

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

MONOGRAFIA

**A EQUAÇÃO DO CALOR APLICADA AO
PROCESSAMENTO DE IMAGENS**

Aluna: Natália Moreira Eleutério Alves

Orientadora: Prof(a). Dra. Jussara de Matos Moreira

24 de Janeiro de 2013.

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

A EQUAÇÃO DO CALOR APLICADA AO PROCESSAMENTO DE IMAGENS

Monografia apresentada ao colegiado do
curso de matemática da Universidade Federal
de Minas Gerais, como requisito parcial para
obtenção do título de Especialista em
Matemática.

Aluna: Natália Moreira Eleutério Alves

Orientadora: Prof(a). Dra. Jussara de Matos Moreira

24 de Janeiro de 2013.

AGRADECIMENTOS

Agradeço primeiramente a Deus, meu refúgio e força, onde sempre encontrei respostas para os meus problemas.

Aos meus pais, Geraldo e Raimunda, que em nenhum momento mediram esforços para realização dos meus sonhos, que me guiaram pelos caminhos corretos, me ensinaram a fazer as melhores escolhas, me mostraram que a honestidade e o respeito são essenciais à vida, e que devemos sempre lutar pelo que queremos. A eles devo a pessoa que me tornei, sou extremamente feliz e tenho muito orgulho por chamá-los de pai e mãe. AMO VOCÊ!

Ao meu irmão Júnior e minha irmã Sabrina, pelo carinho, pela ajuda e pela compreensão.

Meu profundo agradecimento à minha querida orientadora Prof(a). Dra. Jussara de Matos Moreira. Obrigada pelas orientações acadêmicas, pelas conversas, pelos puxões de orelha, pelos conselhos, pelas oportunidades de trabalho, pelo crescimento intelectual, profissional e pessoal, pela confiança e pelo carinho. Sei que esse será mais um de nossos trabalhos, tenho certeza que virão muitos outros.

A minha amiga Viviane, que sempre estão presente em todos os momentos difíceis e alegres da minha vida. É com ela que compartilho minhas angústias, alegrias, meu desespero quando não vou bem em uma matéria e muitas outras coisas. Muito obrigada, não só pelos conselhos e apoio, mas o mais importante, por ser minha melhor amiga.

Ao meu namorado Cleriston, que sempre que eu pensava em desistir, ele me dava forças para continuar. Ao lado dele aprendi muita coisa e uma delas é que por mais que o caminho esteja difícil e doloroso, devo prosseguir pois lá na frente quando esse caminho já estiver no final, olharei

para trás e me sentirei vitoriosa. Você é uma pessoa muito especial em minha vida. Obrigada por sempre estar ao meu lado me dando força.

Enfim a todos que direta ou indiretamente contribuíram para realização deste trabalho. Meu carinho e muito obrigada!

RESUMO

O uso de modelos matemáticos baseados em Equações Diferenciais Parciais, lineares e não-lineares, para tratar uma imagem tem sido muito explorado nos últimos anos. A ideia consiste em tratar uma dada imagem através da solução de uma equação diferencial parcial (EDP). Neste trabalho descreveremos brevemente como funciona esse processo e estudaremos, em particular, uma aplicação da equação do calor em Processamento Digital de Imagem. Para isso será definido, através da solução da equação do calor, o Espaço de Escala Gaussiano e a partir dele definiremos operadores que possibilitam extrair e manipular informações de interesse presentes em uma imagem.

Sumário

| | | |
|----------|---|-----------|
| 1 | Introdução | 5 |
| 1.1 | Processamento Digital de Imagens (PDI): Um pouco da história e aplicações | 5 |
| 1.2 | Etapas do Processamento Digital de Imagens | 7 |
| 1.3 | Equações Diferencias Parciais aplicadas à PDI | 11 |
| 1.4 | Descrição da monografia | 14 |
| 2 | O Espaço de Escala Gaussiano | 16 |
| 2.1 | Conceitos Preliminares | 16 |
| 2.2 | Caso Unidimensional | 20 |
| 2.2.1 | A função Gaussiana | 20 |
| 2.2.2 | A solução da equação do calor | 21 |
| 2.2.3 | Espaço de Escala Gaussiano | 22 |
| 2.3 | Caso Bidimensional | 24 |
| 2.3.1 | A função Gaussiana | 24 |
| 2.3.2 | A solução da equação do calor | 25 |

| | | |
|----------|---|-----------|
| 2.3.3 | Espaço de Escala Gaussiano | 25 |
| 3 | O Espaço de Escala Gaussiano em Processamento Digital de Imagens | 27 |
| 3.1 | Conceitos Preliminares | 28 |
| 3.1.1 | Escala | 28 |
| 3.1.2 | Imagem | 29 |
| 3.2 | Representação de uma imagem no Espaço de Escala | 31 |
| 3.2.1 | Ruído | 33 |
| 3.2.2 | Detecção de Bordas | 36 |
| 3.2.3 | Detecção de Bolhas | 39 |
| 4 | Conclusão | 46 |

Lista de Figuras

| | | |
|-----|--|----|
| 1.1 | Etapa de Pré-Processamento - remoção de ruído. | 8 |
| 1.2 | Etapa de Pré-Processamento - realce do contraste. | 9 |
| 1.3 | Etapa de Segmentação de uma Imagem. | 9 |
| 1.4 | Etapa de Reconhecimento e Interpretação dos objetos de uma Imagem. | 10 |
| 1.5 | Etapas do Processamento Digital de Imagens. | 10 |
| 1.6 | Tratamento de uma imagem usando a equação de fluxo de curvatura. | 12 |
| 1.7 | Tratamento de uma imagem usando a equação (1.2). | 13 |
| 3.1 | Relação entre escala e resolução. | 29 |
| 3.2 | Representação de uma imagem digital. | 31 |
| 3.3 | Representação de uma imagem em espaço de escala. | 32 |
| 3.4 | Eliminação de ruído em uma imagem. | 35 |
| 3.5 | Remoção de ruído através do filtro Gaussiano. | 36 |
| 3.6 | Representação do espaço de escala do logotipo do IMPA. | 37 |
| 3.7 | Direções do gradiente e da borda em uma imagem. | 37 |

| | | |
|------|--|----|
| 3.8 | Amostra do Espaço de Escala da Lenna | 38 |
| 3.9 | Gráfico da função $f(x, y)$ e suas respectivas bolhas. | 39 |
| 3.10 | Elementos de uma bolha. | 40 |
| 3.11 | Detecção de bolhas em uma imagem. | 40 |
| 3.12 | Criação de bolhas em multiescalas. | 41 |

Capítulo 1

Introdução

O objetivo deste trabalho é apresentar uma técnica, utilizada em Processamento Digital de Imagem (PDI), baseada na solução da equação do calor. Neste capítulo daremos uma ideia geral do que é o Processamento Digital de Imagens (PDI) enfatizando sua história, aplicações e descrevendo as etapas de que consiste o PDI. Em seguida falaremos, de modo geral, sobre equações diferenciais parciais aplicadas à PDI e por fim, o objetivo e a descrição deste trabalho.

1.1 Processamento Digital de Imagens (PDI): Um pouco da história e aplicações

A área de Processamento Digital de Imagens, ao longo dos anos, tem se tornado cada vez mais abrangente por permitir viabilizar grande número de aplicações em duas áreas bem diferentes: o realce de imagens para posterior visualização humana e a extração de informações para análise de imagens. Uma das primeiras aplicações em PDI foi no início do século XX com o objetivo de melhorar a qualidade de envio de imagens por meio de cabos submarinos entre Londres e Nova Iorque para a publicação em jornais. Três décadas a frente, com o advento dos primeiros computadores digitais de grande porte e o início do programa espacial norte-americano, as

pesquisas em PDI deram um grande salto. Nos dias atuais, a área de PDI vem apresentando crescimento expressivo e suas aplicações permeiam quase todos os ramos da atividade humana, como por exemplo:

- Medicina: O uso de imagens no diagnóstico médico tornou-se comum e os estudos em PDI vêm permitindo tanto o desenvolvimento de novos equipamentos quanto a maior facilidade de interpretação de imagens produzidas por equipamentos mais antigos, como por exemplo o de raio X e ultrassom;
- Biologia: A facilidade em processar automaticamente imagens obtidas de microscópios como por exemplo, contar o número de células de um certo tipo presentes em uma imagem, facilita nas tarefas laboratoriais com alto grau de precisão;
- Cartografia: Facilita o mapeamento da superfície terrestre;
- Meteorologia: A meteorologia utiliza-se de informações, que em determinados casos são fornecidos por equipamentos de sensoriamento, como satélites e radares. Para tratamento e aquisição de informações a partir dessas imagens, a meteorologia vale-se dos recursos disponibilizados pelo PDI, visando, entre outros fins, a produção de prognósticos meteorológicos mais precisos;
- Arqueologia: Técnicas de restauração de imagens auxiliam arqueologistas a recuperar fotos borradas de artefatos raros, já destruídos;
- Geologia: Em Geologia, as técnicas de PDI facilitam os estudos na análise da composição e estrutura da superfície, detecção de minerais, óleo e outros recursos naturais;
- Indústria Petrolífera: Técnicas em PDI solucionam problemas críticos na indústria petrolífera, como detecção de derramamento de óleo no mar e localização automática de corrosão e depredação de oleodutos e demais equipamentos marítimos e terrestres;
- Agricultura: O crescimento dos agronegócios vem contribuindo para a inserção das técnicas de processamento de imagens na agricultura. Na tentativa de distribuição de laranjas e outros produtos perecíveis, busca-se a criação de sistemas de inspeção visual automática

para seleção dos alimentos, direcionando a classificação para os diferentes mercados a que o produtor esteja voltado;

- **Sensoriamento Remoto:** O sensoriamento remoto é uma técnica utilizada para obter informações sobre objetos, através de sensores remotos (radar/satélite), sem que haja contato físico com os mesmos. É muito comum, em sensoriamento remoto, distorções, borramentos e outros tipos de imperfeições nas imagens captadas pelos sensores. Através das técnicas de PDI é possível restaurar e eliminar imperfeições indesejadas nessas imagens.
- **Segurança:** É comum, em instituições de qualquer porte, estabelecerem-se restrições de acesso a locais e equipamentos de valor para as mesmas. Com avanço nas pesquisas em PDI novas técnicas estão surgindo para automatizar o processo de verificação de acesso em tais instituições, como por exemplo: Impressão digital e Reconhecimento de retina, íris e facial. A vantagem de se utilizar tais técnicas é o fato de que elas se baseiam em características inerentes à pessoa avaliada por ela. Apesar de não ser impossível, uma impressão digital, por exemplo, é muito mais difícil de ser reproduzida do que um cartão com código de barras, que atualmente é mais utilizado em esquemas de segurança.

Assim, diante de um amplo universo de aplicações relacionadas a esse contexto, houve um crescimento significativo de pesquisas em PDI com objetivo de facilitar a identificação e a extração de informações contidas nas imagem, melhorando a informação visual para análise e interpretação humana.

1.2 Etapas do Processamento Digital de Imagens

O Processamento de Imagens é uma técnica para a análise de dados multidimensionais, que permite manipular e tratar imagens com objetivo de obter informações e melhorar as características visuais da imagem. Porém, o PDI não é uma tarefa simples de ser realizada, pois ela envolve um conjunto de etapas interligadas que, em alguns casos, tem um alto custo computacional.

A primeira etapa consiste em adquirir uma imagem, por exemplo, através de uma câmera digital, de um scanner laser, de um ultrassom, de um ressonador magnético, ou por qualquer outro meio. Após a **Captura**, uma imagem precisa ser representada de forma apropriada para tratamento computacional, ou seja, representamos uma imagem como uma função bidimensional ou tridimensional. Feito isso, inicia-se o **Pré-Processamento** da imagem. Nessa etapa a imagem passa por um processo de filtragem, no qual são eliminados os ruídos, que podem ser obtidos durante a captura da imagem, melhorando assim a qualidade e permitindo uma melhor discriminação dos objetos presentes na mesma. Também, nessa fase, obtém-se uma melhora no contraste da imagem o que torna mais fácil sua percepção a olho humano. Nas figuras abaixo temos o resultado de duas imagens após o processo de filtragem. A Figura 3.5 mostra a remoção do ruído. Observe que após a filtragem a imagem fica mais suavizada sem perda significativa de qualidade. A Figura 1.2 mostra o realce do contraste em uma imagem. O alto contraste da água tem sombras mais profundas e brilhos mais pronunciados, criando texturas que saltam aos olhos de quem as observa.



Figura 1.1: **Etapa de Pré-Processamento - remoção de ruído.**

Fonte: Pássaro, M. C. e Faria, M. D. [10].

Com a imagem filtrada, agora, podemos buscar informações sobre os objetos de interesse. Essa etapa é denominada **Segmentação** da imagem e consiste em reconhecer e dividir a imagem em diferentes regiões como objetos independentes um do outro, em outras palavras, dividir a imagem em regiões de pixels distintas. Na literatura existem diversas técnicas de segmentação, com base em diferentes princípios, como limiarização de histograma, detecção de bordas, texturas, morfologia matemática, dentre outros, sendo cada um adequado a uma aplicação específica. Logo, não existe um método de segmentação genérico que identifique todos os objetos de interesse



Figura 1.2: **Etapa de Pré-Processamento - realce do contraste.**

Fonte: (<http://www.cambridgeincolour.com/pt-br/tutorials/histograms1.htm>)

em uma imagem. Esse processo, apesar de simples de descrever, é um dos mais difíceis de implementar. Se os objetos procurados são facilmente observados na imagem, essa etapa se torna simples, mas, geralmente, esse não é o caso, sendo necessárias outras técnicas mais sofisticadas como regularização e modelagem [11]. Essas duas técnicas usam várias estratégias de otimização para minimizar o desvio entre os dados de imagem e um modelo que incorpora conhecimento sobre os objetos da imagem. A Figura 1.3 mostra a etapa de segmentação de uma amostra de minério de ferro. A primeira figura é uma imagem, obtida através do microscópio ótico, que apresenta várias partículas de hematita e a segunda é o resultado após a etapa de segmentação. Note que foram separados apenas os pixels de interesse.

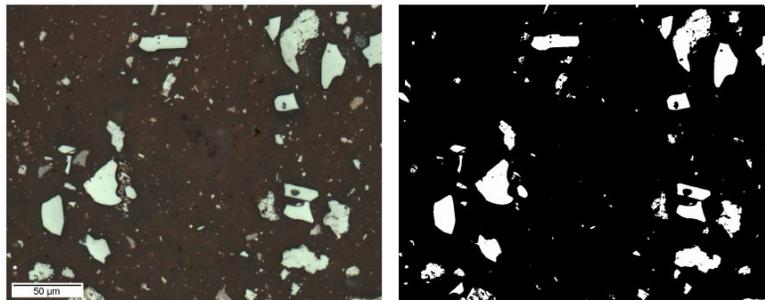


Figura 1.3: **Etapa de Segmentação de uma Imagem.**

Fonte: (<http://www.puc-rio.br/index.html>)

A próxima etapa é a **Extração de Atributos** que permite analisar os objetos identificados e medir características como: tamanho, forma, textura e posição dos objetos. Uma vez detectados os objetos, temos que distinguir os mesmos na imagem, agrupando-os de acordo com sua

semelhança. Isso é feito para cada região de pixel encontrada. Essa etapa é denominada **Classificação**.

Finalmente, a etapa de **Reconhecimento e Interpretação** que faz uma análise quantitativa dos dados obtidos. O reconhecimento atribui um parâmetro (nome) a um objeto, baseado em suas características e a interpretação atribui significado a um conjunto de objetos identificados. A Figura 1.4 mostra a etapa final do PDI de uma amostra de minério de ferro. Foram medidos vários parâmetros da forma das partículas e através desses dados as partículas de hematita foram classificadas da seguinte forma: os objetos marcados em verde foram classificados como hematitas verdes e os em vermelho como hematitas porosas.

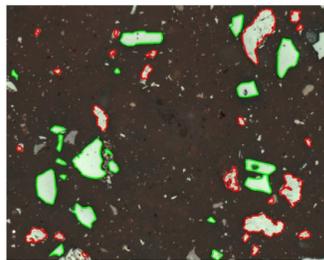


Figura 1.4: **Etapa de Reconhecimento e Interpretação dos objetos de uma Imagem.**

Fonte: (<http://www.puc-rio.br/index.html>)

A Figura 1.5 representa o processamento digital de imagens com suas respectivas etapas, sendo que a etapa de Restauração/Realce é equivalente ao Pré-Processamento citado anteriormente.

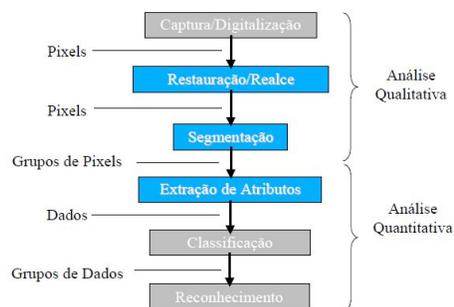


Figura 1.5: **Etapas do Processamento Digital de Imagens.**

1.3 Equações Diferenciais Parciais aplicadas à PDI

O uso de Equações Diferenciais Parciais em processamento digital de imagens tem sido explorado significativamente nos últimos anos. A ideia baseia-se em tratar uma dada imagem através de uma equação diferencial parcial (EDP) e obter os resultados como solução desta equação. Um dos colaboradores, que contribuiu para o avanço em pesquisas na área de processamento de sinais, foi Claude Shannon [1] e [9], conhecido como “Pai da Teoria da Informação”. Ele publicou em 1948 o artigo “Uma Teoria Matemática de Comunicação”, no “Bell System Technical Journal”. Nesse trabalho, Shannon apresentou uma nova teoria da transmissão e processamento de informação através de um modelo esquemático linear de um sistema de comunicação, tornando possível partilhar uma variedade de informações (como sons ou imagens) através de fios elétricos, sob a forma binária de zeros e uns, sendo que, até então, a comunicação se julgava limitada à transmissão de ondas eletromagnéticas.

Em Processamento Digital de Imagens, Shannon observou que dada uma imagem original $f : \Omega \subset \mathbb{R}^n \rightarrow [a, b]$, com $n = 2$ ou 3 , obtém-se uma nova imagem u pela convolução de f com o núcleo K , isto é, $u = f * K$ sendo u a solução de uma equação diferencial parcial. Surge então a primeira aplicação de uma equação diferencial parcial (no caso, a equação do calor), no contexto de PDI. Nesse caso, a equação do calor é denominada filtro Gaussiano linear e ele tem a finalidade de remover ruído e detectar objetos nas imagens, para posterior visualização e tratamento das mesmas. É importante ressaltar que esse filtro foi muito utilizado nos anos 80 em diferentes aplicações, sendo a principal delas a detecção de arestas. No entanto, a aplicação direta desse filtro numa imagem f pode danificá-la, perdendo-se assim importantes características da mesma, como bordas e quinas. Devido a essas restrições, pesquisadores, nos últimos 10 anos, começaram a trabalhar com modelos não lineares com o intuito de substituir os filtros Gaussianos e obter melhores resultados. Citaremos a seguir alguns modelos utilizados em tratamento de imagens baseados em equações de difusão não-lineares.

- **Fluxo da Curvatura Média**

Nesse modelo é utilizado o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u_t = |\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right), & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = I(x), & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

sendo $I(x)$ a imagem original. Essa equação é conhecida como equação de fluxo da curvatura média e sua aplicação em imagens tem por objetivo remover ruídos e detectar bordas. Ao aumentar a escala em t , esse método não borra a imagem como o filtro Gaussiano, mas também não preserva totalmente as bordas. Na Figura 1.6 apresentamos a aplicação dessa equação na imagem em diferentes valores de t . Observe que para escalas maiores a imagem não borra, mas as bordas não são preservadas.

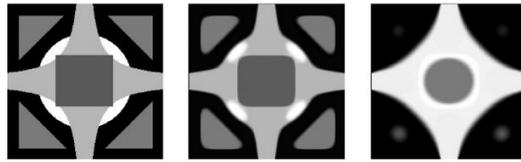


Figura 1.6: **Tratamento de uma imagem usando a equação de fluxo de curvatura.**

Fonte: Assunção, R. G., Pires, V. B. e Barcelos, C. A. Z. [13].

- **Suavização Seletiva - Combinando Detecção de Bordas e Suavização**

Esse método relaciona a ideia de difusão direcionada, usada na equação (1.1), com o processo de detecção de bordas. Esse método trata a imagem sem danificar as bordas através da equação

$$\begin{cases} u_t = \operatorname{div} (g(|\nabla u|) \nabla u), & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = I(x), & \text{em } \Omega, \end{cases} \quad (1.2)$$

sendo $g(x)$ uma função suave e não crescente. Esse método consiste em aplicar uma difusão fraca nos pontos u onde o módulo do gradiente é grande, preservando assim, as bordas da imagem. No entanto, esse modelo apresenta algumas falhas, por exemplo, se a imagem possui muito ruído essa equação não consegue removê-lo, prejudicando assim a detecção de outros objetos na imagem. Na Figura 1.7 apresentamos a aplicação da equação (1.2) em uma imagem. Observe que para valores grandes de t as bordas da imagem são preservadas.

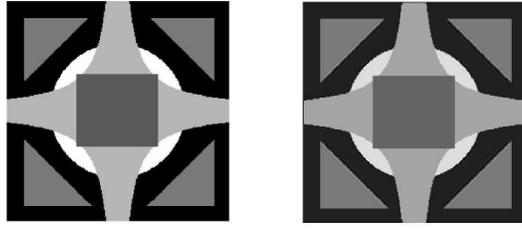


Figura 1.7: Tratamento de uma imagem usando a equação (1.2).

Fonte: Assunção, R. G., Pires, V. B. e Barcelos, C. A. Z. [13].

- **Métodos Baseados em Fluxo Geométrico**

Substituindo $|\nabla u|$ por $|\nabla G * u|$ em (1.2) obtemos a seguinte equação:

$$\begin{cases} u_t = g(|\nabla G * u|)|\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right), & \text{em } \Omega \times \mathbb{R}_+, \\ u(x, 0) = I(x), & \text{em } \Omega. \end{cases} \quad (1.3)$$

Esse método consiste em suavizar imagem mantendo as bordas inalteradas. As bordas são preservadas porque a suavização é feita com baixa velocidade nas proximidades das bordas.

- **Modelos Variacionais**

As EDP's usadas em PDI também podem ser obtidas através de métodos variacionais. A ideia consiste em minimizar um funcional de energia da forma:

$$E(u) = |u - I|^2 + \delta \mathcal{R}(u),$$

onde $|\cdot|$ representa uma norma adequada e I a imagem a ser tratada. O funcional \mathcal{R} fornece o grau de suavização da imagem. Por exemplo, se fôssemos adaptar a equação do calor usando métodos variacionais, o funcional de energia seria dado por:

$$\mathcal{R}_G(u) = \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx.$$

Existem vários modelos baseados em métodos variacionais para tratar imagens e que apresentam resultados satisfatórios. Gostaríamos de mencionar o modelo estudado em [?]. Esse modelo baseia-se na equação:

$$u_t = g|\nabla u| \operatorname{div} \left(\frac{\nabla u}{|\nabla u|} \right) - \sigma(1 - g)(u - I), \quad (1.4)$$

sendo $u(x, 0) = I$, $g(s) = \frac{1}{(1+|s|^2)}$, $s = |\nabla u * G|$ e G a função Gaussiana. O primeiro termo da equação é responsável pela eliminação dos ruídos da imagem inicial I e o segundo é um termo forçante que atua nas regiões de contorno (bordas), mantendo a imagem u próxima da imagem original I . Esse método é muito utilizado em imagens ruidosas, pois apresenta bons resultados na questão de preservação das bordas.

1.4 Descrição da monografia

Para o desenvolvimento desse trabalho foram utilizados como base teórica o estudo de alguns artigos, capítulos de livro, dissertações de mestrado e teses de doutorado, sendo a principal referência o livro [4]. Inicialmente, para um melhor entendimento de como é feito todo o tratamento de uma imagem, foi feito um breve estudo sobre os métodos que baseiam-se em equações diferenciais parciais lineares e não-lineares, utilizados em PDI, dando uma atenção maior às técnicas que utilizam representação multiescala. Em seguida, foi realizado um estudo da função Gaussiana e da equação do calor nos casos unidimensional e bidimensional, bem como o desenvolvimento dos cálculos apresentados no capítulo 4 do livro [4]. Com isso, foi possível definir o Espaço de Escala Gaussiano com base em [4] e entender como o mesmo é aplicado no tratamento de imagens.

A monografia foi dividida da seguinte forma: no Capítulo 1 falamos um pouco sobre a história e o avanço nos estudos em PDI. Depois, demos uma ideia geral de como é feito o processamento de imagens, detalhando e exemplificando cada etapa. Em seguida, falamos de equações diferenciais parciais aplicadas a PDI e citamos alguns modelos que utilizam como base EDP's não-lineares. No Capítulo 2 estudamos a função Gaussiana e a equação do calor nos casos unidimensional e bidimensional, dando suporte para a definição do Espaço de Escala Gaussiano, em ambos os casos. Veremos que o Espaço de Escala Gaussiano é o único filtro que possui as propriedades de linearidade, invariância por translações, estrutura de semi-grupo e a causalidade. No Capítulo 3, entenderemos como é aplicado o Espaço de Escala Gaussiano em PDI, isto é, veremos como identificamos os objetos em uma imagem, para posterior visualização e tratamento, através de

operadores que serão definidos em função das derivadas do Espaço de Escala Gaussiano.

Capítulo 2

O Espaço de Escala Gaussiano

O uso de Equações Diferenciais Parciais em processamento digital de imagens tem sido explorado significativamente nos últimos anos. O conceito se baseia em processar uma imagem com uma equação diferencial parcial e obter os resultados como solução desta equação. A vantagem de se usar EDP's é que a análise das imagens é feita num domínio contínuo, o que possibilita controlar a suavização da imagem através de um parâmetro contínuo e também garante estabilidade e exatidão no processo numérico e na implementação dos algoritmos computacionais. Nesse capítulo será definido o espaço de escala Gaussiano (em uma e duas dimensões) que é uma importante ferramenta matemática no contexto de processamento digital de imagens. Veremos que esse espaço de escala é o único que satisfaz propriedades importantes que serão provadas na Seções 2.2.3 e 2.3.3, em particular, é o único espaço de escala multidimensional, linear, invariante por translações e rotações e que satisfaz a propriedade de semigrupo e da causalidade.

2.1 Conceitos Preliminares

A Transformada de Fourier é uma ferramenta de grande importância na solução de problemas de processamento de imagens, pois, em alguns casos, é conveniente a mudança do domínio do

tempo ou espaço para o domínio da frequência facilitando, assim, seu processamento. Nessa seção, daremos importantes definições, dentre elas, a definição da Transformada de Fourier para funções em L^1 e provaremos algumas de suas propriedades. Também enunciaremos alguns teoremas com suas respectivas demonstrações que serão utilizados ao longo do trabalho.

Definição 2.1 (Transformada de Fourier Unidimensional). *Uma função $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é integrável em \mathbb{R} se satisfaz*

$$\int_{\mathbb{R}} |f(x)| dx < \infty.$$

Denotaremos por L^1 o conjunto das funções integráveis em \mathbb{R} . Assim, se $f : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ é uma função de L^1 , definimos a Transformada de Fourier Unidimensional de f como

$$\hat{f}(w) = \mathcal{F}\{f(\cdot)\}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i w x} f(x) dx. \quad (2.1)$$

Definição 2.2 (Transformada de Fourier Inversa Unidimensional). *Definimos a Transformada de Fourier Inversa de uma função $f \in L^1$ por*

$$\check{f}(x) = \mathcal{F}^{-1}\{f(\cdot)\}(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \hat{f}(w) e^{2\pi i w x} dw. \quad (2.2)$$

Definição 2.3 (Convolução). *Dadas duas funções $f, g \in L^1$, a convolução de f com g , denotada por $f * g$, é definida por:*

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y) g(y) dy. \quad (2.3)$$

Provaremos agora alguns resultados sobre Transformada de Fourier e convolução que utilizaremos durante o trabalho.

Proposição 2.1. *Seja $f, g \in L^1$, então:*

$$f * g = g * f. \quad (2.4)$$

Prova: Fazendo a mudança de variáveis $z = x - y$ em (2.3) temos:

$$(f * g)(x) = \int_{-\infty}^{\infty} f(x - y) g(y) dy = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) g(x - z) dz = (g * f)(x).$$

□

Lema 2.1. *Seja $a > 0$ uma constante positiva. Então,*

$$g(w) = e^{-4\pi^2 w^2 a} \Leftrightarrow \check{g}(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4a}}}{\sqrt{4\pi a}}.$$

Prova: Seja $g(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4a}}}{\sqrt{4\pi a}}$. Calculando a Transformada de Fourier de g e fazendo a mudança de variável $u = 2\pi i w \sqrt{a} + \frac{x}{2\sqrt{a}}$ temos:

$$\begin{aligned} \hat{g}(w) &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-2\pi i w x} \frac{e^{-\frac{x^2}{4a}}}{\sqrt{4\pi a}} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(2\pi i w x + \frac{x^2}{4a})} dx \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(2\pi i w \sqrt{a} + \frac{x}{2\sqrt{a}})^2} e^{-4\pi^2 w^2 a} dx \\ &= \frac{e^{-4\pi^2 w^2 a}}{\sqrt{4\pi a}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} (2\sqrt{a}) du \\ &= \frac{e^{-4\pi^2 w^2 a}}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du. \end{aligned}$$

Para calcular a integral acima vamos usar um truque que é passar o problema para o cálculo de duas variáveis e usar coordenadas polares. Seja $I = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du$. Então:

$$\begin{aligned} I^2 &= \int_{-\infty}^{\infty} e^{-u^2} du \int_{-\infty}^{\infty} e^{-v^2} dv \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} e^{-(u^2+v^2)} dudv \\ &= \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} e^{-r^2} r dr d\theta \\ &= \int_0^{2\pi} d\theta \int_{-\infty}^0 \frac{e^z}{2} dz \\ &= 2\pi \frac{e^z}{2} \Big|_{-\infty}^0 = \pi. \end{aligned}$$

Logo, $I = \sqrt{\pi}$ e com isso obtemos $\hat{g}(w) = e^{-4\pi^2 w^2 a}$, como queríamos demonstrar. \square

Teorema 2.1 (Teorema da Convolução Unidimensional). *Dadas duas funções $f, g \in L^1$,*

$$\widehat{f * g}(w) = \hat{f}(w)\hat{g}(w).$$

Prova: Fazendo novamente a mudança de variáveis $z = x - y$, temos:

$$\widehat{(f * g)}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(y)f(x-y)e^{-2\pi i w x} dy dx = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} g(y)f(z)e^{-2\pi i w(z+y)} dz dy.$$

Pelo Teorema de Fubini (veja referência [6]),

$$\widehat{(f * g)}(w) = \int_{-\infty}^{\infty} f(z) e^{-2\pi i w z} dz \int_{-\infty}^{\infty} g(y) e^{-2\pi i w y} dy = \hat{f}(w) \hat{g}(w).$$

□

Definição 2.4 (Transformada de Fourier Bidimensional). Dada uma função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ com $f \in L^1$, definimos a Transformada de Fourier como

$$\hat{f}(w) = \mathcal{F}\{f(\cdot)\}(w_1, w_2) = \int_{\mathbb{R}^2} e^{-2\pi i w_1 x} e^{-2\pi i w_2 y} f(x, y) dA. \quad (2.5)$$

Definição 2.5 (Transformada de Fourier Inversa Bidimensional).

$$\check{f}(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{f(\cdot)\}(x, y) = \int_{\mathbb{R}^2} \hat{f}(w_1, w_2) e^{2\pi i w_1 x} e^{2\pi i w_2 y} f(x, y) dw_1 dw_2. \quad (2.6)$$

Definição 2.6 (Convolução Bidimensional). Dadas duas funções $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ com $f, g \in L^1$, a convolução de f e g é definida por:

$$(f * g)(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) g(x - u, y - v) dudv. \quad (2.7)$$

Proposição 2.2. Seja $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ com $f, g \in L^1$, então:

$$f * g = g * f. \quad (2.8)$$

Teorema 2.2 (Teorema da Convolução Bidimensional). Dadas duas funções $f, g \in L^1$,

$$\widehat{f * g}(u, v) = \hat{f}(u, v) \hat{g}(u, v).$$

As demonstrações da proposição 2.2 e do teorema 2.2 são análogas às da proposição 2.1 e do teorema 2.1.

Proposição 2.3. Dadas duas funções $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ com $f, g \in L^1$ e suponhamos que as derivadas parciais de f, g existam. Então, para $i = 1, 2$ temos:

$$\frac{\partial(f * g)}{\partial x_i} = f * \frac{\partial g}{\partial x_i} = \frac{\partial f}{\partial x_i} * g. \quad (2.9)$$

Prova: Sejam $f, g : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e suponhamos que as derivadas parciais de f, g existam. Usando a definição 2.6 e a Regra de Leibniz (veja referência [6]), podemos derivar sob o sinal da integral, obtendo assim, para $i = 1, 2$:

$$\begin{aligned} \frac{\partial(f * g)}{\partial x_i} &= \frac{\partial}{\partial x_i} \left[\int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v)g(x_1 - u, x_2 - v)dudv \right] \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} f(u, v) \frac{\partial}{\partial x_i} (g(x_1 - u, x_2 - v))dudv \\ &= f * \frac{\partial g}{\partial x_i}. \end{aligned}$$

A demonstração da segunda igualdade segue do fato que $f * g = g * f$. □

Definição 2.7 (Gradiente de uma função). *Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ e suponhamos que existam as derivadas parciais de f . Definimos o gradiente de f como o vetor*

$$\nabla f(x, y) = \left(\frac{\partial f}{\partial x}, \frac{\partial f}{\partial y} \right). \quad (2.10)$$

O módulo (ou a norma) do gradiente é:

$$|\nabla f(x, y)| = \sqrt{\left(\frac{\partial f}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial f}{\partial y} \right)^2}. \quad (2.11)$$

2.2 Caso Unidimensional

2.2.1 A função Gaussiana

Definição 2.8. *A função Gaussiana (ou função de distribuição normal) de variância σ^2 é a função dada por*

$$G(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma}} e^{\left(-\frac{x^2}{2\sigma^2}\right)}, \quad (2.12)$$

onde o parâmetro σ é o desvio padrão de $G(x)$.

Podemos facilmente observar que a função Gaussiana é uma função par, isto é, $G(x) = G(-x)$. Além disso, segue de forma análoga à demonstração do Lema 2.1, que $G(x)$ é uma função

normalizada, isto é,

$$\int_{-\infty}^{\infty} G(x)dx = 1. \quad (2.13)$$

2.2.2 A solução da equação do calor

A equação do calor é uma importante ferramenta desse trabalho, pois será através de sua solução que definiremos o Espaço de Escala Gaussiano. Nessa seção mostraremos uma maneira de obter formalmente a solução da equação do calor.

Considere a equação do calor unidimensional com condição inicial f_0 , isto é,

$$\begin{cases} u_t = u_{xx}, \\ u(x, 0) = f_0(x). \end{cases} \quad (2.14)$$

Iremos obter uma expressão para a solução da equação acima, através da Transformada de Fourier (veja definição 2.1). Aplicando a Transformada de Fourier em ambos os lados da equação (2.14) e assumindo que podemos derivar sob o sinal da integral encontramos $\hat{u}_x = 2\pi iw\hat{u}$ e $\hat{u}_{xx} = (2\pi iw)^2\hat{u}$. Assim,

$$\hat{u}_t = \hat{u}_{xx} \quad \Rightarrow \quad \hat{u}_t = (2\pi iw)^2\hat{u} \quad \Rightarrow \quad \frac{d\hat{u}}{\hat{u}} = -4\pi^2 w^2 dt.$$

Integrando,

$$\ln(\hat{u}) = -4\pi^2 w^2 t + C \quad \Rightarrow \quad \hat{u} = e^{-4\pi^2 w^2 t + C} \quad \Rightarrow \quad \hat{u} = e^{-4\pi^2 w^2 t} e^C.$$

Fazendo $e^C = C_0$,

$$\hat{u}(w, t) = C_0 e^{-4\pi^2 w^2 t}.$$

Assim, para $t = 0$ temos,

$$\hat{u}(w, 0) = C_0 e^0 = \hat{f}_0(w).$$

Logo, $C_0 = \hat{f}_0(w)$ e obtemos:

$$\hat{u}(w, t) = \hat{f}_0(w) e^{-4\pi^2 w^2 t} = \hat{f}_0(w) \cdot \hat{G}_t(w), \quad (2.15)$$

sendo,

$$\hat{G}_t(w) = e^{-4\pi^2 w^2 t}. \quad (2.16)$$

Tomando a transformada inversa (veja definição 2.2), podemos escrever $u(x, t)$ como produto de convolução de funções (veja Teorema 2.1). Logo,

$$u(x, t) = (f_0 * G_t)(x).$$

Usando o Lema 2.1, temos:

$$G_t(x) = \frac{e^{-\frac{x^2}{4t}}}{\sqrt{4\pi t}}. \quad (2.17)$$

Observe que a função G_t obtida acima é a Gaussiana com variância $\sigma^2 = 2t$. Assim, a solução da equação do calor é dada por:

$$u(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f_0(y) dy, \quad \forall t > 0. \quad (2.18)$$

Assim, a partir da solução da equação do calor definiremos a seguir o Espaço de Escala Gaussiano e provaremos algumas de suas propriedades.

2.2.3 Espaço de Escala Gaussiano

Definição 2.9. *Dado um sinal original $f_0 : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$, definimos o espaço de escala como a função $F : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, em que denotaremos $F_t(x) \equiv F(x, t)$, solução da equação do calor com dado inicial f_0 , isto é, solução de (2.14), dada por*

$$F_t = f_0 * G_t,$$

sendo $G_t(x)$ a função Gaussiana unidimensional dada por (2.17), em que $*$ denota a operação convolução e $F_0(x) = f_0(x)$.

Denotaremos ainda por L_{G_t} a transformação que leva o sinal inicial f_0 ao espaço de escala F_t , isto é,

$$L_{G_t} f_0 = F_t = f_0 * G_t.$$

Observe que a função Gaussiana é o núcleo K o qual nos referimos na Seção 1.3. O Espaço de Escala Gaussiano unidimensional é o único que satisfaz as propriedades abaixo:

1. **Linearidade:** L_{G_t} é linear, isto é, $L_{G_t}(f + \lambda g) = L_{G_t}f(x) + \lambda L_{G_t}g(x)$, para quaisquer sinais f e g e qualquer constante $\lambda \in \mathbb{R}$;
2. **Invariância por translações:** a invariância por translações garante que todas as posições da imagem são tratadas de forma idêntica, isto é, a representação espaço-escala independe da posição do sinal original;
3. **Estrutura de semi-grupo:** a estrutura de semi-grupo garante que a convolução de dois núcleos Gaussianos de variâncias σ_1^2 e σ_2^2 produz um núcleo Gaussiano de variâncias $\sigma_1^2 + \sigma_2^2$.
4. **Causalidade:** Essa propriedade garante que o espaço de escala é suavizado com o aumento do parâmetro t . O conceito de causalidade foi introduzido por Koenderink [12] nos anos 80 e é uma característica muito importante dos espaços de escala, pois permite que um sinal seja simplificado pela convolução com a Gaussiana. Em outras palavras, a representação do objeto em escalas maiores necessariamente tem menos detalhes que o objeto em escalas menores.

Provaremos a seguir essas propriedades, exceto a propriedade 4.

Propriedade 1: Seja \bar{f} a solução da equação do calor, tal que $\bar{f}(x, 0) = (f + \lambda g)(x)$ para algum $\lambda \in \mathbb{R}$. Então, pela definição do espaço de escalas, temos:

$$L_{G_t}\bar{f}(x) = L_{G_t}(\lambda f + g)(x) = (\lambda f + g) * G_t(x),$$

sendo $\bar{f}(x, t) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} (\lambda f + g)(y) dy$.

Então,

$$L_{G_t}(\lambda f + g)(x) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} (\lambda f + g)(y) dy.$$

Pela linearidade da integral:

$$\begin{aligned} L_{G_t}(\lambda f + g)(x) &= \frac{\lambda}{\sqrt{4\pi t}} \int e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y) dy + \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} g(y) dy \\ &= \lambda L_{G_t}f(x) + L_{G_t}g(x). \end{aligned}$$

Propriedade 2:

Definição 2.10. *Seja $f(x)$ um sinal qualquer. L_{G_t} é invariante por translações se*

$$L_{G_t}(f(x - a)) = (L_{G_t}f)(x - a).$$

Se definirmos o operador translação T_a por $T_a g(x) = g(x - a)$ então a definição acima equivale a

$$L_{G_t} \circ T_a = T_a \circ L_{G_t}.$$

De fato, $L_{G_t}f(x)$ é a solução da equação do calor, definida por (2.18). Assim, fazendo a mudança de variáveis $u = y - a$ na integral abaixo temos:

$$\begin{aligned} (L_{G_t} \circ T_a)f(x) &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int e^{-\frac{(x-y)^2}{4t}} f(y - a) dy \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int e^{-\frac{[x-(u+a)]^2}{4t}} f(u) du \\ &= \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} \int e^{-\frac{[(x-a)-u]^2}{4t}} f(u) du \\ &= (L_{G_t}f)(x - a). \end{aligned}$$

Para provar a propriedade abaixo usaremos a função Gaussiana definida no espaço de Fourier, isto é, $\widehat{G}_t(w) = e^{-4\pi^2 w^2 t}$ e o Teorema 2.1.

Propriedade 3: Sejam $\widehat{G}_{\sigma_1}(w) = e^{-2\pi^2 w^2 \sigma_1^2}$ e $\widehat{G}_{\sigma_2}(w) = e^{-2\pi^2 w^2 \sigma_2^2}$. Então, a transformada da convolução de dois núcleos Gaussianos é dada por:

$$\widehat{G_{\sigma_1} * G_{\sigma_2}} = \left(e^{-2\pi^2 w^2 \sigma_1^2} \right) \left(e^{-2\pi^2 w^2 \sigma_2^2} \right) = e^{-2\pi^2 w^2 (\sigma_1^2 + \sigma_2^2)} = \widehat{G_{\sigma_1 + \sigma_2}}.$$

2.3 Caso Bidimensional

2.3.1 A função Gaussiana

Definição 2.11. *A função Gaussiana bidimensional (ou função de distribuição normal) de variância $\sigma^2 = 2t$ é a função dada por*

$$G_t(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4\pi t}} e^{\left(-\frac{x^2 + y^2}{4t} \right)}, \quad (2.19)$$

onde o parâmetro σ é o desvio padrão de $G(x)$.

2.3.2 A solução da equação do calor

Considere a equação do calor bidimensional com condição inicial;

$$\begin{cases} u_t = u_{xx} + u_{yy}, \\ u(x, y, 0) = f_0(x, y). \end{cases} \quad (2.20)$$

Seguindo as mesmas ideias da Seção 2.2.2 temos que a a solução da equação (2.20) é dada pela convolução da Gaussiana com dado inicial f_0 , isto é,

$$u(x, y, t) = (f_0 * G_t)(x, y), \quad (2.21)$$

onde $G_t(x, y)$ é dado por (2.19).

2.3.3 Espaço de Escala Gaussiano

Definição 2.12. *Dado o sinal original $f_0 : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$, definimos o espaço de escala como a função $F : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^+ \rightarrow \mathbb{R}$, em que denotaremos $F_t(x) \equiv F(x, t)$, solução da equação do calor com dado inicial f_0 , isto é, solução de (2.20), dada por*

$$F_t = f_0 * G_t, \quad (2.22)$$

sendo $G_t(x, y)$ a função Gaussiana bidimensional dada por (2.11), em que $*$ denota a operação convolução e $F_0(x, y) = f_0(x, y)$. Além disso, a Transformada de Fourier da função gaussiana bidimensional é dada por

$$\hat{G}_t(w) = e^{-4\pi^2(w_1^2 + w_2^2)t}.$$

Analogamente ao caso unidimensional, denotamos também por L_{G_t} a transformação que leva o sinal inicial f_0 ao espaço de escala F_t , isto é,

$$L_{G_t} f_0 = F_t = f_0 * G_t.$$

O espaço de escala definido acima, além das propriedades de linearidade, invariância por translações, propriedade de semi-grupo e causalidade, possui as propriedades de separabilidade

e invariância à rotação. A invariância à rotação garante que todas as posições da imagem são tratadas de forma idêntica, isto é, dada uma imagem original f_0 e definindo $g_0 = R_\theta f_0$ como sendo a rotação de f_0 de um ângulo θ , temos que o espaço de escala G_t de g_0 é a rotação do ângulo θ de F_t (espaço de escala de f_0), logo

$$G_t = R_\theta F_t.$$

Já a propriedade de separabilidade possibilita uma implementação eficiente através da utilização de duas convoluções unidimensionais ao invés de uma única bidimensional. Em outras palavras, considerando a solução da equação do calor dada por (2.21) podemos escrever essa solução através de duas convoluções unidimensionais, onde cada convolução é feita apenas na variável indicada, isto é,

$$u(x, y, t) = (f_0 *_x G_t(x)) *_y G_t(y),$$

facilitando assim a computação dos Espaços de Escalas Gaussianos para imagens. Assim, o espaço de escala pode ser escrito da seguinte forma:

$$F_t = (f_0 * G_t(x)) * G_t(y).$$

Portanto, com o Espaço de Escala Gaussiano (2.22) bem definido, apresentaremos no Capítulo 3 como ele é aplicado no processamento de uma imagem, isto é, veremos como é possível detectar e tratar os objetos em uma imagem.

Capítulo 3

O Espaço de Escala Gaussiano em Processamento Digital de Imagens

O processo de restaurar uma imagem é uma atividade antiga e que tem por objetivo reconstruir partes danificadas ou perdidas da imagem com intuito de torná-la o mais parecida possível da imagem original. Durante muitos anos o processo de restaurar uma imagem foi feito através de técnicas manuais, porém, nos últimos anos com os avanços na área computacional foi possível automatizar esse processo. A grande vantagem de se tratar uma imagem usando a tecnologia computacional é a segurança, uma vez que a restauração é feita em cópias da imagem e não na própria imagem, evitando assim o risco de destruir a imagem original. Neste capítulo apresentaremos a aplicação em PDI do Espaço de Escala Gaussiano definido por (2.22). Para isso é necessário definir alguns conceitos que são fundamentais para o entendimento dessa aplicação.

3.1 Conceitos Preliminares

3.1.1 Escala

A palavra escala refere-se a inúmeros significados diferentes, podendo se tratar desde uma parada de um avião em um determinado local para abastecimento ou recebimento de carga e passageiros, passando por seu significado como uma sequência ordenada de determinadas quantidades, como na escala de cores, ou na escala musical, até seu significado como graduação de instrumentos para medir certas grandezas, como a escala Richter. A escala pode ser tomada ainda em seu sentido cartográfico, em que é utilizada para determinar distâncias ou dimensões de maneira proporcional num plano ou mapa. Por exemplo em um mapa, define-se a escala através da equivalência das dimensões das distâncias reais para as distâncias no mapa (por exemplo cada centímetro pode equivaler a cem quilômetros). Essa última definição aproxima-se melhor do conceito de escala utilizado no contexto de processamento de imagens, já que o mesmo que foi dito a respeito do mapa poderia analogamente ser tomado em uma imagem.

Um outro ramo da ciência onde o conceito de escala desempenha um papel fundamental é no estudo de fractais. Fractal é um objeto que apresenta invariância na sua forma à medida em que a escala, sob a qual o mesmo é analisado, é alterada, mantendo-se a sua estrutura idêntica à original. O fractal possui portanto a propriedade de autossimilaridade e independência da escala, caracterizada quando uma porção de uma figura ou de um contorno pode ser vista como uma réplica do todo, independentemente da escala em que são analisados.

O conceito de escala está intimamente ligado ao conceito de resolução (ou dealhe). A resolução é o inverso da escala, isto é, quanto maior a escala (escalas grossas) menor é a resolução (ou detalhe). Na figura 3.1 é possível observar a relação entre escala e resolução.

A escala exerce um papel realmente importante na área de processamento de imagens, uma vez que a percepção de um objeto depende da escala em que ele é observado. De fato, se observamos uma floresta e diminuimos a escala, vamos observar uma árvore dessa floresta. Diminuindo a

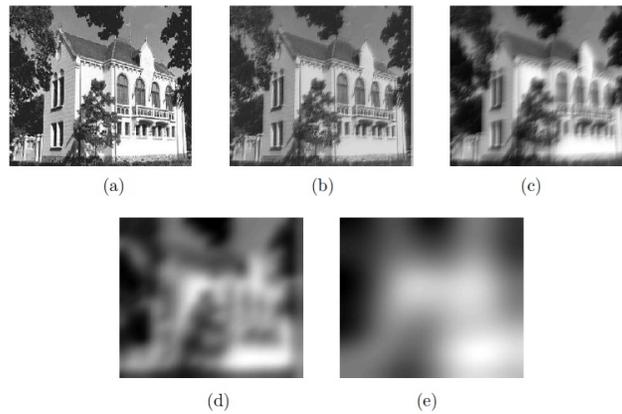


Figura 3.1: **Relação entre escala e resolução.**

Fonte: Barcelos, C. A. Z. [3].

escala, observamos um galho dessa árvore. Diminuindo ainda mais a escala, observamos uma folha desse galho e se ela for observada de uma distância de nanômetros pode-se analisar as partes que constituem a folha. Esta situação mostra a importância da escala ao observar e descrever objetos em uma imagem.

3.1.2 Imagem

Assim como ocorre no caso da escala, dar uma definição à palavra imagem não é uma tarefa simples, devido à subjetividade associada a ela. Por exemplo, do ponto de vista da ótica, imagem é um conjunto de pontos que convergem no plano. No contexto matemático, imagem é uma função bidimensional. Na computação moderna, imagem é uma matriz na qual os índices das colunas e linhas representam um ponto dessa imagem. Também podemos definir imagem como a representação de um objeto através de técnicas de fotografias, pintura, desenho e vídeo. Enfim, o conceito de imagem é muito amplo e difere de acordo com o contexto abordado. Neste trabalho estamos dando uma ênfase maior ao conceito matemático e computacional, que é o mais importante no que diz respeito a PDI. Para entendermos como é tratada uma imagem quando é utilizado o Espaço de Escala Gaussiano é necessário definir alguns conceitos relacionados à mesma.

Definição 3.1 (Imagem). *Definimos imagem como sendo a arte de representar uma pessoa, um objeto, uma paisagem, uma figura ou uma abstração, através de desenhos, traços, figuras geométricas, modelagem ou fotografia.*

Definição 3.2 (Região). *Região é um subconjunto da imagem.*

Definição 3.3 (Imagem Digital). *Matematicamente, definimos uma imagem f como uma função contínua de*

$$f : I \subset \mathbb{R}^p \rightarrow \mathbb{R},$$

sendo $p = 2$ para imagens bidimensionais e $p = 3$ para imagens tridimensionais.

Definição 3.4 (Processamento de Imagens). *Processamento de imagens é qualquer procedimento/processamento efetuado na imagem para melhorar a informação visual para interpretação do olho humano ou para possibilitar a percepção automática da cena através de máquinas.*

Definição 3.5 (Filtragem de uma Imagem). *A filtragem de imagens é uma técnica usada para remover ruído, realçar contornos e melhorar o contraste em imagens.*

Definição 3.6 (Pixel). *O pixel é uma abreviatura para picture element (elemento de um imagem). O pixel é a menor parte de uma imagem digital e cada pixel contém informações que determinam as características da imagem.*

O pixel é usado como unidade de medida para descrever a dimensão geométrica de uma imagem.

Definição 3.7 (Borda). *No contexto de imagem digital, borda é o limite entre duas regiões com propriedades distintas de nível de cinza, isto é, onde há uma mudança brusca de nível de cinza.*

Definição 3.8 (Definição matemática de borda). *Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. A aresta de f é o conjunto de pontos $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ onde o módulo do gradiente é máximo na direção do gradiente, isto é, a aresta de f , que denotaremos por $A(f)$ pode ser expressa como*

$$A(f) = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2; |\nabla f(x, y)| \text{ é máximo na direção } \nabla f(x, y)\},$$

sendo $\nabla f(x, y)$ e $|\nabla f(x, y)|$ definidos, respectivamente, em (2.10) e (2.11).

Definição 3.9 (Ruído). *Ruído é qualquer distorção indesejada presente na imagem que não faz parte realmente da imagem original.*

Definição 3.10 (Resolução de uma imagem). *Resolução de uma imagem é a razão entre o número de pixels obtido e o tamanho da imagem real.*

Definição 3.11 (Representação de uma Imagem Digital). *Uma imagem digital pode ser representada por uma matriz, cujos índices de linhas e colunas identificam um ponto (x, y) dessa imagem.*

A representação de uma imagem digital pode ser vista na figura abaixo.

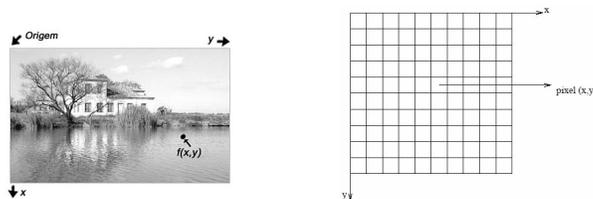


Figura 3.2: **Representação de uma imagem digital.**

Cada elemento (quadrado) que aparece na figura acima à direita representa um Pixel. No eixo x podemos denotar cada ponto $p(x, y)$ variando de $x = 0$ a $M - 1$ (Matriz). No eixo y podemos denotar cada ponto $p(x, y)$ variando de $y = 0$ a $N - 1$ (Matriz). Dizemos então que a imagem tem M pixels no eixo x e N pixels no eixo y . A cada ponto $p(x, y)$ da matriz temos associado um nível de cinza.

3.2 Representação de uma imagem no Espaço de Escala

Como foi dito na Seção 3.1.1, a obtenção de uma determinada informação ou detalhe de um objeto deve ser feita na escala apropriada, onde a informação é mais facilmente observável. Porém, a escolha da escala de observação mais adequada não é uma tarefa simples e, embora em alguns casos já seja conhecida uma escala apropriada, em diversos outros isso não ocorre e, se

desejamos informações de um objeto, pode ser necessária a representação desse objeto em diversas escalas. Diante disso, surgiram vários tipos de representação multiescala, amplamente utilizadas em diversas aplicações de análise e processamento de imagens sendo fundamentais em casos onde não se têm informações preliminares sobre a escala de observação apropriada, como por exemplo: Quad-Tree, Pirâmides, Wavelets e Espaços de Escala. A representação multiescala consiste em criar uma família de sinais, obtidos da imagem original, permitindo assim análise de diferentes níveis de representação para escolha daqueles que exibem as características de interesse. Para mais detalhes das técnicas de Quad-Tree e Pirâmides veja [8] e Wavelets veja [7].

Considere $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ a imagem original. A representação de f em espaços de escala é dada por um conjunto de imagens de mesmo tamanho, geradas pela convolução da f original com o núcleo gaussiano. Em outras palavras, o espaço de escala gaussiano é dado por (2.22). A Figura 3.1 mostra uma imagem representada no espaço de escala. Observe que à medida que a escala aumenta, as imagens ficam mais borradas, como se estivéssemos olhando o objeto a distâncias cada vez maiores, mas com o mesmo tamanho da imagem original. Isto se deve à propriedade da causalidade definida no capítulo anterior, que obriga que a imagem vá perdendo detalhes com o aumento da escala.

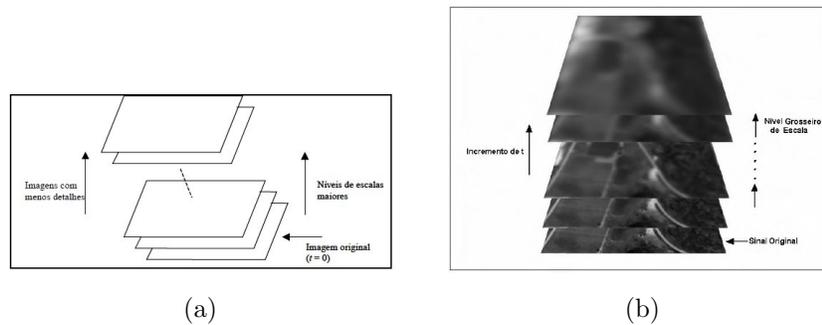


Figura 3.3: **Representação de uma imagem em espaço de escala.**

Fonte: Doering, D. [7] e Zanin, R. B. [8].

Ao analisarmos uma imagem é necessário extrair da mesma informações a serem observadas. Como no espaço de escala a representação de uma imagem é feita em diferentes níveis de suavização (escalas), essas informações estão contidas de forma implícita na escala. Assim, para torná-las explícitas é necessário o uso de operadores, que serão obtidos a partir das derivadas do

espaço de escala, que definiremos a seguir, o que servirá de base para definir alguns operadores visuais, dentre eles, bordas e bolhas. Usando a Proposição 2.3, definimos a derivada do espaço de escala da seguinte forma:

$$L_{x^\alpha y^\beta} = \partial_{x^\alpha y^\beta} \{F(\cdot, t)\} = \partial_{x^\alpha y^\beta} \{G(\cdot, t) * f(\cdot)\} = \partial_{x^\alpha y^\beta} \{G(\cdot, t)\} * f(\cdot) \quad (3.1)$$

sendo x^α e y^β as derivadas nas direções x e y respectivamente e α, β as ordens das derivadas. Com o espaço de escala e suas derivadas bem definidos, vamos apresentar nas Seções 3.2.2 e 3.2.3 os operadores borda e bolhas e entender como extraímos e observamos os mesmos no espaço de escala. No entanto, detalhes de uma imagem tais como bordas e bolhas não podem ser observadas sem antes aplicarmos uma filtragem na imagem para eliminarmos algumas distorções e realçarmos os detalhes que nos interessam. Na seção abaixo falaremos sobre essas distorções e mostraremos uma técnica de filtragem, que é definida com base na equação do calor, utilizada para removê-las.

3.2.1 Ruído

Como definido em 3.9, ruídos são alterações indevidas ou distorções que, em geral, são obtidos no momento da captura da imagem ou no processo de digitalização. Por exemplo, quando um satélite fotografa uma parte da superfície terrestre e envia os dados para um receptor na terra, há geração de ruídos causados não só por turbulências da atmosfera ou campos magnéticos como, também, pela transmissão de dados via rádio, comprometendo assim a qualidade da imagem e dificultando a extração de informações relevantes da mesma. Para que possamos observar e tratar alguns objetos da imagem, como arestas ou bolhas, é necessário a remoção desses ruídos. Em PDI, a fase de eliminação de ruídos é denominada suavização. Existem várias técnicas de remoção de ruídos, porém, efeitos indesejados como, por exemplo, deterioração de arestas, tornam alguns métodos não muito bons quando se deseja remover informações irrelevantes e ao mesmo tempo manter inalteradas as arestas. Diante disso, a procura por uma técnica que seja satisfatória se tornou alvo de estudo para pesquisadores. O objetivo é encontrar um método que filtre as informações de menor importância e mantenha inalterados outros detalhes como, por exemplo, as arestas, possibilitando assim detectar os contornos dos objetos.

Existem vários tipos de filtros (lineares e não lineares) utilizados em PDI para remoção de imperfeições e realce de objetos em imagens, dentre eles, o filtro Passa-Baixa, Passa-Alta, Passa-Banda, Gaussiano, Laplaciano, Média, Mediana, Sobel, Disk e Canny. Daremos mais detalhes do filtro Gaussiano, que é a ferramenta base desse trabalho e para mais informações sobre os outros tipos de filtros veja [10]. O filtro Gaussiano é um filtro linear tipo passa-baixa que tem a finalidade de suavizar a imagem, realçando detalhes e minimizando efeitos de ruído, em outras palavras, esse filtro opera num domínio de frequência permitindo a passagem de baixas frequências sem dificuldades e atenua (ou reduz) a amplitude das frequências maiores. A ideia de filtragem no domínio de frequência é simples e baseia-se no Teorema da Convolução, isto é, dada uma imagem original $f(x, y)$ definimos a função $g(x, y)$ em (3.2), como sendo a imagem formada pela convolução $f(x, y)$ com um operador $h(x, y)$:

$$g(x, y) = (f * h)(x, y). \quad (3.2)$$

Pelo Teorema 2.2 temos a seguinte expressão no domínio de frequência:

$$\mathcal{G}(u, v) = \mathcal{F}(u, v)\mathcal{H}(u, v),$$

sendo $\mathcal{H}(u, v)$ denominada função de transferência de filtro e \mathcal{G} , \mathcal{F} e \mathcal{H} as Transformadas de Fourier das funções g , f e h respectivamente. Assim, uma aplicação de suavização em uma imagem consiste em, após encontrar a $\mathcal{F}(u, v)$, escolher a $\mathcal{H}(u, v)$ de maneira que a imagem $g(x, y)$ seja dada por:

$$g(x, y) = \mathcal{F}^{-1}\{\mathcal{F}(u, v)\mathcal{H}(u, v)\}. \quad (3.3)$$

Em nosso contexto, essa função de transferência é a função Gaussiana definida por (2.12) e sua Transformada de Fourier é dada por (2.16). Esse filtro é denominado filtro Gaussiano que é o próprio espaço escala definido em 2.12, ou seja, é a função

$$L_{G_t} : f_0 \rightarrow f_0 * G_t.$$

Observe na Figura 3.4 a representação gráfica da remoção do ruído de uma dada imagem na qual foi utilizado o filtro Gaussiano. O parâmetro t é arbitrário, isto é, sem regras pré-estabelecidas. Na figura 3.5 foi aplicada essa técnica e observe que houve a remoção do ruído sem perda significativa da qualidade da imagem.

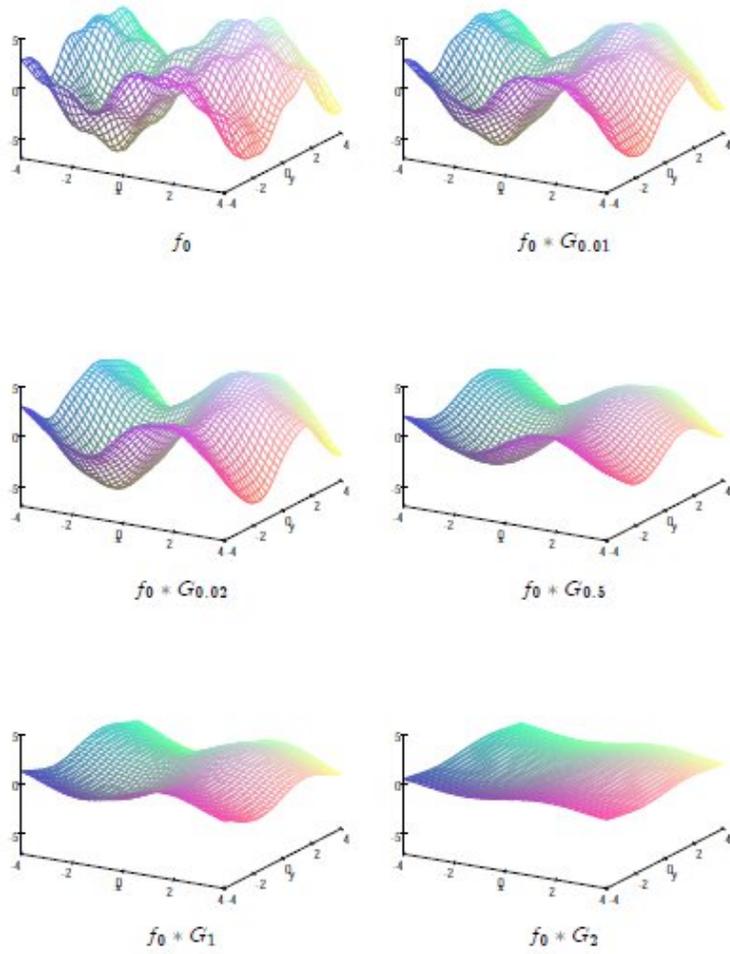


Figura 3.4: **Eliminação de ruído em uma imagem.**

Fonte: Teixeira, R. [4].



Figura 3.5: **Remoção de ruído através do filtro Gaussiano.**

Fonte: Pássaro, M. C. e Faria, M. D. [10].

3.2.2 Detecção de Bordas

Em Processamento de Imagens a detecção de bordas é uma assunto em aberto até hoje devido ao grau de dificuldade em detectá-las. No contexto de imagem digital, definimos a borda de uma imagem como sendo o limite entre duas regiões com propriedades distintas de nível de cinza, em outras palavras, bordas são os pixels onde a imagem, definida como uma função bidimensional, muda bruscamente o nível de cinza. Para encontrarmos esses pixels, que formam as bordas de um objeto em uma imagem, utilizamos o operador gradiente definido em (2.10). O módulo do operador gradiente definido em (2.11) é igual ao módulo da borda e a direção do gradiente é perpendicular a direção da borda (Veja representação na figura 3.7).

De acordo com a Definição 3.7, uma maneira de detectar as bordas de uma imagem f é considerar o conjunto de pontos que são máximos de $|\nabla f|$ na direção desse mesmo gradiente. Em outras palavras, escolhemos um “corte” da imagem numa direção perpendicular à suas curvas de nível. Dentre os pontos deste corte, escolhemos aqueles em que $|\nabla f|$ é máximo para ser o ponto de borda. Fazendo isso para todos os cortes possíveis, obtemos uma curva de pontos de bordas. Usando um sistema de coordenadas u e v (onde v é a direção do gradiente e u é a direção perpendicular ao gradiente) temos que $f_v = |\nabla f|$, e portanto as arestas de f são o conjunto de

pontos $(x, y) \in R^2$ onde f_v é máximo na direção de v , isto é:

$$f_{vv} = 0,$$

$$f_{vvv} < 0.$$

Como a imagem é representada no Espaço de Escala temos que um pixel será definido como pixel de borda se

$$L_{vv} = 0,$$

$$L_{vvv} < 0.$$

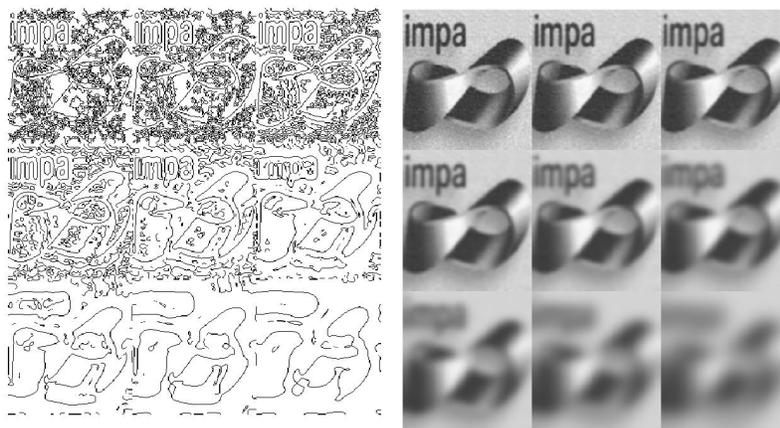


Figura 3.6: **Representação do espaço de escala do logotipo do IMPA.**

Fonte: Teixeira, R. [4].

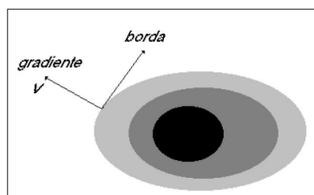


Figura 3.7: **Direções do gradiente e da borda em uma imagem.**

Fonte: Doering, D [7].

A figura 3.6 mostra a detecção de bordas usando este método aplicado ao espaço de escala do logotipo do Impa. Observe que à medida que a escala aumenta, menores são os detalhes perceptíveis na imagem.

Embora o Espaço de Escala Gaussiano quando aplicado a uma imagem para remoção de imperfeições apresente resultados satisfatórios, o mesmo não acontece na detecção das arestas. Quando se deseja fazer uma análise mais minuciosa da imagem, por exemplo detectar arestas em uma imagem com o objetivo de melhorar o contorno da mesma, essa técnica não é muito viável, uma vez que, quanto mais iterações são feitas, mais borrada fica a imagem. Na figura 3.8 apresentamos os resultados do Espaço de Escala Gaussiano quando aplicado à imagem da Lenna para valores crescentes de t . Observe que quanto mais se cresce em t , mais a imagem se deforma perdendo cada vez mais detalhes e, quando $t \rightarrow \infty$, perde-se todas as informações contidas na imagem $f(x)$ e com isso $f(x) = constante$ para todo $x \in I$.



Figura 3.8: Amostra do Espaço de Escala da Lenna

Fonte: Cunha, A. M. [5]

Diante dessa dificuldade em não conseguir preservar o contorno da imagem, pesquisadores começaram a estudar técnicas baseadas em EDP's não lineares (veja Seção 1.3) com objetivo de substituir tal método e obter melhores resultados.

3.2.3 Detecção de Bolhas

Uma outra estrutura que é importante em PDI e que pode ser detectada através do espaço de escala são as bolhas. Antes de definirmos e garantirmos a existência desses objetos em uma imagem daremos uma ideia intuitiva do que estes sejam. Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função que represente uma dada imagem. Se a figura 3.9a representa o gráfico de $f(x, y)$ então suas bolhas

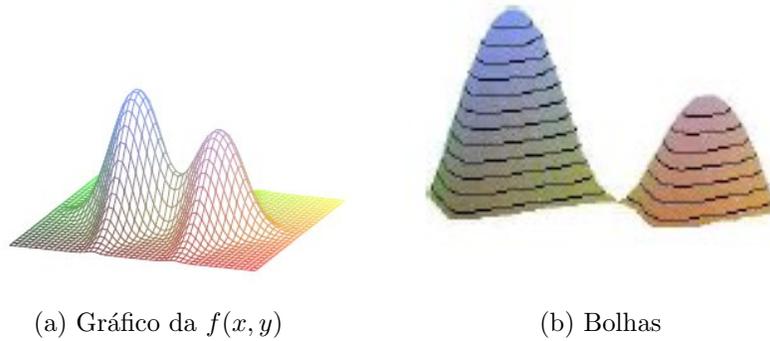


Figura 3.9: **Gráfico da função $f(x, y)$ e suas respectivas bolhas.**

Fonte: Teixeira, R [4].

estão representadas na Figura 3.9b. Assim, de acordo com a Figura 3.9, é possível crescer bolhas a partir de um ponto de máximo local da função f . Também é possível crescer bolhas a partir de mínimos locais. A ideia é análoga às bolhas originadas de um máximo local, mas não trataremos neste trabalho. Para mais informações sobre bolhas originadas de um ponto de mínimo local veja [4]. As bolhas criadas a partir de um máximo local possuem os seguintes elementos: nível, base, contraste, região de suporte, área da bolha, volume da bolha e esses elementos podem ser observados na Figura 3.10. Como as definições desses elementos são muito rigorosas e dependem de conceitos que não abordamos nesse trabalho não entraremos em detalhes. Para informações dessas definições veja [4].

Gostaríamos agora de entender como essas bolhas podem ser visualizadas na imagem. Entretanto, essas estruturas não são facilmente observáveis em uma imagem como são, por exemplo, as arestas. Assim, a relação entre bolhas e objetos não é garantida em qualquer imagem. Se os objetos de interesse tiverem níveis de cinza bem diferentes é possível detectar essas bolhas e

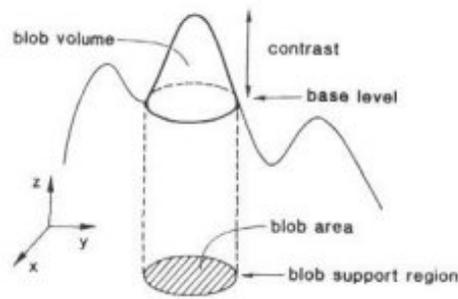


Figura 3.10: **Elementos de uma bolha.**

Fonte: <http://www.bmva.org/bmvc/1990/bmvc-90-019.pdf>.

consequentemente extrair os objetos de interesse. Por exemplo, na Figura 3.11b foram detectadas bolhas que representam os centros de girassóis da Figura 3.11a. Observe que os resultados obtidos são satisfatórios, no entanto, o principal problema é que além das bolhas que representam os centros de girassóis também foram detectadas pequenas bolhas que não representam o objeto de interesse. Uma maneira de tentar solucionar esse problema seria analisar a imagem em escalas mais finas (menores) o que possibilita uma melhor visualização dos detalhes. Esse é um problema da implementação numérica do algoritmo utilizado nesse exemplo para detecção das bolhas, porém, nosso objetivo aqui é simplesmente mostrar um exemplo em que é possível visualizar o elemento “bolha” na imagem, embora isso nem sempre seja possível.

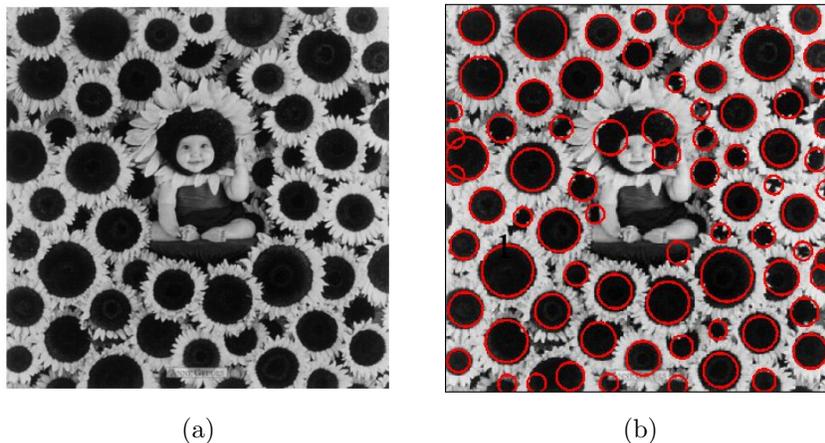


Figura 3.11: **Detecção de bolhas em uma imagem.**

Fonte: <http://www.cs.utah.edu/~jfishbau/advimproc/project1/>.

Após entendermos a estrutura das bolhas e como elas podem ser visualizadas em uma imagem, ainda restam algumas questões que podem ser levantadas: se crescemos uma bolha a partir de um máximo local, quais seriam os limites dessa bolha? Até onde ela cresce? Quais condições a função f tem que satisfazer para garantir a existência desses pontos críticos? Além disso, como estamos usando uma técnica para tratar imagens baseada em uma representação multiescala, é necessário definirmos essas bolhas no espaço de escala dado por (2.22), isto é, criaremos bolhas multiescalas e veremos como as mesmas se comportam ao mudar a escala.

A representação das bolhas em multiescalas pode ser vista na Figura 3.12. Observe na Figura 3.12a que ao ligarmos bolhas em escalas sucessivas obtemos a bolha multiescala em 3.12b que é um objeto tetradimensional.

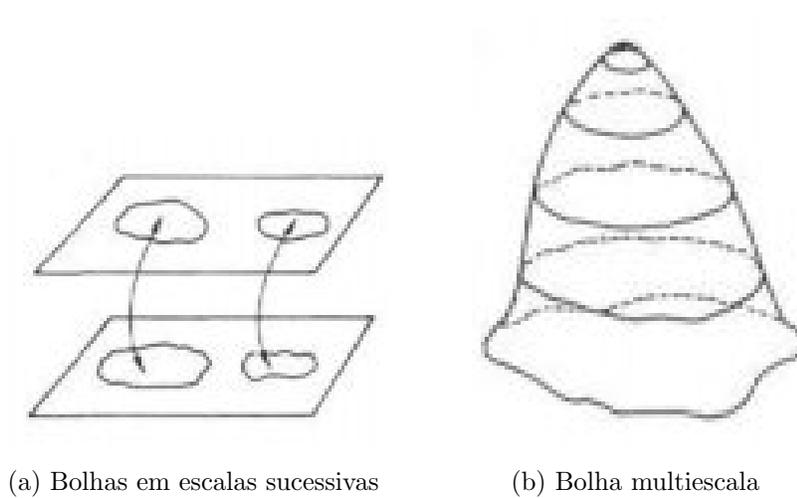


Figura 3.12: **Criação de bolhas em multiescalas.**

Fonte: <http://www.bmva.org/bmvc/1990/bmvc-90-019.pdf>.

Como estamos criando bolhas em multiescalas torna-se importante a garantia de que a bolha sobreviverá à mudança de escalas, pois podem ocorrer situações em que uma bolha muda bruscamente quando passa de uma escala para outra. A essa situação damos o nome de eventos de bolhas. Entretanto, é possível provar que eles acontecem apenas quando o $\det HF_t = 0$ no ponto, sendo HF_t a hessiana do espaço de escala. Os eventos de bolhas podem ser:

- Destruição de uma bolha: uma bolha pode diminuir de tamanho à medida que a escala

aumenta e chegar a desaparecer.

- Fusão de bolhas: duas bolhas com um ponto de sela em comum se unem para dar origem a uma bolha maior.
- Criação de bolhas: uma bolha pode aparecer “do nada”.
- Divisão de bolhas: um bolha pode desaparecer para dar lugar a duas bolhas menores.

O Teorema 3.4, que demonstraremos a seguir, irá justamente garantir a sobrevivência das bolhas na mudança de escalas. Para sua demonstração precisaremos do Teorema da Função Implícita, que demonstraremos utilizando a Teorema da Aplicação Inversa, cuja demonstração pode ser encontrada em [6] e cujo enunciado segue abaixo:

Teorema 3.1 (Teorema da Aplicação Inversa). *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k no aberto $U \subset \mathbb{R}^m$. Se, $a \in U$ é tal que $f'(a) : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ é invertível então existe uma bola aberta $B = B(a; \delta) \subset U$ tal que a restrição $f|_B$ é um difeomorfismo sobre um aberto $V \ni f(a)$.*

Teorema 3.2 (Teorema das Funções Implícitas). *Seja $f : U \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k no aberto $U \subset \mathbb{R}^{m+n}$. Suponhamos que, no ponto $p = (a, b) \in U$ com $f(p) = c$, a matriz $n \times n$*

$$\left[\frac{\partial f_i}{\partial y_j} \right] (p)$$

com $(i, j = 1, 2, \dots, n)$ seja invertível. Então existem abertos Z, V tais que $p \in Z \subset U$ e $a \in V \subset \mathbb{R}^m$, e uma função $\xi : V \rightarrow \mathbb{R}^n$ de classe C^k , com $\xi(a) = b$, e com a seguinte propriedade:

$$[(x, y) \in Z \text{ e } f(x, y) = c] \Leftrightarrow [x \in V \text{ e } y = \xi(x)].$$

Prova: Seja $\varphi : U \rightarrow \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ uma aplicação de classe C^k definida da forma $\varphi(x, y) = (x, f(x, y))$ com $x \in \mathbb{R}^m$, $y \in \mathbb{R}^n$ e $U \subset \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$. Por hipótese, o $\det Df(p) = Df(a, b) \neq 0$ isso implica que $\det D\varphi(a, b) = D\varphi(a, f(a, b)) = D\varphi(a, c) \neq 0$. Assim, a função φ satisfaz as condições do Teorema da Aplicação Inversa no ponto (a, c) . Logo, φ é um difeomorfismo de um aberto Z contendo p sobre um aberto $\mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n$ no qual podemos supor da forma $V \times W$ sendo $V \subset \mathbb{R}^m$ e $W \subset \mathbb{R}^n$, com $a \in V$ e $f(a, b) = c \in W$. Como $\varphi : Z \rightarrow V \times W$ é um difeomorfismo então existe uma função inversa $\varphi^{-1} : V \times W \rightarrow Z$ que podemos definir da forma $\varphi^{-1}(x, w) = (x, h_2(x, w))$.

Vamos definir uma nova função $\Psi : \mathbb{R}^m \times \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^n$ dada por $\Psi(x, y) = y$. Observe que $\Psi \circ \varphi = \Psi(\varphi(x, y)) = \Psi(x, f(x, y)) = f(x, y)$. Com isso,

$$\begin{aligned}
 f(x, h_2(x, y)) &= f(\varphi^{-1}(x, y)) \\
 &= (f \circ \varphi^{-1})(x, y) \\
 &= ((\Psi \circ \varphi) \circ \varphi^{-1})(x, y) \\
 &= (\Psi \circ (\varphi \circ \varphi^{-1}))(x, y) \\
 &= \Psi(x, y) \\
 &= y.
 \end{aligned}$$

Assim, $f(a, h_2(a, c)) = c$ e com isso é possível definir uma função $\xi(x) = h_2(x, c)$ de classe C^k com $\xi(a) = b$ que satisfaz $f(x, \xi(x)) = c$. \square

Definição 3.12 (Ponto Crítico). *Seja $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Dizemos que $w_0 \in \mathbb{R}^2$ é um ponto crítico de f sempre que $\nabla f = \vec{0}$. Além disso, dizemos que w_0 é não degenerado se a Hessiana de f*

$$Hf = \begin{pmatrix} f_{xx} & f_{yx} \\ f_{xy} & f_{yy} \end{pmatrix}$$

for não-singular em w_0 , isto é, se $\det Hf(w_0) \neq 0$.

Teorema 3.3. *Seja $w_0 \in \mathbb{R}^2$ um ponto crítico da função $f : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ de classe C^2 . Definimos*

$$D = D_H(w_0) = f_{xx}(w_0)f_{yy}(w_0) - [f_{xy}(w_0)]^2$$

como sendo o determinante da matriz Hessiana no ponto w_0 . Assim,

1. *Se $D > 0$ e $f_{xx}(w_0) > 0$, então w_0 é um ponto de mínimo local.*
2. *Se $D > 0$ e $f_{xx}(w_0) < 0$, então w_0 é um ponto de máximo local.*
3. *Se $D < 0$, então w_0 não é mínimo local nem máximo local. Nesse caso, o ponto w_0 é chamado de ponto de sela.*

Para detalhes da demonstração desse teorema veja [6].

Teorema 3.4. *Se (x_0, y_0) é um ponto crítico não degenerado de um espaço de escala $F_{t_0}(x, y)$ (na escala $t = t_0 > 0$), então há um caminho suave $(t, x(t), y(t))$ ($t_1 < t < t_2$) tal que $(x(t), y(t))$ é ponto crítico não degenerado de $F_t(x, y)$ na escala t , $x(t_0) = x_0$ e $y(t_0) = y_0$.*

Prova: Para provarmos esse teorema precisaremos do Teorema 3.2. Seja $f : \mathbb{R} \times \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma função definida da seguinte forma:

$$f(t, \bar{y}) = f(t, x, y) = \nabla F_t(x, y) = (\partial_x F_t(x, y), \partial_y F_t(x, y)),$$

sendo $F_t(x, y)$ definido em (2.22) e $\bar{y} = (x, y)$. Considere o ponto $p = (t_0, x_0, y_0)$. Como o ponto p é ponto crítico do espaço de escala F_t temos que $f(t_0, x_0, y_0) = \nabla F_{t_0}(x_0, y_0) = 0$. Queremos escrever a curva de nível $f(t, x, y) = f(t_0, x_0, y_0) = 0$, como $x = x(t)$ e $y = y(t)$. Para isso, vamos analisar a derivada da função f . Temos que

$$Df = \begin{pmatrix} \partial_{xt} F_t & \partial_{xx} F_t & \partial_{xy} F_t \\ \partial_{yt} F_t & \partial_{xy} F_t & \partial_{yy} F_t \end{pmatrix}.$$

Como (x_0, y_0) é ponto crítico não degenerado de F_t , o determinante da matriz formada pelas duas últimas colunas da matriz Df é diferente de zero no ponto p , isto é,

$$\begin{aligned} \det \left[\frac{\partial f_i}{\partial \bar{y}}(p) \right] &\equiv \det \begin{pmatrix} \frac{\partial f_1}{\partial x}(p) & \frac{\partial f_1}{\partial y}(p) \\ \frac{\partial f_2}{\partial x}(p) & \frac{\partial f_2}{\partial y}(p) \end{pmatrix} \\ &= \det \begin{pmatrix} \partial_{xx} F_{t_0}(x_0, y_0) & \partial_{xy} F_{t_0}(x_0, y_0) \\ \partial_{yx} F_{t_0}(x_0, y_0) & \partial_{yy} F_{t_0}(x_0, y_0) \end{pmatrix} \\ &\neq 0, \end{aligned}$$

sendo $f_1 = \partial_x F_t(x, y)$ e $f_2 = \partial_y F_t(x, y)$. Logo, a matriz $\left[\frac{\partial f_i}{\partial \bar{y}}(p) \right]$ é invertível e, pelo Teorema 3.2, existem abertos $Z \subset \mathbb{R}^3$, $(t_1, t_2) \equiv V \subset \mathbb{R}$ tais que $(t_0, x_0, y_0) \in Z$ e $t_0 \in V$ e uma função suave $\xi : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ com $\xi(t_0) = (x_0, y_0)$ tal que

$$[(t, x, y) \in Z \text{ e } f(t, x, y) = 0] \Leftrightarrow [t \in V \text{ e } \bar{y} = \xi(t) = (x(t), y(t))].$$

Finalmente, segue da suavidade da solução da equação do calor e da continuidade do determinante, que $\xi(t)$ é ponto crítico não degenerado para $t_1 < t < t_2$, o que finaliza a demonstração. \square

Assim, como bolhas são criadas por um ponto de máximo local, garantimos, a partir do Teorema 3.4, que bolhas continuam existindo em escalas sucessivas enquanto tal máximo local existir. É importante ressaltar que um ponto crítico não pode mudar de tipo sem antes degenerar. Por exemplo, um máximo local tem $\det HF_t > 0$ e $\partial_{xx}F_t < 0$, para que ele se torne um ponto de sela precisamos ter $\det HF_t < 0$ e com isso ele deve passar por um momento degenerado onde $\det HF_t = 0$. Para que ele se torne um ponto de mínimo devemos ter $\partial_{xx}F_t > 0$, mas para isso ele precisa passar por um momento onde $\partial_{xx}F_t = 0$, ou seja, $\det HF_t < 0$, o que implicaria em um ponto de sela. Logo, o Teorema 3.4 garante que bolhas em escalas sucessivas podem ser ligadas para formar bolhas multiescalas enquanto o ponto crítico que as geram for não-degenerado.

Capítulo 4

Conclusão

Neste trabalho apresentamos uma técnica usada em PDI denominada Espaço de Escala Gaussiano que é definido através da solução da equação do calor e que tem o objetivo de remover ruídos e obter informações para uma melhor visualização das características de interesse de uma imagem. Vimos que o Espaço de Escala Gaussiano possui importantes propriedades, em particular, ele é o único que possui as propriedades de linearidade, invariância por translações, semi-grupo e causalidade, e que a partir dele detectamos alguns objetos relevantes para o tratamento de uma imagem.

Apresentamos ainda como o Espaço de Escala Gaussiano é aplicado no Processamento Digital de Imagens e, para isso, definimos conceitos como escala, imagem, ruído e ainda alguns elementos da imagem como bordas e bolhas. Vimos por exemplo como importantes teoremas como o Teorema da Função Implícita podem ter aplicações em áreas bem diversas. Em particular, mostramos uma aplicação desse teorema para garantir a permanência de bolhas em múltiplas escalas.

Assim, consideramos que, mesmo que as técnicas utilizadas em PDI atualmente sejam mais amplas e em geral baseadas em EDP's não-lineares, o estudo do Espaço de Escala Gaussiano e sua aplicação em PDI nos permitiu um aprendizado bastante interessante sobre a teoria do processamento de imagens e como diversos elementos matemáticos que estudamos, como a equação do calor, teoremas de convolução, a função Gaussiana, etc, foram (e ainda são) de

fundamental importância para essa teoria. Finalmente gostaríamos de ressaltar que essa teoria pode ser estendida ao caso n -dimensional, sendo as ideias análogas às apresentadas nesse trabalho.

Referências Bibliográficas

- [1] Aftab, Cheung, Kim, Thakkar, Yedeanapudi, *Information Theory - Information Theory And The Digital Age*, Project History, Massachusetts Institute of Technology.
- [2] L. Alvarez, P.L. Lions e J.M. Morel., *Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion*, SIAM J. Numer. Anal., **29**, pp. 845-866, (1992).
- [3] Barcelos, C. A. Z., *Restauração e Análise de Imagens via Equações Diferenciais Parciais*, Tendências em Matemática Aplicada e Computacional, **3**, No. 2 (2002), 1-13.
- [4] Teixeira, R., *Introdução aos Espaços de Escalas (EDPs em Processamento de Imagens)*, Rio de Janeiro, primeira edição, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, (julho/2001).
- [5] Cunha, A. M., *Espaços de Escala e Detecção de Arestas*, Dissertação de mestrado, (2000).
- [6] Lima, L. E., *Curso de Análise 2*, Rio de Janeiro, décima primeira edição, Instituto de Matemática Pura e Aplicada, (2011).
- [7] Doering, D., *O Uso da Transformada de Waveler Bi-Dimensional no Conceito de Espaço de Escala*, Dissertação de mestrado, Departamento de Engenharia Elétrica, Universidade Federal do Rio Grande do Sul, (2005).
- [8] Zanin, R. B., *Metodologia Automática para Extração de Cruzamentos de Rodovias em Imagens de Alta Resolução*, Dissertação de mestrado, Faculdade de Ciências e Tecnologia, Universidade Estadual Paulista, (2004).
- [9] Catté, F. Lions, L. P., Morel, J. M., Coll, T., *Image selective smoothing and edge detection by nonlinear diffusion*, SIAM Journal on Numerical Analysis, pp.182-193, February 1992.

- [10] Pássaro, M. C. e Faria, M. D., *Filtragem de Imagens Fixas*, Faculdade de Engenharia, Universidade do Porto, (2006/2007).
- [11] B. Jane., *Digital Image Processing: Concepts, Algorithms, and Scientific Applications*, Springer Verlag, (1995).
- [12] Koenderink, J.J., *The structure of images-Biological Cybernetics*, Department of Medical and Physiological Physics, Physics Laboratory, State University Utrecht, The Netherlands, **50**, pp.363-370, (1984).
- [13] Assunção, R. G., Pires, V. B. e Barcelos, C. A. Z., *Tempo Ótimo de Suavização via Equação da Curvatura*, Universidade Federal de Goiás, (2005).