

Pontos Periódicos Quase Elípticos em Sistemas Dinâmicos Conservativos

André Ribeiro de Resende Alves

Orientador: Mário Jorge Dias Carneiro

Co-Orientador: Carlos Maria Carballo

Universidade Federal de Minas Gerais
UFMG

Pontos Periódicos Quase Elípticos em Sistemas Dinâmicos
Conservativos

André Ribeiro de Resende Alves

Orientador: Mário Jorge Dias Carneiro

Co-Orientador: Carlos Maria Carballo

Dissertação apresentada ao corpo docente
de Pós-Graduação em Matemática do Ins-
tituto de Ciências Exatas da Universidade
Federal de Minas Gerais, como requisito
parcial para a obtenção do título de Mes-
tre em Matemática

Belo Horizonte
2012

Agradecimentos

A meu pai por estar sempre a meu lado. Ao meu irmão Marcelo, por nossas longas e produtivas conversas sobre matemática. Ao meu professor de Técnica de Alexander, Ilan Grabe, pois sem ele eu não seria um matemático. Aos professores de matemática que contribuíram com minha formação. A todos os membros da banca, por suas sugestões e correções, que me ajudaram a compreender melhor minha dissertação. Agradeço em especial ao professor Mário Jorge Dias Carneiro, por sua paciência para me explicar os pontos mais delicados desse trabalho. Ao professor Carlos Carballo, meu orientador, pelo apoio. A todos os meus amigos e familiares, meu sincero obrigado.

Resumo

Nesse trabalho vamos analisar algumas propriedades genéricas de sistemas dinâmicos conservativos ou simpléticos. Vamos provar em detalhes dois resultados que consideramos relevantes: o teorema de Pixton, que afirma existe um subconjunto residual do conjunto dos difeos em \mathbb{R}^2 para o qual todo ponto periódico hiperbólico possui interseção hmoclínica transversal; e o teorema de Newhouse que prova a existência de um subconjunto $\mathcal{B} \subset Diff_{\omega}^r(M)$ tal que se $f \in \mathcal{B}$ então todo ponto quase elíptico de f é também limite de pontos homoclínicos transversais de f .

Abstract

Our objective is analyze some generic properties of conservative and symplectic dynamical systems. We will focus our attention in two results we consider particularly relevant: Pixton's theorem, which proves the existence of a residual set of diffeomorphisms in \mathbb{R}^2 for which every hyperbolic periodic point has transverse homoclinic intersection; and a theorem by Newhouse, that proves the existence of a subset $\mathcal{B} \subset \text{Diff}_\omega^r(M)$ such that if $f \in \mathcal{B}$ then every quasi-elliptic periodic point of f is the limit of transverse homoclinic points of f .

Sumário

Introdução	6
1 Resultados Preliminares	7
1.1 Noções de Topologia Diferencial	7
1.2 Noções de Geometria Simplética	9
1.3 Teorema da Variedade Central	11
1.4 Forma Normal de Birkhoff	14
1.5 Lema de Perturbação	15
2 Teorema de Pixton	18
2.1 Densidade das Funções com Interseção Homoclínica Transversal	19
2.2 Teorema de Pixton	32
3 Pontos Homoclínicos na Vizinhança de Pontos Quase Elípticos	34
3.1 Funções Semicontínuas	35
3.2 Teorema de Zehnder	37
3.3 Teorema de Newhouse	40

Introdução

Nesse trabalho, vamos estudar algumas propriedades genéricas de sistemas dinâmicos. Dado \mathbb{T} um espaço topológico de Baire, um conjunto $\mathbb{B} \subset \mathbb{T}$ é residual caso contenha uma interseção enumerável de abertos densos. Uma propriedade genérica é uma propriedade válida para todos os elementos de um conjunto residual. Mais informalmente, uma propriedade genérica é válida para a "maior parte" dos elementos de um determinado conjunto. Desse modo, fica claro que conhecer uma propriedade genérica de um certo tipo de sistemas dinâmicos significa obter informação sobre a "maior parte" desses sistemas.

Um exemplo importante de uma propriedade genérica em sistemas dinâmicos é o teorema de Kupka-Smale. De acordo com esse teorema, se M é uma variedade compacta, existe um subconjunto residual \mathbb{B} de $Diff^r(M)$ tal que se $f \in \mathbb{B}$ então todos os pontos periódicos de f são hiperbólicos e possuem interseção homoclínica transversal entre variedades invariantes. Por esse teorema, conseguimos bastante informação sobre o comportamento dinâmico da maioria dos difeomorfismos de classe C^r . Uma pergunta interessante é se podemos conseguir algum resultado análogo para sistemas conservativos. Seguindo esse caminho um resultado importante, para o qual daremos uma prova nessa dissertação, é o teorema de Pixton, que afirma que para um subconjunto residual de difeomorfismos em \mathbb{R}^2 , todo ponto periódico hiperbólico possui inteseção homoclínica transversal. Outro esforço nessa direção foi feito por Robinson em [8], onde ele demonstra análogos do teorema de Kupka-Smale para sistemas conservativos e simpléticos. No caso de simplectomorfismos, não mais podemos garantir que todos os pontos periódicos serão hiperbólicos, mesmo

como propriedade genérica. Temos de considerar a possibilidade de eles serem quase elípticos.

Assim, no caso de difeomorfismos conservativos(ou simpléticos) é importante saber o que ocorre na vizinhança de um ponto quase elíptico. Em [10], Zehnder prova que em dimensão dois, existe um subconjunto residual dos difeomorfismos analíticos em M para o qual em qualquer vizinhança de todo ponto periódico quase elíptico existe um ponto periódico hiperbólico com um interseção homoclínica transversal. Esse resultado será enunciado e usado na prova de um resultado no capítulo 3. Um dos resultados de Newhouse em [4] é uma generalização do resultado de Zehnder para variedades de dimensão $2n$ e difeomorfismos de classe C^r . Esse é um dos dois resultados principais abordados nessa dissertação. O outro é o teorema de Pixton, do qual já falamos.

No capítulo 1, apresentaremos alguns conceitos básicos essenciais para a compreensão dos resultados que virão a seguir. No capítulo 2 será provado o Teorema de Pixton, que é um resultado importante no contexto de propriedades genéricas de sistemas dinâmicos, como também será usado na prova do teorema de Newhouse. No capítulo 3, provaremos o resultado devido a Newhouse sobre o qual falamos anteriormente.

Capítulo 1

Resultados Preliminares

Ao longo dessa seção será feita uma breve exposição de conceitos e resultados preliminares cujo entendimento é primordial para a compreensão dos resultados posteriores. Alguns dos teoremas aqui apresentados serão usados como ferramentas para provar os resultados dos capítulos seguintes; enquanto outros conceitos que tratamos aqui são necessários para que se possa compreender os resultados expostos na dissertação. Muitos dos teoremas aqui apresentados serão simplesmente enunciados, mas não demonstrados. Nesse caso forneceremos as referências onde tais resultados estão devidamente provados. Como se tratam de resultados considerados preliminares, não nos deteremos mais que o necessário sobre eles, simplesmente nos concentrando nos resultados que usaremos em algum momento futuro.

1.1 Noções de Topologia Diferencial

Ao longo desse trabalho estaremos lidando com espaços de funções. Mais especificamente, estaremos lidando com o espaço das funções de classe C^r , cujo domínio e imagem é uma certa variedade M . É, portanto, fundamental uma caracterização desse espaço de funções, assim como esclarecer o que significam exatamente conceitos como diferenciabilidade de aplicações entre duas variedades. Finalmente daremos uma definição precisa dos conjuntos $Diff^r(M)$, apenas levando em conta que M é

uma variedade compacta.

Um espaço topológico M é uma variedade de dimensão n quando existe uma cobertura aberta $\mathcal{U} = \{U_i\}_{i \in \Lambda}$ de M tal que para cada $i \in \Lambda$ existe uma aplicação $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^n$ tal que ϕ_i é um homeomorfismo. Chamamos os pares (ϕ_i, U_i) de cartas enquanto os conjuntos da forma $\Phi = \{(\phi_i, U_i)\}_{i \in \Lambda}$ são chamados de atlas.

Um atlas de M é de classe C^r se $\phi_i \circ \phi_j^{-1} : \phi_j(U_i \cap U_j) \rightarrow \phi_i(U_i \cap U_j)$ é uma aplicação de classe C^r para todo $i, j \in \Lambda$. Um atlas Φ é um atlas maximal se todo atlas compatível com Φ estiver contido em Φ . Dizemos que dois atlas Φ_1 e Φ_2 são C^r compatíveis se $\Phi_1 \cup \Phi_2$ for um atlas de classe C^r . Um atlas maximal de classe C^r é uma estrutura diferenciável.

Agora vamos caracterizar aplicações diferenciáveis entre duas variedades diferenciáveis. Seja $f : M \rightarrow N$. Considere duas cartas (ϕ, U) de M e (ψ, V) de N adaptados a f tais que $f(U) \subset V$. Nesse caso a aplicação

$$\psi f \phi^{-1} : \phi(U) \rightarrow \psi(V)$$

está bem definida e é chamada de representação local de f em cartas no ponto x , se $x \in U$. A aplicação f é chamada diferenciável em x se f possui uma representação local que seja diferenciável em x . De maneira similar, dizemos que f é de classe C^r em x se x possui uma representação local que seja de classe C^r . Dizemos que uma aplicação é de classe C^r se todo ponto de M possui uma representação local de classe C^r .

Em seguida vamos definir o fibrado tangente de M de uma aplicação diferenciável. Seja (M, Φ) uma variedade de classe C^{r+1} . Definimos um vetor tangente a M como uma classe de equivalência $[x, i, a]$ de triplas $(x, i, a) \in M \times \Lambda \times \mathbb{R}^n$, sendo que dois vetores $[x, i, a]$ e $[y, j, b]$ são considerados equivalentes se e somente se $x = y$ e

$$D(\phi_j \phi_i^{-1})(\phi_i(x))a = b$$

O conjunto de todos os vetores tangentes a M é TM , o fibrado tangente de M . Sejam, M e N variedades de dimensão m e n respectivamente e $\phi_i : U_i \rightarrow \mathbb{R}^m$ e

$\psi_j : V_j \rightarrow \mathbb{R}^n$ cartas para M e N de modo que $f(U_i) \subset V_j$. Uma aplicação da regra da cadeia mostra que a aplicação:

$$(Tf)_{ij} : TU_i \rightarrow TV_j$$

$$[x, i, a] \mapsto [f(x), j, D(\psi_j \phi_i^{-1})(\phi_i(x))a]$$

não depende de i e j o que significa que a aplicação $Tf : TM \rightarrow TN$ está bem definida pela representação em cartas acima.

Finalmente vamos definir a topologia C^r em $C^r(M, M)$ (conjunto de aplicações cujo domínio e a imagem são a mesma variedade M). Ressaltamos que durante todo esse trabalho as variedades com as quais iremos trabalhar são todas compactas. Não existe portanto qualquer diferença entre as topologias forte e fraca para tais variedades. Seja $f : M \rightarrow M$ uma aplicação de classe C^r . Seja $C^r(M, M)$ o conjunto de aplicações de classe C^r de M em M . A topologia C^r em M é a topologia gerada pelos conjuntos:

$$B_\epsilon^r(f) = \{g \in C^r(M, M); \|D^k(\phi f \phi_1)(x) - D^k(\phi g \phi_1)(x)\| < \epsilon \text{ para todo } x \in M \text{ e para todo } 0 \leq k \leq r\}$$

Nossa referência para essa seção foi o livro [2], escrito por Morris Hirsch.

1.2 Noções de Geometria Simplética

O espaço no qual trabalharemos, $Diff_\omega^r$ é o espaço dos difeomorfismos de classe C^r que preservam uma forma simplética. É portanto imperativo esclarecer o que é uma forma simplética, assim como algumas de suas propriedades. Assim como as outras seções desse capítulo, daremos aqui apenas uma visão geral dos resultados de Geometria Simplética que usaremos posteriormente. Para uma explicação mais detalhada, ver [1] Uma forma simplética é uma aplicação bilinear anti simétrica não degenerada. Uma aplicação bilinear $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é dita anti simétrica quando $\omega(u, v) = -\omega(v, u)$ para quaisquer u e v pertencentes a V . Já $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ é dita não degenerada quando não existe nenhum elemento $u_0 \in V$, $u_0 \neq 0$ tal que

$\omega(u_0, v) = 0$ para todo v pertencente a V . Nesse contexto, um resultado importante que diz respeito a formas bilineares anti simétricas é o seguinte:

1.2.1 Teorema (Forma Padrão para Aplicações Bilineares Anti Simétricas). *Seja V um espaço vetorial m -dimensional em \mathbb{R} e seja $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ uma aplicação bilinear anti simétrica. Existe uma base*

$$\{u_1, \dots, u_k, e_1, \dots, e_n, h_1, \dots, h_n\} \text{ de } V \text{ tal que:}$$

$$\omega(u_i, v) = 0 \text{ para todo } i \in \{1, \dots, k\} \text{ e para todo } v \in V$$

$$\omega(e_i, e_j) = 0 = \omega(h_i, h_j) \text{ para todo } i, j \text{ e}$$

$$\omega(e_i, h_j) = \delta_{ij} \text{ para todo } i, j$$

Uma consequência direta desse teorema é que para que $\omega : V \times V \rightarrow \mathbb{R}$ seja uma forma simplética é necessário V seja um espaço vetorial de dimensão par.

Agora vamos estender e adaptar as definições anteriores, válidas para espaços vetoriais, para o contexto de variedades diferenciáveis. Via de regra não podemos tratar variedades diferenciáveis como espaços vetoriais. Por isso vamos primeiramente definir uma aplicação $\omega_p : T_p M \times T_p M \rightarrow \mathbb{R}$, onde $T_p M$ é o espaço tangente de M em p . Considerando a variedade M imersa em algum \mathbb{R}^k , temos que $v \in T_p M$ se e somente se existe uma curva $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow M$ com $\alpha(t_0) = p$ e $\alpha'(t_0) = v$. Claramente $T_p M$ é um espaço vetorial. Agora estamos preparados para definir uma forma diferencial em uma variedade M .

1.2.2 Definição. *Dizemos que ω é uma forma simplética em M caso ω_p sejam aplicações bilineares, anti simétricas e não degeneradas para todo $p \in M$, ω_p varie de maneira suave em M e ω seja uma forma fechada $d\omega = 0$.*

1.2.3 Definição. *Um variedade simplética é um par (M, ω) onde ω é uma forma simplética e M é uma variedade diferenciável.*

1.2.4 Definição (Difeomorfismo Simplético). *Um difeomorfismo simplético (ou symplectomorfismo) φ entre duas variedades simpléticas (M, ω) e (M', ω') é um difeomorfismo $\varphi : M \rightarrow M'$ tal que $\varphi^* \omega' = \omega$. (Por definição, $\varphi^* \omega'(u, v) = \omega'(D_p \varphi(u), D_p \varphi(v))$.) Se existe um symplectomorfismo dizemos que (M, ω) e (M', ω') são symplectomorfos.*

Se (M, ω) é uma variedade simplética, e a dimensão de M é $2n$, temos que a forma

$$\Omega = \wedge_{i=1}^n \omega$$

é uma forma de volume em M . Assim, uma aplicação que preserva uma forma simplética automaticamente preserva uma forma de volume em M , o que quer dizer que os difeomorfismos que preservam uma forma simplética são um subconjunto dos sistemas conservativos.

Finalmente, apresentamos o teorema de Darboux, que usaremos posteriormente.

1.2.5 Teorema (Darboux). *Seja (M, ω) uma variedade simplética de dimensão $2n$ e p qualquer ponto de M . Então existe uma carta coordenada $(\mathcal{U}, x_1, \dots, x_n, y_1, \dots, y_n)$ centrado em p tal que em \mathcal{U} temos:*

$$\omega = \sum_{i=1}^n dx_i \wedge dy_i$$

Podemos compreender o Teorema de Darboux como um análogo do Teorema 1.2.1 para formas simpléticas em variedades diferenciáveis. Enquanto no contexto de espaços vetoriais basta escolher os elementos da base para expressar uma forma de maneira relativamente simples, quando estamos lidando com variedades diferenciáveis, devemos produzir uma parametrização de M para fazer o mesmo com uma formas simpléticas. Como veremos no capítulo final, encontrar uma parametrização que nos permita definir uma forma simplética de maneira simples é uma ferramenta bastante útil para atacar nosso problema.

1.3 Teorema da Variedade Central

Agora vamos apresentar algumas definições básicas de sistemas dinâmicos, úteis para aqueles que não estão familiarizados com área

1.3.1 Definição. *Um sistema dinâmico discreto consiste em um conjunto não vazio X e uma aplicação $f : X \rightarrow X$. Para $n \in \mathbb{N}$, f^n é composta de $f \circ f \circ \dots \circ f$ n vezes. Se f é invertível, então definimos f^{-n} como $f^{-1} \circ f^{-1} \circ \dots \circ f^{-1}$ n vezes. Finalmente,*

definimos f^0 como a identidade. Dizemos que p é um ponto periódico de f se existe $T \in \mathbb{N}$ com $f^T(p) = p$.

1.3.2 Definição. Definimos a órbita positiva de um ponto como

$$O_f^+(x) = \bigcup_{t \geq 0} f^t(x) \text{ onde } t \in \mathbb{Z}$$

Da mesma forma, definimos a órbita negativa de um ponto:

$$O_f^-(x) = \bigcup_{t \leq 0} f^t(x) \text{ onde } t \in \mathbb{Z}$$

1.3.3 Definição. Seja p um ponto periódico de período T para uma aplicação f diferenciável. Dizemos que p é um ponto periódico hiperbólico de f se todos os autovalores de $Df^T(p)$ possuem norma diferente de um. Se todos os autovalores de $Df^T(p)$ tiverem norma um e forem não reais, dizemos que p é um ponto periódico elíptico de f . Por último, se $Df^T(p)$ possuir pelo menos um autovalor de norma um e todos os autovalores de norma um de $Df^T(p)$ forem não reais, dizemos que p é um ponto periódico quase elíptico de f .

1.3.4 Definição. Tome $m(A)$ a norma mínima de uma aplicação linear $A : E \rightarrow E$, dada por $m(A) = \inf_{|v|=1} |A.v|$.

A derivada de um difeomorfismo f em um ponto periódico quase elíptico possui, por definição, autovalores de norma um. Por isso não podemos utilizar o Teorema da Variedade Estável para descrever a dinâmica em uma vizinhança desses pontos. Mas o objetivo dessa dissertação é descrever a dinâmica em uma vizinhança de um ponto quase elíptico, pelo menos para um subconjunto residual de $Diff_\omega^r$. Nessa seção enunciaremos dois teoremas. O primeiro mostra a existência de variedades estável e instável, mesmo quando o ponto periódico em questão não é hiperbólico. O segundo mostra a existência de uma variedade central, assim como de uma variedade centro estável e outra centro instável. Nossa principal referência sobre esse assunto será [9]. Faremos algumas mudanças ocasionais na notação e até mesmo no enunciado

dos teoremas com o objetivo de simplificar e deixar mais curtos seus enunciados. Em alguns casos, situações mais gerais tratadas em [9] que estejam fora do escopo do nosso trabalho não serão consideradas.

1.3.5 Teorema (Teorema da variedade Estável). *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^k para $1 \leq k \leq \infty$ e $f(p) = p$. Portanto podemos particionar \mathbb{R}^n nos seguintes auto espaços de Df_p , $\mathbb{R}^n = E^u \oplus E^c \oplus E^s$, que correspondem aos auto espaços generalizados de Df_p cuja norma dos autovalores são, respectivamente, maior que um, igual a um e menor que um. Existe uma vizinhança de p , $V \subset U$ tal que $W^s(p, V, f)$ e $W^u(p, V, f)$ são variedades de classe C^k tangentes a E^s e E^u , respectivamente, e são caracterizados pela taxa exponencial de convergência das órbitas de a p da seguinte maneira: Sejam $0 < \zeta < 1 < \lambda$ e as normas em E^s e E^u são escolhidas de tal forma que $\|Df_p|_{E^s}\| < \zeta$ e $m(Df_p|_{E^u}) > \lambda$. Então temos:*

$$W^s(p, V, f) = \{q \in V : d(f^j(q), p) \leq \zeta^j d(q, p) \text{ para todo } j \geq 0\}$$

e

$$W^u(p, V, f) = \{q \in V : d(f^j(q), p) \leq \lambda^{-j} d(q, p) \text{ para todo } j \geq 0\}.$$

1.3.6 Teorema (Teorema da Variedade Central). *Seja $f : U \subset \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^k para $1 \leq k \leq \infty$ e $f(0) = 0$ e $A = Df_0$. Seja k' um inteiro escolhido da seguinte forma : $k' = k$ se $k < \infty$ e $1 \leq k' < \infty$ se $k = \infty$. Assumimos também que $0 < \zeta < 1 < \lambda$ e as normas em E^s e E^u são escolhidas de tal forma que $\|Df_p|_{E^s}\| < \zeta$ e $m(Df_p|_{E^u}) > \lambda$. Seja $\epsilon > 0$ pequeno o bastante para que $\|Df_p|_{E^s}\| < \zeta - \epsilon$ e $m(Df_p|_{E^u}) > \lambda + \epsilon$. Nessas condições existe uma variedade invariante central estável de classe $C^{k'}$, $W^{cs}(0, f)$ que é um gráfico em $E^c \oplus E^s$ e é tangente a $E^c \oplus E^s$ em 0 e é caracterizada da seguinte maneira:*

$$W^{cs}(0, f) = \{q : d(f^j(q), 0)\lambda^{-j} \rightarrow 0 \text{ quando } j \rightarrow \infty\}.$$

O que significa que $d(f^j(q), 0)$ cresce mais devagar que λ^j . Analogamente existe uma variedade invariante central instável de classe $C^{k'}$, $W^{cu}(0, f)$ que é um gráfico em $E^u \oplus E^c$ e é tangente a $E^u \oplus E^c$ em 0 e é caracterizada da seguinte maneira:

$$W^{cu}(0, f) = \{q : d(f^{-j}(q), 0)\zeta^j \rightarrow 0 \text{ quando } j \rightarrow \infty\}.$$

O que significa que $d(f^{-j}(q), 0)$ cresce mais devagar que ζ^{-j} quando $j \rightarrow \infty$ ou $-j \rightarrow -\infty$. Assim podemos definir a variedade central de f como

$$W^c(0, f) = W^{cs}(0, f) \cap W^{cu}(0, f).$$

Ao contrário do que ocorre com os elementos da variedade estável, a condição necessária para que um ponto q pertença a $W^{cs}(0, f)$ é que o valor de $d(f^j(q), 0)$ cresça a uma taxa menor que λ^j , para j positivo. Analogamente, a condição necessária para que um ponto pertença a $W^{cu}(0, f)$ é mais fraca que a requerida para que um ponto pertença a $W^u(0, f)$, sendo necessário apenas que $d(f^{-j}(q), 0)$ cresça a uma taxa menor que ζ^{-j} . Portanto, tudo que podemos dizer sobre um elemento da variedade central é que temos uma quota para o crescimento de $d(f^j(q), 0)$, tanto para a órbita positiva de q quanto para sua órbita negativa.

1.4 Forma Normal de Birkhoff

Aqui faremos uma breve apresentação da Forma Normal de Birkhoff, um resultado que descreve a dinâmica em uma vizinhança de um ponto fixo elíptico. Antes de apresentar o resultado, é importante apresentar alguns conceitos que usaremos em seguida. Assim como todos os outros resultados desse capítulo, apenas apresentaremos a Forma Normal de Birkhoff. Para quem procura uma explicação detalhada desse resultado, remetemos a [7], onde o leitor poderá encontrar uma explicação detalhada sobre o assunto, assim como a demonstração desse teorema para o caso de dimensão 2. Na verdade, essa obra será nossa principal referência sobre o assunto, com a única diferença que os resultados aqui apresentados são para dimensão $2n$.

Outro conceito importante que devemos apresentar é jato de uma aplicação:

1.4.1 Definição. *Seja f uma aplicação de ordem C^k . Denominamos de k -jato de f no ponto 0 o polinômio de Taylor de f de ordem k no ponto 0. Ou seja, consideramos apenas a aproximação da função pelo polinômio de Taylor de ordem k , ignorando as derivadas de ordem mais altas.*

O conceito de jato de uma aplicação será usado no capítulo três, quando vamos perturbar uma função de modo a ficar apenas com seu jato de ordem k . O jato de ordem k de uma aplicação tem propriedades bastante interessantes, quando expressamos essa aplicação na Forma Normal de Birkhoff, como ficará claro logo em seguida.

1.4.2 Teorema (Forma Normal de Birkhoff). *Suponha que $f \in \text{Diff}_\omega^r(M)$ e que 0 é um ponto fixo elíptico de f . Então podemos escolher uma parametrização ϕ de modo que tomando $z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$; $i = 1, \dots, k$ as coordenadas complexas de $\mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k$; temos $f(z_1, \dots, z_k) = (\xi_1, \dots, \xi_k) + h(z_1, \dots, z_k)$ onde $\xi_i = z_i e^{\sqrt{-1}L}$; com*

$$L = L(z_1, \dots, z_k) = \sum_{i_1, \dots, i_k \geq 0; |i| \leq r} a_{i_1 \dots i_k} |z_1|^{2i_1} \dots |z_k|^{2i_k}$$
 e as primeiras k derivadas parciais de h relativas a z_1, \dots, z_k se anulam na origem, pois h possui apenas termos de ordem superior a k . Por isso, podemos afirmar que L é uma função polinomial nas variáveis $|z_1|^2, \dots, |z_k|^2$ e que $g_1(z_1, \dots, z_k) = (z_1 e^{\sqrt{-1}L}, \dots, z_k e^{\sqrt{-1}L})$ é o r -jato de $f(z_1, \dots, z_k)$ em $z_1 = \dots = z_k = 0$.

No capítulo três vamos perturbar uma função f expressa na Forma Normal de Birkhoff, de modo que fiquemos apenas com a aplicação g_1 ; ou seja com k -jato da aplicação f na forma normal de Birkhoff. Observando a aplicação g_1 , percebemos que em cada coordenada z_1, \dots, z_k , a aplicação gira cada coordenada por um ângulo que é o mesmo para cada z_i e que é determinado pelo polinômio L . Portanto, podemos garantir que a norma de um ponto p é igual à norma de $g_1(p)$, para todo p em uma vizinhança da origem. Ao contrário do caso em dimensão dois, não podemos garantir que existam curvas invariantes nas quais g_1 seja simplesmente uma rotação de ângulo fixo.

1.5 Lema de Perturbação

Ao longo da dissertação será necessário perturbar simplectomorfismos de tal maneira que as novas funções continuem preservando a mesma forma simplética. Além disso, tais perturbações devem alterar a função original apenas em uma determi-

nada vizinhança e a perturbação deve poder ser tão pequena quanto quisermos. As perturbações que vamos construir ao longo da dissertação devem possuir as seguintes características: levar um ponto x em um ponto y que esteja suficientemente próximo, preservar a forma simplética ω , ser idênticas à identidade fora de uma vizinhança de x e ser ϵ próxima da identidade na topologia C^r . Se nosso objetivo fosse simplesmente perturbar uma função de modo que $g(f^{-1}(x)) = y$, bastaria usar um deslocamento de x para y composto com uma função bump. Como desejamos que a nova função também preserve a forma ω e esteja ϵ próxima da original na topologia C^r , sua construção torna-se mais complicada, envolvendo funções geradoras. A seguir vamos apresentar um lema que nos permite construir funções com essa característica. A prova desse lema está em [4]. Seja $B_\epsilon(x)$ a bola de raio ϵ e centro em x . Para uma aplicação $\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$, seja

$$\|\mu\|_r = \sup_{x \in \mathbb{R}^2} \max\{|\mu(x)|, |D\mu(x)|, \dots, |D^r\mu(x)|\}$$

Onde $D^j\mu(x)$ é a j -ésima derivada de μ em x .

1.5.1 Lema. *Sejam $\epsilon > 0$ e $r \in \mathbb{Z}^+$*

(a) *Dado $\delta > 0$ e $y \in B_{\frac{\epsilon}{2}\delta}(0)$, existe um difeomorfismo $\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 , que preserva área de modo que $\mu(0) = y$, $\mu(x) = x$ para $|x| \geq \delta$ e $\|\mu - id\|_1 < \epsilon$*

(b) *Dado $\delta > 0$ e um subespaço linear $H \subset \{(x, y) : |y| \leq \frac{\epsilon}{2}|x|\}$ existe um difeomorfismo $\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 , que preserva área de modo que $\mu(0) = 0$, $T_0\mu((y = 0)) = H$, $\mu(x) = x$ para $|x| \geq \delta$ e $\|\mu - id\|_1 < \epsilon$.*

(c) *Existe uma função $C(r) > 0$ com a seguinte propriedade: Dado $\delta > 0$ e $y \in B_{C(r)\epsilon\delta^r}(0)$, existe um difeomorfismo $\mu : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ de classe C^1 , que preserva área de modo que $\mu(0) = 0$, $T_0\mu((y = 0)) = H$, $\mu(x) = x$ para $|x| \geq \delta$ e $\|\mu - id\|_r < \epsilon$.*

O que o difeomorfismo μ faz é levar a origem a um ponto y suficientemente próximo de 0, o quão próximo dependendo dos valores de δ e de ϵ . Os termos δ e ϵ representam respectivamente o tamanho da região na qual μ pode diferir da

identidade(já que $\mu(x) = x$ para $|x| \geq \delta$) e o quanto μ pode ser diferente da identidade (pois $\|\mu - id\|_r < \epsilon$).

Por outro lado, se analisarmos as relações entre y , δ e ϵ podemos concluir que tendo y fixo, quanto menor o valor de δ maior deverá ser o valor de ϵ e vice versa. Por outro lado, mantendo-se δ fixo, quanto menor o valor de ϵ mais próximo y deverá estar da origem. De maneira semelhante, mantendo-se ϵ fixo, quanto menor o valor de δ mais próximo y deverá estar da origem.

Capítulo 2

Teorema de Pixton

Nessa seção daremos uma prova do Teorema de Pixton, um resultado genérico sobre sistemas dinâmicos bidimensionais. Como muitos resultados discutidos de maneira mais aprofundada nessa dissertação, O Teorema de Pixton é um resultado que vale para um subconjunto genérico de $Diff_\omega^r(M)$. Usaremos como referência básica [5], com a diferença que nos preocuparemos em deixar mais claras passagens que considerarmos necessitar de uma explicação mais detalhada. Primeiramente, vamos enunciar o teorema:

O teorema de Pixton mostra que se M for uma superfície compacta, possivelmente com bordo, que mergulha em S^2 então para todo $r \geq 1$ existe um subconjunto residual \mathcal{R} de $Diff_\omega^r(M)$ tal que $f \in \mathcal{R}$ implica que todos os pontos periódicos hiperbólicos de f têm pontos homoclínicos transversais. Fernando Oliveira publicou uma versão desse mesmo teorema para variedades mergulhadas no toro. Tal resultado pode ser encontrado no artigo [6], onde o autor dá também uma prova diferente para o Teorema de Pixton.

2.1 Densidade das Funções com Interseção Homoclínica Transversal

A hipótese da superfície M estar mergulhada em S^2 é necessária para a demonstração, pois nela usamos o teorema da curva de Jordan. De acordo com esse teorema, se tomarmos uma curva fechada γ em $M - \partial M$ ela divide $M - (\partial M \cup \gamma)$ em dois abertos conexos cujo bordo em $M - \partial M$ é γ . Agora daremos algumas definições que serão usadas durante a prova do teorema de Pixton. Seja p um ponto periódico hiperbólico de um difeomorfismo f . $W^s(O(p), f)$ e $W^u(O(p), f)$ são, respectivamente, as variedades estável e instável da órbita $O(p)$ de p . Quanto à prova do teorema de Pixton, o passo mais importante é a seguinte proposição:

2.1.1 Lema. *Suponha que p é um ponto periódico hiperbólico de $f \in \text{Diff}_\omega^r(M)$. Suponha também que M possa ser mergulhada em S^2 . Dada qualquer vizinhança $U \subset \text{Diff}_\omega^r(M)$ com $f \in U$ existe $g \in U$ tal que p é um ponto periódico hiperbólico de g e $W^s(O(p), g)$ possui um ponto q de interseção transversal com $W^u(O(p), g)$, com $p \neq q$.*

Para provar a proposição 2.1.1, usaremos o lema de perturbação 1.5.1 já apresentado no capítulo de Resultados Preliminares para produzir mudanças locais em uma função f , e assim produzir uma interseção homoclínica.

Agora, prosseguimos com a prova da proposição 2.1.1. Usaremos a seguinte notação: $Cl(E)$ é o fecho de um conjunto E , $int(E)$ é o interior de E ,

$$O_+(E) = \bigcup_{n>0} f^n(E)$$

é a órbita positiva de E ,

$$O_-(E) = \bigcup_{n<0} f^n(E)$$

é a órbita negativa de E ,

$$O_i^j(E) = \bigcup_{n=i}^j f^n(E),$$

$$O_i^\infty(E) = \bigcup_{n=i}^{\infty} f^n(E),$$

id é a aplicação identidade, $supp\mu = \{x : \mu(x) \neq x\}$.

Para provarmos nosso resultado, é o bastante perturbar f para g de modo que

$$[W^s(O(p), g) \setminus O(p)] \cap [W^u(O(p), g) \setminus O(p)] \neq \emptyset.$$

Então fazemos mais uma perturbação para garantir que a interseção seja transversal.

Seja D_1 um conjunto de intervalos em $W^s(O(p), f) \setminus O(p)$ tal que $W^s(O(p), f) \setminus O(p) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(D_1)$ e seja N_1 uma pequena vizinhança de D_1 . Como cada ponto $y \in M$ é não errante (pois M é compacta e f preserva área) existe uma sequência x_i em N_1 com $x_i \rightarrow y \in D_1$ e $n_i > 0$ de modo que $f^{n_i}(x_i) \rightarrow y$. Analogamente definimos D_2 como um conjunto de intervalos em $W^u(O(p), f) \setminus O(p)$ de modo que $W^u(O(p), f) \setminus O(p) = \bigcup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(D_2)$. Também definimos N_2 como uma pequena vizinhança de D_2 . Podemos assumir que $f^{-2\tau}(N_2) \cap N_2 = \emptyset$, onde τ é o período de p , e que existem inteiros $m_i < n_i$ de modo que $f^{m_i}(x_i) \rightarrow x \in D_2$.

Em seguida tomamos uma vizinhança U de $O(p)$ que contém N_1 e N_2 tal que $f_\tau|_U$ seja quase linear. Podemos assumir que N_2 seja pequena o suficiente para que todo ponto de N_2 cuja órbita negativa deixe U passe primeiro por N_1 . Também assumimos que $int f(N_2) \cap U = \emptyset$.

Seja μ C^r próxima da identidade, com $supp\mu$ sendo uma pequena vizinhança de y e $\mu_1(x) = f^{m_i}(x_i)$ para algum i grande. Chamemos de g_1 a função $\mu_1 \circ f$. Afirmamos que $f^{-1}(x) \in W^u(O(p), g)$ e $O_+(f^{-1}(y), g) \cap N_1 = \emptyset$. Assim, com uma pequena mudança C^r em f obtivemos g_1 com $W^u(p, g)$ está ϵ_1 próxima a $D_1 \subset W^s(O(p), g)$. Desse modo, podemos construir uma sequência de perturbações μ_j que dará origem a uma sequência de funções $g_j = \mu_j \circ f_{j-1}$ de modo que $W^u(p, g_i)$ estará ϵ_j próxima a $D_1 \subset W^s(O(p), g_i)$, com $\epsilon_i \rightarrow 0$.

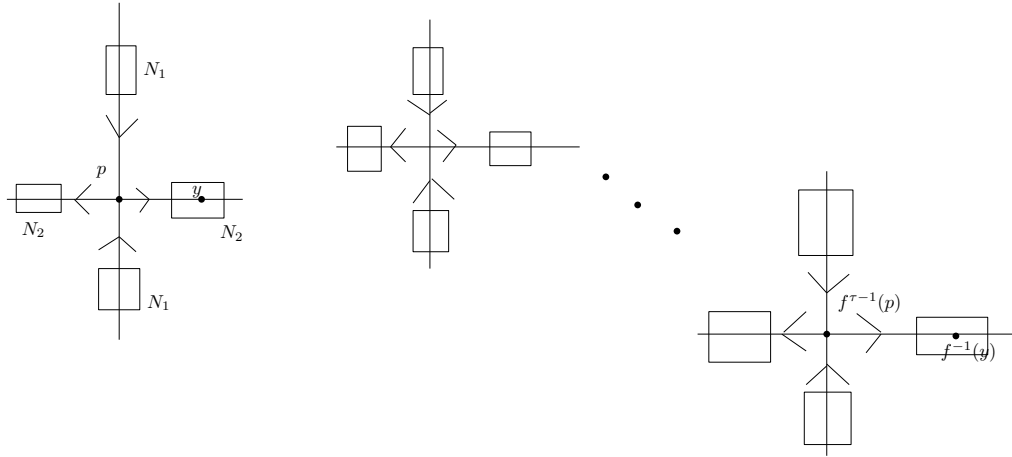


Figura 2.1: Aproximando as variedades estável e instável

Para isso, vamos tomar g_i como acima de modo que $\|f - g_1\|_r < \frac{\epsilon}{2}$ e $\|g_j - g_{j-1}\|_r < \frac{\epsilon}{2^j}$. Também devemos garantir que as funções g_j levam x em pontos x_i tais que $f^{n_i}(x_i)$ esteja cada vez mais próximo de y . Desse modo, temos que a variedade estável de g_j está cada vez mais próxima da variedade instável de g_j e $g_j \rightarrow f$. Como as funções g_i podem estar tão próximas de f quanto quisermos, podemos facilmente fazer com que elas convirjam, de modo que teremos $g_i \rightarrow f$. Para essa nova função que também chamaremos de f , existe um conjunto de intervalos $D_1 \subset W^s(O(p), f)$ de modo que

$$f^\tau(D_1) \cap D_1 \subset \partial D_1,$$

$$\cup_{n \in \mathbb{Z}} f^n(D_1) = W^u(O(p), f)$$

e

$$CIW^s(O(p), f) \cap D_1 \neq \emptyset.$$

Também vamos assumir que $W^s(O(p), f) \cap W^u(O(p), f) = O(p)$. A parte fundamental da prova é o lema a seguir:

2.1.2 Lema. *Existe um ponto $y \in \text{int}D_1$, uma vizinhança V de y e uma sequência de pontos $y_q \in W^u(O(p), f)$ convergindo para y quando $q \rightarrow \infty$ tal que $O_-(y_q, f) \cap \text{int}V = \emptyset$.*

Para provar o lema, vamos antes fazer algumas suposições adicionais para que possamos trabalhar com os casos mais simples, antes de atacar o caso geral. Primeiramente vamos trabalhar com o caso em que p é ponto fixo de f e tanto $W^s(O(p), f)$ quanto $W^u(O(p), f)$ preservam orientação. Dizemos que a função f preserva a orientação na variedade estável quando x e $f(x)$ estão no mesmo ramo de $W^s(p, f) \setminus \{p\}$ para todo $x \in W^s(p, f)$. A definição é análoga para a variedade instável.

Seja $y \in (W^s(p) \setminus \{p\}) \cap CW^u(p)$ e suponha que o lado direito de $W_u(p) \setminus \{p\}$ acumule em y como na figura ???. Vamos chamar essa componente de $W_+^u(p)$. Seja V uma pequena vizinhança em forma de disco com y sendo o centro de V , de tal forma que $V \cap f(V) = \emptyset$. Seja J a componente de $W^s(p)$ tal que $y \in J$. Seja S_l a componente de $V \setminus J$ à direita de J , enquanto S_r é a componente à esquerda. Vamos assumir também que $W^u(p)$ acumula em J apenas pela direita, ou seja $W_+^u(p) \cap S_l = \emptyset$. Caso isso não ocorra basta reduzir o raio de V até que $W_+^u(p) \cap S_l = \emptyset$, o que é possível pois $W^u(p)$ não acumula em J pela esquerda. Seja z o primeiro ponto em $W^u(p)$ à partir de p que intercepta ∂V . Chamamos de γ_s o intervalo em $W^s(p)$ ligando o ponto mais baixo de $W^s(p) \cap \partial V$ a p , enquanto L é o ramo de $W^u(p)$ que vai de p até z e γ é a curva em ∂S_r levando z ao topo de γ_s . (Ver figura ??)

Chamamos de C a curva simples e fechada $L \cup \gamma \cup \gamma_s$. Seja D a componente do complemento de C tal que $y \notin D$. Temos que $f(S_r) \subset D$. Vamos provar essa afirmação por absurdo:

Caso $f(S_r) \cap D^c \neq \emptyset$, teríamos que, pelo teorema da curva de Jordan, $f(S_r) \cap \partial D \neq \emptyset$, pois $f(S_r)$ é conexo e $f(S_r) \cap D \neq \emptyset$. Seja $z_0 \in f(S_r) \cap \partial D$. Como f não possui interseção homoclínica e $f(S_r) \cap S_r = \emptyset$, temos que $z_0 \in L$. Mas isso implica que $f^{-1}(z_0) \in S_r$, o que é absurdo pois $f^{-1}(z_0) \in L$ e z deveria ser o primeiro elemento de $W_+^u(p)$ a interceptar V .

Agora seja $E^q = \bigcup_{0 \leq j \leq q} f^j(D)$. Note que E^q é aberto. Temos os seguintes fatos

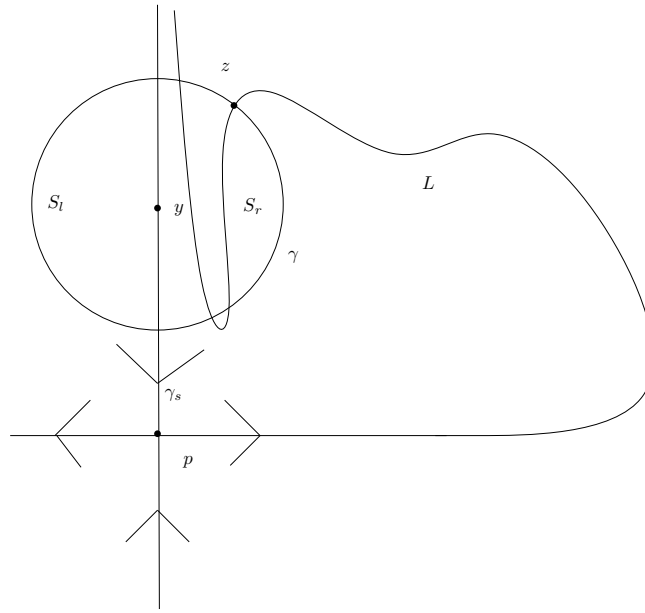


Figura 2.2: Cado em que p é ponto fixo

sobre E^q , que provaremos a seguir:

$$(1) O_-(L) \cap V = \emptyset$$

$$(2) \partial E^q \subset \partial E^0 \cup O_0^q(L), \text{ para } q \geq 0.$$

$$(3) y \notin Cl E^q \text{ para } q \geq 0.$$

$$(4) O_1^q(V \cap W_+^u(p)) \subset E^q$$

$$(5) f(L) \supset L \text{ e } O_0^\infty(L) \text{ acumula em } y.$$

Prova de (1):

Imediato, pois $f^{-1}(L) \subset L$ e $L \cap V = \emptyset$.

Prova de (2):

Nós temos que

$$\begin{aligned}
\partial E^q &\subset \bigcup_{0 \leq j \leq q} \partial f^j(D) = \bigcup_{0 \leq j \leq q} f^j(\partial D) = \\
&= \bigcup_{0 \leq j \leq q} f^j(L \cup \gamma \cup \gamma_s) = \\
&= O_0^q(L) \cup O_0^q(\gamma) \cup O_0^q(\gamma_s) \subset O_0^q(L) \cup O_0^q(\gamma) \cup \gamma_s.
\end{aligned}$$

(A última passagem decorre do fato de γ_s fazer parte da variedade estável de f e da variedade estável preservar orientação. Por isso temos $O_-(\gamma_s) \subset \gamma_s$.)

Por outro lado temos que $f(S_r) \subset D \rightarrow Clf(S_r) \subset ClD \rightarrow f(\gamma) \subset ClD$. Agora como $\partial D = L \cup \gamma \cup \gamma_s$, basta que eliminemos a possibilidade de qualquer ponto de $f(\gamma)$ pertencer a L ou a γ_s . Pela figura FIG1 podemos ver que o ramo superior de $W^s(p)$ não pode adentrar S_r , caso contrário não poderíamos ter $f(S_r) \subset D$. Por não poder adentrar S_r , podemos afirmar que $W^s(p) \cap \gamma = \emptyset$, o que significa que $f(\gamma) \cap \gamma_s = \emptyset$, devido ao fato de $W^s(p)$ ser f -invariante. Agora vamos descartar a possibilidade de $f(\gamma) \cap L$ ser diferente de \emptyset . Para mostrar que isso não pode ocorrer, basta observar que qualquer ponto $z_2 \in \gamma \cap W_+^u(p)$ é, por definição de z , posterior a z em $W_+^u(p)$. Portanto temos que $f(z_2)$ também será posterior a z ; o que implica que $f(z_2) \notin L$, pois $W^u(p)$ não possui auto-interseção.

Assim podemos concluir que $f(\gamma) \subset E^q \cup \gamma$; o que implica $\partial E^q \cap O_0^q(\gamma) \subset \gamma$. Daí segue o resultado desejado.

Prova de (3):

Temos que $y \notin ClE^0 = ClD$. Isso significa que, em particular, $y \notin \partial E^0$. Como $y \notin O_0^\infty(L)$ (pois f não possui pontos homoclínicos), $y \notin \partial E^0$ e $\partial E^q \subset \partial E^0 \cup O_0^q(L)$, temos que $y \notin \partial E^q$ para $q \geq 0$. Portanto temos que $y \in ClE^q \iff y \in E^q$. Suponha por absurdo que $\exists j > 0$ com $y \in E^j$. Chamando de $W_+^s(p)$ o ramo da variedade estável com $y \in W_+^s(p)$, temos que $y \in E^j \rightarrow \exists k \in \{1, \dots, j\}$ com $f^k(y) \in D$, o que implica que $W_+^s(p) \cap D \neq \emptyset$. Seja w o primeiro de $W_+^s(p)$ ponto a partir de γ_s

tal que $w \in \partial D$. Temos que $w \in \gamma$ e existe um intervalo aberto $(z_1, w) \subset W_+^s(p) \cap S_r$. Mas, pela nossa construção, $f(z_1, w) \subset W_+^s(p)$ e $f(z_1, w) \cap D = \emptyset$, o que contraria a hipótese de $f(S_r) \subset D$.

Prova de (4):

A prova dessa afirmação é elementar, pois $f(S_r) \subset D$ o que implica que $f^k(S_r) \subset f^k(D)$. Como $W_+^u(p) \cap V \subset S_r$, segue imediatamente que $O_1^q(W_+^u(p) \cap V) \cap E^q$.

Prova de (5):

A primeira afirmativa segue da definição de variedade instável e do fato de $W_+^u(p)$ preservar orientação. Já a segunda afirmativa decorre de $O_0^\infty(L) = W_+^u(p) \cup \{p\}$.

Agora usaremos as cinco afirmativas provadas anteriormente para provar o lema 2.1.2 no caso em que $W_+^u(p)$ e $W_+^s(p)$ preservam orientação e p é ponto fixo de f . Seja $y_q \in ClE^q$ um ponto em ClE_q cuja distância para y é mínima. Para q suficientemente grande teremos $y_q \in O_0^q(L)$. Afirmamos que $O_-(y_q) \cap V = \emptyset$. Suponha por absurdo que isso não ocorre, ou seja, $f_{-j}(y_q) \in V$ para algum $j > 0$ e para algum $q > 0$. Nesse caso com certeza temos $j < q$, pois $O_-(L) \cap V = \emptyset$. Assim temos $y_q = f^j(f_{-j}(y_q)) \in f^j(V \cap W_+^u(p)) \in E^q$. Como E^q é aberto existem pontos em E^q mais próximos de y que y_q , o que é absurdo.

Agora consideramos o caso em que $W_+^u(p) \cap S_l \neq \emptyset$, do qual sabemos apenas que $O_1^q(V \cap W_+^u(p)) \subset E^q$. Desejamos construir conjuntos E^q para os quais sejam válidas as propriedades de (1) até (5). Chamemos os conjuntos E^q que acabamos de construir de E_r^q e denominemos z_r, γ_r, C_r e D_r de maneira análoga. Seja z_l o primeiro ponto em $W_+^u(p)$ no qual $W_+^u(p)$ encontra ∂S_l e seja L_l o intervalo $[p, z_l]$ em $W_+^u(p)$. Sejam γ_l, C_l, D_l e E_l^q construídos de maneira análoga a seus correspondentes à direita. Nesse caso as propriedades (1), (2), (3) e (5) também valem para E_l^q e L_l enquanto a propriedade (4) se torna $O_1^q(S_l \cap W^u(p)) \subset E_l^q$. Finalmente, definimos $L = L_l \cup L_r$ e $E^q = E_l^q \cup E_r^q$. Reduzindo o tamanho de V se necessário podemos pedir que $V \cap L = \emptyset$, obtemos novamente as propriedades de (1) até (5) e a partir daí podemos construir y_q da mesma maneira que fizemos anteriormente. Assim acabamos de provar o lema (1.4) para o caso em que p é ponto fixo e as variedades estável e instável preservam orientação.

Agora provaremos o caso geral. Considere as várias componentes de $W^s(O(p)) \setminus O(p)$ e de $W^u(O(p)) \setminus O(p)$. Seja T um período comum para essas componentes. Como $ClW^u(O(p)) \cap W^s(O(p)) \setminus O(p) \neq \emptyset$, existem inteiros $0 \leq j_1 \leq j_2 \leq \tau$ de modo que uma componente X_1 de $W^u(f^{j_1}(p)) \setminus \{f^{j_1}(p)\}$ acumule em uma componente Y_2 de $W^s(f^{j_2}(p)) \setminus \{f^{j_2}(p)\}$. Seja $X_2 = f^{j_2-j_1}(X_1)$ e $Y_3 = f^{j_2-j_1}(Y_2)$. Então $ClX_2 \cap Y_3 \neq \emptyset$. Como existe apenas um número finito de pontos periódicos em $O(p)$ e um número finito de componentes das variedades estável e instável, se repetirmos esse processo acabaremos repetindo uma componente. Assim, existem seqüências $p_0, p_1, \dots, p_\nu \in O(p)$ e componentes $X_i \subset W^u(p_i) \setminus \{p_i\}$ e $Y_i \subset W^s(p_i) \setminus \{p_i\}$ de modo que $ClX_i \cap Y_{i+1} \neq \emptyset$, com $0 \leq i \leq \nu$ e $X_\nu = X_0$, $Y_\nu = Y_0$. Ademais, sejam $X_i \subset O(X_1)$, $Y_i \subset O(Y_1)$. Vamos chamar as seqüências da forma $X_0, Y_1, X_1, Y_2, X_2, \dots, Y_{\nu-1}, X_{\nu-1}, Y_\nu$ de ciclos. Escolhemos um ciclo com o número mínimo de termos: $X_0, Y_1, X_1, Y_2, X_2, \dots, Y_{\nu-1}, X_{\nu-1}, Y_\nu$. Seja $y \in Y_0 \cap ClX_{\nu-1}$. Supondo que $p_i = f^{j_i}(p_0)$, temos uma situação parecida com a ilustrada na figura abaixo, na qual assumimos que $X_{\nu-1}$ se aproxima de Y_0 pela esquerda.

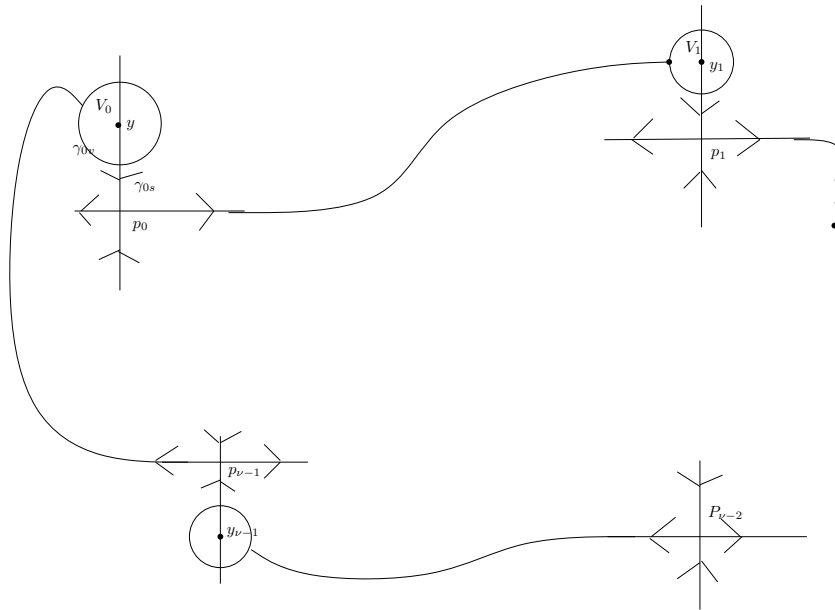


Figura 2.3: Caso Geral

Seja V_0 uma pequena vizinhança de y , $C^s(y)$ a componente de y em $W^s(p_0) \cap V_0$. Sejam $V_i = f^{j_i}(V_0)$, $y_i = f^{j_i}(y)$ e $S = S_l$ a componente de $V_0 \setminus C^s(y)$ à esquerda de y . Seja $S_\epsilon = S \cap B_\epsilon(y)$. Assim como fizemos no caso em que p é ponto fixo e as variedades estável e instável preservam orientação, vamos construir conjuntos abertos E^q para $q \geq 1$, uma curva compacta $L \subset X_{\nu-1}$ e um subconjunto compacto $\gamma_s \subset W^s(O(p))$ de modo que:

$$(1) O_-(L) \cap V = \emptyset, \quad O_+(\gamma_s) \cap S_\epsilon = \emptyset$$

$$(2) \partial E^q \subset \partial E^0 \cup O_0^q(L), \text{ para } q \geq 0.$$

$$(3) y \notin ClE^q \text{ para } q \geq 0.$$

$$(4) \text{ Para } \epsilon \text{ suficientemente pequeno, } O_1^{qT}(S_\epsilon) \subset E^q$$

$$(5) \bigcup_{0 \leq k < \infty} f^{kT}(L) = X_{\nu-1}$$

Assumindo que E^q , L e γ_s foram construídos e possuem as características mencionadas acima, provaremos o lema (1.4):

Como $y \in ClX_{\nu-1}$, temos que $y \in ClO_0^\infty(L)$. Seja y'_q um ponto em ClE^q cuja distância a y é a mínima possível. Para q suficientemente grande teremos $y'_q \in O_0^{qT}(L)$ e procedendo assim como no caso anterior, podemos mostrar que $O_-(y'_q) \cap S_\epsilon = \emptyset$. Assim já resolvemos o problema para o lado esquerdo de y_0 em $B_\epsilon(y)$. Agora, assim como no caso de um ponto fixo, chamamos os conjuntos E^q e L previamente construídos de E_l^q e L_l , respectivamente. Repetindo agora a construção anterior no lado direito $S_{R,\epsilon}$ de $B_\epsilon(y) \setminus Y_0$ obtemos conjuntos abertos E_R^q e conjunto L_R de modo que as propriedades de 1 a 5 são válidas usando o mesmo γ_s . Assim tomando $E^q = E_l \cup E_R$, $L = L_R \cup L_l$ e diminuindo ϵ nós teremos $V = B_\epsilon(y)$ e o lema está provado.

Em seguida vamos construir os conjuntos E^q , L para $S = S_l$. Seja γ_{0u} a curva mais curta em $X_{\nu-1}$ unindo $p_{\nu-1}$ a V_0 , terminando no ponto z_4 . Traçando uma curva γ_{0v} em $\partial V_0 \setminus Y_0$ ligando γ_{0u} a Y_0 terminando no ponto z_0 mais próximo a p_0 . Chamaremos de γ_{0s} a curva que vai de z_0 a p_0 em Y_0 . Seja $\gamma_{iv} = f^{ji}(\gamma_{0v})$, $\gamma_{is} = f^{ji}(\gamma_{0s})$ e $\gamma_{iu} = f^{ji}(\gamma_{0u})$ para $0 \leq i \leq \nu$. Sejam também $\gamma_v = \cup_{i=0}^{\nu} \gamma_{iv}$, $\gamma_s = \cup_{i=0}^{\nu} \gamma_{is}$ e $\gamma_u = \cup_{i=0}^{\nu} \gamma_{iu}$ e seja $C = \gamma_v \cup \gamma_s \cup \gamma_u$. Como o ciclo tem o número mínimo de elementos temos que C é uma curva simples e fechada. Caso contrário, teríamos um ciclo com um número menor de elementos. Seja $L = \gamma_{0u}$.

Vamos agora provar a propriedade (5).

Prova de (5):

Como T é o período de $O(p)$, temos que L contém um domínio fundamental de $W^u(f^T(p_{\nu-1}))$. Como $X_{\nu-1} = W^u(f^T(p_{\nu-1}))$, temos que $\bigcup_{0 \leq k < \infty} f^{kT}(L) = W^u(f^T(p_{\nu-1})) = X_{\nu-1}$, o que prova a propriedade (5).

Provaremos agora a propriedade (1).

Prova de (1):

A primeira afirmativa de (1) segue de que por definição o ponto $z_1 \in L \cap \partial B_\epsilon(y)$ e também temos que $B_\epsilon(y) \cap O_0^{\nu-1}(L) = \emptyset$, teremos que por definição de $W^u(f, O(p))$, $O_-(L) \subset O_0^{\nu-1}(L)$; o que por sua vez implica que $O_-(L) \cap V = \emptyset$. Já a segunda afirmativa de (1) pode ser provada de maneira parecida com a primeira. Tomando ϵ pequeno o bastante para que $S_\epsilon \cap O_{1-\nu}^0(\gamma_s) = \emptyset$ teremos que $O_+(\gamma_s) \cap S_\epsilon = \emptyset$ pois $O_+(\gamma_s) \subset O_{1-\nu}^0(\gamma_s)$, comprovando a segunda afirmação.

Antes de provar as outras três afirmações devemos fazer algumas considerações sobre os conjuntos com os quais estamos trabalhando. Podemos assumir que $y \notin C$, $V_0 \cap [O_+(\gamma_s) \cup O_1^{T-1}(S)] = \emptyset$, $f^T(y) \notin O_1^{T-1}(V_0)$, $f^T(\gamma_s) \subset \gamma_s$, $f^{-T}(\gamma_u) \subset \gamma_u$ e $f^T(ClS) \cup f^{2T}(ClS) \subset D$, onde D é a componente conexa de $M \setminus C$ tal que $y \notin D$.

Definimos:

$$D' = \cup \{f^j(D) : 0 \leq j < T \text{ e } y \notin f^j(D)\}$$

$$D^q = \cup_{0 \leq k \leq q} f^{kT}(D), \quad E^q = O_1^{T-1}(S) \cup D^{q-1}$$

Provamos anteriormente que tanto a afirmativa (1) quanto a afirmativa (5) são verdadeiras. Agora faremos o mesmo com (2), (3) e (4).

Prova de (2):

Antes de provar a afirmação (2) teremos de provar dois fatos preliminares:

(6) Para cada $0 \leq i \leq \nu$ temos $f^{T+j_i}(\partial S) \subset D$

Prova: Primeiramente devemos pedir que V_0 seja pequena o bastante para que $f^{T+j_i}(S) \cap f^{j_i}(S) = \emptyset$. Observando a figura [3.4 Newhouse] fica evidente que $f^{j_i}(S) \cap D \neq \emptyset$. Agora suponha, por absurdo, que $f^{j_i}(CLS)$ não está contido em D . Nesse caso temos que existe um ponto z_5 no interior de γ_{0u} de modo que $z_5 \in f^T(CLS)$. Mas isso significa que $f^{-T}(z_5) \in CLS$, com $f^{-T}(z_5)$ sendo anterior a z^5 em γ_{0u} , que por sua vez é anterior a z_4 . Isso é absurdo, pois contraria a hipótese de que z_4 é o primeiro ponto em $X_{\nu-1}$ a encontrar CLV_0 , que é equivalente a γ_{0u} ser a curva mais curta em $X_{\nu-1}$ unindo $p_{\nu-1}$ a V_0 .

(7) $\partial[\bigcup_{0 \leq k \leq q} f^{kT}(D)] \subset \partial D \cup O_0^{qT}(L)$

Prova: Provaremos a afirmativa por indução em q .

Obviamente a afirmativa é válida para $q = 0$. Suponha que ela seja válida para q . Então teremos:

$$\begin{aligned} \partial[\bigcup_{0 \leq k \leq q+1} f^{kT}(D)] &= \partial[D \cup f^T[\bigcup_{0 \leq k \leq q} f^{kT}(D)]] \subset \\ &\subset \partial D \cup f^T[\bigcup_{0 \leq k \leq q} \partial f^{kT}(D)] \subset \partial D \cup f^T(\partial D) \cup O_1^{(q+1)T}(L) \end{aligned}$$

(essa última relação se dá como consequência da hipótese de indução)

Por definição temos que

$$\begin{aligned} f^T(\partial D) &= f^T(\gamma_u) \cup f^T(\gamma_s) \cup f^T(\gamma_v) \subset \\ &\subset O_0^{2T}(L) \cup \gamma_s \cup \bigcup_{0 \leq i \leq \nu} f^{T+j_i}(\partial S) \subset O_0^{2T}(L) \cup \gamma_s \cup D, \end{aligned}$$

por (6).

Como $D \cap \partial(\bigcup_{0 \leq k \leq q+1} f^{kT}(D)) = \emptyset$ e $\gamma_s \subset \partial D$, temos que a propriedade (7) está provada para $q + 1$.

Agora podemos provar (2): Seja $R = \{r \in [0, T) : y \notin f^r(D)\}$.

Assim teremos $\partial E^q = \partial[\bigcup_{0 \leq k \leq q-1} f^{kT}(D) \cup O_1^{T-1}(S)]$. Temos que $E^1 \supset O_1^{T-1}(S)$ pela definição de E^1 , o que implica que :

$$\begin{aligned} \partial[\bigcup_{0 \leq k \leq q-1} f^{kT}(D) \cup O_1^{T-1}(S)] &\subset \partial[\bigcup_{0 \leq k \leq q-1} f^{kT}(D) \cup E^1] = \\ &= \partial[\bigcup_{r \in R} f^r([\bigcup_{0 \leq k \leq q-1} f^{kT}(D)]) \cup E^1] \end{aligned}$$

(a última passagem se deve às definições de R e de D).

Mas

$$\begin{aligned} \partial[\bigcup_{r \in R} f^r([\bigcup_{0 \leq k \leq q-1} f^{kT}(D)]) \cup E^1] &\subset \partial E^1 \cup \bigcup_{r \in R} f^r(\partial[\bigcup_{0 \leq k \leq q-1} f^{kT}(D)]) \subset \\ &\subset \partial E^1 \cup [\bigcup_{r \in R} f^r(\partial D)] \cup O_0^{qT}(L) \end{aligned}$$

Como $\partial E^q \cap [\bigcup_{r \in R} f^r(\partial D)] \subset \partial = E^q \cap ClE^1 = \partial E^q \cap \partial E^1 \subset \partial E^1$ temos que a propriedade (2) está provada.

Prova de (3):

Certamente a propriedade (3) é válida para $q = 1$. Suponha por absurdo que ela seja válida para um determinado q e o não seja para $q + 1$. Se $y \in ClE^{q+1}$, temos que $y \in E^{q+1}$, pois $y \notin \partial E^q$ para todo q . Nesse caso teríamos $y \in E^{q+1} - E^q =$

$$= f^{qT}(D) - f^{(q-1)T}(D) \text{ o que por sua vez implica que } f^{-T}(y) \in f^{(q-1)T}(D) \subset E^q.$$

Assim, o segmento aberto $(y, f^{-T}(y)) \subset W^s(p_0)$ cruza em algum momento $\partial E^q \subset \partial E^1 \cup O_0^{qT}(L)$. Mas por construção temos que $f^T(y, f^{-T}(y)) = (f^T(y), y)$ não intercepta $f^T(1 \cup O_0^{qT}(L))$, o que é absurdo.

Prova de (4):

Primeiramente observamos que para $0 < m < T$, se $y \in f^m(D)$ então $f^m(D)$ contém o segmento $[f^{2T}(y), y] \subset W^s(p_0)$. De outro modo teríamos $[f^{2T}(y), Y] \cap \partial f^m(D) \neq \emptyset$, o que não pode ocorrer pois implicaria que f possui pontos homoclínicos. Temos que $[f^{2T}(y), y] \subset O_1^{2T-1}(\gamma_{0s})$. Pela geometria de ∂D e f , se

z_6 é o ponto em $\gamma_{0s} \cap O_1^{2T-1}$ mais próximo a y , então o segmento (z_6, y) deve encontrar $M \setminus f^m(D)$. Como $y \in f^m(D)$, existem pontos em $\gamma_{0s} \cap O_1^{2T-1}$ mais próximos a y que z_6 , o que nos leva a uma contradição.

Em seguida observamos que para $\epsilon > 0$ suficientemente pequeno, $y \in f^m(D)$ com $0 < m < T$ implica que $f^m(D) \supset f^T(S_\epsilon) \cup f^{2T}(S_\epsilon)$. Agora (4) obviamente vale para $q = 1$. Assuma que seja válida para um determinado q . Então teremos:

$$\begin{aligned} O_1^{(q+1)T}(S_\epsilon) &= O_1^{T-1}(S_\epsilon) \cup O_T^{2T-1}(S_\epsilon) \cup O_{2T}^{(q+1)T}(S_\epsilon) \\ &\subset E^1 \cup O_T^{2T-1}(S_\epsilon) \cup f^T(E^q) \\ &\subset E^1 \cup O_T^{2T-1}(S_\epsilon) \cup E^{q+1} \end{aligned}$$

O que significa que só nos resta provar que $O_T^{2T-1}(S_\epsilon) \subset E^1$. Caso contrário existe $0 \leq t < T$ tal que $f^{T+t}(S_\epsilon)$ não está contido em D . Portanto se $f^{T+t}(S_\epsilon) \subset f^r(D)$ com $0 \leq r < T$, então $y \in f^r(D)$. Obtemos uma contradição mostrando que:

$$* f^{T+t}(S_\epsilon) \subset f^{[kt]}(D) \text{ para todo } k \geq 1$$

Onde $[kt]$ é kt módulo T . Assim para basta tomar $k = T$ para concluir que $y \in D$, o que é absurdo. Agora provaremos *. Temos que * vale para $k = 1$. Suponha que seja válido para k . Seja $kt = Ta + m$, onde $0 \leq m < T$ o que implica que $[kt] = m$. Então temos que $[(k+1)t] = m + t$ ou $[(k+1)t] = m + t - T$. Pela hipótese de indução temos que $f^{T+t}(S_\epsilon) \subset f^m(D)$ o que implica que $y \in f^m(D)$. Isso implica que $m \neq 0$. Mas como $f^T(S_\epsilon) \cup f^{2T}(S_\epsilon) \subset f^m(D)$. Agora $f^T(S_\epsilon) \subset f^m(D)$ implica que $f^{T+t}(S_\epsilon) \subset f^{m+t}(D)$, enquanto $f^{2T}(S_\epsilon) \subset f^m(D)$ implica que $f^{2T+t-T}(S_\epsilon) = f^{T+t}(S_\epsilon) \subset f^{m+t-T}(D)$. Portanto $f^{T+t}(S_\epsilon) \subset f^{[(k+1)t]}(D)$ o que confirma * e termina nossa prova de (4).

Tendo construído E^q , L e γ_s de maneira que sejam válidas as propriedades de (1) a (5), procedemos agora a provar o lema. Como $y \in ClX_{\nu-1}$ temos que $y \in ClO_0^\infty(L)$. Seja y'_q um ponto de ClE^q de modo que a distância a y seja mínima. Para q suficientemente grande, $y'_q \in O_0^{qT}(L)$ e como no caso do ponto fixo, podemos mostrar que $O_-(y'_q) \cap S_\epsilon = \emptyset$. Desse modo provamos o caso em que a variedade instável se aproxima de y pela esquerda. Agora, assim como no caso do ponto fixo, trataremos do caso no qual a variedade instável se aproxima de y pela direita e pela esquerda. Chamamos os E^q , L construídos anteriormente de E_l^q , L_l e repetimos

a construção do lado direito $S_{R\epsilon}$ de $B_\epsilon(y) - Y_0$ o que nos dá os conjuntos E_R^q e L_R , de modo que as propriedades de (1) a (5) se mantêm válidas com o mesmo γ_s . Finalmente, definimos $E^q = E_R^q \cup E_l^q$ e $L = L_R \cup L_l$ e reduzimos ϵ de modo que $V = B_\epsilon(y)$ e o lema está provado. \square

Tendo provado o lema 2.1.2 procedemos agora para provar a proposição 2.1.1. Tendo construído a seq y_q com as propriedades estabelecidas no lema 2.1.2, basta usar o lema de perturbação 1.5.1 para produzir uma perturbação ϕ que tenha as seguintes propriedades: $\|\phi - id\|_r < \epsilon$ para um valor de ϵ definido previamente, $supp\phi \subset V$ e $\phi(y_q) = y$ para um valor suficientemente grande de q . De acordo com o lema 1.5.1, tomando y_q suficientemente próximo de y podemos controlar tanto o tamanho do suporte de ϕ ($supp\phi$) quanto $\|\phi - id\|_r$. Por isso escolhemos o valor de q após termos escolhido ϵ e levando em conta a vizinhança V . A função que procuramos é a função $g = \phi \circ f$ que pode estar tão próxima de f quanto quisermos e para a qual o ponto y é um ponto homoclínico. Para garantir a transversalidade de y , basta perturbar novamente a função g se necessário. Deste modo, terminamos a prova da proposição 2.1.1.

2.2 Teorema de Pixton

Agora que a proposição 2.1.1 foi devidamente provada, podemos usa-la para provar o resultado chave desse capítulo, o Teorema de Pixton. Vamos primeiramente enunciar o teorema, para logo em seguida prová-lo usando a proposição anterior:

2.2.1 Teorema (Pixton). *Seja M uma superfície, possivelmente com bordo, que mergulha em S^2 . Para todo $r \geq 1$ existe um subconjunto residual \mathcal{R} de $Diff_\omega^r(M)$ tal que $f \in \mathcal{R}$ implica que todos os pontos periódicos hiperbólicos de f têm pontos homoclínicos transversais.*

Assumindo a proposição 2.1.1, procedemos da seguinte maneira para provar o teorema. Seja $\beta_{n,m}$ o subconjunto de elementos $f \in Diff_\omega^r(M)$ para os quais para cada ponto periódico hiperbólico p de f com período menor que $n+1$ existem pontos $p_1, p_2 \in O(p)$ e curvas $\gamma_1 \subset W^u(p_1, f)$ e $\gamma_2 \subset W^s(p_2, f)$ de modo que:

- (1) $p_1 \in \gamma_1, p_2 \in \gamma$
- (2) tamanho de (γ_i) menor que m
- (3) $\gamma_1 \setminus \{p_1\}$ possui uma interseção transversal com $\gamma_2 \setminus \{p_2\}$

Pela proposição 2.1.1 podemos afirmar que o conjunto $\bigcup_{m \geq 1} \beta_{n,m}$, com n fixo, é denso em $Diff_\omega^r(M)$. Resta provar que $\bigcup_{m \geq 1} \beta_{n,m}$ é aberto em $Diff_\omega^r(M)$. Seja p um ponto periódico hiperbólico de f .

Para isso, vamos utilizar um resultado que está provado em [8].

2.2.2 Proposição. *Seja (M, ω) uma variedade simplética. Se $1 \leq r \leq \infty$ então o conjunto $\varrho^r(n) = \{f \in Diff_\omega^r : \text{todo ponto periódico de período menor que } n \text{ é elementar}\}$ é aberto e denso em $Diff_\omega^r$ portanto o conjunto $\bigcap_{p=1}^\infty \varrho^r(p)$ é um subconjunto residual de $Diff_\omega^r$.*

Toda função $f \in \varrho^r(n)$ possui um número finito de pontos periódicos de período menor ou igual a n , pois M é compacta e todo ponto periódico elementar é isolado, um resultado enunciado em [9]. O que nos resta provar é que se $f \in \varrho^r(n)$ então existe $\epsilon > 0$ tal que $B(f, \epsilon) \subset \varrho^r(n)$. De fato, seja $\delta > 0$ e vamos definir $S_n = \{p \in M : p \text{ ponto periódico de } f \text{ com período menor que } n\}$. Seja $\hat{B} = \bigcup_{p \in S_n} B(p, \delta)$. Para cada $i \in \{1, \dots, n\}$ temos que a função $d(x, f^i(x))$ restrita a $M - \hat{B}$ assume um mínimo, que é diferente de 0 pois $M - \hat{B}$ não possui pontos periódicos de período menor ou igual a n . Se tomarmos g suficientemente próxima de f podemos garantir que g também não terá pontos periódicos de período menor ou igual a n em $M - \hat{B}$. Da mesma maneira, se δ for suficientemente pequeno e g suficientemente próxima a f podemos garantir que g terá o mesmo número de pontos periódicos hiperbólicos que f em \hat{B} e também o mesmo número de pontos periódicos elementares, sempre restringindo o período. Como a propriedade de possuir uma interseção homoclínica é aberta para cada ponto periódico hiperbólico e o número de pontos periódicos hiperbólicos de f com período menor que $n + 1$ é finito, temos que o conjunto $\bigcup_{m \geq 1} \beta_{n,m}$ é aberto, como queríamos demonstrar. Portanto, temos que o conjunto $\bigcap_{n \geq 1} (\bigcup_{m \geq 1} \beta_{n,m})$ é residual, o que prova o Teorema de Pixton.

Capítulo 3

Pontos Homoclínicos na Vizinhança de Pontos Quase Elípticos

Nessa seção apresentaremos o resultado principal dessa dissertação, que garante que existe um subconjunto residual $\mathcal{B} \subset \text{Diff}_\omega^r(M)$ tal que se $f \in \mathcal{B}$ então todo ponto quase elíptico de f é também limite de pontos homoclínicos transversais de f . Para provar esse teorema será necessário usar os diversos resultados apresentados até aqui, assim como alguns outros que por serem mais diretamente ligados à prova desse teorema, decidimos apresentar diretamente nessa seção.

Antes de prosseguirmos devemos apresentar algumas definições que nos servirão ao longo desse capítulo. Vamos considerar M como sendo uma variedade diferenciável cuja dimensão é $2n$, enquanto ω é uma forma simplética definida nessa variedade. $\text{Diff}_\omega^r(M)$ é o conjunto dos difeomorfismos de classe C^r em M que preservam a forma simplética ω . Agora vamos definir um ponto periódico quase elíptico de uma função.

3.0.3 Definição. *Dizemos que p é um ponto periódico quase elíptico de período τ para uma função f se temos que a aplicação $Df^\tau(p)$ possui no mínimo um autovalor de norma um e todos os autovalores de $Df^\tau(p)$ com norma um são não reais.*

3.1 Funções Semicontínuas

Agora vamos proceder fornecendo diversas definições relacionadas ao conceito de semicontinuidade superior e inferior de funções cujo domínio é um espaço topológico qualquer enquanto o contradomínio é o conjunto de subconjuntos compactos de uma variedade M . Esses conceitos serão usados na demonstração do Teorema principal, visto que uma das funções que vamos definir posteriormente é semicontínua inferiormente.

Lembramos que a distância de Hausdorff entre dois conjuntos compactos é definida por

$$d_H(\Lambda, \Gamma) = \inf\{\epsilon > 0 : \Lambda \subseteq B_\epsilon(\Gamma) \text{ e } \Lambda_n \subseteq B_\epsilon(\Lambda)\}.$$

Denotamos por $\mathcal{P}_c(M)$ o espaço dos subconjuntos compactos de M , munido da topologia induzida pela métrica de Hausdorff. Seja \mathcal{X} um espaço topológico. Uma função a valores em conjuntos $\Phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{P}_c(M)$ é *inferiormente semicontínua* em $f \in \mathcal{X}$ se, para cada conjunto aberto $U \subset M$, se tem que $\Phi(f) \cap U \neq \emptyset$ implica que $\Phi(g) \cap U \neq \emptyset$, para todo g próximo de f . Da mesma maneira, dizemos que Φ é *superiormente semicontínua* em $f \in \mathcal{X}$ se, para cada conjunto compacto $K \subset M$, se tem que $\Phi(f) \cap K = \emptyset$ implica que $\Phi(g) \cap K = \emptyset$, para todo g próximo de f . Dizemos que Φ é *inferiormente semicontínua* se ela é inferiormente semicontínua em todo $f \in \mathcal{X}$.

3.1.1 Lema. ([3, p. 71]) *Se $\Phi : \mathcal{X} \rightarrow \mathcal{P}_c(M)$ é uma função inferiormente semicontínua então existe um subconjunto residual de \mathcal{X} onde Φ é também superiormente semicontínua.*

Uma função que seja semicontínua superiormente e inferiormente em um determinado ponto é contínua nesse ponto. De fato, provaremos esse resultado a seguir:

3.1.2 Lema. *Seja ϕ uma função que seja ao mesmo tempo semicontínua inferiormente e superiormente em f . Então ϕ é contínua em f .*

Prova: Primeiramente vamos provar que para todo ϵ maior que 0 existe um δ_1 maior que 0 de modo que:

$$g \in B_{\delta_1}(f) \Rightarrow B_\epsilon(\phi(f))$$

De fato, como M é compacta e $B_\epsilon(\phi(f))$ é aberto temos que $(B_\epsilon(\phi(f)))^C$ é compacto. Por definição temos que

$$\phi(f) \cap (B_\epsilon(\phi(f)))^C = \emptyset$$

O que implica que

$$\phi(g) \cap (B_\epsilon(\phi(f)))^C = \emptyset$$

para g suficientemente próximo de f , pois ϕ é superiormente semicontínua, o que prova o que desejávamos. Resta provar que existe $\delta_2 > 0$ tal que

$$g \in B_{\delta_2}(f) \Rightarrow \phi(f) \subset B_\epsilon(g)$$

Seja $p \in \phi(f)$. Obviamente temos que

$$B_\epsilon(p) \cap \phi(f) \neq \emptyset$$

Pela semicontinuidade inferior de ϕ em f temos que

$$\phi(g) \cap B_\epsilon(p) \neq \emptyset$$

Agora a única maneira de nosso resultado não ser verdadeiro é se existir uma sequência de pontos (p_n) , com $p_n \in \phi(f)$ para todo n e uma sequência de funções g_n de modo que :

$$d(f, g) < \frac{1}{n} \Rightarrow B_\epsilon(p_n) \cap \phi(g) \neq \emptyset$$

mas

$$d(f, g_n) > \frac{2}{n}$$

e $B_\epsilon(p_n) \cap \phi(g_n) = \emptyset$.

Mas nesse caso, passando uma subsequência se necessário, teríamos que $p_n \rightarrow p$ e $p \in \phi(f)$ pois $\phi(f)$ é compacto. Obviamente teríamos que

$$B_\epsilon(p) \cap \phi(f) \neq \emptyset.$$

Mas também seria verdade que para todo $\delta > 0$ existiria g com

$$d(f, g) < \delta$$

$$\text{e } B_\epsilon(p) \cap \phi(g) = \emptyset$$

o que contraria a continuidade inferior de ϕ .

Portanto tomando $\delta = \min\{\delta_1, \delta_2\}$ temos que $d(f, g) < \delta$ implica $d(\phi(f), \phi(g)) < \epsilon$, o que termina a prova da continuidade de ϕ em f .

3.2 Teorema de Zehnder

Apresentaremos aqui um teorema provado inicialmente por Zehnder em [10], enunciado a seguir.

3.2.1 Teorema (Teorema de Zehnder). *Considere o conjunto $T \subset \text{Diff}_\omega^r(M)$ para o qual a origem é um ponto periódico elíptico, sendo M uma variedade de dimensão 2. Existe um subconjunto residual $\mathcal{R} \subset T$ tal que qualquer vizinhança da origem possui pontos homoclínicos transversais.*

3.2.2 Definição. S_0 é o conjunto dos symplectomorfismos analíticos, definidos em uma vizinhança da origem em \mathbb{R}^2 e para os quais a origem seja um ponto fixo elíptico.

Em [10] o teorema anterior é apresentado como corolário do seguinte teorema:

3.2.3 Teorema. *Existe um subconjunto residual $\mathcal{B} \subset S_0$ tal que se $f \in \mathcal{B}$ então toda vizinhança da origem possui pontos homoclínicos transversais.*

O Teorema enunciado acima é uma versão do teorema de Zehnder para funções analíticas. Vamos usá-lo para provar o teorema de Zehnder. Mas antes vamos

apresentar alguns conceitos importantes para a compreensão do teorema de Zehnder assim como de sua demonstração:

Agora vamos considerar o conjunto dos difeomorfismos simpléticos, analíticos definidos em uma vizinhança de um ponto periódico elíptico em \mathbb{R}^2 . Por conveniência vamos supor que o ponto periódico elíptico seja a origem. Vamos chamar esse conjunto de S_0 . Todo $f \in S_0$ pode ser expresso como:

$$f = (Df)_0 \circ \hat{f}$$

com

$$\hat{f} : (x, y) \rightarrow (\xi, \eta) = (x + O_2, y + O_2)$$

A função O_2 acima é uma função que se anula na origem, assim como sua derivada primeira. Como \hat{f} preserva uma forma simplética, temos que

$$\begin{vmatrix} \frac{\partial \xi}{\partial x} & \frac{\partial \xi}{\partial y} \\ \frac{\partial \eta}{\partial x} & \frac{\partial \eta}{\partial y} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 + \frac{\partial O_2}{\partial x} & \frac{\partial O_2}{\partial y} \\ \frac{\partial O_2}{\partial x} & 1 + \frac{\partial O_2}{\partial y} \end{vmatrix} = 1$$

O que por sua vez implica que

$$\frac{\partial O_2}{\partial x} + \frac{\partial O_2}{\partial y} = 0$$

Agora usando o teorema da função inversa, para expressar ξ e y em função de x e η , e a equação acima podemos encontrar uma função geradora u tal que :

$$\xi = x + u_2(x, \eta)$$

$$y = \eta + u_1(x, \eta)$$

onde $u(0) = 0$ e u_1 e u_2 são as derivadas parciais de u relativas a x e a η respectivamente.

Temos que u é analítica em uma vizinhança da origem e que $u(x, \eta) = \sum_{i+k \geq 3} u_{ik} x^i \eta^k$.

Chamemos de G_0 o conjunto dessas funções geradoras. Definimos também os conjuntos $G_{0k} \subset G_0$ como

$$G_{0K} = \{u \in G_0; |u_{ik}| < K^{k+i, k+i \geq 3}\}$$

Agora vamos definir a topologia para o conjunto G_0 . Considere as seminormas $p_{ik}(\cdot)$ em G_0 definidas pelos coeficientes da expansão de Taylor em 0

$$p_{ik} = |u_{ik}|$$

Para determinada sequência $(\epsilon)_{ik}$, definimos uma bola com raio $(\epsilon)_{ik}$ e centro em u como sendo:

$$B(u, (\epsilon)_{ik}) = \{v \in G_0; p_{ik}(u - v) < \epsilon_{ik}, k + i \geq 3\}$$

onde $\epsilon_{ik} > 0$ para todo $i, k \in \mathbb{N}$.

No conjunto G_{0K} utilizamos a topologia gerada por essas bolas abertas. Considerando os conjuntos G_{0K} com a topologia definida anteriormente e $Diff_{\omega}^r(D_k)$, onde D_k é o disco de raio $(2K)^{-1}$, com a topologia C^r , a aplicação $i_n : G_{0K} \rightarrow Diff_{\omega}^r(D_k)$, que nada mais é que a aplicação identidade, é contínua. Vamos usar esse resultado para provar o teorema de Zehnder, o que faremos em seguida

Prova do Teorema de Zehnder

Seja $N_s \subset T$ o subconjunto de T para o qual o disco de raio s^{-1} possui um ponto homoclínico transversal. Provaremos que N_s é aberto e denso em T . A prova de que N_s é aberto é relativamente simples. Tomando $f \in N_s$ temos que se $\|f - g\|_r$ é suficientemente pequeno então g também possui um ponto homocínico no disco de raio s^{-1} , pois as variedades estável e instável variam continuamente com a função.

Para provar que N_s é denso, vamos tomar uma função $f \in T$ e provar que existe uma função $g \in N_s$ que esteja ϵ próxima de f na topologia C^r . Primeiramente considere u_0 a função geradora de f . Pelo teorema de Stone-Weistrass, podemos

encontrar um polinômio p de modo que $\|u_0 - p\|_{C^{r+1}(\bar{D})} < \frac{\epsilon}{2}$ onde D é um disco centrado na origem com raio $\frac{1}{2K}$; de modo que p também é função geradora de um difeomorfismo local no qual a origem é um ponto fixo elíptico. Em seguida extendemos a função p para fora do círculo D da seguinte maneira: seja $\eta \in C(D)$ a função bump tal que $\eta = 1$ dentro do disco de raio $\frac{1}{4K}$ e zero fora do disco de raio $\frac{1}{3K}$. Em seguida aplicamos o lema 3.2.3 em p , para encontrar uma função geradora u tal que $\|u - p\|_{C^{r+1}(D)} < a^{-1}\frac{\epsilon}{2}$; onde $a = \|\eta\|_{C^{r+1}(D)}$ e a função g gerada por u possui um ponto fixo quase elíptico na origem e em qualquer vizinhança da origem possui pontos homoclínicos transversais.

Em seguida tomamos $w = \eta(u - p) + p$, de modo que $w = u$ no círculo de raio $\frac{1}{4K}$ e centro na origem e $w = p$ fora do círculo de centro na origem e raio $\frac{1}{3K}$. Assim temos:

$$\|w - u_0\|_{C^{r+1}(D)} \leq \|u_0 - p\|_{C^{r+1}(D)} + \|p - w\|_{C^{r+1}(D)} \leq \frac{\epsilon}{2} \|\eta(u - p)\|_{C^{r+1}(D)} \leq \epsilon$$

Isso significa que a função g gerada por u está ϵ próxima de f na topologia C^r , já que suas funções geradoras estão ϵ próximas na topologia C^{r+1} . Lembrando que $w = u$ no disco de raio $\frac{1}{4K}$ em torno da origem. Provamos então que os conjuntos N_s são abertos e densos em T , do que o conjunto $N_H = \bigcap_{s \in \mathbb{N}} N_s$ é residual em T , como queríamos demonstrar. Observação importante: a inclusão $i_n : G_{0K} \rightarrow \text{Diff}_\omega^r(D_k)$ é contínua, o que nos garante que funções analíticas suficientemente próximas na topologia usada por Zehnder também serão próximas na topologia C^r . \square

3.3 Teorema de Newhouse

Agora vamos apresentar o resultado principal dessa dissertação:

3.3.1 Proposição (Newhouse). *Existe um conjunto residual $\mathcal{B} \subset \text{Diff}_\omega^r(M)$, onde $1 \leq r \leq \infty$, de modo que se $f \in \mathcal{B}$ então todo ponto periódico quase elíptico de f é limite de pontos homoclínicos transversais de f*

Primeiramente vamos definir a função $Q : Diff_\omega^r(M) \rightarrow \mathcal{P}_c(M)$.

3.3.2 Definição. Para cada função $f \in Diff_\omega^r(M)$ definimos $Q(f)$ como o fecho do conjunto de pontos periódicos quase elípticos de f que são aproximados por pontos homoclínicos transversais.

A função Q possui uma característica que nos será muito útil posteriormente e que provaremos a seguir:

3.3.3 Lema. A função $Q : Diff_\omega^r(M) \rightarrow \mathcal{P}_c(M)$ que definimos anteriormente é semi contínua inferiormente.

Prova do lema 3.3.3

Tome $U \subset M$ aberto e $f \in Diff_\omega^r(M)$ tal que $Q(f) \cap U \neq \emptyset$. Já sabemos que existe uma vizinhança V de $Diff_\omega^r(M)$ tal que se $g \in V$ então existe $p(g) \in U$ ponto periódico quase elíptico de g . Por outro lado, se $p(f) \in Q(f) \cap U$, com $p(f)$ ponto periódico quase elíptico de f , usamos o lema da perturbação 1.5.1 para produzir uma perturbação H tão pequena quanto se quiser de modo que H seja um difeomorfismo que preserve ω e $H(p(f)) = p(g)$. Consider agora a função $\hat{g} = H^{-1} \circ g \circ H$. Temos que \hat{g} está tão próxima de f quanto quisermos e que $p(f)$ é ponto periódico quase elíptico tanto de f quanto de \hat{g} . Tomando \hat{g} suficientemente próxima de f , podemos garantir que $p(f) \in Q(\hat{g})$. Mas como \hat{g} é conjugada à g e a função H é tão próxima à identidade quanto se quiser, temos que H preserva os pontos homoclínicos transversais de f ; o que nos permite concluir que $p(g) \in Q(g)$. Assim, para g suficientemente próxima de f , conseguimos produzir um ponto periódico quase elíptico $p(g)$ tão próximo quanto se queira de $p(f)$, que é acumulado por pontos homoclínicos transversais de g , o que prova a semicontinuidade inferior de Q . \square

Por ser Q uma função semicontínua inferiormente, temos que Q existe um subconjunto residual $\mathcal{B} \subset Diff_\omega^r(M)$ tal que Q restrita a \mathcal{B} é contínua. Provaremos que esse conjunto \mathcal{B} está contido no conjunto de difeomorfismos simpléticos de M em M para os quais todo ponto periódico quase elíptico é limite de pontos homoclínicos transversais.

Para provar o teorema 3.3.1 vamos provar um lema importante que será enunciado em seguida:

3.3.4 Proposição. *Seja p um ponto periódico quase elíptico de uma função $f \in \text{Diff}_\omega^r(M)$, \mathbb{U} uma vizinhança de f em $\text{Diff}_\omega^r(M)$ e U uma vizinhança de p em M . Então existe uma função $g \in \mathbb{U}$ tal que p seja um ponto quase elíptico de g e g tenha um ponto homoclínico transversal em U .*

Assumindo que p é um ponto de M com $f^\tau(p) = p$ e $f^k(p) \neq p$ para k entre 0 e $\tau - 1$. Temos também que $T_pM = E^c \oplus E^u \oplus E^s$ a decomposição em soma direta de T_pM de modo que $Df(p)$ restrita a E^c possui apenas autovalores de norma 1; $Df(p)$ restrita a E^u possui apenas autovalores de norma maior que 1 e $Df(p)$ restrita a E^s possui apenas autovalores de norma menor que 1. Se denominarmos $c = \dim E^c$, $s = \dim E^s$ e $u = \dim E^u$, temos que $u = s$ (pois se λ é autovalor de T_pM , λ^{-1} também é) e c é par. Chamaremos os autovalores de $Df(p)$ que possuem norma maior que um e os com norma um e parte real positiva, de autovalores principais. Após perturbar f usando o lema de perturbação, podemos supor que f é C^∞ e os autovalores de $T_p f$ são multiplicativamente independentes por inteiros. Sendo $k = c/2$ e tomando r maior que 0 fixo, existe uma vizinhança U_1 de p em M e coordenadas simpléticas $\phi : U_1 \rightarrow \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^k \times \mathbb{R}^u \times \mathbb{R}^s$ com

$$\phi(z) = (x_1(z), \dots, x_k(z), y_1(z), \dots, y_k(z), x_{k+1}(z), \dots, x_{k+u}(z), y_{k+1}(z), \dots, y_{k+u}(z))$$

O Teorema de Darboux garante que existe uma parametrização ϕ_1 de M tal que $\phi_1^* \omega = (\sum_{i=1}^{k+u} dx_i \wedge dy_i)$ e $\phi(p) = (0, 0, 0, 0)$. Por outro lado, como consequência do teorema da variedade centro estável, existe uma vizinhança U e uma parametrização ϕ_2 dessa vizinhança tal que:

se $v_1 = (x_1, \dots, x_k, y_1, \dots, y_k)$; $v_2 = (x_{k+1}, \dots, x_{k+u})$ e $v_3 = (y_{k+1}, \dots, y_{k+u})$ e temos

$$\phi_2 f \phi_2^{-1}(v_1, v_2, v_3) = (f_1(v_1, v_2, v_3), f_2(v_1, v_2, v_3), f_3(v_1, v_2, v_3)),$$

$$\text{com } f_2(v_1, 0, 0) = 0, f_3(v_1, 0, 0) = 0$$

Uma questão importante é se podemos encontrar uma parametrização que reúna essas duas propriedades. Provaremos a seguir que tal parametrização existe.

3.3.5 Lema. *Sejam $f \in \text{Diff}_\omega^r(M)$, p um ponto periódico quase elíptico de f e M como definimos anteriormente. Então $\omega|_{W^c(f,p)}$ é uma forma simplética. Ou seja, ω restrita a $W^c(f,p)$ é não degenerada.*

Prova do lema 3.3.5

Seja $p_0 \in W^c(f,p)$ e $v \in T_{p_0}W^c(f,p)$ tal que para qualquer vetor $w \in T_{p_0}W^c(f,p)$ temos $\omega_{p_0}(v, w) = 0$.

Primeiramente provaremos que $\omega_{p_0}(v, w_s) = 0$ para qualquer $w_s \in T_{p_0}W^c(f,p)$. Observe que:

$$\omega_{f^n(p_0)}(Df^n(p_0).v, Df^n(p_0).w_s) \rightarrow 0$$

quando $n \rightarrow \infty$, pois $\|Df^n(p_0).w_s\|$ tende a 0 enquanto $\|Df^n(p_0).v\|$ não explode; quando $n \rightarrow \infty$. Assim, como f preserva a forma simplética ω concluímos que $\omega_{p_0}(v, w_s) = 0$.

Para provar que $\omega_{p_0}(v, w_u) = 0$ para qualquer $w_u \in W^u(f,p)$, basta substituir f por f^{-1} na demonstração anterior. Agora usamos o fato de que para uma vizinhança U suficientemente pequena de p é verdade que para todo $p_0 \in U$ temos

$$T_{p_0}M = T_{p_0}W^c(f,p) \oplus T_{p_0}W^s(f,p) \oplus T_{p_0}W^u(f,p).$$

Portanto para qualquer vetor $w \in T_{p_0}M$ temos a decomposição $w = w_c + w_s + w_u$, onde $w_i \in T_{p_0}W^i(f,p)$. Assim, concluímos que

$$\omega_{p_0}(v, w) = \omega_{p_0}(v, w_c) + \omega_{p_0}(v, w_s) + \omega_{p_0}(v, w_u) = 0$$

O que significa que $v = 0$, pois ω é não degenerada em M . Portanto, concluímos que ω restrita a $W^c(f,p)$ é não degenerada, como queríamos demonstrar. \square

Para obter uma parametrização que atenda nossos requisitos, basta aplicar o teorema de Darboux em $W^c(f, p)$ e estender essa parametrização para M .

Agora, pela forma Normal de Birkhoff em f_1 (que é $f|_{W^c(f, p)}$, Teorema 1.4.2 , podemos escolher ϕ de modo que tomando $z_i = x_i + \sqrt{-1}y_i$; $i = 1, \dots, k$ as coordenadas complexas de $R^k \times R^k$; temos $f_1(z_1, \dots, z_k, 0, \dots, 0) = (\xi_1, \dots, \xi_k, 0, \dots, 0) + h(z_1, \dots, z_k, 0, \dots, 0)$ onde $\xi_i = z_i e^{\sqrt{-1}L}$; com

$$L = L(z_1, \dots, z_k) = \sum_{i_1, \dots, i_k \geq 0; |i| \leq r} a_{i_1 \dots i_k} |z_1|^{2i_1} \dots |z_k|^{2i_k}$$
 e as primeiras k derivadas parciais de h relativas a z_1, \dots, z_k se anulam na origem, pois h possui apenas termos de ordem superior a k . Por isso, podemos afirmar que L é uma função polinomial nas variáveis $|z_1|^2 \dots |z_k|^2$ com a aplicação $g_1(z_1, \dots, z_k, 0, \dots, 0) = (z_1 e^{\sqrt{-1}L}, \dots, z_k e^{\sqrt{-1}L})$ sendo o r -jato de $f_1(z_1, \dots, z_k, 0, \dots, 0)$ em $z_1 = \dots = z_k = 0$.

Portanto g_1 restrito a $R^k \times R^k \times (0, 0)$ é C^r próximo a $f_1|_{R^k \times R^k}(0, 0)$ em uma pequena vizinhança V de $(0, 0, 0, 0)$ com $V \subset \text{int}\phi(U_1)$. O que faremos é perturbar f_1 para seu r -jato g_1 . Usando o lema de perturbação encontramos um difeomorfismo $g \in \text{Diff}_\omega^r(M)$ que seja C^r próximo a f_1 de forma que $\phi g \phi^{-1}|_{V \times \{0\} \times \{0\}} = g_1|_V$ e que $\phi g \phi^{-1}(z) = f_1(z)$ para qualquer z fora de uma pequena vizinhança V . Note que a perturbação pode ser tão pequena quanto quisermos se escolhermos a vizinhança V suficientemente pequena.

Agora vamos definir as subvariedades $T_1, \dots, T_k \subset W^c(f, p)$ como T_i sendo a imagem da aplicação $g_1(0, 0, \dots, z_i, 0, 0, \dots, 0)$. Observe que pela Forma Normal de Birkhoff, essas variedades são g_1 -invariantes, o que implica que são subvariedades simpléticas de $W^c(f, p)$, uma vez que já provamos que $W^c(f, p)$ é uma variedade simplética. Essas subvariedades, que chamaremos de T_1, \dots, T_k estão próximas de p .

Prova do lema 3.3.4 O que faremos a seguir é usar o Teorema de Zehnder para produzir um ponto periódico hiperbólico com interseção homoclínica transversal em qualquer vizinhança de p . Em primeiro lugar, observe que p é um ponto periódico elíptico para $g|_{T_1} = g_1|_{T_1}$ e que $g|_{T_1}$ preserva a forma simplética ω . Assim pelo teorema de Zehnder, podemos escolher h_1 próxima a g_1 de modo que teremos um ponto periódico hiperbólico p_1 de $h_1|_{T_1}$ próximo de p e que p_1 possui pontos homoclínicos transversais para $h_1|_{T_1}$ em $T_1 \cup U$. Em seguida, extendemos h_1 para uma

aplicação $h \in Diff_\omega^r(M)$ e para a qual p_1 seja um ponto periódico de h sejam de dimensão estritamente maior que os de p (para g). Se p_1 for um ponto periódico hiperbólico, não resta mais nada a provar. Caso contrário, procedemos de maneira similar em p_1 perturbando g para g_2 tendo um ponto periódico p_2 cujos autoespaços hiperbólicos possuem dimensão estritamente maior que os de p_1 e cujas variedades estável e instável possuem interseção transversal. Continuando esse processo por indução, obtemos o resultado desejado, tendo provado o lema 3.3.4. \square

Agora vamos usar o lema para provar o Teorema 3.3.1. O que vamos provar é que se uma função f possui um ponto periódico quase elíptico que não é aproximado por pontos homoclínicos transversais, então f não é um ponto de continuidade da função Q . Seja p um ponto periódico quase elíptico de f que não é aproximado por pontos homoclínicos transversais. Dado um valor de ϵ qualquer vamos produzir uma função g de forma que $\|f - g\|_r < \epsilon$ e $p \in Q(g)$. De fato, vamos usar o 3.3.4 para produzir uma sequência de funções g_n de modo que $\|f - g_1\|_r < \epsilon/2$, $\|g_n - g_{n-1}\|_r < \epsilon/2^n$, p é ponto periódico quase elíptico de g_n e g_n possui um ponto homoclínico transversal q_n de forma que $d(q_n, p) < 1/2^n$. Além disso pedimos que q_1, \dots, q_{n-1} sejam também pontos homoclínicos transversais de g_n . É óbvio que $g_n \rightarrow g$, $\|f - g\|_r < \epsilon$ e $p \in Q(g)$. Assim concluímos que f não é um ponto de continuidade de Q e que \mathcal{B} está contido no conjunto das funções de $Diff_\omega^r(M)$ para as quais todo ponto periódico quase elíptico é aproximado por pontos homoclínicos transversais, como queríamos demonstrar.

Referências Bibliográficas

- [1] A. C. da Silva. *Introduction to Symplectic and Hamiltonian Geometry*. IMPA, Rio de Janeiro, 2008.
- [2] M. Hirsch. *Differential Topology*. Springer–Verlag, New York, 1976.
- [3] K. Kuratowski. *Topology*, volume 2. Academic Press and PWN–Polish Scientific Publishers, 1968.
- [4] S. Newhouse. Quasi-elliptic periodic points in conservative dynamical systems. *Amer. J. Math.*, 99:1061–1087, 1977.
- [5] S. Newhouse. Topics in conservative systems. In *Regular and Chaotic Motions in Dynamic Systems*. Plenum Press, New York, 1985.
- [6] F. Oliveira. On the generic existence of homoclinic points. *Ergodic Theory and Dynamical Systems*, 7:567–595, 1987.
- [7] C. G. Ragazzo, M. J. D. Carneiro, and S. A. Zanata. *Introdução à Dinâmica de Aplicações do Tipo Twist*. IMPA, Rio de Janeiro, 2005.
- [8] C. Robinson. Generic properties of conservative systems I. *Amer. J. Math.*, 92:562–603, 1970.
- [9] C. Robinson. *Dynamical Systems*. CRC Press, 1999.
- [10] E. Zehnder. Homoclinic points near elliptic fixed points. *Commun. Pure Appl. Math.*, 26:131–182, 1973.