2.2.** *Assumindo que  $\mathbb{P}(\xi = 0) + \mathbb{P}(\xi = 1) < 1$  o processo de Galton-Watson,  $(X_n)_{n \geq 0}$ , exibe uma transição de fase, i.e.,*

- se  $\mathbb{E}\xi \leq 1$  então  $\mathbb{P}(T = \infty) = 0$
- se  $\mathbb{E}\xi > 1$  então  $\mathbb{P}(T = \infty) = q > 0$ .

Além disso, a probabilidade de morte (ou extinção),  $p = 1 - q$ , satisfaz a equação

$$f(p) = p$$

em que  $f$  é a função geradora de  $\xi$  dada por

$$f(s) = \sum_{k=0}^{\infty} \mathbb{P}(\xi = k) s^k$$

para  $s \in [0, 1]$ .

A suposição de  $\mathbb{P}(\xi = 0) + \mathbb{P}(\xi = 1) < 1$  se faz necessária para evitar o caso trivial em que os indivíduos sempre geram um único filho que se encaixa na condição  $\mathbb{E}\xi \leq 1$ , mas sobrevive com probabilidade 1 e evitar tratarmos o caso em que  $\xi = 0$ , quase certamente, pois neste o processo de Galton-Watson obviamente morre com probabilidade 1.

**Exemplo 2.3.** Seja  $X_n \sim \text{Bin}(n, p)$ , onde  $np \rightarrow c > 1$  quando  $n \rightarrow \infty$ . Como a função geradora de  $X_n$  é

$$f_{X_n}(x) = (1 - p + xp)^n.$$

Para todo  $x$  vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} f_{X_n}(x) = \exp \{c(x-1)\} = f_X(x)$$

em que  $X \sim \text{Poi}(c)$  e  $f_X$  sua função geradora.

Portanto quando  $n \rightarrow \infty$  a probabilidade de extinção do processo de ramificação com distribuição  $\text{Bin}(n, p)$  converge para  $1 - \beta(c)$ , onde  $\beta(c)$  é a solução da equação

$$e^{-\beta c} - 1 = \beta.$$

Antes da prova dessa proposição, mostraremos duas proposições que fornecem algumas propriedades do processo Galton-Watson. Denotaremos a  $n$ -ésima iterada da função geradora de  $\xi$ , por  $f_n = f_{n-1} \circ f$ . Observamos que  $\mathbb{P}(X_1 = k | X_0 = 1) = \mathbb{P}(\xi = k)$ , portanto  $f(s) = \mathbb{E}(s^{X_1} | X_0 = 1)$ , i.e., a função geradora de  $\xi$  é a função geradora de  $X_1$  condicionada a  $X_0 = 1$ .

**Proposição 2.4.** *Nas condições da Proposição 2.2, para  $n \geq 1$ , a função geradora de  $X_n$  condicionada a  $X_0 = 1$  é  $f_n$ .*

**Demonstração.** Provaremos por indução em  $n$ . Denote por  $g_n$  a função geradora de  $X_n$  condicionada no evento  $X_0 = 1$ . Para  $n = 1$

$$g_1(s) = \mathbb{E}(s^{X_1} | X_0 = 1) = \mathbb{E}(s^{\xi_1^{(1)}}) = \mathbb{E}(s^\xi) = f(s) = f_1(s).$$

Portanto a afirmação vale para  $n = 1$ . Supondo que  $g_n = f_n$ , observe que, condicionado ao evento  $\{X_n = k\}$ ,  $X_{n+1}$  é soma de  $k$  variáveis independentes e igualmente distribuídas. Assim

$$\mathbb{E}(s^{X_{n+1}} | X_n = k, X_0 = 1) = \mathbb{E}(s^{\sum_{i=1}^k \xi_i^{(n+1)}}) = (f(s))^k.$$

Agora partimos para o cálculo de  $g_{n+1}(s)$ . Note que os eventos  $\{X_n = k\}$  definem uma partição então podemos escrever  $s^{X_{n+1}} = \sum_{k=0}^{\infty} s^{X_{n+1}} \mathbb{1}_{\{X_n = k\}}$  e  $\varphi_m = \sum_{k=0}^m s^{X_{n+1}} \mathbb{1}_{\{X_n = k\}} \rightarrow s^{X_{n+1}}$  quase certamente (em  $m$ ), logo, pelo teorema da convergência dominada, pois  $s^{X_{n+1}}$  e  $\varphi_m$  são cotadas superiormente por 1, podemos comutar a soma em  $k$  com a esperança para obter

$$\begin{aligned} g_{n+1}(s) &= \sum_{k \geq 0} \mathbb{E}(s^{X_{n+1}} \mathbb{1}_{\{X_n = k\}} | X_0 = 1) \\ &= \sum_{k \geq 0} \mathbb{E}(s^{X_{n+1}} | X_n = k, X_0 = 1) \mathbb{P}(X_n = k | X_0 = 1) \\ &= \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X_n = k | X_0 = 1) (f(s))^k \\ &= g_n(f(s)) = f_n(f(s)) = f_{n+1}(s). \end{aligned}$$

□

**Proposição 2.5.** *Novamente, nas condições da Proposição 2.2, temos que*

$$\mathbb{E}(X_n|X_0 = 1) = (\mathbb{E}\xi)^n$$

para  $n \geq 0$ .

**Demonstração.** Começemos com algumas observações. Como as  $\xi_j^{(n)}$  são i.i.d's para todo  $n$  e para todo  $j$ , então

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k|X_n = j) = \mathbb{P}(X_1 = k|X_0 = j). \quad (2.10)$$

Sendo o processo de ramificação uma cadeia de Markov, vale o seguinte

$$\mathbb{P}(X_{n+1} = k|X_n = j, X_0 = 1) = \mathbb{P}(X_{n+1} = k|X_n = j). \quad (2.11)$$

E também

$$\mathbb{E}(X_1|X_0 = j) = j\mathbb{E}(X_1|X_0 = 1) = j\mathbb{E}\xi. \quad (2.12)$$

Logo,

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_{n+1}|X_0 = 1) &= \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(X_{n+1} = k|X_0 = 1) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_{n+1} = k, X_n = j|X_0 = 1) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_{n+1} = k|X_n = j, X_0 = 1)\mathbb{P}(X_n = j|X_0 = 1) \\ &= \sum_{k=0}^{\infty} k \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_{n+1} = k|X_n = j)\mathbb{P}(X_n = j|X_0 = 1) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = j|X_0 = 1) \sum_{k=0}^{\infty} k\mathbb{P}(X_1 = k|X_0 = j) \\ &= \sum_{j=0}^{\infty} \mathbb{P}(X_n = j|X_0 = 1)j\mathbb{E}(X_1|X_0 = 1) \\ &= \mathbb{E}(X_n|X_0 = 1)\mathbb{E}\xi. \end{aligned}$$

E por indução terminamos a prova. □

Agora estamos em condições de provar a Proposição 2.2.

**Demonstração (da Proposição 2.2).** Separamos em casos.

**Caso 1.**  $\mathbb{E}\xi = \lambda < 1$ . Observamos que  $\{T = \infty\} = \bigcap_{n \geq 0} \{X_n \geq 1\}$  e que a cadeia de eventos  $\{X_n \geq 1\}_n$  seja decrescente, pois se  $X_n = 0$  então  $X_{n+1} = 0$ . Pela proposição 2.3,  $\mathbb{P}(X_n \geq 1 | X_0 = 1) \leq \lambda^n$ , portanto

$$\mathbb{P}(T = \infty) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n \geq 1 | X_0 = 1) = 0.$$

E provamos o caso 1.

**Caso 2.**  $\mathbb{E}\xi = \lambda \geq 1$ . Façamos algumas observações. A primeira delas é que a cadeia de eventos  $\{X_n = 0\}_n$  seja crescente. Segundo,  $\mathbb{P}(X_n = 0 | X_0 = 1) = f_n(0)$ . Recorde que

$$f_n(s) = \sum_{k \geq 0} \mathbb{P}(X_n = k | X_0 = 1) s^k.$$

Logo, denotando por  $p$  a probabilidade de extinção,

$$p = \mathbb{P}\left(\bigcup_{n=1}^{\infty} \{X_n = 0\} \mid X_0 = 1\right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{P}(X_n = 0 | X_0 = 1) = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n(0).$$

Pela continuidade de  $f$  e pela Proposição 2.4,  $p$  satisfaz a equação

$$s = f(s). \tag{2.13}$$

Considerando  $\lambda = 1$ ,

$$f'(s) = \sum_{k=1}^{\infty} k \mathbb{P}(\xi = k) s^{k-1} < \mathbb{E}\xi = 1, \text{ para } s < 1.$$

Logo, pelo Teorema do Valor Médio,  $\exists c \in (s, 1)$  tal que

$$f(1) - f(s) = f'(c)(1 - s) < 1 - s$$

e então

$$f(s) > s \text{ para } s \in [0, 1).$$

Assim concluímos que, para o caso  $\lambda = 1$ , a única solução de (2.13) é  $p = 1$ .

O caso  $\lambda > 1$  exige mais cuidado. Pela continuidade de  $f'(s)$ , existe  $\delta > 0$  tal que para  $s \in (1 - \delta, 1)$  temos  $1 < f'(s) < f'(1) = \lambda$ . Novamente, pelo Teorema do valor médio, com  $s \in (1 - \delta, 1)$  obtemos

$$f(1) - f(s) = f'(c)(1 - s) > 1 - s.$$

Portanto  $f(s) < s$  no intervalo  $(1 - \delta, 1)$ . Lembrando que  $f(0) \geq 0$ , então existe pelo menos uma solução da equação  $f(s) = s$  em  $[0, 1)$ , a qual denotaremos por  $s_1$ . Primeiramente mostaremos a unicidade dessa solução. Suponha por absurdo, a existência de  $s_2$ , que também seja solução da equação  $f(s) = s$  e suponha, também,  $s_1 < s_2$ . Aplicando o Teorema do Valor Médio para  $f$  restrita ao intervalo  $[s_1, s_2]$  obtemos  $c_1 \in (s_1, s_2)$  satisfazendo

$$f(s_2) - f(s_1) = f'(c_1)(s_2 - s_1).$$

Como  $s_1$  e  $s_2$  são soluções de (2.13), então  $f'(c_1) = 1$ . Repetindo o argumento para  $f$  restrita a  $[s_2, 1]$  e lembrando que  $f(1) = 1$  obtemos  $c_2 \neq c_1$  com  $f'(c_2) = f'(c_1) = 1$ . Mas isso é uma contradição, pois pedimos que  $\mathbb{P}(\xi = 0) + \mathbb{P}(\xi = 1) < 1$ , então  $f''(s) > 0$  para  $s \in (0, 1)$  o que implica  $f'$  estritamente crescente. Com isso, temos duas opções,  $p = s_1$  ou  $p = 1$ . Suponha por absurdo  $p = 1$ . Logo, para  $n$  suficientemente grande,  $f_n(0) > 1 - \delta$ , mas isso implicaria

$$f(f_n(0)) < f_n(0)$$

o que é uma contradição, pois a sequência  $(f_n(0))_{n \geq 1}$  é crescente. Assim,  $p = s_1 < 1$  concluindo a prova da proposição.  $\square$

Em palavras, se a esperança do número de filhos gerados por um indivíduo é maior do que 1, então o processo tem probabilidade positiva de sobreviver. Quando estivermos nessa condição, chamaremos o processo de **supercrítico**.

Considere  $\mathcal{F}_n = \sigma(\xi_i^m \mid i \geq 1, 1 \leq m \leq n)$  a  $\sigma$ -álgebra gerada pelas variáveis aleatórias  $\xi_i^m$ , com  $i \geq 1$  e  $1 \leq m \leq n$ . Outra propriedade de processos de ramificação em geral é dada pela

**Proposição 2.6.** *Seja  $c = \mathbb{E}\xi \in (0, \infty)$ . Então  $X_n/c^n$  é um martingal com respeito à filtração  $\mathcal{F}_n$ .*

**Demostração.** É claro que  $X_n \in \mathcal{F}_n$ . Pelo Teorema da Convergência Monótona para esperança condicional e linearidade da esperança condicional

$$\mathbb{E}(X_{n+1} \mid \mathcal{F}_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_{n+1} \mathbb{1}_{\{X_n=k\}} \mid \mathcal{F}_n).$$

Mas  $X_{n+1}$  em  $\{X_n = k\}$  tem a forma

$$X_{n+1} \mathbb{1}_{\{X_n=k\}} = (\xi_1^{(n+1)} \dots + \xi_k^{(n+1)}) \mathbb{1}_{\{X_n=k\}}.$$

Lembrando que  $\mathbb{1}_{\{X_n=k\}} \in \mathcal{F}_n$  e  $\xi_i^{(n+1)}$  é independente de  $\mathcal{F}_n \forall i \geq 1$ , obtemos

$$\sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_{n+1} \mathbb{1}_{\{X_n=k\}} \mid \mathcal{F}_n) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{E}(\xi_1^{(n+1)} \dots + \xi_k^{(n+1)} \mid \mathcal{F}_n) \mathbb{1}_{\{X_n=k\}} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbb{1}_{\{X_n=k\}} k c = c X_n.$$

Dividindo por  $c^{n+1}$  ambos lados obtemos o desejado.  $\square$

**Comentário.** A Proposição 2.6 pode ser usada para obter facilmente a Proposição 2.5. Basta notar que  $\mathbb{E}(X_n/c^n) = \mathbb{E}(X_0) = 1$ , logo  $\mathbb{E}(X_n) = c^n$ .

Particularmente estaremos interessados em processos cujo  $\xi$  segue uma distribuição binomial com parâmetros  $n$  e  $\frac{c}{n}$  (note que são os mesmos parâmetros das hipóteses do Teorema 1.2). O Teorema seguinte nos fornece uma cota uniforme em  $n$  para a probabilidade de sobrevivência e extinção desse tipo de processo.

**Teorema 2.7.** ([5]) *Para a probabilidade de extinção,  $p_n$ , de um processo de Galton-Watson com distribuição binomial de parâmetros  $n$  e  $\frac{c}{n}$  com  $c > 1$ , existe  $p_0 = p_0(c)$  tal que*

$$p_n < p_0 < 1$$

para todo  $n$ .

**Demonstração.** Como  $\mathbb{E}\xi = c > 1$ , pois  $\xi \sim \text{Bin}(n, \frac{c}{n})$ . O processo sobrevive com probabilidade positiva, logo  $p_n < 1$ . Basta, portanto, mostrar que a desigualdade é de fato uniforme em  $n$ .

Seja  $f_n$  a função geradora de  $\xi$ , a qual pode ser escrita como, denotando por  $p$  a razão  $\frac{c}{n}$ ,

$$f_n(x) = (1 - p + px)^n = \left(1 - \frac{(1-x)c}{n}\right)^n \rightarrow (e^{-(1-x)c}), \text{ quando } n \rightarrow \infty. \quad (2.14)$$

*Afirmção:*  $f_n$  é monótona crescente em  $n$ .

*Prova da afirmação:* Mostraremos  $\frac{df_n}{dn}$  é positivo. Antes reescrevamos  $f$

$$f_n(x) = \exp \left\{ n \log \left( \frac{n - (1-x)c}{n} \right) \right\}.$$

Derivando com relação a  $n$  chegamos na expressão

$$\frac{\partial}{\partial n} f_n(x) = \exp \left\{ n \log \left( \frac{n - (1-x)c}{n} \right) \right\} \frac{d}{dn} n \log \left( \frac{n - (1-x)c}{n} \right) \quad (2.15)$$

$$\frac{\partial}{\partial n} n \log \left( \frac{n - (1-x)c}{n} \right) = \left(1 - \frac{(1-x)c}{n}\right)^{-1} + \log \left(1 - \frac{(1-x)c}{n}\right) - 1. \quad (2.16)$$

Note que, para  $n$  grande o suficiente, temos

$$\sum_{k=0}^{\infty} \left[ \frac{(1-x)c}{n} \right]^k = \left(1 - \frac{(1-x)c}{n}\right)^{-1}$$

e o segundo termo

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \left[ \frac{(1-x)c}{n} \right]^k = \log \left(1 - \frac{(1-x)c}{n}\right)$$

assim obtemos que (2.16) é positivo e portanto (2.15) também o é, o que prova a afirmação.

Logo, pela afirmação,  $p_n$  também crescente e basta tomar como  $p_0$  a solução no intervalo  $(0, 1)$  da equação  $e^{-(1-x)c} = x$ .

□

Note que, nas condições do teorema, se  $q$  é probabilidade de sobrevivência então  $q > 1 - p_0 = q_0 > 0$  para todo  $m$ , dizemos que a probabilidade de sobrevivência fica longe do zero.

### A versão passeio aleatório do processo de ramificação

Para os propósitos deste texto, será útil discutir uma outra maneira de ver o processo de ramificação. Será mais conveniente construir o processo de ramificação investigando sequencialmente o número de filhos de cada membro da população.

Definiremos um passeio aleatório que chamaremos de versão P-A do processo de ramificação  $X = (X_t)_t$ . Essa nova perspectiva nos permitirá estudar a variável aleatória

$$T_X = \sum_{i=0}^{\infty} X_i.$$

que nos fornece o total de indivíduos gerados, por meio do estudo do tempo de primeira visita à origem de sua versão P-A e assim obter cotas para a probabilidade de  $\{T_X \geq k\}$ .

Seja  $\xi_1, \xi_2, \dots$  variáveis aleatórias independentes com a mesma distribuição de  $\xi$  introduzida na definição do processo de Galton-Watson. Denotaremos por  $S_t$  a versão P-A de  $X$ , e definiremos  $S_0, S_1, \dots$  através da seguinte recursão

$$S_0 \equiv 1,$$

$$S_{t+1} = S_t + \xi_{t+1} - 1. \quad (2.17)$$

E mais

$$T_S = \inf \{t \mid S_t = 0\} = \inf \{t \mid \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_t = t - 1\} \quad (2.18)$$

pondo  $T_S = +\infty$  se tal  $t$  não existir. Observe que

$$S_t = \xi_1 + \xi_2 + \dots + \xi_t - (t - 1)$$

logo se  $T_S = t$  então

$$1 + \xi_1 + \dots + \xi_t = t$$

que é o total de descendentes do processo de ramificação até a  $t$ -ésima geração. Mas o que estamos em busca é relacionar  $T_S$  com  $T_X$ . Em particular, queremos mostrar que  $T_S = T_X$  em distribuição, afim de substituir o cálculo da probabilidade de eventos do tipo  $\{T_X > k\}$  pelo cálculo da probabilidade de eventos  $\{T_S > k\}$  e então utilizar os resultados de passeio aleatório.

Podemos explorar o processo de ramificação como segue. A variável aleatória  $\xi_1$  denota o número de filhos do vértice raiz. Uma vez que este gerou  $\xi_1$  filhos, existem  $S_1 = \xi_1 - 1$  vértices inexplorados, i.e., vértices dos quais ainda não exploramos quantos descendentes eles possuem. O lema a seguir generaliza essa ideia e nos fornece uma interpretação para o processo  $(S_t)_{t \geq 0}$ .

**Lema 2.8.** *Depois de explorar  $i$  indivíduos e condicionado ao evento que existem pelo menos  $i$  filhos na árvore gerada por  $(X_t)_t$ , a v.a.  $S_i$  denota o número de descendentes ainda inexplorados.*

**Demostração.** A prova do lema segue por indução em  $i$ . Obviamente a afirmação é válida para  $i = 0$ , pois ainda não exploramos nenhum vértice e a árvore inicia com um indivíduo, logo existe um único vértice inexplorado, o vértice raiz e assim  $S_0 \equiv 1$  satisfaz a afirmação. Portanto, supondo válida para  $S_{i-1}$ . Se  $S_{i-1} = 0$  então não existe mais nenhum vértice a ser explorado, assim toda a árvore foi gerada e é claro que  $T_S$  é o tamanho da árvore, logo  $S_i = 0$ , pois o processo de ramificação foi encerrado.

Supondo  $S_{i-1} > 0$ , escolha um indivíduo inexplorado e denote por  $\xi_i$  seus filhos. Como todos os filhos geram descendentes com mesma distribuição e independente, isso não depende da escolha do indivíduo. Logo, adicionamos  $\xi_i$  filhos à lista dos inexplorados, mas acabamos de explorar um vértice. Nesse sentido, nos restam  $S_{i-1} - 1 + \xi_i$  filhos à serem explorados o que é exatamente  $S_i$ . Isso prova a afirmação.  $\square$

Observamos anteriormente que  $T_S = k$  nos dizia que na etapa  $k$  o processo de ramificação possuía exatamente  $k$  indivíduos. Mas, usando a interpretação mostrada no Lema 2.8,  $T_S = k$  nos diz que na  $k$ -ésima etapa já não existem mais vértices a serem explorados, logo  $\{T_S = k\} \subset \{T_X = k\}$ . Por outro lado se  $T_X = k$ , então a árvore tem tamanho  $k$  e em  $k$  explorações não pode haver nenhum indivíduo a ser explorado, então  $S_k = 0$ , mas se  $T_S < k$  isso implicaria a árvore ter tamanho menor que  $k$ , logo  $T_S = k$  e assim provamos  $\{T_S = k\} = \{T_X = k\}$  resultando  $T_S \sim T_X$ , ou seja,  $T_X$  e  $T_S$  têm a mesma distribuição.

## 2.3 A estrutura das componentes do grafo aleatório

Esta seção é dedicada a introduzir e formalizar o processo de exploração e componentes do grafo aleatório e sua comparação com o processo de ramificação. É essa comparação que permitirá provar os resultados de transição de fase do modelo de Erdős-Rényi. Observamos que apesar do modelo ter sido introduzido em 1959 no artigo [10] de Erdős e Rényi, existem trabalhos recentes, como [7] de 2012, dedicados a fornecer provas mais simples e mais formais da transição de fase desse modelo.

Relembrando que no modelo de Erdős-Rényi iniciamos com um grafo completo  $K_n$  e geramos o grafo aleatório  $G(n, p)$  removendo, de modo independente, cada elo com probabilidade  $1 - p$ . O caso de interesse é  $p = c/n$ , com  $c$  uma constante positiva como tratado em [11].

### O processo de exploração das componentes de $G(n, p)$

Fixado um vértice  $i$  de  $G(n, c/n)$ , revelaremos sua componente por meio de um processo aleatório que descreveremos a seguir. Como foi dito várias vezes antes, teremos a preocupação de que a dinâmica descrita produza um processo aleatório parecido com um processo de ramificação. Inicialmente diremos qual será a dinâmica desse processo o qual chamaremos de *processo de exploração* e em seguida introduziremos uma notação mais rigorosa afim de justificar o termo parecido utilizado até então intuitivamente.

Utilizaremos uma linguagem de epidemia para explorar a componente. Fixe um indivíduo  $i$ . Para facilitar a explicação, escolheremos este para ser o vértice 1. Este indivíduo encontra-se infectado e por sua vez, possui uma probabilidade  $c/n$  de infectar cada um dos  $\{2, 3, \dots, n\}$  indivíduos. Logo ele contamina os outros  $n - 1$  membros de acordo com uma distribuição binomial de parâmetros  $n - 1$  e  $c/n$ . Digamos que após contaminar outros membros ele imediatamente se cura e fica imune a doença. Uma vez que o indivíduo 1 contaminou outros, temos então uma lista aleatória  $\{v_{11}, \dots, v_{1r}\}$  de pessoas contaminadas. Cada uma delas podem contaminar as pessoas do conjunto  $\{2, 3, \dots, n\} - (\{1\} \cup \{v_{11}, \dots, v_{1r}\})$  e a contaminação ocorre ao mesmo tempo. Isso possibilita que, por exemplo, dois membros diferentes de  $\{v_{11}, \dots, v_{1r}\}$  contaminem o mesmo indivíduo em  $\{2, 3, \dots, n\} - (\{1\} \cup \{v_{11}, \dots, v_{1r}\})$ .

### A formalização do processo de exploração

Para precisar melhor a ideia de que esse processo é parecido com um processo de ramificação com distribuição binomial de parâmetros  $n$  e  $c/n$ , é necessário descrevê-lo mais formalmente, introduzindo as devidas variáveis aleatórias. Essa abordagem mais rigorosa terá a vantagem de nos fornecer uma dominação estocástica do processo de exploração de componentes por um processo de ramificação e através dela será possível precisar até qual momento essa comparação é válida, afinal o processo de exploração morre com probabilidade 1 enquanto, na fase supercrítica, o processo de ramificação tem probabilidade positiva de sobreviver, além disso, na linguagem de descendência, no processo de exploração há indivíduos que dão origem ao mesmo filho o que não ocorre no processo Galton-Watson.

Para cada elo  $\{i, j\}$ , considere  $\eta_{i,j}$  a variável aleatória que assume 1, com probabilidade  $\frac{c}{n}$ , se  $i$  está conectado a  $j$  e 0 caso contrário. Ou seja,  $\eta_{i,j}$  é a indicadora do evento  $i$  está conectado a  $j$ . Em seguida, fixamos um vértice, digamos, o vértice 1. Aqui, definimos os conjuntos  $S_0 = \{2, 3, \dots, n\}$ ,  $I_0 = \{1\}$  e  $R_0 = \emptyset$ . A razão para a escolha das letras  $I$ ,  $R$  e  $S$  vem de um processo de epidemia, sendo  $S$  para os indivíduos suscetíveis à infecção,  $I$  os infectados e  $R$  os removidos. Esses conjuntos evoluem da seguinte maneira

$$R_{t+1} = R_t \cup I_t$$

$$I_{t+1} = \{j \in S_t \mid \eta_{i,j} = 1 \text{ para algum } i \in I_t\}$$

$$S_{t+1} = S_t - I_{t+1}.$$

Nesse caso, a componente do vértice 1, denotada por  $C(1)$ , é

$$C(1) = \bigcup_{t=0}^{\infty} I_t. \quad (2.19)$$

Como  $S_t$  diminui a medida que  $t$  evolui, esse processo não é de Galton-Watson. Na linguagem do processo de ramificação, a exploração de  $C(1)$  seria um processo de G-W onde os indivíduos geram menos filhos com o passar dos anos. A ideia de comparar esses dois processos consiste em corrigir essa falha.

Podemos ver um processo de ramificação como o processo de exploração de componente onde o tamanho da lista dos suscetíveis é mantida constante igual a  $n$ . A maneira de manter essa lista constante é permitir o nascimento de filhos fictícios, i.e., se no tempo  $t$  os vértices de  $I_t$  se conectam aos vértices de  $S_t$  com distribuição binomial de parâmetros  $n - m$  e  $c/n$ , permitimos até  $m$  conexões extras com vértices fictícios, assim obtemos uma distribuição  $\text{Bin}(n, c/n)$ . Para formalizar essa comparação, introduziremos as variáveis aleatórias i.i.d.  $\zeta_{1,1}$ , e  $\zeta_{i,j}^t$ ,  $i, t \geq 1$  e  $1 \leq j \leq n$ , onde  $\zeta_{i,j}^t \sim \text{ber}(c/n)$ . Agora defina o seguinte processo

$$\begin{aligned} X_0 &\equiv 1 \\ X_1 &= \sum_{j \in S_0} \eta_{1,j} + \zeta_{1,1} \\ X_{t+1} &= \sum_{i \in I_t} \sum_{j \in S_t} \eta_{i,j} + \sum_{i \in I_t} \sum_{j \in S_t^c} \zeta_{i,j}^t + \sum_{i=n+1}^{n+X_t-|I_t|} \sum_{j=1}^n \zeta_{i,j}^t. \end{aligned} \quad (2.20)$$

Como no processo de ramificação indivíduos diferentes geram filhos diferentes, na etapa  $t + 1$  devemos contar mais de uma vez o vértice de  $S_t$  que se conecta a mais de um vértice de  $I_t$ , isso justifica o primeiro termo de (2.20). Já o segundo termo, que denotaremos por

$$B_t = \sum_{i \in I_t} \sum_{j \in S_t^c} \zeta_{i,j}^t,$$

basta notar que um vértice em  $I_t$  somente se conecta aos vértices em  $S_t$ , entretanto  $|S_t| < n$ , logo, afim de manter a distribuição do número de filhos de um vértice  $i$  em  $I_t$  como  $\text{Bin}(n, c/n)$  devemos permitir mais  $n - |S_t| = |S_t^c|$  conexões, que são contadas por  $\sum_{j \in S_t^c} \zeta_{i,j}^t$ . Somando sobre todos os vértices em  $I_t$  obtemos  $B_t$ . Para o terceiro termo, é importante lembrar que permitindo nascimentos extras, os filhos fictícios por sua vez podem, na etapa seguinte, gerar descendentes que devem ser contados. Portanto  $X_t$  possui  $|I_t|$  filhos não-fictícios e  $X_t - |I_t|$  filhos vindo do processo

$$X_t' := \sum_{i=n+1}^{n+X_{t-1}-|I_{t-1}|} \sum_{j=1}^n \zeta_{i,j}^{t-1}.$$

Entretanto, os filhos adicionais dão origem a outros indivíduos de acordo com distribuição binomial de parâmetros  $n$  e  $\frac{c}{n}$ . Assim, precisamos contar, para cada um dos  $X_t - |I_t|$  filhos fictícios,  $n$  possíveis conexões. Somando sobre todos os filhos fictícios vem o terceiro termo.

Afirmamos que o processo  $(X_t)_{t \geq 0}$  é de fato de Galton-Watson. É suficiente perceber que, conhecendo  $X_t$ , conhecemos  $|I_t|$ , pois  $X_t$  representa a quantidade de indivíduos na  $t$ -ésima etapa, indivíduos dos quais alguns estão em  $I_t$  e outros não. Conhecendo  $|I_t|$ , conhecemos  $|S_t|$ , além disso, de (2.20), o primeiro termo fornece  $|I_t|$  variáveis aleatórias independentes de distribuição  $\text{Bin}(|S_t|, c/n)$ , o termo do meio mais  $|I_t|$  v.a. i.i.d. de distribuição  $\text{Bin}(n - |S_t|, c/n)$ , enquanto o terceiro termo fornece mais  $X_t - |I_t|$  v.a.'s i.i.d.'s de distribuição  $\text{Bin}(n, c/n)$ . Portanto os dois primeiros termos de (2.20) contribuem com  $|I_t|$  variáveis aleatórias de distribuição  $\text{Bin}(n, c/n)$  e o último termo com mais  $X_t - |I_t|$  variáveis, o que nos permite concluir que, conhecendo  $X_t$ ,  $X_{t+1}$  é soma de  $X_t$  binomiais independentes de parâmetros  $n$  e  $c/n$ .

Obviamente se  $X_t = 0$ ,  $X_{t+1}$  também é igual a zero e assim  $(X_t)_{t \geq 0}$  é um processo de ramificação com distribuição binomial de parâmetros  $n$  e  $c/n$  e vale

$$X_t \geq |I_t|, \forall t \geq 0. \quad (2.21)$$

A desigualdade (2.21) desempenha papel importante no nosso trabalho. É ela quem assegura que uma componente não ultrapassa a quantidade de indivíduos gerados por um processo de ramificação binomial e através dela que conseguiremos obter as estimativas para o tamanho da maior componente dos grafos aleatórios. Entretanto somente a desigualdade não basta. Pois um caso possível é o processo de ramificação gerar muitos filhos, mas todos fictícios. Enquanto a componente teria tamanho pequeno o processo de ramificação seria grande. Logo, é preciso garantir que essa comparação seja boa, no sentido de ambos os processos possuírem quantidades de indivíduos próximas. Isto é, garantir que a quantidade de filhos vindo das conexões extras e dos filhos desses vértices extras seja  $o(1)$ .

Para controlar esses nascimentos indesejáveis definimos as variáveis

$$C_{t+1} = \sum_{i \in I_t, j \in S_t} \eta_{i,j} - |I_{t+1}|.$$

$C_{t+1}$  determina o que chamamos de colisões, i.e., os nascimentos, pertencentes à  $S_t$ , no processo de ramificação que não alteram o tamanho da componente. Isso ocorre com os vértices de  $S_t$  que se conectam a mais de vértice de  $I_t$ .

Controlar  $C_t$  é importante pois é ela quem nos diz se a comparação entre os processos é boa ou não. Se  $C_t$  é muito grande, então o processo de ramificação é muito maior que o processo da componente e nesse caso determinar a quantidade total de filhos gerados no processo de ramificação não ajudaria a determinar o tamanho da componente explorada.

Uma consequência da comparação é uma cota superior para  $\mathbb{E}|C(i)|$ . Por (2.19), (2.21) e recordando que os conjuntos  $I_t$ 's são disjuntos para todo  $t$ , segue

$$|C(i)| \leq \sum_{t=0}^{\infty} X_t$$

e conseqüentemente, usando que  $\mathbb{E}X_t = c^t$  (veja Proposição 2.5), obtemos

$$\mathbb{E}|C(i)| \leq \sum_{t=0}^{\infty} c^t = \frac{1}{1-c} < \infty, \text{ se } c < 1. \quad (2.22)$$

O caso  $c > 1$  exige mais cuidado. Precisamos controlar o nascimento de indivíduos exclusivos do processo de ramificação, i.e., cotar a diferença entre  $X_t$  e  $|I_t|$  e mostrar que essa quantidade é desprezível assintoticamente. Seja  $Y_0 = 0$  e para  $t \geq 0$  seja

$$Y_{t+1} = \sum_{s=0}^t X_s = Y_t + X_t.$$

Como  $R_{t+1} = \cup_{j=0}^t I_j$ , por (2.21)

$$Y_{t+1} \geq |R_{t+1}|.$$

Seja  $\mathcal{F}_t$  a  $\sigma$ -álgebra gerada por  $S_s, I_s, R_s$  e  $\zeta_{i,j}^s$  com  $s \leq t$ . Lembrando que definimos anteriormente

$$B_t = \sum_{i \in I_t} \sum_{j \in S_t^c} \zeta_{i,j}^t.$$

$B_t$  conta o número de nascimentos fictícios dos indivíduos em  $I_t$ . Nessas condições

$$\mathbb{E}(B_{t+1} | \mathcal{F}_t) = \frac{c}{n} |I_t| (|I_t| + |R_t|).$$

A  $\sigma$ -álgebra  $\mathcal{F}_t$  nos fornece toda a informação da estrutura da componente até o tempo  $t$ , portanto nosso melhor palpite para  $B_{t+1}$  é que cada indivíduo de  $I_t$ , o qual origina um filho com probabilidade  $c/n$ , dê origem a  $\frac{c}{n} (|I_t| + |R_t|)$  filhos, onde  $|I_t| + |R_t| = |S_t^c|$ . Somando sobre  $|I_t|$  obtemos a expressão para  $\mathbb{E}(B_{t+1} | \mathcal{F}_t)$ . Além disso, vale

$$\mathbb{E}(B_{t+1} | \mathcal{F}_t) = \frac{c}{n} |I_t| (|I_t| + |R_t|) \leq \frac{c}{n} X_t (X_t + Y_t) = \frac{c}{n} X_t Y_{t+1}. \quad (2.23)$$

Para majorar o número de colisões definimos o conjunto

$$\mathcal{C}_{t+1} = \{(i, i', j) \mid i, i' \in I_t, j \in S_t, i < i', \eta_{i,j} = \eta_{i',j} = 1\}.$$

Ou seja  $\mathcal{C}_{t+1}$  é formado pelas triplas de vértices onde as duas primeira entradas estão em  $I_t$  e se conectaram à  $j$  em  $S_t$ . Claramente

$$C_{t+1} \leq |\mathcal{C}_{t+1}|,$$

usando que  $|S_t| \leq n$  e  $|I_t| \leq X_t$  temos

$$\mathbb{E}(C_{t+1} | \mathcal{F}_t) \leq \left(\frac{c}{n}\right)^2 |I_t|^2 |S_t| \leq \frac{c^2}{n} X_t^2. \quad (2.24)$$

O segundo termo da desigualdade vêm de

$$\mathbb{E}(|\mathcal{C}_{t+1}| | \mathcal{F}_t) \leq \left(\frac{c}{n}\right)^2 |I_t|^2 |S_t|.$$

Sabendo toda a estrutura da componente até o tempo  $t$ , uma cota superior sobre a quantidade de triplas em  $\mathcal{C}_{t+1}$  é esperar que cada par de vértices em  $I_t \times I_t$ , for da diagonal, se conecte à  $(c/n)^2 |S_t|$  vértices iguais de  $S_t$ , somando sobre  $I_t \times I_t$  ganhamos a desigualdade acima.

Até o momento temos cotas superiores para a quantidade de filhos fictícios gerados em cada geração do processo de ramificação e para a quantidade de colisões, i.e., a quantidade de nascimentos que ocorrem no processo Galton-Watson mas não aumentam o tamanho da componente explorada. É preciso então estimar o terceiro termo da expressão (2.20) que determina o número de filhos dos filhos fictícios. Para isso chamaremos os  $C_s + B_s$  indivíduos adicionados ao processo de ramificação no tempo  $s$  de *imigrantes*. Observe que os imigrantes não são adicionados à componente, daí a razão para o nome. Denote por  $A_{s,t}$  os filhos no tempo  $t \geq s$  de imigrantes adicionados no tempo  $s$ , onde  $A_{s,s} = C_s + B_s$ . O terceiro termo expressão (2.20) é exatamente  $\sum_{s=1}^t A_{s,t}$  e vale

$$\mathbb{E}(A_{s,t}) = c^{t-s} \mathbb{E}(B_s + C_s). \quad (2.25)$$

Se no tempo  $s$  adicionamos  $B_s + C_s$  imigrantes, então, em média, até o tempo  $t - s$  cada imigrante gerou  $c^{t-s}$  filhos, pois cada um deles dá origem a filhos com distribuição  $\text{Bin}(n, c/n)$ . Logo, a média de filhos no tempo  $t$  de imigrantes nascidos no tempo  $s$  é a média de imigrantes adicionados vezes a média de filhos até o tempo  $t$  de cada um.

A próxima proposição responderá à pergunta desta subseção para o regime subcrítico. Ela mostra que no regime subcrítico a distribuição do tamanho da componente é muito próxima da distribuição do total de descendentes do processo de ramificação quando  $n$  é grande o suficiente.

**Proposição 2.9.** *Se  $c < 1$  vale a seguinte desigualdade*

$$\sum_{t=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_t - |I_t|) \leq \frac{c_2}{n}.$$

onde  $c_2$  é uma constante dependendo somente de  $c$ .

**Comentário.** Observe que pela Proposição 2.9

$$\mathbb{P}(T - |C(i)| \leq 1) = 1 - \mathbb{P}(T - |C(i)| > 1),$$

$$\mathbb{P}(T - |C(i)| > 1) = \mathbb{P}\left(\bigcup_{t=1}^{\infty} \{X_t - |I_t| > 1\}\right) \leq \sum_{t=1}^{\infty} \mathbb{P}(X_t - |I_t| > 1) \leq \frac{c_2}{n}.$$

$$\mathbb{P}(T - |C(i)| \leq 1) \geq 1 - \frac{c_2}{n}.$$

Ou seja, a probabilidade dos processos de ramificação e de exploração de componentes diferirem por, no máximo, 1 indivíduo é  $1 - o(1)$ .

**Demostração.** Observe  $X_t - |I_t|$  é exatamente a quantidade de imigrantes adicionados até o tempo  $t$ , logo  $X_t - |I_t| = \sum_{s=1}^t A_{s,t}$ . Usando (2.25) e invertendo a ordem dos somatórios,

$$\sum_{t=1}^{\infty} \mathbb{E}(X_t - |I_t|) \leq \mathbb{E}\left(\sum_{s=1}^{\infty} \sum_{t=s}^{\infty} A_{s,t}\right) \leq \frac{1}{1-c} \mathbb{E}\left[\sum_{s=1}^{\infty} (B_s + C_s)\right] \quad (2.26)$$

precisamos então, cotar o valor esperado de  $B_s + C_s$ . Para tal, utilizamos (2.23) e (2.24) e recordarmos  $Y_{s+1} = \sum_{r=0}^s X_r = Y_s + Z_s$ . Por (2.23) temos

$$\mathbb{E}(B_s) \leq \frac{c}{n} \mathbb{E}(X_{s-1} Y_s) = \frac{c}{n} \mathbb{E}\left(\sum_{r=0}^{s-1} X_{s-1} X_r\right)$$

e por (2.24)

$$\mathbb{E}(C_s) \leq \frac{c^2}{n} \mathbb{E}(X_{s-1}^2).$$

Combinando as duas desigualdades obtemos

$$\mathbb{E}\left[\sum_{s=1}^{\infty} (B_s + C_s)\right] \leq \frac{c}{n} \mathbb{E}\left(\sum_{s=1}^{\infty} \sum_{r=0}^{s-1} X_s X_r\right) + \frac{c+c^2}{n} \mathbb{E}\left(\sum_{s=0}^{\infty} X_s^2\right) \quad (2.27)$$

se  $r < s$  então  $\mathbb{E}(X_r X_s | \mathcal{F}_r) = X_r \mathbb{E}(X_s | \mathcal{F}_r) = c^{s-r} X_r^2$ , afinal  $\mathcal{F}_r$  nos fornece toda a informação do processo  $X_t$  até o tempo  $r$ , logo o melhor palpite sobre o número de filhos no tempo  $s$ ,  $X_s$ , é cada filho gerado no tempo  $r$  (temos  $X_r$  deles) dê origem, em média, a  $c^{s-r}$  descendentes até o tempo  $s$ , isso nos daria  $c^{s-r} \mathbb{E}(X_r)$ , multiplicando pelo  $X_r$  fora da esperança condicional obtemos a expressão anterior. Portanto

$$\mathbb{E}(X_r X_s) = c^{s-r} \mathbb{E}(X_r^2) \quad (2.28)$$

e alterando a ordem dos somatórios no primeiro termo do membro direito da desigualdade (2.27)

$$\mathbb{E}\left(\sum_{r=0}^{s-1} \sum_{s=1}^{\infty} X_s X_r\right) = \frac{c}{1-c} \mathbb{E}\left(\sum_{r=0}^{\infty} X_r^2\right).$$

Perceba que completaremos a prova se conseguirmos mostrar  $\mathbb{E}(\sum_{r=0}^{\infty} X_r^2) \leq c_3$ . Para isso calcularemos a variância de  $X_s$  recursivamente. Antes, observamos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_s^2 | \mathcal{F}_{s-1}) &= \mathbb{E}[(X_s - c X_{s-1} + c X_{s-1})^2 | \mathcal{F}_{s-1}] \\ &= \mathbb{E}[(X_s - c X_{s-1})^2 + 2c X_{s-1} (X_s - c X_{s-1}) + c^2 X_{s-1}^2 | \mathcal{F}_{s-1}] \\ &= c^2 X_{s-1}^2 + \mathbb{E}[(X_s - c X_{s-1})^2 | \mathcal{F}_{s-1}] \\ &= c^2 X_{s-1}^2 + \sigma^2 X_{s-1}. \end{aligned} \quad (2.29)$$

A última igualdade se justifica pois, condicionado a  $\mathcal{F}_{s-1}$ ,  $X_s$  é soma de  $X_{s-1}$  binomiais de parâmetros  $n$  e  $c/n$ , logo soma de  $X_{s-1}$  variáveis aleatórias de média  $c$  e variância  $\sigma^2 = n(c/n)(1 - c/n) \leq c$  (lembrando que  $c < 1$  nesse caso). Usando a Proposição (2.5),  $\mathbb{E}X_{s-1} = c^{s-1}$ , logo

$$\mathbb{E}X_s^2 \leq c^s + c^2 \mathbb{E}X_{s-1}^2.$$

Iterando, obtemos

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X_s^2 &\leq c^s + c^{s+1} + c^4 \mathbb{E}X_{s-2}^2 \\ &\leq c^s + c^{s+1} + c^{s+2} + c^6 \mathbb{E}X_{s-3}^2 \\ &\leq \sum_{r=s}^{\infty} c^r = c^s / (1 - c) \end{aligned}$$

completando a prova. □

Agora tratamos a fase supercrítica com a proposição

**Proposição 2.10.** *Se  $c > 1$ , vale a seguinte desigualdade*

$$\mathbb{E}(X_t - |I_t|) \leq \frac{c_2}{n} c^{2t+2}.$$

onde  $c_2$  é uma constante dependendo somente de  $c$ .

**Comentário.** Se  $t = a \log(n) / \log(c)$  temos pela Proposição 2.10

$$\mathbb{E}(X_t - |I_t|) \leq \frac{c_2}{n} c^{2a \log(n) / \log(c)} c^2.$$

Note que

$$\begin{aligned} 2a \log(n) / \log(c) &= \frac{2a \log_c(n)}{\log_c(e) \log(c)} \\ &= 2a \log_c(n). \end{aligned}$$

Desse modo, agrupando todas as constantes em  $C$ ,

$$\mathbb{E}(X_t - |I_t|) \leq C n^{2a-1}.$$

Para obter um resultado parecido com a Proposição 2.9 escrevemos

$$\sum_{t=1}^{\lfloor a \log(n) / \log(c) \rfloor} \mathbb{E}(X_t - |I_t|) \leq C_2 \log(n) n^{2a-1}$$

e pelo mesmo argumento do comentário da Proposição 2.9 mostramos que, com probabilidade  $1 - o(1)$  os processos, até o tempo  $a \log(n) / \log(c)$ , diferem por, no máximo, um único indivíduo.

**Demostração.** Usaremos as cotas obtidas na prova do teorema anterior. Em particular, por (2.27) e (2.28), temos

$$\mathbb{E}(B_s + C_s) \leq \frac{c}{n} \mathbb{E} \left( \sum_{r=0}^{s-1} X_s X_r \right) + \frac{c+c^2}{n} \mathbb{E}(X_s^2) \leq \frac{c+c^2}{n} \left( \sum_{r=0}^s c^{s-r} \mathbb{E} X_r^2 \right). \quad (2.30)$$

Precisamos neste momento de uma cota superior para  $\mathbb{E} X_r^2$ . Tomando a esperança em (2.29) e observando que  $\sigma^2 = n(c/n)(1 - c/n) = c - c^2/n \leq c$  chegamos à seguinte expressão

$$\mathbb{E} X_r^2 = c^2 \mathbb{E} X_{r-1}^2 + \sigma^2 \mathbb{E} X_{r-1}$$

sendo  $\mathbb{E} X_{r-1} = c^{r-1}$ ,

$$\mathbb{E} X_r^2 \leq c^2 \mathbb{E} X_{r-1}^2 + c^r.$$

A desigualdade acima nos permite majorar  $\mathbb{E} X_r^2$  indutivamente. Utilizando-a obtemos

$$\mathbb{E} X_r^2 \leq K c^{2r}.$$

onde  $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{c^k} = c/(c-1) = K$ .

Combinando a desigualdade acima com (2.30)

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(B_s + C_s) &\leq \frac{c+c^2}{n} \left( \sum_{r=0}^s c^{s-r} K c^{2r} \right) \\ &\leq \left( \frac{c+c^2}{n} \right) K c^s \left( \sum_{r=0}^s c^r \right) \\ &\leq \left( \frac{c+c^2}{n} \right) K c^s \left( \frac{1-c^{s+1}}{1-c} \right) \\ &\leq \frac{K}{n} c \left( \frac{1+c}{1-c} \right) c^s (1-c^{s+1}) \\ &\leq \frac{K}{n} \left( \frac{1+c}{1-c} \right) c^{s+1} (1-c^{s+1}) \\ &\leq \frac{K}{n} \left[ \left( \frac{1+c}{1-c} \right) (c^{s+1} - c^{2s+2}) \right] \\ &\leq \frac{K}{n} \left[ - \left( \frac{1+c}{1-c} \right) (c^{2s+2} - c^{s+1}) \right] \\ &\leq \frac{K_2}{n} c^{2s+2} \end{aligned}$$

onde  $K_2 = -\left(\frac{1+c}{1-c}\right)K$ .

Lembrando que  $X_t - |I_t|$  é exatamente a quantidade de filhos geradas por imigrantes nos tempos  $s \leq t$ . Logo  $X_t - |I_t| = \sum_{s=1}^t A_{s,t}$  conforme já havíamos discutido anteriormente. Mas por (2.25),  $\mathbb{E}A_{s,t} = c^{t-s}\mathbb{E}(B_s + C_s)$ , então

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t - |I_t|) &= \sum_{s=1}^t c^{t-s}\mathbb{E}(B_s + C_s) \\ &\leq \frac{K_2}{n} \sum_{s=1}^t c^{t-s} c^{2s+2} \\ &\leq \frac{K_2}{n} c^{t+2} \sum_{s=1}^t c^s \\ &\leq \frac{K_2}{n} c^{t+2} \left( \frac{c - c^{t+1}}{1-c} \right) \\ \mathbb{E}(X_t - |I_t|) &\leq \frac{K_3}{n} c^{2t+2}, \end{aligned}$$

o que conclui a prova. □

## 2.4 A transição de fase

Antes de entrarmos na demonstração dos Teoremas 1.1 e 1.2 fazemos uma análise sobre os resultados obtidos até o momento. Provamos vários resultados sobre processo de ramificação afim de facilitar o estudo do tamanho das componentes conexas do grafo aleatório  $G(n, c/n)$ . Mostramos que era possível explorar as componentes do grafo aleatório de modo a obter um processo parecido com o processo de ramificação. Esse “parecido” foi precisado pela desigualdade (2.21) e pelas Proposições 2.9 e 2.10, onde mostramos que os processos de exploração e ramificação apresentam pouca diferença na quantidade de indivíduos. Portanto, estudar o tamanho das componentes de  $G(n, c/n)$  é estudar a distribuição da quantidade de indivíduos de um processo de ramificação.

Daremos um outro modo de explorar a componente de  $G(n, c/n)$  que facilitará o controle do tamanho das componentes. A princípio pode parecer estranha essa abordagem, uma vez que tínhamos definido um modo de explorar componentes que era próximo do processo de ramificação e provamos vários resultados para aquele tipo de processo. Entretanto, esse novo modo de explorar nada tem de novidade, a diferença é que ele será comparado com o processo de ramificação sob outra dinâmica.

Na Seção 2.2 introduzimos o que chamamos de versão passeio aleatório do processo de ramificação e lá mostramos que a variável aleatória  $T_X$  que determina o total de descendentes gerados no processo de ramificação tem mesma distribuição que  $T_S$ , sendo  $T_S$  o tempo de primeira visita ao zero realizado pela versão *passeio aleatório*,  $S_t$ , do processo de ramificação  $X_t$ . Assim, trocamos uma tarefa por outra e resumimos o estudo do tamanho das componentes ao estudo do tempo de primeira visita de um passeio aleatório a origem. Além disso, fornecemos uma interpretação para o processo  $(S_t)_{t \geq 0}$ , ele determinava a quantidade de vértices inexplorados de um processo que explora a árvore aleatória gerada pelo processo de Galton-Watson vértice por vértice.

### A exploração da componente, revisitada

Seja  $R_0 = \emptyset$ ,  $U_0 = \{2, 3, \dots, n\}$  e  $A_0 = \{1\}$ .  $R_t$  será os vértices removidos,  $A_t$  os vértices ativos e  $U_t$  os vértices inexplorados o uso da letra  $U$  vem do inglês *unexplored*. O processo evolui da seguinte forma, se  $A_t \neq \emptyset$ , e seja  $i_t \in A_t$ , onde  $i_t = \min \{i \mid i \in A_t\}$  e ponha

$$R_{t+1} = R_t \cup \{i_t\}$$

$$A_{t+1} = A_t \cup \{j \in U_t \mid \eta_{i_t, j} = 1\} - \{i_t\}$$

$$U_{t+1} = U_t - \{j \in U_t \mid \eta_{i_t, j} = 1\}$$

onde as variáveis  $\eta_{i,j}$  são as mesmas descritas anteriormente, i.e.,  $\eta_{i,j} = \mathbb{1}_{\{i \text{ está conectado a } j\}}$ .

No tempo  $\tau = \inf \{t \mid A_t = \emptyset\}$  o processo se encerra. Sendo  $|R_t| = t$  para  $t \leq \tau$ , então, como a cada passo adicionamos um vértice aos removidos e à componente, quando explorarmos todos (isso ocorre no tempo  $\tau$ ) teremos o tamanho da componente, i.e.,  $\tau$  é  $|C(i)|$ . Pela descrição acima é claro que

$$|A_{t+1}| = |A_t| - 1 + \sum_{j \in U_t} \eta_{i_t, j}$$

$$|A_{t+1}| = \sum_{i_t \in R_{t+1}} \hat{\xi}_{i_t} - t$$

onde

$$\hat{\xi}_{i_t} = \sum_{j \in U_t} \eta_{i_t, j}. \quad (2.31)$$

A dinâmica desse processo é a mesma da versão P-A do processo de ramificação. A cada tempo  $t$  exploramos um único vértice a procura de vizinhos. Seus vizinhos são adicionados a uma lista e explorados mais tarde. Além disso, temos no tempo  $\tau = t$ ,  $\{|A_t| = 0\} = \{\sum_{i_t \in R_t} \hat{\xi}_{i_t} = t - 1\} = \{\sum_{i_t \in R_t} \hat{\xi}_{i_t} = |C(1)| - 1\}$ .

Para formalizar a comparação com  $(S_t)_{t \geq 0}$ , a versão P-A do processo de ramificação  $(X_t)_{t \geq 0}$ , introduzimos as variáveis iid's  $\zeta_i^t$ ,  $t \geq 1$ ,  $i \leq n$ , em que  $\zeta_i^t \sim \text{ber}(c/n)$ , e escrevemos

$$S_{t+1} = S_t - 1 + \begin{cases} \sum_{j \in U_t} \eta_{i_t, j} + \sum_{j \in U_t^c} \zeta_j^t & \text{se } A_t \neq \emptyset \\ \sum_{j=1}^n \zeta_j^t & \text{se } A_t = \emptyset \end{cases}$$

Se  $A_t \neq \emptyset$ , então o termo  $\sum_{j \in U_t} \eta_{i_t, j}$  conta os filhos gerados pelo processo de exploração, enquanto o termo  $\sum_{j \in U_t^c} \zeta_j^t$  permite até  $n - |U_t|$  filhos extras de maneira a garantir que o incremento seja uma variável aleatória da forma  $Y - 1$ , em que  $Y \sim \text{Bin}(n, c/n)$ . Se o processo de exploração se encerra deixamos como na definição dada em (2.17).

Pela construção acima  $S_t$  é o mesmo passeio aleatório definido em (2.17) e claramente

$$S_t \geq |A_t| \tag{2.32}$$

se  $t \leq \tau$ . Logo, se  $T_S = \inf \{ t \mid S_t = 0 \}$ , então  $\tau \leq T_S$ .

**Teorema 1.1. (Fase subcrítica)** Para  $p = \frac{c}{n}$  com  $c < 1$  temos que, a.q.c.,

$$L_1 \leq \frac{3}{(1-c)^2} \log(n).$$

**Demonstração.** Queremos estimar a seguinte probabilidade

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq n} |C(i)| \geq k(n)\right).$$

Pela desigualdade (2.32) e lembrando que  $S_t = \sum_{i=1}^t \xi_i - t - 1$

$$\sum_{i=1}^t \xi_i - t - 1 \geq \sum_{i_t \in R_t} \hat{\xi}_{i_t} - t - 1$$

$$\sum_{i=1}^t \xi_i \geq \sum_{i_t \in R_t} \hat{\xi}_{i_t}$$

e se  $|C(1)| \geq k(n)$ , temos que  $|A_{k(n)}| \geq 0$ , logo  $\sum_{i_t \in R_{k(n)}} \hat{\xi}_{i_t} \geq k(n) - 1$ . Assim, usando a última desigualdade acima, segue que

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|C(1)| \geq k(n)) &\leq \mathbb{P}\left(\sum_{i_t \in R_{k(n)}} \hat{\xi}_{i_t} \geq k(n) - 1\right) \\ &\leq \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{k(n)} \xi_i \geq k(n) - 1\right) \end{aligned}$$

mas  $\{\xi_i\}_i$  são iids para todo  $i$  e  $\xi_i \sim \text{Bin}(n, c/n)$ , logo

$$\sum_{i=1}^{k(n)} \xi_i \sim \text{Bin}(k(n)n, c/n)$$

e média  $ck(n)$ . Isso nos possibilitará usar (2.6). Então,

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{k(n)} \xi_i \geq k(n) - 1\right) = \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{k(n)} \xi_i \geq ck(n) + (1-c)k(n) - 1\right)$$

tomando  $t = (1 - c)k(n) - 1$  em (2.6), segue

$$\begin{aligned} &\leq \exp\left(-\frac{((1-c)k-1)^2}{2(ck(n) + (1-c)k(n)/3)}\right) \\ &\leq \exp\left(-\frac{(1-c)^2}{2}k(n)\right). \end{aligned}$$

Escolhendo  $k(n) \geq 3\log(n)/(1-c)^2$ , obtemos

$$\mathbb{P}(|C(1)| \geq k(n)) \leq \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^{k(n)} \xi_i \geq k(n) - 1\right) \leq n^{-3/2}.$$

Como queremos cotar a probabilidade da maior componente,

$$\mathbb{P}\left(\max_{1 \leq i \leq n} |C(i)| \geq k(n)\right) \leq n\mathbb{P}(|C(1)| \geq k(n)) \leq nn^{-3/2} = o(1).$$

E assim provamos o teorema. □

**Teorema 1.2. (Fase supercrítica)** Para  $p = \frac{c}{n}$  com  $c > 1$  temos, a.q.c, que

1.  $L_1 = y(c)n$  em que  $y(c)$  é solução da equação

$$e^{-cy} = 1 - y.$$

2.  $L_2 = \Theta(\log(n))$ ;

A prova do teorema necessitará do seguinte

**Lema 2.11.** Fixado um vértice  $i$ , para processo de exploração de  $C(i)$  na fase supercrítica, a.q.c, uma, e somente uma, das afirmações ocorrem:

1. O processo se encerra com menos de  $k_- = \frac{16}{(c-1)^2}\log(n)$  etapas;
2. O processo sobrevive por, pelo menos,  $k_+ = n^{2/3}$  etapas.

O lema nos diz que existe uma espécie de região proibida para o processo de exploração. Este fenômeno da fase supercrítica é descrita em alguns textos como *no middleground* e caracteriza uma mudança abrupta no tamanho das componentes de  $G(n, p)$ .

**Demostração.** Inicialmente mostraremos que, *a.q.c.*, para todo  $k$ ,  $k_- \leq k \leq k_+$  e todo vértice  $i$  de  $G(n, c/n)$ , o processo de exploração de  $C(i)$  se encerra em menos de  $k_-$  etapas ou na  $k$ -ésima etapa,  $k > k_-$ , ainda existem  $(c-1)k/2$  vértices ativos para serem explorados. Em particular nenhuma componente possui tamanho  $k$ , para  $k$  entre  $k_-$  e  $k_+$ . Com efeito, se o processo sobreviveu por tempo  $k > k_-$ , então ainda existem  $(c-1)k/2$  vértices em  $A_k$ . Nas etapas seguintes, na pior das hipóteses, nenhum dos  $\frac{(c-1)}{2}k$  vértices de  $A_k$  geram filhos e assim a componente terá tamanho  $k + (c-1)k/2 = (c+1)k/2$ , então, se  $(c+1)k/2 = n^{2/3}$ , mais uma aplicação da afirmação e a componente final terá mais de  $n^{2/3}$  vértices. Se  $(c+1)k/2 < n^{2/3}$  aplicamos a afirmação novamente agora  $k_2 = (c+1)k/2$ , obtendo, novamente no pior dos casos,  $k_3 = \left(\frac{c+1}{2}\right)^2 k$  vértices. Sendo  $c > 1$ , em um número finito de passos ultrapassamos  $n^{2/3}$ .

Observamos que afim de mostrar que depois  $k$  passos  $|A_k| \geq (c-1)k/2$ , basta verificar pelo menos  $k + (c-1)k/2 = (c+1)k/2$  vértices na componente, pois ao final  $k$ -ésima etapa a componente possui pelo menos  $k + |A_{k+1}|$  vértices, sabendo que  $|C(1)| \geq (c+1)k/2$ , necessariamente devem existir no mínimo  $(c-1)k/2$  vértices para serem explorados, logo  $|A_{k+1}| \geq (c-1)k/2$ .

Suponha a existência de uma componente  $C(1)$  que sobreviveu à  $k_-$  etapas, mas na  $k$ -ésima etapa existem menos de  $(c-1)k/2$  vértices a serem explorados, i.e.,  $|A_k| < (c-1)k/2$ . Então,  $C(1)$  possui menos de  $(c+1)k_+/2$  vértices, aliás,  $C(1)$  possui menos de  $(c+1)k/2$ , mas usaremos  $k_+$  para lidar com o caso extremo da componente sobreviver à  $k_+$  etapas. Se  $|A_k| < (c-1)k/2$ , então

$$|U_k| = n - k - |A_k| \geq n - \frac{(c+1)}{2}k \geq n - \frac{(c+1)}{2}k_+$$

mas  $|U_i|$  é decrescente em  $i$ , portanto a desigualdade acima vale para  $1 \leq i \leq k$ . Com isso, e lembrando que

$$|A_t| = |A_{t-1}| - 1 + \sum_{j \in U_t} \eta_{i_t, j},$$

a soma  $\hat{\xi}_t = \sum_{j \in U_t} \eta_{i_t, j}$  pode ser cotada inferiormente por

$$\hat{\xi}_t = \sum_{j \in U_t} \eta_{i_t, j} \geq \sum_{i=1}^{n-(c+1)k_+/2} \bar{\eta}_i^t, \quad (2.33)$$

para  $1 \leq t \leq k$ , onde  $\bar{\eta}_i^t$ 's são iid e  $\bar{\eta}_i \sim \text{ber}(c/n)$ . Ou seja,

$$\hat{\xi}_t \geq \eta_t \quad (2.34)$$

onde  $\eta_t \sim \text{bin}\left(n - \frac{(c+1)}{2}k_+, c/n\right)$  para todo  $t \leq k$ .

Considere agora o seguinte processo

$$S_{t+1}^- = S_t^- - 1 + \eta_{t+1}, \text{ com } S_0^- = 1.$$

Naturalmente temos

$$S_t^- = \sum_{i=1}^t \eta_i - t - 1$$

e assim, por (2.34), segue que

$$|A_t| \geq S_t$$

para  $1 \leq t \leq k$ .

Agora estamos em condições de avaliar

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(|A_k| < \frac{(c-1)}{2}k\right) &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^k \hat{\xi}_i - k + 1 < \frac{(c-1)}{2}k\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^k \hat{\xi}_i < k - 1 + \frac{(c-1)}{2}k\right). \end{aligned}$$

Novamente, por (2.34),

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^k \hat{\xi}_i < k - 1 + \frac{(c-1)}{2}k\right) \leq \mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^k \hat{\eta}_i < k - 1 + \frac{(c-1)}{2}k\right).$$

Usando (2.7), obtemos

$$\mathbb{P}\left(\sum_{i=1}^k \hat{\eta}_i < k - 1 + \frac{(c-1)}{2}k\right) \leq \exp\left(-\frac{(c-1)^2 k^2}{9ck}\right).$$

Somando sobre todos os vértices e sobre todos os  $k$ 's entre  $k_-$  e  $k_+$  segue

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(|A_k| < \frac{(c-1)}{2}k\right) &\leq n \sum_{k=k_-}^{k_+} \exp\left(-\frac{(c-1)^2 k^2}{9ck}\right) \\ &\leq n k_+ \exp\left(-\frac{(c-1)^2 k_-}{9c}\right) = o(1) \end{aligned}$$

Portanto acabamos de provar que os casos em que o processo de exploração sobrevive a  $k_-$  etapas e na  $k_-$ -ésima etapa possui menos que  $(c-1)k/2$  vértices a serem explorados são negligenciáveis, i.e., *a.q.c* não acontecem. Isso prova o lema.  $\square$

**Demostração. (do teorema)** Considere um par de vértices distintos  $v_1$  e  $v_2$  que pertencem a componentes de tamanho pelo menos  $k_+$ . Determinaremos em seguida a probabilidade deles estarem em componentes distintas. Executaremos o processo de exploração até a  $k_+$ -ésima etapa para cada um dos dois vértices. De acordo com a prova do Lema 2.11, no final dessa etapa, o processo de  $v_1$  possui um conjunto  $V_1$  de vértices inexplorados de tamanho pelo menos  $\frac{(c-1)}{2}k_+$ . O mesmo acontece com  $v_2$ , ficando com um conjunto  $V_2$ . Se  $V_1 \cap V_2 \neq \emptyset$ , então  $v_1$  e  $v_2$  pertencem à mesma componente, caso contrário a probabilidade de nenhum desses  $(c-1)k_+/2$  vértices de  $V_1$  se conectar a algum vértice de  $V_2$  é

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(V_1 \leftrightarrow V_2) &= (1 - c/n)^{[(c-1)k_+/2]^{(c-1)k_+/2}} \\ &\leq (1 - c/n)^{[(c-1)k_+/2]^2} \\ &\leq \exp(-(c-1)^2 c n^{1/3}/4) \end{aligned}$$

Portanto, a probabilidade de  $G(n, c/n)$  ter dois vértices pertencerem a duas componentes diferentes com tamanhos pelo menos  $k_+$  tende a 0 quando  $n \rightarrow \infty$ .

Defina os seguintes subconjuntos de vértices

$$S = \{v \in V : |C(v)| \leq k_-\}$$

$$L = \{v \in V : |C(v)| \geq k_+\}.$$

Chamaremos de vértices em  $S$  de *pequenos* e os vértices em  $L$  chamaremos de *grandes*. Observamos que *a.q.c* os vértices de  $L$  pertencem a uma única componente. Queremos então, estimar a quantidade de vértices grandes ou pequenos para completar a prova. Estimaremos a quantidade de vértices pequenos.

A probabilidade de um vértice  $v$  ser pequeno é exatamente a probabilidade de  $|C(v)| \leq k_-$ . Lembre-se que a comparação com o processo  $(S_t^-)_t$  nos fornece uma cota inferior para o processo de exploração, além disso, convém notar que o processo  $(S_t^-)_t$  é a versão passeio aleatório do processo de ramificação  $(X_t^-)_t$  de distribuição  $\text{Bin}(n - k_+, c/n)$ , assim se o processo de exploração morre em  $k \leq k_-$  passos, então o processo de ramificação também morre. Isso nos permite dizer que a probabilidade  $\rho(n, c/n)$  de um vértice ser pequeno é cotada superiormente pela probabilidade  $\rho_-(n, c/n)$  de extinção de  $(X_t^-)_{t \geq 0}$ . Por outro lado, vimos que o processo de exploração pode ser cotado superiormente por um processo de ramificação  $(X_t^+)_{t \geq 0}$  de distribuição  $\text{Bin}(n, c/n)$ . Logo,  $\rho(n, c/n)$  é cotado inferiormente pela probabilidade  $\rho_+(n, c/n)$  de extinção de  $(X_t^+)_{t \geq 0}$  mais um termo  $o(1)$  que cota a probabilidade do processo  $X^+$  morrer mas depois de  $k_-$  etapas.

$$\rho_+(n, c/n) + o(1) \leq \rho(n, c/n) \leq \rho_-(n, c/n).$$

Do Exemplo 2.3, sabemos que, quando  $n \rightarrow \infty$ , tanto  $\rho_+$  quanto  $\rho_-$  convergem para  $1 - \beta(c)$ . Então a esperança de  $|S|$  é  $(1 - \beta(c) + o(1))n$ . Além disso

$$\mathbb{E}(|S|(|S| - 1)) \leq n\rho(n, c/n)(k_- + n\rho(n - O(k_-), c/n)) = (1 + o(1))(\mathbb{E}|S|)^2.$$

E portanto, por aplicação da desigualdade de Chebyshev,  $G(n, p)$  contém  $(1 - \beta(c) + o(1))n$  vértices pequenos. □



# Capítulo 3

## Percolação e componentes gigantes

Este capítulo é dedicado à prova do Teorema 1.3. Como foi dito no Capítulo 1, o ponto chave da demonstração é garantir a existência do que chamamos de componentes gigantes. Essa existência é afirmada pelo Teorema 1.4 que demonstraremos aqui, utilizando a comparação feita no capítulo anterior.

Recordemos da breve discussão feita na introdução. Fixaremos o subgrafo  $H$  de  $\mathbb{Z}^d$  definido por  $[d]^d$ , i.e., o subgrafo cujo conjunto de vértices é formado pelas  $d$ -uplas ordenadas onde cada entrada pertence ao conjunto  $[d] = \{1, 2, \dots, d\}$  e o conjunto de los é induzido de  $\mathbb{Z}^d$ . Denotaremos por  $H(p)$  o subgrafo aleatório de  $H$  com  $p = \frac{1+\varepsilon}{2d}$ . Para facilitar a escrita,  $n = d^d$ , será a quantidade de vértices em  $H$  ou  $H(p)$ .

Para provar que  $p_c(\mathbb{Z}_d) < \frac{1+\varepsilon}{2d}$  basta provar que um subgrafo de  $\mathbb{Z}^d$  possui uma componente infinita. Esse subgrafo será  $G = \mathbb{Z}^2 \times [d]^{d-2}$ . Mas antes de provar esse resultado, façamos uma pausa para discutir rapidamente um lema que trata de uma propriedade geométrica da caixa  $H$ .

**Definição.** *Seja  $G = (V, E)$  um grafo finito. Chamamos de **constante de Cheeger** o número*

$$c(G) = \min_{\substack{A \subset V \\ |A| \leq \frac{|V|}{2}}} \frac{|E(A, A^c)|}{|A|}$$

onde

$$E(A, A^c) = \{\{u, v\} : v \in A, u \in A^c\}.$$

**Lema 3.1.** *Considere o grafo  $H$  definido anteriormente e  $c(H)$  sua constante de Cheeger, então vale*

$$c(H) \geq \frac{1}{2d}.$$

Isto é, para todo subconjunto  $A$  de vértices com no máximo metade dos vértices de  $H$  existem pelo menos  $\frac{|A|}{2d}$  los ligando  $A$  ao seu complemento.

**Demostração.** Sejam  $a = (a_1, \dots, a_d) \in A$  e  $b = (b_1, \dots, b_d) \notin A$ , com  $A \subset V$ ,  $|A| \leq \frac{|V|}{2}$ . Ligaremos  $a$  a  $b$  por meio de caminhos os quais chamaremos de *canônicos*. Esses caminhos são obtidos alterando cada coordenada de  $a$ , uma por uma e de uma em uma unidade da esquerda para a direita. Seguindo a definição dada na introdução, são caminhos  $\gamma_{a,b}$  do tipo  $a, e_1, a^1, e_2, a^2, \dots, e_{m-1}, b$  em que  $\|a^i - a^{i+1}\| = 1$  e  $a_j^i = b_j$  a partir de um certo  $j$  e  $a_k^i = a_k$  para  $1 \leq k \leq j-1$ .

Obviamente tal caminho deve conter pelo menos um elo de  $E(A, A^c)$ , do contrário  $a \notin A$  ou  $b \in A$ . A afirmação que esse elo está presente em, no máximo,  $d^{d+1}$  caminhos canônicos é um pouco menos direta. Com efeito, denote o elo por  $e = \{a', b'\}$  com  $a' = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i, a_{i+1}, \dots, a_d)$  e  $b' = (x_1, \dots, x_{i-1}, x_i + 1, a_{i+1}, \dots, a_d)$ . Veja que, por construção, se  $e$  pertence a um caminho canônico, então as entradas  $x$ 's foram alteradas no máximo  $d$  vezes, enquanto as entradas  $a$ 's permaneceram fixas, portanto isso nos fornece  $d^i$  opções de pontos de partida para o caminho canônico. Por outro lado, novamente por construção, as  $i-1$  entradas  $x$  estão fixas pois já pertencem ao ponto final, enquanto de  $x_i + 1$  à  $a_d$  ainda é possível fazer alterações ( $d$  no máximo). Isso nos fornece  $d^{d-(i-1)}$  opções de pontos finais para o caminho canônico, logo  $e$  estará presente em  $d^{d+1}$  caminhos, no máximo.

Fixado  $a \in A$ , existem  $d^d - |A|$  caminhos canônicos ligando  $a$  a  $A^c$  (um caminho para cada  $b \in A^c$ ). Como observado anteriormente, cada caminho contém pelo menos um elo em  $E(A, A^c)$ , o qual será contado, no máximo,  $d^{d+1}$  vezes. Percorrendo  $A$ , concluímos que

$$|E(A, A^c)| \geq \frac{|A|(d^d - |A|)}{d^{d+1}}.$$

Usando que  $|A| \leq |V|/2 = d^d/2$ , segue

$$\begin{aligned} c(G) &= \min_{A \subset V} \frac{|E(A, A^c)|}{|A|} \geq \min_{A \subset V} \frac{\frac{|A|(d^d - |A|)}{d^{d+1}}}{|A|} \\ &= \min_{A \subset V} \frac{d^d - |A|}{d^{d+1}} \\ &\geq \frac{\frac{d^d}{2}}{d^{d+1}} = \frac{1}{2d}. \end{aligned}$$

□

Nas próximas seções iremos provar que com alta probabilidade o subgrafo aleatório  $H(p)$  possui uma componente gigante, i.e., uma componente de ordem  $n = d^d$ .

**Teorema 1.4.** *Para todo  $\varepsilon > 0$ ,  $\exists c(\varepsilon) > 0$  constante dependendo apenas de  $\varepsilon$  tal que, a.q.c., a variável aleatória  $L_1$  que determina o tamanho da maior componente do grafo aleatório  $H\left(\frac{1+\varepsilon}{2d}\right)$  satisfaz*

$$\frac{L_1}{n} \geq c(\varepsilon)n$$

em que  $n = d^d$ .

A prova será dividida em três fases.

### 3.1 Fase 1: Átomos

Lembrando que denotamos  $|H| = d^d = n$  e  $p_1 = \frac{1+\varepsilon}{2d}$ , e suponhamos  $\delta < \varepsilon/2$ . Chamaremos um vértice  $v$  de  $H$  de *bom*, se esse possui no máximo  $\frac{\delta d}{10}$  coordenadas de valores 1 ou  $d$ . Note que tal vértice possui, pelo menos,  $(2 - \frac{2\delta}{10})d$  vizinhos dentro de  $H$ , pois possui pelo menos  $d - \frac{\delta}{10}d$  coordenadas fora das faces de  $H$ , i.e., coordenadas diferentes de 1 e  $d$ . Logo para cada entrada temos duas opções de vizinhos. Além disso, chamaremos qualquer componente conexa do grafo  $H(p_1)$  cuja ordem seja igual ou superior à  $d^{100}$  de *átomo*. Nosso objetivo será mostrar que, *a.q.c.*, os átomos são densos em  $H(p_1)$ .

**Lema 3.2.** *Todos os vértices de  $H$ , com exceção de  $n/2^{c_2 d}$ , são bons. Com  $c_2 = c_2(\delta)$  uma constante positiva.*

**Demonstração.** Considere as seguintes funções indicadoras

$$\mathbb{1}_{\{x_i=1 \text{ ou } d\}}$$

em que  $x_i$  representa o valor da  $i$ -ésima coordenada e  $i \in \{1, 2, \dots, d\}$ . Agora considere a variável aleatória

$$S = \sum_{i=1}^d \mathbb{1}_{\{x_i=1 \text{ ou } d\}}$$

a qual conta o número de entradas que possuem valores indesejáveis (1 ou  $d$ ). Como  $\mathbb{P}(\mathbb{1}_{\{x_i=1 \text{ ou } d\}} = 1) = \frac{2}{d}$  segue que

$$\mathbb{E}S = 2$$

e portanto, por Chebyshev,

$$\mathbb{P}\left(S \geq \frac{\delta d}{10}\right) \leq e^{2(e-1)} e^{-\frac{\delta d}{10}}$$

$$\mathbb{P}\left(S \geq \frac{\delta d}{10}\right) \leq 2^{c'_3} 2^{-c'_2 d}$$

onde  $c'_2 = \frac{\delta \log_2 e}{10}$  e  $c'_3 = \log_2 e^{2(e-1)}$ , então

$$\mathbb{P}\left(S \geq \frac{\delta d}{10}\right) \leq 2^{-(c'_2 - c'_3)d}$$

Colocando  $c_2 = c'_2 - c'_3$ , obtemos o desejado, pois

$$\mathbb{P}\left(S \geq \frac{\delta d}{10}\right) = \frac{\# \text{ de vértices ruins}}{n} \leq 2^{-c_2 d}$$

□

Denotaremos por  $B$  o conjunto dos vértices bons. Agora partiremos para a proposição mais importante da Fase 1. Como já foi mencionado, mostraremos que átomos aparecem com alta probabilidade e mais, com exceção de  $n/2^{c_1 d}$  vértices, todos são vizinhos de átomos. Note que a quantidade de vértices que não são vizinhos de átomos é  $o(n)$ . Mais uma vez utilizaremos a comparação com o processo de ramificação.

### A exploração da componente e tempo de sobrevivência

Como queremos garantir a existência de componentes de tamanho fixado,  $d^{100}$ , precisamos garantir que o processo de ramificação não morra antes de gerar  $d^{100}$  filhos.

Descreveremos um processo de exploração que se assemelhe ao processo de ramificação como foi feito no capítulo anterior. Para isso, considere as variáveis aleatórias iid  $\eta_{v,w}$  onde  $v, w \in H$  tais que  $\eta_{v,w} \sim \text{ber}(p_1)$  se  $\|w - v\| = 1$  e  $\eta_{v,w} \equiv 0$  se  $\|v - w\| \neq 1$ . Seja  $v = (v_1, \dots, v_d)$  um vértice bom. Então  $v$  possui  $(1 - \delta/10)d$  coordenadas diferentes de 1 e  $d$ . Sem perda de generalidade, suponhamos que essas sejam as primeiras entradas. Para cada  $i \leq \frac{\delta d}{5}$  fixe o vizinho  $v^i = (v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + 1, v_{i+1}, \dots, v_d)$  de  $v$ . Iniciaremos um processo de exploração para cada  $i$ . Uma vez  $v^i$  fixado, exploramos sua componente do seguinte modo:

Fixe o conjunto

$$V^i = \{w \in H \mid w = (v_1, \dots, v_{i-1}, v_i + 1, u_{i+1}, \dots, u_{(1-\delta/10)d}, v_{(1-\delta/10)d+1}, \dots, v_d)\}$$

onde  $u_j \in \{v_j, v_j - 1, v_j + 1\}$ .

Começamos de  $v^i$  definindo o conjunto dos infectados como antes.  $I_0 = \{v^i\}$ ,  $R_0 = \emptyset$  e  $D_0 = V^i$ . E o processo evolui

$$I_{t+1} = \{w \in V^i \mid \eta_{v,w} = 1 \text{ para algum } v \in I_t\}$$

$$R_{t+1} = R_t \cup I_t$$

$$D_{t+1} = D_t - I_{t+1}$$

Observamos a semelhança com o processo definido no capítulo anterior. Pela construção, veja que  $v^i$  possui  $2(d - i - \delta d/10) \geq 2(1 - 3\delta/10)d$  vizinhos em  $V^i$ , como  $\eta_{v^i,w} \equiv 0$  para  $w$  com  $\|w - v^i\| \neq 1$ , segue que  $v^i$  gera filhos de acordo com uma  $\text{bin}(2(d - i - \delta d/10), p_1)$ . Portanto este processo de exploração é cotado superiormente por um processo de ramificação  $(X_t)_{t \geq 0}$  onde  $X_1 \sim \text{Bin}(2(d - i - \delta d/10), p_1)$ .

Então

$$\mathbb{E}X_1 \geq 2(1 - 3\delta/10)d p_1 = (1 - 3\delta/10)(1 + \varepsilon),$$

$$\mathbb{E}X_1 \geq 1 + \frac{7}{10}\varepsilon.$$

Portanto se  $\delta$  for escolhido apropriadamente, teremos  $(X_t)_t$  um processo de ramificação supercrítico.

Como sabemos explorar as componentes e que esse processo é semelhante a um processo de ramificação supercrítico mostraremos o resultado mais importante da Fase 1.

**Proposição 3.3.** *No fim da fase 1 com probabilidade  $1 - o(1)$  todo vértice de  $H(p_1)$ , exceto no máximo  $\frac{n}{2^{c_1 d}}$  vértices, possui pelo menos um vizinho pertencente a um átomo de  $H(p_1)$ , onde  $c_1 = c_1(\delta) > 0$ .*

**Demonstração.** De acordo com o comentário da Proposição 2.10, com alta probabilidade, os dois processos diferem por no máximo um indivíduo se  $t_0 = c(\delta) \log(2(1 - \frac{3\delta}{10})d)$ . Então

$$\mathbb{P}(|C(v^i)| \geq d^{100}) = \mathbb{P}\left(\sum_{j=0}^{t_0} X_j \geq d^{100}\right) - o(1)$$

onde o erro  $o(1)$  representa uma correção necessária para lidar com o caso onde o processo de ramificação difere por mais de um indivíduo do processo de exploração. Denotando  $\mathbb{E}X_1 = c_1$ , segue que  $\mathbb{E}\sum_{j=0}^t X_j = \frac{c_1 - c_1^{t+1}}{1 - c_1} = C_1$ , sendo  $c_1 > 1$ , para  $d$  suficientemente grande,  $C_1 \gg d^{100}$ , logo  $\mathbb{P}(\sum_{j=0}^t X_j < d^{100})$  decai exponencialmente em  $d$  (desigualdade (2.7)). Assim, provamos que, para  $d$  grande, com probabilidade  $1 - o(1)$ , depois de  $t_0$  passos já temos a quantidade de vértices desejada. Portanto, basta garantir que o processo de ramificação sobreviva até  $t_0$  passos. Mas, usando o Teorema 2.7,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(|C(v^i)| \geq d^{100}) &= \mathbb{P}((X_t) \text{ sobrevive por } t_0 \text{ etapas}) \\ &\geq \mathbb{P}((X_t) \text{ sobrevive}) \\ &\geq q_0 \end{aligned}$$

onde  $q_0$  é a constante fornecida pelo Teorema 2.7. Logo, a probabilidade de uma componente ser um átomo é cotada inferiormente por uma constante.

Por fim, para um vértice fixo  $v = (v_1, \dots, v_d)$  e  $i = 1, \dots, \delta d/5$ , considere os eventos

$$A_i = \{|C(v^i)| \geq d^{100}\}.$$

Agora defina a seguinte variável aleatória

$$N_v = \sum_{i=1}^{\lfloor \frac{\delta d}{5} \rfloor} \mathbb{1}_{A_i}.$$

$N_v$  conta o número de  $i$ -vizinhos de  $v$  que estão em átomos. Ressaltamos que, devido à construção de cada átomo, os eventos  $A_i$  são independentes. Portanto,

$$\mathbb{P}(N_{v^*} = 0) \leq (1 - q_0)^{\frac{\delta d}{5}} \rightarrow 0 \text{ quando } d \rightarrow \infty. \quad (3.1)$$

E assim mostramos que se  $v \in B$ , então  $v$  satisfaz, com probabilidade  $1 - o(1)$ , a

- **Propriedade 1.**  $v$  possui pelo menos um vizinho pertencente a um átomo.

Provamos que se  $v$  é bom, então, com alta probabilidade,  $v$  possui algum vizinho em átomo. Para provar a segunda parte do teorema, aquela que quantifica os vértices satisfazendo a propriedade 1, começamos definindo para cada vértice  $v$ , o evento

$$A_v = \{v \text{ não possui a propriedade 1}\}$$

e a variável aleatória

$$N = \sum_v \mathbb{1}_{A_v}.$$

Ou seja,  $N$  conta a quantidade de vértices que não satisfazem a propriedade 1. Como mostramos anteriormente que existem no máximo  $\frac{n}{2^{c_2 d}}$  vértices ruins  $N$  satisfaz

$$N \leq \sum_{v \notin B} 1 + \sum_{v \in B} \mathbb{1}_{A_v}$$

isto é,

$$N \leq \frac{n}{2^{c_2 d}} + \sum_{v \in B} \mathbb{1}_{A_v}$$

e usando (3.1)

$$\mathbb{E}N \leq \frac{n}{2^{c_2 d}} + \left(n - \frac{n}{2^{c_2 d}}\right)(1 - q_0)^{\delta d/5}.$$

E pela desigualdade de Markov, para  $c_1 = c_1(\delta)$  que escolheremos mais tarde,

$$\begin{aligned} \mathbb{P}\left(N > \frac{n}{2^{c_1 d}}\right) &\leq \frac{2^{c_1 d} \mathbb{E}N}{n} \\ &\leq \frac{2^{c_1 d}}{2^{c_2 d}} (1 + 2^{c_2 d} (1 - q_0)^{\delta d/5}) \\ &\leq \frac{2^{c_1 d}}{2^{c_2 d}} + 2^{c_1 d} 2^{\log_2(1 - q_0)^{\delta d/5}} \end{aligned}$$

escolhendo  $c_1 < \min\left\{c_2, -\frac{\delta}{5} \log(1 - q_0)\right\}$  temos o desejado. □

Concluindo, acabamos de mostrar que no fim da primeira fase a maioria dos vértices de  $H(p_1)$  satisfaz à propriedade 1 com alta probabilidade. Esse resultado será fundamental para a próxima fase, a qual terá como objetivo utilizar dessa densidade dos átomos para unir o que ainda não havia sido unido na Fase 1. Usar a densidade para unir átomos e conseguir uma componente gigante.

## 3.2 Fase 2: A união de átomos

Considere o conjunto dos vértices presentes em átomos. Afirmamos que esse conjunto cobre uma fração constante de  $H$ , ou seja, existe  $c_3 = c_3(\delta)$  tal que esse conjunto tem cardinalidade  $c_3 n$ . É claro que, ao fim da primeira fase, esses átomos podem já estar conectados e portanto teríamos obtido uma componente gigante. A Fase 2 tem por objetivo tapar buracos, i.e., conectar aqueles átomos que ainda não se uniram e formar, finalmente, uma componente de ordem  $c n$ .

O processo consiste em adicionar elos com probabilidade  $p_2 = \frac{1}{d^2}$ . É importante ressaltar que a probabilidade de um elo  $e$  pertencer ao grafo aleatório no fim da Fase 2 é de

$$p_1 + p_2 - p_1 p_2 = \frac{1 + \varepsilon}{2d} + \frac{1}{d^2} - \frac{1 + \varepsilon}{2d^3} = \frac{1}{2d} \left( 1 + \varepsilon + \frac{2}{d} - \frac{2(1 + \varepsilon)}{d^2} \right)$$

e para  $d$  grande, temos

$$p_1 + p_2 - p_1 p_2 \leq \frac{1 + \varepsilon'}{2d}.$$

Logo, se para o parâmetro  $p = p_1 + p_2 - p_1 p_2$ , temos  $\theta(p) > 0$ , então  $\theta((1 + \varepsilon')/2d) > 0$ .

O resultado principal dessa fase é garantir a existência da componente gigante no grafo final (união de  $H(p_1)$  com os novos elos). Resultado esse, enunciado na seguinte

**Proposição 3.4.** *Seja  $\mathcal{A}$  o conjunto de vértices em átomos. Ao fim Fase 2, com probabilidade  $1 - o(1)$ ,  $\mathcal{A}$  não pode ser separado em dois subconjuntos desconexos  $A$  e  $B$  com  $|A|, |B| \geq \frac{n}{d^5}$ .*

Observamos que a proposição acima garante que não pode haver duas componentes conexas com mais de  $n/d^5$  vértices cada uma. Portanto, se existir uma componente tamanho  $c(\delta)n$ , então ela é, com alta probabilidade, única.

**Demonstração.** Dado um subconjunto  $X$  de vértices de  $H$ , denote por  $N(X)$  o conjunto de todos os vértices vizinhos a algum vértice de  $X$ .

A prova será dividida em três casos. O primeiro cobre o caso em que existe uma quantidade grande de vértices que estão em  $A$  ou  $B$  e são vizinhos de  $B$  ou  $A$ . O segundo cobre a situação em que  $N(A)$  e  $N(B)$  compartilham uma quantidade suficiente de vértices, de tal modo que existam caminhos de tamanho 2 ligando  $A$  a  $B$  em grande quantidade. Assim a probabilidade de algum deles serem abertos ao fim da segunda fase é alta. Enquanto o terceiro caso trata exatamente da situação contrária e aqui será necessário recorrer à geometria de  $H$ , em particular, ao Lema 3.1.

*Caso 1.*  $|A \cap N(B)| \geq \frac{n}{d^{10}}$  ou  $|B \cap N(A)| \geq \frac{n}{d^{10}}$ . Digamos  $|A \cap N(B)| \geq \frac{n}{d^{10}}$ . Então existem pelo menos  $n/d^{10}$  elos ligando um vértice de  $A$  a um vértice de  $B$ . E portanto, a probabilidade de que nenhum deles estejam abertos ao final da Fase 2 é

$$\left( 1 - \frac{1}{d^2} \right)^{n/d^{10}} \leq e^{-n/d^{12}} \rightarrow 0.$$

*Caso 2.*  $|N(A) \cap N(B)| \geq \frac{n}{d^{10}}$ . Por hipótese, existem pelo menos  $n/d^{10}$  caminhos de tamanho 2 ligando  $A$  e  $B$ . Além disso, a probabilidade de nenhum desses caminhos serem escolhidos na fase 2 é, no máximo

$$\left( 1 - \frac{1}{d^4} \right)^{n/d^{10}}.$$

Com  $A$  e  $B$  fixados.

Como discutido inicialmente, a quantidade de vértices em átomos é de  $c_3n$ . Logo a quantidade de átomos é, no máximo,  $c_3n/d^{100}$ . Assim temos, no máximo,  $2^{n/d^{100}}$  escolhas para  $A$  e  $B$ , afinal temos  $c_3n/d^{100}$  átomos e precisamos formar um subconjunto  $A$  com, no mínimo,  $n/d^5$  elementos, porém cotamos esse número por todas as possíveis escolhas para  $A$ . Portanto, a probabilidade de  $A$  e  $B$  não se conectarem ao fim da segunda fase é inferior a

$$\left(1 - \frac{1}{d^4}\right)^{n/d^{10}} 2^{n/d^{100}} = \left[2^{d^{-10}} \left(1 - \frac{1}{d^4}\right)\right]^{n/d^{10}} \longrightarrow 0.$$

*Caso 3.*  $|N(A) \cap N(B)| < \frac{n}{d^{10}}$ ,  $|A \cap N(B)| < \frac{n}{d^{10}}$  e  $|B \cap N(A)| < \frac{n}{d^{10}}$ .

Observamos que nas condições deste caso vale o Lema 3.1 para  $A \cup N(A)$  com uma pequena correção, valendo a desigualdade isoperimétrica na forma  $|\partial(A \cup N(A))| \geq \frac{|A \cup N(A)|}{2d}(1 - o(1))$ . Isso nos permite considerar que  $|A \cup N(A)| \leq n/2$  e então pelo Lema 3.1 segue que existem pelo menos  $c_4n/d^6$  (com  $c_4 = 1/2$ ) elos ligando  $A \cup N(A)$  ao seu complemento, pois  $|A| \geq n/d^5$ . Portanto, dividindo por  $2d$  (quantidade de vizinhos) obtemos  $c_5n/d^7$  vértices distando duas unidades de  $A$ . Note que  $c_5n/d^7 - n/2^{c_1d}$  desses vértices possuem algum vizinho em átomos, ou seja,  $c_6n/d^7$  possuem um vizinho em  $B$ . Veja que essa construção nos fornece  $\Omega(n/d^8)$  caminhos disjuntos de tamanho 3 ligando  $A$  a  $B$ . Repetindo os cálculos do caso anterior

$$\left(1 - \frac{1}{d^4}\right)^{n/d^{10}} 2^{n/d^{100}} = \left[2^{d^{-100/8}} \left(1 - \frac{1}{d^8}\right)\right]^{n/d^8} \longrightarrow 0.$$

E assim provamos a proposição. □

Como consequência da Proposição 3.4 segue a existência de uma componente, que chamaremos de **gigante**, contendo todos os vértices presentes em átomos no fim da primeira fase, com exceção de, no máximo,  $\frac{n}{d^5}$ . Do contrário, a maior componente formada por vértices que estavam em átomos na Fase 1 possui tamanho menor que  $c_3n - n/d^5$ . Chame essa componente de  $A$  e o conjunto formado pelos outros vértices em átomos de  $B$ . Pela afirmação inicial devemos ter

$$|A| + |B| = c_3n$$

$$|B| > c_3n - c_3n + n/d^5 = n/d^5$$

contradizendo a proposição. E mais, com alta probabilidade, todo vértice de  $H$  possui pelo menos um vizinho na componente gigante.

### 3.3 Fase 3: Renormalização

Até o momento temos os seguintes resultados:

1. Com alta probabilidade  $(1 - o(1))$  os átomos da Fase 1 se unem ao final da Fase 2 e surge a componente que denominamos, gigante. Essa componente é de ordem  $c(\delta)n$ ;

2. Com exceção de, no máximo  $O(n/d^4)$ , todos os vértices de  $H$  possuem um vizinho na componente notável;

Nesta fase final partiremos o grafo  $G = \mathbb{Z}^2 \times [d]^{d-2}$  em caixas idênticas a  $H$  e depois faremos um processo de renormalização para identificar  $G$  renormalizado a  $\mathbb{Z}^2$  e então utilizar resultados conhecidos sobre percolação em  $\mathbb{Z}^2$ . A ideia é identificar cada caixa  $H$  com um sítio de  $\mathbb{Z}^2$ . A formalização desse procedimento segue abaixo.

Dado um vértice  $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$  considere a caixa  $H_{i,j}(d)$  formada pelos vértices  $v = (x_1, x_2, \dots, x_d)$  em que

$$x_1 = (d-1)i + 1, \dots, (d-1)i + d$$

$$x_2 = (d-1)j + 1, \dots, (d-1)j + d$$

$$x_k = 1, 2, \dots, d$$

para  $3 \leq k \leq d$ . Observamos que  $H_{i,j}(d) \sim H_{i',j'}(d) \Leftrightarrow (i, j) \sim (i', j')$ . Portanto a associação  $(i, j) \mapsto H_{i,j}(d)$ , para  $d$  fixo, é um isomorfismo de grafos.

Considerando a identificação definida acima, diremos que uma caixa, ou sítio, está **presente** se cada uma de suas quatro faces tiver pelo menos  $3/4$  de seus vértices na vizinhança da componente gigante. Combinando os resultados 1 e 2 esse fato acontece com probabilidade  $1 - o(1)$ . Além disso, cada sítio estará presente independente um da outra. Notado isso, iniciamos o processo de união das componentes. Adicionamos novos elos, novamente, com probabilidade  $p_3 = 1/d^2$  esperamos que as componentes gigantes de caixas vizinhas se unam. Esse fato é garantido pelo lema abaixo. Mas antes precisamos da noção de paridade de um vértice.

Dado um vértice  $v = (v_1, \dots, v_d)$ , dizemos que  $v$  é *par* (respec. *ímpar*) se  $v_1 + \dots + v_d$  é par (respec. ímpar). Pela relação de adjacência em  $\mathbb{Z}^d$ , vértices adjacentes têm paridades diferentes.

**Lema 3.5.** *Ao fim da Fase 3, com probabilidade  $1 - o(1)$ , as componentes gigantes de caixas vizinhas se conectam.*

**Demostração.** Fixe duas caixas vizinhas. Com alta probabilidade ambas estão presentes. Logo, temos pelo menos  $d^{d-1}/2$  vértices que são vizinhos de uma componente gigante em cada um das caixas. Dessa quantidade, pelo menos metade é par ou ímpar e como foi observado anteriormente, um vértice só é vizinho de vértices com paridade diferente. Então, considerando somente os vértices pares, ou somente os vértices ímpares, temos que existem pelo menos  $d^{d-1}/4$  elos ligando os vértices comuns às duas caixas às suas componentes gigantes vizinhas.

Por outro lado, fixado um vértice  $v$ , considere o evento

$$E_v = \{v \leftrightarrow \text{às comp. gigantes vizinhas}\}$$

então

$$\mathbb{P}(E_v) \leq 1 - \frac{1}{d^4}$$

e portanto,

$$\mathbb{P}\left(\bigcap_v E_v\right) \leq \left(1 - \frac{1}{d^4}\right)^{d^{d-1}/4} \rightarrow 0$$

o que prova o lema. □

Chame uma caixa de **ativa** se ela está presente e se conecta a todos os seus vizinhos presentes. Logo, pelo lema anterior, a probabilidade de uma caixa estar ativa é perto de 1 para  $d$  suficientemente grande. Além disso, sítios com distância ( $l_\infty$ ) maior que 1 são ativos de maneira independente. Pela renormalização de  $G$  o processo de conexão das caixas corresponde a um processo de percolação de sítios 2-dependente em  $\mathbb{Z}^2$  que percola devido ao Teorema 0.0 encontrado em [16]. Mais uma vez, voltando a renormalização, uma componente infinita em  $\mathbb{Z}^2$  corresponde a uma sequência infinita de caixas que se conectam por meio de suas componentes gigantes, como temos a unicidade das componentes gigantes em cada caixa, então temos uma componente infinita em  $G$  e conseqüentemente uma componente infinita em  $\mathbb{Z}^d$ .

# Capítulo 4

## De percolação para componentes

### 4.1 Um caminho inverso

Os resultados mostrados até agora dão conta do tamanho das maiores componentes presentes nos grafos aleatórios obtidos a partir do grafo completo  $K_n$  ou um subgrafo de  $\mathbb{Z}^d$ . Além disso, mostramos o fato de que em caixas de  $\mathbb{Z}^d$  essas componentes, chamadas até aqui de gigantes, aparecem com alta probabilidade se  $p$  e  $d$  forem escolhidos adequadamente e usamos tal afirmação para obter um teorema que diz respeito ao ponto crítico de percolação. Isto é, conseguimos dizer algo sobre a percolação em um grafo infinito por meio do conhecimento do surgimento das componentes gigantes em um grafo grande, porém finito. Nesta seção dedicaremos um espaço para tomar o caminho inverso. Usaremos resultados de percolação em  $\mathbb{Z}^d$  para tirar conclusões sobre o tamanho das componentes conexas em caixas finitas de  $\mathbb{Z}^d$ .

Começaremos da fase subcrítica e  $d \geq 2$ . Mostraremos que nessas circunstâncias a maior componente do grafo aleatório,  $G(n)$ , induzido por  $B(n) = \{(i_1, i_2, \dots, i_d) \mid 1 \leq i_1, i_2, \dots, i_d \leq n\}$  tem ordem  $\log(n)$ . Recordamos que  $L_k(n)$  denota o tamanho da  $k$ -ésima maior componente de  $G(n)$  e precisamos o que foi dito no

Seja

$$\pi_p(n) = \mathbb{P}_p(|C(0)| = n), \quad \Pi_p(n) = \mathbb{P}_p(n \leq |C(0)| < \infty). \quad (4.1)$$

Note que  $\Pi_p(n) = \mathbb{P}_p(|C(0)| \geq n)$  se  $p \leq p_c(d)$  e mais, tanto  $\pi_p(n)$  quanto  $\Pi_p(n)$  não dependem da escolha do vértice, pois o grafo é invariante por translação.

Em [3] Kunz e Souillard provaram que existe  $A(p)$  satisfazendo  $0 \leq A(p) < \infty$  tal que

$$-\frac{1}{n} \log(\pi_p(n)) \longrightarrow A(p). \quad (4.2)$$

Entretanto, de acordo com o Teorema 6.78 de [14] temos  $A(p) > 0$  se  $p < p_c(d)$ .

Para o caso  $d = 2$  e  $p > 1/2$  o comportamento assintótico das sequências de números reais  $\{\pi_p(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  e  $\{\Pi_p(n)\}_{n \in \mathbb{N}}$  é determinado pelo resultado de Aizenman, Deylon e Souillard [4], que garante a existência de números, dependentes apenas de  $p$ ,  $\Delta(p)$  e  $\Gamma(p)$ , tais que, para  $n$  suficientemente grande

$$\Delta(p) \leq -\frac{1}{\sqrt{n}} \log(\Pi_p(n)) \leq -\frac{1}{\sqrt{n}} \log(\pi_p(n)) \leq \Gamma(p). \quad (4.3)$$

## 4.2 Fase subcrítica

Nesta seção utilizaremos a fase subcrítica do processo de percolação em  $\mathbb{Z}^d$  para provar que as componentes de subgrafos aleatórios finitos de  $\mathbb{Z}^d$  não podem ser gigantes. O objetivo é a prova do

**Teorema 1.5.** *Para percolação de elos em  $\mathbb{Z}^d$ , se  $p < p_c(d)$  então existe uma constante positiva  $\alpha(p)$ , dependendo somente de  $p$ , tal que*

$$\frac{1}{\log(n)}L_1(n) \longrightarrow \alpha(p) \text{ em probabilidade.}$$

**Demostração.** Queremos mostrar a convergência em probabilidade, i.e., que, para todo  $\varepsilon$  e  $n$  suficientemente grande

$$\mathbb{P}_p\left(\left|\frac{L_1(n)}{\log(n)} - \alpha(p)\right| > \varepsilon\right) \longrightarrow 0.$$

Nesse caso é equivalente mostrar que

$$\mathbb{P}_p(L_1(n) > (\alpha(p) + \varepsilon)\log(n)) \longrightarrow 0$$

e

$$\mathbb{P}_p(L_1(n) < (\alpha(p) - \varepsilon)\log(n)) \longrightarrow 0$$

Observamos a suficiência da prova para  $\varepsilon$  pequeno pois  $\left\{\frac{L_1(n)}{\log(n)} > \alpha(p) + \varepsilon_1\right\} \subset \left\{\frac{L_1(n)}{\log(n)} > \alpha(p) + \varepsilon_2\right\}$  se  $\varepsilon_1 > \varepsilon_2$ .

Como  $p < p_c$ . Usando (4.2) segue que existe  $0 < A(p) < \infty$ . Então defina

$$\alpha(p) = \frac{d}{A(p)}, \tag{4.4}$$

e escolha  $\varepsilon$  satisfazendo  $0 < \varepsilon < \frac{1}{2}$ .

Começamos observando o seguinte, por hipótese vale a observação inicial a respeito de  $\Pi_p(n) = \mathbb{P}_p(|C(0)| \geq n)$  e

$$\{|C(0)| \geq n\} = \bigcup_{m \geq n} \{|C(0)| = m\} \cup \{|C(0)| = \infty\}$$

sendo a fase subcrítica,  $\mathbb{P}_p(|C(0)| = \infty) = 0$  e obtemos

$$\Pi_p(n) = \sum_{m \geq n} \pi_p(m). \tag{4.5}$$

Veja que por um simples argumento de contenção de eventos, vale

$$\mathbb{P}_p(L_1(n) > (1 + 2\varepsilon)\alpha(p)\log(n)) \leq n^d \Pi_p((1 + 2\varepsilon)\alpha(p)\log(n)), \quad (4.6)$$

afinal, se a maior componente de  $G(n)$  é maior que  $(1 + 2\varepsilon)\alpha(p)\log(n)$ , então algum vértice de  $G(n)$  possui componente maior que  $(1 + 2\varepsilon)\alpha(p)\log(n)$ , logo, pela independência da escolha do vértice para  $\Pi_p(n)$  e somando sobre todos os  $(n - 1)^d$  vértices temos a desigualdade, mas optamos, para tornar as contas mais simples, piorar a desigualdade e multiplicar por  $n^d$ .

Por (4.2) segue, para  $m$  grande, que vale

$$\pi_p(m) < e^{-(A(p)-\varepsilon)m}$$

em particular,  $\exists n_0 \in \mathbb{N}$  tal que,  $\forall m \geq n_0$  vale

$$\pi_p(m) < e^{-(1-\varepsilon)A(p)m}$$

Combinando com (4.4), (4.5), (4.6) e escolhendo  $n$  de modo que  $(1 + 2\varepsilon)\alpha(p)\log(n) > n_0$  temos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(L_1(n) > (1 + 2\varepsilon)\alpha(p)\log(n)) &\leq n^d \sum_{m \geq (1+2\varepsilon)\alpha(p)\log(n)} e^{-(1-\varepsilon)A(p)m} \\ &\leq C n^{d-(1-\varepsilon)(1+2\varepsilon)A(p)\alpha(p)} \\ &= n^{d[1-(1-\varepsilon)(1+2\varepsilon)]} = n^{-d\varepsilon(1+2\varepsilon)} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

sendo  $C = C(p)$ .

Falta somente mostrar que  $L_1(n)$  não pode ser muito pequeno. Para isso fatiaremos  $B(n)$  em caixas quadradas com  $\lceil 2\alpha(p)\log(n) \rceil$  de lado. Perceba que existem

$$\left( \frac{n-1}{\lceil 2\alpha(p)\log(n) \rceil} \right)^d = N$$

caixas desse tipo, as quais denotaremos por  $B_1, \dots, B_N$ . Para cada  $i$ , considere  $v_i$  como o vértice de  $B_i$  mais próximo de seu centro, e seja  $I_i$  a indicadora do evento  $\{|C(v_i)| \geq (1 - \varepsilon)\alpha(p)\log(n)\}$ . Note que, para  $n$  grande, o evento  $\{|C(v_i)| \geq (1 - \varepsilon)\alpha(p)\log(n)\}$  depende apenas da presença dos elos dentro de  $B_i$ . Com efeito, se  $\lceil 2\alpha(p)\log(n) \rceil \mid n - 1$  então toda caixa  $B_i$  possui um vértice como centro que dista  $\frac{\lceil 2\alpha(p)\log(n) \rceil}{2} > (1 - \varepsilon)\alpha(p)\log(n)$  da borda de  $B_i$ . O caso em que  $\lceil 2\alpha(p)\log(n) \rceil \nmid n - 1$  é facilmente contornado aumentando o tamanho da última caixa que fica inteiramente dentro de  $B(n)$ , assim teremos algumas caixas com lado maior que  $\lceil 2\alpha(p)\log(n) \rceil$ . Desse modo as variáveis aleatórias  $I_i$  são independentes. Logo a soma

$$S_N = I_1 + \dots + I_N$$

possui distribuição binomial de parâmetros  $N$  e  $\Pi_p((1 - \varepsilon)\alpha(p)\log(n))$ , mais uma vez usamos o fato da medida ser a medida produto o que justifica a presença de  $\Pi_p$ .

Para justificar a inclusão dos eventos  $\{L_1(n) < (1 - \varepsilon)\alpha(p)\log(n)\} \subset \{S_N = 0\}$ . Basta notar que se a maior componente de  $G(n)$  possui tamanho menor que  $(1 - \varepsilon)\alpha(p)\log(n)$ , então, necessariamente,  $|C(v_i)| < (1 - \varepsilon)\alpha(p)\log(n)$  para  $i = 1, 2, \dots, N$  e portanto  $S_N = 0$ . Com isso, temos

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(L_1(n) < (1 - \varepsilon)\alpha(p)\log(n)) &\leq \mathbb{P}(S_N = 0) \\ &= (1 - \Pi_p((1 - \varepsilon)\alpha(p)\log(n)))^N. \end{aligned}$$

Usando (4.2) obtemos que

$$\pi_p(n) > e^{-(1+\varepsilon)A(p)n}$$

combinando com (4.5) segue que

$$\Pi_p((1 - \varepsilon)\alpha(p)\log(n)) > \sum_{m \geq (1 - \varepsilon)\alpha(p)\log(n)} e^{-(1+\varepsilon)A(p)m}$$

logo

$$\begin{aligned} \mathbb{P}_p(L_1(n) < (1 - \varepsilon)\alpha(p)\log(n)) &\leq (1 - n^{-(1-\varepsilon^2)A(p)\alpha(p)})^N \\ &\leq \exp\left\{-\left(\frac{n^{\varepsilon^2}}{2\alpha(p)\log(n)}\right)^d\right\} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

□

### 4.3 Fase supercrítica

Agora partimos para a fase supercrítica, mas antes da prova, daremos algumas pequenas definições e enunciaremos alguns resultados necessários.

Utilizando a notação discutida no início deste capítulo, denotaremos por  $B(m, n) = \{(i, j) \mid 1 \leq i \leq m, 1 \leq j \leq n\}$  a caixa, agora retangular,  $m \times n$ . Quando  $m = n$ , usaremos apenas  $B(n)$ . E escreveremos  $\{B(m, n) \text{ horizontalmente}\}$  para indicar o evento em que existe um caminho aberto ligando os lados esquerdo e direito de  $B(m, n)$ . Naturalmente, escrevemos  $\{B(m, n) \text{ verticalmente}\}$  para indicar o evento onde os lados superior e inferior da caixa estão conectados por um caminho aberto.

O seguinte resultado, para  $\mathbb{Z}^2$ , será útil na demonstração do Teorema 1.6

**Lema 4.1.** *Para percolação de elos em  $\mathbb{Z}^2$ , se  $p > \frac{1}{2}$ , então  $\exists \nu(p) > 0$  satisfazendo*

$$\mathbb{P}_p(B(\nu(p)\log(n), n) \text{ verticalmente}) \rightarrow 1$$

quando  $n \rightarrow \infty$ .

**Teorema 1.6.** *([13]) Se  $p > \frac{1}{2}$  então existem constantes positivas  $\beta(p), \gamma(p)$  e  $\delta(p)$ , dependendo somente de  $p$ , tal que*

$$\frac{1}{n^2}L_1(n) \longrightarrow \beta(p) \text{ em probabilidade}$$

E mais,

$$\mathbb{P}(\gamma(p) \leq (\log(n))^{-2} L_2(n) \leq \delta(p)) \longrightarrow 1.$$

**Demostração.** Começamos tomando  $\nu(p)$  dado pelo Lema 4.1 e denotando por  $Q(n)$  o quadrado contido em  $B(n)$ ,  $\{(i, j); \nu(p)\log(n) < i, j < n - \nu(p)\log(n)\}$  e por  $A(n)$  o anel  $B(n) \setminus Q(n)$ . Observamos que  $A(n)$  pode ser escrito como união de quatro retângulos de dimensões  $n$  e  $\nu(p)\log(n)$  que denotaremos por  $R_k(n)$ ,  $k = 1, 2, 3, 4$ .

Para cada  $R_k(n)$ , defina o evento

$$R_k = \{\text{existe um caminho aberto ligando os dois menores lados de } R_k(n)\}$$

e seja  $\mathcal{A} = \{A_1, A_2, \dots\}$  o conjunto formado por todos os circuitos  $A_i$  que contem  $Q(n)$  em seu interior e estão contidos no anel  $A(n)$ . Note que se existe um caminho aberto ligando os menores lados de cada retângulo  $R_k$ , então existe um circuito envolvendo  $Q(n)$ , i.e.,  $R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4 \subset \bigcup_i A_i$ .

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(\mathcal{A} = \emptyset) &= 1 - \mathbb{P}\left(\bigcup_i A_i\right) \\ &\leq 1 - \mathbb{P}(R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4) \end{aligned}$$

mas pela desigualdade de FKG, pois os eventos  $R_k$  são claramente crescentes,

$$\mathbb{P}(\mathcal{A} = \emptyset) \leq 1 - \mathbb{P}(R_1)\mathbb{P}(R_2)\mathbb{P}(R_3)\mathbb{P}(R_4).$$

Como a dimensão de  $R_k$  é  $n \times \nu(p)\log(n)$ , pelo Teorema 4.1 obtemos

$$\mathbb{P}(\mathcal{A} = \emptyset) \rightarrow 0 \text{ quando } n \rightarrow \infty.$$

Podemos então considerar que  $\mathcal{A}$  é não vazio. Nesse caso, chame de  $K$  o conjunto formado pelos vértices de  $B(n)$  que não pertencem a nenhum circuito de  $\mathcal{A}$  mas que estão conectados a algum circuito por algum caminho aberto em  $G(n)$ , ou, que está em algum circuito e está na componente infinita de  $G(n)$ . Notamos que  $K$  é a componente conexa de  $B(n)$  que está conectada à componente infinita de  $G(n)$ .

Para cada  $(i, j) \in \mathbb{Z}^2$ , defina

$$I_{i,j} = \begin{cases} 1, & \text{se } (i, j) \text{ está na componente infinita de } G(n) \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Pelo Teorema Ergódico, se  $K(n) = \sum_{(i,j) \in C(n)} I_{i,j}$ , então

$$\frac{K(n)}{|Q(n)|} \longrightarrow \mathbb{E}(I_{0,0}) = \beta(p) \text{ em probabilidade.}$$

E ainda, é claro que

$$\frac{|Q(n)|}{n^2} \longrightarrow 1.$$

Mostramos então que, para  $\varepsilon > 0$ ,  $\{L_1(n) > (1 - \varepsilon)n^2\beta(p)\} \supset \{\mathcal{A} \neq \emptyset\} \cap \{K(n) > (1 - \varepsilon)n^2\beta(p)\}$ . Observando que os eventos  $\{\mathcal{A} \neq \emptyset\}$  e  $\{K(n) > (1 - \varepsilon)n^2\beta(p)\}$  são crescentes e por FKG

$\mathbb{P}(L_1(n) > (1 - \varepsilon)n^2\beta(p)) \geq \mathbb{P}(\mathcal{A} \neq \emptyset)\mathbb{P}(K(n) > (1 - \varepsilon)n^2\beta(p)) \rightarrow 1$  em probabilidade.

Resta mostrar a cota superior para  $L_1(n)$ , ou seja, que  $\mathbb{P}(L_1(n) < (1 + \varepsilon)n^2\beta(p)) \rightarrow 1$  em  $n$ . Para isso, mostraremos que  $\mathbb{P}(L_1(n) > (1 + \varepsilon)n^2\beta(p)) \rightarrow 0$ .

Considere os vértices de  $L_1(n)$  que estão na componente infinita de  $G(n)$  e denote por  $\{L_1(n) \leftrightarrow \infty\}$ . Com isso

$$\begin{aligned} \{L_1(n) > (1 + \varepsilon)n^2\beta(p)\} &= \{\{L_1(n) > (1 + \varepsilon)n^2\beta(p)\} \cap \{L_1(n) \leftrightarrow \infty\}^c\} \\ &\quad \cup \{\{L_1(n) > (1 + \varepsilon)n^2\beta(p)\} \cap \{L_1(n) \leftrightarrow \infty\} \cap \{L_1(n) \cap Q(n) \neq \emptyset\}\} \\ &\quad \cup \{\{L_1(n) > (1 + \varepsilon)n^2\beta(p)\} \cap \{L_1(n) \leftrightarrow \infty\} \cap \{L_1(n) \cap Q(n) = \emptyset\}\} \end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\frac{|A(n)|}{\beta(p)n^2} = \frac{4\nu(p)n \log(n) - 4\nu(p)\log^2(n)}{\beta(p)n^2} \rightarrow 0$$

e com isso, se  $\{L_1(n) \cap C(n) = \emptyset\}$ , então  $L_1(n) \subset A(n)$  e pela razão acima, temos que

$$\mathbb{P}(\{L_1(n) > (1 + \varepsilon)n^2\beta(p)\} \cap \{L_1(n) \leftrightarrow \infty\} \cap \{L_1(n) \cap Q(n) = \emptyset\}) \rightarrow 0.$$

De modo semelhante, lembramos que

$$\frac{K(n)}{n^2} \rightarrow \beta(p)$$

então, uma componente maior que  $(1 + \varepsilon)n^2\beta(p)$  não pode estar contida em  $Q(n)$ , logo

$$\mathbb{P}(\{L_1(n) > (1 + \varepsilon)n^2\beta(p)\} \cap \{L_1(n) \leftrightarrow \infty\} \cap \{L_1(n) \cap Q(n) \neq \emptyset\}) \rightarrow 0.$$

Portanto

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(L_1(n) > (1 + \varepsilon)n^2\beta(p)) &\leq \mathbb{P}\left(\bigcup_{x \in B(n)} (1 + \varepsilon)n^2\beta(p) < |Q(x)| < \infty\right) \\ &\leq n^2\Pi_p((1 + \varepsilon)n^2\beta(p)) \\ &\leq \exp\{-\Delta(p)((1 + \varepsilon)\beta(p)n^2)^{1/2}\} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

a última desigualdade segue de (4.3). E isso prova que  $\frac{1}{n^2}L_1(n) \rightarrow \beta(p)$  em probabilidade.

Para a segunda parte do teorema, começamos observando que a prova de

$$\mathbb{P}(L_2(n) < (1 - \varepsilon)\gamma(p)\log^2(n)) \rightarrow 0$$

é feita no Teorema 1.5. Logo, nos resta mostrar a existência de  $\delta(p) > 0$  tal que  $\mathbb{P}(L_2(n) \leq \delta(p)\log^2(n)) \rightarrow 1$ .

Chamaremos de fronteira de  $B(n)$  o conjunto  $\partial B(n)$  formado pelos vértices  $(i, j)$  em que  $i$  ou  $j$  é igual a 1 ou  $n$ .

Se  $L_2(n) > \delta(p)\log^2(n)$  e  $\mathcal{A} \neq \emptyset$ , então  $L_2(n)$  não está ligado à componente infinita de  $G(n)$ , pois pela unicidade da componente infinita e  $\mathcal{A} \neq \emptyset$ ,  $L_1(n)$  também estaria conectado a ela. Nesse caso,  $G(n)$  possui uma componente  $L'$  de tamanho pelo menos  $\delta(p)\log^2(n)$ .

Se  $L' \cap \partial B \neq \emptyset$ , lembrando que  $L'$  não pode se conectar a nenhum anel em  $\mathcal{A}$  (do contrário se uniria a  $L_1(n)$ ). Temos que  $L' \subset A(n)$  e sabemos que existem um circuito  $C'$  ao redor de  $L'$  no dual e uma constante  $c > 0$  tal que

$$\frac{|C'|}{|L'|^{\frac{1}{2}}} \geq c.$$

Como  $L'$  é finito, existe um circuito  $C'$  no dual de  $A(n) \cup \partial Q(n)$  satisfazendo

$$|C'| \geq c|L'|^{\frac{1}{2}} \geq c(\delta(p)\log^2(n))^{\frac{1}{2}} = c\delta(p)^{\frac{1}{2}}\log(n)$$

e portanto, considerando o evento

$$D_n = \left\{ \text{existe um circuito no dual de } A(n) \cup \partial Q(n) \text{ de tamanho pelo menos } c\delta(p)^{\frac{1}{2}}\log(n) \right\}$$

temos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(L_2(n) > \delta(p)\log^2(n), L' \cap \partial B(n) \neq \emptyset) &\leq \mathbb{P}(D_n) \\ &\leq |A(n) \cup \partial C(n)| \mathbb{P}_{(1-p)}\left(c\delta(p)^{\frac{1}{2}}\log(n) \leq C(0) < \infty\right) \\ &\leq 4\nu(p)\log(n)\Pi_{(1-p)}\left(c\delta(p)^{\frac{1}{2}}\log(n)\right) \\ &\leq 4\nu(p)\log(n)\exp\left\{- (1 - \varepsilon)A(1 - p)c\delta(p)^{\frac{1}{2}}\log(n)\right\} \\ &= 4\nu(p)\log(n)n^{1 - (1 - \varepsilon)A(1 - p)c\delta(p)^{\frac{1}{2}}} \rightarrow 0 \end{aligned}$$

se  $\delta(p) > (c(1 - \varepsilon)A(1 - p))^{-2}$ .

Por outro lado, se  $L' \cap \partial B = \emptyset$ , então  $L'$  está contido em  $B(n)$  e algum vértice de  $B(n)$  está em uma componente finita de  $G(n)$  com tamanho pelo menos  $\delta(p)\log^2(n)$ , denotando

$$E_n = \{ \exists v \in \partial B(n) \text{ tal que } C(v) \subset G(n) \text{ com } \delta(p)\log^2(n) \leq |C(v)| < \infty \text{ e } v \leftrightarrow \partial B(n) \}$$

temos as seguintes desigualdades

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(L_2(n) > \delta(p)\log^2(n), L' \cap \partial B(n) = \emptyset) &= \mathbb{P}(E(n)) \\
&\leq n^2 \mathbb{P}(\delta(p)\log^2(n) \leq C(0) < \infty) \\
&= n^2 \Pi_p(\delta(p)\log^2(n)) \\
&\leq n^2 \exp\left\{-\Delta(p)\delta(p)^{\frac{1}{2}}\log(n)\right\} \\
&= n^{2-\Delta(p)\delta(p)^{\frac{1}{2}}} \rightarrow 0
\end{aligned}$$

se  $\delta(p) > 4/\Delta(p)^2$ .

Portanto o teorema fica provado tomando

$$\delta(p) = \max\{4/\Delta(p)^2, (c(1-\varepsilon)A(1-p))^{-2}\}.$$

□

# Bibliografia

- [1] D.Gordon. Percolation in high dimensions . , , 1996.
- [2] H.Kesten. Asymptotics in high dimension for percolation. *Disorder in Physical Systems* , :219–240, 1990.
- [3] H.Kunz e B.Souillard. Essential singularity in percolation problems and asymptotic behaviour of cluster size distribution. *Journal of Statistical Physics*, :77–106, 1978.
- [4] M.Aizenman, F.Deylon e B.Souillard. Lower bounds on the cluster size distribution. *Journal of Statistical Physics*, :267–80, 1980.
- [5] M.Ajtai, J.Komlos e E.Szemerédi. The longest path in a random graph. *Combinatorica* , 1:1–12, 1981.
- [6] M.Ajtai, J.Komlos e E.Szemerédi. Largest random component of a k-cube. *Combinatorica* , 2:1–7, 1982.
- [7] M.Krivelevich e B.Sudakov. The phase transition in random graphs - a simple proof. , , 2012.
- [8] N.Alon, I.Benjamini e A.Stacey. Percolation on finite graphs and isoperimetric inequalities . *The Annals of Probability*, 32:1727–1745, 2004.
- [9] N.Alon e J.H.Spencer. *The probabilistic method*. Wiley, New York., 2000.
- [10] P.Erdos e A.Renyi. On random graphs. *Publ. Math. Debrecen*, 6:290–297, 1959.
- [11] P.Erdos e A.Renyi. On the evolution of random graphs. *Publ. Math. Inst. Hungar. Acad. Sci*, 5:17–61, 1960.
- [12] R.Durrett. *Random Graphs Dynamics*. Cambridge Series in Statistical and Probabilistic Mathematics, 2006.
- [13] R.G.Grimmett. The largest components in a random lattice . *Studia Scientiarum Mathematicarum Hungrica*, 20:325–331, 1985.
- [14] R.G.Grimmett. *Percolation*. Springer, 1999.
- [15] S.Janson, T.Luczak e A.Rucinski. *Random Graphs*. Wiley, New York., 2000.
- [16] T.Liggett, R.Schonmann e A.Stacey. Domination by product measures. *The Annals of Probability*, 25:71–95, 1981.