UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Ana Paula Vargas Faria

CONTRIBUIÇÕES HISTÓRICAS DA LÓGICA CLÁSSICA, DA LÓGICA SIMBÓLICA E O SURGIMENTO DAS LÓGICAS NÃO CLÁSSICAS

Belo Horizonte
2012

Ana Paula Vargas Faria

CONTRIBUIÇÕES HISTÓRICAS DA LÓGICA CLÁSSICA, DA LÓGICA SIMBÓLICA E O SURGIMENTO DAS LÓGICAS NÃO CLÁSSICAS

Monografia apresentada à Universidade Federal de Minas Gerais como requisito parcial para obtenção do título de especialista em matemática do ensino básico.

Orientador: Prof. Dr. Renato Vidal

Belo Horizonte

2012

RESUMO

Este trabalho tem o objetivo de apresentar um breve histórico sobre a lógica, reunindo as principais fases que caracterizaram sua expressão na Filosofia e na Matemática. Na tentativa de expor as modificações significativas da lógica clássica (aristotélica) para a lógica simbólica e que levou ao surgimento das lógicas não clássicas. Para esse objetivo serão descritas a teoria do silogismo de Aristóteles e as limitações que levaram ao questionamento do modelo aristotélico. Em sequência será explicado o modelo elaborado por Gottlob Frege e seus principais aspectos. Finalmente, serão apresentadas algumas considerações sobre a matemática do século XIX, que contribuíram para o surgimento das lógicas não clássicas, dando uma breve explicação sobre a Lógica Paraconsistente.

Palavras-chave: lógica clássica, lógica simbólica, lógicas não clássicas

SUMÁRIO

INTRODUÇÃO

Para o pensamento Filosófico e Científico, Lima (2009) ressalta que a lógica veio instrumentalizar pensamentos, dar maior sustentabilidade às questões racionais em busca de motivos nas relações causa-efeito. Segundo este mesmo autor, a filosofia e a ciência ganham quando, por elaborações do pensamento, vão além do mundo revelado.

Ao considerar as formas de pensamento na sua origem, a lógica torna-se importante, pois dá condições para que os conteúdos das diversas ciências sejam consistentes, entrelaçados e coerentes e dessa forma:

> A lógica é a disciplina que trata das formas de pensamento, da linguagem descritiva do pensamento, das leis de argumentação e raciocínio corretos, dos métodos e dos princípios que regem o pensamento humano (KELLER; BASTOS, 2000, p. 15).

Tal importância motivou a elaboração do presente trabalho que tem como tema a história da lógica, mais precisamente a evolução da lógica aristotélica para a lógica simbólica e o surgimento das lógicas não clássicas.

Como se desenvolveu a lógica simbólica, a partir da lógica clássica, e o que levou ao surgimento das lógicas não clássicas? Procurando responder a tal questionamento, apresenta-se um breve histórico sobre a lógica clássica, descrevendo a teoria do silogismo de Aristóteles e os motivos que levaram ao desenvolvimento da lógica simbólica. Uma característica comum à lógica clássica é estar pautada em dois princípios básicos, apresentados abaixo:

Em seguida explica-se o modelo elaborado por Gottlob Frege e, finalmente, expõe-se as motivações que levaram ao surgimento das lógicas não clássicas, quem tem como princípio a negação de pelo menos um dos princípios da lógica clássica, dando uma ênfase especial à lógica paraconsistente, desenvolvida pelo brasileiro Newton da Costa.

O trabalho, além de reunir as principais fases que caracterizam as formas da lógica, tornará acessível um conteúdo acadêmico que é considerado árido.

1 SILOGISMO

A história da lógica clássica inicia-se propriamente com Aristóteles, no século IV a. C. (384-322 a. C.).

> Na antiguidade, os gregos foram preponderantes no cultivo, prática e gosto pelo argumento. Entre os predecessores de Aristóteles (Platão, sem dúvida) devemos chamar a atenção para o trabalho dos sofistas, classe de tutores privados da Grécia antiga; e convém mencionarmos que paradoxos e argumentos falaciosos, argumentos que, de premissas aparentemente verdadeiras e por passos aparentemente válidos, levam a conclusões aparentemente falsas, eram conhecidos na Grécia antiga. (D'OTTAVIANO; FEITOSA, 2003, p. 2)

Aristóteles definiu a lógica como um método do discurso demonstrativo, que utiliza três operações da inteligência: o conceito, o juízo e o raciocínio. O conceito é a representação mental dos objetos. Juízo é um ato mental de afirmação ou de negação de uma idéia a respeito de outra, isto é, da coexistência de um sujeito e um predicado. Raciocínio é a articulação de vários juízos. O objeto próprio da lógica não é o conceito nem o juízo, mas o raciocínio, que permite a progressão do pensamento. Em outras palavras, para Aristóteles não havia pensamento estruturado quando se consideram ideias isoladas. O juízo é a afirmação ou negação da relação entre o sujeito (neste caso, o próprio objeto) e seu predicado, ou seja, Aristóteles caracterizava juízo verdadeiro quando une na proposição o que está unido na realidade, ou separada, na proposição, o que está realmente separado. A verdade é, assim, a adequação ou a correspondência entre o juízo e a realidade. Os juízos se dividem de acordo com a qualidade, a quantidade, a relação e a modalidade. Quanto à qualidade, podem ser afirmativos ou negativos. Os afirmativos sustentam a conveniência do predicado ao sujeito (o homem é racional), enquanto os negativos sustentam a não conveniência entre eles (o homem não é imortal). De acordo com a quantidade, os juízos podem ser de três tipos: universais, quando o sujeito é tomado em toda sua extensão (todo homem é mortal); particulares, quando o sujeito é tomado em parte de sua extensão (alguns homens são brasileiros); e individuais ou singulares, situações em que o sujeito é tomado no mínimo de sua extensão.

A terceira operação da inteligência – o raciocínio – é o que leva à conclusão sobre os vários juízos contidos no discurso. Os raciocínios podem ser analisados como silogismos, nos quais uma conclusão decorre de duas premissas.

.

Assim, Aristóteles criou então a t*eoria do silogismo* e axiomatizou-a de diversas formas. "Iniciou o desenvolvimento da lógica modal, lidando com as noções de necessidade, possibilidade e contingência: uma sentença *A* é *contingente* se *A* é não necessária, porém não impossível" (D'OTTAVIANO; FEITOSA, 2003, p. 2). É famosa a questão dos futuros contingentes de Aristóteles. Exemplo: Haverá uma batalha naval amanhã.

A *teoria dos silogismos* constitui um dos primeiros sistemas dedutivos já propostos.

D'Ottaviano e Feitosa (2003, p. 2) enfatizam que "filósofos e historiadores da lógica consideram a teoria do silogismo como a mais importante descoberta em toda a história da lógica formal, pois não constitui apenas a primeira teoria dedutiva, mas também um dos primeiros sistemas axiomáticos construídos".

> Para Aristóteles, a Lógica deveria fornecer os instrumentos mentais necessários para enfatizar qualquer tipo de investigação. Mais ainda, deveria explicar o método pelo qual, partindo de uma determinada conclusão, resolve-se precisamente nos elementos dos quais deriva, ou seja, nas premissas e nos elementos de que brota, e assim fica fundamentada e justificada. Tanto que, ele foi o primeiro sábio a notar que certos raciocínios são corretos em virtude unicamente da sua forma. (CHAGAS, 2004, p. 116)

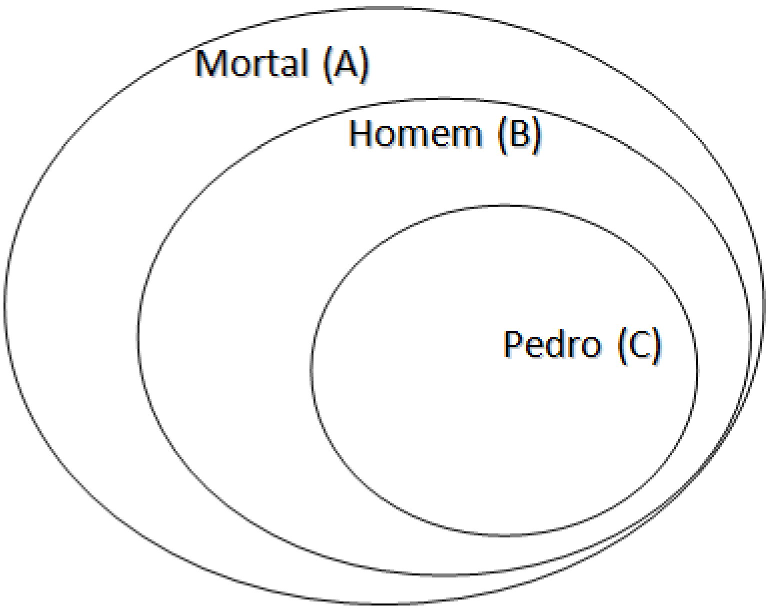
Aristóteles, então, criou uma ciência inteiramente nova, capaz de estudar e classificar as formas de raciocínio válidas. Além disso, foi ele quem introduziu artifícios como o uso de letras mudas para denotar os termos, bem como termos fundamentais tais como "válido", "não válido", "contraditório", "universal" e "particular".

Apresenta-se então a silogística aristotélica:

O silogismo, etimologicamente, significa “reunir com o pensamento”. Define-se como uma argumentação em que, de um antecedente que une dois termos a um terceiro, infere-se um consequente que une estes dois termos entre si. Observem o exemplo a seguir:

ANTECEDENTE	Todo homem é mortal	– Premissa maior
	Pedro é homem	– Premissa menor
CONSEQUENTE	Pedro é mortal	– Conclusão

Representação gráfica da relação lógica de Aristóteles:



Keller e Bastos (2000) explicam que aquilo que no raciocínio é chamado de antecedente, na estrutura do silogismo aparece como premissas e o que é chamado de consequente aparece como conclusão. Para que se possa inferir uma consequência é necessário que dois termos sejam iguais a um mesmo terceiro. No exemplo, mortal e Pedro são dados como idênticos a homem porque são afirmados e, em lógica, afirmar é identificar um com o outro, assim como negar é separar. Se fossemos representar essa relação, teríamos a seguinte formalização do argumento:

Todo B é A

C é B

C é A

No exemplo, pode-se observar que os termos *mortal*, *homem* e *Pedro* possuem extensão diferente. A extensão de um termo refere-se ao número de indivíduos aos quais o termo é atribuído. Assim, observa-se que o termo *mortal* é um termo que é atribuído a um número maior de indivíduos que *homem* e *Pedro*, porque *mortal* é atribuível a muitas e diversas outras coisas, além de *homem* e de *Pedro*. Do mesmo modo, o termo *homem* atribui-se a *Pedro* e a todos os outros indivíduos humanos, tendo assim uma extensão maior que este. Por apresentar uma extensão maior que *Pedro* e menor que *mortal*, *homem* é o termo médio.

A premissa que contém o termo de maior extensão chama-se premissa *maior*, a premissa que contém o termo de menor extensão chama-se premissa *menor* e a preposição que deriva dos termos menor e maior chama-se conclusão. Abreviadamente: A para o termo maior, C para o termo menor e B para o termo médio.

(B) (A)

Todo homem é mortal

(C) (B)

Pedro é homem

(C) (A)

Pedro é mortal

O ato de identificar ou compor, pela afirmação, ou decompor, pela negação, chama-se *juízo*. Portanto, cada premissa é um juízo.

Os elementos do juízo são: sujeito – aquele de quem se diz alguma coisa (Pedro); predicado – aquilo que se diz do sujeito (homem); e cópula – verbo que liga o sujeito ao predicado (é).

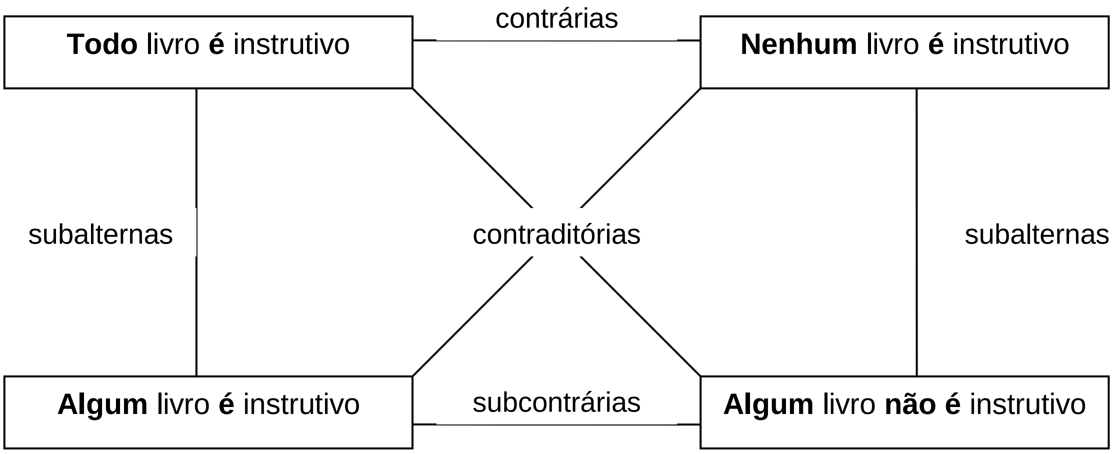
Em lógica, as premissas recebem a denominação de proposições e são, por sua vez, a expressão oral ou gráfica do juízo. As proposições comportam uma quantidade que é dada pela extensão do sujeito que elas contêm, que pode ser considerado: universalmente ou particularmente. Para se exprimir a extensão do sujeito usam-se as partículas quantificadoras: *Todo* para a extensão universal; *Algum* para a extensão tomada em parte ou particular; *Este* para a extensão restrita a um indivíduo. As proposições comportam também o que se chama de qualidade conforme a natureza da cópula. Quando a cópula compõe, através da afirmação, a proposição chama-se afirmativa; ao contrário, quando separa, através da negação, a proposição é negativa.

Desse modo, unindo-se os elementos *quantidade* e *qualidade*, as proposições são classificadas como:

Universal afirmativa: *Todo* livro *é* instrutivo.
Universal negativa: *Todo* livro *não é* instrutivo.
Particular afirmativa: *Algum* livro *é* instrutivo.
Particular negativa: *Algum* livro *não é* instrutivo.

Keller e Bastos (2000) afirmam que, a partir desta classificação, pode-se entender melhor o que se chama oposição lógica das proposições, regida pelo princípio de contradição. Duas proposições se opõem entre si quando têm o mesmo sujeito e o mesmo predicado, mas diferem entre si em quantidade e/ou qualidade.

Aristóteles estabeleceu as relações entre esses quatro tipos de proposições categóricas através de seu famoso *quadrado lógico da oposição*:



Contraditórias são duas proposições que possuem o mesmo sujeito e o mesmo predicado, mas que diferem entre si tanto em quantidade como em qualidade. “Trata-se da oposição mais forte, porque não há nada em que elas possam convir, ou seja, sua oposição é absoluta, uma destrói simplesmente a outra” (KELLER; BASTOS, 2000, p. 59).

Keller e Bastos (2000) explicam que o processo de oposição das proposições permite, de uma maneira totalmente formal, identificar e excluir as composições distintas. Isto significa que é possível, de um modo totalmente formal, inferir da verdade ou falsidade de uma proposição a falsidade ou verdade de outra que tenha o mesmo sujeito e predicado. Para tanto, existe a assim chamada lei da oposição:

> *Contraditoriedade*: duas proposições contraditórias não podem ser verdadeiras ao mesmo tempo, nem podem ser falsas ao mesmo tempo, o que quer dizer que se uma é verdadeira, a outra é necessariamente falsa e vice-versa. Elas não convêm em nada entre si, nem em quantidade, nem em qualidade e nem na atribuição de verdade ou falsidade, sendo por isso a mais forte das oposições lógicas. Exemplo: Todo livro é instrutivo – algum livro não é instrutivo, uma é universal e a outra particular; uma é afirmativa, outra é negativa; a universal afirmativa é falsa, enquanto a particular negativa é verdadeira. (KEELER & BASTOS, 2000, p. 60)

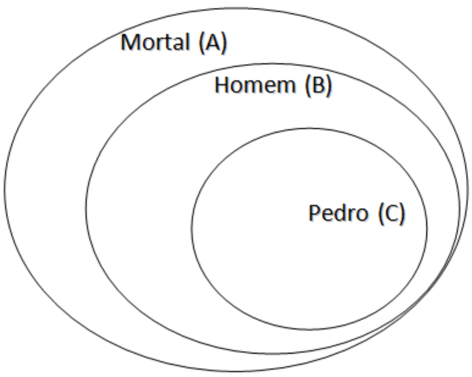
Keller e Bastos (2000) ressaltam que o silogismo tem em vista o rigor da *forma*, ou seja, interessa-lhe a conexão necessária que rege a relação dos termos entre si e entre as premissas, não se preocupando com o conteúdo verdadeiro ou falso. Isto quer dizer que não cabe à lógica discutir sobre a verdade ou falsidade das premissas, tarefa esta que pertence à teoria do conhecimento, e, portanto, simplesmente pressuposta por ela, que visa única e exclusivamente a correção ou incorreção da *forma* do pensamento.

O silogismo depende de alguns princípios fundamentais que garantem o pensamento correto:

- o princípio da afirmação universal, formulado da seguinte maneira: tudo que se afirma universalmente de um sujeito é afirmado de todos os indivíduos que estão contidos neste sujeito; e
- o princípio da negação universal: tudo que é negado universalmente de um sujeito é negado de todos os indivíduos contidos nesse sujeito. Exemplo: na afirmação "todo animal é um ser vivo" está implícita a atribuição da característica "ser vivo" a cada um dos indivíduos contidos na extensão do termo *animal*, porque está atribuída a todos; na afirmação "nenhum homem é transparente" está implícita a negação da característica "transparente" a cada um dos indivíduos contidos na extensão do termo *homem*, porque está negada a todos.

Tais princípios, na argumentação silogística, são concretizados através de seis regras básicas da estrutura formal que indicam a correção ou incorreção de um silogismo:

1ª - Todo silogismo contém somente três termos: maior, médio e menor.



Onde A é o termo maior que é o conjunto.
B é o termo médio que está contido em A.
C é o termo menor contido em B que está contido em A.

2ª - O termo médio não pode entrar na conclusão

~~(B)~~ (A)
Todo homem é mortal
(C) ~~(B)~~
Pedro é homem
____
(C) (A)
Pedro é mortal

Para que se caracterize um silogismo válido é necessário que o termo médio seja o elo entre o termo maior e o menor, por isso o mesmo não deverá aparecer na conclusão.

3ª - O termo médio deve ser universal ao menos uma vez

Todo homem é mortal
Pedro é homem
____
Pedro é mortal

Não importa se na 1ª ou na 2ª premissa, em alguma delas o termo médio deve estar associado a um quantificador universal.

4ª - De duas premissas negativas, nada se conclui

Todo homem **não** é mortal
Pedro **não** é homem
____
?

O silogismo não é válido, pois quando existem duas premissas negativas, o termo B não consegue fazer a ponte entre as classes uma vez que não existe nenhuma relação entre os termos.

5ª - De duas premissas afirmativas não se pode haver conclusão negativa

Todo homem é mortal

Pedro é homem

____

Pedro é mortal

De duas premissas afirmativas não se pode chegar a uma conclusão NEGATIVA, pois não há possibilidade de negação uma vez que a conclusão do raciocínio é a soma entre o conceito e o juízo.

6ª - A única premissa que pode ser negativa é a premissa que contém o quantificador universal, neste caso a conclusão deverá ser negativa

Todo homem **não** é mortal

Pedro é homem

____

Pedro **não** é mortal

Todo homem é mortal

Pedro **não** é homem

____

?

Aristóteles, durante os seus trabalhos, construiu uma sofisticada teoria dos argumentos, cujo núcleo é a caracterização e análise dos silogismos. Num primeiro momento, o sábio desenvolveu os princípios maiores que sustentaram os silogismos, bem como as regras que lhe devem moldar a construção.

> A característica mais importante deixada pelos trabalhos de Aristóteles é justamente o fato de usar, pela primeira vez na história, letras que poderiam representar numa expressão um determinado substantivo. Além disso, encontram-se, ainda neste período, as primeiras tentativas de se estabelecer um rigor nas demonstrações matemáticas. (CHAGAS, 2004, p. 116)

Para Aristóteles, se os princípios gerais fossem adequadamente formulados e as suas consequências corretamente deduzidas, as explicações só poderiam ser verdadeiras. Tal certeza de Aristóteles, infelizmente, não foi confirmada séculos depois. Apesar de produzir enormes avanços, a lógica aristotélica apresenta enormes limitações, verdadeiros obstáculos para o avanço da ciência e entra em crise no final do século XIX, quando sua capacidade de expressar adequadamente as relações lógicas envolvidas pelas sentenças matemáticas começou a ser questionada.

2 LÓGICA SIMBÓLICA

A chamada lógica moderna ou simbólica, também designada de lógica matemática, iniciou-se no século XVII, com Leibniz (1646-1716), e começou a se desenvolver em parceria com a matemática.

D'Ottaviano e Feitosa (2003) contam que Leibniz influenciou seus contemporâneos e sucessores com seu programa ambicioso para a lógica, que para ele tinha deixado de ser uma "diversão de pesquisadores" e começara a tomar a forma de uma "matemática universal". Seu programa buscava a construção de uma linguagem universal, baseada em um alfabeto do pensamento.

> Leibniz, em seu *Dissertatio de arte combinatória*, publicado em 1666, introduz o projeto da construção de um sistema exato e universal de notação, uma linguagem simbólica universal baseada em um alfabeto do pensamento, a *língua characterica universalis*, que deveria ser como uma álgebra. Essa linguagem propiciaria um conhecimento *fundamental de todas as coisas*. Leibniz acrescentou a seu trabalho o projeto da construção de um *calculus ratiocinator*, ou cálculo da razão. (D'OTTAVIANO; FEITOSA, 2003, p. 5)

Apesar do programa de Leibniz, na forma introduzida por ele, não ser teoricamente exequível, o *calculus ratiocinatur* constituiu um importante precursor da metodologia da lógica contemporânea. Leibniz antecipou o uso dos quantificadores. Em vários de seus trabalhos chamou a atenção sobre a lei da identidade ("A é A", ou "todo A é A") – "verdade primitiva da razão" – e da lei da (não-) contradição, parecendo considerá-las suficientes para a demonstração das verdades que independem da experiência, ou de todos os princípios da matemática.

D'Ottaviano e Feitosa (2003) relatam que, entretanto, as contribuições de Leibniz para a lógica permaneceram, na maioria, não publicadas durante sua vida, tendo ficado desconhecidas até o princípio do século XX. Parte de sua obra foi publicada em Erdmann 1840 e Gerhardt 1890 (ver Gerhardt 1978) e, em 1903, Louis Couturat, filósofo da matemática francês, publicou a obra Opuscules et fragments inédits de Leibniz (ver Couturat 1903).

“Historicamente, apenas generalidades do programa de Leibniz teriam influenciado os lógicos que o sucederam. Se seus trabalhos tivessem sido publicados no século XVII, o reviver da lógica, que só ocorreu no final do século XIX, talvez tivesse ocorrido bem mais cedo” (D’OTTAVIANO; FEITOSA, 2003, p. 6).

Immanuel Kant (1724 – 1804) pouco contribuiu para a lógica, em sua obra, mas sua influência foi grande, devido à sua reputação em outros campos do conhecimento. No prefácio de seu Kritik der reinen Vernunft, edição de 1787, afirma explicitamente que a lógica não tinha dado qualquer passo importante, para frente ou para trás, desde Aristóteles, e parecia, sob toda aparência, estar acabada e completa.

Devemos mencionar, entre os precursores da lógica contemporânea: Boole (1847) e De Morgan (1847 e 1860) em álgebra da lógica. Peirce, precursor da pesquisa moderna, que introduziu a definição de ordem simples, o primeiro tratamento do cálculo proposicional como um cálculo com dois valores de verdade e a definição de igualdade, tendo iniciado em 1881 o tratamento dos fundamentos da aritmética; Schröder; e McColl que, em 1877, construiu o primeiro cálculo de proposições.

Apesar dos trabalhos precursores de Leibniz, Boole, de Morgan e Peirce, que já se contrapunham à posição de Kant, o verdadeiro fundador da lógica moderna foi Gottlöb Frege (1845-1918). O pensamento de Frege, praticamente desconhecido, foi descoberto por Bertrand Russel.

D’Ottaviano e Feitosa (2003) contam que os passos essenciais para a introdução do método logístico foram dados em 1879, no Begriffsschrift (Frege 1977). O livro contém, pela primeira vez, o cálculo proposicional em sua forma lógica moderna, a noção de função proposicional, o uso de quantificadores e a análise lógica de prova por indução matemática. O Begriffsschrift de Frege só é comparável, na história da lógica, aos *Analytica Priora* de Aristóteles.

Frege foi um dos precursores da distinção entre linguagem e meta-linguagem.

> Em 1884, Frege adota a tese – *logicismo* – de que a aritmética é um ramo da lógica, no sentido de que todos os termos da aritmética podem ser definidos com o auxílio apenas de termos lógicos e todos os teoremas da aritmética podem ser provados a partir dos axiomas lógicos. Essa posição é rigorosamente apresentada por Frege em 1893. (D'OTTAVIANO; FEITOSA, 2003, p. 6)

Antes de apresentarmos o modelo elaborado por Frege e seus principais aspectos, analisemos as principais dificuldades do modelo aristotélico, uma vez que foram estas dificuldades que levaram ao aparecimento da abordagem fregiana, segundo Margutti (2005): **1)** A sentença *Sócrates é mortal* é universal afirmativa, porque o sujeito *Sócrates* é tomado em toda a sua extensão. Mesmo assim, diferentemente de *Todo homem é mortal*, que tem contraditória (*Algum homem não é mortal*) e contrária (*Nenhum homem é mortal*), *Sócrates é mortal* só tem contraditória (*Sócrates não é mortal*). **2)** A sentença da forma *S é P* pode ser convertida numa outra, que lhe é equivalente, possuindo a forma *P é S,* desde que algumas regras sejam obedecidas*.* Desse modo, a sentença *Algum A é B* pode ser convertida em sua equivalente *Algum B é A*; a sentença *Todo A é B* pode ser convertida em sua equivalente *Algum B é A*. Mas isso significa que as noções de *sujeito lógico* e *predicado lógico* dependem só da posição e são, em última instância, indistintas.

3) O argumento *Todo A é B*

Todo C é A

Logo, todo C é B é um silogismo categórico, em que B é o termo maior, C é o termo menor e A é o termo médio. A validade da inferência é determinada a partir da análise "interna" das relações entre os termos que constituem as respectivas sentenças a que pertencem. Mas o argumento *Se todo A é B, então todo C é D*

Todo A é B

Logo, todo C é D não é um silogismo, pois a validade da inferência é determinada a partir das relações "externas" entre as sentenças envolvidas, sem necessidade de considerar o que ocorre com os termos *A, B, C* e *D*. Mesmo assim, os lógicos aristotélico-medievais denominam esse tipo de argumento *silogismo hipotético*. Isso envolve uma problemática ausência de distinção entre a análise de uma sentença com base nas relações entre suas partes constitutivas e a análise de uma sentença com base nas suas relações com outras sentenças.

2.1 O modelo elaborado por Gottlob Frege

Não convencido da naturalidade da base constituída pela aritmética, Frege procurava conduzir a própria aritmética a uma base mais profunda, reduzindo o conceito de número natural ao conceito lógico de classe, ou definir número em termos de conjunto, de modo que a lógica das classes apresentava-se como a teoria mais adequada para a investigação sobre os fundamentos da matemática.

Chama-se *proposição*, um conjunto de proposições chamado de *sentença* toda oração declarativa que pode ser classificada de verdadeira ou de falsa. Observemos que toda proposição apresenta três características obrigatórias:

1) Sendo oração, tem sujeito e predicado;
2) é declarativa (não é exclamativa nem interrogativa);
3) tem um, e somente um, dos dois valores lógicos: ou é verdadeira (V) ou é falsa (F).

São proposições:
a) 9 ≠ 5 (Nove é diferente de cinco).
b) 3 **|** 11 (Três é divisor de 11).
c) Curitiba é a capital do Paraná.
d) São Paulo é um estado da região Sul.
Dessas proposições, **a** e **c** são verdadeiras, **b** e **d** são falsas.

Não são consideradas proposições as frases:
3 · 5 + 1 (onde falta predicado).
Todo humano é mortal? (que é oração interrogativa).
3x – 1 = 11 (que não pode ser classificada em verdadeira ou falsa).

Para indicar as proposições, utiliza-se letras latinas minúsculas *p*, *q*, *r*, *s*, ...

Adição, subtração, multiplicação e divisão são operações aritméticas básicas sobre números. De modo semelhante, pode-se fazer um cálculo com proposições, o que se chama cálculo proposicional ou sentencial, que se baseia em operações lógicas fundamentais. Tais operações resultam da utilização dos conectivos: *Não* (não é verdade que), *e*, *ou*, *se... não*, *se e somente se*.

A partir de uma proposição *p* qualquer sempre podemos construir outra, denominada *negação de p* e indicada com o símbolo *~p*.

Exemplos:

a) p: $2 \in Z$

~p: $2 \notin Z$

b) p: Paris é capital da Itália.

~p: Paris *não* é capital da Itália.

Para que ~p seja realmente uma proposição devemos ser capazes de classificá-la em verdadeira (V) ou falsa (F). Para isso vamos postular o seguinte critério de classificação:

A proposição *~p* tem sempre o valor oposto de *p*, isto é, *~p* é verdadeira quando *p* é falsa e *~p* é falsa quando *p* é verdadeira.

Este critério está resumido na tabela a seguir, denominada *tabela-verdade* da proposição ~p.

p	~p
V	F
F	V

Assim, reexaminando os exemplos anteriores, temos que *~p* é verdadeira no exemplo b e *~p* é falsa no exemplo a.

A partir de proposições dadas podemos construir novas proposições mediante o emprego de dois símbolos lógicos chamados conectivos: conectivo $\wedge$ (lê-se: e) e o conectivo $\vee$ (lê-se: ou).

Colocando o conectivo $\wedge$ entre duas proposições *p* e *q*, obtemos uma nova proposição, $p \wedge q$, denominada *conjunção* das sentenças *p* e *q*.

Exemplos:

a) p: Amazonas é um rio brasileiro.

q: 20 é um número par.

$p \wedge q$: Amazonas é um rio brasileiro *e* 20 é um número par.

b) p: A raiz quadrada de 169 é igual a 13.

q: A aranha é um inseto de seis patas.

$p \wedge q$: A raiz quadrada de 169 é igual a 13 *e* a aranha é um inseto de seis patas.

c) p: um quadrado de lado *a* tem diagonal medindo *2ª.*

q: um quadrado de lado *a* tem área a^2.

$p \wedge q$: um quadrado de lado *a* tem diagonal medindo *2a* e área a^2.

d) p: 2 é divisor de 5.

q: 3 é divisor de 5.

$p \wedge q$: 2 e 3 são divisores de 5.

Vamos postular um critério para estabelecer o valor lógico (V ou F) de uma conjunção a partir dos valores lógicos (conhecidos) das proposições p e q:

A conjunção $p \wedge q$ é verdadeira se *p* e *q* são ambas verdadeiras; se ao menos uma delas for falsa, então $p \wedge q$ é falsa.

Este critério está resumido na tabela a seguir, onde são examinadas todas as possibilidades para p e q. Esta tabela é denominada tabela-verdade da proposição $p \wedge q$.

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

Reexaminando os exemplos anteriores, temos:

a) p é V e q é V, então $p \wedge q$ é V.

b) p é V e q é F, então $p \wedge q$ é F.

c) p é F e q é V, então $p \wedge q$ é F.

d) p é F e q é F, então $p \wedge q$ é F.

Colocando o conectivo $\vee$ entre duas proposições *p* e *q*, obtemos uma nova proposição $p \vee q$, denominada *disjunção* das sentenças *p* e *q*.

Exemplos:

a) p: 5 > 0
q: 5 > 1
$p \vee q$: 5 > 0 ou 5 > 1

b) p: O metal conduz a eletricidade.
q: O mercúrio é plástico.
$p \vee q$: O metal conduz a eletricidade *ou* o mercúrio é plástico.

c) p: 10 é número primo.
q: 10 é número composto.
$p \vee q$: 10 é número primo *ou* número composto.

d) p: $2^2 + 4^2 = 3{,}1416$
q: O sol gira em torno da Terra.
$p \vee q$: $2^2 + 4^2 = 3{,}1416$ *ou* o sol gira em torno da Terra.

Vamos postular um critério para decidir o valor lógico (*V* ou *F*) de uma disjunção a partir dos valores lógicos (conhecidos) das proposições *p* e *q*:

A disjunção $p \vee q$ é verdadeira se ao menos uma das proposições *p* ou *q* é verdadeira; se *p* e *q* são ambas falsas, então $p \vee q$ é falsa.

Este critério está resumido na tabela a seguir, denominada tabela-verdade da proposição $p \vee q$.

p	q	$p \vee q$
V	V	V
V	F	V
F	V	V
F	F	F

Revendo os exemplos anteriores, temos:

a) p é V e q é V, então $p \vee q$ é V.

b) p é V e q é F, então $p \vee q$ é V.

c) p é F e q é V, então $p \vee q$ é V.

d) p é F e q é F, então $p \vee q$ é F.

Ainda a partir de proposições dadas podemos construir novas proposições através do emprego de outros dois símbolos lógicos chamados condicionais: o condicional “se... então...” (símbolo: $\rightarrow$) e o condicional “... se e somente se...” (símbolo: $\leftrightarrow$).

Colocando o condicional $\rightarrow$ entre duas proposições *p* e *q*, obtemos uma nova proposição, $p \rightarrow q$, que se lê: *“se p então q”*.

Exemplos:

a) p: A terra gira.
q: A terra se move.
$p \rightarrow q$: *Se* a terra gira, *então* a terra se move.

b) p: $5 + 3 = 8$
q: O Nilo é um rio europeu.
$p \rightarrow q$: *Se* $5 + 3 = 8$, *então* o Nilo é um rio europeu.

c) p: $5 < 2$
q: $2 \in Z$
$p \rightarrow q$: *Se* $5 < 2$, *então* $2 \in Z$

d) p: 20 é ímpar.
q: 20 não é divisível por 2.
$p \rightarrow q$: *Se* 20 é ímpar, *então* 20 não é divisível por 2.

Vamos postular um critério de classificação para a proposição p → q baseado nos valores lógicos de p e q:

O condicional *p* → *q* é falso somente quando *p* é verdadeira e *q* é falsa; caso contrário, *p* → *q* é verdadeiro.

Este critério está resumido na tabela a seguir, denominada tabela-verdade da proposição p → q.

p	q	p → q
V	V	V
V	F	F
F	V	V
F	F	V

Revendo os exemplos dados, temos:

a) p é V e q é V, então p → q é V.

b) p é V e q é F, então p → q é F.

c) p é F e q é V, então p → q é V.

d) p é F e q é F, então p → q é V.

Colocando o condicional ↔ entre duas proposições *p* e *q*, obtemos uma nova proposição, *p* ↔ *q*, que se lê: "*p* se e somente se *q*", "*p* é condição necessária e suficiente para *q*", "*q* é condição necessária e suficiente para *p*" ou "se *p* então *q* e reciprocamente".

Exemplos:

a) p: Brasília é capital do Brasil.

q: $(2 + 3)^2 = 5^2$

p ↔ q: Brasília é capital do Brasil *se e somente se* $(2 + 3)^2 = 5^2$.

b) p: $\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$

q: $3 \cdot 4 \neq 6 \cdot 2$

p ↔ q: $\frac{3}{2} = \frac{6}{4}$ *se e somente se* $3 \cdot 4 \neq 6 \cdot 2$

c) p: Brasília é capital da Argentina.

q: Todo número terminado por 5 é divisível por 5.

p ↔ q: Brasília é capital da Argentina *se e somente se* todo número terminado por 5 é divisível por 5.

d) p: A neve é preta.

q: A Terra é satélite.

p ↔ q: A neve é preta *se e somente se* a Terra é satélite.

Vamos postular para o condicional *p* ↔ *q* o seguinte critério de classificação:

O condicional ↔ é verdadeiro somente quando *p* e *q* são ambas verdadeiras ou ambas falsas; se isso não acontecer o condicional ↔ é falso.

Assim, a tabela-verdade da proposição p ↔ *q* é a que está a seguir:

p	q	p ↔ *q*
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	V

Revendo os exemplos dados, temos:

a) p é V e q é V, então p ↔ q é V.

b) p é V e q é F, então p ↔ q é F.

c) p é F e q é V, então p ↔ q é F.

d) p é F e q é F, então p ↔ q é V.

Seja *v* uma proposição formada a partir de outras (p, q, r, ...), mediante emprego de conectivos (⋁ ou ⋀) ou de modificador (~) ou de condicionais (→ ou ↔). Dizemos que *v* é uma *tautologia* ou *proposição logicamente verdadeira* quando *v* tem valor lógico V (verdadeira) independentemente dos valores lógicos de p, q, etc.

Assim, a tabela-verdade de uma tautologia *v* apresenta só V na coluna de *v*.

Exemplos:

a) $(p \land \sim p) \rightarrow (q \lor p)$ é uma tautologia pois

p	q	~p	p∧~p	q∨p	(p∧~p) → (q∨p)
V	V	F	F	V	**V**
V	F	F	F	V	**V**
F	V	V	F	V	**V**
F	F	V	F	F	**V**

b) $\sim(p \land q) \leftrightarrow (\sim p \lor \sim q)$ é uma tautologia pois

p	q	p∧q	~(p∧q)	~p	~q	~p∨~q	~(p∧q) ↔ (~p∨~q)
V	V	V	F	F	F	F	**V**
V	F	F	V	F	V	V	**V**
F	V	F	V	V	F	V	**V**
F	F	F	V	V	V	V	**V**

Seja *f* uma proposição formada a partir de outras (p, q, r, ...), mediante emprego de conectivos (∨ ou ∧) ou de modificador (~) ou de condicionais (→ ou ↔). Dizemos que *f* é uma *proposição logicamente falsa* quando *f* tem valor lógico F (falsa) independentemente dos valores lógicos de p, q, etc.

Assim, a tabela-verdade de uma proposição logicamente falsa *f* apresenta só F na coluna de *f*.

Exemplos:

a) $p \land \sim p$ é proposição logicamente falsa pois:

p	~p	p∧~p
V	F	F
F	V	F

b) $(p \vee \sim q) \leftrightarrow (\sim p \wedge q)$

p	q	$\sim p$	$\sim q$	$p \vee \sim q$	$\sim p \wedge q$	$(p \vee \sim q) \leftrightarrow (\sim p \wedge q)$
V	V	F	F	V	F	**F**
V	F	F	V	V	F	**F**
F	V	V	F	F	V	**F**
F	F	V	V	V	F	**F**

Dadas as proposições *p* e *q*, dizemos que "*p* implica *q*" quando na tabela de *p* e *q* não ocorre VF em nenhuma linha, isto é, quando não temos simultaneamente *p* verdadeira e *q* falsa.

Quando *p* implica *q*, indicamos $p \rightarrow q$.

Observações:

1ª) Notemos que *p* implica *q* quando o condicional $p \rightarrow q$ é verdadeiro.

2ª) Todo teorema é uma implicação da forma *hipótese* → *tese*.

Assim, demonstrar um teorema significa mostrar que não ocorre o caso da hipótese ser verdadeira e a tese falsa.

Exemplos:

a) $2 \mid 4 \rightarrow 2 \mid 4 \cdot 5$ significa dizer que o condicional "se 2 é divisor de 4, então 2 é divisor de $4 \cdot 5$" é verdadeiro.

b) *p* é positivo e primo → $\text{mdc}(p, p^2) = p$ quer dizer que o condicional "se p é número primo e positivo, então o máximo divisor comum de p e p^2 é p" é verdadeiro.

Dadas as proposições *p* e *q*, dizemos que "p é equivalente a q" quando *p* e *q* têm tabelas-verdades iguais, isto é, quando *p* e *q* têm sempre o mesmo valor lógico.

Quando *p* é equivalente a *q*, indicamos: $p \leftrightarrow q$.

Observações:

1ª) Notemos que *p* equivale a *q* quando o condicional $p \leftrightarrow q$ é verdadeiro.

2ª) Todo teorema, cujo recíproco também é verdadeiro, é uma equivalência
hipótese ↔ tese.

Exemplos:

a) $(p \rightarrow q) \leftrightarrow (\sim q \rightarrow \sim p)$

p	q	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$\sim p$	$\sim q \rightarrow \sim p$
V	V	**V**	F	F	**V**
V	F	**F**	V	F	**F**
F	V	**V**	F	V	**V**
F	F	**V**	V	V	**V**

b) $2 \mid 8 \leftrightarrow \text{mdc}(2, 8) = 2$ significa dizer que é verdadeiro o bicondicional "2 é divisor de 8 se, e somente se, o máximo divisor comum de 2 e 8 é 2".

Há expressões como:

a) $x + 1 = 7$

b) $x > 2$

c) $x^3 = 2x^2$

que contém variáveis e cujo valor lógico (verdadeira ou falsa) vai depender do valor atribuído à variável.

Nos exemplos citados temos:

a) $x + 1 = 7$ é verdadeira se trocarmos x por 6 e é falsa para qualquer outro valor dado a x;

b) $x > 2$ é verdadeira, por exemplo, para $x = 5$.

c) $x^3 = 2x^2$ é verdadeira se trocarmos x por 0 ($0^3 = 2 \cdot 0^2$) ou 2 ($2^3 = 2 \cdot 2^2$) e é falsa para qualquer outro valor dado a x.

Sentenças que contém variáveis são chamadas *funções proposicionais* ou *sentenças abertas*. Tais sentenças não são proposições, pois seu valor lógico (V ou F) é discutível, dependem do valor dado às variáveis. Há, entretanto, duas maneiras de transformar sentenças abertas em proposições: atribuindo valor às variáveis ou utilizando quantificadores.

O quantificador universal, usado para transformar sentenças abertas em proposições, é indicado pelo símbolo $\forall$ que se lê: “qualquer que seja”, “para todo”, “para cada”.

Exemplos:

a) $(\forall x)$ $(x + 1 = 7)$ que se lê: “qualquer que seja o número x, temos $x + 1 = 7$”. (Falsa)

b) $(\forall x)$ $(x^3 = 2x^2)$ que se lê: “para todo número x, $x^3 = 2x^2$”. (Falsa)

c) $(\forall a)$ $((a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1)$ que se lê: “qualquer que seja o número *a*, temos $(a + 1)^2 = a^2 + 2a + 1$”. (Verdadeira)

d) $(\forall y)$ $(y^2 + 1 > 0)$ que se lê: “para todo número real y temos $y^2 + 1$ positivo”. (Verdadeira)

O quantificador existencial é indicado pelo símbolo $\exists$ que se lê: “existe”, “existe pelo menos um”, “existe um”.

Exemplos:

a) $(\exists x)$ $(x + 1 = 7)$ que se lê: “existe um número x tal que $x + 1 = 7$”. (Verdadeira)

b) $(\exists x)$ $(x^3 = 2x^2)$ que se lê: “existe um número x tal que $x^3 = 2x^2$”. (Verdadeira)

c) $(\exists a)$ $(a^2 + 1 \leq 0)$ que se lê: “existe um número *a* tal que $a^2 + 1$ é não positivo”. (Falsa)

d) $(\exists m)$ $(m (m + 1) \neq m^2 + m)$ que se lê: “existe pelo menos um número *m* tal que $m (m + 1) \neq m^2 + m$”. (Falsa)

Algumas vezes utilizamos também o quantificador $\exists|$ que se lê: “existe um único”, “existe um e um só”, “existe só um”.

Exemplos:

a) $(\exists | x)$ $(x + 1 = 7)$ que se lê: “existe um só número x tal que $x + 1 = 7$”. (Verdadeira)

b) $(\exists | x)$ $(x^3 = 2x^2)$ que se lê: “existe um só número x tal que $x^3 = 2x^2$”. (Falsa)

c) $(\exists | x)$ $(x + 2 > 3)$ que se lê: “existe um só número x tal que $x + 2 > 3$”. (Falsa)

Já vimos o que é a negação de uma proposição simples. Vamos destacar resultados que constituem processos para negar proposições compostas e condicionais.

Negação de uma conjunção: tendo em vista que $\sim(p \wedge q) \leftrightarrow \sim p \vee \sim q$, podemos estabelecer que a negação de $p \wedge q$ é a proposição $\sim p \vee \sim q$. Exemplos:

a) p: $a \neq 0$
   q: $b \neq 0$
   $p \wedge q$: $a \neq 0$ e $b \neq 0$
   $\sim(p \wedge q)$: $a = 0$ ou $b = 0$

b) p: $2 \mid 4$
   q: $3 \mid 9$
   $p \wedge q$: $2 \mid 4$ e $3 \mid 9$
   $\sim(p \wedge q)$: $2 \nmid 4$ ou $3 \nmid 9$

Negação de uma disjunção: tendo em vista que $\sim(p \vee q) \leftrightarrow \sim p \wedge \sim q$, podemos estabelecer que a negação de $p \vee q$ é a proposição $\sim p \wedge \sim q$.

Exemplos:

a) p: o triângulo ABC é isósceles.
   q: o triângulo ABC e equilátero.
   $p \vee q$: o triângulo ABC é isósceles ou equilátero.
   $\sim(p \vee q)$: o triângulo ABC não é isósceles e não é equilátero

b) p: $a = 0$
   q: $b = 0$
   $p \vee q$: $a = 0$ ou $b = 0$
   $\sim(p \vee q)$: $a \neq 0$ e $b \neq 0$

Negação de uma condicional simples: já que $\sim(p \rightarrow q) \leftrightarrow p \wedge \sim q$, podemos estabelecer que a negação de $p \rightarrow q$ é a proposição $p \wedge \sim q$.

Exemplos:

a) $p: 2 \in Z$

$q: 2 \in Q$

$p \to q: 2 \in Z \to 2 \in Q$

$\sim(p \to q): 2 \in Z$ e $2 \notin Q$

b) $p: 5^2 = (-5)^2$

$q: 5 = -5$

$p \to q: 5^2 = (-5)^2 \to 5 = -5$

$\sim(p \to q): 5^2 = (-5)^2$ e $5 \neq -5$

Negação de proposições quantificadas: uma sentença quantificada com o quantificador universal, do tipo $(\forall x)(p(x))$, é negada assim: substitui-se o quantificador pelo existencial e nega-se p(x), obtendo: $(\exists x)(\sim p(x))$.

Exemplos:

a) sentença: $(\forall x)(x + 3 = 5)$

negação: $(\exists x)(x + 3 \neq 5)$

b) sentença: $(\forall x)(x (x + 1) = x^2 + x)$

negação: $(\exists x)(x (x + 1) \neq x^2 + x)$

c) sentença: Todo losango é um quadrado.

negação: Existe um losango que não é quadrado.

Uma sentença quantificada com o quantificador existencial, do tipo $(\exists x)(p(x))$, é negada substituindo-se o quantificador pelo universal e negando-se p(x), obtendo: $(\forall x)(\sim p(x))$.

Exemplos:

a) sentença: $(\exists x)(x = x)$

negação: $(\forall x)(x \neq x)$

b) sentença: ($\exists$x)($a + \frac{1}{2} \geq \frac{1}{3}$)

negação: ($\forall$x)($a + \frac{1}{2} < \frac{1}{3}$)

c) sentença: ($\exists$x)($\frac{1}{a} \in R$)

negação: ($\forall$x)($\frac{1}{a} \notin R$)

2.2 Principais aspectos do modelo elaborado por Frege

Margutti (2005) explica que, primeiramente, Frege procurou fazer uma distinção entre a perspectiva intersentencial e a intrasentencial. Na primeira delas, interessam apenas as relações exteriores entre as sentenças, o que permite representá-las por uma única letra, como se fossem blocos fechados. É o que acontece na representação do argumento: Se P, então Q. Ora, P. Logo, Q. Nele, apesar de cada letra representar uma sentença em forma não-analisada, as relações lógicas entre as sentenças estão claramente explicitadas. Esta é a forma adequada para expressar as relações envolvidas pelo "silogismo hipotético" dos medievais, ao invés de *todo A é B*, temos simplesmente *P*; ao invés de *todo C é D*, temos *Q*; com isso, *se todo A é B, então todo C é D* equivale a *se P, então Q*.

> No caso da perspectiva intra-sentencial, interessam também as relações entre os termos componentes das sentenças envolvidas, o que nos leva a representá-las em forma analisada. É o que acontece no caso do argumento abaixo. Nele, as relações internas entre os termos constitutivos das sentenças e as relações externas entre as sentenças estão claramente explicitadas:
>
> Para todo x, se x é F, então x é G
>
> Ora, x é F
>
> Logo, x é G
>
> (MARGUTTI, 2005, p. 140)

Em segundo lugar, como explica Margutti (2005), Frege usa as noções matemáticas de *argumento* e *função* para analisar a estrutura da sentença na perspectiva intra-sentencial. Seja, por exemplo, a sentença *Sócrates é mortal.* Ela pode ser desmembrada em dois componentes básicos: um *sujeito lógico*, representado pelo nome *Sócrates*, e um *predicado lógico*, representado pela expressão *x é mortal*, em que a variável *x* equivale a um espaço em branco que pode ser ocupado por qualquer indivíduo que tenha a propriedade de ser mortal. Em termos matemáticos, o *sujeito lógico* e o *predicado lógico* correspondem respectivamente ao *argumento* e à *função*: *Sócrates é mortal = argumento 'Sócrates'* + *função 'x é mortal'*.

Ainda de acordo com Margutti (2005), esta abordagem produz uma série de consequências importantes:

1) Obtemos nova análise das sentenças universais aristotélicas: *Todo A é B* equivale a *Para todo x, se x é A, então x é B; Nenhum A é B* equivale a *Para todo x, se x é A, então x não é B*.

2) Temos também uma nova maneira de compreender as sentenças particulares aristotélicas: *Algum A é B* equivale a *Existe um x tal que x é A e x é B*; *Algum A não é B* equivale a *Existe um x tal que x é A e x não é B*.

3) Podemos ver que as sentenças *Sócrates é mortal* e *Todo homem é mortal* são estruturalmente diferentes: *Sócrates é mortal* equivale a *s é mortal* (*s* representa o nome próprio *Sócrates*); *Todo homem é mortal* equivale a *Para todo x, se x é homem, então x é mortal*.

> Como se pode ver, essas duas sentenças *não são* logicamente equivalentes, pois a primeira corresponde a uma sentença declarativa completa, com sujeito e predicado definidos, enquanto a segunda corresponde a uma sentença condicional disfarçada em declarativa, não possuindo sujeito lógico e apenas articulando dois predicados (*x é homem* e *x é mortal*). Isso possibilita uma articulação adequada entre a perspectiva inter-sentencial - cálculo sentencial - e a perspectiva intra-sentencial - cálculo de predicados -, revelando, pela primeira vez, as verdadeiras relações entre as mesmas. (MARGUTTI, 2005, p. 141)

4) As relações do quadrado lógico da oposição, tal como elaborado por Aristóteles, ficam bastante alteradas:

Todo A é B $(\forall x)(x = A \rightarrow x = B)$		Nenhum A é B $(\forall x)(x = A \rightarrow x \neq B)$
	contraditórias	
Algum A é B $(\exists x)(x = A \wedge x = B)$		Algum A não é B $(\exists x)(x = A \wedge x \neq B)$

> Aqui, *Todo A é B* e *Nenhum A é B* deixam de ser contrárias, pois podem ser verdadeiras ao mesmo tempo; *Algum A é B* e *Algum A não é B* deixam de ser subcontrárias, pois podem ser falsas ao mesmo tempo; as sentenças pertencentes aos pares *Todo A é B/Algum A é B* e *Nenhum A é B/Algum A não é B* deixam de ser subalternas, pois a universal não mais implica a particular. Apesar disso, as sentenças dos pares *Todo A é B/Algum A não é B* e *Nenhum A é B/Algum A é B* continuam não podendo ser verdadeiras nem falsas ao mesmo tempo. Assim, dentre as relações apontadas por Aristóteles, sobrevive apenas a de contradição. (MARGUTTI, 2005, p. 142)

5) A abordagem de Frege permite um tratamento inteiramente *extensional* dos conceitos e operadores lógicos. Esse tratamento ocorre quando é possível construir para uma dada expressão uma tabela de valores-verdade em que todos os espaços estejam devidamente preenchidos. É o caso, por exemplo, da conectiva da conjunção:

p	q	$p \wedge q$
V	V	V
V	F	F
F	V	F
F	F	F

3 LÓGICAS NÃO-CLÁSSICAS

Serão apresentadas algumas considerações sobre a matemática do século XIX, que muito influenciou a cultura e o pensamento em geral do século XX e contribuiu, direta ou indiretamente, para o surgimento das lógicas não clássicas.

O século XIX foi um dos períodos áureos da matemática. Um dos marcos fundamentais foi o surgimento das geometrias não euclidianas – geometrias distintas da geometria euclidiana – com os trabalhos de Lobachevski e Bólyai e, posteriormente, com os de Riemann.

Segundo Da Costa (citado por D'OTTAVIANO; FEITOSA, 2003, p. 19), "o surgimento das geometrias não euclidianas talvez tenha sido um dos maiores acontecimentos na história da cultura e, até hoje, tais geometrias são motivações heurísticas ou analógicas para a construção das lógicas não clássicas. Vasiliev e Lukasiewicz, na construção de seus sistemas não clássicos, declararam-se motivados pelo surgimento das geometrias não euclidianas". Quanto à "geometria de Riemann", deve-se considerar não apenas a formalização usual da geometria riemanniana, mas também a teoria geral dos espaços de Riemann, com a concepção riemanniana de espaço, que mudou radicalmente a noção de espaço e constitui uma modificação tão radical quanto aquela provocada pela geometria de Lobatchevski e Bólyai.

Segundo D'Ottaviano e Feitosa (2003), outra criação importante do século XVI foi a construção e desenvolvimento da geometria projetiva; com os trabalhos de Desargues (1591 – 1661), Poncelet (1788 – 1867) e Chasles (1798 – 1880) entre outros, uma geometria mais geral que a euclidiana e que se afasta da noção usual de espaço. Todos os historiadores da matemática, que se interessam pelos princípios da geometria, consideram que o desenvolvimento da geometria projetiva pode ser comparado ao impacto, ainda que com menor intensidade, da geometria de Euclides; principalmente quando a geometria projetiva passou a desenvolver-se num plano puramente abstrato. O fato de que a geometria derivava de certos axiomas puramente formais não era claro na época.

Pela mesma época do surgimento das geometrias não-euclidianas, é descoberta a geometria a um número qualquer de dimensões, principalmente por Grassmann e Cayley. Esta geometria desenvolveu-se de forma abstrata, podendo tornar-se independente da geometria física, que é a ciência que estuda o espaço físico real.

Houve ainda uma grande revolução na área da álgebra, com a construção, por Hamilton, das álgebras não comutativas. A partir das descobertas das primeiras estruturas matemáticas nas quais a operação de multiplicação não é comutativa, Hamilton e toda a escola inglesa passaram a conceber a álgebra como algo abstrato. Ao mesmo tempo, Grassmann começou a elaborar toda a álgebra linear, com a teoria dos espaços vetoriais.

> Nesse sentido, com Hamilton e Grassmann efetuou-se uma mudança radical na maneira de se encarar a matemática, que passou a se tornar abstrata, começando a separar-se das ciências naturais, especialmente da física. A matemática francesa tardou a adquirir essa visão da matemática, que para os alemães já era bastante clara, pois no início do século XX, com Poincaré e outros, a matemática era algo difícil de se separar da física. (D'OTTAVIANO; FEITOSA, 2003, p. 20)

D'Ottaviano e Feitosa (2003) contam ainda que outro processo fundamental foi a evolução do método axiomático, graças aos trabalhos pioneiros de Peano e sua escola, e de vários matemáticos alemães, coroado na obra de Hilbert. O grande mérito da concepção genial e revolucionária de Hilbert está claro em um célebre discurso de 1900, em que afirma que no verdadeiro método axiomático se deveria tratar de todas as possibilidades lógicas existentes. É necessário ainda mencionar o processo, de origem principalmente alemã, de aritmetização da análise.

Até meados do século XX, os matemáticos franceses em geral concebiam a matemática como algo de natureza intuitiva, uma espécie de ciência física. Os matemáticos alemães, principalmente a partir da influência de Cantor, conceberam a matemática como uma ciência puramente abstrata, assumindo que era necessário reconstruí-la logicamente, o que causou impactos sérios, já por nós discutidos.

Finalmente, como ressaltam D'Ottaviano e Feitosa (2003), temos a obra de Cantor, o criador da teoria de conjuntos, com a modificação definitiva de paradigma que ela ocasionou. Considera-se que só existem duas coisas que se comparam à obra de

Cantor: a edificação da matemática grega e a criação da análise infinitesimal por Leibniz e Newton. A grande lição de Cantor resume-se em uma frase célebre: “A essência da matemática radica na sua completa liberdade”. Ou seja, é possível desenvolvê-la em plano totalmente independente do mundo físico real. O século XIX nos legou a visão abstrata cantoriana e a visão concreta francesa de Poincaré (1854 – 1912), Borel (1871 – 1956), Lesbegue (1875 – 1941), etc. A matemática e a lógica de hoje são espécies de sínteses da posição francesa e da alemã.

Da Costa (citado por D’OTTAVIANO; FEITOSA, 2003, p. 20) resume alguns aspectos da história da matemática que influenciaram a criação da lógica atual e das lógicas não-clássicas: “as geometrias não euclidianas sugeriram a possibilidade de lógicas diferentes da clássica; a geometria projetiva contribuiu para que se concebesse a lógica de maneira formal e abstrata; as obras de Cayley, Grassmann e Hamilton corroboraram a importância dos desenvolvimentos provocados pelo impacto das geometrias não-euclidianas; o cantorismo conduziu às axiomatizações da teoria de conjuntos e à formulação das chamadas lógicas abstratas; e a concepção matemática de Poincaré e de outros matemáticos franceses desembocou no construtivismo contemporâneo das lógicas intuicionistas”.

A teoria de conjuntos usual, sobre a qual se pode fundamentar a aritmética (e, portanto, toda a matemática tradicional), mantém a lógica clássica, com seus princípios básicos – as leis básicas do pensamento Aristotélico –, como lógica subjacente. Entretanto, os paradoxos da teoria de conjuntos e questões não solucionadas sobre o conceito de infinito deixavam ainda aos lógicos problemas relativos à fundamentação da matemática.

> O programa de Hilbert, a partir de 1902, tinha por objetivo provar que tais dificuldades podiam ser superadas, mediante uma formalização adequada que permitisse a demonstração metateorética da consistência da aritmética e, portanto, da matemática. **Hilbert & Bernays 1934** (segunda edição em 1939) é um tratado de lógica moderna e contém as idéias de Hilbert sobre os fundamentos da matemática, caracterizando a distinção entre linguagem objeto e metalinguagem (na terminologia de Hilbert, entre matemática e metamatemática). (D’OTTAVIANO; FEITOSA, 2003, p. 21)

Já no final do século XIX, alguns trabalhos pioneiros, buscando soluções não aristotélicas para algumas questões lógicas, foram precursores das lógicas não clássicas em geral, como os de MacColl. Nas primeiras décadas do século XX, vários filósofos e matemáticos, motivados por questões e objetivos algumas vezes distintos, criaram novos sistemas lógicos, diferentes da lógica aristotélica.

D'Ottaviano e Feitosa (2003, p. 21) afirmam que "as lógicas não clássicas diferenciam-se da lógica clássica por:
(i) Poderem estar baseadas em linguagens mais ricas em formas de expressão;
(ii) Poderem estar baseadas em princípios inteiramente distintos; ou
(iii) Poderem ter uma semântica distinta".

Haack (1974, citado por D'OTTAVIANO; FEITOSA, 2003, p. 21) considera duas categorias principais de *lógicas não clássicas*; as que são apresentadas como *complementares da clássica* e as *lógicas alternativas* a ela:

As do primeiro tipo não infringem os princípios básicos da lógica clássica e não questionam sua validade universal, apenas ampliam e complementam o seu escopo. Em geral, a linguagem clássica é enriquecida com a introdução de novos operadores. São exemplos de lógicas complementares, as *lógicas modais*, com os operadores modais de possibilidade e necessidade; as *lógicas deônticas*, com os operadores deônticos proibido, permitido, indiferente e obrigatório; as *lógicas do tempo*, com operadores temporais, relevantes para os fundamentos da física e para a linguística; as *lógicas epistêmicas, lógicas imperativas*, etc.

As *lógicas heterodoxas* (*alternativas*, *desviantes*), rivais da lógica clássica, foram concebidas como novas lógicas, destinadas a substituir a lógica clássica em alguns domínios do saber. Derrogam princípios básicos da lógica clássica. As lógicas heterodoxas, nas quais não vale a lei reflexiva da identidade, são chamadas *lógicas não reflexivas*, como, por exemplo, a lógica quântica. Alguns sistemas não reflexivos fortes englobam a lógica clássica.

Em resumo, uma vez estabelecida a abordagem de Frege nos estudos de lógica, a qual dá origem ao cálculo clássico tal como exposto nos *Principia Mathematica* de Russell e Whitehead, surgem diversos sistemas alternativos, denominados *cálculos não-clássicos*. Dentre eles, destacam-se a Lógica Modal, a Lógica Plurivalente, a

Lógica Paraconsistente, a Lógica Intuicionista, a Lógica Relevante, a Lógica Erotética, a Lógica Fuzzy, etc.

A seguir, damos uma ênfase especial à Lógica Paraconsistente, que tem como principal fundador o brasileiro Newton da Costa. Apresentaremos uma breve ideia sobre o surgimento, objetivos e significados desse modelo, sem abordar detalhes técnicos.

3.1 A Lógica Paraconsistente

Como já mencionamos, entre os princípios básicos da lógica hoje dita “clássica”, de tradição aristotélica, figura o princípio da contradição, ou da não-contradição, como preferem alguns. Aquilo que se conhece como princípio da contradição pode ser formulado de vários modos, os quais não são entre si equivalentes. Um deles diz que dentre duas proposições contraditórias, isto é, tais que uma delas seja a negação da outra, uma delas deve ser falsa. Por exemplo, dado um certo número natural *n*, então, dentre as duas proposições "O número *n* é par" e "O número *n* não é par", uma delas deve ser falsa. Em outros termos, proposições contraditórias não podem ser verdadeiras simultaneamente; assim, uma contradição, ou seja, uma proposição que é a conjunção de duas proposições contraditórias, como por exemplo "o número *n* é par *e* o número *n* não é par", não pode nunca ser verdadeira. Há, no entanto, um outro forte motivo para se evitar proposições contraditórias e contradições. Tecnicamente, em um sistema dedutivo baseado na lógica clássica padrão, ou mesmo na maioria dos sistemas lógicos conhecidos, como a lógica intuicionista, se há dois teoremas contraditórios (ou se for derivada uma contradição), então todas as expressões bem formadas de sua linguagem (ditas "fórmulas" da linguagem) podem ser demonstradas. Em resumo, em um tal sistema, prova-se *tudo*. Um sistema deste tipo é dito ser *trivial*.

Krause (2004) define que “se A e se ~A (a negação de A) forem ambos teoremas de um sistema dedutivo S fundamentado na lógica clássica, então toda fórmula B da linguagem de S é teorema de S”.

> Entre 1910 e 1913, o lógico polonês Jean Łukasiewicz (1876-1956) e o lógico russo Nicolai Vasiliev (1880-1940) chamaram a atenção, de forma independente, para o fato de que, similarmente ao que se deu com os

> axiomas da geometria euclidiana, alguns princípios da lógica aristotélica poderiam ser revisados, inclusive o princípio da contradição. Como se sabe, o questionamento do chamado quinto postulado de Euclides, o famoso ‘postulado das paralelas’, mostrou que ele era independente dos demais axiomas da geometria euclidiana, podendo portanto ser substituído por alguma forma de negação. Isso deu origem às chamadas "geometrias não-euclidianas", de extrema importância inclusive em física. No campo da lógica, Łukasiewicz restringiu-se a análises críticas do princípio da contradição, enquanto que Vasiliev chegou a desenvolver uma silogística que limitava o uso do referido princípio. (KRAUSE, 2004)

Foi no entanto um discípulo de Łukasiewicz, S. Jaśkowski (1906-1965), quem apresentou em 1948 uma lógica que poderia ser aplicada a sistemas envolvendo contradições, mas sem ser trivial. O sistema de Jaśkowski, conhecido como lógica discussiva, ou discursiva, limitou-se a uma parte da lógica, que tecnicamente se denomina de cálculo proposicional, não tendo ele se ocupado da elaboração de lógicas paraconsistentes em sentido forte (envolvendo quantificação, por exemplo).

O lógico brasileiro Newton C. A. da Costa (1929-), então professor da Universidade Federal do Paraná foi quem, independentemente de Jaśkowski (cujos trabalhos haviam saído em polonês em uma publicação sem circulação internacional), iniciou a partir da década de 50 estudos no sentido de desenvolver sistemas lógicos que pudessem envolver contradições, motivado por questões de natureza tanto filosóficas quanto matemáticas.

É importante ressaltar que enquanto na lógica moderna as proposições possuíam apenas dois valores verdade, o Verdadeiro e o Falso, a lógica trivalente considera os valores 1(Verdadeiro), 2 e 3 (Falso). Da mesma forma a lógica paraconsistente, criada por Jaskowski e Newton da Costa, pressupõe a condição trinária elaborada por Lukasiewiscz. Na prática a lógica trivalente, assim como a lógica paraconsistente, considera que certas proposições essenciais da lógica bivalente deixam de ser tautologias.

A análise de da Costa definiu uma hierarquia com uma infinidade de sistemas, as ‘lógicas-C’ se estenderam muito além do nível proposicional. Da Costa desenvolveu cálculos proposicionais, de predicados com e sem igualdade, cálculos com descrições, teorias de conjuntos (mais tarde desenvolveu vários outros sistemas), e é reconhecido internacionalmente como o criador das lógicas paraconsistentes (aliás, o termo "paraconsistente", que literalmente significa "ao lado da consistência", foi cunhado pelo filósofo peruano Francisco Miró Quesada em 1976, em uma correspondência com da Costa).

De acordo com Krause (2004), dito de modo não muito rigoroso, uma lógica é paraconsistente se pode fundamentar sistemas dedutivos inconsistentes. Um exemplo disso é a possibilidade da lógica paraconsistente admitir teses contraditórias, e em particular, uma contradição, mas que não sejam triviais, no sentido de que nem todas as fórmulas, expressões bem formadas de sua linguagem, sejam teoremas do sistema. Dessa maneira, não vale o esquema $\sim(A \wedge \sim A)$, o que significa, por sua tradução que a sentença ‘não é o caso que, ao mesmo tempo, A e não A seja afirmado. É necessário destacar que para a lógica paraconsistente valem muitos esquemas e regras de dedução do cálculo clássico.

Como consequências da lógica paraconsistente podemos considerar que os sistemas inconsistentes são lógica e matematicamente possíveis, embora sejam artificiais. As proposições bem comportadas são necessárias para se obter resultados úteis, segue-se daí a importância da não contradição. Com a lógica paraconsistente compreendemos que a melhor forma de compreender certos princípios é construir sistemas em que eles não valham. Já na matemática, a proposta de Newton da Costa diz que o que existe é aquilo que não é lugar comum.

Como campo de pesquisa, a lógica paraconsistente desenvolveu-se extraordinariamente a partir de então, tendo atraído a atenção de um grande número de pensadores em todo o mundo. No Brasil, grande parte devido à influência de da Costa, originou-se uma forte escola de lógica, inicialmente em São Paulo e Campinas, mas hoje se estendendo por quase todo o país, havendo surgido lógicos que granjearam reputação internacional. Como da Costa mesmo diz, nos anos 50 ele era o único lógico brasileiro que publicava em revistas internacionais; hoje, estima-se que há perto de 150 pesquisadores ativos nas várias áreas da lógica. Presentemente, a lógica paraconsistente constitui tema obrigatório de estudo de qualquer estudante de lógica, filosofia ou ciência da computação; devido às aplicações recentes cada vez mais interessantes que tem encontrado, interessa também a estudantes de física e engenharia, além de matemática, obviamente.

CONSIDERAÇÕES FINAIS

A lógica clássica (aristotélica) é o resultado de investigações feitas por filósofos ao longo dos séculos acerca das regras do pensamento. Esta lógica tem como base o princípio de que os elementos fundamentais do conhecimento são os conceitos e que estes podem se relacionar entre si dando origem a juízos que podem ser falsos ou verdadeiros. Finalmente, ao relacionarmos estes juízos podemos chegar a conclusões (válidas ou não), realizando assim uma inferência, ou seja, raciocinando. Sendo o tipo de inferência mais comum o silogismo, podemos dizer que o estudo desta forma de raciocínio é o instrumento principal na lógica clássica. O aspecto formal é uma das características fundamentais da lógica clássica que, sem ignorar a realidade, estabelece três leis que condicionam nosso pensamento, seja qual for o assunto ou matéria: são os três princípios da razão. Outra característica é o rigor dedutivo, em que, desde que seja admitida a verdade das premissas, a conclusão será necessariamente verdadeira se nenhum princípio da razão for desobedecido, nem nenhuma das regras que lhes estão derivadas.

No entanto, podemos dizer que a lógica aristotélica é incompleta quanto à sua forma, uma vez que se substituem os constantes materiais por variáveis simbólicas, mas mantêm-se as palavras como "se", "todo", "é", etc.; aspecto que irá permanecer estranho à linguagem simbólica ainda durante algum tempo. É precisamente esta incompleta formalização que origina certas ambiguidades que os lógicos procuraram "combater" desenvolvendo assim uma nova lógica. Esta lógica desenvolveu-se, então, na época do renascimento com o desenvolvimento de outras ciências como a Matemática e a Física. A lógica clássica, apesar de continuar sendo a arte do bem pensar, revelava-se incapaz de acompanhar estas ciências, o que tornou necessário estabelecer uma lógica mais abrangente nos seus resultados e da qual se pudessem chegar a novas conclusões.

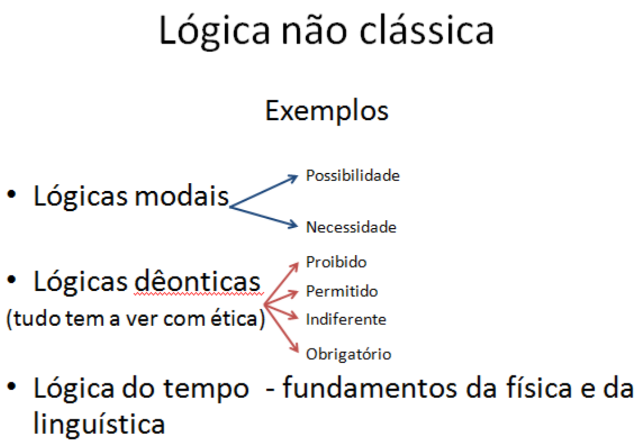
Leibniz foi o filósofo que concebeu a lógica como uma linguagem universal, iniciando o processo de construção da **lógica simbólica moderna**. Estabeleceu-a também como uma linguagem somente simbólica e extremamente abstrata, na qual seria definido o significado de cada símbolo e um conjunto de regras que permitiriam operar com esses símbolos de um modo tão rigoroso e coerente como o do cálculo matemático. No século XIX, George Boole, August de Morgan e Gottlob Frege continuaram a desenvolver a lógica simbólica; os dois primeiros fundando "uma álgebra" das operações do pensamento e o terceiro construindo um fundamento para a própria matemática, constituindo a maior parte das noções de base da lógica matemática. Com efeito, esta junção entre a lógica e a matemática permitiu que a lógica se simbolizasse e viesse a assumir como logística, servindo de base e de instrumento teórico para o estudo das ciências e das tecnologias contemporâneas. Então, a lógica simbólica não veio substituir a lógica aristotélica; veio aperfeiçoá-la, servindo-lhe de complemento. Ela baseia-se no uso de simbolismo, que possibilita uma ultrapassagem das ambiguidades da linguagem corrente, e no cálculo lógico, que torna mais exata a determinação da validade de raciocínios. Assim, podemos nos referir aos dois modelos como um só, ou seja, a lógica aristotélica e a lógica simbólica podem ser tratadas somente como lógica clássica.

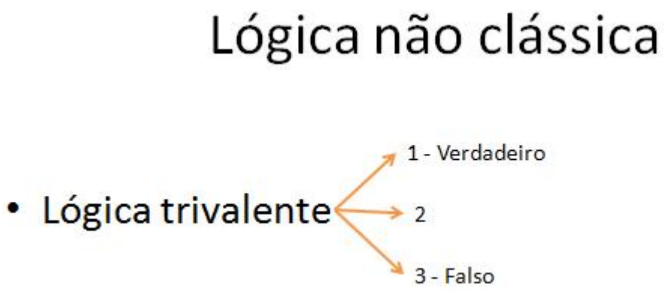
Vimos que na lógica clássica, uma declaração é falsa ou verdadeira, não podendo ser ao mesmo tempo parcialmente verdadeira e parcialmente falsa. Com esta suposição e a lei da não contradição, em que onde uma declaração não pode contradizer a outra, todas as possibilidades foram cobertas pelas leis da lógica clássica. Porém, estudos mais aprofundados verificaram que no mundo real nem todas as situações podem ser classificadas como verdadeiras ou falsas. Quando queremos precisão para descrever algo fica mais difícil estabelecer afirmativas ou negativas a respeito de qualidade das coisas. Quase sempre os limites entre o falso e verdadeiro são indefinidos, incertos, ambíguos e até mesmo contraditórios. Sendo assim, a própria tecnologia trouxe a necessidade da criação de novas teorias para dar respostas a estas situações difíceis de serem tratadas pela lógica clássica binária.

A resposta veio através do surgimento das lógicas não clássicas. As lógicas não clássicas violam justamente estas suposições binárias que não admitem ambiguidades e contradições. Por outro lado, o conceito de dualidade, estabelecendo que algo pode e deve coexistir com o seu oposto, faz as aplicações das lógicas não-clássicas parecerem naturais e até mesmo inevitáveis. Muitas das experiências humanas não são categoricamente verdadeiras ou falsas como exigem as leis da lógica clássica e dessa forma:

> Em síntese, não há uma *lógica verdadeira*. Distintos sistemas lógicos podem ser úteis na abordagem de diferentes aspectos dos vários campos do conhecimento. Há que se aceitar presentemente uma forma de *pluralismo* lógico, no qual vários sistemas (mesmo que incompatíveis entre eles) podem conviver, cada um se prestando ao esclarecimento ou fundamentação de um determinado conceito ou área do saber sem que isso nos apresente qualquer problema; afinal, a *meta*lógica que rege tudo isso é paraconsistente. (KRAUSE, 2004)

Com uma verificação mais precisa das coisas que nos rodeiam chega-se à conclusão que, entre a certeza de *ser* e a certeza de *não ser*, existem infinitos graus de incerteza. Na sequência alguns exemplos de lógicas não-clássicas:





1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11
A	¬A	A ∨ ¬ A	¬(A ∧ ¬ A)	¬¬ A	A ∧ ¬ A *	¬¬ A ⊃ A	A ⊃ ¬¬ A	¬ A ∧ ¬¬ A	¬ (9)	¬ A ∨ ¬¬ A
1	3	1	1	1	3	1	1	3	1	1
2	1	1	3	3	1	1	3	3	1	1
3	1	1	1	3	3	1	1	3	1	1

REFERÊNCIAS BIBLIOGRÁFICAS

KELLER, V; BASTOS, C. L.. *Aprendendo Lógica.* 15ª edição. Petrópolis: Editora Vozes, 2000. 179 p.

LIMA, P. G.. *A importância da lógica para o pensamento filosófico e científico.* Disponível em: <http://www.do.ufgd.edu.br/paulolima/arquivo/logica.pdf>. Acesso em: 22 jan. 2012.

D'OTTAVIANO, Ítala Maria Loffredo; FEITOSA, H. A.. *Sobre a história da lógica, a lógica clássica e o surgimento das lógicas não-clássicas*. Página Educacional do Cle, Campinas, p. 1-34, 2003.

FIGUEIREDO, E. M. P.. *Apresentando alguns aspectos históricos do desenvolvimento da lógica clássica, ciências das idéias e dos processos da mente.* Millenium (Viseu), v. 29, p. 109-122, 2004.

MARGUTTI, P. R.. *Silogística Aristotélica*. Disponível em: <http://www.fafich.ufmg.br/~margutti/Textos.htm>. Acesso em: 22 jan. 2012.

MARGUTTI PINTO, Paulo Roberto. *Introdução à Lógica Simbólica*. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2001.

MARGUTTI, P. R.. *Lógica e transdisciplinaridade.* In: DOMINGUES. I., organizador. Conhecimento e transdisciplinaridade II: aspectos metodológicos. Belo Horizonte: Editora UFMG, 2005. p. 137-168.

IEZZI, G.. *Fundamentos de matemática elementar: conjuntos e funções*. 6ª edição. São Paulo: Atual, 1985. 332 p.

KRAUSE, D.. *A Lógica Paraconsistente*. Disponível em: <http://www.cfh.ufsc.br/~dkrause/pg/cursos/lparac.htm>. Acesso em: 22 jan. 2012.