Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Pós-graduação em Matemática

Tese de Doutorado

Transitividade do Fecho de Variedades Invariantes para Sistemas Conservativos

por

Fábio Corrêa de Castro

Orientador: Prof. Fernando Figueiredo de Oliveira Filho

Belo Horizonte
Novembro de 2012

Transitividade do Fecho de Variedades Invariantes para Sistemas Conservativos

Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Pós-graduação em Matemática

Transitividade do Fecho de Variedades Invariantes para Sistemas Conservativos

por

Fábio Corrêa de Castro
faccast@yahoo.com.br

Sob a orientação do Professor

Fernando Figueiredo de Oliveira Filho
fernando@mat.ufmg.br

Tese apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática da UFMG como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática.

Banca Examinadora:

Prof. Fernando Figueiredo de Oliveira Filho - UFMG (Presidente)
Prof. Carlos Augusto Arteaga Mena - UFMG
Prof. Mário Jorge Dias Carneiro - UFMG
Prof. Rafael Oswaldo Ruggiero Rodriguez - PUC-Rio
Prof. Sebastião Marcos Antunes Firmo - UFF

Belo Horizonte
Novembro de 2012

Dedicatória

Aos meus amores:
"Dholly" (irmã), Bárbara (mãe), "Kiria" (esposa),
Dulce (mãe minha), D. Ana, D. Hermínea.

Aos meus Mestres:
Mãe Bárbara B. Corrêa (São Miguel do Guamá-PA- 1980)
Prof^{a}. Elizabeth "House" de Souza (E.E. Cônego Leitão-PA-1991)
Prof. "Ravengar" (E.E. Cônego Leitão-PA-1994)
Prof. Valdomiro Neves Lima (UFRRJ-RJ-1999)
Prof. Sebastião Firmo (UFF-RJ-2005)
Prof. Fernando Oliveira (UFMG-MG-2009)

Dedico.

Agradecimentos

Certamente, uma enumeração de todos que estiveram comigo, me ajudaram e me dão o prazer das memórias que carrego (minha maior riqueza), tomaria dezenas de páginas deste trabalho.

Porém, quero dizer que
agradeço os sorrisos e abraços sinceros que compartilhamos;
agradeço os sacrifícios que certamente não chegaram a mim;
agradeço o carinho com que me receberam em suas vidas;
agradeço os cafés, almoços e jantares maravilhosos;
agradeço a torcida para que tudo acabasse bem;
agradeço os conselhos e as preocupações;
agradeço os convites para inúmeros momentos legais e inesquecíveis.

Ao meu orientador e grande amigo Fernando, além de tudo que foi dito acima, agradeço as inúmeras horas de debates em sua casa, na padaria, nos restaurantes, ao telefone, por e-mail, `\dots`, e as inúmeras histórias entre um teorema e outro. Enfim, por me mostrar como dividir o tempo em um subconjunto residual de Histórias Matemáticas e um subconjunto denso de Lemas e Corolários da Vida, e vice-versa.

Sou muito grato aos Professores Mário Jorge, Carlos Arteaga, Rafael Ruggiero e Sebastião Firmo, pela gentileza de comporem a Banca, pelas críticas e sugestões que muito enriqueceram este trabalho.

Muito obrigado!

Ajude,
a Terra está
morrendo!

Resumo

O principal objetivo deste trabalho é provar que para campos que preservam volume e para Hamiltonianos, C^r-genericamente, os fechos das variedades invariantes são conjuntos transitivos por cadeia.

Palavras-chave: Genericidade; Campos que preservam volume; Teoria de Conley; Transitividade por Cadeia; Hamiltonianos; Variedades Invariantes.

Abstract

The goal of this work is to prove that for volume preserving flows and for Hamiltonians, C^r-generically, the closure of all invariant manifolds are chain transitive sets.

Keywords: Genericity; Volume Preserve flows; Conley's Theory; Chain transitive; Hamiltonians; Invariant Manifolds.

Sumário

Introdução

Sejam (M,d) um espaço métrico compacto e $f : M \to M$ um homeomorfismo. Um subconjunto invariante $A \subset M$ é dito *transitivo por cadeia* se para todo $\epsilon > 0$ existe uma ϵ-cadeia de um ponto x qualquer em A até outro ponto y qualquer de A; ou seja, existe uma sequência finita $[x_0 = x, x_1, \ldots, x_n = y]$ de pontos em A tal que $d(f(x_i), x_{i+1}) < \epsilon$, para todo $0 \leq i \leq n-1$.

Em 2002, F. Oliveira ([6], p.928) provou que para difeomorfismos simpléticos ou que preservam volume em uma variedade compacta, C^r-genericamente, $1 \leq r \leq \infty$, o fecho de cada variedade invariante de um ponto periódico hiperbólico é transitivo por cadeia. O mesmo problema ficou em aberto para campos que preservam volume e para Hamiltonianos.

O que faremos aqui é provar que o resultado anterior também é verdadeiro para campos que preservam volume e para os Hamiltonianos, em uma variedade compacta, sem bordo, orientável e dimensão maior do que ou igual a três.

Mais precisamente, para se entender melhor o problema para campos, considere (M,d) um espaço métrico compacto conexo e ϕ_t um fluxo em M. Dados $p, q \in M$, uma (ϵ, t)-cadeia de p até q, onde ϵ e t são números reais positivos, é uma sequência finita $[p = x_0, x_1, \ldots, x_n = q]$ de pontos de M tal que, para cada $i \in \{0, \ldots, n-1\}$, existe $t_i \geq t$ satisfazendo $d(\phi_{t_i}(x_i), x_{i+1}) < \epsilon$; ou seja, podemos partir de um elemento x_i da sequência caminhando em sua órbita e para um tempo $t_i > t$ chegamos ϵ-próximo de x_{i+1}. Um subconjunto $A \subset M$ invariante pelo fluxo ϕ_t é dito *transitivo por cadeia* se existe uma (ϵ, t)-cadeia em A de p até q, quaisquer que sejam $p, q \in A$, $\epsilon > 0$ e $t > 0$. No caso em que M é uma variedade compacta e X é um campo de vetores tangentes de M, um subconjunto invariante $A \subset M$ é dito transitivo por cadeia se o é pelo fluxo de X. Nestes termos, no Capítulo 1 obtemos o seguinte resultado:

Teorema A. *Para campos que preservam volume em uma variedade compacta, sem bordo, orientável e dimensão maior do que ou igual a 3, C^r-genericamente, $1 \leq r \leq \infty$, os fechos das variedades invariantes das singularidades hiperbólicas, ou das órbitas periódicas hiperbólicas, são conjuntos transitivos por cadeia.*

O Teorema A nos diz que, genericamente, com grandes "passos" (longo tempo) em órbitas de um fluxo e com pequenos desvios (pequenas mudanças de órbitas), pode-se "andar" de um ponto qualquer a outro qualquer, do fecho de uma variedade invariante. Com isto, genericamente, toda Função de Lyapunov Completa cujo domínio é o fecho de uma variedade invariante, é identicamente constante. Uma consequência é que estes fechos, mesmo tendo medida nula, não possuem atratores ou repulsores (salvo os triviais).

As dificuldades para passar do caso discreto para o contínuo reside em superar duas barreiras: trivializar um campo conservativo por meio de um sistemas de coordenadas, juntamente com a forma de volume preservada pelo campo; e exibir perturbações locais e conservativas para estes campos. Para o caso dos Campos Hamiltonianos, é sabido a existência de sistemas de coordenadas simpléticas que trivializam o campo; porém, isto é compensado com uma maior dificuldade para se criar perturbações locais destes campos. No caso de Campos Conservativos (não necessariamente Hamiltonianos), a construção de perturbações conservativas não é tão difícil quanto o caso dos Hamiltonianos, porém, não é conhecido a existência de um sistema de coordenadas que trivializa o campo e a forma de volume. Uma dessas barreiras foi vencida com a criação e demonstração simples da seguinte ferramenta:

(Fluxo Tubular Conservativo) *Sejam $X \in \mathcal{X}^\infty(M^n)$, ω uma forma de volume em M^n, e $a \in M^n$ um ponto regular pelo campo X. Se X preserva ω, então existe uma parametrização de classe C^∞ $\phi : U \to M^n$ em torno de $a \in \phi(U)$ tal que:*

1. $\phi^* X \equiv (0, \dots, 0, 1)$;

2. $\phi^* \omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$.

Como ferramenta para a prova do Teorema A, provaremos inicialmente o seguinte resultado: considere M^d uma d-variedade suave compacta orientável sem bordo e $\mathcal{X}^r_{vol}(M^d)$ o conjunto dos campos vetoriais de classe C^r em M^d que preservam volume (Medida de Lebesgue).

Teorema B. *Para $d \geq 3$ e $1 \leq r \leq \infty$, o conjunto $\mathcal{X}^r_{vol}(M^d)$ contém um subconjunto residual $\mathcal{R}$ tal que se γ é um elemento crítico (singularidade ou órbita fechada) hiperbólico de $X \in \mathcal{R}$, então a variedade instável de γ contém um subconjunto denso de pontos $\omega-$recorrentes, e a variedade estável de γ contém um subconjunto denso de pontos $\alpha-$recorrentes.*

O Teorema B nos garante também que genericamente a estrutura geométrica dessas variedades é complexa devido a autoacumulação.

Em 1978, Robinson ([9]) provou que para $d \geq 4$, C^r-genericamente todos os elementos críticos (singularidades e órbitas periódicas) de campos conservativos são hiperbólicos. Com isso, podemos dizer que em dimensão maior do que três, genericamente todas as singularidades e órbitas periódicas de um campo conservativo são hiperbólicas e suas variedades invariantes (estáveis e instáveis) tem as propriedades anunciadas nos Teoremas A e B. Em dimensão três o que podemos dizer é que genericamente os elementos críticos são elípticos ou hiperbólicos, e as variedades invariantes dos elementos hiperbólicos tem as propriedades anunciadas nos Teoremas A e B.

No Capítulo 2 tratamos de Campos Hamiltonianos, onde obtemos o seguinte resultado:

Teorema A'. *Para campos hamiltonianos em uma variedade compacta, sem bordo, orientável e dimensão par maior do que ou igual a 4, C^r-genericamente, $1 \leq r \leq \infty$, os fechos das variedades invariantes das singularidades hiperbólicas, são conjuntos transitivos por cadeia.*

Como ferramenta para a prova do Teorema A', provaremos o seguinte: considere M uma $2n$-variedade simplética, e $\mathcal{X}^r_H(M) = \{C^r \text{ campos hamiltonianos em } M\}$. Com isso,

Teorema B'. *Para $2d \geq 4$ e $1 \leq r \leq \infty$, o conjunto $\mathcal{X}^r_H(M^{2d})$ contém um subconjunto residual $\mathcal{R}$ tal que se a é uma singularidade hiperbólica de $X \in \mathcal{R}$, então a variedade instável de a contém um subconjunto denso de pontos $\omega-$recorrentes, e a variedade estável de a contém um subconjunto denso de pontos $\alpha-$recorrentes.*

No Apêndice A é feito um resumo da Teoria de Conley, com foco na linguagem de Espaços Métricos, complementando a terceira seção do Capítulo 1.

No Apêndice B, veremos que em dimensão dois os Teoremas A e A' não são verdadeiros. Nele também faremos a classificação das variedades invariantes quanto a transitividade por cadeia, em superfícies orientáveis.

O Apêndice C contém uma perturbação mais geral do que a apresentada no Capítulo 1, cuja prova contém as ideias de como obter o fluxo do campo resultante.

Capítulo 1

Campos Conservativos

Neste capítulo construiremos a maioria da notação usada ao longo deste trabalho, apresentaremos um resumo dos conceitos básicos necessários para o entendimento dos Teoremas A e B, e faremos as demonstrações destes teoremas.

1.1 Conceitos e Notações

A norma euclidiana em $\mathbb{R}^n$ será denotada $\|.\|$, ou seja,

$$\|(x_1, \ldots, x_n)\| = \sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2}.$$

No texto, M^d (ou simplesmente M) denotará uma d-variedade suave compacta orientável sem bordo. Pelo Teorema do Mergulho de Whitney, podemos supor M^d contida num espaço euclidiano $\mathbb{R}^n$. Denotaremos por $\mathcal{X}^r(M^d)$ o conjunto dos campos tangentes de classe C^r em M^d, munido da topologia C^r. Denotaremos X_t o fluxo de um campo X. Um ponto $p \in M$ é dito regular se $X(p) \neq 0$; caso contrário, é chamado de singularidade.

Para cada $x \in M$, definimos

$$\omega(x) = \bigcap_{T \geq 0} \overline{\{X_t(x) \mid t \geq T\}} \quad \text{e} \quad \alpha(x) = \bigcap_{T \leq 0} \overline{\{X_t(x) \mid t \leq T\}}.$$

Um ponto $x \in M$ é dito ω-recorrente se $x \in \omega(x)$, é dito α-recorrente se $x \in \alpha(x)$, e é dito recorrente se $x \in \omega(x) \cap \alpha(x)$.

Note que x ser $\omega-$recorrente significa que existe uma sequência $0 < t_1 < t_2 < \ldots \to \infty$ tal que $\lim_{m\to\infty} X_{t_m}(x) = x$.

Sejam γ uma órbita periódica de $X \in \mathcal{X}^r(M^d)$, Σ uma seção transversal ao campo X contendo $p \in \gamma$, e Σ_p uma vizinhança conexa de p em Σ onde esteja definida a aplicação de Poincaré (de primeiro retorno) $P : \Sigma_p \to \Sigma$. O ponto $p \in \gamma$ é dito hiperbólico se é um ponto (fixo) hiperbólico da aplicação de Poincaré P; neste caso, γ é dita hiperbólica. Esta definição independe do ponto p e da seção Σ. Seja γ uma órbita periódica hiperbólica de um campo X. A variedade instável de γ é o conjunto

$$W^u(\gamma) = \{x \in M^d | \ \alpha(x) = \gamma\}.$$

Analogamente, a variedade estável de γ é o conjunto

$$W^s(\gamma) = \{x \in M^d | \ \omega(x) = \gamma\}.$$

Os conjuntos $W^u(\gamma)$ e $W^s(\gamma)$ são subvariedades conexas mergulhadas em M^d, com a mesma classe de diferenciabilidade do campo e com dimensões tais que

$$\dim W^s(\gamma) + \dim W^u(\gamma) = d + 1.$$

Se Σ_p é suficientemente pequena, então, tomando Σ_p^u como sendo a componente conexa de $\Sigma_p \cap W^u(\gamma)$ que contém p, Σ_p^u é uma subvariedade mergulhada em Σ_p, com a mesma classe de diferenciabilidade do campo e tal que $\dim \Sigma_p^u + 1 = \dim W^u(\gamma)$. Com propriedades análogas, definimos Σ_p^s como sendo a componente conexa de $\Sigma_p \cap W^s(\gamma)$ que contém p.

Tomando $D_\Sigma^u(p) = P(\Sigma_p^u) - \Sigma_p^u$ e $D_\Sigma^s(p) = \Sigma_p^s - P(\Sigma_p^s)$, temos

$$W^u(\gamma) - \gamma = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} X_t(D_\Sigma^u(p)) \tag{1.1}$$

e

$$W^s(\gamma) - \gamma = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} X_t(D_\Sigma^s(p)). \tag{1.2}$$

$D_\Sigma^u(p)$ dito um *domínio fundamental instável* e é um anel semiaberto que contém um único ponto de cada órbita de $x \in \Sigma_p^u$ pela aplicação de Poincaré; o análogo ocorre com $D_\Sigma^s(p)$, dito *domínio fundamental estável.* Como as igualdades (1.1) independem do ponto $p \in \gamma$, escrevemos $D_\Sigma^u(\gamma)$ em vez de $D_\Sigma^u(p)$, assim como $D_\Sigma^s(\gamma)$ em vez de $D_\Sigma^s(p)$.

Observação 1.1. *Note que pela identidade (1.1), se $Z \subset D^u_\Sigma(p)$ é denso em $D^u_\Sigma(p)$, então $\bigcup_{t\in\mathbb{R}} X_t(Z)$ é denso em $W^u(\gamma)$. O mesmo ocorre na versão estável.*

Observação 1.2. *É sabido a dependência de $D^u_\Sigma(\gamma)$ com a seção Σ; porém, para efeitos de simplificação escreveremos apenas $D^u(\gamma)$ em vez de $D^u_\Sigma(\gamma)$. O mesmo faremos com $D^s_\Sigma(\gamma)$.*

Seja $a \in M^d$ uma singularidade hiperbólica, ou seja, $DX(a) : TM_a \to TM_a$ não possui autovalor no eixo imaginário. Os conjuntos

$$W^u(a) = \{x \in M^d |\ \alpha(x) = a\} \text{ e } W^s(a) = \{x \in M^d |\ \omega(x) = a\}$$

são chamados de *variedade instável* e *variedade estável* de a, respectivamente. Se $V \subset M$ é uma vizinhança de a suficientemente pequena, então, sendo $W^u_V(a)$ a componente conexa de $V \cap W^u(a)$ que contém a, temos

$$W^u_V(a) = \{x \in V |\ X_t(x) \in V, \forall t \leq 0\}.$$

Analogamente define-se $W^s_V(a)$ como sendo a componente conexa de $V \cap W^s(a)$ contendo a, valendo

$$W^s_V(a) = \{x \in V |\ X_t(x) \in V, \forall t \geq 0\},$$

para V suficientemente pequena. Vale também

$$W^u(a) = \textstyle\bigcup_{t>0} X_t(W^u_V(a)) \text{ e } W^s(a) = \bigcup_{t<0} X_t(W^s_V(a)).$$

Os conjuntos $W^u_V(a)$ e $W^s_V(a)$ são chamados, respectivamente, de *variedade instável local* e *variedade estável local* de a.

Mais ainda, pela representação local em a do campo X restrito à variedade instável, tomando V suficientemente pequena e homeomorfa ao disco $D^d = \{x \in \mathbb{R}^d;\ \|x\| \leq 1\}$, temos $S^u_V(a) = \partial W^u_V(a)$ homeomorfo à esfera S^n, $n = \dim W^u(a) - 1$, e transversal ao campo X, valendo também

$$W^u(a) - \{a\} = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} X_t(S^u_V(a)). \tag{1.3}$$

Analogamente, $S^s_V(a) = \partial W^s_V(a)$ é homeomorfo à esfera S^m, $m = \dim W^s(a) - 1$, transversal ao campo X, valendo

$$W^s(a) - \{a\} = \bigcup_{t\in\mathbb{R}} X_t(S^s_V(a)). \tag{1.4}$$

Os conjuntos $S^u_V(a)$ e $S^s_V(a)$ são chamados, respectivamente, de *esfera transversal instável* e *esfera transversal estável* em torno de a.

Observação 1.3. *Note que pela identidade (1.3), se $Z \subset S_V^u(a)$ é denso em $S_V^u(a)$, então $\bigcup_{t\in\mathbb{R}} X_t(Z)$ é denso em $W^u(a)$. O mesmo ocorre na versão estável.*

Observação 1.4. *Como é sabido a dependência de $S_V^u(a)$ com a vizinhança V, para efeitos de simplificação escreveremos apenas $S^u(a)$ em vez de $S_V^u(a)$. O mesmo faremos com $S_V^s(a)$.*

Para estes e outros detalhes sobre esta seção, veja: Abraham&Marsden [1]; Palis&Melo [7]; Szlenk [11].

1.2 Campos Conservativos

Seja $\mathcal{L}_k(E)$ o espaço vetorial das formas k-lineares sobre o espaço vetorial E (sobre o corpo $\mathbb{R}$). O conjunto das formas k-lineares alternadas sobre E é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}_k(E)$ e será denotado $\Omega^k(E)$. Se dim $E = n$ e $1 \leq k \leq n$, então dim $\Omega^k(E) = \binom{n}{k}$; em particular, dim $\Omega^n(E) = 1$. Toda transformação linear $T : E_1 \to E_2$ induz uma aplicação (linear) $T^* : \Omega^k(E_2) \to \Omega^k(E_1)$ dada por

$$(T^*\omega_2)(v_1, \ldots, v_k) = \omega_2(Tv_1, \ldots, Tv_k),$$

para quaisquer $v_1, \ldots, v_k \in E_1$. Fixadas $\omega_1 \in \Omega^n(E_1)$ e $\omega_2 \in \Omega^n(E_2)$ não nulas, com dim $E_1 =$ dim $E_2 = n$, definimos o *determinante* da transformação linear $T : E_1 \to E_2$, segundo as n-formas alternadas ω_1 e ω_2, do seguinte modo: A transformação $T^* : \Omega^n(E_2) \to \Omega^n(E_1)$ associa ω_2 a um $\lambda\omega_1$, para algum $\lambda \in \mathbb{R}$, e com isso definimos det $T = \lambda$. Assim, por definição tem-se

$$T^*\omega_2 = (\det T) \cdot \omega_1.$$

Seja M^n uma n-variedade suave compacta orientável sem bordo. Uma *forma de volume* em M^n é uma função $\omega : M^n \to \bigcup_{p\in M^n} \Omega^n(T_pM)$ que a cada ponto p de M^n associa uma forma n-linear alternada não nula $\omega_p : T_pM \times \overset{n}{\cdots} \times T_pM \to \mathbb{R}$. A forma ω é dita *forma de classe C^r* se ω_p depende diferenciavelmente do ponto p no seguinte sentido: se $\phi : U \subset \mathbb{R}^n \to V \subset M^n$ é uma parametrização de M^n tal que $\phi(0) = p$, então a aplicação $\tilde{\omega}_\phi : U \to \mathbb{R}$ que associa cada ponto $x \in U$ ao número real $\omega_{\phi(x)}(\phi'(x)e_1, \ldots, \phi'(x)e_n)$ é de classe C^r, onde $(e_1, \ldots, e_n)$ é a base canônica de $\mathbb{R}^n$.

Dada uma forma de volume ω em M^n, podemos definir uma medida de Borel μ_ω em M^n da seguinte maneira: para cada boreliano $A \subset M^n$, seja $\phi_i : U_i \to V_i \subset M^n$,

$i \in \mathbb{N}$, uma família de parametrizações tais que $A \subset \bigcup_{i\in\mathbb{N}} \phi(U_i)$. Agora tomemos uma partição $(A_i)_{i\in\mathbb{N}}$ de A em borelianos tais que $A_i \subset \phi(U_i)$, para todo i. Para isto, basta definir $A_1 = A \cap \phi(U_1)$ e supondo definidos $A_1, \ldots, A_k$, definimos $A_{k+1} = A \cap \Big(\phi(U_{k+1}) \setminus \bigcup_{i=1}^{k} A_i\Big)$. Por fim, tomemos

$$\mu_\omega(A) = \sum_{i\in\mathbb{N}} \int_{\phi_i^{-1}(A_i)} \omega_{\phi_i(x)} \left(\phi_i'(x)e_1, \ldots, \phi_i'(x)e_n\right) dx.$$

Essa definição independe das cartas e da partição de A. As medidas obtidas desta forma diferem por um múltiplo não nulo e portanto formam uma classe de múltiplos, dita *medida de Lebesgue* que será denotada também por μ_ω.

Sejam $f : M^n \to M^n$ uma aplicação sobrejetora de classe C^r e ω uma forma de volume em M^n. Denotaremos $\det_\omega f'(x)$, o determinante de $f'(x) : T_xM^n \to T_{f(x)}M^n$ com relação as formas ω_x e $\omega_{f(x)}$. Por definição temos $f'(x)^* \cdot \omega_{f(x)} = (\det_\omega f'(x)) \cdot \omega_x$. Definimos ainda $f^*\omega$ como sendo a forma de volume dada por

$$(f^*\omega)_x = f'(x)^*\omega_{f(x)},$$

ou seja,

$$(f^*\omega)_x = \Big(\det_\omega f'(x)\Big)\omega_x. \tag{1.5}$$

Dizemos que μ_ω é uma *medida f-invariante* ou que f *preserva* μ_ω, se

$$\mu_\omega(f^{-1}(A)) = \mu_\omega(A)$$

para todo boreliano A. Uma forma de volume ω é dita *forma f-invariante* se

$$f^*\omega = \omega.$$

Se $f : M^n \to M^n$ é um difeomorfismo e $A \subset M^n$ um conjunto de Borel, então $\mu_\omega(f(A)) = \mu_{f^*\omega}(A)$. Com isso, μ_ω é f-invariante se, e somente, $|\det_\omega f'(x)| = 1$, para todo $x \in M^n$.

Sejam M uma variedade como acima, X um campo de classe C^r nesta variedade, ϕ_t o fluxo de X e ω uma forma de volume de classe C^r em M. Diz-se que X é *conservativo*, ou que *preserva volume*, se $\varphi_t : M \to M$ dada por $x \mapsto \varphi_t(x)$ preserva μ_ω, para qualquer $t \in \mathbb{R}$ fixado. Denotemos por $\mathcal{X}^r_{vol}(M)$ o conjunto dos campos em $\mathcal{X}^r(M)$ que preservam a medida de Lebesgue, munido da topologia C^r. Uma propriedade dos elementos de $\mathcal{X}^r_{vol}(M)$ é dita *genérica* se é válida para uma interseção enumerável de abertos densos em $\mathcal{X}^r_{vol}(M)$.

Para cada ponto $p \in M^n$ denotaremos $(i_X\omega)_p$ como sendo a $(n-1)$-forma alternada dada por

$$(i_X\omega)_p(v_1,\dots,v_{n-1}) = \omega_p(X(p),v_1,\dots,v_{n-1}).$$

A forma diferencial $i_X(\omega)$ é dita *produto interior* de ω por X. O produto interior satisfaz as seguintes propriedades:

(I1) $i_X(f\omega + g\theta) = f(i_X\omega) + g(i_X\theta)$;

(I2) $i_{(fX+gY)}\omega = f(i_X\omega) + g(i_Y\omega)$;

(I3) $i_X(\omega \wedge \theta) = (i_X\omega) \wedge \theta + (-1)^{\deg\omega}\omega \wedge (i_X\theta)$.

O *divergente* do campo X em relação a forma de volume ω é uma aplicação $div_\omega : M^n \to \mathbb{R}$ de classe C^{r-1} que satisfaz

$$d((i_X\omega)_p) = (div_\omega X)(p) \cdot \omega_p, \tag{1.6}$$

onde d é a derivada exterior.

A Fórmula de Liouville nos diz que se M^n, X, ω e ϕ_t são como os definidos acima, então para todo $x \in M^n$ tem-se

$$\det{}_\omega \phi'_t(x) = \exp\int_0^t (\mathrm{div}_\omega X)(\phi_s(x))ds. \tag{1.7}$$

Com isso, X preserva o volume μ_ω se, e somente se, $div_\omega X \equiv 0$.

Para estes e outros detalhes sobre esta seção, veja Abraham & Marsden [1] e Mañé [4].

1.3 Transitividade por cadeia

Nesta seção, M sempre denotará um espaço métrico compacto munido da métrica d. O Apêndice A é uma continuidade desta seção, complementando-a com mais detalhes sobre transitividade por cadeia e apresentando conceitos e fatos sobre *atratores* e *repulsores*, encerrando com o Teorema de Conley.

Definição 1.5 (Fluxo). *Um fluxo φ_t em M é uma aplicação contínua $\varphi : M \times \mathbb{R} \to M$ tal que $(x,t) \mapsto \varphi_t(x)$ e que satisfaz as seguintes condições:*

1. $\varphi_0(x) = x$, *para todo* $x \in M$;

2. $\varphi_{t+s}(x) = \varphi_t(\varphi_s(x))$, *quaisquer que sejam* $s, t \in \mathbb{R}$ *e* $x \in M$.

Observe que fixando $t \in \mathbb{R}$, a aplicação $\varphi_t : M \to M$ dada por $x \mapsto \varphi_t(x)$ é um homeomorfismo, cujo inverso é a aplicação $\varphi_{-t} : M \to M$ dada por $x \mapsto \varphi_{-t}(x)$.

Definição 1.6 (Conjunto Invariante)**.** *Um subconjunto* $A \subset M$ *é dito invariante pelo fluxo* ϕ_t *se* $\varphi_t(A) \subset A$ *para todo* $t \in \mathbb{R}$, *onde* $\varphi_t(A) = \{\varphi_t(x) |\ x \in A\}$.

Definição 1.7 (Conjuntos Limites)**.** *Para cada* $x \in M$, *denotemos*

$$\omega(x) = \bigcap_{T \geq 0} \overline{\Big(\bigcup_{t \geq T} \varphi_t(x) \Big)} \text{ e } \alpha(x) = \bigcap_{T \leq 0} \overline{\Big(\bigcup_{t \leq T} \varphi_t(x) \Big)} = \bigcap_{T \geq 0} \overline{\Big(\bigcup_{t \geq T} \varphi_{-t}(x) \Big)},$$

ditos "ω*-limite de* x*" e "*α*-limite de* x*", respectivamente.*

Observe que, por definição, os conjuntos $\omega(x)$ e $\alpha(x)$ são fechados; com isso, sendo M compacto, estes conjuntos são também compactos. Também, note que $\overline{\left(\bigcup_{t \geq T} \varphi_t(x)\right)} \subset \overline{\left(\bigcup_{t \geq S} \varphi_t(x)\right)}$ sempre que $S < T$. Com isso, $\omega(x)$ é a interseção de uma família de compactos encaixados, indexada em $[0, \infty)$. O mesmo ocorre com $\alpha(x)$.

Como estamos num espaço métrico, os conceitos "ω-limite" e "α-limite" podem ser traduzidos para a linguagem de sequências, da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \omega(x) &= \{ \lim_{n \to +\infty} \varphi_{t_n}(x) |\ 0 < t_1 < t_2 < \cdots \to +\infty \}; \\ \alpha(x) &= \{ \lim_{n \to +\infty} \varphi_{t_n}(x) |\ -\infty \leftarrow \cdots < t_2 < t_1 < 0 \}. \end{aligned}$$

Nestes termos, a continuidade do fluxo implica imediatamente que estes conjuntos são invariantes.

Definição 1.8 (Recorrência)**.** *Um ponto* $x \in M$ *é dito* ω*-recorrente se* $x \in \omega(x)$*; é dito* α*-recorrente caso* $x \in \alpha(x)$ *e é dito recorrente se* $x \in \alpha(x) \cap \omega(x)$.

A partir de agora, denotaremos por $B_r(a)$ a bola aberta com centro em $a \in M$ e raio $r > 0$, ou seja, $B_r(a) = \{x \in M |\ d(x, a) < r\}$.

Definição 1.9 ((ϵ, t)-cadeia)**.** *Dados* $p, q \in M$, *uma* (ϵ, t)*-cadeia de* p *até* q, *onde* ϵ *e* t *são números reais positivos, é uma sequência finita* $[x_0, x_1, \ldots, x_n]$ *de pontos de* M *tal que:* $x_0 = p$, $x_n = q$ *e para cada* $i \in \{0, \ldots, n-1\}$ *existe* $t_i \geq t$ *tal que* $\phi_{t_i}(x_i) \in B_\epsilon(x_{i+1})$.

Em outras palavras, *existir* uma $(\epsilon, t)-$cadeia de $p \in M$ até $q \in M$, é poder sair de p e chegar $\epsilon-$próximo de q, caminhando pelo menos um tempo t ao longo das órbitas do fluxo φ_t e saltando no máximo ϵ de uma órbita para outra. Com isso, t limita inferiormente o tempo de permanências nas órbitas e ϵ limita superiormente o tamanho do salto de uma órbita para outra.

Note que toda $(\epsilon, t)-$cadeia de p até q é também uma $(\epsilon', t')-$cadeia de p até q, sempre que $\epsilon < \epsilon'$ e $0 < t' < t$. Com isso, o interesse maior é por valores grandes para t e pequenos para ϵ.

Definição 1.10 (Transitividade por Cadeia). *Um subconjunto $A \subset M$ invariante pelo fluxo ϕ_t é dito transitivo por cadeia se existe uma (ϵ, t)-cadeia em A de p até q, quaisquer que sejam $p, q \in A$, $\epsilon > 0$ e $t > 0$.*

Definição 1.11 (ϵ-caminho). *Um ϵ-caminho de $p \in M$ até $q \in M$ é uma uma sequência finita $[\gamma_0, \ldots, \gamma_n]$ de caminhos contínuos $\gamma_i : [0,1] \to M$, $i \in \{0, \ldots, n\}$, tais que:*

1. *$\gamma_0(0) = p$ e $\gamma_n(1) \in B_\epsilon(q)$;*

2. *$\gamma_i(1) \in B_\epsilon(\gamma_{i+1}(0))$, para qualquer $i \in \{0, \ldots, n-1\}$.*

Lema 1.12. *Se M é conexo, então para qualquer $\epsilon > 0$ existe um ϵ-caminho de um ponto qualquer de M até outro qualquer.*

Demonstração. Considere a relação R em M definida da seguinte forma:

pRq significa "existe ϵ-caminho de p até q, qualquer que seja $\epsilon > 0$".

É fácil verificar que esta relação é de equivalência. Pela conexidade de M, basta provar que cada classe de equivalência é fechada pois isto implica na existência de apenas uma classe, donde segue a tese. Com efeito, fixemos um elemento qualquer $p \in M$ e seja $N_p = \{q \in M |\ pRq\}$. Se a é um ponto aderente de N_p, então dado $\epsilon > 0$, seja $q \in N_p$ tal que $d(a, q) < \epsilon/2$. Agora, note que um $(\epsilon/2)$-caminho de p até q é um ϵ-caminho de p até a. Isto conclui a prova do Lema. ∎

Teorema 1.13. *Se M é conexo e possui um subconjunto denso de pontos ω-recorrentes, então M é transitivo por cadeia. Também, se M possui um subconjunto denso de pontos α-recorrentes, então M é transitivo por cadeia.*

Demonstração. Primeiro, suponhamos que M contém um subconjunto denso de pontos ω-recorrentes. Dados $p, q \in M$, $\epsilon > 0$ e $t > 0$ quaisquer, provemos que existe uma (ϵ, t)-cadeia de p até q. Com efeito, seja $t' > t$. Pelo Lema 1.12 anterior, existe um $(\epsilon/4)$-caminho $[\gamma_0, \ldots, \gamma_n]$ de $\varphi_{t'}(p)$ até q. Consideremos o conjunto compacto $J = \bigcup_{i=0}^{n} \gamma_i([0,1])$. Da cobertura aberta $\bigcup_{x \in J} B_{\epsilon/4}(x)$ de J, tomemos uma subcobertura finita $\{B_{\epsilon/4}(x_1), \ldots, B_{\epsilon/4}(x_k)\}$. Note que J pode ser naturalmente ordenado definindo $\gamma_i(s) < \gamma_j(t)$ sempre que $i < j$, ou $i = j$ e $s < t$. Nestes termos, podemos supor $x_1 < \cdots < x_k$. Para cada $0 \leq i \leq k$, sejam $z_i \in B_{\epsilon/4}(x_i)$ recorrente e $t_i > t$ tal que $\varphi_{t_i}(z_i) \in B_{\epsilon/4}(x_i)$. Assim, é fácil verificar que $[p, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}, q]$ é uma (ϵ, t)-cadeia de p até q.

A segunda parte segue da primeira, da seguinte forma: segundo o fluxo $\psi_t = \varphi_{-t}$, por hipótese, M possui um subconjunto denso de pontos ω-recorrentes. Então, pela primeira parte, M é transitivo por cadeia segundo o fluxo ψ_t. Dados $a, b \in M$, $\epsilon > 0$ e $t > 0$, tomando $T > t$ exite uma (ϵ, T)-cadeia segundo ψ_t, de b até $\varphi_T(a)$, digamos $[x_0 = b, x_1, \ldots, x_n = \varphi_T(a)]$. Assim, $[a, x_n, x_{n-1}, \ldots, x_1, b]$ é uma (ϵ, t)-cadeia de a até b, segundo o fluxo φ_t. Como a e b são quaisquer, M é transitivo por cadeia segundo o fluxo φ_t. Isto conclui a prova do teorema. ∎

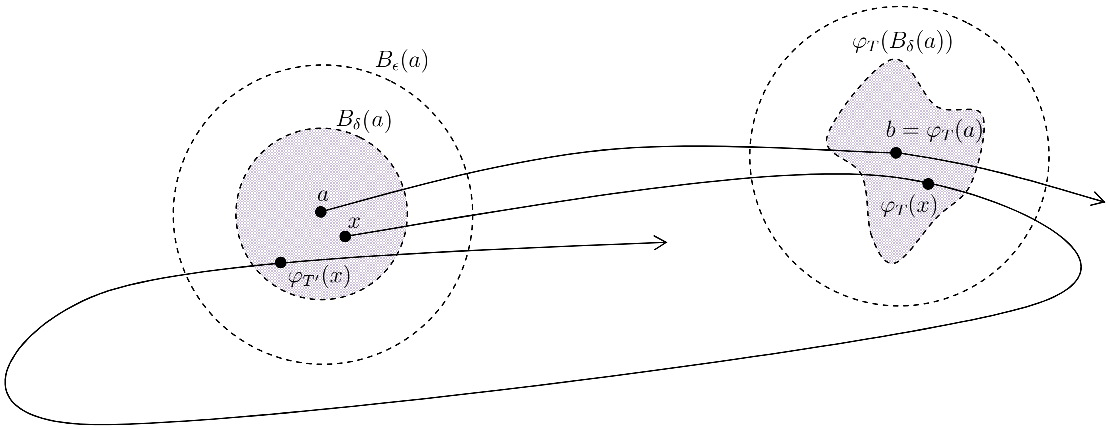

Figura 1.1:

1.4 Lemas para Campos

Nesta Seção, apresentaremos um conjunto de lemas que serão usados nas demonstrações dos Teoremas A e B.

1.4.1 Fluxo Tubular para Campos Conservativos

O Teorema do Fluxo Tubular usual nos diz que numa vizinhança de um ponto regular de uma Variedade, podemos "puxar" o campo para o $\mathbb{R}^n$ tornando-o simples (constante). Porém, mais adiante, precisaremos puxar para o $\mathbb{R}^n$ tanto o campo quanto a forma de volume. O teorema seguinte nos fornece um sistema de coordenadas onde o campo é constante e a forma de volume é a canônica de $\mathbb{R}^n$. Antes, faremos um lema.

No que segue, $\widehat{dx}$ significa a exclusão do termo dx.

Lema 1.14. *Seja $U \subset \mathbb{R}^n$ um aberto. Se $X = \sum_{j=1}^n X_j \frac{\partial}{\partial x_j}$ é um campo em U e $\omega = \psi dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n$ é uma forma de volume em U, então*

$$div_\omega X = \frac{1}{\psi} \sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_j} X_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial X_j}{\partial x_j}.$$

Demonstração. Pelas definições temos $i_{\frac{\partial}{\partial x_j}}(dx_l) = dx_l(\frac{\partial}{\partial x_j}) = \begin{cases} 1, & j = l; \\ 0, & j \neq l. \end{cases}$

Com isso, usando a propriedade (I3) de produto interior obtemos:

$$i_{\frac{\partial}{\partial x_j}}(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n) = (-1)^{j-1}(dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n). \tag{1.8}$$

Agora, usando as propriedades (I1) e (I2) temos:

$$\begin{aligned} i_X(\omega) = \; & i_{(\sum_{j=1}^n X_j \frac{\partial}{\partial x_j})}(\psi dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n) \\ \overset{I2}{=} \; & \textstyle\sum_{j=1}^n X_j i_{\frac{\partial}{\partial x_j}}(\psi dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n) \\ \overset{I1}{=} \; & \textstyle\sum_{j=1}^n \psi X_j i_{\frac{\partial}{\partial x_j}}(dx_1 \wedge \ldots \wedge dx_n) \\ \overset{(1.8)}{=} \; & \textstyle\sum_{j=1}^n \psi X_j (-1)^{j-1}(dx_1 \wedge \ldots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \ldots \wedge dx_n). \end{aligned}$$

Com isso,

$$\begin{aligned} d(i_X\omega) = \; & d\left(\textstyle\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1}\psi X_j (dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n)\right) \\ = \; & \textstyle\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} d(\psi X_j) \wedge (dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n) \\ = \; & \textstyle\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} \left(\sum_{k=1}^n (\frac{\partial \psi}{\partial x_k} X_j + \psi \frac{\partial X_j}{\partial x_k}) dx_k\right) \wedge (dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n) \\ = \; & \textstyle\sum_{j=1}^n (-1)^{j-1} (\frac{\partial \psi}{\partial x_j} X_j + \psi \frac{\partial X_j}{\partial x_j}) dx_j \wedge (dx_1 \wedge \cdots \wedge \widehat{dx_j} \wedge \cdots \wedge dx_n) \\ = \; & \textstyle\sum_{j=1}^n (-1)^{2(j-1)} (\frac{\partial \psi}{\partial x_j} X_j + \psi \frac{\partial X_j}{\partial x_j})(dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n) \\ = \; & \left(\frac{1}{\psi} \textstyle\sum_{j=1}^n \frac{\partial \psi}{\partial x_j} X_j + \sum_{j=1}^n \frac{\partial X_j}{\partial x_j}\right) \psi dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n. \end{aligned}$$

$\blacksquare$

Note que se $\psi = 1$, ou seja, ω é a forma de volume canônica $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$, então $div_\omega X$ é igual ao traço da matriz jacobiana JX.

Teorema 1.15 (Fluxo Tubular Conservativo)**.** *Sejam $X \in \mathcal{X}^\infty(M^n)$, ω uma forma de volume de classe C^∞ em M^n, e $a \in M^n$ um ponto regular pelo campo X. Se X preserva ω, então existe uma parametrização $\phi : U \to M^n$ de classe C^∞ com $a \in \phi(U)$ tal que:*

1. $\phi^* X \equiv (0, \ldots, 0, 1)$;

2. $\phi^* \omega = dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n$.

Demonstração. O Teorema do Fluxo Tubular garante que existe uma carta $\varphi : V \to M^n$ de classe C^∞ com $\varphi(0) = a$ e tal que $\varphi^* X(y_1, \ldots, y_n) = (0, \ldots, 0, 1)$, para todo $y = (y_1, \ldots, y_n) \in V$. Tomando o *pull-back* de ω por φ, temos $\varphi^* \omega(y) = \psi(y) dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$, onde $\psi : V \to \mathbb{R}$ é uma aplicação de classe C^∞ que não se anula em V. Mudando a orientação de M se necessário, podemos supor ψ positiva.

Denotemos $\varphi^* X = Y = (Y_1, \ldots, Y_n) \equiv (0, ..., 0, 1)$ e $\varphi^* \omega = \eta$. Pelo Lema 1.14,

$$div_\eta Y(y) = \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Y_i}{\partial y_i}(y) + \frac{1}{\psi(y)} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial y_i}(y) Y_i(y).$$

Como X preserva ω, temos que Y preserva η, donde, pela Fórmula de Liouville, temos

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\partial Y_i}{\partial y_i}(y) + \frac{1}{\psi(y)} \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial \psi}{\partial y_i}(y) Y_i(y) = 0,$$

qualquer que seja $y \in V$. Isto equivale a

$$\frac{\partial \psi}{\partial y_n} \equiv 0,$$

ou seja, ψ independe da variável y_n. Para evidenciar esta independência, denotemos $l(y_1, \ldots, y_{n-1}) = \psi(y_1, \ldots, y_{n-1}, y_n)$. Agora, seja $\xi : V \to U = \xi(V)$ definida por

$$\xi(y_1, \ldots, y_n) = (y_1, \ldots, y_{n-2}, \int_0^{y_{n-1}} l(y_1, \ldots, y_{n-2}, t) dt, y_n),$$

cujo jacobiano tem a forma

$$J\xi(y) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 1 & 0 & 0 \\ * & * & \cdots & * & * & l(y') & 0 \\ 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

onde $y' = (y_1, \ldots, y_{n-1})$. Logo, $\xi_* Y = Y$.

Por outro lado, se $x_1, \ldots, x_n$ são as respectivas coordenadas de ξ, ou seja, $\xi(y_1, \ldots, y_n) = (x_1, \ldots, x_n)$, teremos

$$\begin{cases} dx_i = dy_i, \text{ para } i \neq (n-1) \\ dx_{n-1} = l(y_1, \ldots, y_{n-1}) dy_{n-1} + [\text{termos em } \ dy_j], \quad \text{com} \quad j \neq (n-1). \end{cases}$$

Com isso,

$dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n =$

$$= dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_{n-2} \wedge \Big\{ l(y_1, \ldots, y_{n-1}) dy_{n-1} + [\text{termos em } \ dy_j], \ \ j \neq (n-1) \Big\} \wedge dy_n$$

$= l(y_1, \ldots, y_{n-1}) dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_n$.

Agora, basta tomar a parametrização $\phi : U \to M^n$ dada por $\varphi \circ \xi^{-1}$. Isto conclui a prova do Teorema. ∎

1.4.2 Lema de Perturbação

O lema seguinte é uma perturbação local (preservando volume) que será usada para produzir órbitas recorrentes.

Denotaremos um elemento de $\mathbb{R}^{n+2}$ por $(x_1, \ldots, x_n, y, z)$. Para $\delta > 0$, seja $B_\delta(x_1, \ldots, x_n, y)$ a bola aberta de $\mathbb{R}^{n+1}$ com centro em $(x_1, \ldots, x_n, y) \in \mathbb{R}^{n+1}$ e raio δ, e $B_\delta[x_1, \ldots, x_n, y]$ a bola fechada. Para $C = \partial B_\delta(x_1, \ldots, x_n, y) \times [-h, h] \subset \mathbb{R}^{n+2}$ e $0 < \xi < \delta$, definimos o *anel cilíndrico* com centro em C e raio ξ como sendo o conjunto

$$A_\xi(C) = \Big(B_{\delta+\xi}(x_1, \ldots, x_n, y) - B_{\delta-\xi}[x_1, \ldots, x_n, y] \Big) \times [-h, h] \subset \mathbb{R}^{n+2}. \tag{1.9}$$

Lema 1.16 (de Perturbação). *Seja* $X : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}^{n+2}$ *o campo definido por* $X(x_1, \ldots, x_n, y, z) = (0, \ldots, 0, 0, 1)$. *Considere o cilindro* $C = \partial B_\delta(0, \ldots, 0) \times [-h, h] \subset \mathbb{R}^{n+2}$, $\delta > 0$, $h > 0$, *e pontos* $p \in \partial B_\delta(0, \ldots, 0) \times \{-h\}$ *e* $q \in \partial B_\delta(0, \ldots, 0) \times \{h\}$. *Seja* θ *o ângulo entre os vetores* $p - (0, \ldots, 0, -h)$ *e* $q - (0, \ldots, 0, h)$. *Dado* $\xi > 0$ *pequeno* ($\xi < \delta$), *existe um campo* Z *de classe* C^∞ *em* $\mathbb{R}^{n+2}$ *com as seguintes propriedades:*

1. *Z preserva a forma de volume canônica $dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_n \wedge dy \wedge dz$;*

2. *$Z \equiv X$ fora do interior do anel cilíndrico $A_\xi(C)$;*

3. *A órbita de p, segundo Z, contém o ponto q;*

4. *Dados $r \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$, se $|\theta|$ é suficientemente pequeno, então $\|Z - X\|_r < \epsilon$.*

Demonstração. A menos de um movimento rígido, podemos tomar

$$p = (0, \ldots, 0, \delta, 0, -h) \text{ e } q = (0, \ldots, 0, \delta\cos\theta, \delta \operatorname{sen}\theta, h),$$

com $-\pi < \theta \leq \pi$. Fixemos as seguintes funções de classe C^∞:

- $\lambda : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ com suporte em $[-h, h]$ e $\int_{-h}^{h} \lambda(s)ds = 1$;

- $\gamma : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ com suporte em $[\delta - \xi, \delta + \xi]$ e $\gamma(\delta) = 1$.

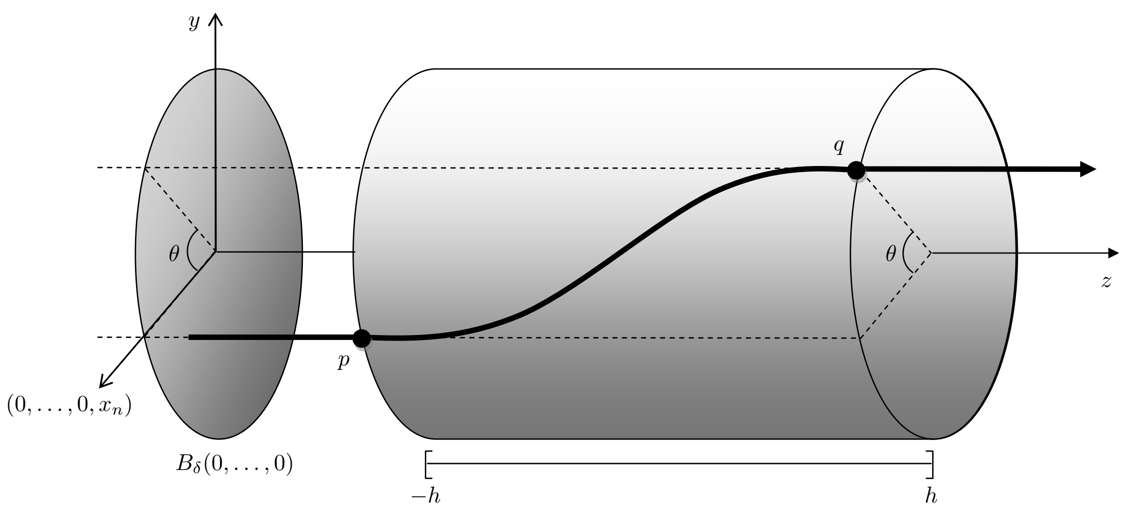

Figura 1.2: A origem foi deslocada para simplificar a figura.

Considere o campo $Z : \mathbb{R}^{n+2} \to \mathbb{R}^{n+2}$ dado por

$$Z(x_1, \ldots, x_n, y, z) =$$
$$\left(0, \ldots, 0, -yk\lambda(z)\gamma\Big(\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2 + y^2}\Big), x_n k\lambda(z)\gamma\Big(\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2 + y^2}\Big), 1\right), \tag{1.10}$$

onde k é uma constante que será tomada adequadamente mais adiante.

Sendo γ nula numa vizinhança da origem, Z é de classe C^∞, pois cada componente o é. Como é de fácil verificação, o divergente de Z em relação à forma de volume canônica (= traço da derivada, Lema 1.14) é nulo em todo ponto e portanto Z satisfaz o item 1. Sendo λ nula fora de $(-h, h)$ e γ nula fora de $(\delta - \xi, \delta + \xi)$, Z coincide com Y fora de $A_\xi(C)$ e portanto também satisfaz o item 2.

Provemos o item 3. De início, observe que, nos restringindo ao conjunto

$$Q = \{(0, \ldots, 0, x_n, y, z) \in \mathbb{R}^{n+2} | \ \ x_n, y, z \in \mathbb{R}\},$$

contendo os ponto p e q, a diferença entre Z e $X = \Big(0, \ldots, 0, 1\Big)$ é o campo conservativo

$$\left(0, \ldots, 0, -yk\lambda(z)\gamma\Big(\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2 + y^2}\Big), x_n k\lambda(z)\gamma\Big(\sqrt{x_1^2 + \ldots + x_n^2 + y^2}\Big), 0\right).$$

Assim, o fluxo de X é desviado com uma rotação nas variáveis x_n e y, ao longo de cilindros invariantes $x_n^2 + y^2 = R^2$, com $\delta - \xi < R < \delta + \xi$ (veja figura 1.2). O fluxo ϕ_t de Z em Q é dado da seguinte forma: $\varphi_t(0, \ldots, 0, z) = (0, \ldots, 0, t + z)$, e para $x_n^2 + y^2 \neq 0$,

$$\varphi_t(0, \ldots, 0, x_n, y, z) = (0, \ldots, 0, f(t, x_n, y, z), g(t, x_n, y, z), h(t, x_n, y, z))$$

onde

$$\begin{aligned}
f(t, x_n, y, z) = & \quad \sqrt{x_n^2 + y^2} \cos\left(k\gamma(\sqrt{x_n^2 + y^2}) \int_z^{t+z} \lambda(s)ds + \arccos \frac{x_n}{\sqrt{x_n^2 + y^2}}\right), \\
g(t, x_n, y, z) = & \quad \sqrt{x_n^2 + y^2} \operatorname{sen}\left(k\gamma(\sqrt{x_n^2 + y^2}) \int_z^{t+z} \lambda(s)ds + \operatorname{arcsen} \frac{y}{\sqrt{x_n^2 + y^2}}\right), \\
h(t, x_n, y, z) = & \quad t + z.
\end{aligned}$$ [1]

Com isso, tomando $t = 2h$ e $k = \theta$, temos

$$\begin{aligned}
\varphi_{2h}(p) &= \varphi_{2h}(0, \ldots, 0, \delta, 0, -h) \\
&= \left(0, \ldots, 0, \delta \cos\left[k \cdot \gamma(\delta) \int_{-h}^{h} \lambda(s)ds\right], \delta \operatorname{sen}\left[k \cdot \gamma(\delta) \int_{-h}^{h} \lambda(s)ds\right], h\right) \\
&= (0, \ldots, 0, \delta \cos\theta, \delta \operatorname{sen}\theta, h) = q.
\end{aligned}$$

[1] Note que $\operatorname{arcsen}\left(\frac{y}{\sqrt{x_n^2+y^2}}\right) = \arccos\left(\frac{x_n}{\sqrt{x_n^2+y^2}}\right) = \arctan(y/x_n)$.

Isto prova o item 3.

Tomando $k = \theta$ em (1.10), teremos todas as derivadas parciais de qualquer ordem, das funções coordenadas de Z, sendo múltiplos de θ. Com isso, não é difícil verificar que se $|\theta|$ é suficientemente pequeno, então temos $\|Z - X\|_r < \epsilon$. Isto prova item 4 e conclui a prova do lema. ∎

Observação 1.17. *No Lema de Perturbação 1.16 anterior, o cilindro C está centrado no eixo z. Porém, o lema será usado em um cilindro que está centrado num eixo paralelo ao eixo z, o que não impede o seu uso, salvo uma mudança de coordenadas (translação).*

Observação 1.18. *No Apêndice C, apresentamos uma perturbação semelhante a do Lema anterior, porém, para uma classe maior de campos conservativos. O conteúdo deste apêndice não está além do Lema de Perturbação acima, devido o Teorema do Fuxo Tubular Conservativo. Mas, a técnica lá apresentada, exibe a maneira como foi obtido o fluxo φ_t do Lema de Perturbação acima. Aproveitando o ensejo, cabe dizer que antes do nascimento do Teorema do Fuxo Tubular Conservativo, a perturbação contida no Apêndice C, ocupava o lugar da perturbação contida no Lema anterior.*

1.4.3 Lema do Retorno

O lema seguinte garante que uma perturbação local preservando volume pode fazer com que um ponto regular retorne tão próximo de si mesmo quanto se queira. Antes, pedimos paciência ao leitor pois faremos uma observação bastante técnica, tanto quanto importante.

Observação 1.19. *Seja $\tilde{0} \in \mathbb{R}^{n-1}$ o vetor nulo. Fixemos $h > 0$, $\delta > 0$ e $D = \partial B_\delta(\tilde{0}, 0, 0) \times [-h, h] \subset \mathbb{R}^{n+2}$. Considere $p = (\tilde{0}, 0, 0, -h) \in \mathbb{R}^{n+2}$ e $q_k = (\tilde{0}, x_k, y_k, h) \in B_{1/k}[\tilde{0}, 0, 0] \times \{h\} \subset \mathbb{R}^{n+2}$, com $k \in \mathbb{N}$ tal que $k > 1/\delta$, para que ocorra $B_{1/k}(\tilde{0}, 0, 0) \subset B_\delta(\tilde{0}, 0, 0)$. Usemos o sinal (') para indicar a projeção nas duas penúltimas coordenadas em $\mathbb{R}^{n+2}$, ou seja, $(x_1, \ldots, x_n, y, z)' = (x_n, y) \in \mathbb{R}^2$. Com isso, $p' = (0, 0)$ e $q_k' = (x_k, y_k)$. Agora, para cada k, tome (a_k, b_k) pertencente à circunferência $\partial B_\delta(0, 0)$ tal que o círculo $\partial B_\delta(a_k, b_k)$ contém p' e q_k'. Observe que o ângulo θ_k entre os vetores $p - (\tilde{0}, a_k, b_k, -h)$ e $q_k - (\tilde{0}, a_k, b_k, h)$ é o mesmo que o determinado pelos vetores $p' - (a_k, b_k)$ e $q_k' - (a_k, b_k)$. Além disso, θ_k é menor do que $2\mathrm{arcsen}\,(\frac{1}{2k\delta})$. Isto decorre do fato que $\mathrm{sen}\,(\frac{\theta_k}{2}) = \frac{\|q_k'\|}{2\delta}$, com $\|q_k'\| \leq 1/k$ (veja a figura 1.3). Logo, θ_k é tão pequeno quanto se queira, desde que k seja suficientemente grande.*

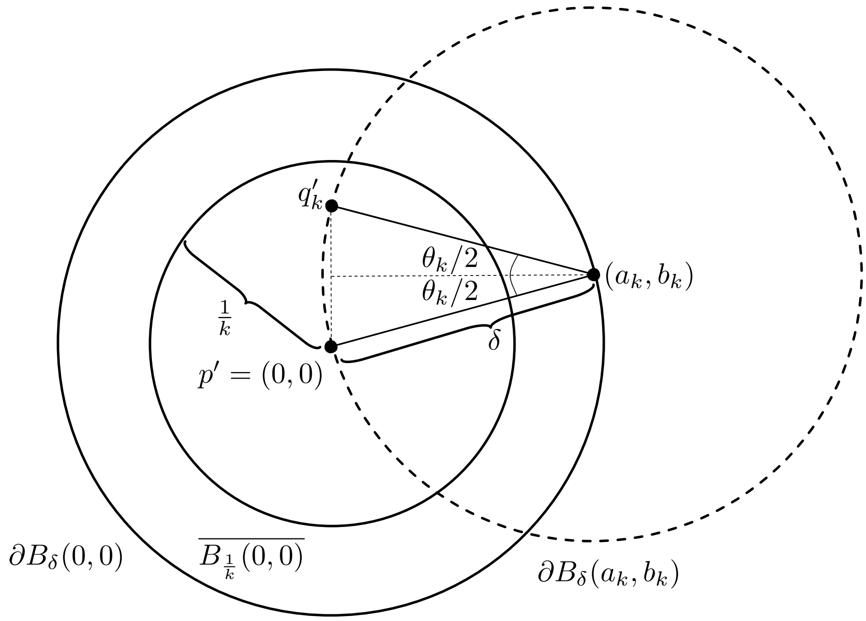
q_k'
$\theta_k/2$
$\theta_k/2$
(a_k, b_k)
$\frac{1}{k}$
δ
$p' = (0,0)$
$\partial B_\delta(0,0)$
$\overline{B_{\frac{1}{k}}(0,0)}$
$\partial B_\delta(a_k, b_k)$

Figura 1.3:

Lema 1.20 (do Retorno)**.** *Sejam $X \in \mathcal{X}^{\infty}_{vol}(M^n)$, $n \geq 3$, $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}^{\infty}_{vol}(M^n)$ uma C^r-vizinhança de X, $p \in M^n$ um ponto regular cuja órbita é γ e $V \subset M^n$ uma vizinhança de p. Dado $T > 0$, existe um campo $K \in \mathcal{V}$ tal que:*

1. *$K \equiv X$ fora de V;*
2. *$K_t(p) \in V$ para algum $t > T$;*
3. *Se $p \notin \alpha(\gamma)$, então $K_t(p) = X_t(p)$, para todo $t \leq 0$.*

Demonstração. Tomemos $x_1, \ldots, x_n$ um sistema de coordenadas dado pelo Teorema do Fluxo Tubular Conservativo, em torno de uma vizinhança de p contida em V, tal que $p = (0, \ldots, 0, -h)$ e $X(x_1, \ldots, x_n) = (0, \ldots, 0, 1)$, onde $(x_1, \ldots, x_n)$ variam em uma vizinhança U da origem, contendo $(0, \ldots, 0, -h)$. Sem perda de generalidade, podemos supor $U = (-c, c)^n$, com $0 < h < c/2$.

Fixemos $0 < \delta < c/3$ e $D = \partial B_\delta(\tilde{0}, 0, 0) \times [-h, h]$, onde $\tilde{0}$ é o vetor nulo de $\mathbb{R}^{n-1}$. Para cada número natural $k > 1/\delta$, considere o cilindro maciço $A_k = B_{1/k}(\tilde{0}, 0, 0) \times [-h, h] \subset U$ e suas faces $A'_k = B_{1/k}(\tilde{0}, 0, 0) \times \{-h\}$ e $A''_k = B_{1/k}(\tilde{0}, 0, 0) \times \{h\}$. Pelo Teorema de Recorrência de Poincaré, A_k contém um ponto ω-recorrente q_k, o qual podemos tomar em A''_k. A menos de uma mudança ortogonal nas $(n+1)$ primeiras coordenadas, podemos supor $q_k = (\tilde{0}, x_k, y_k, h)$. Com isso, pela Observação 1.19, existe $(a_k, b_k) \in \partial B_\delta(0, 0) \subset \mathbb{R}^2$ tal que $p = (\tilde{0}, 0, 0, -h) \in \partial B_\delta(\tilde{0}, a_k, b_k) \times \{-h\}$, $q_k \in \partial B_\delta(\tilde{a}_n, b_n) \times \{h\}$ e o ângulo θ_k entre $p - (\tilde{0}, a_k, b_k, -h)$ e $q_k - (\tilde{0}, a_k, b_k, h)$ é inferior à $2 \arcsin \left(\frac{1}{2k\delta} \right)$, com $\lim_{k \to \infty} \theta_k = 0$.

Conforme a observação 1.17, aplicaremos o Lema de Perturbação com os seguintes elementos: o campo X; o cilindro $C_k = \partial B_\delta(\tilde{0}, a_k, b_k) \times [-h, h]$; pontos $p \in \partial B_\delta(\tilde{0}, \tilde{a}_k, b_k) \times \{-h\}$ e $q_k \in \partial B_\delta(\tilde{0}, a_k, b_k) \times \{h\}$; e ângulo θ_k como definido acima. Assim, pelo Lema de Perturbação, dado ξ com $0 < \xi < \delta$, existe um campo conservativo $Z^{(k)}$ de classe C^∞ em U tal que:

(a) $Z^{(k)} \equiv X$ fora do interior do anel cilíndrico $A_\xi(C_k)$;

(b) A órbita de p, segundo $Z^{(k)}$, contém o ponto q_k;

(c) Dado $\epsilon > 0$, se k é tomado grande ($|\theta_k|$ pequeno), então $\|Z^{(k)} - X\|_r < \epsilon$.

Pelo item (a), o campo $Z^{(k)}$ coincide com X em $M^d - V$. Por (c), tomando k suficientemente grande, podemos supor $Z^{(k)} \in \mathcal{V}$. Isto prova o item 1.

Pelo item (b), a órbita de p (segundo $Z^{(k)}$) “passa” pelo ponto q_k. Sendo q_k recorrente (segundo X), a órbita de q_k volta a intersectar a vizinhança $A_\xi(C_k)$ (e portanto intersecta V) num primeiro retorno $p_1 \in A'_k$. Como q_k não pertence ao interior de $A_\xi(C_k)$, pelo item (a), o arco de trajetória $[q_k, p_1]$, segundo X, é o mesmo segundo $Z^{(k)}$; portanto, a órbita de p volta intersectar V, segundo o campo $Z^{(k)}$. Porém, pode ocorrer que o tempo de primeiro retorno de p à V (segundo $Z^{(k)}$) seja inferior ao tempo T. Caso isto ocorra, note que toda órbita que sai de V, gasta um tempo $c-h$ para cruzar as seções transversais $z=h$ e $z=c$. Agora, para o campo $Z^{(k)}$, escolha um sistema de coordenadas numa vizinhança $V_1 \subset V$ de p_1 que não intersecta o arco de trajetória $[q_k, p_1]$. Proceda como feito anteriormente e perturbe o campo $Z^{(k)}$ na vizinhança V_1 e conecte o ponto p_1 a um outro recorrente q_{k_1}, cujo arco de primeiro retorno à V_1 deverá cruzar as seções transversais $z=h$ e $z=c$, acrescendo pelo menos o tempo $c-h$, ao tempo retorno de p à V. Repetindo este processo um número finito de vezes, fazemos com que a trajetória de p retorne à vizinhança V com um tempo superior ao T. Isto prova o item 2.

Para o item 3, como $p \notin \alpha(\gamma)$, então podemos tomar ξ suficientemente pequeno de modo que $A_\xi(C_k)$ não intersecta a semi-órbita negativa de p. Assim, o resultado segue pelo fato de X e $Z^{(k)}$ coincidirem fora do interior de $A_\xi(C_k)$ (item (a)). Por fim, tomando $K = Z^{(k)}$ com k suficientemente grande, teremos o campo desejado. Isto conclui a prova do lema. ∎

Como vimos, nossos Lemas de Perturbação e Retorno se aplicam somente a campos de classe C^∞. O lema seguinte, devido a Carlos Zuppa ([12]), nos diz que isso não é um problema, pois campos de classe C^∞ que preservam volume são densos em $\mathcal{X}^r_{vol}(M)$ segundo a topologia C^r.

Lema 1.21 (de Regularização). *$\mathcal{X}^\infty_{vol}(M)$ é denso em $\mathcal{X}^r_{vol}(M)$ munido da topologia C^r.*

1.5 Provas dos Teoremas A e B

Um elemento crítico $\gamma \in M$ é uma órbita periódica ou uma singularidade do campo X.

Teorema B. *Para $d \geq 3$ e $1 \leq r \leq \infty$, o conjunto $\mathcal{X}^r_{vol}(M^d)$ contém um subconjunto residual $\mathcal{R}$ tal que se γ é um elemento crítico (singularidade ou órbita fechada) hiperbólico de $X \in \mathcal{R}$, então a variedade instável de γ contém um subconjunto denso de pontos $\omega-$recorrentes, e a variedade estável de γ contém um subconjunto denso de pontos $\alpha-$recorrentes.*

Demonstração. Observemos que partindo do campo $-X$, a prova que $W^u(\gamma)$ contém um subconjunto denso de pontos $\omega-$recorrentes implica na prova que $W^s(\gamma)$ contém um subconjunto denso de pontos $\alpha-$recorrentes. Com isso, provaremos apenas o primeiro caso.

Para $1 \leq r < \infty$ fixado, seja $A^r_{n,k,m} \subset \mathcal{X}^r_{vol}(M^d)$, $n, k, m \in \mathbb{N}$, tal que $X \in A^r_{n,k,m}$ quando X satisfaz as seguintes duas condições:

(1a). Se $\dim M \geq 4$, então toda órbita periódica de X com período $\leq n$ é hiperbólica. Se $\dim M = 3$, então toda órbita periódica de período $\leq n$ é elementar; ou seja, 1 e -1 não são autovalores de uma transformação de Poincaré da órbita (o que equivale à órbita ser hiperbólica ou elíptica).

(1b). Se γ é uma órbita periódica hiperbólica de X com período $\leq n$, então $W^u(\gamma)$ possui um domínio fundamental $D^u_\Sigma(p)$ em um ponto $p \in \gamma$, dependendo somente de X, γ e $p \in \gamma$, e que satisfaz as seguintes condições:

(A) Existe um subconjunto finito $Z(k)$ no interior de $D^u_\Sigma(p)$ dependendo somente de X, γ, $p \in \gamma$ e k, tal que:

(A1) $Z(k)$ é $\frac{1}{k}$ denso em $D^u_\Sigma(p)$;

(A2) $z \in Z(k) \Rightarrow \quad X_t(z) \in B_{\frac{1}{m}}(z)$, para algum $t > m$. [2]

Seja $\tilde{A}^r_{k,m} \subset \mathcal{X}^r_{vol}(M^d)$, $k, m \in \mathbb{N}$, tal que $X \in \tilde{A}^r_{k,m}$ quando X satisfaz as seguintes duas condições:

(2a). Toda singularidade de X é hiperbólica.

(2b). Se a é uma singularidade hiperbólica de X, então $W^u(a)$ possui uma esfera transversal $S^u_V(a)$ que depende somente de X, a e V, e que satisfaz as seguintes condições:

[2] $B_{1/m}(z)$ é uma bola aberta em M^d.

(B) Existe um subconjunto finito $Z'(k)$ em $S_V^u(a)$ que depende somente de X, a, V e k, tal que:

(B1) $Z'(k)$ é $\frac{1}{k}$ denso em $S_V^u(a)$;

(B2) $z \in Z'(k) \Rightarrow \quad X_t(z) \in B_{\frac{1}{m}}(z), \quad$ para algum $t > m$.

Afirmamos que $\mathcal{R} = \left(\bigcap_{n,k,m} A^r_{n,k,m}\right) \cap \left(\bigcap_{k,m} \tilde{A}^r_{k,m}\right)$ é o conjunto desejado. Com efeito, dividiremos o argumento em dois casos:

1) [órbita periódica]: Sejam $X \in \mathcal{R}$; γ uma órbita periódica hiperbólica de X de período T; $p \in \gamma$; e $Z = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Z(k)$. Com isso, por (A1), Z é denso em $D^u_\Sigma(p)$ e portanto $\bigcup_{t\in\mathbb{R}} X_t(Z)$ é denso em $W^u(\gamma)$, conforme a Observação 1.1. Além disso, tomando $z \in Z$, existe $\tilde{k}$ tal que $z \in Z(\tilde{k})$. Seja $\tilde{n} > T$, $\tilde{n} \in \mathbb{N}$. Fixados $\tilde{n}$ e $\tilde{k}$, como $X \in A_{\tilde{n},\tilde{k},m}$ para qualquer m, por (A) e (A2), obtemos uma sequência $t_1 < t_2 < \cdots$, com $m < t_m$, tal que $\lim_{m\to\infty} X_{t_m}(z) = z$; ou seja, z é $\omega-$recorrente.

2) [singularidade]: Sejam $X \in \mathcal{R}$; a uma singularidade hiperbólica de X, e $Z' = \bigcup_{k\in\mathbb{N}} Z'(k)$. Com isso, por (B1), Z' é denso em $S_V^u(a)$ e portanto $\bigcup_{t\in\mathbb{R}} X_t(Z')$ é denso em $W^u(a)$, conforme a Observação 1.3. Além disso, tomando $z \in Z'$, existe $\tilde{k}'$ tal que $z \in Z'(\tilde{k}')$ e portanto, como $X \in \tilde{A}^r_{\tilde{k}',m}$ para qualquer m, por (B) e (B2), obtemos uma sequência $t_1 < t_2 < \cdots$, com $m < t_m$, tal que $\lim_{m\to\infty} X_{t_m}(z) = z$; ou seja, z é $\omega-$recorrente.

Para o caso $r = \infty$ é só tomar $A^\infty_{n,k,m} = \cup_{r=1}^\infty A^r_{n,k,m}$, $\tilde{A}^\infty_{k,m} = \cup_{r=1}^\infty \tilde{A}^r_{k,m}$ e

$$\mathcal{R} = \left(\bigcap_{n,k,m} A^\infty_{n,k,m}\right) \cap \left(\bigcap_{k,m} \tilde{A}^\infty_{k,m}\right).$$

Logo, para provar o teorema, basta provar que $\mathcal{R}$ é residual. Para isto, vamos provar que cada $A^r_{n,k,m}$ e $\tilde{A}^r_{k,m}$ é aberto e denso em $\mathcal{X}^r_{vol}(M^d)$.

Vejamos primeiramente o caso da abertura. Considere os conjuntos

$$A_n = \{X \in \mathcal{X}^r_{vol}(M^d) |\ \text{toda órbita periódica com período} \le n \text{ é hiperbólica}\}, \tag{1.11}$$

no caso $d = 3$ definimos

$$A_n = \{X \in \mathcal{X}^r_{vol}(M^3) |\ \text{toda órbita periódica com período} \le n \text{ é elíptica ou hiperbólica}\},$$

e

$$\tilde{A}_n = \{X \in \mathcal{X}^r_{vol}(M^d) |\ \text{toda singularidade de } X \text{ é hiperbólica}\} \tag{1.12}$$

que são abertos e densos em $\mathcal{X}^r_{vol}(M^d)$ (ver Robinson [9], Teorema 1.A.ii.). Com isso, as propriedades (1a) e (2a) são abertas. Note que se X satisfaz as condições (1a) e (2a), então o conjunto das singularidades hiperbólicas e das órbitas periódicas hiperbólicas com período $\leq n$ de X é finito, depende continuamente do campo X e sua cardinalidade é constante numa vizinhança de X; mais ainda, as variedades invariantes locais destes elementos críticos hiperbólicos variam continuamente com o campo numa vizinhança de X. Como as condições (A), (A1), (A2), (B), (B1) e (B2) são condições abertas, definidas em termos de uma finidade de elementos críticos hiperbólicos, em subconjuntos finitos de domínios fundamentais desses elementos críticos, temos que o conjunto dos campos que satisfazem (1b) e (2b) é aberto.

Vejamos agora a densidade. Seja $\mathcal{V}$ um aberto de $\mathcal{X}^r_{vol}(M^d)$. Provemos que $\mathcal{V}$ contém um elemento de $A^r_{n,k,m} \cap \tilde{A}^r_{k,m}$. Com efeito, seja $X \in \mathcal{V}$. Pelo Lema de Regularização, podemos supor X de classe C^∞ e, sendo os conjuntos A_n e $\tilde{A}_n$ densos (ver (1.11) e (1.12)), podemos supor também que as singularidades de X são todas hiperbólicas, assim como as órbitas periódicas de X com período $\leq n$; logo, há um número finito delas. Sejam $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$ todas as órbitas periódicas de X com período $\leq n$, e $p_1, \ldots, p_s$ as singularidades hiperbólicas de X. Se estes elementos críticos não existem, nada temos a demonstrar. Seja $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ uma vizinhança de X tal que o número de singularidades hiperbólicas e órbitas periódicas hiperbólicas com período $\leq n$, se mantém.

Sejam $D^u(\gamma_1), \ldots, D^u(\gamma_r)$ domínios fundamentais de $\gamma_1, \ldots, \gamma_r$, respectivamente. Para cada $1 \leq i \leq r$, tomemos um subconjunto finito $Z_i(k)$ $1/k$ denso em $D^u(\gamma_i)$. Seja $\cup_{i=1}^r Z_i(k) = \{z_1, \ldots, z_q\}$. Analogamente, sejam $S^u(p_1), \ldots, S^u(p_s)$ as respectivas esferas transversais dos elementos $p_1, \ldots, p_s$. Para cada $1 \leq i \leq s$, tomemos $Z'_i(k) \subset S^u(p_i)$ finito e $1/k$ denso em $S^u(p_i)$. Seja $\cup_{i=1}^s Z'_i(k) = \{z'_1, \ldots, z'_l\}$. Agora, consideremos o conjunto finito $E = \{z_1, \ldots, z_q, z'_1, \ldots, z'_l\}$, composto somente por pontos regulares de X. Como todo elemento z de E está em uma variedade instável, temos que z não é $\alpha-$recorrente. Fixemos $z_1 \in E$, e uma vizinhança V_1 de z_1 suficientemente pequena de modo que intersecta E somente em z_1. Com isso, dado $m \in \mathbb{N}$, pelo Lema do Retorno, existe $K^{(1)} \in \mathcal{U}$ tal que:

(D1) $K^{(1)} \equiv X$, fora de V_1;

(E1) $K^{(1)}_t(z_1) \in B_{1/m}(z_1)$, para algum $t > m$;

(F1) $K^{(1)}_t(z_1) = X_t(z_1)$, para todo $t \leq 0$.

Em seguida, fixemos $z_2 \in E$, e uma vizinhança V_2 de z_2 suficientemente pequena de modo que: intersecta E somente em z_2, não intersecta V_1 e não intersecta o arco de primeiro retorno de z_1 à V_1. Com isso, pelo Lema do Retorno, existe $K^{(2)} \in \mathcal{U}$ tal que:

(D2) $K^{(2)} \equiv K^{(1)}$, fora de V_2;

(E2) $K_t^{(2)}(z_2) \in B_{1/m}(z_2)$, para algum $t > m$;

(F2) $K_t^{(2)}(z_2) = K_t^{(1)}(z_2)$, para todo $t \leq 0$.

Prosseguindo desta forma, fixaremos o último elemento z_l' de E, e uma vizinhança V_l' de z_l' suficientemente pequena de modo que: intersecta E somente em z_l', não intersecta $V_1 \cup \cdots \cup V_q \cup V_1' \cup \cdots \cup V_{l-1}'$, onde $V_1, \ldots, V_q, V_1', \ldots, V_{l-1}'$ são as respectivas vizinhanças de $z_1, \ldots, z_q, z_1', \ldots, z_l'$, dos passos anteriores, e não intersecta a união dos arcos de primeiro retorno às respectivas vizinhanças de cada elemento anterior. Com isso, pelo Lema do Retorno, existe $K^{(q+l)} \in \mathcal{U}$ tal que:

(D(q+l)) $K^{(q+l)} \equiv K^{(q+l-1)}$, fora de V_l';

(E(q+l)) $K_t^{(q+l)}(z_l') \in B_{1/m}(z_l')$, para algum $t > m$;

(F(q+l)) $K_t^{(q+l)}(z_l') = K_t^{(q+l-1)}(z_l')$, para todo $t \leq 0$.

Note que pelos itens (D1), ... , (D(q+l)), o campo $K^{(q+l)}$ coincide com X fora de $V_1 \cup \cdots \cup V_q \cup V_1' \cup \cdots \cup V_l'$. Com isso, as singularidades hiperbólicas e as órbitas periódicas hiperbólicas com período $\leq n$ de X, são as mesmas de $K^{(q+l)} \in \mathcal{U}$. Além disso, pelos itens (F1), ... , (F(q+l)), os elementos do conjunto E ainda pertencem às suas respectivas variedades instáveis (segundo o campo $K^{(q+l)}$) sendo ainda $1/k$ densos nos respectivos domínios. Por fim, pelos itens (E1), ... , (E(q+l)), a órbita (segundo $K^{(q+l)}$) de cada elemento $z \in E$ retorna a pelo menos $1/m$ de z, para um tempo $t > m$. Com tudo isso, podemos afirmar que $K^{(q+l)} \in \mathcal{V} \cap A_{n,k,m}^r \cap \tilde{A}_{k,m}^r$. Isto conclui a prova do teorema. ∎

Teorema A. *Para campos que preservam volume em uma variedade compacta, sem bordo, orientável e dimensão maior do que ou igual a 3, C^r-genericamente, $1 \leq r \leq \infty$, os fechos das variedades invariantes das singularidades hiperbólicas, ou das órbitas periódicas hiperbólicas, são conjuntos transitivos por cadeia.*

Demonstração. Já está tudo pronto. Agora, resta juntar as peças. Pelo Teorema B, C^r-genericamente, $1 \leq r \leq \infty$, o fecho das variedades invariantes das singularidades hiperbólicas ou das órbitas periódicas hiperbólicas, possuem um subconjunto denso de pontos ω-recorrentes. Logo, como os fechos das variedades invariantes são conjuntos conexos, pelo Teorema 1.13, estes conjuntos são transitivos por cadeia. Isto conclui a prova do teorema. ∎

Capítulo 2

Hamiltonianos

Neste Capítulo faremos um estudo de variedades invariantes de singularidades hiperbólicas de campos Hamiltonianos.

2.1 Conceitos e notações

Uma *variedade simplética* é um par (M, ω) onde M é uma $2d$-variedade suave compacta orientável sem bordo e ω é uma 2-forma C^∞ fechada[1] e não degenerada[2]. A forma $\omega^d = \omega \wedge \overset{d}{\cdots} \wedge \omega$ é uma forma de volume em M cuja medida de Lebesgue associada será denotada por μ_ω.

O exemplo canônico de uma variedade simplética é o par (U, ω_0), onde U é um aberto do $\mathbb{R}^{2d} = \{(x_1, ..., x_d, y_1, ..., y_d)|\ x_i, y_i \in \mathbb{R}, i = 1, ..., d\}$ e ω_0 é dada por

$$\omega_0 = \sum_{i=1}^{d} dx_i \wedge dy_i. \tag{2.1}$$

Sejam (M_1, ω_1) e (M_2, ω_2) variedades simpléticas. Um difeomorfismo $f : (M_1, \omega_1) \to (M_2, \omega_2)$ de classe C^r é dito *simplético* se $f^*\omega_2 = \omega_1$, ou seja,

$$(\omega_2)_{f(p)}(Df(p)u, Df(p)v) = (\omega_1)_p(u, v),$$

quaisquer que sejam $p \in M$ e $u, v \in T_pM$; quando isto ocorre, dizemos que (M_1, ω_1) e (M_1, ω_1) são simplectomorfas. Um difeomorfismo simplético é também chamado

[1]fechada significa $d\omega = 0$.

[2]não degenerada significa que para todo $p \in M$, se $u \in T_pM$ satisfaz $\omega_p(u, v) = 0$, para todo $v \in T_pM$, então $u = 0$.

de *simplectomorfismo*. Se $f : (M, \omega) \to (M, \omega)$ é um simplectomorfismo, então $f^*\omega^d = \omega^d$, ou seja, f preserva a forma de volume ω^d.

Denotaremos $C^r(M, \mathbb{R})$ o conjunto das funções $H : M \to \mathbb{R}$ de classe C^r, ditas Hamiltonianos, munido da topologia C^r. Para cada $e \in H(M) = \{H(x) |\ x \in M\} \subset \mathbb{R}$, $H^{-1}(e) = \{x \in M |\ H(x) = e\}$ é chamado *hiperfície de nível* e, ou simplesmente, *nível de energia*. Um nível de energia é dito *regular* se não contém pontos críticos[3] de H.

Seja (M, ω) uma variedade simplética. Para cada $p \in M$, seja T_p^*M o *espaço cotangente* de p em M, ou seja, o conjunto das aplicações lineares $T : T_pM \to \mathbb{R}$. Para cada $p \in M$ considere a aplicação $\Omega_p : T_pM \to T_p^*M$ que a cada $u \in T_pM$ associa o funcional linear $\Omega_p(u)$ dado por

$$\Omega_p(u)v = \omega_p(u, v).$$

Com isso, é claro que Ω_p é linear. Sendo ω não degenerada, Ω_p é injetiva e portanto é um isomorfismo. Isto nos permite associar a cada Hamiltoniano $H \in C^r(M, \mathbb{R})$ um campo tangente X_H em M tal que, para cada $p \in M$, $X_H(p)$ é o único vetor em T_pM cuja imagem por Ω_p é o funcional linear $dH(p) : T_pM \to \mathbb{R}$, ou seja,

$$X_H(p) = \Omega_p^{-1}(dH(p)),$$

ou melhor,

$$\omega_p(X_H(p), v) = dH(p)v,$$

onde $v \in T_pM$. O campo X_H é de classe C^r se, e somente se, H é de classe C^{r+1}. O campo X_H é chamado *campo Hamiltoniano* e seu fluxo X_H^t é chamado *fluxo hamiltoniano*. O fluxo hamiltoniano preserva a medida de Lebesgue μ_ω. Pela não degenerância de ω, um ponto $p \in M$ é uma singularidade de X_H se, e somente se, $dH(p) = 0$. Isto significa que as singularidades de X_H são exatamente os pontos críticos de H. O Hamiltoniano H é constante ao longo das órbitas de X_H. Como

$$dH(p)X_H(p) = \omega_p(X_H(p), X_H(p)) = 0,$$

temos que X_H é tangente ao nível de energia que contém p. Cada nível regular $H^{-1}(e)$ é uma $(2d-1)$-subvariedade compacta de M composta por um número

[3] $x \in M$ é crítico se $dH(p) = 0$.

finito de componentes conexas invariantes pelo fluxo X_H^t. Assim, sendo $H^{-1}(e)$ um nível regular e $N_{H,e} \subset H^{-1}(e)$ uma componente de $H^{-1}(e)$, $N_{H,e}$ possui uma dinâmica própria, pela restrição do campo X_H à $N_{H,e}$. Tal dinâmica é conservativa nos seguintes termos: para cada $p \in N_{H,e}$, a aplicação

$$\omega_{N_{H,e}} : T_p N_{H,e} \times \overset{2d-1}{\cdots} \times T_p N_{H,e} \to \mathbb{R}$$

dada por

$$(\omega_{N_{H,e}})_p(v_1, \ldots, v_{2d-1}) = (\omega_p)^d (dH(p), v_1, \ldots, v_{2d-1})$$

é uma forma de volume em $N_{H,e}$ invariante por X_H^t e induz uma Medida de Lebesgue $\mu_{N_{H,e}}$ em $N_{H,e}$ preservada por X_H. Assim, pelo Teorema de Recorrência de Poincaré, em cada hiperfície de nível existe um subconjunto denso de pontos recorrentes.

Considerando a variedade simplética (U, ω_0), onde U é um aberto do $\mathbb{R}^{2d}$ e ω_0 é a definida em (2.1), o campo de um hamiltoniano $H : U \to \mathbb{R}$ é dado por

$$X_H = \left(\frac{\partial H}{\partial y_1}, \ldots, \frac{\partial H}{\partial y_d}, -\frac{\partial H}{\partial x_1}, \ldots, -\frac{\partial H}{\partial x_d} \right).$$

2.2 Lemas para Hamiltonianos

Considere $H_0 : \mathbb{R}^{2d} \to \mathbb{R}$ dada por

$$H_0(x_1, \ldots, x_d, y_1, \ldots, y_d) = -x_d,$$

com $X_{H_0} = \frac{\partial}{\partial y_d}$, e seja $\omega_0 = \sum_{i=1}^d dx_i \wedge dy_i$ donde

$$\omega_0^d = d!(-1)^{d(d-1)/2} dx_1 \wedge \cdots \wedge dx_d \wedge dy_1 \wedge \cdots \wedge dy_d.$$

Lema 2.1 (Fluxo Tubular, para Hamiltonianos). *Sejam (M^{2d}, ω) uma C^r-variedade simplética, $H \in C^r(M^{2d}, \mathbb{R})$ um Hamiltoniano com $2 \leq r \leq \infty$, e $x \in M^{2d}$ um ponto regular de H. Então, existe uma vizinhança U de x em M^{2d} e um C^{r-1}-simplectomorfismo $\phi : (U, \omega) \to (\mathbb{R}^{2d}, \omega_0)$ tal que $H = H_0 \circ \phi$.*

Demonstração. Ver Robinson [10], Teorema 5.4, à pág. 55. □

Para nosso propósito, nos resta verificar a existência de um *Lema de Perturbação para Hamiltonianos.* Isto é o conteúdo do nosso próximo resultado.

A partir de agora, em vez de denotar $(x_1,\dots,x_d,y_1,\dots,y_d)$ um elemento de $\mathbb{R}^{2d}$, adotaremos a notação compacta $(\tilde{x},x_d,\tilde{y},y_d)$ onde $\tilde{x}=(x_1,\dots,x_{d-1})$ e $\tilde{y}=(y_1,\dots,y_{d-1})$.

Agora, considere dados, um aberto da forma

$$C_{\rho,l,h}=\{(\tilde{x},x_d,\tilde{y},y_d)\in\mathbb{R}^{2n}|\ \|\tilde{x}\|^2+\|\tilde{y}\|^2<\rho,\ -l<x_d<l,\ -h<y_d<h\}$$

e dois pontos $p=(\sqrt{R},0,\dots,0,-h)\in\mathbb{R}^{2d}$ e

$$q=(\sqrt{R}\operatorname{sen}\theta,0,\dots,0,\overbrace{\sqrt{R}\cos\theta}^{(d+1)-\text{ésima coordenada}},0,\dots,0,h)\in\mathbb{R}^{2d},$$

com $0<R<\rho$. Com isso, temos o seguinte lema:

Lema 2.2 (Perturbação, para Hamiltonianos)**.** *Existe $H\in C^\infty(\mathbb{R}^{2d},\mathbb{R})$ tal que:*

1. *$X_H\equiv X_{H_0}$ fora de $C_{\rho,l,h}$;*
2. *$\varphi_{2h}(p)=q$, onde φ_t é o fluxo de X_H;*
3. *Dados $r\in\mathbb{N}$ e $\epsilon>0$, se $|\theta|$ é suficientemente pequeno, então $\|X_H-X_{H_0}\|_r<\epsilon$.*

Demonstração. Considere as seguintes funções de classe C^∞:

- $\lambda:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ nula fora de $(0,h)$ com $\int_{-h}^{h}\lambda(u)du=1$;
- $\gamma:[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ nula fora do intervalo $[0,\rho)$ com $\gamma(R)=1$, e G uma primitiva de γ tal que $G(R)=0$;
- $\tau:\mathbb{R}\to[0,+\infty)$ nula fora do intervalo $(-l,l)$ com $\tau(0)=1$.

Agora, tomemos $H:\mathbb{R}^{2d}\to\mathbb{R}$ dada por

$$H(\tilde{x},x_d,\tilde{y},y_d)=\frac{k}{2}G(\|\tilde{x}\|^2+\|\tilde{y}\|^2)\tau(x_d)\lambda(y_d)-x_d, \tag{2.2}$$

onde $k\in\mathbb{R}$ é uma constante que será tomada adequadamente mais adiante. Com isso, para $v=(\tilde{x},x_d,\tilde{y},y_d)\in\mathbb{R}^{2d}$, o campo X_H é dado por

$$\begin{aligned}X_H(v)=\Big(&k\gamma(\|\tilde{x}\|^2+\|\tilde{y}\|^2)\tau(x_d)\lambda(y_d)\tilde{y},\quad \tfrac{k}{2}G(\|\tilde{x}\|^2+\|\tilde{y}\|^2)\tau(x_d)\lambda'(y_d),\\ &-k\gamma(\|\tilde{x}\|^2+\|\tilde{y}\|^2)\tau(x_d)\lambda(y_d)\tilde{x},\ \ -\tfrac{k}{2}G(\|\tilde{x}\|^2+\|\tilde{y}\|^2)\tau'(x_d)\lambda(y_d)+1\Big).\end{aligned}$$

Com isso, o campo X_H em $\|\tilde{x}\|^2 + \|\tilde{y}\|^2 = R$ é dado por

$$X_H(v) = \Big(k\tau(x_d)\lambda(y_d)\tilde{y}, 0, -k\tau(x_d)\lambda(y_d)\tilde{x}, 1\Big).$$

O fluxo de X_H é dado por

$$\varphi_t(v) = (\tilde{X}(t,v), X_d(t,v), \tilde{Y}(t,v), Y_d(t,v)), \tag{2.3}$$

com

$$\begin{aligned}
\tilde{X}(t,v) = & \left(\sqrt{x_i^2+y_i^2}\,\mathrm{sen}\left(k\tau(x_d)\int_{y_d}^{(t+y_d)}\lambda(s)ds + \arctan\frac{x_i}{y_i}\right)\right)_{i=1,\ldots,d-1} \in \mathbb{R}^{d-1};\\
X_d(t,v) = & \ x_d;\\
\tilde{Y}(t,v) = & \left(\sqrt{x_i^2+y_i^2}\cos\left(k\tau(x_d)\int_{y_d}^{(t+y_d)}\lambda(s)ds + \arctan\frac{x_i}{y_i}\right)\right)_{i=1,\ldots,d-1} \in \mathbb{R}^{d-1};\\
Y_d(t,v) = & \ t + y_d.
\end{aligned}$$

O item 1 segue do fato que $H \equiv H_0$ fora de $C_{\rho,l,h}$, devido as propriedades das funções λ, γ e τ.

Para o item 2, note que $\varphi_{2h}(p) = \varphi_{2h}(\sqrt{R}, 0, \ldots, 0, -h) =$

$$\left(\sqrt{R}\,\mathrm{sen}\left(k\gamma(R)\tau(0)\int_{-h}^{h}\lambda(s)ds\right), 0, \ldots, 0, \overbrace{\sqrt{R}\,\cos\left(k\gamma(R)\tau(0)\int_{-h}^{h}\lambda(s)ds\right)}^{(d+1)-\text{ésima coordenanda}}, 0, \ldots, 0, h\right).$$

Agora, basta tomar $k = \frac{\theta}{\gamma(R)\tau(0)\int_{-h}^{h}\lambda(s)ds} = \theta$, para valer o item 2. Isto também implica imediatamente o item 3, devido a identidade (2.2). ∎

Note que a rotação do Lema acima ocorre dentro do nível de energia $x_d = 0$ (veja as figuras 2.2 e 2.1); mesmo assim, a perturbação afeta outros níveis, tão próximos ao de $(\sqrt{R}, 0, \ldots, 0)$ quanto se queira, bastando tomar l pequeno.

Com os lemas acima, procedendo de forma análoga ao que foi feito no Lema 1.20, obtemos o seguinte resultado:

Lema 2.3 (do Retorno, para Hamiltonianos)**.** *Sejam $X \in \mathcal{X}_H^\infty(M)$, $\mathcal{V} \subset \mathcal{X}_H^r(M)$ uma C^r-vizinhança de X, $p \in M$ um ponto regular cuja órbita é γ, e $V \subset M$ uma vizinhança de p. Dado $T > 0$, existe um campo $K \in \mathcal{V}$ de classe C^∞ tal que:*

1. *$K \equiv X$ fora de V;*

2. *$K_t(p) \in V$ para algum $t > T$;*

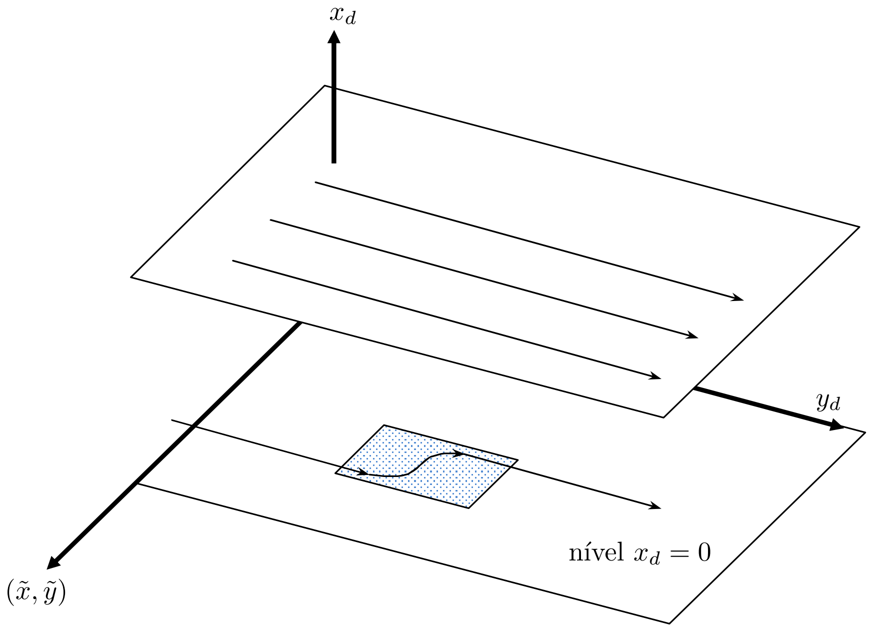

Figura 2.1: Visão de fora do nível $x_d = 0$

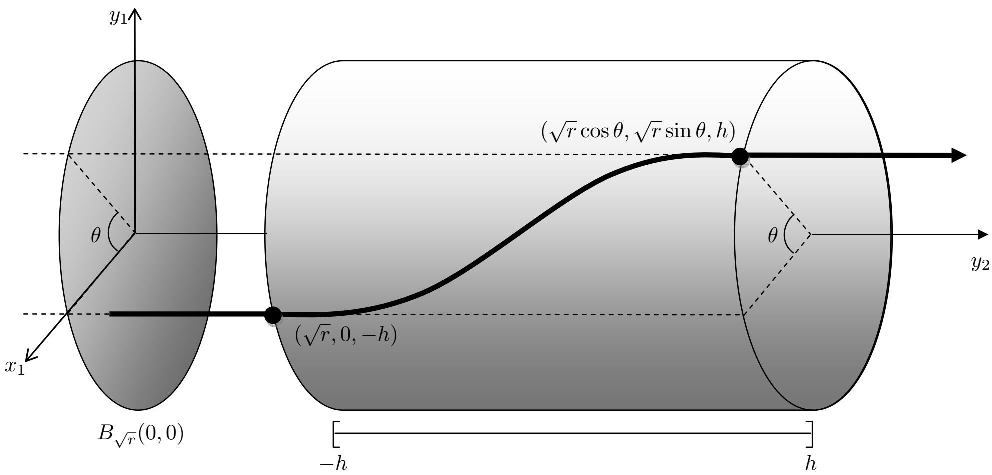

Figura 2.2: Dentro do nível $x_2 = 0$ $(d = 2)$

3. Se $p \notin \alpha(\gamma)$, então $K_t(p) = X_t(p)$, para todo $t \leq 0$.

Lema 2.4 (Regularização, para Hamiltonianos)**.** *$C^\infty(M, \mathbb{R})$ é denso em $C^r(M, \mathbb{R})$.*

Demonstração. Ver Palis & Melo [7]. □

2.3 Prova dos Teoremas A' e B'

Seja m um ponto crítico de H. Os autovalores da matriz $\exp(DX_H(m))$ são chamados *multiplicadores característico* de m. Os *multiplicadores característicos principais* de m são os $n-1$ ($\dim M = 2n$) seguintes multiplicadores característicos de m: os com módulo > 1; aqueles que têm módulo 1, mas com parte imaginária > 0; metade dos autovalores iguais a -1 e metade menos um, dos autovalores iguais a 1.

O autovalor 1 sempre ocorre com multiplicidade pelo menos igual a dois para $\exp(DX(m))$, tendo $X(m)$ como um dos autovetores e mais um autovetor na direção de crescimento dos níveis de energia. Por isso, consideramos metade de apenas $2n-2$ autovalores de $\exp(DX(m))$ como multiplicadores característicos principais.

Um ponto crítico é dito N-*elementar* se seus multiplicadores característicos principais $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ satisfazem:

$$\prod_{i=1}^{n-1} \lambda_i^{p_i} = 1, \ \ p_i \in \{-N, N\} \Longrightarrow p_i = 0, \quad i \in \{1, \ldots, n-1\}.$$

Seja $\mathcal{X}_H^r(M) = \{X_H |\ H \in C^{r+1}(M, \mathbb{R})\}$. O conjunto

$$\mathcal{S} = \{X \in \mathcal{X}_H^r(M) |\ \text{toda singularidade de } X \text{ é 1-elementar}\}$$

é aberto e denso em $\mathcal{X}_H^r(M)$ (Robinson, [9], Teorema 1.B.iii.).

Se $X \in \mathcal{S}$ e m é uma singularidade de X, então seus multiplicadores característicos principais $\lambda_1, \ldots, \lambda_{n-1}$ são diferentes de 1, e dois a dois distintos. Com efeito, no primeiro caso digamos que $\lambda_1 = 1$; assim, $\lambda_1^1 \cdot \lambda_2^0 \cdots \lambda_{n-1}^0 = 1$, contradizendo o fato de m ser 1-elementar. No segundo caso, digamos que $\lambda_1 = \lambda_2$; assim, $\lambda_1^1 \cdot \lambda_2^{-1} \cdot \lambda_3^0 \cdots \lambda_{n-1}^0 = 1$, contradizendo o fato de m ser 1-elementar. Logo, nenhum dos $2n-2$ autovalores de $\exp(DX(m))$ é 1 e todos tem multiplicidade 1. Com isso, se $X \in \mathcal{S}$ e $X(m) = 0$, então 0 não é autovalor de $DX(m)$, e todos os autovalores de $DX(m)$ tem multiplicidade igual a 1. Com isso, o conjunto $\mathcal{T}$ dos campos $X \in \mathcal{X}_H^r(M)$ tais que toda singularidade m de X satisfaz

1. 0 não é autovalor de $DX(m)$ (i.é, m é uma *singularidade simples* de X);

2. Todos os autovalores de $DX(m)$ tem multiplicidade igual a 1.

é denso em $\mathcal{X}_H^r(M)$ pois $\mathcal{T} \supset \mathcal{S}$. Como os autovalores dependem continuamente do campo, temos que $\mathcal{T}$ é aberto em $\mathcal{X}_H^r(M)$, $r \geq 1$.

Se $X \in \mathcal{T}$, então todas as singularidades de X são isoladas pelo fato de serem simples; ou melhor, se m é uma singularidade simples de X, existem vizinhanças $\mathcal{N}(X) \subset \mathcal{X}_H^r(M)$, $U_m \subset M$ de X e m respectivamente, e uma função contínua $\rho : \mathcal{N}(X) \to U_m$ que a cada campo $Y \in \mathcal{N}(X)$ associa a única singularidade simples de Y em U_m (ver Palis&Melo, [7], Prop. 3.1, Cap. II). Logo, há somente um número finito de singularidades de X; além disto, esse número se mantém em alguma vizinhança $\mathcal{U} \subset \mathcal{X}_H^r(M)$ de X. Com efeito, se $X \in \mathcal{T}$ e $m_1, \ldots, m_k$ são as singularidades de X, então existem vizinhanças $\mathcal{W} \subset \mathcal{X}_H^r(M)$, $V_1, \ldots, V_k \subset M$ de X, $m_1, \ldots, m_k$ respectivamente, tais que se $Y \in \mathcal{W}$, então Y possui exatamente uma singularidade simples em cada V_i $(1 \leq i \leq k)$. Com isso, se uma sequência (X_n) de campos em $\mathcal{X}_H^r(M)$ C^1-converge para X, cada X_n com uma singularidade $p_n \notin (V_1 \cup \cdots \cup V_k)$, então $p_n \to p$, $p \notin (V_1 \cup \cdots \cup V_k)$ com $X(p) = 0$, uma contradição. Pela multiplicidade igual a 1 para os autovalores de um ponto crítico de $X \in \mathcal{T}$, com pequenas perturbações de X, uma singularidade de X que não é hiperbólica, continua não hiperbólica[4]. Assim, com o mesmo argumento usado anteriormente, podemos afirmar que o número de singularidades hiperbólicas de $X \in \mathcal{T}$ se mantém numa vizinhança de X em $\mathcal{X}_H^r(M)$.

Teorema A'. *Para campos hamiltonianos em uma variedade compacta, sem bordo, orientável e dimensão par maior do que ou igual a 4, C^r-genericamente, $1 \leq r \leq \infty$, os fechos das variedades invariantes das singularidades hiperbólicas, são conjuntos transitivos por cadeia.*

Da mesma forma como ocorreu com o Teorema A, o Teorema A' é uma consequência do Teorema 1.13 juntamente com o seguinte resultado:

[4]Como os autovalores de $\exp(DX(m))$ ocorrem em quádruplas $(\lambda, 1/\lambda, \overline{\lambda}, 1/\overline{\lambda})$, isto criaria mais autovalores do que o permitido, pois um par de autovalores que sai do círculo unitário gera mais dois outros autovalores fora do círculo unitário.

Teorema B'. *Para $2d \geq 4$ e $1 \leq r \leq \infty$, o conjunto $\mathcal{X}_H^r(M^{2d})$ contém um subconjunto residual $\mathcal{R}$ tal que se a é uma singularidade hiperbólica de $X \in \mathcal{R}$, então a variedade instável de a contém um subconjunto denso de pontos $\omega-$recorrentes, e a variedade estável de a contém um subconjunto denso de pontos $\alpha-$recorrentes.*

Demonstração. Provaremos apenas que $W^u(a)$ contém um subconjunto denso de pontos ω-recorrentes, pois o outro caso é análogo, usando o campo $-X$.

Para $1 \leq r < \infty$ fixado, seja $A_{k,m}^r \subset \mathcal{X}_H^r(M)$, com $k, m \in \mathbb{N}$, tal que $X \in A_{k,m}^r$ quando X satisfaz as duas seguintes condições:

(1). Para qualquer singularidade a de X, todos os autovalores de $DX(a)$ são não nulos e tem multiplicidade igual a um.

(2). Se a é uma singularidade hiperbólica de X, então $W^u(a)$ possui uma esfera transversal $S_V^u(a)$ que depende somente de X, a e V, e que satisfaz as seguintes condições:

(A) Existe um subconjunto finito $Z'(k)$ em $S_V^u(a)$ que depende somente de X, a, V e k, tal que:

(A1) $Z'(k)$ é $\frac{1}{k}$ denso em $S_V^u(a)$;

(A2) $z \in Z'(k) \Rightarrow \;\; X_t(z) \in B_{\frac{1}{m}}(z), \;$ para algum $t > m$.

Afirmamos que $\mathcal{R} = \bigcap_{k,m} A_{k,m}^r$ é o conjunto desejado. Com efeito, sejam $X \in \mathcal{R}$; a uma singularidade hiperbólica de X, e $Z' = \bigcup_{k \in \mathbb{N}} Z'(k)$. Com isso, por (A1), Z' é denso em $S_V^u(a)$ e portanto $\bigcup_{t \in \mathbb{R}} X_t(Z')$ é denso em $W^u(a)$, conforme a Observação 1.3. Além disso, tomando $z \in Z'$, existe $\tilde{k}'$ tal que $z \in Z'(\tilde{k}')$ e portanto, como $X \in \tilde{A}_{\tilde{k}',m}^r$ para qualquer m, por (A) e (A2), obtemos uma sequência $t_1 < t_2 < \cdots$, com $m < t_m$, tal que $\lim_{m \to \infty} X_{t_m}(z) = z$; ou seja, z é $\omega-$recorrente.

Para o caso $r = \infty$ é só tomar $A_{k,m}^\infty = \cup_{r=1}^\infty A_{k,m}^r$ e $\mathcal{R} = \bigcap_{k,m} A_{k,m}^\infty$.

Logo, para provar o teorema, basta provar que $\mathcal{R}$ é residual. Para isto, vamos provar que cada $A_{k,m}^r$ é aberto e denso em $\mathcal{X}_H^r(M)$.

Vejamos primeiramente o caso da abertura. Como vimos no início da seção, o conjunto

$\mathcal{T}$ dos campos $X \in \mathcal{X}_H^r(M)$ tais que toda singularidade m de X satisfaz as duas condições

1. 0 não é autovalor de $DX(m)$ (i.é, m é uma singularidade simples de X), e

2. todos os autovalores de $DX(p)$ tem multiplicidade igual a 1,

é aberto e denso em $\mathcal{X}_H^r(M)$. Com isso, a propriedade (1) é aberta. Também, como vimos, se X satisfaz a condição (1), então o conjunto das singularidades hiperbólicas de X é finito, depende continuamente do campo X e sua cardinalidade é constante numa vizinhança de X; mais ainda, as variedades invariantes locais destes elementos críticos hiperbólicos variam continuamente com o campo numa vizinhança de X. Como as condições (A), (A1) e (A2) são condições abertas definidas em termos de uma finidade de elementos críticos hiperbólicos, em subconjuntos finitos de domínios fundamentais desses elementos críticos, temos que o conjunto dos campos que satisfazem (2) é aberto.

Vejamos agora a densidade. Seja $\mathcal{V}$ um aberto de $\mathcal{X}_H^r(M)$. Provemos que $\mathcal{V}$ contém um elemento de $A_{k,m}^r$. Com efeito, seja $X \in \mathcal{V}$. Pelo Lema de Regularização, podemos supor X de classe C^∞ e, sendo $\mathcal{T}$ denso, podemos supor também $X \in \mathcal{T}$, assim X satisfaz (1) e podemos supor que X possui um número finito de singularidades. Sejam $p_1, \ldots, p_s$ as singularidades hiperbólicas de X. Se estes elementos críticos não existem, nada temos a demonstrar. Seja $\mathcal{U} \subset \mathcal{V}$ uma vizinhança de X tal que o número de singularidades hiperbólicas se mantém. Sejam $S^u(p_1), \ldots, S^u(p_s)$ as respectivas esferas transversais dos elementos $p_1, \ldots, p_s$. Para cada $1 \leq i \leq s$, tomemos $Z_i'(k) \subset S^u(p_i)$ finito e $1/k$ denso em $S^u(p_i)$. Seja $\cup_{i=1}^s Z_i'(k) = \{z_1', \ldots, z_l'\}$.

Consideremos o conjunto finito $E = \{z_1', \ldots, z_l'\}$, composto somente por pontos regulares de X. Agora, proceda como no Teorema B e obtenha $K \in \mathcal{U}$ tal que: K coincide com X fora de $V_1' \cup \cdots \cup V_l'$, onde $V_1' \cup \cdots \cup V_l'$ são vizinhanças suficientemente pequenas de $z_1', \ldots, z_l'$, respectivamente; as singularidades hiperbólicas de X são as mesmas de $K \in \mathcal{U}$; os elementos do conjunto E ainda pertencem às suas respectivas variedades instáveis (segundo o campo K), sendo ainda $1/k$ densos nos respectivos domínios; e a órbita (segundo K) de cada elemento $z \in E$ retorna a pelo menos $1/m$ de z, para um tempo $t > m$. Com tudo isso, podemos afirmar que K satisfaz (1) e (2), e portanto $K \in \mathcal{V} \cap A_{k,m}^r$. Isto conclui a prova do teorema. ∎

Apêndice A

Teoria de Conley

Neste capítulo será feito um resumo da Teoria de Conley ([2]) com foco em Fluxos, na linguagem de Espaços Métricos. Assim, M sempre denotará um espaço métrico compacto com métrica d.

A.1 Recorrência por Cadeia

Definição A.1 (Recorrência por Cadeia). *Seja $\mathcal{R}(M)$ o conjunto dos pontos x de M tais que existe uma (ϵ, t)-cadeia de x até x, quaisquer que sejam $\epsilon > 0$ e $t > 0$. Os elementos de $\mathcal{R}(M)$ são chamados de pontos recorrentes por cadeia.*

Definição A.2 (Relações em M). *Para $x, y \in M$, $xR'y$ significa que existe uma (ϵ, t)-cadeia de x até y, quaisquer que sejam $\epsilon > 0$ e $t > 0$. xRy significa que existe uma (ϵ, t)-cadeia de x até y e outra de y até x, quaisquer que sejam $\epsilon > 0$ e $t > 0$.*

As relações R e R' são transitivas pelo simples fato que se $[x_0, \ldots, x_n]$ é uma (ϵ, t)-cadeia de a até b, e $[x_n, x_{n+1}, \ldots, x_{n+m}]$ é uma (ϵ, t)-cadeia de b até c, então $[x_0, \ldots, x_{n+m}]$ é uma (ϵ, t)-cadeia de a até c.

Com isso, a relação R' é transitiva em M e torna-se reflexiva quando restrita aos elementos de $\mathcal{R}(M)$. Observe que R' pode não ser simétrica.

A relação R é simétrica e transitiva em M e portanto torna-se uma relação de equivalência quando restrita aos pontos de $\mathcal{R}(M)$ por valer a reflexividade neste caso. Isto nos motiva à seguinte definição.

Definição A.3. *(Componentes Transitivas por Cadeia) Cada classe de equivalência da relação R em $\mathcal{R}(M)$ é dita uma Componente Transitiva por Cadeia.*

O seguinte resultado foi criado para nos auxiliar no reconhecimento de um conjunto transitivo por cadeia.

Lema A.4. *Se M é conexo, as seguintes afirmações são equivalentes:*

1. *M é transitivo por cadeia;*

2. *$\mathcal{R}(M) = M$;*

3. *R' é uma relação de equivalência em M;*

4. *R é uma relação de equivalência em M.*

Demonstração. As implicações (1) $\Rightarrow$ (2) e (3) $\Rightarrow$ (4) são triviais e não necessitam da hipótese de conexidade de M. Resta provar que (2) $\Rightarrow$ (3) e que (4) $\Rightarrow$ (1).

(2) $\Rightarrow$ (3): Por hipótese, R' é reflexiva. Como já é válida a transitividade, resta provar a simetria. Para provar que R' é simétrica, sejam $a, b \in M$ tais que $aR'b$. Dados $\epsilon > 0$ e $t > 0$, seja $[x_0, \ldots, x_n]$ uma (ϵ, t)-cadeia de a até b. Sejam $t_0, \ldots t_{n-1} \in \mathbb{R}$ tais que, para cada $0 \le i \le n-1$, tem-se $t_i > t$ e $d(\varphi_{t_i}(x_i), x_{i+1}) < \epsilon$. Note que tomando $t_n > t$, a sequência $[x_0, \ldots, x_n, \varphi_{t_n}(b)]$ é uma (ϵ, t)-cadeia de a até $\varphi_{t_n}(b)$. Seja

$$N = \bigcup_{i=0}^{n} \{\varphi_t(x_i) | \ \ 0 \le t \le t_i\},$$

que é um subconjunto compacto de M composto por uma união de $n+1$ arcos de órbitas. Note que podemos ordenar o conjunto N, ordenando os arcos na mesma ordem da sequência $[x_0, \ldots, x_n]$ e tomando em cada arco a ordem natural dos pontos pelo tempo do fluxo. Assim, tomando a cobertura $\{B_{\epsilon/4}(y)\}_{y \in N}$ de N, pela compacidade, existem $y_1 < \ldots < y_k \in N$ tais que $N \subset B_{\epsilon/4}(y_1) \cup \cdots \cup B_{\epsilon/4}(y_k)$. Por hipótese, para cada $1 \le j \le k$, existe $z_j \in B_{\epsilon/4}(y_j)$ ω-recorrente. Com isso, a sequência $[b, z_k, z_{k-1}, \ldots, z_2, z_1, a]$ é uma (ϵ, t)-cadeia de b até a.

(4) $\Rightarrow$ (1): É suficiente provar que cada classe de equivalência é fechada pois, sendo M conexo e as classes disjuntas, isto implica que existe somente uma classe de equivalência; ou seja, M é transitivo por cadeia. Com efeito, seja $a \in M$ e $A = \{x \in M | \ \ aRx\}$ sua classe de equivalência. Seja $b \in \overline{A}$ (fecho de A). Dados ϵ e $t > 0$, tomando $c \in A \cap B_\epsilon(b)$ e $0 < \epsilon' < \epsilon - d(c, b) < \epsilon$, existe uma (ϵ', t)-cadeia $[x_0, \ldots, x_n]$ de a até c. Trocando x_n por b, em $[x_0, \ldots, x_n]$, teremos uma (ϵ, t)-cadeia de a até b (veja a figura A.1); ou seja, $b \in A$. Isto conclui a prova do lema ■

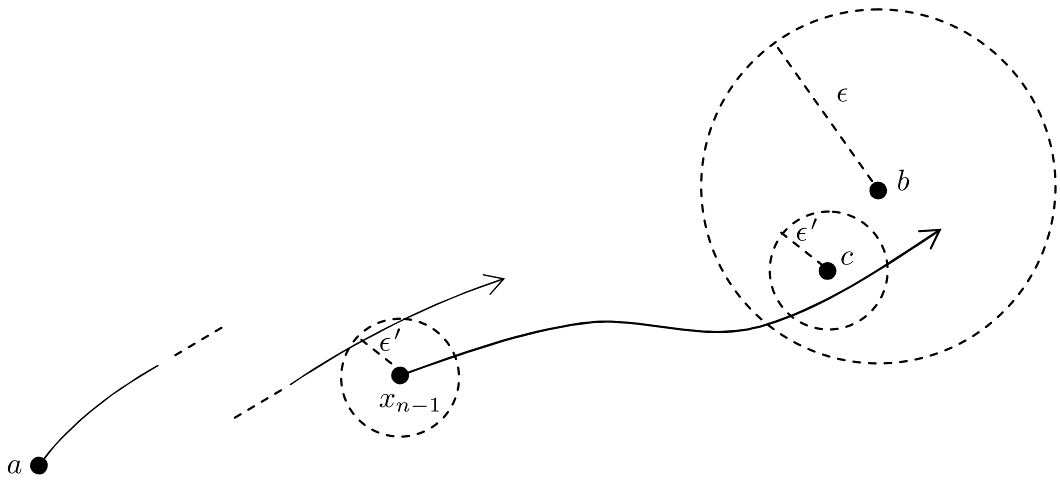

Figura A.1:

A.2 Atratores e repulsores

Definição A.5 (Conjuntos Limites)**.** *Para cada $Y \subset M$, denotemos*

$$\omega(Y) = \bigcap_{T\geq 0} \overline{\Big(\bigcup_{t\geq T} \varphi_t(Y)\Big)} \text{ e } \alpha(Y) = \bigcap_{T\leq 0} \overline{\Big(\bigcup_{t\leq T} \varphi_t(Y)\Big)} = \bigcap_{T\geq 0} \overline{\Big(\bigcup_{t\geq T} \varphi_{-t}(Y)\Big)},$$

ditos "ω-limite de Y" e "α-limite de Y", respectivamente. Para $Y = \{x\}$, denotaremos $\omega(x)$ e $\alpha(x)$ em vez de $\omega(Y)$ e $\alpha(Y)$, respectivamente.

Observe que, por definição, os conjuntos $\omega(Y)$ e $\alpha(Y)$ são fechados; com isso, sendo M compacto, estes conjuntos são também compactos. Também, note que $\overline{\Big(\bigcup_{t\geq T} \varphi_t(U)\Big)} \subset \overline{\Big(\bigcup_{t\geq S} \varphi_t(U)\Big)}$ sempre que $S < T$. Com isso, $\omega(U)$ é a interseção de uma família de compactos encaixados, indexada em $[0, \infty)$. O mesmo ocorre com $\alpha(U)$. Então, por exemplo, se V é uma vizinhança de $\omega(U)$, então existe $S > 0$ tal que $\overline{\Big(\bigcup_{t\geq T} \varphi_t(U)\Big)} \subset V$ sempre que $T \geq S$. Em particular, $\varphi_T(U) \subset V$ sempre que $T \geq S$.

Como estamos num espaço métrico, os conceitos "ω-limite" e "α-limite" podem ser traduzidos para a linguagem de sequências, da seguinte forma:

$$\omega(Y) = \{\lim_{n\to+\infty} \varphi_{t_n}(y_n) |\ y_n \in Y,\ 0 < t_1 < t_2 < \cdots \to +\infty\}; \tag{A.1}$$

$$\alpha(Y) = \{\lim_{n\to+\infty} \varphi_{t_n}(y_n) |\ y_n \in Y,\ -\infty \leftarrow \cdots < t_2 < t_1 < 0\}; \tag{A.2}$$

$$\omega(x) = \{\lim_{n\to+\infty} \varphi_{t_n}(x) |\ 0 < t_1 < t_2 < \cdots \to +\infty\}; \tag{A.3}$$

$$\alpha(x) = \{\lim_{n\to+\infty} \varphi_{t_n}(x) | -\infty \leftarrow \cdots < t_2 < t_1 < 0\}. \tag{A.4}$$

Nestes termos, a continuidade do fluxo implica imediatamente que estes conjuntos são invariantes.

Definição A.6. *Um conjunto $A \subset M$ é dito atrator se A é ω-limite de alguma vizinhança aberta de A em M. Analogamente, A é dito repulsor, se é α-limite de alguma vizinhança aberta de A em M.*

Note que todo conjunto atrator ou repulsor é compacto e invariante pelo fluxo φ_t.

Definição A.7. *Se $A \subset M$ é um atrator, denotaremos A^* como sendo o conjunto*

$$A^* = \{x \in M | \, \omega(x) \cap A = \emptyset\}.$$

Note que A^* é invariante pelo fluxo, e se U é um aberto de M que contém A tal que $A = \omega(U)$, então $A^* \cap U = \emptyset$. Observe também que M e $\emptyset$ são atratores e repulsores triviais, valendo $M^* = \emptyset$ e $\emptyset^* = M$.

Proposição A.8. *Se $A \subset M$ é atrator, então A^* é repulsor.*

Demonstração. Seja U um aberto de M contendo A e tal que

$$A = \omega(U) = \bigcap_{T\geq 0} \overline{\Big(\bigcup_{t\geq T} \varphi_t(U)\Big)}. \tag{A.5}$$

Como $A \subset U$, por (A.5), existe $T_0 > 0$ tal que $\overline{\left(\bigcup_{t\geq T_0} \varphi_t(U)\right)} \subset U$. Seja $V = M - \overline{\left(\bigcup_{t\geq T_0} \varphi_t(U)\right)}$. Note que: $(M - U) \subset V$, V é um aberto de M e $V \cap A = \emptyset$. Afirmamos que V contém A^* e que $A^* = \alpha(V)$. Com efeito, como observado anteriormente, $A^* \cap U = \emptyset$ e portanto $A^* \subset (M - U) \subset V$. Resta provar que $A^* = \alpha(V)$. Dado $v \in V$, note que para todo $t \geq T_0$ tem-se $\varphi_{-t}(v) \notin U$ pois, do contrário, teríamos $v = \varphi_t(u)$ com $u \in U$ e $t \geq T_0$, contradizendo a definição de V. Com isso, para $t \geq T_0$, $\left(\bigcup_{t\geq T_0} \varphi_{-t}(V)\right) \subset M - U \subset V$ e, sendo $M - U$ fechado, $\overline{\left(\bigcup_{t\geq T_0} \varphi_{-t}(V)\right)} \subset M - U \subset V$; logo, $\alpha(V) = \bigcap_{T\geq 0} \overline{\left(\bigcup_{t\geq T} \varphi_{-t}(V)\right)} \subset V$. Agora, se $x \in \alpha(V)$, então $\omega(x) \subset \alpha(V) \subset V$, com $V \cap A = \emptyset$; portanto, $\omega(x) \cap A = \emptyset$, ou seja, $x \in A^*$. Isto prova que $\alpha(V) \subset A^*$. Por outro lado, se $x \in A^*$, ou seja, $\omega(x) \cap A = \emptyset$, então, para todo $t \in \mathbb{R}$, $\varphi_t(x) \notin U$; portanto, $\varphi_t(x) \in V$. Com isso, para todo $t > 0$, $x = \varphi_{-t}(\varphi_t(x))$ com $\varphi_t(x) \in V$, ou seja, $x \in \varphi_{-t}(V)$ para todo $t \in \mathbb{R}$. Logo, $x \in \overline{\left(\bigcup_{t\geq T} \varphi_{-t}(V)\right)}$ para todo $T \geq 0$; ou seja, $x \in \alpha(V)$. ∎

Proposição A.9. *Se M é transitivo por cadeia, então M possui somente os atratores e os repulsores triviais.*

Demonstração. Se existe um atrator A não trivial, ou seja, A e A^* são não vazios, seja U uma vizinhança de A tal que $A = \omega(U)$. Com isso, existe $T_0 > 0$ tal que $K = \overline{\left(\bigcup_{t \geq T_0} \varphi_t(V)\right)} \subset U$. Seja $\epsilon = \text{dist}(M - U; K)$. Então, não há uma $(\epsilon/2, T_0)$-cadeia de um elemento em K até um elemento em $M - U$; em particular, não existe $(\epsilon/2, T_0)$-cadeia de um elemento em A até um elemento em A^*. Logo, M não é transitivo por cadeia. ∎

A.3 Teorema de Conley

Lema A.10. *O conjunto dos atratores é enumerável.*

Demonstração. Considere $B = \{V_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ uma base enumerável da topologia de (M, d). Sejam A um conjunto atrator, e U uma vizinhança de A em M tal que $A = \omega(U)$. Sendo U uma união de elementos em B, e A um conjunto compacto, existem abertos $V_{n_1}, \ldots, V_{n_k}$ tais que $A \subset V_{n_1} \cup \cdots \cup V_{n_k} \subset U$. Com isso, $A = \omega(V_{n_1} \cup \cdots \cup V_{n_k})$. Assim, A é o único atrator que é ω-limite do aberto $V_{n_1} \cup \cdots \cup V_{n_k}$. Com isso, há no máximo tantos atratores quanto subconjuntos finitos de B; logo, o conjunto dos atratores é enumerável. ∎

Lema A.11. *Sejam $\{A_n\}_{n \in \mathbb{N}}$ os atratores de M, e $\{A_n^*\}_{n \in \mathbb{N}}$ seus respectivos repulsores. Então, $\mathcal{R}(M) = \bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cup A_n^*)$.*

Demonstração. Provemos que $\mathcal{R}(M) \subset \bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cup A_n^*)$. Com efeito, se $x \notin \bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cup A_n^*)$, então existe $j \in \mathbb{N}$ tal que $x \notin (A_j \cup A_j^*)$; em particular, $x \notin A_j^*$ e portanto $\omega(x) \cap A_j \neq \emptyset$. Seja U uma vizinhança de A_j tal que $A_j = \omega(U) = \bigcap_{T \geq 0} \overline{\left(\bigcup_{t \geq T} \varphi_t(U)\right)}$. Trocando U por $\bigcup_{t \geq T} \varphi_t(U)$ (T suficientemente grande), se necessário, podemos supor que $x \notin \overline{U}$ e que $\overline{\varphi_t(U)} \subset U$ para todo $t > 0$. Como $\omega(x) \cap A_j \neq \emptyset$, existe $s > 0$ tal que $\varphi_s(x) \in U$. Seja

$$\epsilon = \frac{1}{2} \min\{d(\overline{\varphi_s(U)}, M - U), d(x, \overline{U})\}.$$

Com isso, não existe $(\epsilon, 2s)-$cadeia de x até x e portanto $x \notin \mathcal{R}(M)$.

Provemos que $\mathcal{R}(M) \supset \bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cup A_n^*)$. Com efeito, seja $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}(A_n \cup A_n^*)$. Se $x \notin \mathcal{R}(M)$, então existem $\epsilon > 0$ e $t > 0$ tais que não existe $(\epsilon, t)-$cadeia de x até x.

Seja $U = \{y \in M|\text{ existe } (\epsilon, t) - \text{cadeia de } x \text{ até } y\}$. Claramente U é aberto. Como vimos, $x \notin U$. Afirmamos que U é uma vizinhança de $A = \omega(U)$, e portanto A é um atrator. Com efeito, dado $z \in \omega(U)$, pela identidade $(A.1)$, z pode ser ϵ-aproximado por um elemento do tipo $\varphi_T(u)$ com $u \in U$ e T tão grande quanto se queira (ex: $T > t$). Como existe uma $(\epsilon, t)-$cadeia $[x, ..., u]$ de x até u, $[x, ..., u, \varphi_T(u)]$ é uma $(\epsilon, t)-$cadeia de x até z, ou seja, $z \in U$. Como de início, $x \in A$ ou $x \in A^*$. $x \notin A$ pois $x \notin U$. $x \notin A^*$ pois sendo este fechado e invariante, isto implicaria $\omega(x) \subset A^*$ o que não ocorre pois $\omega(x) \subset U$. Com isso, não pode ocorrer $x \notin \mathcal{R}(M)$. Isto conclui a prova do lema. ∎

Lema A.12. *Seja A um atrator. Então, $x \in M - (A \cup A^*)$ se, e somente se, $\omega(x) \subset A$ e $\alpha(x) \subset A^*$.*

Demonstração. É claro que se $\omega(x) \subset A$ e $\alpha(x) \subset A^*$ então $x \in M - (A \cup A^*)$, pois A e A^* são fechados, disjuntos e invariantes. Por outro lado, digamos que $\omega(x) \not\subset A$. Provemos que neste caso $\omega(x) \cap A = \emptyset$, ou seja, $x \in A^*$. Com efeito, digamos que existam $a, b \in \omega(x)$ tais que $a \in A$ e $b \notin A$. Seja U uma vizinhança de A tal que $A = \omega(U)$. Sem perda de generalidade podemos supor $b \notin \overline{U}$ e $\varphi_t(U) \subset U$ para todo $t > 0$. Como $a \in \omega(x) \cap U$, para $t > 0$ suficientemente grande temos $\varphi_t(x) \in U$ e portanto a órbita de x não se acumula em b devido as propriedades de U, o que contradiz a escolha de b. Analogamente, aplicando este último argumento ao campo $-X$, conclui-se que $\alpha(x) \not\subset A^*$ implica $x \in A$. Isto conclui a prova do lema. ∎

Lema A.13. *Sejam $x, y \in \mathcal{R}(M)$. Então, x e y estão na mesma componente transitiva por cadeia se, e somente se, não existe um atrator A tal que $x \in A$ e $y \in A^*$, ou $y \in A$ e $x \in A^*$.*

Demonstração. Se x e y estão na mesma componente conexa, ou seja, xRy, então, se existir $A = \omega(U)$ atrator tal que $x \in A$ e $y \in A^*$, tomando $\epsilon = \frac{1}{2}d(A, M - U)$, não existe $(\epsilon, t)-$cadeia de x até y, qualquer que seja $t > 0$, pois A é invariante. Uma contradição. Logo, A não existe. Analogamente prova-se o caso $y \in A = \omega(U)$ e $x \in A^*$.

Por outro lado, se não existe atrator A tal que $x \in A$ e $y \in A^*$, ou $y \in A$ e $x \in A^*$, então, pelo Lema A.11, dado um atrator qualquer A, $x \in A \cup A^*$ e $x \in A$ se, e somente se, $y \in A$. Dados $\epsilon > 0$ e $t > 0$, seja $U = \{z \in M|\text{ existe } (\epsilon, t) - \text{cadeia de } x \text{ até } z\}$. Como visto na prova do Lema A.11, U é aberto e $A = \omega(U)$ é um atrator. Como $x \in \mathcal{R}(M)$, temos $x \in U$ e portanto $x \notin A^*$, ou seja, $x \in A$; logo $y \in A$, ou seja, existe $(\epsilon,t)-$cadeia de x até y. Analogamente prova-se que existe $(\epsilon,t)-$cadeia de y até x. Com isso, xRy. ∎

Lema A.14. *Seja $A \subset M$ um atrator. Então, existe uma função contínua $g_A : M \to [0,1]$ tal que: $g_A^{-1}(0) = A$, $g_A^{-1}(1) = A^*$ e g_A é decrescente nas órbitas dos elemento em $M - (A \cup A^*)$.*

Demonstração. Considere $h : M \to [0,1]$ a função contínua dada por

$$h(x) = \frac{d(x,A)}{d(x,A) + d(x,A^*)}.$$

É claro que $h^{-1}(0) = A$ e $h^{-1}(1) = A^*$. Agora, defina $k : M \to [0,1]$ tal que

$$k(x) = \sup\{h(\varphi_t(x))|\ t \geq 0\}.$$

Pela invariância dos conjuntos A e A^* tem-se $k^{-1}(0) = A$ e $k^{-1}(1) = A^*$. É claro que $k(\varphi_s(x)) \geq k(\varphi_t(x))$ sempre que $s < t$. Afirmamos que k é contínua. Com efeito, k é contínua nos pontos de A^* pois: h é contínua, $h^{-1}(1) = A^*$ e $1 \geq k(x) \geq h(x)$ para todo $x \in M$ (Teorema do Sanduíche).

Provemos que k é contínua em A. Dado $\epsilon > 0$, pela continuidade de h e pelo fato que h é nula nos pontos de A, existe uma vizinhança aberta U de A tal que $h(u) < \epsilon$ qualquer que seja $u \in U$. A menos de uma interseção com alguma vizinhança aberta de A, podemos assumir $A = \omega(U)$. Como já observado, existe $S > 0$ tal que $\overline{\left(\bigcup_{t\geq T}\varphi_t(U)\right)} \subset U$ sempre que $T \geq S$. Em particular, $\varphi_T(U) \subset U$ sempre que $T \geq S$. Então, $k(x) \leq \epsilon$ sempre que x pertence à vizinhança aberta $\bigcup_{t\geq S}\varphi_t(U)$ de A.

Provemos que k é contínua em $M-(A\cup A^*)$. Com efeito, sejam K uma vizinhança compacta de x disjunta de $(A\cup A^*)$, e U uma vizinhança aberta de A. Por $h^{-1}(0) = A$ e pela continuidade de h, podemos tomar U tal que $\sup h(U) < h(x)$ e $\sup h(U) < \inf h(K)$. Como $K \subset M - (A \cup A^*)$, pelo Lema A.12, $\omega(x) \subset A$ sempre que $x \in K$. Logo, existe $t_0 > 0$ tal que $\varphi_t(K) \subset U$ sempre que $t \geq t_0$. Com isso, se $x \in K$, então $k(x) = \sup\{h(\varphi_t(x))|\ t \geq 0\} = \sup\{h(\varphi_t(x))|\ 0 \leq t \leq t_0\}$. A continuidade de k segue de $\sup\{h(\varphi_t(x))|\ 0 \leq t \leq t_0\}$ depender continuamente de x.

Finalmente, tomemos

$$g_A(x) = \int_0^\infty \frac{k(\varphi_t(x))}{e^t}dt.$$

É claro que g_A é contínua, $g_A^{-1}(0) = A$ e $g_A^{-1}(1) = A^*$. Resta provar que g_A decresce nas órbitas de $x \in M - (A \cup A^*)$. Com efeito, fixado $s > 0$, a função

$$x \mapsto [g_A(x) - g_A(\varphi_s(x))] = \int_0^\infty \frac{[k(\varphi_t(x)) - k(\varphi_{t+s}(x))]}{e^t} dt$$

é estritamente positiva pois o integrando é não nulo devido o fato que h não é constante ao longo da órbita de $x \in M - (A \cup A^*)$, ocorrendo o mesmo com k. Isso conclui a prova do Lema. ∎

Definição A.15. *(Função de Lyapunov Completa) Uma função contínua* $f : M \to \mathbb{R}$ *é dita de Lyapunov e completa para o fluxo* φ_t*, se satisfaz:*

1. *Se* $x \notin \mathcal{R}(M)$*, então* f *é decrescente na órbita de* x *segundo* φ_t*, ou seja,* $f(\varphi_s(x)) > f(\varphi_t(x))$ *sempre que* $s < t$*;*
2. *Se* $x, y \in \mathcal{R}(M)$*, então* $f(x) = f(y)$ *significa que* x *e* y *pertencem a mesma componente transitiva;*
3. $f(\mathcal{R}(M))$ *é um compacto que não é denso em qualquer aberto de* $\mathbb{R}$*.*

Note que se M é transitivo por cadeia, então toda Função de Lyapunov Completa com domínio em M é identicamente constante.

Teorema A.16. *(Conley) Todo fluxo contínuo num espaço métrico compacto possui uma Função de Lyapunov completa.*

Demonstração. Pelo Lema A.10, o conjunto dos atratores é enumerável; com isso, sejam $\{A_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ os atratores de M, e g_{A_n} suas respectivas funções, conforme o Lema A.14. Defina $f : M \to \mathbb{R}$ por

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2g_{A_n}(x)}{3^n}.$$

f é contínua pois a série converge uniformemente (Teste de Weierstrass). Se $x \notin \mathcal{R}(M)$, então, pelo Lema A.11, $\mathbb{N}' = \{n \in \mathbb{N} |\ x \notin (A_n \cup A_n^*)\}$ é não vazio. Logo, pelo Lema A.14, g_{A_n} é decrescente na órbita de x sempre que $n \in \mathbb{N}'$, e é constante (igual a 0 ou 1) na órbita de x, sempre que $n \notin \mathbb{N}'$. Logo, f é decrescente na órbita de x. Isto prova o item 1.

Se $x \in \mathcal{R}(M)$, então, pelo Lema A.11, $x \in (A_n \cup A_n^*)$ para todo $n \in \mathbb{N}$, donde $g_{A_n}(x) \in \{0, 1\}$ qualquer que seja $n \in \mathbb{N}$. Disto segue que a expansão ternária de

$f(x)$ é composta somente pelos dígitos 0 ou 2, ou seja, $f(x)$ pertence ao Conjunto de Cantor canônico. Com isso, $f(\mathcal{R}(M))$ é um compacto que não é denso em qualquer aberto de $\mathbb{R}$. Isto prova o item 3.

Sejam $x, y \in \mathcal{R}(M)$. É claro que, $f(x) = f(y)$ equivale a $g_{A_n}(x) = g_{A_n}(y) \in \{0, 1\}$, para todo $n \in \mathbb{N}$; ou seja, pelo Lema A.13, não existe um atrator A_n tal que $x \in A_n$ e $y \in A_n^*$, ou $y \in A_n$ e $x \in A_n^*$. Isto prova o item 2 e conclui a prova do teorema. ∎

Apêndice B

Campos Conservativos em Dimensão Dois

O que faremos aqui é tratar o caso em dimensão dois, classificando os fechos das variedades invariantes de campos conservativos em superfícies orientáveis. Assim, M^2 sempre denotará uma 2-variedade compacta orientável sem bordo.

B.1 Fecho de Variedades Invariantes

Seja $X \in \mathcal{X}^r(M^2)$ e ϕ_t seu fluxo. Diremos que uma singularidade $p \in M$ de X é um *centro*, se existem bolas abertas $U \subset M^2$ em torno de p e $V \subset \mathbb{R}^2$ em torno da origem e um homeomorfismo $h : U \to V$ com $h(p) = (0,0)$ que conjuga o fluxo do campo X com o do campo $(-y, x)$.

Lema B.1. *Sejam $X \in \mathcal{X}^1_{vol}(M^2)$ cujas singularidades são centros ou selas e $p \in M$ regular. Então, p é não ω-recorrente se, somente se, $\omega(p)$ é uma sela.*

Demonstração. É claro que se $\omega(p)$ é uma sela, então p é não recorrente. Por outro lado, seja $p \in M$ regular e não ω-recorrente e Σ uma seção transversal em p. Sendo p não recorrente, podemos tomar Σ não intersectando a semiórbita positiva de p. Seja $U = (a, b) \subset \Sigma$ um intervalo tal que $p \in (a, b)$, com a e b recorrentes (isto é possível pelo Teorema de Recorrência de Poincaré); com isso, a aplicação de Poincaré de primeiro retorno $P : U \to \Sigma$ está definida em quase todo U, ou seja, a menos de um conjunto de medida nula, a órbita de um elemento em U volta intersectar Σ

(Teorema de Recorrência de Poincaré). Seja $V \subset U$ o conjunto dos elementos de U cujas semiórbitas positivas retornam à Σ. Pelo Teorema do Fluxo Tubular Longo, V é um aberto de Σ e portanto é uma união de intervalos abertos. Seja $(a', b') \subset V$ um intervalo maximal. Provemos que $\omega(a')$ é uma sela. De início, se $\omega(a')$ é uma singularidade, claramente esta não pode ser um centro; assim, provaremos que $\omega(a')$ não contém pontos regulares. Com efeito, suponhamos que $\omega(a')$ contenha um ponto regular x. Tomando uma seção transversal Σ_x em x, a órbita de a' intersecta Σ_x uma infinidade de vezes. Por outro lado, se $y \in (a', b')$, o arco compacto de órbita $[y, P(y)]$ intersecta Σ_x finitas vezes, digamos k vezes. Note que existem no máximo dois pontos c_1 e c_2 em (a', b') tais que os arcos de trajetória $[c_i, P(c_i)]$ intersectam os extremos de Σ_x. A menos destes pontos, pelo Teorema do Fluxo Tubular Longo, k é constante numa vizinhança de y, e portanto k é constante nas componentes conexas de $(a', b') - \{c_1, c_2\}$. Tomando um arco $[a', a'']$ da semiórbita positiva de a', suficientemente grande de modo a intersectar Σ_x mais do que k vezes, pelo Teorema do Fluxo Tubular Longo, elementos em (a', b') próximos de a' também intersectarão Σ_x mais do que k vezes antes de retornarem à Σ, o que é uma contradição. Logo, $\omega(a')$ não contém pontos regulares, e portanto é uma sela. Analogamente prova-se que o mesmo ocorre com b'. Como o número de selas é finito, V é uma união finita de intervalos abertos de Σ, cujos extremos "morrem" em selas. Em particular, como $p \notin V$, temos que $\omega(p)$ é uma sela. ■

Observação B.2. *O Lema B.1 acima continua válido quando trocamos ω por α em seu enunciado.*

O resultado seguinte segue diretamente do Lema B.1.

Proposição B.3. *Seja $X \in \mathcal{X}^1_{vol}(M^2)$ cujas singularidades são centros ou selas. Então,*

1. *as variedades instáveis são ligações de selas ou ω-recorrentes;*

2. *as variedades estáveis são ligações de selas ou α-recorrentes.*

Corolário B.4. *Seja $X \in \mathcal{X}^1_{vol}(M^2)$ cujas singularidades são centros ou selas. Então, as variedades invariantes das selas, são ligações de selas ou recorrentes por cadeia.*

Demonstração. Segue diretamente da Proposição B.3 acima. ∎

Problema 1. *Para fluxos conservativos em superfícies com gênero maior do que zero, genericamente, as variedades invariantes são recorrentes?*

No universo dos Hamiltonianos a resposta para o Problema 1 é negativa. Isto porque considerando o Hamiltoniano $H(x,y) = (x^2-1)^2 + y^2$, a origem é uma sela do campo X_H, com dois laços que não são destruídos com pequenas perturbações de H.

Problema 2. *Para fluxos conservativos em superfícies com gênero maior do que zero, é possível "quebrar" uma ligação de selas com uma C^r-perturbação local?*

Novamente, no universo dos Hamiltonianos, a resposta para o Problema 2 tem o seguinte obstáculo:

Proposição B.5. *Considere o campo $Z(x,y) = (1,0)$ em $\mathbb{R}^2$ e um retângulo $R = [-h,h]\times[-1,1]$, $h>0$. Dado $\theta \in (0,1)$, não existe um hamiltoniano $H \in C^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$ tal que:*

1. *$X_H = Z$ fora do retângulo R;*

2. *Existe $T>0$ tal que $\varphi_T(-h,0) = (h,\theta)$, onde φ_t é o fluxo de X_H.*

Demonstração. Dado $H \in C^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{R})$, escreva $H(x,y) = y + f(x,y)$ onde $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é de classe C^∞ e constante fora do interior do retângulo R, donde f é constante na fronteira de R. Como $X_H(x,y) = \Big(1 + f_y(x,y), -f_x(x,y)\Big)$, as equações do fluxo $\varphi_t(x,y) = (X(t,x,y), Y(t,x,y))$ de X_H são

$$\begin{aligned} X' &= 1 + f_y(X,Y) \\ Y' &= -f_x(X,Y). \end{aligned}$$

Agora, multiplique a primeira equação por Y' e a segunda por $-X'$, e em seguida some as equações resultantes e obtenha

$$0 = Y' + \frac{d}{dt}\Big(f(X,Y)\Big).$$

Com isso, $Y(t,x,y) = -f(X(t,x,y), Y(t,x,y)) + k$, onde $k \in \mathbb{R}$. Como $Y(0,x,y) = y$, temos $k = f(x,y) + y$. Assim, temos Y dado implicitamente por

$$Y(t,x,y) = -f(X(t,x,y), Y(t,x,y)) + f(x,y) + y.$$

Agora, suponhamos que o fluxo φ_t satisfaz os itens 1 e 2. Pelo item 2, devemos ter

$$Y(T, -h, 0) = -f(h, \theta) + f(-h, 0) = \theta,$$

pois $X(T, -h, 0) = h$ e $Y(T, -h, 0) = \theta$. Como $(-h, 0)$ e (h, θ) pertencem à fronteira de R, temos $f(h, \theta) = f(-h, 0)$, donde $\theta = 0$. Uma contradição, pois $\theta > 0$. Isto conclui a prova da proposição. ∎

O que ainda pode-se obter é o seguinte:

Proposição B.6 (Perturbação Plana, quase local)**.** *Considere o campo $Z(x, y) = (1, 0)$ em $\mathbb{R}^2$ e um retângulo $R = [-h, h] \times [-1, 1]$, $h > 0$. Dado $\theta \in (-1, 1)$, existe um hamiltoniano $H \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R})$ tal que:*

1. *X_H é paralelo ao campo Z fora do retângulo R;*
2. *$\varphi_{2h}(-h, 0) = (h, \theta)$, onde φ_t é o fluxo de X_H;*
3. *Dado $\epsilon > 0$, se $|\theta|$ é suficientemente pequeno, então $\|X_H - Z\|_r < \epsilon$.*

Demonstração. Considere as seguintes funções de classe C^∞:

- $\alpha : \mathbb{R} \to [0, 1]$, nula em $(-\infty, -h]$ e identicamente 1 (um) em $[h, +\infty)$;
- $\beta : \mathbb{R} \to [0, 1]$, nula fora do intervalo $(-1, 1)$ e identicamente 1 (um) em $[-b, b]$, onde $|\theta| < b < 1$.

Agora seja $H : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ de classe C^∞ definida por

$$H(x, y) = k\alpha(x)\beta(y) + y, \tag{B.1}$$

onde k é uma constante que será tomada adequadamente mais adiante. Com isso,

$$X_H(x, y) = \Big(1 + k\alpha(x)\beta'(y), -k\alpha'(x)\beta(y)\Big). \tag{B.2}$$

O item 1 segue diretamente de (B.2) e das definições de α e β.

O campo X_H restrito ao retângulo $[-h, h] \times [-b, b]$ é dado por

$$X_H(x, y) = \Big(1, -k\alpha'(x)\Big),$$

cujo fluxo é

$$\varphi_t(x,y) = \Big(t+x, k[\alpha(x) - \alpha(t+x)] + y\Big). \tag{B.3}$$

Para o item 2, tomando $t = 2h$ em (B.3) temos

$$\varphi_{2h}(-h,0) = (h, k[\alpha(-h) - \alpha(h)]) = (h, -k).$$

Assim, para que ocorra $\varphi_{2h}(-h,0) = (h,\theta)$ basta tomar $k = -\theta$. Isto prova o item 2. Por (B.1), é fácil ver que se $|\theta|$ é suficientemente pequeno, então temos $\|X_H - Z\|_r < \epsilon$, donde segue o item 3. Isto conclui a prova do lema. ∎

B.2 Fecho de Órbitas Regulares

O que faremos aqui é um estudo do fecho das órbitas regulares na 2-esfera e no toro T^2.

Lema B.7. *Sejam $X \in \mathcal{X}^1_{vol}(M^2)$ e γ uma órbita periódica de X. Então, γ possui uma vizinhança composta por órbitas periódicas.*

Demonstração. Observe que se $x \notin \gamma$, então não pode ocorrer $\omega(x) = \gamma$, pois com isso γ atrairia uma vizinhança de x e portanto não existiriam pontos recorrentes nesta vizinhança, o que não pode ocorrer devido o Teorema de Recorrência de Poincaré. Sejam $p \in \gamma$, $s : (-\epsilon, \epsilon) \to \Sigma \subset M^2$ uma seção transversal em p tal que $s(0) = p$ e $P : U \to V$ a aplicação de Poincaré de primeiro retorno definida em uma vizinhança aberta $U = s(-\delta, \delta) \subset \Sigma$ de p sobre outra vizinhança aberta $V = s(a,b) \subset \Sigma$ de p, onde $0 < \delta < \epsilon$ e $-\epsilon < a < 0 < b < \epsilon$. Provemos que P é a aplicação identidade numa vizinhança de p em Σ. Pelo que já observamos, p não pode ser hiperbólico nem pode estar no ω-limite de um ponto que não pertence à γ. Com isso, $\tilde{P} : (-\delta, \delta) \to (a,b)$ dada por $\tilde{P}(x) = (s^{-1} \circ P \circ s)(x)$ é um difeomorfismo tal que $\tilde{P}(0) = 0$, $|\tilde{P}(0)| = 1$ e 0 não pode ser limite de uma órbita de um elemento em $(-\delta, \delta)$, ou melhor, nenhum ponto fixo de $\tilde{P}$ pode ser limite de uma órbita de um elemento em $(-\delta, \delta)$. Sendo M^2 orientável, pelo Teorema do Fluxo Tubular ao longo de γ, verifica-se que $\tilde{P}$ preserva orientação. Logo, $D\tilde{P}(0) = 1$ e portanto, $\tilde{P}$ é crescente. Seja $Fix(\tilde{P}) = \{x \in (-\delta, \delta) | \tilde{P}(x) = x\}$. Note que $Fix(\tilde{P})$ é fechado e que pode nem fazer sentido para elementos próximos dos extremos de $(-\delta, \delta)$, mas certamente o faz próximo da origem. É suficiente provar que $Fix(\tilde{P})$ é uma vizinhança da origem. De fato, do contrário, existe um intervalo aberto $(x_1, x_2) \subset (-\delta, \delta) - Fix(\tilde{P})$ tal que $\tilde{P}(x_1) = x_1$ e $\tilde{P}(x_2) = x_2$, próximo da origem. Podemos supor $0 \leq x_1 < x_2$. O caso $x_1 < x_2 \leq 0$ é análogo. Podemos supor que $\tilde{P}(x) > x$ em (x_1, x_2), pois, do contrário, passamos para o campo $-X$. Nestas condições, note que se $y \in (x_1, x_2)$, então $\tilde{P}(y) \in (x_1, x_2)$, donde $x_1 < y < \tilde{P}(y) < \tilde{P}^2(y) < \ldots < x_2$. Assim, a órbita de y é crescente, limitada e portanto converge para um ponto w. Como $w = \lim_{n \to +\infty} \tilde{P}^{n+1}(y) = \tilde{P}(w)$, w é um ponto fixo maior do que x_1 aderente ao intervalo (x_1, x_2), donde $w = x_2$. Uma contradição pois isto implica que a órbita fechada de $s(x_2)$ atrai uma vizinhança de $s(y)$. ■

Lema B.8. *Seja $X \in \mathcal{X}^1_{vol}(M^2)$ um campo cujas singularidades são centros e/ou selas. Seja $\mathcal{P} = \{p \in M^2 \mid p$ é centro ou p é periódico$\}$. Então, $\mathcal{P}$ tem as seguintes propriedades:*

1. *é aberto em M^2;*
2. *é invariante pelo fluxo de X;*
3. *sua fonteira é vazia ou é composta por selas e ligações de selas.*

Demonstração. O item 1 segue do Lema B.7 e da representação local em torno de um centro, que são singularidades isoladas cercadas de órbitas periódicas. O item 2 segue do fato que $\mathcal{P}$ é uma união de órbitas. Para o item 3, suponhamos que a fronteira $\partial\mathcal{P}$ de $\mathcal{P}$ seja não vazia. Pela representação local em torno de um , um centro não pode pertencer à fronteira de $\mathcal{P}$, pois pertence ao interior de $\mathcal{P}$; também, uma órbita periódica não intersecta a fronteira de $\mathcal{P}$, pois está contida no interior de $\mathcal{P}$. Com isso, a fronteira de $\mathcal{P}$ é composta por selas ou órbitas regulares não periódicas. Agora, tome uma órbita regular γ contida na fronteira de $\mathcal{P}$ e proceda como no Lema B.1 para concluir que $\omega(\gamma)$ não contém pontos regulares. Aplicando o mesmo argumento ao campo $-X$, concluímos que γ nasce em uma singularidade (sela). Isto conclui a prova do lema. ■

Definição B.9 (Círculo transversal)**.** *Seja $X \in \mathcal{X}^r(M^2)$. Um círculo transversal a X é uma curva C simples, fechada e de classe C^∞ tal que $X|_C$ não pertence ao espaço (reta) tangente de qualquer ponto de C.*

Lema B.10 (cf. Palis e Melo págs. 156-160)**.** *Sejam $X \in \mathcal{X}^1(M^2)$ cujas órbitas são centros ou hiperbólicas. Se γ é uma órbita ω-recorrente não trivial de X, então*

1. *por qualquer ponto $p \in \gamma$ passa um círculo transversal C_p;*
2. *exceto por um conjunto finito $S_p \subset C_p$, a órbita de qualquer ponto em C_p volta a intersectar C_p;*
3. *se $x \in S_p$, então $\omega(x)$ é uma sela;*

Observação B.11. *Uma consequência trivial do Teorema da Curva de Jordan em S^2 é que toda órbita recorrente de $X \in \mathcal{X}^r(S^2)$ é uma singularidade ou órbita fechada.*

Proposição B.12. *Seja $X \in \mathcal{X}^1_{vol}(S^2)$ cujas singularidades são centros ou selas. Então, as órbitas regulares de X são periódicas ou ligações de selas. Em particular, se não existe sela, todas as órbitas regulares são periódicas.*

Demonstração. Seja γ uma órbita regular de X. Se γ é recorrente, então, pela Observação B.11, γ é periódica, ou seja, está contida em $\mathcal{P}$. Se γ não é recorrente, então não é periódica e é acumulada por órbitas periódicas (pelo Teorema de Recorrência de Poincaré e pela Observação B.11), ou seja, γ está contida em $\partial\mathcal{P}$. Com isso, pelo Lema B.8, γ é uma ligação de sela. Isto conclui a prova. ∎

Corolário B.13. *Em S^2, temos $\overline{\mathcal{P}} = S^2$, ou melhor, o fluxo de $X \in \mathcal{X}^1_{vol}(S^2)$ é uma estrutura (grafo) de selas e ligações de selas, complementada por anéis de órbitas periódicas e centros.*

Observação B.14. *Uma outra consequência da Proposição B.12 é que a existência de ligações de selas é persistente na esfera S^2. Dessa forma, não é verdade que genericamente o fecho de uma variedade invariante (neste caso ligações de selas) é transitivo por cadeia. Com isso, os Teoremas A e B não são verdadeiros na esfera S^2.*

Definição B.15 (Grafo Circular)**.** *Seja X um campo de classe C^r em uma variedade M^2. Um grafo circular é uma sequência finita de elementos distintos*

$$s_1, \gamma_1, s_2, \gamma_2, \ldots, s_n, \gamma_n \quad (n \geq 1)$$

onde cada s_i é uma singularidade de X e γ_i é uma órbita regular ligando s_i à s_{i+1}, ou seja, $\alpha(\gamma_i) = s_i$ e $\omega(\gamma_i) = s_{i+1}$ ou, $\alpha(\gamma_i) = s_{i+1}$ e $\omega(\gamma_i) = s_i$, onde admitimos que $s_{n+1} = s_1$.

Note que um grafo circular é homeomorfo a uma circunferência e invariante pelo fluxo do campo. Note também que a fonteira de $\mathcal{P}$ é uma união de grafos circulares. Seja $X \in \mathcal{X}^1(T^2)$ com c e s os números de centros e selas de X, respectivamente. Pelo Teorema de Poincaré-Hopf temos $c = s$.

Proposição B.16. *Seja $X \in \mathcal{X}^1_{vol}(T^2)$ cujas singularidades são centros ou selas. Assim,*

1. *Se X possui órbita periódica que não limita um disco, então as órbitas regulares são periódicas ou ligações de selas;*

2. *Se toda órbita periódica de X limita um disco, então as órbitas regulares contidas em $T^2 - \mathcal{P}$ são ligações de selas ou densas em $T^2 - \mathcal{P}$.*

3. *Se X não possui órbitas periódicas, então todas as órbitas são densas.*

Demonstração. (Item 1): Seja γ uma órbita periódica que não limita um disco em T^2. Com isso, pelo Lema B.7, γ possui uma vizinhança composta por órbitas que não limitam um disco em T^2. Assim, podemos tomar γ' suficientemente próxima de γ tal que γ e γ' limitam um cilindro $N \subset T^2$ formado por órbitas periódicas de X. Agora, tomemos o cilindro $M = T^2 - N$ cuja fronteira é $\gamma \cup \gamma'$. Agora, "tapemos " os buracos em M com discos D_γ e $D_{\gamma'}$ em $\mathbb{R}^3$, limitados por γ e γ' respectivamente. Em seguida, estendemos o campo X de M para um campo X' na variedade $M' = M \cup D_\gamma \cup D_{\gamma'}$ (homeomorfa à esfera S^2) tal que possui um centro no meio de cada disco e que as demais órbitas nesses discos sejam fechadas em torno deste centro. Isto pode ser feito preservando volume. Agora, estamos na esfera S^2 e portanto todas as órbitas regulares de X' são periódicas ou ligações de selas. Portanto, as órbitas regulares de X em M são periódicas ou ligações de selas. Como sabemos que as órbitas de X em N são periódicas e $T^2 = M \cup N$, o item 1 está provado.

(Item 3): Como X não possui órbitas periódicas, X não possui singularidade, pois do contrário, pelo Teorema de Poincaré-Hopf, X possuiria um centro, obrigatoriamente cercado por órbitas periódicas. Assim, pelo Teorema de Recorrência de

Poincaré, tomemos um ponto $p \in T^2$ recorrente qualquer, obrigatoriamente com recorrência não trivial. Pelo Lema B.10, existe um círculo transversal C contendo p. Pelo item 2 do Lema B.10 e pelo fato que não existe singularidade do campo X, e em particular selas, a aplicação f de primeiro retorno está definida em todo o círculo C. Note que pelo fato do campo X não possuir órbitas periódicas, f não possui pontos periódicos. Para $x \in C$, denotemos $\omega(f, x)$ o $\omega(x)$ segundo f. Afirmamos que f é minimal, ou seja, toda semiórbita positiva de um elemento em C (segundo f) é densa em C. Com efeito, suponhamos para uma contradição que exista $x \in C$ tal que $\omega(f, x) \neq C$. Com isso, seja (a, b) uma componente conexa de $C - \omega(f, x)$, donde $a, b \in \omega(f, x)$. Pelo Teorema de Recorrência de Poincaré, (a, b) contém pontos recorrentes segundo o fluxo de X, mas o mesmo ocorre segundo f. Com isso, para algum $k > 0$, $f^k(a, b) \cap (a, b) \neq \emptyset$. Porém, isto implica que $f^k(a, b) = (a, b)$ pois do contrário teríamos $f^k(a) \in (a, b)$ ou $f^k(b) \in (a, b)$, o que não pode ocorrer pois $\omega(f, x)$ é invariante. Assim, $f^k(a) = a$ ou $f^k(a) = b$; uma contradição pois f não possui órbitas periódicas. Assim, para concluir a prova é suficiente provar que $\cup_{t\in\mathbb{R}} X_t(C) = T^2$. Pelo Teorema do Fluxo Tubular, $\cup_{t\in\mathbb{R}} X_t(C)$ é aberto em T^2. Provemos que $\cup_{t\in\mathbb{R}} X_t(C)$ é fechado em T^2. Com efeito, a função que a cada ponto $x \in C$ associa o tempo de primeiro retorno é contínua e portanto assume um valor máximo m em C. Seja $\delta > 0$ tal que se $d(x, C) < \delta$, então $x \in \cup_{t\in\mathbb{R}} X_t(C)$. Tomando um ponto y na fronteira de $\cup_{t\in\mathbb{R}} X_t(C)$ e um tubo suficientemente grande ao longo da órbita de y, porém mais fino do que δ, teremos que as órbitas de $\cup_{t\in\mathbb{R}} X_t(C)$ que passam por esse tubo e estão suficientemente próximas de y, levarão um tempo maior do que m para sair do tubo e portanto intersectarão C ao longo deste percurso, porém estes pontos de interseção estão a uma distância menor do que δ da órbita de y e portanto, pela hipótese sobre δ, a órbita de y está contida em $\cup_{t\in\mathbb{R}} X_t(C)$. Logo $\cup_{t\in\mathbb{R}} X_t(C)$ é fechado, e sendo T^2 conexo, teremos $\cup_{t\in\mathbb{R}} X_t(C) = T^2$. Isto conclui a prova do item 3.

(Item 2): Por hipótese, toda órbita periódica γ é homotópica a um ponto pois limita um disco D_γ e portanto não há cilindros de órbitas periódicas. O fluxo no interior de cada D_γ se comporta como os da esfera S^2 e portanto suas órbitas satisfazem a tese, segundo o Corolário B.13. Com isso, sem perda de generalidade, podemos supor que no interior de cada D_γ o fluxo é o mais simples possível; por exemplo, é somente um centro cercado de órbitas periódicas. Dessa forma, cada componente conexa de $\mathcal{P}$ é um centro cercado de órbitas periódicas. Temos dois casos a considerar. Se todo grafo circular de X é homotópico a um ponto, então, a fronteira do conjunto formado pela união de um centro com todas as órbitas fechadas em torno deste centro, é homotópica a um ponto. Com isso, identifiquemos cada componente conexa de $\overline{\mathcal{P}}$ (fecho) com um ponto, e seja $\mathcal{T}^2$ o novo toro obtido após estas identificações. O campo X em T^2 induz imediatamente um fluxo $\mathcal{X}_t$ em $\mathcal{T}^2$ sem centros, sem órbitas periódicas e que possui as componentes conexas de $\overline{\mathcal{P}}$ como pontos fixos, além de algumas selas de X (ou não). $\mathcal{T}^2$ possui uma medida de volume natural, induzida pela de T^2, que é preservada por $\mathcal{X}_t$. Cada ponto fixo de $\mathcal{X}_t$ possui um número par de ramos instáveis e estáveis[1], sendo que não há ramos adjacentes do mesmo tipo (veja figura B.2). Com isso, o índice de Poincaré de uma singularidade com n ramos é $\frac{2-n}{2} \leq 0$. Como a característica de Euler de $\mathcal{T}^2$ é zero, deve existir somente singularidades com dois ramos, ou seja, um estável e outro instável. Porém, este tipo de singularidade não interfere em nada na dinâmica, donde podemos eliminá-las conectando seus ramos para comporem uma órbita regular. Com isso, podemos supor que $\mathcal{X}_t$ é um fluxo sem pontos fixos em $\mathcal{T}^2$. Pero Corolário B.18 (leia a observação B.17) e pelo fato que $\mathcal{X}_t$ não possui órbitas periódicas, todas as órbitas de $\mathcal{X}_t$ são densas. Traduzindo este resultado para X, o mesmo ocorre com as órbitas de X em $T^2 - \mathcal{P}$ que não são ligações de selas. Se X possui um grafo circular não homotópico a um ponto, então, cortando M ao longo deste grafo e identificando cada componente da fronteira da nova variedade, reduzimos o problema para a esfera S^2 donde obtemos que toda órbita regular contida em $T^2 - \mathcal{P}$ é uma ligação de selas, conforme o Corolário B.13. Isto conclui a prova do Teorema. ∎

Observação B.17. *O seguinte corolário é uma consequência somente dos itens 1 e 3 da proposição anterior, valendo também para o caso C^0.*

Corolário B.18. *Se X não possui singularidades, então todas as órbitas são periódicas ou todas as órbitas são densas em T^2.*

Demonstração. Por hipótese e pelo Teorema do Índice de Poincaré, X não possui órbita periódica que limita um disco. Com isso, ou X não possui órbita periódica ou toda órbita periódica não limita um disco. No primeiro caso teremos todas as

[1] Seja W_p^u a componente conexa de $\{x \in M| \ \ \alpha(x) = p\} \cap V$ que contém p, onde V é uma vizinhança de p suficientemente pequena. Um ramo instável é cada componente conexa de $W_p^u - \{p\}$. Analogamente define-se ramo estável.

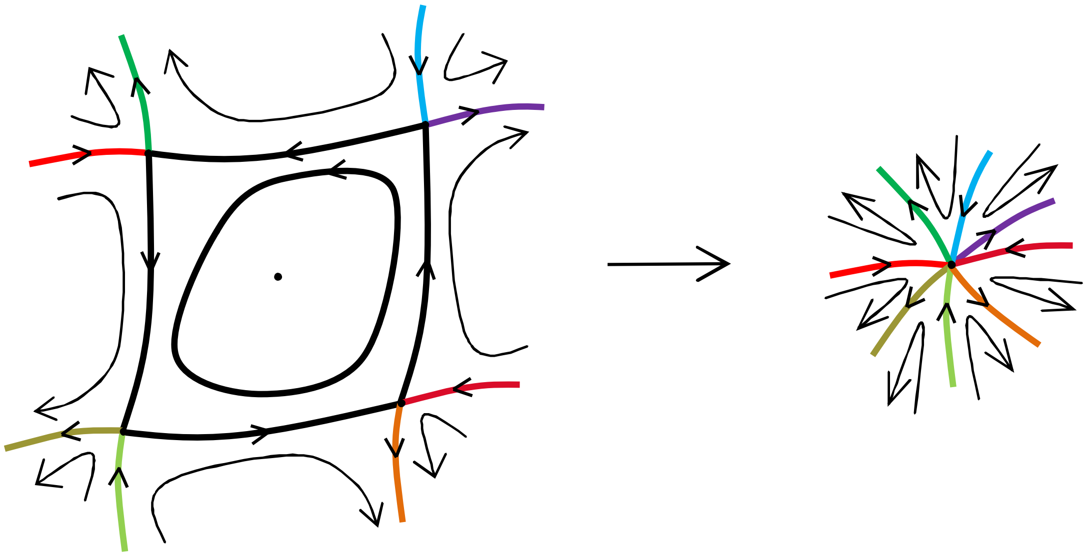

Figura B.1: Identificação

órbitas densas e no segundo caso teremos todas as órbitas periódicas. ∎

Conjectura: Em superfície com gênero maior do que um, se um campo conservativo não possui órbitas periódicas nem ligações de selas, então todas as órbitas regulares são densas na superfície.

Apêndice C

Lema de Perturbação - parte 2

O que faremos aqui é apresentar uma perturbação local preservando volume, para uma classe mais geral de campos conservativos.

Lema C.1 (de Perturbação)**.** *Seja $Y : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ o campo definido por $Y(x, y, z) = (0, 0, l(x, y))$, onde $l : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ é positiva e de classe C^∞. Considere o cilindro $C = \partial B_\delta(0, 0) \times [-h, h] \subset \mathbb{R}^3$, $h > 0$, e pontos $p \in \partial B_\delta(0, 0) \times \{-h\}$ e $q \in \partial B_\delta(0, 0) \times \{h\}$. Seja θ o ângulo entre os vetores $p - (0, 0, -h)$ e $q - (0, 0, h)$. Dado $\xi > 0$ pequeno ($\xi < \delta$), existe um campo Z de classe C^∞ em $\mathbb{R}^3$ com as seguintes propriedades:*

1. *Z preserva a forma de volume $dx \wedge dy \wedge dz$;*
2. *$Z \equiv Y$ fora do anel cilíndrico $A_\xi(C)$;*
3. *A órbita de p, segundo Z, passa por q;*
4. *Dados $r \in \mathbb{N}$ e $\epsilon > 0$, se $|\theta|$ é suficientemente pequeno, então $\|Z - Y\|_r < \epsilon$.*

Demonstração. A menos de um movimento rígido, podemos tomar

$$p = (\delta, 0, -h) \text{ e } q = (\delta \cos\theta, \delta \operatorname{sen}\theta, h),$$

com $-\pi < \theta \leq \pi$. Fixemos as seguintes funções de classe C^∞:

- $\lambda : \mathbb{R} \to [0, +\infty)$ uma função de classe C^∞ nula fora de $(-h, h)$ e positiva em $(-h, h)$;
- $\gamma : [0, +\infty) \to [0, +\infty)$ uma função de classe C^∞, nula fora do intervalo $(\delta - \xi, \delta + \xi)$, positiva em $(\delta - \xi, \delta + \xi)$ com $\gamma(\delta) = 1$.

Tomando $v = (x, y, z)$, considere o campo $Z : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dado por

$$Z(v) = \Big(-k_\theta \lambda(z)\gamma(\sqrt{x^2+y^2})y, k_\theta \lambda(z)\gamma(\sqrt{x^2+y^2})x, l(x,y)\Big), \tag{C.1}$$

onde k_θ é uma constante que será tomada adequadamente mais adiante, de modo a fazer com que a órbita de p passe pelo ponto q.

Sendo γ nula numa vizinhança da origem, Z é de classe C^r pois cada componente o é. Como é de fácil verificação, o divergente de Z em relação à forma de volume canônica (= traço da derivada, ver Lema 1.14 no Cap. 1) é nulo em todo ponto e portanto Z satisfaz o item 1. Sendo λ nula fora de $(-h, h)$ e γ nula fora de $(\delta - \xi, \delta + \xi)$, Z coincide com Y fora de $A_\xi(C)$ e portanto também satisfaz o item 2.

Para o item 3, a ideia é levar o problema para $\mathbb{R}^2$ por meio de um "levantamento" do campo Z restrito ao cilindro invariante $\sqrt{x^2+y^2} = \delta$. Isto nos permitirá encontrar o valor de k_θ para que a órbita de p passe pelo ponto q. Vamos às contas.

Considere a aplicação $\Phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ tal que $\Phi(x, y, z) = (z, \delta \arctan(y/x))$. Tomando $w(x, y) = \delta \arctan(y/x)$, temos $\frac{\partial w}{\partial x} = -y$ e $\frac{\partial w}{\partial y} = x$. Com isso, o jacobiano de Φ é

$$J\Phi(x, y, z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -y & x & 0 \end{bmatrix}.$$

Agora considere o campo $X = \Phi_* Z$ dado por

$$J\Phi(x,y,z)\cdot Z(x,y,z) = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ -y & x & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -k_\theta\lambda(z)y \\ k_\theta\lambda(z)x \\ l(x,y) \end{bmatrix} = (l(x,y), \delta\lambda(z)) =$$

$$= (l(\delta\cos w, \delta \,\mathrm{sen}\; w), \delta k \lambda(z)).$$

Definamos $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dada por $f(w) = l(\delta \cos w, \delta\,\mathrm{sen}\; w)$. Note que f é positiva, periódica e de classe C^∞. Seja F uma primitiva de f. Observe que F é invertível, pois sua derivada é positiva em qualquer ponto. Consideremos o campo X em $\mathbb{R}^2$ dado por

$$X(z, w) = (f(w), \delta k_\theta \lambda(z)).$$

As equações do fluxo de X são

$$\begin{cases} z' = f(w) \\ w' = \delta k_\theta \lambda(z) \end{cases} \tag{C.2}$$

Multiplicando ambos lados da segunda equação de (C.2) por $f(w)$ obtemos $f(w)w' = f(w)\delta k_\theta \lambda(z)$ e portanto, devido a primeira equação, obtemos $f(w)w' =$

$\delta k_\theta \lambda(z) z'$. Integrando ambos lados desta última identidade obtemos $F(w) = \delta k_\theta L(z) + c$, $c \in \mathbb{R}$. Sendo F invertível, obtemos

$$w(t, z_0, w_0) = F^{-1}(\delta k_\theta L(z(t, z_0, w_0)) + c).$$

Para que ocorra $w(0, z_0, w_0) = w_0$, basta tomar $c = F(w_0) - \delta_\theta L(z_0)$. Com isso, obtemos

$$w(t, z_0, w_0) = F^{-1}\Big(\delta k_\theta L(z(t, z_0, w_0)) + F(w_0) - \delta k_\theta L(z_0)\Big). \tag{C.3}$$

Para que a órbita de p (segundo Z) passe pelo ponto q, é suficiente que a órbita de $(-h, 0)$ (segundo o campo X), passe pelo ponto $(h, \delta\theta)$. Para isto, seja $T > 0$ o instante que a órbita de $(-h, 0)$ cruza a reta $z = h$ de $\mathbb{R}^2$. Como,

$$\begin{aligned} w(T, -h, 0) = &\ F^{-1}\Big(\delta k_\theta L(z(T, -h, 0)) + F(0) - \delta k_\theta L(-h)\Big) \\ = &\ F^{-1}\Big(\delta k_\theta L(h) + F(0) - \delta k_\theta L(-h)\Big) \\ = &\ F^{-1}\Big(\delta k_\theta [L(h) - L(-h)] + F(0)\Big), \end{aligned}$$

para que ocorra $w(T, -h, 0) = \delta\theta$, basta tomar

$$k_\theta = \frac{F(\delta\theta) - F(0)}{\delta \int_{-h}^{h} \lambda(s) ds}.$$

Isto prova o item 3. Também, sendo F contínua, temos $\lim_{\theta \to 0} k_\theta = 0$; donde, é fácil verificar a validade do item 4. Isto conclui a prova do lema. ∎

Observação C.2. *O fluxo de Z é a imagem do fluxo de X pela "inversa" da aplicação Φ.*

Referências Bibliográficas

[1] Abraham, R.; Marsden, J. - Foundations of Mechanics. Benjamin/Cummings, Reading, MA, 1978.

[2] Conley, C. - Isolated Invariant Sets and the Morse Index, CBMS Reg. Conf. Ser. in Math., Vol. 38, AMS, Providence, RI (1978).

[3] Franks, J. - Topological methods in Dynamics. Chapter 7 of "Handbook of Dynamical Systems", Vol 1A (Edited by B. Hasselblatt and A. Katok).

[4] Mañé, R. - Teoria Ergódica. Rio de Janeiro: IMPA, 1983. (Projeto Euclides)

[5] Moser, J.; Zehnder, E.J. - Notes on Dynamical Systems. Courant Lecture Notes in Mathematics, N. 12, 2005.

[6] Oliveira, F. - Density of recurrent points on invariant manifolds of sympletic and volume-preserving diffeomorphisms. *Ergod. Th. & Dynam. Sys.* **22** (2002), 925-934.

[7] Palis, J.; de Melo, W. - Introdução aos sistemas dinâmicos. Rio de Janeiro: IMPA, 1978. (Projeto Euclides)

[8] Peixoto, M. - Structural Stability on two-dimensional manifolds. *Topology* **1** (1962), 101-120.

[9] Robinson, C. - Generic properties of conservative systems. *Amer. J. Math.* **102** (3) (1970), 562-603.

[10] Robinson, C. - Lectures on Hamiltonian Systems. Rio de Janeiro: IMPA, 1971. (Monografias de Matemática)

[11] Szlenk, W. - An Introduction to the Theory of Smooth Dynamical Systems. Warszawa: PWN-Polish Scientific Publishers, 1984. (translated by M.E. Kuczma)

[12] Zuppa, C. - Regularisation C^∞ des champs vectoriels qui préservent l'élément de volume. *Bull. Braz. Math. Soc.* **10** (2) (1979), 51-56.