UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS – UFMG

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS – ICEx

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

CURSO DE ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA PARA PROFESSORES

ANÁLISE COMBINATÓRIA PARA O ENSINO MÉDIO

Paulo Érison Cavalcante de Oliveira Tataia

Belo Horizonte – 2012

Paulo Érison Cavalcante de Oliveira Tataia

Monografia de Especialização:

ANÁLISE COMBINATÓRIA PARA O ENSINO MÉDIO

Monografia apresentada à coordenação do curso de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Matemática.

Orientadora:

Prof. Aniura Milanés Barrientos

Co-orientadora:

Prof. Nora Olinda Cabrera Zúniga

Belo Horizonte – 2012

Paulo Érison Cavalcante de Oliveira Tataia

Monografia de Especialização:

ANÁLISE COMBINATÓRIA PARA O ENSINO MÉDIO

Monografia apresentada à coordenação do curso de Pós–Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Especialista em Matemática.

APROVADO:______de________________de__________.

____

Prof.: Dr. Alberto Berly Sarmiento Vera

____

Prof.: Dr. Nora Olinda Cabrera Zúniga (co-orientadora)

____

Prof. Dr. Aniura Milanés Barrientos (orientadora)

AGRADECIMENTOS

Agradeço a Deus pela oportunidade de realizar este sonho, pela força e pela coragem que me deu durante esta caminhada. Aos meus pais, Paulo de Tarso e Liduína Tânia, pelo incentivo, dedicação e apoio dado à minha decisão de investir nos meus estudos. Ao meu irmão, Rômulo, pela compreensão e pela amizade. A minha namorada, Áurea, pelo amor, pela paciência e por estar ao meu lado me apoiando, dando força e ajudando em todos os momentos de dificuldades. Agradeço à minha orientadora, Aniura, por ter aceitado me orientar neste trabalho e pelo incentivo durante a elaboração do mesmo.

RESUMO

O objetivo desta monografia é propor o desenvolvimento de atividades que desafiem e motivem tanto professores como alunos a estudarem, aprenderem e entenderem o conteúdo de Análise Combinatória no Ensino Médio; como um instrumento que facilite a relação entre o ensino do docente e a aprendizagem do discente.

A razão que motivou este trabalho de monografia foi o fato de que boa parte dos professores de matemática do Ensino Médio consideram a Análise Combinatória como algo complicado de ser ensinado; além da questão das dificuldades de entendimento por parte dos alunos que são induzidos à memorização de fórmulas e a aplicação das mesmas à resolução dos exercícios para compreenderem esse conteúdo.

Para isso, inicialmente apresentaremos alguns conceitos que servirão como um auxílio para que o professor possa trabalhar nas atividades propostas a serem desenvolvidas juntamente com os alunos. Dessa maneira, elaborou-se um guia para o professor apresentando uma forma para que ele possa trabalhar cada atividade proposta que envolve problemas de contagem em sala de aula e forneceu-se uma folha com a atividade impressa para que os alunos possam explorar o problema.

Buscou-se com as atividades apresentar aos docentes estratégias eficientes que podem ser utilizadas para o ensino de combinatório e ajudar aos discentes a compreenderem melhor os problemas de contagem utilizando o raciocínio combinatório.

Palavras chaves: Análise Combinatória, Ensino Médio, ensino, aprendizagem, atividades propostas e raciocínio combinatório.

ABSTRACT

The purpose of this monograph is to propose the development of activities that challenge and motivate both teachers and students to study, learn and understand the contents of Combinatorial Analysis in Average Teaching; as an tool that facilitates the relationship between teaching and learning of teachers and learners.

The reason that motivated of this monograph work was the fact that much of the mathematics teachers of Average Education consider the Combinatorial Analysis as something complicated to be taught; beyond the issue of the difficulties of understanding on the part of students who are driven to memorization formulas and their implementation to solving exercises to understand this content.

Initially, we introduce some concepts that will serve as an aid for the teacher to work in the proposed activities to be undertaken along with the students. Thus, we prepared a guide for the teacher presenting a way that it can work each proposed activity that involves counting problems in the classroom and gave up a sheet with the activity printed so that students can explore the problem.

Was sought activities present teachers effective strategies that can be used for teaching combinatorial and to help students better understand the counting problems using logical thinking.

Keywords: Combinatorial Analysis, Average Teaching, teaching, learning, proposed activities and logical thinking.

Sumário

INTRODUÇÃO

De uma maneira geral, pode-se dizer que a Análise Combinatória é a parte da Matemática que analisa estruturas e relações discretas. Constituindo assim, em uma parte da Matemática que tem um amplo campo de investigação com intensa atividade devido às numerosas aplicações nas mais diversas áreas.

Segundo Roa e Navarro-Pelayo (2001, p.1) “os problemas combinatórios e as técnicas para sua resolução tiveram e têm profundas implicações no desenvolvimento de outras áreas da matemática como a probabilidade, a teoria dos números, a teoria dos autômatos e inteligência artificial, investigação operativa, geometria e topologia combinatórias”.

As Orientações Curriculares para o Ensino Médio (OCEM) no volume 2 ressaltam que os conteúdos do bloco *Análise de dados e probabilidade* têm sido recomendados para todos os níveis da educação básica, em especial para o ensino médio. Ainda segundo as OCEM, o estudo desse bloco de conteúdo possibilita aos alunos ampliarem e formalizarem seus conhecimentos sobre o raciocínio combinatório, probabilístico e estatístico.

A importância da contagem no Ensino Médio é destacada também pelas Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN + Ensino Médio) no tema *análise de dados,* que ressaltam que os conteúdos e habilidades propostos para a contagem a serem desenvolvidas nesse tema seriam:

- Decidir sobre a forma mais adequada de organizar números e informações com o objetivo de simplificar cálculos em situações reais envolvendo grande quantidade de dados ou de eventos.
- Identificar regularidades para estabelecer regras e propriedades em processos nos quais se fazem necessários os processos de contagem.
- Identificar dados e relações envolvidas numa situação-problema que envolva o raciocínio combinatório, utilizando os processos de contagem.

Os próprios Parâmetros Curriculares Nacionais para o Ensino Médio destacam, entre outros conteúdos, a importância do raciocínio combinatório na formação dos alunos do Ensino Médio no seguinte trecho:

> As habilidades de descrever e analisar um grande número de dados, realizar inferências e fazer predições com base numa amostra de população, aplicar as idéias de probabilidade e combinatória a fenômenos naturais e do cotidiano são aplicações da Matemática em questões do mundo real que tiveram um crescimento muito grande e se tornaram bastante complexas. Técnicas e raciocínios estatísticos e probabilísticos são, sem dúvida, tanto das Ciências da Natureza quanto das Ciências Humanas. Isso mostra como será importante uma cuidadosa abordagem dos conteúdos de contagem, estatística e probabilidade no Ensino Médio, ampliando a interface entre o aprendizado da Matemática e das demais ciências e áreas. (PCNEM, 2000, p.44).

Apesar das recomendações sobre a importância do ensino da Análise Combinatória no Ensino Médio, este conteúdo da matemática quando explorado sob a forma de problemas apresenta certas dificuldades em relação à sua formulação e a interpretação dos seus enunciados.

Roa e Navarro-Pelayo, citando Hadar e Hadass, evidenciam que as dificuldades típicas dos alunos ao resolver problemas combinatórios são:

> a. Dificuldade em reconhecer o conjunto correto a enumerar;
> b. Escolher uma notação apropriada, o que é agravado com diferentes textos utilizando diferentes notações;
> c. Fixar uma ou mais variáveis;
> d. Generalizar a solução. (HADAR;HADASS,1981 apud ROA;NAVARRO-PELAYO,2001).

Segundo Vazquez e Noguti (2004, p.6) cada um desses problemas é um desafio para os alunos, pois exige flexibilidade de pensamento: é necessário parar, concentrar, discutir e pensar para poder resolvê-los.

O ensino de Análise Combinatória é, atualmente, um dos grandes desafios enfrentados pelos professores de matemática no Ensino Médio. Fato esse que pode ser ocasionado pela forma com que os docentes costumam abordar este conteúdo em sala, induzindo os seus discentes com a ideia de que todo problema de Análise Combinatória se reduz a determinarmos a que tipo de agrupamento – arranjo, combinação ou permutação – o problema se refere e, em seguida, aplicar a fórmula correspondente; de acordo com Lima (2001, p. 29-30).

Almeida e Ferreira (s/d) referem-se que é comum o ensino da Combinatória processar-se através da exposição e aplicação repetida de fórmulas à resolução de exercícios e problemas.

Buscar subsídios que possam contribuir no processo de ensino e aprendizagem deste conteúdo no Ensino Médio é uma necessidade decorrente das dificuldades de entendimento e compreensão relativas aos problemas de contagem tanto para professores como para alunos.

Segundo as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN + Ensino Médio), no tema *análise de dados* destaca-se:

> A **Contagem,** ao mesmo tempo que possibilita uma abordagem mais completa da probabilidade por si só, permite também o desenvolvimento de uma nova forma de pensar em Matemática denominada raciocínio combinatório. Ou seja, decidir sobre a forma mais adequada de organizar números ou informações para poder contar os casos possíveis não deve ser aprendido como uma lista de fórmulas, mas como um processo que exige a construção de um modelo simplificado e explicativo da situação. (PCN+, p. 126, grifo do autor).

Embora a Análise Combinatória disponha de técnicas gerais que permitem atacar certos tipos de problemas, é verdade que a solução de um problema combinatório exige quase sempre engenhosidade e a compreensão plena da situação descrita pelo problema.

Ainda sobre as Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais (PCN + Ensino Médio), no tema *análise de dados* também se destaca que:

> As fórmulas devem ser conseqüência do raciocínio combinatório desenvolvido frente à resolução de problemas diversos e devem ter a função de simplificar cálculos quando a quantidade de dados é muito grande. Esses conteúdos devem ter maior espaço e empenho de trabalho no ensino médio, mantendo de perto a perspectiva da resolução de problemas aplicados para se evitar a teorização excessiva e estéril. (PCN+, p.126-127)

O interesse em procurar meios que auxiliassem os professores de matemática na questão do ensino de Análise Combinatória aos alunos do Ensino Médio foi o que nos motivou a escolher esse tema para a presente monografia.

A forma escolhida para abordar esse conteúdo com os discentes do Ensino Médio foi propondo atividades que envolvem problemas de contagem, de maneira que se tratou de elaborar uma guia para cada atividade com o intuito de ajudar o docente a ter um modo para desenvolver as atividades em sala de aula e poder conduzir os discentes a compreenderem esse tema por meio da resolução de problemas de contagem envolvendo o raciocínio combinatório.

Os próprios Parâmetros Curriculares Nacionais orientam que:

> Não somente em Matemática, mas particularmente nessa disciplina, a resolução de problemas é uma importante estratégia de ensino. Os alunos confrontados com situações-problema, novas mas compatíveis com os instrumentos que já possuem ou que possam adquirir no processo, aprendem a desenvolver estratégias de enfrentamento, planejando etapas, estabelecendo relações, verificando regularidades, fazendo uso dos próprios erros cometidos para buscar novas alternativas; adquirem espírito de equipe, aprendendo a consultar, a experimentar, a organizar dados, a sistematizar resultados, a validar soluções; desenvolvem sua capacidade de raciocínio, adquirem auto-confiança e sentido de responsabilidade; e finalmente, ampliam sua autonomia e capacidade de comunicação e de argumentação. (PCN, 1999, p. 288)

Com essa proposta para a monografia, esperamos contribuir para o ensino do professor de matemática no que diz respeito à utilização de atividades que envolvem problemas de contagem como meio de facilitação da aprendizagem dos alunos. Além de poder cooperar para a aprendizagem fazendo com que os discentes se habituem a trabalhar com esse tipo de problema e a verificarem que tais problemas podem ser resolvidos com raciocínios simples na grande maioria dos casos, sem exigir o uso de fórmulas complicadas.

No primeiro capítulo dessa monografia revisaremos alguns conceitos matemáticos que auxiliarão os professores a trabalharem as atividades propostas juntamente com os alunos em sala. A exposição dos conceitos neste capítulo se dará através da divisão em tópicos da seguinte forma: primeiramente, será abordada a linguagem e a notação de conjuntos com algumas de suas propriedades; em seguida, será tratado da definição de somatório; e, por último, serão apresentados alguns métodos de contagem bastante eficazes para resolver problemas de Análise Combinatória.

O capítulo 2 é destinado à exposição das atividades propostas que tratam de problemas de contagem. Essas atividades foram construídas buscando-se apresentar uma nova forma de viabilizar o ensino do professor no conteúdo de Análise Combinatória através da ênfase em uma atitude ativa na resolução de problemas e no maior uso dos princípios básicos de contagem.

Com essa perspectiva, procurou-se fazer com que problemas considerados “típicos” se tornem problemas “rotineiros” que estejam ao alcance da compreensão do aluno de maneira a reduzir o uso de fórmulas e a dar confiança para que o discente possa “atacar” situações novas.

A utilização de atividades para trabalhar a Análise Combinatória em sala tentando despertar a curiosidade e a investigação matemática numa área que usualmente é pouco explorada e a observação de como o aluno desenvolve as atividades propostas a fim de explorar aspectos matemáticos para a construção de conceitos básicos da Análise Combinatória são os objetivos almejados com o uso das atividades.

As atividades propostas também foram desenvolvidas procurando fazer com que o docente ao trabalhar com elas em sala estimulasse seus discentes a abordar os problemas de combinatória utilizando as três seguintes estratégias de resolução propostas por Carvalho (2011, p. 7-8) em seu livro Métodos de Contagem e Probabilidade, a saber:

- **Postura Ativa**: Ao se deparar com um problema de contagem, devemos nos colocar no lugar da pessoa que deve efetivamente fazer a ação solicitada pelo problema e analisar que decisões seguintes devemos tomar. Além disso, pode ser considerada inclusive a possibilidade de contar as maneiras existentes através de uma enumeração explícita de quais são todas as possíveis formas para a solução de um problema.
- **Divisão em etapas**: Devemos, sempre que possível, dividir as decisões a serem tomadas em decisões mais simples, correspondentes às diversas etapas do processo de decisão. Às vezes, existe a necessidade de se fazer uma subdivisão em casos para facilitar a contagem.
- **Não adiar dificuldades**: Em geral, quando estamos resolvendo um problema combinatório e fazemos uma divisão do problema em etapas de decisões, algumas dessas etapas podem ou não dependerem de etapas anteriores e existe um hábito comum em escolher aquela etapa que não depende de uma anterior, pois ela é considerada mais fácil de realizar. Esse tipo de escolha é considerada uma péssima estratégia, uma vez que fará com que o problema encontrado mais a frente seja mais difícil do que o que existia antes. Dessa maneira, as etapas de

decisões a serem tomadas inicialmente devem ser aquelas mais restritas do que a outras.

No capítulo 3 são feitas as considerações finais, onde será reforçada a ideia da importância no processo de ensino-aprendizagem do trabalho com a resolução de problemas e o objetivo que se pretende alcançar com as atividades propostas.

Capítulo 1

Noções Preliminares

Neste capítulo revisaremos alguns conceitos que se farão necessários para facilitar na compreensão e na explicação das atividades propostas tanto para o professor como para o aluno. É importante destacar que a conceituação precisa é indispensável para o êxito das aplicações no ensino da Matemática, uma vez que a aplicação é a principal razão pela qual o ensino da Matemática é tão difundido e tão necessário.

Abordaremos inicialmente algumas noções do conteúdo de conjuntos, visto que a noção de conjunto é a mais simples das idéias matemáticas e que boa parte dos conceitos matemáticos podem ser expressos a partir da linguagem de conjuntos.

Em seguida, procuraremos apresentar alguns conceitos relacionados à Análise Combinatória que serão bastante úteis como métodos de resolução de problemas combinatórios desafiadores e interessantes. Embora exista uma variedade de técnicas que possam ser usadas para resolver problemas combinatórios, há também uma imensa quantidade de belos problemas de Análise Combinatória que são resolvidos através do uso dos princípios básicos de contagem de maneira que haja uma utilização da inteligência de modo racional e sistemática.

Optamos por não apresentar o conceito de arranjo simples como tema relacionado à Análise Combinatória, pois consideramos que os processos fundamentais da Análise Combinatória são escolher e misturar, os quais correspondem aos instrumentos básicos da teoria, respectivamente as combinações e as permutações. Os arranjos são apenas uma composição dessas duas ferramentas e podem perfeitamente ser omitidos, simplificando a teoria e a organização do pensamento.

1.1 – Conjuntos

Todo agrupamento ou coleção de objetos de qualquer tipo – pessoas, animais, plantas, etc. – constitui um conjunto. Cada um dos objetos que constituem um conjunto são chamados elementos do conjunto. Os conjuntos serão representados neste presente trabalho por letras maiúsculas A, B, C,... e os seus elementos por letras minúsculas a, b, c,... .

Dessa maneira, podemos descrever um conjunto através da enumeração de seus elementos ou definir através das propriedades características de seus elementos.

A cardinalidade de um conjunto A, denotado por |A|, é o número de elementos do conjunto A, podendo ser finito ou não. Um conjunto que não possui nenhum elemento é chamado de conjunto vazio e representado por { } ou $\emptyset$. Já o conjunto que possui apenas um elemento é chamado de conjunto unitário.

Exemplo: O conjunto A que possui os elementos 6, 8 e 10 admite a representação explícita A= $\{6,8,10\}$ e a implícita A= $\{x|\ 4 < x < 12\ e\ x\ \text{é}\ par\}$ (lê-se: A é o conjunto dos x’s tais que é maior do que 4 e menor do que 12 e x é par). Além disso, temos que |A|=3.

1.1.1 – Relações

- Relação de Pertinência

Dados um conjunto A e um elemento qualquer *p*. Um questionamento interessante a ser feito em relação a eles é: *p* é ou não um elemento do conjunto A? No caso afirmativo, escreve-se $p\in$A (lê-se: *p* pertence ao conjunto A). Caso contrário, escreve-se $p\notin$A (lê-se: *p* não pertence ao conjunto A). A relação entre elementos e conjuntos é chamada de relação de pertinência.

Exemplo: No conjunto A= $\{a, e, i, o, u\}$ temos que $u\in$A (lê-se: *u* pertence ao conjunto A) e que $g\notin$A (lê-se: *g* não pertence ao conjunto A).

- Relação de Inclusão

Dados dois conjuntos A e B. Quando todo elemento de A for também elemento de B, diz-se que A é subconjunto de B, que A está contido em B ou que A é parte de B. Esta relação entre conjuntos é denotada por A$\subset$B (lê-se: A está contido em B) que é equivalente a B$\supset$A (lê-se: B contém A). A relação A$\subset$B é chamada de relação de inclusão.

Se A não é subconjunto de B, representamos escrevendo A$\not\subset$B (lê-se: A não está contido em B ou não é subconjunto de B) que é equivalente a B$\not\supset$A (lê-se: B não contém A). Isto significa que nem todo elemento de A pertence a B, ou seja, existe pelo menos um elemento p tal que $p \in$ A e $p \notin$ B.

Dizemos que dois conjuntos A e B são iguais quando A e B têm os mesmos elementos e denotamos por A=B. Isto equivale a dizer que A⊂B e B⊂A, ou seja, que todo elemento de A pertence a B e todo elemento de B pertence a A.

<u>Exemplo:</u> Sejam os conjuntos A= {0,3,5}, B= {0,1,3,4,5} e C= {0,1,2}. Como todo elemento de A é elemento de B, então A⊂B. Como 2∈C e 2∉B, então C⊄B.

1.1.2 – Operações

- União

Dados dois conjuntos A e B, a reunião ou união de A e B é o conjunto formado pelos elementos de A ou de B. Denotamos a união de A e B por A∪B(lê-se: A união B ou A reunião B) e definimos por:

$$A\cup B= \{x|x \in A \ ou \ x \in B\}$$

Dizer que "x pertence a A∪B" é o mesmo que dizer que pelo menos uma das sentenças a seguir vale: "x pertence a A" ou "x pertence a B".

<u>Exemplo:</u> Se A= {1,3,4,5} e B= {4,2,1} então A∪B= {1,2,3,4,5}. Além disso, como |A|=4 e |B|=3 temos que |A∪B|=5. Note que $|A\cup B| \neq |A| + |B|$, uma vez que o conjunto A tem elementos em comum com B. Caso os conjuntos A e B não possuíssem elementos em comum, teríamos que $|A\cup B| = |A| + |B|$.

- Interseção

Dados dois conjuntos A e B, a interseção de A e B é o conjunto dos elementos que pertencem ao conjunto A e ao conjunto B. Denota-se por A∩B (lê-se: A interseção B) e define-se por:

$$A\cap B= \{x|x \in A \ e \ x \in B\}$$

Dizer que "x pertence a A∩B" é o mesmo que dizer que as duas sentenças a seguir valem: "x pertence a A" e "x pertence a B".

Caso dois conjuntos A e B não tenham elementos em comum, diremos que eles são conjuntos disjuntos e denotaremos por A∩B= $\emptyset$ (lê-se: A interseção B é igual a vazio).

<u>Exemplo:</u> Se A= $\{x|x \text{ é } múltiplo\ de\ 2\}$ e B= $\{y|y \text{ é } múltiplo\ de\ 3\}$ então A∩B= $\{z|z \text{ é } múltiplo\ de\ 6\}$.

1.2 – Análise Combinatória

Neste tópico apresentaremos algumas técnicas de contagem que permitirão determinar o número de elementos de conjuntos organizados de acordo com certas regras, sem que haja necessidade de enumerar seus elementos.

1.2.1 – Princípios Básicos de Contagem

- Princípio da Adição

Se A e B são dois conjuntos disjuntos, com A tendo p elementos e B tendo q elementos, então A∪B possui $p+q$ elementos. A extensão do Princípio da Adição pode ser expressa da seguinte forma: se $A_1, A_2, \dots, A_n$ são conjuntos, disjuntos 2 a 2, e se A_i possui a_i elementos, então a união $\bigcup_{i=1}^{n} A_i$ (lê-se: a união de A_i para i variando de 1 a n) possui $\sum_{i=1}^{n} a_i$ elementos.

<u>Exemplo:</u> Suponha que Áurea vá a uma lanchonete que ofereça 4 sabores de picolés e 6 tipos de salgados. De quantas maneiras diferentes Áurea pode escolher dois desses produtos, já que ela deve escolher um sabor de picolé ou um tipo de salgado?

SOLUÇÃO: Podemos tomar como conjunto A os sabores de picolés e como conjunto B os tipos de salgados. Como A e B são dois conjuntos disjuntos (A∩B= $\emptyset$), tendo |A|=4 e |B|=6, então o conjunto A∪B= $\{x|x \text{ é } um\ picolé\ ou\ um\ salgado\}$ possui $4+6=10$ elementos. Portanto, Áurea pode fazer 10 pedidos diferentes.

- Princípio Fundamental da Contagem ou Princípio Multiplicativo

Se uma decisão pode ser tomada de p modos e uma segunda decisão pode ser tomada de q modos, qualquer que tenha sido a primeira decisão, então o número de modos de tomar consecutivamente as duas decisões é p·q.

A extensão do Princípio Multiplicativo em linguagem de conjuntos pode ser expressa da seguinte maneira: se o conjunto A_i tem cardinalidade m_i, para i$= 1,2, \dots n$, então o produto cartesiano $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n = \{(a_1, a_{2,} \dots, a_n) | a_i \in A_i, para\ i = 1, \dots, n\}$ tem cardinalidade $m_1 \cdot m_2 \cdot \dots \cdot m_n$.

<u>Exemplo:</u> Uma lanchonete oferece 4 sabores de picolés e 6 tipos de salgados. De quantas maneiras diferentes Áurea pode escolher dois desses produtos, um picolé e um salgado?

SOLUÇÃO: Podemos tomar como elementos do conjunto A os 4 sabores de picolés e como elementos do conjunto B os 6 tipos de salgados. Se existem 4 maneiras diferentes de escolher um sabor de picolé e, para cada uma dessas 4 maneiras de escolha em A, podemos escolher 6 tipos de salgados no conjunto B, então o número de maneiras de escolher um picolé e, na sequência, escolher um salgado é $4 \cdot 6 = 24$. Portanto, Áurea pode fazer 24 pedidos diferentes.

1.2.2 – Fatorial

Dado um número natural qualquer *n*, sendo *n* > 1, definimos:

$$n! = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \dots \cdot 2 \cdot 1$$

Nos casos particulares $n = 0$ e $n = 1$ definimos:

$$0! = 1 \text{ e } 1! = 1$$

1.2.3 – Permutação Simples

Uma permutação de *n* objetos distintos é qualquer agrupamento ordenado desses *n* objetos. Para contar o número total de maneiras de ordenar esses *n* objetos, procedemos da seguinte forma: o primeiro elemento pode ser escolhido de *n* modos, isto é, pode ser qualquer um dos *n* objetos; fixado o primeiro elemento, o segundo elemento pode ser qualquer um dos $(n-1)$ objetos que não foram escolhidos no primeiro momento; tendo assim $n(n-1)$ formas de escolher os dois primeiros elementos. Para a escolha do terceiro elemento, existem $(n-2)$ elementos que não foram selecionados em nenhuma das duas escolhas anteriores; até que para o último elemento a ser escolhido sobre apenas um modo. Utilizando o Princípio Multiplicativo e denotando por P_n o número das permutações simples dos *n* objetos, definimos:

$$P_n = n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$$

Exemplo: De quantos modos diferentes 6 pessoas podem ser colocadas em fila?

SOLUÇÃO: Para solucionar esse problema basta escolher sucessivamente as pessoas colocadas em cada posição da fila. Para escolher o primeiro da fila, temos 6 possibilidades; o segundo pode ser qualquer uma das 5 pessoas restantes; o terceiro pode ser qualquer uma das 4 pessoas restantes; o quarto pode ser qualquer uma das 3 pessoas restantes; o quinto pode ser qualquer uma das duas pessoas restantes; e para escolher o último da fila, temos uma possibilidade. Logo, o número total de possibilidades é $6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 \cdot 1 = 720$. De um modo geral, o número de modos de ordenar *n* objetos distintos é igual a $n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot \ldots \cdot 2 \cdot 1$ e que pode ser representado por *n!* (lê-se n fatorial).

1.2.4 – Combinação Simples

Dado um conjunto A= $\{a_1, a_2, \ldots, a_n\}$ com *n* elementos distintos. Chamamos de combinações simples dos *n* elementos, tomados *p* a *p*, aos subconjuntos de A constituídos de *p* elementos. Denotaremos o número de combinações simples de classe *p* dos *n* elementos da seguinte forma:

$$C_n^p = \binom{n}{p} = \frac{n!}{p!\,(n-p)!}, 0 \leq p \leq n$$

(lê-se: combinação de *n* elementos *p* a *p*)

Exemplo: De quantos modos podem-se escolher três dos 11 jogadores de um time de futebol para a representação em uma cerimônia de premiação?

SOLUÇÃO: Este problema à primeira vista parece simples de ser resolvido pelo Princípio da Multiplicação: basta escolher um representante de cada vez. O primeiro pode ser escolhido de 11 modos, o segundo de 10 modos e o terceiro pode ser escolhido de 9 modos. Logo, o número total de possibilidades parece ser $11 \cdot 10 \cdot 9 = 990$. Esta solução está incorreta, já que utilizando o Princípio da Multiplicação estaríamos formando comissões repetidas ao escolher três dentre os 11 jogadores do time de futebol para a representação na cerimônia de premiação; mas podemos consertá-la para chegar à resposta certa. Suponha que tivéssemos escolhido, sucessivamente, os jogadores *A*, *B* e *C*. A comissão de representantes assim formada seria exatamente a mesma se tivéssemos selecionado, por exemplo, primeiro *B*, depois *A* e depois *C*. No entanto, as duas escolhas foram contadas por nós como se fossem distintas. O que nos permite corrigir o resultado da contagem é o fato de que todas as possíveis comissões são repetidas o mesmo número de vezes, correspondente a todas as suas possíveis ordenações. Por exemplo, *A*, *B* e *C* vão surgir, em nosso processo de enumeração, $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ vezes, o mesmo ocorrendo com todas as possíveis comissões. Logo, o número correto de comissões é igual a $\frac{990}{6} = 165.$

De modo geral, o número de modos de escolher *p* dentre *n* objetos pode ser denotado por C_n^p e é igual a $\frac{n(n-1)\cdots(n-p+1)}{p(p-1)(p-2)\cdots 1}$.

1.2.5 – Teorema das Quatro Cores

O Teorema das Quatro Cores afirma que todo mapa pode ser colorido com quatro ou menos cores, respeitando-se a condição de que países vizinhos, com alguma linha de fronteira em comum, tenham cores diferentes. A demonstração do Teorema das Quatro Cores utiliza um programa de computador, o que dificulta sua escrita formal.

Capítulo 2

Atividades Propostas

Neste capítulo apresentaremos alguns problemas de contagem que podem ser resolvidos com raciocínios simples que não requerem o uso de fórmulas complicadas. Para isso, procurou-se elaborar toda uma sequência didática que colocasse o aluno numa posição de ação e de tomada de decisões com o intuito de facilitar o entendimento do conteúdo de Análise Combinatória, uma vez que tal conteúdo geralmente é exposto induzindo o aluno a memorizar fórmulas e a classificar os problemas de contagem em problemas de arranjos, combinações ou permutações para em seguida aplicar a fórmula correspondente.

Cada uma das atividades propostas é composta de duas partes, um guia do professor e uma folha do aluno, organizadas da seguinte forma:

- **Guia do professor**: contém a sinopse da atividade, o conteúdo a ser explorado com a referida atividade e o objetivo que se pretende ensinar do conteúdo de Análise Combinatória; e em seguida, temos a atividade proposta a ser trabalhada com os alunos mostrando uma maneira de como o professor pode desenvolver essa atividade em sala de aula e apresentando algumas sugestões que podem ser utilizadas como um complemento a essa atividade.
- **Folha do aluno**: é fornecida uma folha impressa da atividade proposta para ser utilizada por cada discente na realização da mesma, com uma descrição do objetivo proposto para a atividade.

Neste capítulo são apresentadas 10 atividades propostas que tratam de problemas de contagem, sendo que:

- A atividade 1 busca ensinar a importância do conhecimento de Análise Combinatória para a resolução de situações práticas.
- As atividades 2,3 e 4 buscam introduzir o Princípio da Adição.
- As atividades 5 e 6 abordam o Princípio Fundamental da Contagem.
- As atividades 7 e8 tratam de problemas de contagem envolvendo os dois princípios básicos de contagem.
- As atividades 9 e 10 buscam introduzir o estudo de combinações simples.

As atividades propostas não seguiram necessariamente uma ordem crescente de dificuldades. Buscou-se apresentar as atividades de acordo com a ordem em que geralmente os problemas de Análise Combinatória são trabalhados no Ensino Médio.

Não almejamos que o professor utilize as atividades propostas com o intuito de levar o aluno à dedução e a memorização de algumas fórmulas clássicas da Análise Combinatória, mas sim a familiarizar o aluno com estratégias, métodos gerais para abordar os problemas de contagem de modo adequado.

GUIA DO PROFESSOR – ATIVIDADE 1

- Sinopse: esta atividade busca explorar uma situação que pode ser tratada como um problema de contagem. A atividade foi extraída do site http://www.cdcc.usp.br/exper/medio/matematica/matematica_medio/7_futebol_e_os_cartolas_p.pdf .
- Conteúdo: Análise Combinatória
- Objetivo: a atividade tem como objetivo ensinar a importância do conhecimento da Análise Combinatória para a resolução de uma situação prática.

ATIVIDADE: Você deve organizar um torneio de futebol em dois turnos com quatro times: Corinthians, Palmeiras, Santos e São Paulo. Cada time deverá enfrentar os 3 outros duas vezes: uma vez no seu campo e outra vez no campo adversário. Preencha o quadro de programação dos jogos e responda as seguintes perguntas:

Primeiro Turno

JOGO 1
Palmeiras X São Paulo
Placar: 2 – 2

JOGO 2
Palmeiras X Corinthians
Placar: 1 – 3

JOGO 3
Palmeiras X Santos
Placar: 1 – 2

JOGO 4
São Paulo X Corinthians
Placar: 0 – 1

JOGO 5
Corinthians X Santos
Placar: 2 – 1

JOGO 6
Santos X São Paulo
Placar: 0 – 0

Segundo Turno

JOGO 1
São Paulo X Palmeiras
Placar: 3 – 1

JOGO 2
Corinthians X Palmeiras
Placar: 4 – 2

JOGO 3
Santos X Palmeiras
Placar: 3 – 0

JOGO 4
Corinthians X São Paulo
Placar: 1 – 1

JOGO 5
Santos X Corinthians
Placar: 2 – 0

JOGO 6
São Paulo X Santos
Placar: 3 – 2

Quadro de programação dos jogos preenchido e fornecido como exemplo ao professor
Disponível em: http//www.cdcc.usp.br/exper/medio/matematica/matematica_medio/7_futebol_e_os_cartolas_p.pdf. Acesso: 20 ago. 2012

COPA DOS CAMPEÕES	Palmeiras	São Paulo	Corinthians	Santos
Palmeiras	-----	*Jogo 1 (1º turno)*	*Jogo 2 (1º turno)*	*Jogo 3 (1º turno)*
São Paulo	*Jogo 1 (2º turno)*	-----	*Jogo 4 (1º turno)*	*Jogo 6 (1º turno)*
Corinthians	*Jogo 2 (2º turno)*	*Jogo 4 (2º turno)*	-----	*Jogo 5 (1º turno)*
Santos	*Jogo 3 (2º turno)*	*Jogo 6 (2º turno)*	*Jogo 5 (2º turno)*	-----

QUESTÕES:

1ª) Quantos jogos devem ser realizados?

2ª) Coloque em cada uma das partidas um placar provável. Levando em conta que a vitória vale 3 pontos, o empate 1 ponto e a derrota 0 ponto, qual será o time vencedor?

3ª) Suponha agora que você fosse organizar um campeonato com 24 times. Todos os times devem jogar entre si duas vezes, uma vez no seu campo e outra vez no campo adversário. Qual o número total de partidas que serão realizadas?

- Desenvolvimento da Atividade
  1º) Distribua em uma folha de papel a atividade impressa para cada aluno.
  2º) Leia a atividade proposta juntamente com os discentes explicando como eles devem preencher o quadro de programação dos jogos. Esse guia já fornece um quadro preenchido como um exemplo para o professor.
  3º) Baseado no modelo de preenchimento do quadro de programação dos jogos fornecido ao professor procure esclarecer aos alunos que os times colocados à esquerda em cada partida programada jogam em seu campo e os que estão à direita, no campo adversário.
  4º) Dê um tempo de 5 minutos para que os discentes possam trabalhar na atividade proposta.
  5º) Inicie uma discussão com os alunos a respeito da forma como eles resolveram as duas primeiras perguntas da atividade. Com essa discussão, procure fazer com que os alunos estabeleçam uma comunicação entre eles para tentarem chegar a um consenso relativo à resolução dessas duas perguntas. Note que provavelmente haverá discordância no que diz respeito à solução para a segunda pergunta.
  6º) Feita essa discussão, comece fazendo uma análise da primeira questão observando que a simples contagem no quadro de programação dos jogos nos daria a quantidade de partidas que devem ser realizadas. No entanto, é interessante que a quantidade de **12** jogos que devem ser realizados seja descoberta por meio de alguma estratégia de contagem já que auxiliará a entender questões semelhantes a essa que apresentam uma quantidade bem maior de equipes. Procure apresentar alguns métodos de contagem dando exemplos. Uma sugestão seria apresentar o Princípio Fundamental da Contagem (ver p. 18 da monografia) e a combinação simples (ver p. 19-20 da monografia) como métodos de contagem bastante eficientes.
  7º) Ao fazer uma análise da segunda questão é importante destacar que a resposta desta questão estará condicionada aos placares definidos por eles

para cada uma das partidas e que eles poderão estabelecer algum critério para a escolha do time vencedor no caso de empate na quantidade de pontos.

8º) Analisando a terceira questão da atividade proposta juntamente com os alunos procure comentar que ela é similar à primeira questão, tendo apenas uma quantidade maior de times para se determinar o número total de partidas que devem ser realizadas em um campeonato de dois turnos.

9º) Com os comentários feitos ao fazer a análise da primeira questão, basta verificar se os discentes compreenderam os outros métodos de contagem apresentados aplicando à terceira questão e encontrando um total de $\mathbf{24} \times \mathbf{23} = \mathbf{552}$ partidas.

- Sugestões

1º) Proponha aos alunos que montem uma tabela de classificação de acordo com o preenchimento do quadro de programação dos jogos feito por eles. Para essa tabela de classificação sugira aos alunos que abordem critérios como a quantidades de vitórias, empates e derrotas; a quantidade de pontos totalizados ao final do campeonato; os gols a favor e sofridos; entre outros critérios. Tente fornecer um modelo de tabela de classificação baseando-se no exemplo do quadro de programação dos jogos fornecido pelo guia do professor.

2º) A montagem de uma tabela de classificação de um campeonato possibilita que o professor possa trabalhar aspectos da Estatística como a análise e a interpretação dos dados. Além disso, têm-se a oportunidade de ensinar um novo conhecimento matemático que também pode ser utilizado nas mais variadas situações cotidianas do aluno.

3º) Proponha aos alunos uma lista de exercícios sobre os métodos de contagem com o intuito de eles praticarem e desenvolverem estratégias para a resolução de problemas combinatórios.

ATIVIDADE PROPOSTA 1 – FOLHA DO ALUNO

Nome:____________________________________ Data:___/___/____

- Descrição da atividade: a atividade tem como objetivo ensinar a importância do conhecimento da Análise Combinatória para a resolução de uma situação prática. Essa atividade busca explorar uma situação que pode ser tratada como um problema de contagem.

ATIVIDADE: Você deve organizar um torneio de futebol em dois turnos com quatro times: América, Atlético, Cruzeiro e Tupi. Cada time deverá enfrentar os 3 outros duas vezes: uma vez no seu campo e outra vez no campo adversário. Preencha o quadro de programação dos jogos e responda as seguintes perguntas:

Primeiro Turno

JOGO 1

X

Placar:

JOGO 2

X

Placar:

JOGO 3

X

Placar

JOGO 4

X

Placar:

JOGO 5

X

Placar:

JOGO 6

X

Placar:

Segundo Turno

JOGO 1

X

Placar:

JOGO 2

X

Placar:

JOGO 3

X

Placar:

JOGO 4

X

Placar:

JOGO 5

X

Placar:

JOGO 6

X

Placar:

COPA DOS CAMPEÕES	Palmeiras	São Paulo	Corinthians	Santos
Palmeiras	-----			
São Paulo		-----		
Corinthians			-----	
Santos				-----

QUESTÕES:

1ª) Quantos jogos devem ser realizados?

2ª) Coloque em cada uma das partidas um placar provável. Levando em conta que a vitória vale 3 pontos, o empate 1 ponto e a derrota 0 ponto, qual será o time vencedor?

3ª) Suponha agora que você fosse organizar um campeonato com 24 times. Todos os times devem jogam entre si duas vezes, uma vez no seu campo e outra vez no campo adversário. Qual o número total de partidas que serão realizadas?

GUIA DO PROFESSOR – ATIVIDADE 2

- Sinopse: esta atividade busca determinar o número de quadrados que podem ser formados por triângulos originados de divisões feitas numa figura plana. A atividade foi extraída de Meng e Guan (2002, p. 7).
- Conteúdo: Princípio da Adição
- Objetivo: a atividade tem como objetivo introduzir um dos princípios básicos da contagem (ver p. 17-18 da monografia).

ATIVIDADE: Júlia desenhou um quadrado de 3 cm de lado e o dividiu em 9 partes iguais utilizando duas linhas verticais e duas linhas horizontais, conforme representado pela figura 2.1.

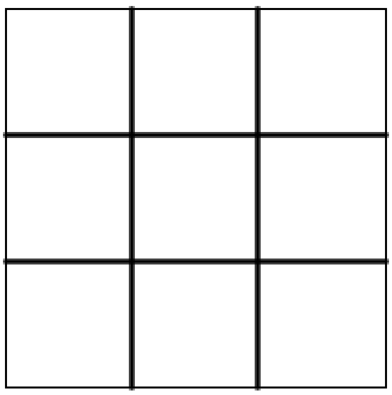


Figura 2.1: Quadrado de 3 cm de lado dividido em 9 partes iguais

A cada uma das partes, Júlia decidiu chamar de célula e observou que cada célula é um quadrado de lado igual a 1 cm. A fim de obter triângulos, Júlia traçou as diagonais de cada uma das 9 células, conforme mostrado na figura 2.2.

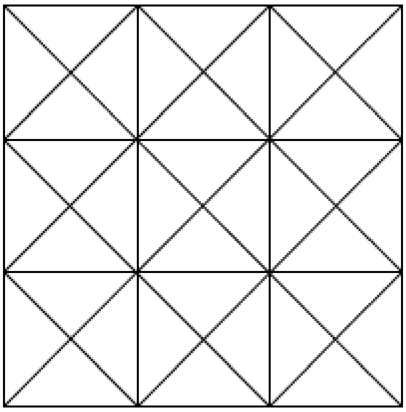


Figura 2.2: Células com diagonais traçadas

Curiosa com a figura obtida após traçar as diagonais de cada célula, Júlia se propõe a determinar o número de quadrados que podem ser formados utilizando os triângulos obtidos da decomposição do quadrado de lado igual a 3 cm. Quantos quadrados Júlia obterá na sua contagem?

- Desenvolvimento da Atividade

1º) Distribua em uma folha de papel a atividade impressa para cada aluno.

2º) Leia a atividade proposta juntamente com os alunos procurando explicar cada um dos passos que Júlia fez para chegar à figura 2.2 e evidencie aos discentes a pergunta realizada pela atividade.

3º) Procure fazer uma análise em conjunto com os discentes da figura 2.2 e faça-os observar que os triângulos obtidos em cada uma das células são iguais, uma vez que as diagonais dividem em quatro partes iguais cada quadrado de 1 cm de lado. Caso seja necessário, uma maneira que o professor pode utilizar para demonstrar este fato é recorrendo aos casos de congruência de triângulos e as noções de quadriláteros e paralelismo.

4º) Para facilitar a compreensão da atividade pelos alunos, o professor pode apresentar alguns exemplos de quadrados que podem ser obtidos por meio da junção de triângulos. Uma sugestão é apresentada na figura 2.3; onde temos dois triângulos pintados de vermelho formando um quadrado de $(\sqrt{2}/2)$ cm de lado, quatro triângulos coloridos de azul formando um quadrado de 1 cm de lado e oito triângulos pintados de amarelo formando um quadrado de lado igual a $(\sqrt{2})$ cm.

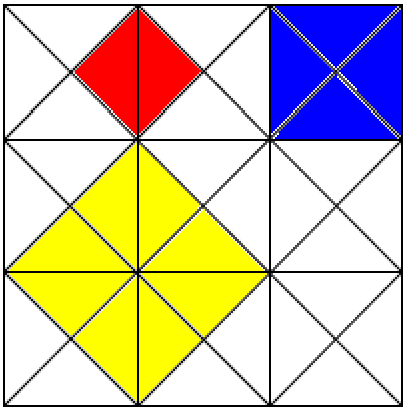


Figura 2.3: Exemplos sugeridos ao professor

5º) Dê um tempo de 10 minutos para que os discentes possam trabalhar na atividade proposta.

6º) Baseando-se nos quadrados formados pelos alunos, o professor poderá conduzir os discentes a observar a impossibilidade existente da composição de um quadrado com um número ímpar de triângulos e poderá notar a maneira trabalhada pelos discentes para determinar a quantidade de quadrados que Júlia obterá na sua contagem.

7º) Analisadas as técnicas empregadas pelos discentes para solucionar a atividade proposta; o docente pode sugerir como estratégia de resolução do problema que os alunos analisem separadamente em casos a composição de um quadrado pela junção de um determinado número de triângulos e que o número de possibilidades encontradas para cada um dos casos sejam somados, uma vez que a escolha feita em unir triângulos a partir de uma determinada quantidade para formar um quadrado deva ser feita em etapas que busquem analisar cada caso isoladamente no quadrado decomposto de lado igual a 3 cm.

8º)O primeiro caso a ser considerado é aquele em que dois triângulos podem ser juntados para compor um quadrado. Neste caso, podemos observar que são formados **12** quadrados tendo cada um $(\sqrt{2}/2)$ cm de lado; conforme pode ser visualizado na figura 2.4 que apresenta os **12** quadrados pintados em cores diferentes, sendo que dois triângulos coloridos com a mesma cor formam um quadrado.

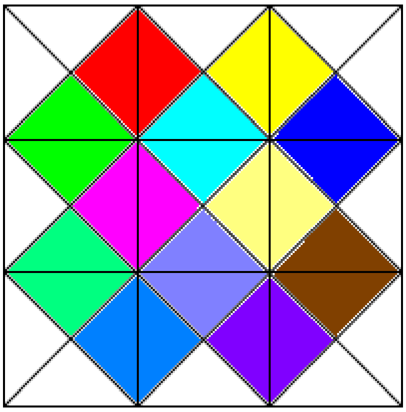


Figura 2.4: Quadrados formados por dois triângulos

9º) Sendo cada célula um quadrado de 1 cm de lado dividido em 4 triângulos iguais, temos **9** possibilidades a contar para o segundo caso no qual um quadrado pode ser formado pela junção de 4 triângulos. O terceiro caso que deverá ser analisado é aquele em que 8 triângulos podem ser unidos para compor um quadrado. Para o terceiro caso existem **5** possibilidades para a formação de quadrados cujos lados medem $\sqrt{2}$ cm, conforme mostrado pela figura 2.5 que apresenta duas dessas possibilidades para este caso.

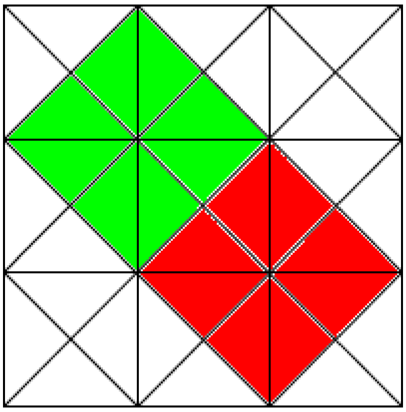


Figura 2.5: Quadrados formados pela junção de 8 triângulos

10º) Procedendo de maneira análoga para os casos de formação de quadrados com 16 triângulos ou com 32 triângulos, pode–se chegar à conclusão de que existem **4** quadrados de 2 cm de lado cada e que existe **1** único quadrado de 3 cm de lado que pode ser formado pela união dos 32 triângulos.

11º) Como a contagem dos cinco casos foi feita separadamente e cada um dos casos independe um do outro, pode-se concluir que Júlia obterá $\mathbf{12+9+5+4+1=31}$ quadrados na sua contagem.

12º) Obtida a quantidade de quadrados que Júlia obterá na sua contagem, o professor pode apresentar o Princípio da Adição aos seus alunos e fazer com que eles percebam que tal princípio é empregado na resolução dessa atividade proposta; já que foi feita uma análise separada dos casos de formação de um quadrado pela junção de um determinado número de triângulos e que com a soma das contagens feitas para cada um dos 5 casos, teremos justamente o total de quadrados obtidos na contagem de Júlia.

- Sugestões

1º) O professor pode revisar alguns conteúdos de geometria plana como triângulos e quadriláteros antes de propor a atividade aos discentes. A revisão desses conteúdos tem como objetivo esclarecer o uso dos elementos da geometria plana que serão utilizados no decorrer da atividade proposta.

2º) Atividades semelhantes a esta são importantes oportunidades para que o professor possa trabalhar em sala o Princípio da Adição, uma vez que possibilita ao aluno o acesso a um novo conhecimento que pode ser empregado em situações que requerem a adoção de uma estratégia que facilitará o processo de contagem.

3º) O professor poderá apresentar como alternativa de resolução à atividade que sejam misturados cada um dos casos descritos em um quadrado decomposto de lado igual a 3 cm (representado pela figura 2.2) e feito esse mesmo procedimento em diversos quadrados decompostos com o intuito de obter a quantidade de quadrados que podem ser formados pela junção de um determinado número de triângulos. É interessante que o professor deixe claro ao aluno o risco que pode haver em adotar essa técnica para solucionar a atividade, já que o discente poderá omitir ou repetir algumas dessas possibilidades para a composição de um quadrado.

4º) Seria interessante que o docente antes de desenvolver essa atividade proposta começasse com outra atividade semelhante à que foi proposta, considerando um número menor de divisões a serem feitas ao decompor uma figura plana. Esse tipo de atividade correlata auxiliará o discente na resolução de problemas semelhantes que venham a surgir para desafiar o conhecimento matemático dele.

ATIVIDADE PROPOSTA 2 – FOLHA DO ALUNO

Nome:____________________________________ Data:___/___/_____

- Descrição da atividade: a atividade tem como objetivo determinar o número de quadrados que podem ser formados por triângulos originados de divisões feitas numa figura plana.

ATIVIDADE: Júlia desenhou um quadrado de 3 cm de lado e o dividiu em 9 partes iguais utilizando duas linhas verticais e duas linhas horizontais, conforme representado pela figura 2.1.

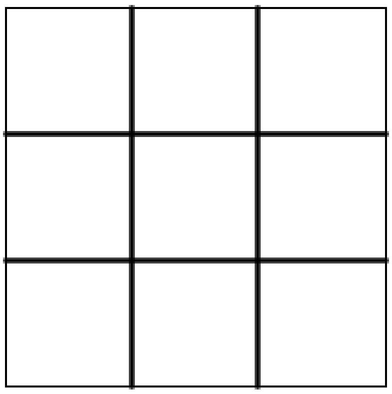


Figura 2.1: Quadrado de 3 cm de lado dividido em 9 partes iguais

A cada uma das partes, Júlia decidiu chamar de célula e observou que cada célula é um quadrado de lado igual a 1 cm. A fim de obter triângulos, Júlia traçou as diagonais de cada uma das 9 células, conforme mostrado na figura 2.2.

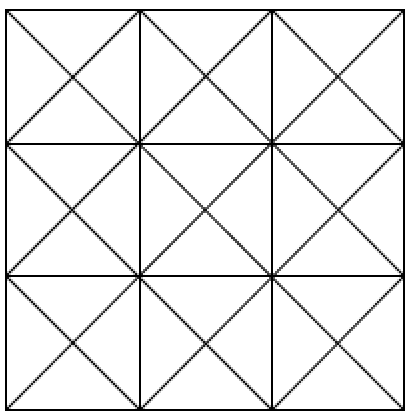


Figura 2.2: Células com diagonais traçadas

Curiosa com a figura obtida após traçar as diagonais de cada célula, Júlia se propõe a determinar o número de quadrados que podem ser formados utilizando os triângulos obtidos da decomposição do quadrado de lado igual a 3 cm. Quantos quadrados Júlia obterá na sua contagem?

GUIA DO PROFESSOR – ATIVIDADE 3

- Sinopse: esta atividade busca determinar a quantidade de percursos que se pode ter para ir de um ponto a outro ponto seguindo as direções apresentadas por meio de um diagrama. A atividade é similar ao exercício que está presente no livro do Meng e Guan (2002, p. 7).
- Conteúdo: Princípio da Adição
- Objetivo: a atividade tem como objetivo ensinar um dos princípios básicos da contagem (ver p. 17-18 da monografia).

ATIVIDADE: O pai de João pretende viajar para visitar seus familiares que moram na cidade Y. Dispondo de um carro próprio para a viagem, ele elabora um diagrama com uma sequência de setas que mostra todos os possíveis percursos para se chegar à cidade Y passando por outras cidades, conforme a figura 3.1. Sabendo que o pai de João mora na cidade X, quantos diferentes percursos existem para ir da cidade X para a cidade Y?

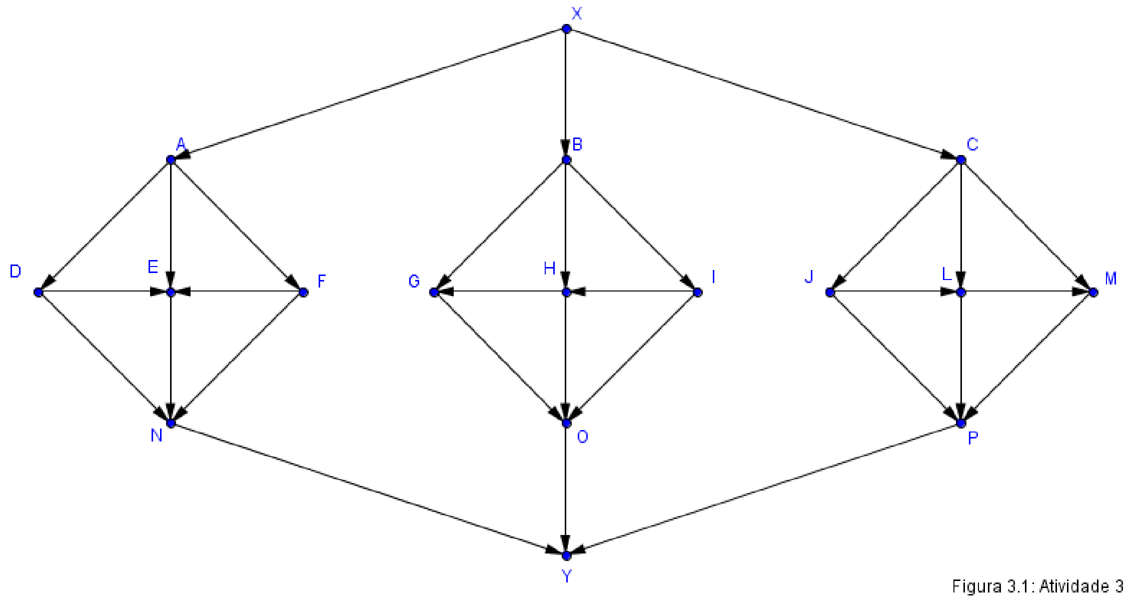


Figura 3.1: Atividade 3

- Desenvolvimento da Atividade

1º) Distribua em uma folha de papel a atividade impressa para cada aluno.

2º) Com base na figura 3.1, apresente somente alguns caminhos possíveis para ir da cidade X para a cidade Y (que podemos chamar de rota X – Y). Um percurso possível seria percorrendo a seguinte sequência: $X \rightarrow A \rightarrow E \rightarrow N \rightarrow Y$.

3º) Procure dar um tempo de 5 minutos para que os discentes encontrem outros percursos possíveis.

4º) Comente que é possível obter todos os caminhos existentes simplesmente listando todos eles e contando-os, porém corre-se o risco de haver omissão ou repetição de alguns desses percursos.

5º) Baseado nos caminhos descritos pelos discentes para a rota X – Y, procure salientar que imediatamente antes de alcançar Y ao longo de qualquer rota X – Y é preciso atingir N, O ou P.

6º) Feita essa análise, pode-se concluir que o número de rotas X – Y é a soma dos números de rotas X – N, de rotas X – O e de rotas X – P.

7º) Sabendo que o número de rotas X – Y é a soma das outras 3 rotas descritas no item anterior, procure determinar o número de rotas X – N para que os alunos procedam de modo análogo na determinação das outras rotas.

8º)Evidencie que antes de alcançar N ao longo de qualquer rota X – N é preciso atingir D, E ou F. Em particular, podemos notar que antes de chegar a E ao longo de qualquer via X – E é preciso atingir A, D ou F. Assim, o número de rotas X – E é a soma dos números de rotas X – A, de rotas X – D e de rotas X – F. O mesmo argumento aplica-se às demais rotas.

9º) Sendo o número de rotas X - A , de rotas X – D e de rotas X – F todas iguais a 1, pode-se determinar o número de rotas X – E como explicado no item anterior.

10º) A quantidade de rotas possíveis para cada um dos vértices é colocada entre parênteses, como mostra a figura 3.2.

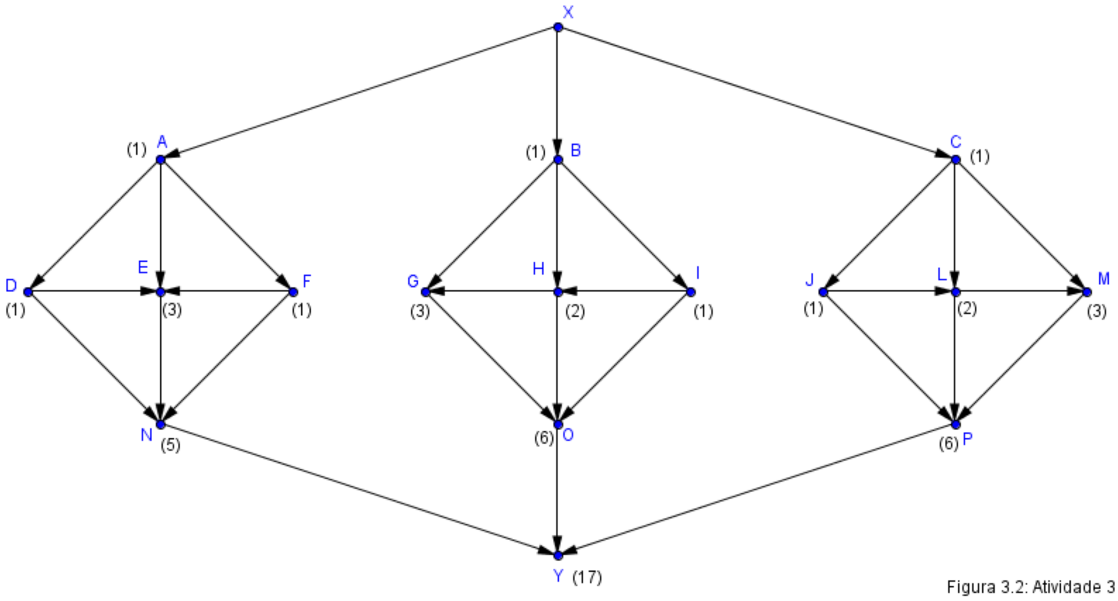


Figura 3.2: Atividade 3

11º) Como o número de rotas X – Y é igual à soma dos números de rotas X – N, de rotas X – O e de rotas X – P; pode-se concluir utilizando a figura 2.2 que existem **17** percursos diferentes para ir da cidade X para a cidade Y.

12º) Descoberto o número de percursos diferentes para ir da cidade X para a cidade Y, o docente deve apresentar o Princípio da Adição e fazer com que os discentes notem a utilização desse princípio na resolução da atividade proposta; uma vez que determinado o número de rotas X – N, de rotas X – O e de rotas X – P temos que somá-los para saber o número de rotas X – Y existentes, considerando que existem três rotas possíveis para se chegar à cidade Y partindo da cidade X e que a escolha por uma dessas rotas não interfere na contagem da outra rota.

- Sugestões

1º) Uma sugestão de estratégia que o professor pode utilizar para facilitar a resolução da atividade proposta seria propondo a decomposição da figura 3.1 em três figuras de modo a auxiliar na contagem do número de caminhos possíveis para cada uma das 3 rotas que somadas determinam o número de rotas X – Y, conforme mostrado na figura 3.3 abaixo.

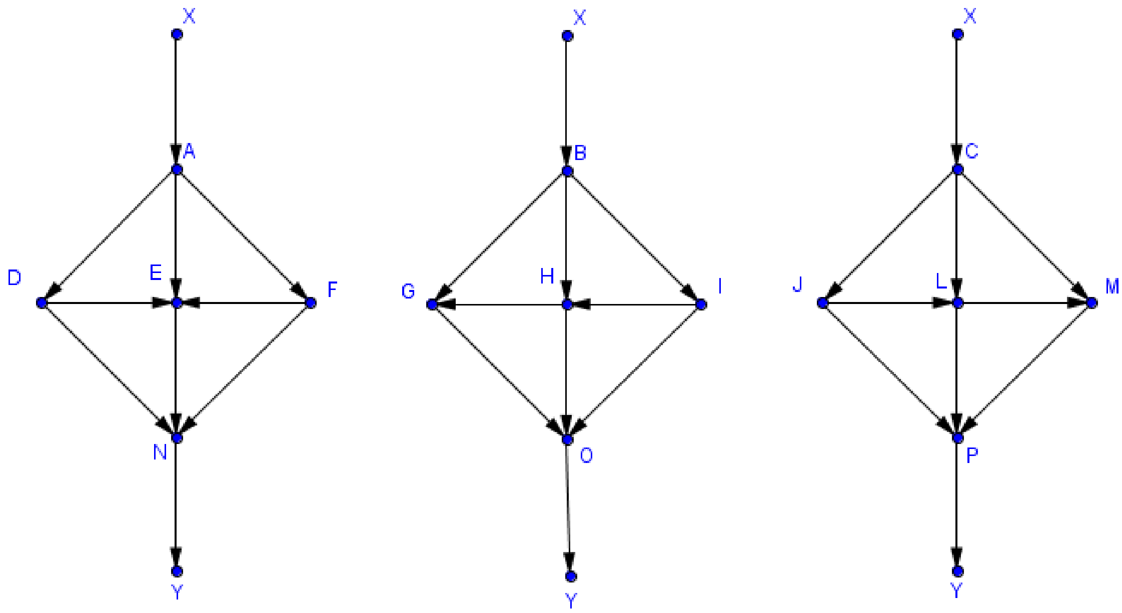


Figura 3.3: Decomposição da figura 3.1

2º) Diante das possíveis respostas para a atividade proposta, procure analisar aquela cuja solução está errada, com o intuito de descobrir o motivo do erro.

3º) Proponha novos diagramas para os alunos com o intuito de desafiá-los com novos problemas.

ATIVIDADE PROPOSTA 3 – FOLHA DO ALUNO

Nome:_________________________________ Data:___/___/_____

- Descrição da atividade: a atividade tem como objetivo determinar a quantidade de percursos que se pode ter para ir de um ponto a outro ponto seguindo as direções apresentadas por meio de um diagrama.

ATIVIDADE: O pai de João pretende viajar para visitar seus familiares que moram na cidade Y. Dispondo de um carro próprio para a viagem, ele elabora um diagrama com uma sequência de setas que mostra todos os possíveis percursos para se chegar à cidade Y passando por outras cidades, conforme a figura 3.1. Sabendo que o pai de João mora na cidade X, quantos diferentes percursos existem para ir da cidade X para a cidade Y?

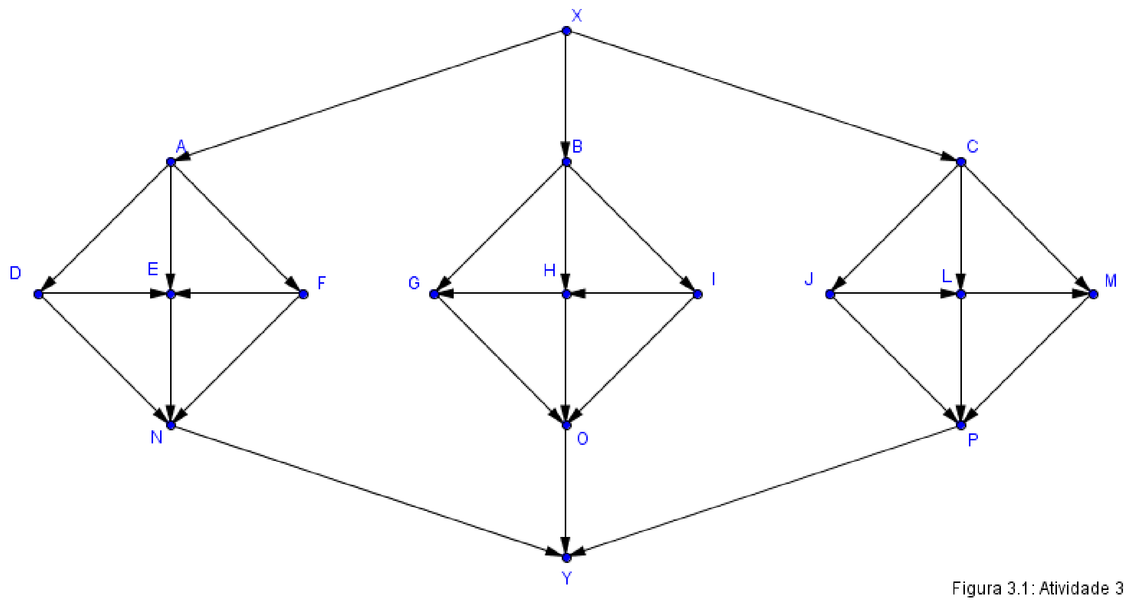


Figura 3.1: Atividade 3

GUIA DO PROFESSOR – ATIVIDADE 4

- Sinopse: esta atividade busca determinar a quantidade de caminhos distintos que uma pessoa pode seguir para ir de uma direção à outra, obedecendo a determinadas condições. A atividade foi extraída do Exame Nacional de Acesso ao Profmat 2013, disponível no site http://www.profmat-sbm.org.br/docs/exame2013/prova_objetiva_2013_1.pdf .
- Conteúdo: Princípio da Adição
- Objetivo: a atividade tem como objetivo ensinar um dos princípios básicos da contagem (ver p. 17-18 da monografia).

ATIVIDADE: Uma pequena praça tem a forma de um hexágono dividido em triângulos, como ilustrado na figura 4.1. A reta que liga A e B está alinhada com a direção norte-sul, sendo A mais ao norte. Os espaços do hexágono fora dos triângulos são ruas nas quais uma pessoa pode caminhar.

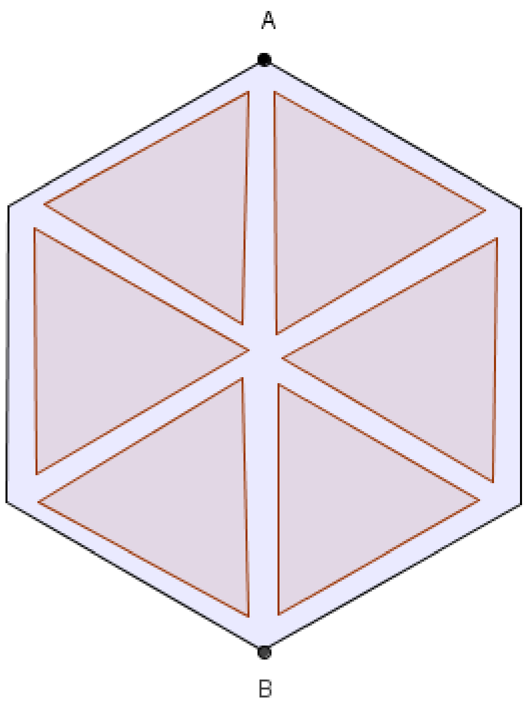


Figura 4.1: Atividade 4

Quantos são os caminhos diferentes que uma pessoa pode seguir (sem sair da praça) para ir do ponto A ao ponto B se, durante sua caminhada, ela sempre está mais ao sul do que estava em qualquer instante anterior?

- Desenvolvimento da Atividade

1º) Distribua em uma folha de papel a atividade impressa para cada aluno.

2º) Leia a atividade proposta juntamente com os alunos procurando esclarecer a orientação estabelecida utilizando os pontos cardeais para determinar a direção norte-sul do problema e procure fazer com que os alunos identifiquem as condições impostas na atividade para obterem êxito na resolução.

3º) Como as ruas nas quais uma pessoa pode caminhar são formadas pelos espaços do hexágono fora dos triângulos, sugira que o encontro de duas ou mais ruas seja representado por meio de pontos; conforme mostrado na figura 4.2. A adoção dessa estratégia tem o intuito de facilitar na compreensão e resolução da atividade proposta.

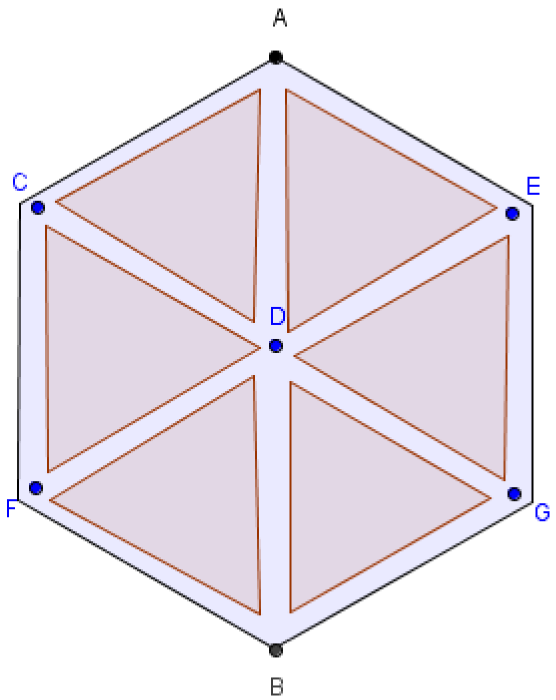


Figura 4.2: Encontro das ruas por meio de pontos

4º) Procure dar um exemplo de um caminho possível que uma pessoa pode seguir obedecendo às condições descritas pela atividade. Analisando a figura 4.2, um trecho possível partindo do ponto A seria caminhando passando por C, depois por F e chegando ao ponto B. Evidencie que ao caminhar passando por F, a pessoa está mais ao sul do que estava em C.

5º) Dê um tempo de 5 minutos para que os discentes possam trabalhar na atividade proposta.

6º) Faça um breve comentário afirmando a possibilidade de se obter todos os caminhos existentes simplesmente listando todos eles e contando-os, porém corre-se o risco de haver omissão ou repetição de alguns desses caminhos.

7º) Baseado nos caminhos descritos pelos alunos para ir do ponto A ao ponto B da praça, procure evidenciar que antes de alcançar o ponto B ao longo de qualquer caminho que tem início no ponto A é preciso passar por D, F ou G; conforme mostrado na figura 4.2.

8º) Feita essa análise, pode-se concluir que o número de caminhos para ir do ponto A ao ponto B é igual à soma do número de caminhos de A a D, de A a F e de A a G.

9º) Inicialmente procure determinar o número de caminhos possíveis para ir do ponto A a D de modo que os alunos procedam de maneira análoga na determinação dos outros dois caminhos descritos no item anterior. Note que a figura 4.2 nos mostra que existe um único caminho do ponto A para C e um único caminho do ponto A para E, uma vez que A é o ponto de partida da caminhada.

10º) Evidencie que para alcançar D a partir do ponto A e obedecendo as condições descritas na atividade existem apenas 3 caminhos: partindo do ponto A para D; partindo do ponto A e caminhando até C para em seguida chegar ao ponto D; e partindo de A, caminhando até o ponto E para depois chegar a D. Analogamente, para alcançar F existem 4 caminhos possíveis, sendo 3 desses caminhos passando por D e um único caminho passando por C. O mesmo raciocínio pode ser utilizado para alcançar G.

11º) A figura 4.3 esquematiza, colocando entre parênteses, a quantidade de caminhos possíveis nos respectivos pontos de encontro de duas ou mais ruas

12º) Como o número de caminhos para ir do ponto A ao ponto B é igual a soma à soma dos caminhos de A a D, de A a F e de A a G. ; temos que existem **11** caminhos diferentes que uma pessoa pode seguir (sem sair da praça) para ir do ponto A ao ponto B sendo que durante a caminhada ela sempre está mais ao sul do que estava em qualquer instante anterior.

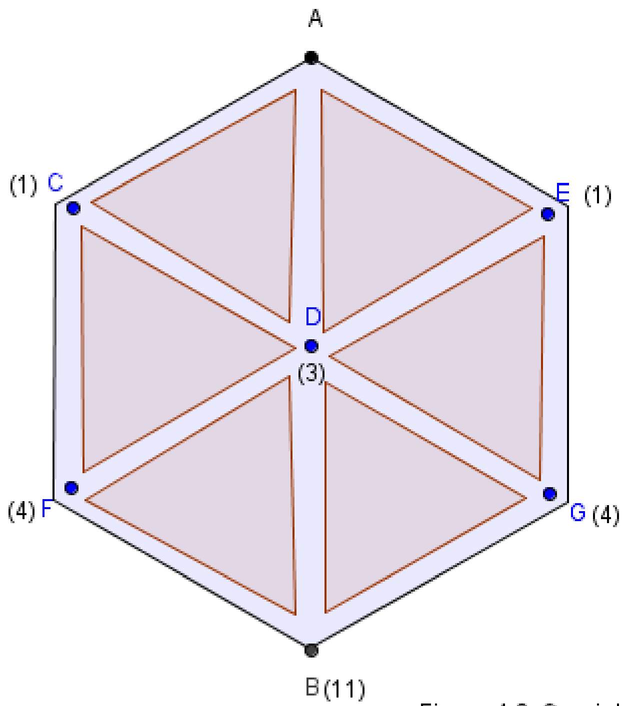


Figura 4.3: Caminhos possíveis para os respectivos pontos

13º) O Princípio da Adição deve ser apresentado pelo professor aos alunos após a descoberta do número de caminhos diferentes que uma pessoa pode seguir para ir do ponto A ao ponto B da praça de acordo com as condições descritas na atividade. Devemos ressaltar o seu uso no decorrer do desenvolvimento da atividade proposta pelo fato de que para alcançar o ponto B ao longo de qualquer caminho que tem início no ponto A é preciso saber o número de caminhos de A a D, de A a F e de A a G, para em seguida, somá-los e determinar a quantidade de caminhos possíveis.

- Sugestões

1º) É importante o professor fazer um breve comentário acerca dos pontos cardeais e da relevância para o homem de localizar-se e orientar-se no espaço geográfico.

2º) Durante o desenvolvimento da atividade proposta é interessante que o professor esteja sempre mencionando aos alunos as condições descritas pela atividade com o intuito deles estabelecerem uma conexão entre o que se quer descobrir e os dados fornecidos para a resolução da mesma.

3º) Proponha exercícios similares ao trabalhado nessa atividade com o objetivo de desafiar os discentes a empregarem o Princípio da Adição.

ATIVIDADE PROPOSTA 4 – FOLHA DO ALUNO

Nome:______________________________________ Data:____/____/_____

- Descrição da atividade: a atividade tem como objetivo determinar a quantidade de caminhos distintos que uma pessoa pode seguir para ir de uma direção à outra, obedecendo a determinadas condições.

ATIVIDADE: Uma pequena praça tem a forma de um hexágono dividido em triângulos, como ilustrado na figura 4.1. A reta que liga A e B está alinhada com a direção norte-sul, sendo A mais ao norte. Os espaços do hexágono fora dos triângulos são ruas nas quais uma pessoa pode caminhar.

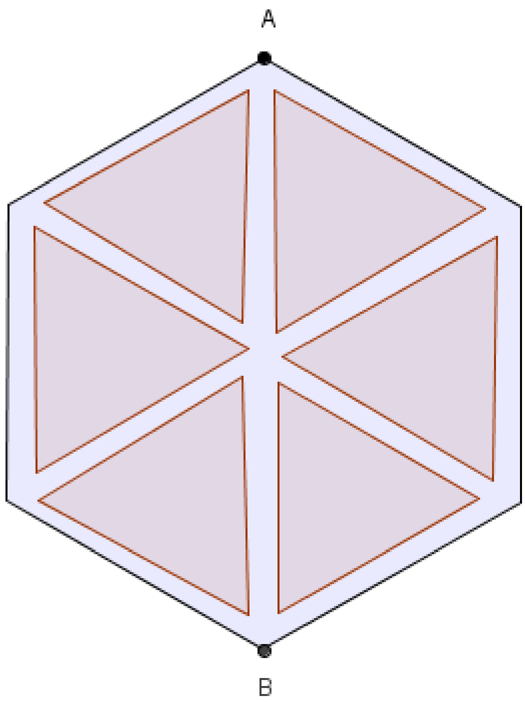


Figura 4.1: Atividade 4

Quantos são os caminhos diferentes que uma pessoa pode seguir (sem sair da praça) para ir do ponto A ao ponto B se, durante sua caminhada, ela sempre está mais ao sul do que estava em qualquer instante anterior?

GUIA DO PROFESSOR – ATIVIDADE 5

- Sinopse: esta atividade busca determinar o número de maneiras que existem para colorir uma figura plana de modo que regiões vizinhas tenham cores diferentes. A atividade é similar ao exercício que está presente em Carvalho (2011, p. 5).
- Conteúdo: Princípio Fundamental da Contagem (ou Princípio da Multiplicação)
- Objetivo: a atividade tem como objetivo ensinar um dos princípios básicos da contagem (ver p.18 da monografia).

ATIVIDADE: Júlia dispõe de 5 cores distintas para pintar uma bandeira, representada pela figura 5.1. Sabendo que Júlia não precisa usar todas as cores e que regiões adjacentes da bandeira devem ter cores distintas, de quantos modos ela pode colorir essa bandeira?

Figura 5.1: Atividade 5

- Desenvolvimento da Atividade
  1º) Distribua em uma folha de papel a atividade impressa para cada aluno.
  2º) Leia a atividade proposta juntamente com os discentes procurando ressaltar as informações apresentadas na atividade como a quantidade de cores disponíveis para pintar a bandeira e as condições descritas para colorir as listras da bandeira.
  3º) Para facilitar na compreensão da atividade, o professor pode sugerir aos discentes algumas possibilidades que eles podem ter para colorir a bandeira com as cores disponíveis. Uma sugestão para pintar a bandeira seria utilizando duas cores diferentes, havendo uma alternância da cor utilizada

em cada listra já que regiões adjacentes da bandeira devem ter cores distintas, conforme representado pela figura 5.2.

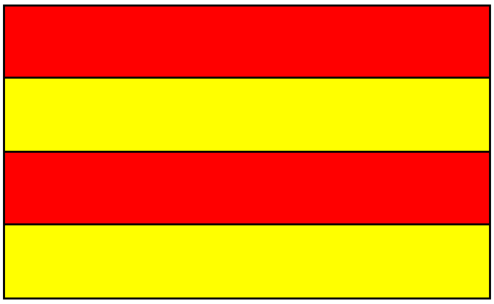


Figura 5.2: Sugestão de exemplo ao professor para pintar a bandeira utilizando duas cores diferentes

4º) Ao fornecer exemplos de soluções aos alunos, o docente deverá ter com objetivo estimular que cada um dos discentes se coloque no papel da pessoa que deve fazer a ação solicitada pela atividade e analise quais decisões seguintes deverá tomar para solucionar o problema.

5º) Dê um tempo de 5 minutos para que os discentes possam trabalhar na atividade proposta.

6º) Inicie uma discussão com os alunos a respeito da forma que eles procederam para encontrar a quantidade de modos existentes para colorir a bandeira de Júlia. Procure observar, no procedimento de resolução da atividade dos discentes, a ordem escolhida por eles para pintar as listras da bandeira e faça-os notar que a escolha da cor a ser utilizada em cada região da bandeira corresponde a uma das etapas de decisão que devem ser tomadas para se determinar o número de maneiras que existem para pintar a bandeira.

7º) Feita essa análise, o docente deve fazer um comentário aos discentes afirmando que existe uma técnica de contagem capaz de determinar o número de modos que Júlia pode colorir a bandeira, de acordo com as condições impostas na atividade proposta. Além disso, deve-se ressaltar que essa técnica de contagem é empregada quando se tem etapas de decisões a serem tomadas tendo cada um delas uma determinada quantidade de modos (podendo ou não ter a mesma quantidade) e que para se tomar consecutivamente todas essas etapas é preciso multiplicar o número de maneiras existentes entre cada uma das etapas de decisões.

8º) Para facilitar na explicação da atividade proposta por parte do docente, sugira como estratégia de resolução aos alunos que adotem como possibilidade a ordem de colorir as faixas da bandeira de cima para baixo. No entanto, deve-se ressaltar que existem outras ordens possíveis para colorir as faixas da bandeira.

9º) Escolhida a ordem para pintar as listras da bandeira, inicie a resolução da atividade explicando que a cor da primeira faixa pode ser qualquer uma das 5 cores disponíveis. Qualquer que seja a cor escolhida, para a segunda faixa temos 4 cores para escolher. Escolhida a cor da segunda faixa, a terceira faixa pode ser pintada de qualquer cor, exceto a usada para a segunda faixa. Assim, temos 4 possibilidades de escolha para a terceira faixa. De modo análogo, pode-se concluir que para a quarta faixa temos 4 cores para escolher.

10º) Como a ordem estabelecida para pintar as regiões da bandeira correspondem a decisões tomadas consecutivamente e dependentes uma da outra, pode-se concluir pela técnica de contagem comentada durante o desenvolvimento da atividade que existem $\mathbf{5} \times \mathbf{4} \times \mathbf{4} \times \mathbf{4} = \mathbf{320}$ maneiras que Júlia pode colorir a bandeira do seu país atendendo as condições descritas pela atividade.

11º) Para finalizar o desenvolvimento da atividade, o professor deve afirmar aos alunos que a técnica de contagem que foi utilizada para solucionar a atividade proposta é conhecida com Princípio Fundamental da Contagem (ou Princípio da Multiplicação), sendo este um dos princípios básicos da contagem. O docente deve ainda, conceituar o Princípio da Multiplicação aos seus discentes com o objetivo de formalizar esse conhecimento matemático tão importante na resolução de problemas de contagem.

- Sugestões

1º) É importante que o professor destaque durante a atividade a relevância dada à ordem em que as decisões são tomadas pelos alunos para simplificar o processo de resolução, uma vez que feita a adoção de uma estratégia equivocada pode-se ocasionar uma forma complicada de solucionar o problema.

2º) Um exercício extra que o professor pode aplicar em sala de aula é propor aos alunos que refaçam essa mesma atividade proposta adotando a ordem de colorir as faixas da bandeira de baixo para cima. Com esse exercício, o professor poderá mostrar que existe uma ordem diferente da que foi escolhida como estratégia de resolução para a atividade e que essa outra ordem chegará ao mesmo resultado da adotada como estratégia pela atividade proposta.

3º) O professor pode propor atividades semelhantes a esta nas quais o discente se depara com problemas em que as decisões a serem tomadas sejam independentes uma das outras.

ATIVIDADE PROPOSTA 5 – FOLHA DO ALUNO

Nome:_____________________________________ Data:____/____/_____

- Descrição da atividade: a atividade tem como objetivo determinar o número de maneiras que existem para colorir uma figura plana de modo que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

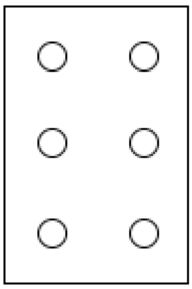
ATIVIDADE: Júlia dispõe de 5 cores distintas para pintar uma bandeira, representada pela figura 5.1. Sabendo que Júlia não precisa usar todas as cores e que regiões adjacentes da bandeira devem ter cores distintas, de quantos modos ela pode colorir essa bandeira?

Figura 5.1: Atividade 5

GUIA DO PROFESSOR – ATIVIDADE 6

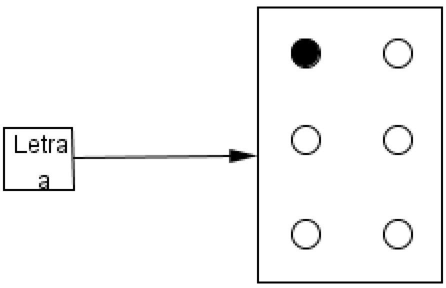
- Sinopse: esta atividade busca determinar o número de configurações que podem ser obtidas no código Braille usual 3x2 (três por dois). A atividade foi extraída de Malagutti (2011, p. 44).
- Conteúdo: Princípio Fundamental da Contagem (ou Princípio Multiplicativo)
- Objetivo: a atividade tem como objetivo explorar conceitos matemáticos com a Linguagem Braille e introduzir um dos princípios básicos da contagem (ver p. 18 da monografia).

ATIVIDADE: A escrita Braille é um método de escrita desenvolvido para que pessoas com deficiências visuais possam ler pelo tato. O código Braille é baseado em um arranjo 3x2 de pontos, dispostos como nas pedras de um dominó, como mostrado na figura abaixo:

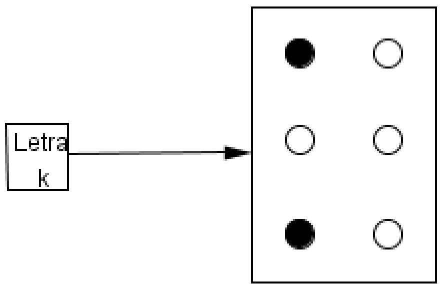


(três linhas e duas colunas)

Para registrar uma dada configuração, alguns dos 6 pontos são marcados ou perfurados, de modo a se tornarem sobressalentes, para que possam ser sentidos com as pontas dos dedos das mãos. Veja os seguintes exemplos:



Somente a primeira casa foi marcada: o ponto que está na primeira linha e na primeira coluna aparece em negro.



A letra k tem marcas pretas em dois pontos : o ponto da primeira linha e da primeira coluna e o ponto da terceira linha e primeira coluna.

Quantas são as configurações que podemos obter da Linguagem Braille usual 3x2 ?

- Desenvolvimento da Atividade

  1º) Distribua em uma folha de papel a atividade impressa para cada aluno.

  2º) Leia a atividade proposta juntamente com os discentes explicando que para indicar que algum dos seis pontos está marcado, usa–se um círculo negro e, quando não estiver, um círculo branco, conforme os exemplos citados. Além disso, procure esclarecer a atividade proposta apresentando algumas configurações possíveis de serem obtidas da Linguagem Braille usual 3x2. Uma sugestão de configuração possível seria aquela em que nenhum dos pontos é marcado ou aquela em que todos os seis pontos são marcados.

  3º) Dê um tempo de 5 minutos para que os discentes possam trabalhar na atividade proposta.

  4º) Faça um comentário afirmando que o espaço ocupado por cada símbolo Braille é denominado cela Braille ou célula Braille.

  5º) Inicie uma discussão a respeito do número de configurações obtidas por cada aluno na Linguagem Braille usual 3x2. Com essa discussão, procure evidenciar que cada um dos seis pontos pode ser marcado ou não.

  6º) Feita essa análise, o professor pode sugerir como estratégia aos alunos que tentem resolver a atividade proposta focando na quantidade de pontos, independentemente de estarem marcados ou não.

  7º) Utilizando essa estratégia de resolução, o docente deve evidenciar que existem **duas** possibilidades ao começar fazendo uma análise com um só ponto – ou ele está marcado ou não está marcado – conforme pode ser visualizado na figura 6.1. Do mesmo modo, existem **4** possibilidades de configurações que podem ser formadas com dois pontos pois há duas possibilidades ou escolhas possíveis para cada um dos padrões com um ponto apenas, como apresentado pela figura 6.2.

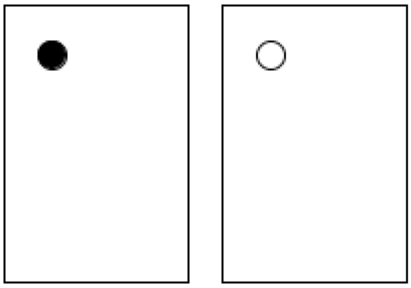


Figura 6.1: Possibilidades de configurações com um só ponto

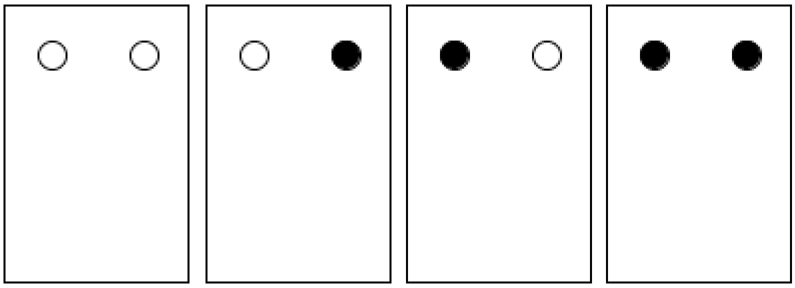


Figura 6.2: Possibilidades de configurações com dois pontos

8º) Procedendo de modo análogo, pode-se concluir que com três pontos existem **8** possibilidades (duas para cada uma das configurações com dois pontos como descrito no item anterior). Continuando assim, com quatro pontos teremos **16** configurações, com cinco pontos **32** configurações e, finalmente, com 6 pontos chegaremos a **64** padrões diferentes de pontos. O professor deve ressaltar aos alunos que cada configuração em um estágio anterior produz duas novas configurações no estágio seguinte, com o intuito de facilitar na compreensão do tipo de estratégia adotada para solucionar a atividade proposta.

9º) Descoberto que existem **64** configurações que podem ser obtidas da Linguagem Braille usual 3x2, o professor pode apresentar aos seus alunos o Princípio Fundamental da Contagem (ou Princípio Multiplicativo) e utilizá-lo como uma técnica de contagem bastante eficiente que pode ser aplicada quando temos diversas etapas independentes de decisões a serem tomadas, como é o caso da atividade proposta.

10º) Como existem duas possibilidades para cada um dos seis pontos e a escolha de marcar ou não um ponto não influencia na decisão de marcar ou não outro ponto, então pelo Princípio Multiplicativo resulta que existem

$\mathbf{2} \times \mathbf{2} \times \mathbf{2} \times \mathbf{2} \times \mathbf{2} \times \mathbf{2} = \mathbf{2^6} = \mathbf{64}$ configurações que podem ser obtidas da Linguagem Braille usual 3x2.

- Sugestões

1º) Antes de propor essa atividade, faça com que os alunos pesquisem sobre o criador do sistema de leitura para deficientes visuais Louis Braille.

2º) Proponha que os alunos determinem quantas configurações podem ser formadas se dispusermos pontos arranjados em um quadrado 2x2 e em um retângulo 1x4. É recomendável que o professor aplique este exercício antes da atividade que trata da Linguagem Braille usual 3x2 para que os alunos tentem resolver um exercício semelhante que os auxiliará no desenvolvimento da atividade proposta.

3º) É interessante que o professor proponha ao aluno explorar a atividade proposta com estratégias diferentes de resolução. Outra estratégia de resolução que pode ser sugerida seria focando na quantidade marcada de pontos. Nesta estratégia temos: apenas uma configuração com nenhum ponto sendo marcado; 6 possibilidades com apenas um ponto sendo marcado; 15 possibilidades com dois pontos marcados; com três pontos marcados temos 20 configurações; com quatro pontos marcados temos 15 possibilidades; 6 possibilidades com cinco pontos sendo marcados; e uma configuração em que todos os pontos estão marcados. Para determinar o número de configurações que podem ser obtidas da Linguagem Braille usual 3x2, por meio da estratégia focando na quantidade marcada de pontos, basta somar o número de possibilidades encontrado para cada número de pontos marcados.

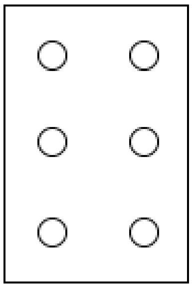
4º) A atividade proposta é uma boa oportunidade para o professor introduzir o estudo de combinação simples (ver p. 19 da monografia). Como C_n^p (combinação de n elementos tomados p a p) é o número de subconjuntos com exatamente p elementos de um conjunto A de n elementos distintos , onde $0 \leq p \leq n$, temos na atividade proposta que a soma $\boldsymbol{C_6^0} + \boldsymbol{C_6^1} + \boldsymbol{C_6^2} + \boldsymbol{C_6^3} + \boldsymbol{C_6^4} + \boldsymbol{C_6^5} + \boldsymbol{C_6^6}$ é igual ao número de configurações que podemos obter na Linguagem Braille usual 3x2; onde $\boldsymbol{C_6^0}$ corresponde ao número de combinações em que nenhum dos 6 pontos está marcado, $\boldsymbol{C_6^1}$ corresponde ao número de combinações em que um dos seis pontos está marcado, e assim por diante.

ATIVIDADE PROPOSTA 6 – FOLHA DO ALUNO

Nome:____________________________________ Data:___/___/_____

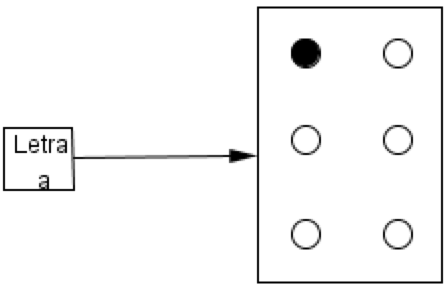
- Descrição da atividade: a atividade tem como objetivo determinar o número de configurações que podem ser obtidas no código Braille usual 3x2 (três por dois).

ATIVIDADE: A escrita Braille é um método de escrita desenvolvido para que pessoas com deficiências visuais possam ler pelo tato. O código Braille é baseado em um arranjo 3x2 de pontos, dispostos como nas pedras de um dominó, como mostrado na figura abaixo:

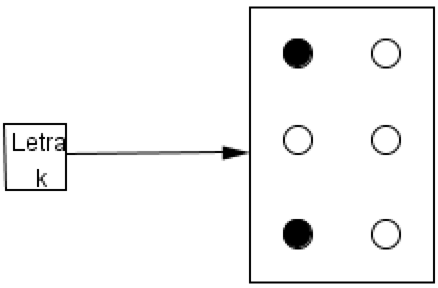


(três linhas e duas colunas)

Para registrar uma dada configuração, alguns dos 6 pontos são marcados ou perfurados, de modo a se tornarem sobressalentes, para que possam ser sentidos com as pontas dos dedos das mãos. Veja os seguintes exemplos:



Somente a primeira casa foi marcada: o ponto que está na primeira linha e na primeira coluna aparece em negro.



A letra k tem marcas pretas em dois pontos : o ponto da primeira linha e da primeira coluna e o ponto da terceira linha e primeira coluna.

Quantas são as configurações que podemos obter da Linguagem Braille usual 3x2 ?

GUIA DO PROFESSOR – ATIVIDADE 7

- Sinopse: esta atividade busca explorar a quantidade de modos que existem para colorir uma figura plana de modo que regiões vizinhas tenham cores diferentes. A atividade foi extraída de Carvalho (2011, p. 49).
- Conteúdo: Princípios Fundamentais da Contagem
- Objetivo: a atividade tem como objetivo aplicar os dois princípios básicos da contagem na resolução de um problema combinatório, apresentar o Teorema das Quatro Cores (ver p.20 da monografia) e capacitar o aluno a tomar decisões de acordo com determinadas restrições.

ATIVIDADE: Júlia dispõe de 5 cores distintas para pintar uma bandeira, representada pela figura 7.1. Sabendo que Júlia não precisa usar todas as cores e que as regiões adjacentes da bandeira devem ter cores diferentes, de quantos modos ela pode pintar a bandeira e qual é o número mínimo de cores necessárias para pintar a bandeira?

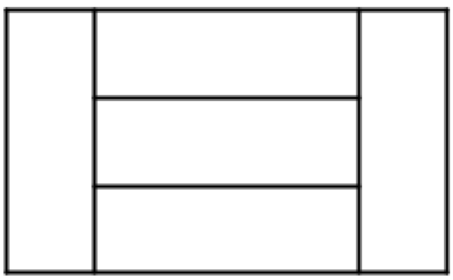


Figura 7.1: Atividade 7

- Desenvolvimento da Atividade

  1º) Distribua em uma folha de papel a atividade impressa para cada aluno.

  2º) Procure esclarecer a atividade reafirmando a quantidade de cores disponíveis para pintar a bandeira e explicando que as listras da bandeira que possuem alguma fronteira em comum não devem ter a mesma cor.

  3º) Dê um tempo de 10 minutos para que os discentes possam trabalhar na atividade proposta.

  4º) Inicie uma discussão a respeito do número mínimo de cores utilizadas por cada aluno para pintar as listras da bandeira. Procure, por meio da discussão, chegar a um consenso entre os alunos de que são necessárias no mínimo três cores.

5º) Proponha para os alunos um exercício extra (ver dica dada nas sugestões) com alguns mapas com o intuito deles descobrirem o número mínimo de cores suficientes para pintar os mapas de forma que as regiões com fronteira em comum tenham cores diferentes. O exercício extra busca fazer com que os alunos desenvolvam estratégias para resolver problemas que atendam a certas condições e pretende apresentar o Teorema das Quatro Cores (ver p.20 da monografia).

6º) Descoberto o número mínimo de cores necessárias para pintar a bandeira, volte à atenção dos alunos para determinar a quantidade de modos que existem para colorir a bandeira da atividade proposta. Para ajudar os discentes na determinação da quantidade de modos, comente que existem métodos de contagem que podem guiá-los a solucionar a atividade e sugira que os alunos adotem uma ordem para colorir consecutivamente as listras da bandeira.

7º) O docente deve comentar que existe um método de contagem que é utilizado quando temos diferentes decisões a serem tomadas com um determinado número de possibilidades para cada uma delas e que para se descobrir o número de maneiras de tomar consecutivamente essas diferentes decisões é preciso obter o valor do produto do número de possibilidades identificado para cada uma das decisões.

8º) Procure denotar as listras da bandeira da seguinte forma: R1 (região 1), R2 (região 2), R3 (região 3), R4 (região 4) e R5 (região 5) representam, respectivamente, a ordem de como as regiões da bandeira podem ser coloridas. Uma possível escolha para a ordem em que deve ser pintada a bandeira é apresentada pela figura 7.2.

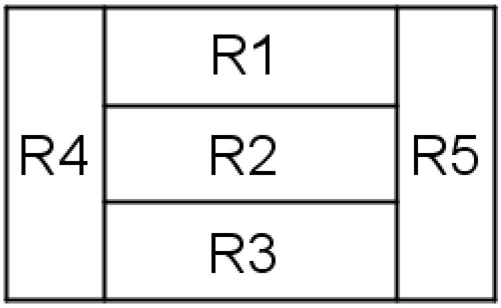


Figura 7.2: Possível escolha para a ordem de pintura da bandeira

9º) Com o comentário acerca do método de contagem que trata de encontrar o número de maneiras de se tomar em sequência diferentes decisões e a sugestão dada para denotar as listras da bandeira, procure evidenciar que este método de contagem sozinho não é capaz de responder à pergunta sobre o número de modos existentes para Júlia pintar a bandeira, independente da ordem de escolha feita pelos alunos, conforme será melhor explicado no item seguinte.

10º) Para facilitar o entendimento dos discentes, utilize a ordem apresentada pela figura 7.2 para mostrar a dificuldade de se utilizar sozinho tal método de contagem, pois existem 5 possibilidades de pintar R1, 4 possibilidades pintar R2, 4 possibilidades de pintar R3 e que existem duas ou três possibilidades para pintar R4 ou R5, dependendo das cores já utilizadas.

11º) Baseando-se ainda na figura 7.2, procure salientar que para a ordem escolhida à dificuldade apresentada em aplicar o método de contagem comentado se refere ao fato de que a cor utilizada em R3 pode ou não ser igual à utilizada em R1. Para solucionar esse impasse, sugira que sejam contadas separadamente as maneiras em que R1 e R3 possuem a mesma cor e as maneiras em que R1 e R3 possuem cores diferentes.

12º) É importante que o professor esclareça que essa sugestão apresentada aos alunos de contar separadamente em casos corresponde à outra técnica de contagem que é empregada quando se quer determinar o número total de possibilidades para um problema que necessita ser feita uma análise de maneira separada dos casos possíveis e que para a obtenção dessa totalidade é preciso somar cada uma das possibilidades desses casos.

13º) Analisando o caso em que R1 e R3 possuem a mesma cor pode-se concluir, através do método de contagem comentado no item 7 do desenvolvimento dessa atividade, que existem $\mathbf{5} \times \mathbf{4} \times \mathbf{3} \times \mathbf{3} = \mathbf{180}$ possibilidades. Procedendo de modo análogo no caso em que R1 e R3 possuem cores diferentes, conclui-se que existem $\mathbf{5} \times \mathbf{4} \times \mathbf{3} \times \mathbf{2} \times \mathbf{2} = \mathbf{240}$ possibilidades.

14º) Feita a contagem do número de possibilidades para os dois casos é importante ressaltar os alunos da necessidade do uso da técnica de contagem enunciada no item 12, uma vez que o problema foi dividido em dois casos disjuntos cuja totalidade de maneiras de Júlia pintar a bandeira é igual à soma das possibilidades encontradas nos dois casos.

15º) Empregando a escolha da ordem da figura 7.2, chega-se à conclusão de que a bandeira pode ser pintada de $\mathbf{180} + \mathbf{240} = \mathbf{420}$ maneiras.

16º) Descoberto o número de modos possíveis para colorir a bandeira, o professor deve afirmar aos seus alunos que os métodos de contagem utilizados para solucionar a atividade proposta correspondem aos dois princípios básicos de contagem, sendo o método de contagem comentado no item 7 referente ao Princípio Fundamental da Contagem (ou Princípio Multiplicativo) e a técnica de contagem apresentada no item 12 correspondente ao Princípio da Adição. O docente deve ainda, conceituar estes dois princípios básicos de contagem aos seus discentes, uma vez que são técnicas de contagem que podem ser aplicadas em diversos problemas de Análise Combinatória.

- Sugestões

1º) Procure mostrar aos alunos que a divisão do problema em casos vai depender da estratégia adotada por eles em tentar usar o Princípio da Multiplicação.

2º) Uma estratégia bastante interessante a ser desenvolvida nessa atividade proposta é procurar fazer com que os discentes, ao dividirem as decisões a serem tomadas, escolham aquelas decisões que gerem mais dificuldades, pois essa estratégia auxiliará no procedimento de resolução da atividade.

3º) Estimule os alunos a pesquisarem a respeito do Teorema das Quatro Cores.

4º) Apesar de não fazer parte da grade curricular do Ensino Médio é importante o professor apresentar o Teorema das Quatro Cores aos alunos já que é um problema interessante e que mistura elementos de geometria e grafos de maneira bastante simples e acessível.

5º) O exercício extra ao qual o item de número 5 do desenvolvimento da atividade se refere pode ser o disponibilizado no site http://m3.ime.unicamp.br/portal/Midias/Experimentos/ExperimentosM3Matematica/com_quantas_cores_posso_pintar_um_mapa/ .

ATIVIDADE PROPOSTA 7 – FOLHA DO ALUNO

Nome:____________________________________ Data:___/___/_____

- Descrição da atividade: a atividade tem como objetivo explorar a quantidade de modos que existem para colorir uma figura plana de modo que regiões vizinhas tenham cores diferentes.

ATIVIDADE: Júlia dispõe de 5 cores distintas para pintar uma bandeira, representada pela figura 7.1. Sabendo que Júlia não precisa usar todas as cores e que as regiões adjacentes da bandeira devem ter cores diferentes, de quantos modos ela pode pintar a bandeira e qual é o número mínimo de cores necessárias para pintar a bandeira?

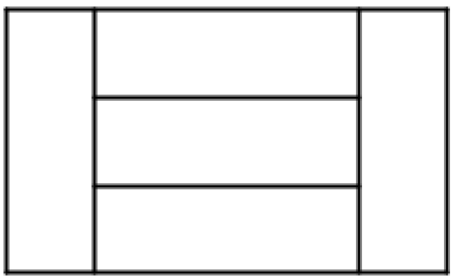


Figura 7.1: Atividade 7

GUIA DO PROFESSOR – ATIVIDADE 8

- Sinopse: esta atividade busca explorar a determinação da quantidade de triângulos que podem ser formados com pontos fixos localizados nas arestas de uma figura plana. A atividade foi extraída de Meng e Guan (2002, p. 13-14).
- Conteúdo: Princípios Fundamentais da Contagem
- Objetivo: a atividade tem como objetivo explorar os princípios básicos da contagem (ver p. 17-18).

ATIVIDADE: O triângulo ΔABC apresenta 9 pontos fixos localizados nos seus lados, conforme mostra a figura 8.1. Se selecionarmos um desses pontos fixos em cada um dos lados e juntarmos os pontos selecionados para formar um triângulo, quantos triângulos podem ser formados? Qual seria o número de triângulos formados usando os nove pontos fixos como vértices na figura 8.1?

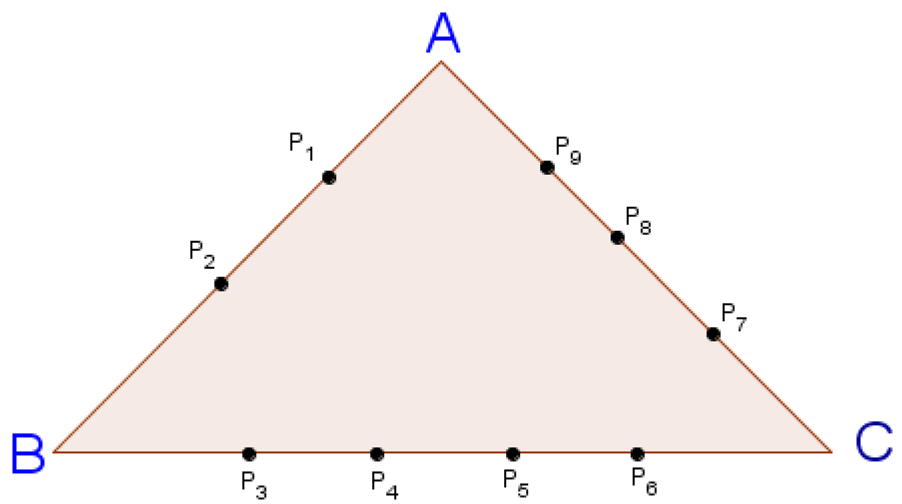


Figura 8.1: Atividade 8

- Desenvolvimento da Atividade
  1º) Distribua em uma folha de papel a atividade impressa para cada aluno.
  2º) Baseado na figura da atividade, procure esclarecer a atividade apresentando alguns triângulos que podem ser formados para os dois problemas propostos. Duas sugestões de exemplos são apresentadas pelas figuras 8.2 e 8.3.

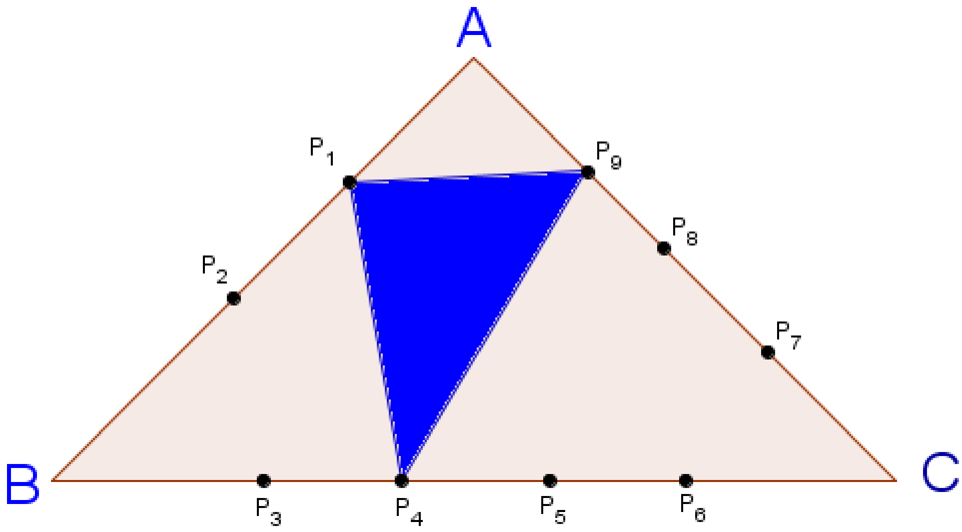


Figura 8.2: $\Delta P_1P_4P_9$ formado selecionando um ponto fixo em cada lado do ΔABC

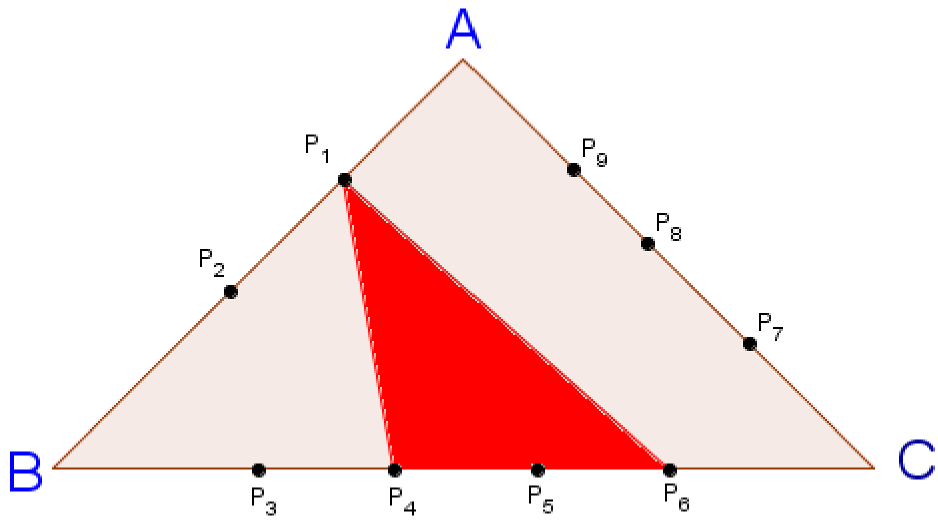


Figura 8.3: $\Delta P_1P_4P_6$ formado selecionando três dos nove pontos fixos dos lados do ΔABC

3º) Procure dar um tempo de 5 minutos para que os discentes possam encontram alguns triângulos que podem ser formados selecionando os pontos fixos nos lados do triângulo ΔABC.

4º) Baseado nos triângulos formados pelos alunos no primeiro problema da atividade proposta, procure evidenciar que os pontos fixos selecionados para serem vértices dos triângulos dependem da escolha feita pelos alunos em cada um dos lados do triângulo ΔABC.

5º) Feita essa análise, o docente deve comentar aos discentes a respeito da existência de um método de contagem capaz de auxiliá-los a resolver a atividade, sendo tal método empregado quando se tem etapas de decisões a serem tomadas com um determinado número de possibilidades para cada uma delas e que para se descobrir o número de maneiras de tomar consecutivamente essas etapas de decisões é preciso multiplicar o número de possibilidades identificado para cada uma das etapas.

6º) Esse método de contagem pode ser utilizado no primeiro problema da atividade; uma vez que é preciso escolher um ponto fixo em cada um dos lados do triângulo ΔABC e tendo que qualquer escolha não influenciará na outra decisão de escolha, tem-se que para determinar o número triângulos que podem ser formadas nessas circunstâncias é necessário multiplicar o número de possibilidades encontradas para cada um dos lados do triângulo ΔABC.

7º) Baseando-se nos triângulos formados pelos alunos no segundo problema da atividade proposta, procure salientar que os pontos fixos selecionados como vértices dos triângulos não são necessariamente escolhidos a partir de três lados diferentes.

8º) A análise feita procura desafiar os discentes a pensar nas diferentes formas que existem para formar triângulos selecionando os pontos fixos do triângulo ΔABC, com o objetivo de levá-los a concluir que devem ser considerados dois casos para se formar um triângulo com os pontos fixos. A intenção de fazer com que os alunos cheguem a essa conclusão corresponde justamente ao desenvolvimento de uma técnica de contagem que é utilizada quando necessitamos fazer uma análise separada dos casos existentes para se determinar, por meio da soma das possibilidades encontradas para cada um dos casos, o número total de possibilidades para um problema de contagem.

9º) O primeiro caso a ser considerado do referido problema deve ser aquele cujos três vértices são escolhidos de três diferentes lados para formar um triângulo. Nesse caso, existem duas maneiras de escolher um ponto fixo no segmento AB, três maneiras de escolher um ponto fixo no segmento AC e quatro maneiras de escolher um ponto fixo no segmento BC. Assim, pelo método de contagem do item 5, existem $\mathbf{2 \times 3 \times 4 = 24}$ triângulos.

10º) O segundo caso a ser considerado do referido problema deve ser aquele em que 2 vértices são escolhidos de um lado e o outro vértice em um dos dois lados restantes para formar um triângulo. Nesse caso, podemos ainda dividir a nossa consideração em três subcasos. Um desses subcasos seria a escolha de 2 vértices no segmento AB e a escolha do outro vértice em um dos segmentos AC ou BC. Como há apenas uma maneira de escolher 2 pontos fixos de AB e 7 maneiras de selecionar 1 ponto fixo dos outros segmentos, conclui-se pelo método de contagem do item 5 que se pode formar $\mathbf{1 \cdot 7 = 7}$ triângulos.

11º) Procedendo de modo análogo, é possível chegar ao número de triângulos determinados pelos outros 2 subcasos. Como o número total de possibilidades do segundo caso é igual à soma das possibilidades dos três subcasos, pode-se concluir que podem ser formados $\mathbf{7 + 18 + 30 = 55}$ triângulos no segundo caso.

12º) Como existem **24** triângulos do primeiro caso e **55** triângulos do segundo caso, pode-se concluir que o número de triângulos formados usando os 9 pontos fixos como vértices na figura 8.1 é igual a $\mathbf{55 + 24 = 79}$, já que para formar um triângulo selecionando 3 dos 9 pontos fixos localizados nos lados do ΔABC é preciso considerar a soma de dois casos que contribuem para determinar essa totalidade do número de triângulos que podem ser formados.

13º) Para finalizar o desenvolvimento da atividade, o professor deve afirmar aos alunos que o método de contagem comentado no item 5 do desenvolvimento dessa atividade corresponde a um princípio básico de contagem denominado Princípio Fundamental da Contagem (ou Princípio da Multiplicação). Além disso, o docente também deve dizer que a forma utilizada de contagem em que se buscou fazer uma análise de maneira separada dos casos para determinar a totalidade do número de modos possíveis para obter a solução do problema, por meio da soma das possibilidades de cada um desses casos, refere-se a outro princípio básico de contagem denominado Princípio da Adição.

14º) É interessante que o professor conceitue aos seus alunos os dois princípios básicos de contagem, já que são técnicas de contagem que podem ser aplicadas em diversos problemas de Análise Combinatória

- Sugestões

1º) O principal objetivo durante o desenvolvimento dessa atividade deve ser fazer com que os estudantes compreendam quando os números devem ser somados e quando eles devem ser multiplicados.

2º) Após todo o desenvolvimento dessa atividade, procure mostrar como essa atividade poderia ser resolvida utilizando as combinações simples (ver p. 19 da monografia); já que existe uma situação em que temos n objetos distintos à nossa disposição (que são os pontos fixos dos lados do triângulo $\Delta\mathrm{ABC}$) e devemos escolher p objetos distintos dentre esses, obtendo assim as combinações simples de n elementos p a p, onde $0 \leq p \leq n$.

3º) Proponha problemas similares ao apresentado nessa atividade com o intuito de habituar o aluno a desenvolver o raciocínio de resolução utilizando os princípios básicos da contagem em vez de fórmulas complicadas que acabam obscurecendo a idéia geral do problema.

4º) Proponha um exercício aos discentes que envolva a determinação do número de triângulos que podem ser formados com os vértices sendo pontos marcados sobre duas retas paralelas e tendo cada uma dessas retas uma determinada quantidade de pontos. É recomendável que o professor sugira esse exercício antes de aplicar a atividade proposta aos alunos, já que pode auxiliá-los na resolução da atividade.

ATIVIDADE PROPOSTA 8 – FOLHA DO ALUNO

Nome:____ Data:___/___/_____

- Descrição da atividade: a atividade tem como objetivo explorar a determinação da quantidade de triângulos que podem ser formados com pontos fixos localizados nas arestas de uma figura plana.

ATIVIDADE: O triângulo ΔABC apresenta 9 pontos fixos localizados nos seus lados, conforme mostra a figura 8.1. Se selecionarmos um desses pontos fixos em cada um dos lados e juntarmos os pontos selecionados para formar um triângulo, quantos triângulos podem ser formados? Qual seria o número de triângulos formados usando os nove pontos fixos como vértices na figura 8.1?

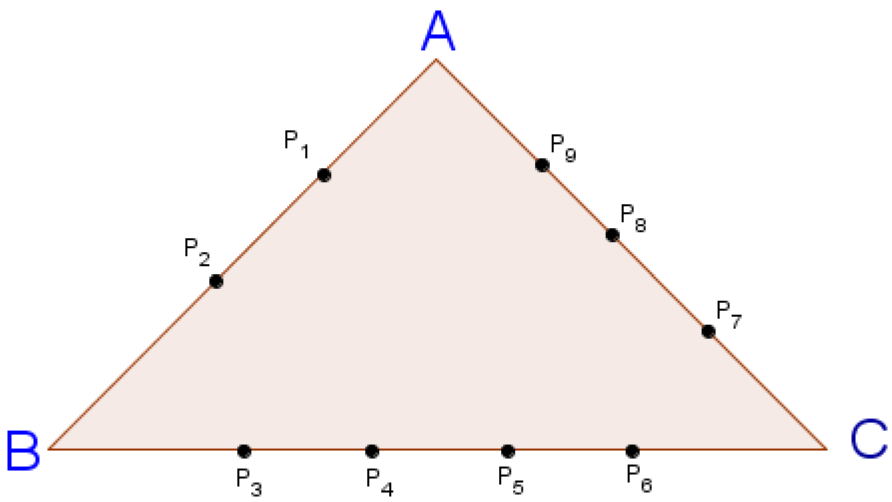


Figura 8.1: Atividade 8

GUIA DO PROFESSOR – ATIVIDADE 9

- Sinopse: esta atividade busca determinar a quantidade de anagramas que podem ser formados de uma palavra. A atividade foi extraída de Carvalho (2011, p. 33).
- Conteúdo: Combinação Simples
- Objetivo: a atividade busca introduzir o estudo de combinações simples (ver p. 19 da monografia).

ATIVIDADE: Denomina-se anagrama o agrupamento formado pelas letras de uma palavra, que podem ter ou não significado na linguagem comum. Os possíveis anagramas da palavra REI são: REI, RIE, ERI, EIR, IRE e IER. Quantos anagramas podemos formar com palavra MATEMATICA?

- Desenvolvimento da Atividade

1º) Distribua em uma folha de papel a atividade impressa para cada aluno.

2º) Leia a atividade proposta juntamente com os alunos procurando esclarecer que para determinar a quantidade de anagramas da palavra MATEMATICA não é necessário listar todos os anagramas como foi feito para a palavra REI e ressalte que existem letras repetidas na palavra MATEMATICA.

3º) Dê um tempo de 5 minutos para que os discentes possam trabalhar na atividade proposta.

4º) Inicie a discutir a atividade proposta com os alunos procurando fazer com que eles compreendam a razão pela qual não é necessária a listagem de todos os anagramas de uma palavra, em que todas as letras são distintas, para saber quantos anagramas podem ser formados. O professor pode, por meio da palavra REI apresentada na atividade, explicar a razão deste fato utilizando o Princípio da Multiplicação; uma vez que pra formar uma palavra com 3 letras distintas temos 3 escolhas para a 1ª letra, duas escolhas para a 2ª letra e uma única opção para a última letra, tendo um total de $3 \cdot 2 \cdot 1 = 6$ anagramas para a palavra REI.

5º) A partir da explicação dada no item anterior, o docente tem a oportunidade de apresentar o conceito de permutação simples aos discentes com o intuito de fornecer um meio a ser utilizado como estratégia na resolução de problemas envolvendo a determinação da quantidade de anagramas de uma palavra formada por letras distintas.

6º) Feita a apresentação do conceito de permutação simples, o professor deve evidenciar que tal conceito isoladamente não pode ser utilizado na palavra MATEMATICA já que ela contém letras repetidas: há 3 letras A, duas letras M e duas letras T, além de E, I e C, que aparecem uma vez cada.

7º) Com a análise feita, o docente pode apresentar o conceito de combinação simples aos discentes e utilizar este conceito como estratégia para determinar o número de anagramas da palavra MATEMATICA, já que essa estratégia auxiliará a decidir o que deverá ser feito com as letras repetidas.

8º) É interessante que o professor relembre aos alunos que o principal problema na determinação do número de anagramas na atividade proposta refere-se às letras repetidas da palavra. Sendo este o principal obstáculo da atividade, o professor deve utilizar a sua estratégia para solucionar o problema atacando primeiramente o impasse verificado já que essa dificuldade ao ser postergada acaba causando outras dificuldades.

9º) Utilizando o conceito de combinação simples e procurando trabalhar em cima das dificuldades notadas na atividade proposta, o professor pode desenvolver a estratégia escolhida para solucionar a atividade.

10º) Para colocar os A repetidos da palavra MATEMATICA formando anagramas temos que escolher 3 dentre os 10 lugares possíveis, o que pode ser feito de $\boldsymbol{C_{10}^{3}}$ modos. Para escolher os M, restam agora 7 lugares, dos quais devemos escolher 2, o que pode ser feito de $\boldsymbol{C_{7}^{2}}$ maneiras. Como só restam 5 lugares, dos quais devemos escolher 2 para colocar os T; temos $\boldsymbol{C_{5}^{2}}$ possibilidades. Sobrando somente 3 lugares, nos quais devem ser colocadas as 3 letras não repetidas da palavra MATEMATICA, o que pode ser feito de $\boldsymbol{3 \times 2 \times 1 = 6}$ modos.

11º) Com este raciocínio, o professor pode chegar à conclusão de que o número total de anagramas da palavra MATEMATICA é $\boldsymbol{C_{10}^{3} \cdot C_{7}^{2} \cdot C_{5}^{2} \cdot 6 = 151200}$.

- Sugestões

1º) Outra estratégia de resolução para essa atividade que pode ser apresentada pelo professor é por meio da utilização do Princípio da Multiplicação. Neste caso, o docente deve ter cuidados ao aplicar esse instrumento para evitar equívocos na contagem como o apresentado no exemplo referente a combinações simples (ver p. 19 e 20 da monografia).

2º) O docente deve estimular que os discentes ao se depararem com algum tipo de impasse no decorrer da realização de qualquer problema combinatório busquem iniciar a resolver o problema tendo como alvo de partida para solucionar a atividade a dificuldade evidenciada, uma vez que pequenos impasses adiados costumam ser transformados em imensos impasses.

3º) Os números $C_n^k = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ têm um papel de suma relevância como estratégia para resolver a atividade proposta. Logo, é importante que todos os estudantes compreendam como o número de combinações pode ser calculado e a maneira como eles estão sendo utilizados. Para fazer isso, o professor pode se basear no exemplo que aborda o conceito de combinação simples apresentado na página 20 desta monografia.

ATIVIDADE PROPOSTA 9 – FOLHA DO ALUNO

Nome:_____________________________________ Data:___/___/_____

- Descrição da atividade: a atividade tem como objetivo determinar a quantidade de anagramas que podem ser formados de uma palavra.

ATIVIDADE: Denomina-se anagrama o agrupamento formado pelas letras de uma palavra, que podem ter ou não significado na linguagem comum. Os possíveis anagramas da palavra REI são: REI, RIE, ERI, EIR, IRE e IER. Quantos anagramas podemos formar com palavra MATEMATICA?

GUIA DO PROFESSOR – ATIVIDADE 10

- Sinopse: esta atividade busca fornecer informações sobre a Nova Pirâmide Alimentar e a aplicar tais informações em uma situação-problema. A atividade foi extraída do site http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=25069 .
- Conteúdo: Combinação Simples
- Objetivo: a atividade busca introduzir o estudo de combinação simples (ver p. 19 da monografia).

ATIVIDADE: Uma pirâmide alimentar é um instrumento, sob a forma gráfica, de orientação da população para uma alimentação mais saudável. Em 1992, o Departamento de Agricultura dos Estados Unidos (USDA) montou o primeiro esquema de uma pirâmide alimentar onde apresentava a noção de proporcionalidade entre os grupos alimentares e a quantidade dos alimentos que dever ser consumida ao longo do dia. Recentemente, pesquisadores da Escola de Saúde Pública da Universidade de Harvard publicaram um novo guia alimentar que promete ser o substituto da tradicional pirâmide alimentar. A Nova Pirâmide Alimentar foi desenvolvida para orientar consumidores a fazer escolhas alimentares saudáveis e a praticarem exercícios físicos regularmente, além de incentivar uma alimentação mais rica em nutrientes funcionais. Esse novo guia alimentar proposto pode ser visualizado pela figura 10.1.

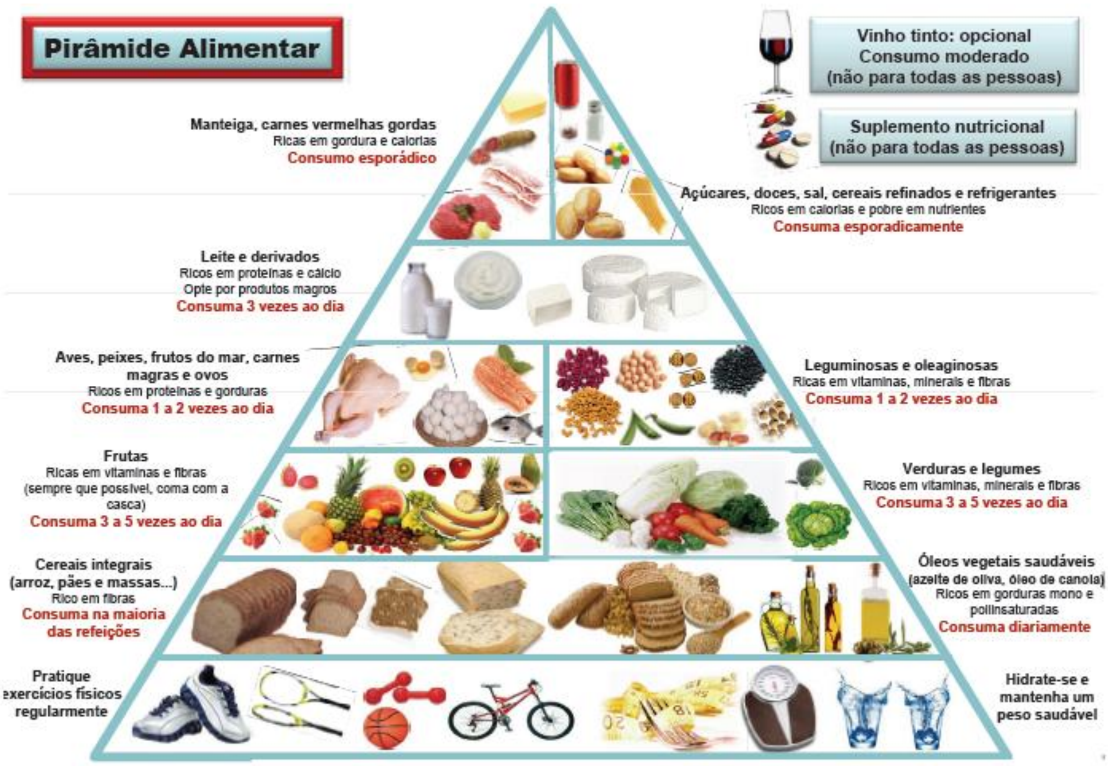


Figura 10.1: Nova Pirâmide Alimentar
Disponível em: http://endocrinosaude.com/2011/04/piramide-alimentar/.Acesso em : 23 set. 2012.

Suponha que você vá a um restaurante e se depare com certa variedade de alimentos para compor uma refeição, sendo que os alimentos oferecidos neste restaurante são agrupados de acordo com a Nova Pirâmide Alimentar conforme mostrado pela tabela 10.2.

Grupo dos Vegetais	**Grupo dos Carboidratos**	**Grupo das carnes, aves, peixes e ovos**	**Grupo das Frutas**
Alface	Arroz	Carne bovina	Banana
Cenoura	Macarrão	Frango	Laranja
Tomate	Lasanha	Peixe	Mamão
Beterraba	Nhoque	Ovos	Abacaxi
Repolho	Pão		Maçã
Acelga			

Tabela 10.2: Agrupamento dos alimentos oferecidos

A nutricionista do restaurante orienta que para fazer uma refeição saudável é recomendável que você escolha os alimentos da tabela 10.2 da seguinte forma: 3 alimentos do grupo dos vegetais; 2 alimentos do grupo dos carboidratos; 1 alimento do grupo das carnes, aves, peixes e ovos; e 1 alimento do grupo das frutas. De quantas maneiras distintas você pode compor uma refeição saudável, baseado nas orientações da nutricionista?

- Desenvolvimento da Atividade
  1º) Distribua em uma folha de papel a atividade impressa para cada aluno.
  2º) Dê um tempo de 5 minutos para que os discentes possam ler e explorar a atividade proposta.
  3º) Inicie a discutir a atividade propondo que os alunos apresentem algumas composições de refeições que podem ser feitas com os alimentos disponíveis na tabela 10.2 e baseando-se nas recomendações da nutricionista. O intuito dessa proposta é observar se os discentes compreenderam a forma como os alimentos da tabela devem ser escolhidos para preparar uma refeição.
  4º) O professor deve anotar no quadro algumas das possibilidades apresentadas pelos alunos de refeições que podem ser formadas. Feita as anotações dos discentes, o docente deverá evidenciar à turma que a escolha dos alimentos em cada um dos 4 grupos para compor uma refeição não influencia nem interfere na seleção de outros alimentos para formar uma outra refeição.
  5º) Feita essa análise, o professor deve apresentar o conceito de combinação simples e mostrar aos alunos que este conceito exibido pode ser utilizado como meio de estratégia para solucionar a atividade proposta, visto que a combinação simples integra uma parte da Matemática que tem por objetivo determinar o número de possibilidades de ocorrência de um determinado acontecimento sem, necessariamente, descrever todas as possibilidades.
  6º) Comentada a ferramenta a ser utilizada para resolver a atividade, o docente deve explicar ainda aos discentes que a(s) escolha(s) do(s) alimento(s) em cada grupo correspondem a decisões que devem ser tomadas de maneira consecutiva para obter a quantidade de refeições que podem ser compostas de acordo com as orientações da nutricionista.
  7º) A primeira decisão que pode ser tomada é escolher 3 alimentos do grupo dos vegetais. Como existem 6 alimentos neste grupo e apenas 3 devem ser selecionados, temos que essa decisão pode ser feita de C_6^3 modos.

8º) A segunda decisão que pode ser tomada é selecionar 2 alimentos dentre os 5 disponíveis no grupo dos carboidratos. Para essa decisão temos C_5^2 possibilidades.

9º) A terceira decisão que pode ser tomada é optar por dos 4 alimentos do grupo das carne, aves, peixes e ovos; o que pode ser feito de C_4^1 modos. A quarta de cisão que pode ser tomada é escolher 1 dentre os 5 alimentos disponíveis do grupo das frutas; tendo essa decisão C_5^1 possibilidades.

10º) Determinada as possibilidades para cada uma das decisões e sabendo que as decisões devem ser tomadas consecutivamente, pode chegar à conclusão de que $C_6^3 \cdot C_5^2 \cdot C_4^1 \cdot C_5^1 = 4000$ é o número de maneiras distintas que você pode compor uma refeição seguindo as orientações da nutricionista do restaurante.

- Sugestões

1º) Proponha como exercício que os alunos pesquisem a respeito da primeira pirâmide alimentar feita pelo USDA e façam uma comparação como o novo guia alimentar proposto pala Escola de Saúde Pública da Universidade de Harvard, visando apontar semelhanças e diferenças entre as pirâmides alimentares. O objetivo desse exercício é possibilitar que os alunos trabalhem aspectos relacionados à Estatística

2º) O professor pode utilizar o Princípio da Multiplicação como instrumento que auxilia na resolução da atividade proposta, tendo cuidados durante a sua aplicação para evitar equívocos na contagem como o apresentado no exemplo referente a combinações simples (ver p. 19 e 20 da monografia).

3º) É interessante que o professor ao apresentar o conceito de combinação simples não se limite a representar a fórmula utilizada para o cálculo do número de combinações simples. Seria de fundamental importância que o docente pudesse explicar que, utilizando o conteúdo de conjuntos, C_n^k corresponde ao número de subconjuntos com *K* elementos de um conjunto com *n* elementos.

4º) O professor deve valorizar a iniciativa dos estudantes em resolver o problema de diferentes maneiras, porém é recomendável que o docente apresente pelo menos um modo de solucionar a atividade para que os discentes entendam que nem sempre é possível verificar todas as possibilidades apenas por tentativa.

5º) A sequência de decisões tomadas durante o desenvolvimento da atividade deve ficar a critério de escolha da ordem desejada pelo aluno, uma vez que não influenciará na determinação do número de possibilidades existentes para compor uma refeição.

ATIVIDADE PROPOSTA 10 – FOLHA DO ALUNO

Nome:____ Data:____/____/_____

- Descrição da atividade: a atividade tem como objetivo fornecer informações sobre a Nova Pirâmide Alimentar e a aplicar tais informações em uma situação-problema.

ATIVIDADE: Uma pirâmide alimentar é um instrumento, sob a forma gráfica, de orientação da população para uma alimentação mais saudável. Em 1992, o Departamento de Agricultura dos Estados Unidos (USDA) montou o primeiro esquema de uma pirâmide alimentar onde apresentava a noção de proporcionalidade entre os grupos alimentares e a quantidade dos alimentos que dever ser consumida ao longo do dia. Recentemente, pesquisadores da Escola de Saúde Pública da Universidade de Harvard publicaram um novo guia alimentar que promete ser o substituto da tradicional pirâmide alimentar. A Nova Pirâmide Alimentar foi desenvolvida para orientar consumidores a fazer escolhas alimentares saudáveis e a praticarem exercícios físicos regularmente, além de incentivar uma alimentação mais rica em nutrientes funcionais. Esse novo guia alimentar proposto pode ser visualizado pela figura 10.1.

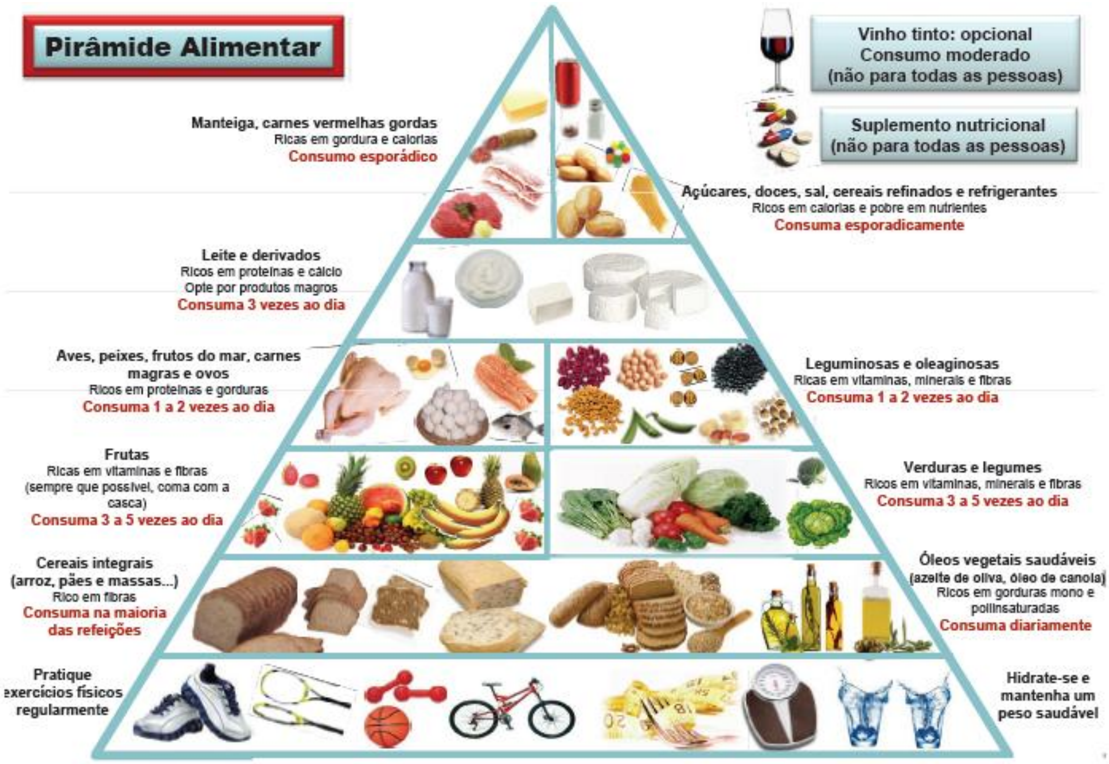


Figura 10.1: Nova Pirâmide Alimentar
Disponível em: http://endocrinosaude.com/2011/04/piramide-alimentar/.Acesso em : 23 set. 2012.

Suponha que você vá a um restaurante e se depare com certa variedade de alimentos para compor uma refeição, sendo que os alimentos oferecidos neste restaurante são agrupados de acordo com a Nova Pirâmide Alimentar conforme mostrado pela tabela 10.2.

Grupo dos Vegetais	**Grupo dos Carboidratos**	**Grupo das carnes, aves, peixes e ovos**	**Grupo das Frutas**
Alface	Arroz	Carne bovina	Banana
Cenoura	Macarrão	Frango	Laranja
Tomate	Lasanha	Peixe	Mamão
Beterraba	Nhoque	Ovos	Abacaxi
Repolho	Pão		Maçã
Acelga			

Tabela 10.2: Agrupamento dos alimentos oferecidos

A nutricionista do restaurante orienta que para fazer uma refeição saudável é recomendável que você escolha os alimentos da tabela 10.2 da seguinte forma: 3 alimentos do grupo dos vegetais; 2 alimentos do grupo dos carboidratos; 1 alimento do grupo das carnes, aves, peixes e ovos; e 1 alimento do grupo das frutas. De quantas maneiras distintas você pode compor uma refeição saudável, baseado nas orientações da nutricionista?

Capítulo 3

Considerações Finais

O trabalho com resolução de problemas tem grande importância no processo de ensino-aprendizagem, tanto da Matemática como de outras disciplinas, já que o ser humano é desafiado a resolver problemas a todo o momento em seu dia a dia.

Segundo Pinheiro (2008, p. 54), a metodologia de ensino-aprendizagem de Matemática, por meio da resolução de problemas, constitui-se num caminho metodológico para ensinar Matemática por meio da resolução de problemas e não de ensinar a resolver problemas.

Tendo em vista o fato de que a formação matemática propicia ao ser humano uma maior facilidade em elaborar estratégias para encontrar as soluções ou vislumbrar diferentes caminhos para resolver os problemas que enfrenta, enxergamos nessa prática um instrumento valioso a ser utilizado.

Problemas de raciocínio combinatório têm uma natureza de serem desafiadores e interessantes (como a análise da possibilidade de se ganhar em loterias e sorteios e da forma de se organizar em chapas eleitorais, dentre diversas outras situações); de acordo com Rocha e Borba (2008, p. 2).

Com a prática da resolução de problemas nas aulas de Matemática, os alunos têm a oportunidade de desenvolver e sistematizar os conhecimentos matemáticos, dando significação aos conteúdos trabalhados. Assim, com essa prática, os alunos são levados a desenvolver o raciocínio e a criatividade, a aplicar a Matemática em situações reais e a enfrentar situações novas.

Esse trabalho de resolução de problemas se completa quando o professor resolve adotar atitudes positivas junto aos alunos, tais como: dar oportunidade para que todos possam expressar as próprias estratégias de resolução; valorizar todas as resoluções apresentadas pelos alunos, trabalhando o erro como instrumento pedagógico; e ao desenvolver nos alunos a persistência na elaboração de estratégias para a resolução dos problemas.

Com essa perspectiva, o presente trabalho de monografia teve como principal objetivo fornecer uma proposta que possa servir como uma orientação ao professor de abordagem dos problemas de contagem juntamente aos seus alunos. Nesse intuito buscou-se fazer com que as atividades propostas tivessem um maior enfoque em problemas que envolvessem os dois princípios básicos de contagem; uma vez que a escolha pelo uso de fórmulas para solucionar tais problemas costuma ser a opção preferida para o ensino da Análise Combinatória.

Durante o desenvolvimento das atividades propostas pudemos constatar as dificuldades existentes para descrever os procedimentos que auxiliariam o professor a trabalhar cada atividade em sala de aula. Procurou-se moldar os procedimentos de desenvolvimento das atividades buscando fazer com que os discentes fossem estimulados a abordar os problemas combinatórios utilizando as três seguintes estratégias de resolução propostas por Carvalho (2011, p. 7): postura ativa, divisão em etapas e não adiar dificuldades.

As atividades propostas procuraram viabilizar uma sequência de ensino para introduzir os conceitos básicos da Análise Combinatória, por meio da resolução de problemas de contagem como ponto de partida junto aos alunos do Ensino Médio.

Essas atividades propostas, apesar de não terem sido aplicadas, objetivam contribuir com o processo de ensino-aprendizagem de Análise Combinatória no Ensino Médio. Sendo assim, espero que meus esforços venham a contribuir com futuras pesquisas no campo de investigação do ensino-aprendizagem da Análise Combinatória.

Capítulo 4

Referências

- ALMEIDA, Adriana L. de; FERREIRA, Ana C. – Aprendendo Análise Combinatória através da resolução de problemas: um estudo com classes de 9º ano do Ensino Fundamental e 2º ano do Ensino Médio – Disponível em: <http://www2.rc.unesp.br/eventos/matematica/ebrapem2008/upload/261-1-A-gt11_almeida_e_ferreira_ta.pdf>. Acesso em 20 de junho de 2012.

- BRASIL. Ministério da Educação. Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio. Brasília: Secretaria de Educação Média e Tecnológica, 2000.

- BRASIL. Ministério da Educação. Secretaria de Educação Média e Tecnológica. Parâmetros Curriculares Nacionais: ensino médio. Brasília: MEC, 1999. 364 p.

- CARVALHO, Paulo Cezar P. Métodos de Contagem e Probabilidade, volume 2. Programa de Iniciação Científica (PIC) – OBMEP: 2011.

- FOMIN, Dmitri; GENKIN, Sergey; ITENBERG, Ilia – Círculos Matemáticos: A experiência russa – Tradução de Valéria de Magalhães Iório. Rio de Janeiro: IMPA, 2010.

- LIMA, Elon L. – Exame de Textos: Análise de livros de Matemática para o Ensino Médio – Rio de Janeiro: SBM, 2001.

- LIMA, Elon L.; CARVALHO, Paulo Cezar P.; MORGADO, Augusto C.; WAGNER, Eduardo – A Matemática do Ensino Médio, volume 2 – 6ª ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2006.

- LIMA, Elon L.; CARVALHO, Paulo Cezar P.; MORGADO, Augusto C.; WAGNER, Eduardo – A Matemática do Ensino Médio, volume 1 – 9ª ed. – Rio de Janeiro: SBM, 2006.

- MACHADO, Antônio dos Santos – Matemática Temas e Metas: sistemas lineares e análise combinatória – São Paulo: Atual, 1986.

- MALAGUTTI, Pedro Luiz. Atividades de Contagem a partir da Criptografia, volume 10. Programa de Iniciação Científica (PIC) – OBMEP: 2011.

- MENG, Koh K.; GUAN, Tay Eng – Counting – Singapore: World Scientific, 2002.

- MORGADO, Augusto C.; CARVALHO, João B. P. de; CARVALHO, Paulo Cezar P.; FERNANDEZ, Pedro – Análise Combinatória e Probabilidade com as soluções dos exercícios – 9ª ed. – Rio de Janeiro, SBM, 1991.

- Orientações Curriculares para o Ensino Médio volume 2 – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias – Brasília: Ministério da Educação, Secretaria de Educação Básica, 2006. 135 p.

- PCN + Ensino Médio: Orientações Educacionais Complementares aos Parâmetros Curriculares Nacionais – Ciências da Natureza, Matemática e suas Tecnologias.

- PINHEIRO, Carlos A. de M. – O ensino de Análise Combinatória a partir de situações-problema – Disponível em: <http://paginas.uepa.br/mestradoeducacao/index.php?option=com_rokdownloads&view=file&task=download&id=38:carlos-alberto-de-miranda-pinheiro>. Acesso em 11 de outubro de 2012.

- ROA, Rafael e NAVARRO-PELAYO, Virginia. Razonamiento Combinatorio e Implicaciones para la Enseñanza de la Probabilidad. **Jornadas europeas de estadística**, Ilhas Baleares, 10 e 11 de outubro de 2001.

- ROCHA, Cristiane de A.; BORBA, Rute – O ensino de problemas de raciocínio combinatório: uma reflexão sobre a prática docente – Disponível em: <http://www.ded.ufrpe.br/sipemat/CD-ROM%202%20SIPEMAT/artigos/PO-53.pdf>. Acesso em 11 de outubro de 2012.

- SANTOS, José Plínio O.; MELLO, Margarida P.; MURARI, Idani T. C. – Introdução à Análise Combinatória – 4ª edição revista – Rio de Janeiro: Editora Ciência Moderna, 2007.

- VAZQUEZ, Cristiane M. R.; MALAGUTTI, Pedro Luiz A. – Atividades Experimentais de Análise Combinatória no Ensino Médio em uma Escola Estadual – Disponível em: <www.enrede.ufscar.br/participantes_arquivos/E5_Vazquez_TA.pdf>. Acesso em 14 de junho de 2012.

- VAZQUEZ, Cristiane M. R.; NOGUTI, Fabiane C. H. – Análise Combinatória: alguns aspectos históricos e uma abordagem pedagógica – Disponível em: <http://www.sbem.com.br/files/viii/pdf/05/1MC17572744800.pdf>. Acesso em 13 de junho de 2012.