

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICEx

DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Rafael Luís de Castro

A Espiral de Euler e suas principais propriedades.

Belo Horizonte

2013

RAFAEL LUÍS DE CASTRO

A Espiral de Euler e suas principais propriedades.

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática para Professores com Ênfase em Cálculo, Instituto de Ciências Exatas - ICEX, Departamento de Matemática, da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Especialista em Matemática com Ênfase em Cálculo.

Área de Concentração: Cálculo

Orientador: Prof. Dr. Eduardo Alfonso Chincaro Egusquiza.

**Belo Horizonte
2013**

RAFAEL LUÍS DE CASTRO

A Espiral de Euler e suas principais propriedades.

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática para Professores com Ênfase em Cálculo, Instituto de Ciências Exatas - ICEX, Departamento de Matemática, da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial à obtenção do título de Especialista em Matemática com Ênfase em Cálculo.

Data de apresentação: __ / __ /2013

Resultado: _____

Banca Examinadora:

Eduardo Alfonso Chincaro Egusquiza

Prof. Dr.

Ezequiel Rodrigues Barbosa

Prof. Dr.

Jussara de Matos Moreira

Prof. Dr.

Dedico este trabalho aos meus pais Silvino e Cleide.

Agradecimentos

Desejo expressar meus agradecimentos ao orientador, Prof. Chincaro, por sua dedicação e paciência, à coordenação do curso e aos colegas que demonstraram grande solidariedade nos momentos de dificuldade. Aos membros da banca examinadora Ezequiel e Jussara pelas correções e propostas para melhorar a apresentação deste trabalho.

Resumo

Este trabalho versa sobre o Conceito Geométrico da Espiral de Euler - a Clotóide: uma Curva Clássica que suscitou o interesse de alguns dos mais conceituados matemáticos de todos os tempos, dentre eles Leonhard Euler. Para a elaboração do presente estudo, foi feita uma revisão literária da Curva, a partir do século XVII, e de conceitos básicos da Geometria Diferencial de Curvas. Após a definição do que é a Clotóide, foi feita uma consideração sobre a Curvatura, a Convergência da Curva e o Centro de Gravidade da Curva, que foram evidenciados por meio de vários exemplos, figuras ilustrativas e suas propriedades. Por fim, foi ressaltada a importância crucial dessa Curva nas áreas de atuação da Engenharia, Computação, Comunicações e o ensino da matemática.

Palavras-chave: Curvatura, Elástica, Espiral de Euler, Clotóide, Integrais de Fresnel, Teste de Dirichlet, Centros de Curvatura, Centros de Gravidade, Centro de Semelhança.

Abstract

This academic work is about the Geometric Concept of Euler Espiral - the Clotoide: a classic curve which raised the interest of some of the most respected mathematicians of all time, such as Leonhard Euler. For the present work a Euler Espiral study was made by a literature review since century XVII to present time, and a review about basic concepts of the Differential Geometry of Curves. After conceptualize Clotoide, some considerations about Curvature, curve convergence and center of gravity of the curve was done, which were evidenced with examples, figures and properties. Finally, the crucial value of this curve was enhanced, in business areas of Engineering, Computers, Communications and mathematic teaching.

Keywords: Curvature, Elastica, Euler Spiral, Clotoide, Fresnel integrals, Dirichlet Test, Center of Curvature, Centers of Gravity, Center of Similitude.

Sumário

1	Introdução	9
2	Conceitos Básicos	11
2.1	Curvas Parametrizadas	11
2.2	Reparametrizações e Comprimento de Arco	13
2.3	Curvatura	15
2.4	Teorema Fundamental das Curvas Planas	18
3	A Espiral de Euler	22
3.1	Estudo da Forma	22
3.2	Integrais de Fresnel	23
3.2.1	Teste de Dirichlet	24
4	Algumas Propriedades	31
4.1	Centro de Gravidade	31
4.2	Homotetia	31
4.2.1	Centro de semelhança de circunferências	32
4.3	Demonstrações das Propriedades	32
5	Apresentação Histórica e Conclusão	39
	Referências Bibliográficas	46

1 Introdução

O propósito desta monografia é apresentar a notável curva conhecida como Espiral de Euler e, posteriormente, denominada Clotóide. Observamos que, diferentemente das curvas apresentadas pelos gregos, a Espiral de Euler ou Clotóide foi definida e, posteriormente, desenvolvida usando as técnicas do Cálculo Diferencial e Integral. A história da Espiral de Euler começa, indiretamente, na Teoria de Elasticidade. O problema da Tira Elástica consiste em determinar a curva que se forma a partir de um material fino e reto com uma extremidade fixa e a outra submetida a uma carga.

Na construção da Espiral de Euler ou Clotóide, o problema considerado é o inverso do da Tira Elástica. Devemos achar qual a forma geométrica da curva feita de um material elástico na sua forma natural, de modo que, quando colocada uma carga em uma de suas extremidades ela se torne uma linha reta (Figura 1.1).

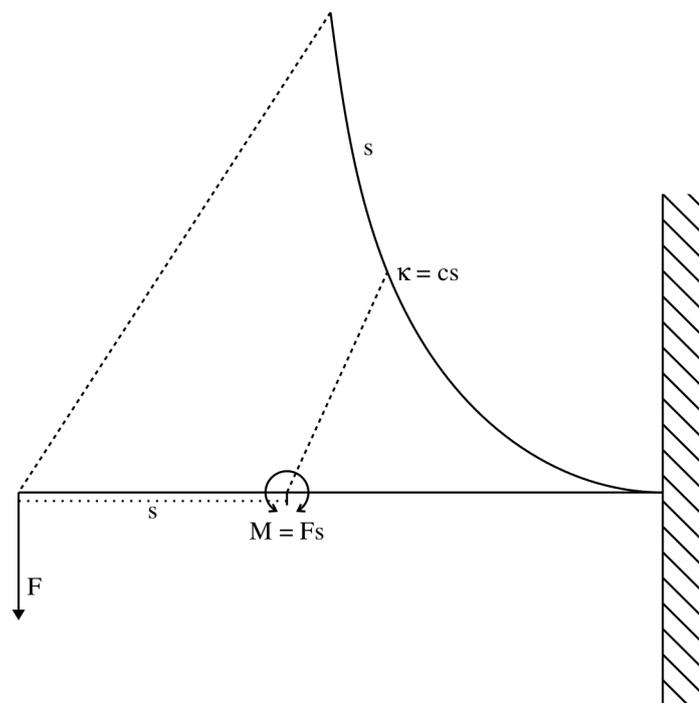


Figura 1.1: Espiral de Euler no problema de Elasticidade [10] R. Levien, p.96.

Quando a curva fica reta, o momento é igual à força aplicada vezes a distância s da força. De acordo com a Teoria Elementar da Elasticidade, o momento em cada ponto é proporcional

à curvatura. Como na teoria da Tira Elástica assume-se que os materiais não se esticam, a distância até a força aplicada é igual ao comprimento de arco. Assim, pelo equilíbrio de forças no sistema, a curvatura desta curva é proporcional ao comprimento de arco.

Veremos no capítulo 3, fazendo a quadratura da curva, para o caso em que a curvatura é $k(s) = s$, que as coordenadas cartesianas da Espiral de Euler são:

$$x(s) = \int_0^s \cos \frac{x^2}{2} dx, \quad y(s) = \int_0^s \operatorname{sen} \frac{x^2}{2} dx$$

No capítulo 2, apresentamos os conceitos básicos da Geometria Diferencial das Curvas, tais como comprimento de arco e curvatura.

No capítulo 3, mostraremos que a Espiral de Euler é convergente quando $s \rightarrow \infty$, o que é demonstrado através do Teorema de Dirichlet. Também, mostraremos um método para encontrar esse valor limite.

No capítulo 4, veremos algumas aplicações da Espiral de Euler ou Clotóide como: "A Clotóide é a única curva com a propriedade de que o centro de gravidade de qualquer arco é o centro de semelhança dos círculos osculadores das extremidades do arco."

No capítulo 5, desenvolvemos uma Apresentação Histórica da Clotóide e Conclusões.

Todas as ilustrações retiradas de outros trabalhos apresentam a devida referência em sua legenda. As demais figuras foram plotadas usando os programas Geogebra (gratuito) [23], Mathematica (trial) [22] e o Sage (gratuito) [21]. Aos interessados em aprender a usar o software Mathematica, recomenda-se o livro de Alfred Gray [9].

2 Conceitos Básicos

2.1 Curvas Parametrizadas

Sabemos que no Cálculo Diferencial são inúmeras as ferramentas que auxiliam a análise de curvas e a resolução de problemas envolvendo as mesmas. Dentre elas desenvolveremos, neste capítulo, propriedades relacionadas à curvatura, apenas o necessário para mostrar o Teorema Fundamental das Curvas Planas.

Existem vários tipos de curvas que não podem ser escritas na forma $y = f(x)$, como o círculo por exemplo. Se considerarmos duas funções diferenciáveis em t , $x(t)$ e $y(t)$, então o conjunto de pontos dados pela função $\alpha : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\alpha(t) = (x(t), y(t))$ vai descrever uma curva no plano. Dizemos que a função que leva $t \rightarrow \alpha(t)$ é uma equação paramétrica da curva e t é o parâmetro. Nesse caso a curva pode ser entendida como a trajetória de uma partícula em função do tempo.

Queremos formalizar o que é uma curva parametrizada e sua diferenciabilidade. Portanto, vamos nos embasar nas definições dos livros de John W. Rutter [14] e Tenenblat [18].

Definição 2.1.1. *Seja $J \subset \mathbb{R}$ um intervalo. Uma curva parametrizada plana é uma função contínua $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^2$.*

Definimos uma curva parametrizada aberta como $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ em que $\alpha(a) = c$ e $\alpha(b) = d$, $c \neq d$, sendo representado o ponto inicial por $\alpha(a)$ e o ponto final por $\alpha(b)$. Já uma curva parametrizada fechada é definida por $\alpha : [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ e $\alpha(a) = \alpha(b)$. A curva geométrica, ou seja o traçado da curva, é definida pela imagem do conjunto $\alpha(J) = \{\alpha(t); t \in J\}$ e o domínio da função α é o intervalo J .

Definição 2.1.2. *Uma curva $t \rightarrow \alpha(t)$ é diferenciável em $t = t_0$ se existe $\alpha'(t_0) = (x'(t_0), y'(t_0))$.*

Dizemos que a derivada de $\alpha(t)$ no ponto $t = t_0$ é o vetor $\alpha'(t_0)$ denominado vetor velocidade. A velocidade escalar é expressa pelo comprimento $|\alpha'(t)|$ e dizemos que uma curva é de velocidade unitária se $|\alpha'(t)| = 1$ para todo $t \in J$. Uma curva é suave em $t = t_0$ se possui derivadas de todas as ordens em $t = t_0$. Denotaremos as derivadas maiores como $\alpha''(t) = (x''(t), y''(t))$, $\alpha'''(t) = (x'''(t), y'''(t))$ e assim por diante. Generalizamos a n -ésima derivada como:

$$\alpha^{(n)}(t) = \frac{d^n \alpha}{dt^n} = \left(\frac{d^n x}{dt^n}, \frac{d^n y}{dt^n} \right)$$

Definição 2.1.3. Uma curva $t \rightarrow \alpha(t)$ é de classe C^n ; ($n \geq 1$) em $t = t_0$ se a n -ésima derivada $\alpha^{(n)}$ existe e é contínua próxima de t_0 . Neste caso, existe $\alpha^{(s)}(t)$ contínua próxima de t_0 para cada s em $0 \leq s \leq n$. Uma curva é de classe C^∞ em $t = t_0$ se ela é suave em $t = t_0$. Uma curva é de classe C^∞ se em todos pontos de seu domínio a curva for suave.

Considerando que a seguir precisaremos que as curvas tenham vetores tangentes em todos os seus pontos, espera-se que essas curvas não tenham cúspides, tendo um traço mais regular. Assim, definiremos:

Definição 2.1.4. Uma curva parametrizada α é regular em t se $\alpha'(t) \neq 0$ e denominamos não regular em t quando $\alpha'(t) = 0$. Uma curva regular é uma curva parametrizada regular em todos os pontos de seu domínio.

Exemplo 2.1.1. Seja a espiral de Arquimedes da forma $\alpha(t) = (at \cos(t), at \sin(t))$; $a > 0$ definida em $J = [0, \infty)$. Escolhemos $a = 1$ e $J = [0, 6\pi]$, cujo traço foi plotado na Figura 2.1. Observamos que a curva é regular:

$$\alpha(t) = (t \cos(t), t \sin(t)) \rightarrow \alpha'(t) = (\cos(t) - t \sin(t), \sin(t) + t \cos(t)).$$

Suponha que $\alpha'(t) = (0, 0)$, então

$$\cos^2(t) = t \sin(t) \cos(t) \tag{2.1}$$

$$\sin^2(t) = -t \cos(t) \sin(t) \tag{2.2}$$

é fácil observar que ao somarmos 2.1 e 2.2 encontraremos $1 = 0$, absurdo. Concluimos que a Espiral de Arquimedes é uma Curva Regular.

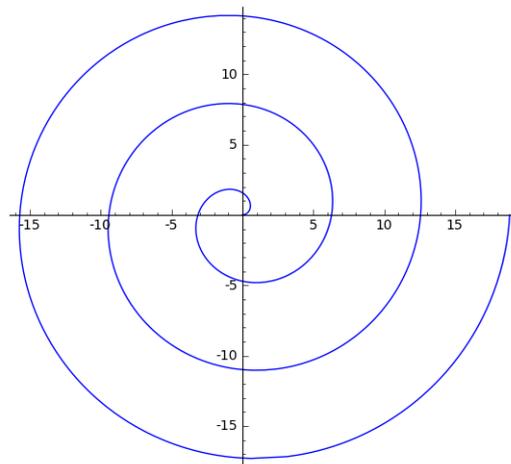


Figura 2.1: Espiral de Arquimedes.

2.2 Reparametrizações e Comprimento de Arco

Dizemos que uma função é suave se ela for diferenciável de classe C^∞ e uma função é regular se a derivada de primeira ordem não for nula para qualquer valor de seu domínio.

Definição 2.2.1. *Sejam $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e $g : I \rightarrow J$ uma função suave regular tal que $g(I) = J$. Então, a função composta:*

$$\beta = \alpha \circ g : I \rightarrow \mathbb{R}^2$$

é uma curva geométrica regular igual a α , chamada reparametrização de α por g . A função g é dita mudança de parâmetro.

Observamos pela hipótese que g é uma função estritamente crescente ou decrescente, pois como a função é regular, sua derivada primeira nunca se anula e, por sua vez, não muda de sinal. Seu conjunto imagem é igual ao contra domínio, sendo assim, uma mudança de parâmetro deve ser bijetiva. Além disso, se β é uma reparametrização de α por g , então α é uma reparametrização de β por g^{-1} .

Sendo a orientação de uma curva regular plana α o sentido do percurso da curva geométrica de α , definimos que: Quando a mudança de parâmetro g é estritamente crescente, então α e β têm a mesma orientação. Se g é estritamente decrescente, então α e β têm orientações opostas.

Segundo Rutter [14], um dos grandes problemas na história das curvas foi o de calcular o comprimento de arco. A solução se dá ao considerarmos que podemos aproximar uma curva por um arco poligonal formado por segmentos de reta cujos pontos extremos estão na curva. Sejam $\alpha(a)$ e $\alpha(b)$ os pontos inicial e final, respectivamente, escolhemos o conjunto de pontos da curva $A_0 = \alpha(t_0), A_1 = \alpha(t_1), A_2 = \alpha(t_2), \dots, A_k = \alpha(t_k)$, sendo $a = t_0 < t_1 < t_2 < \dots < t_k = b$ como pontos de uma poligonal e assim, o comprimento de arco da curva é o limite dos comprimentos destas poligonais quando $t_{i+1} - t_i \rightarrow 0$. Este limite existe (ver J. Stewart [16], p.601) e seu valor é dado pela definição seguinte.

Definição 2.2.2. *Seja α uma curva parametrizada diferenciável, então a Função Comprimento de Arco de α será:*

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(\tau)| d\tau = \int_{t_0}^t \sqrt{[x'(\tau)]^2 + [y'(\tau)]^2} d\tau.$$

Muitas vezes é conveniente reparametrizarmos uma curva pelo comprimento de arco, pois ela se torna uma curva de velocidade unitária, facilitando o desenvolvimento de cálculos. A maioria das propriedades deste capítulo relacionadas à curvatura dependem de que a curva tenha todos os vetores tangentes unitários. Para saber se uma curva está parametrizada pelo comprimento de arco, segue a definição.

Definição 2.2.3. Uma curva $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ está parametrizada pelo comprimento de arco se:

$$s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(\tau)| d\tau = t - t_0; \quad t_0 < t.$$

Proposição 2.2.1. Uma curva regular α está parametrizada pelo comprimento de arco se e somente se for uma curva de velocidade unitária, ou seja $|\alpha'(t)| = 1$.

Demonstração. Suponhamos α parametrizada pelo comprimento de arco e fixamos $t_0 \in J$. Consideramos a função $s : J \rightarrow \mathbb{R}$ que para cada $t \in J$ associa $s(t) = \int_{t_0}^t |\alpha'(\tau)| d\tau$. Se $t_0 \leq t$, então por hipótese $\int_{t_0}^t |\alpha'(\tau)| d\tau = t - t_0$; se $t \leq t_0$, então $-s(t) = \int_t^{t_0} |\alpha'(\tau)| d\tau = t_0 - t$. Portanto, para todo $t \in J$, $s(t) = t - t_0$, donde $s'(t) = 1$. Como $s'(t) = |\alpha'(t)|$, concluímos que $|\alpha'(t)| = 1$, para todo $t \in J$. A recíproca é imediata. \square

Proposição 2.2.2. Seja $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular e $s : J \rightarrow s(J) \subset \mathbb{R}$ a função comprimento de arco de α a partir de t_0 , então, existe a função inversa g de s , definida no intervalo aberto $I = s(J)$ e $\beta = \alpha \circ g$ é uma reparametrização de α , onde β está parametrizada pelo comprimento de arco.

Demonstração. α é uma curva regular, portanto

$$s'(t) = |\alpha'(t)| > 0,$$

isto é, s é uma função estritamente crescente. Logo, existe a função inversa de s , $g : I \rightarrow J$, sendo $I = s(J)$. Como para todo $t \in J$, $g(s(t)) = t$, temos que $\frac{dg}{ds} \frac{ds}{dt} = 1$, portanto

$$\frac{dg}{ds} = \frac{1}{s'(t)} = \frac{1}{|\alpha'(t)|} > 0.$$

Concluímos assim que $\beta(s) = \alpha \circ g(s)$, $s \in I$, é uma reparametrização de α e

$$\left| \frac{d\beta}{ds} \right| = \left| \frac{d\alpha}{dt} \frac{dg}{ds} \right| = \left| \frac{\alpha'(t)}{|\alpha'(t)|} \right| = 1.$$

Portanto, pela proposição 2.2.1, β está parametrizada pelo comprimento de arco. \square

Exemplo 2.2.1. Seja a curva $\alpha(t) = (e^t \cos(t), e^t \sin(t))$, $t \in \mathbb{R}$, chamada espiral logarítmica. Verificamos que:

$$\begin{aligned} \alpha'(t) &= (e^t \cos(t) - \sin(t)e^t, e^t \sin(t) + \cos(t)e^t) \\ &= (e^t [\cos(t) - \sin(t)], e^t [\sin(t) + \cos(t)]) \end{aligned}$$

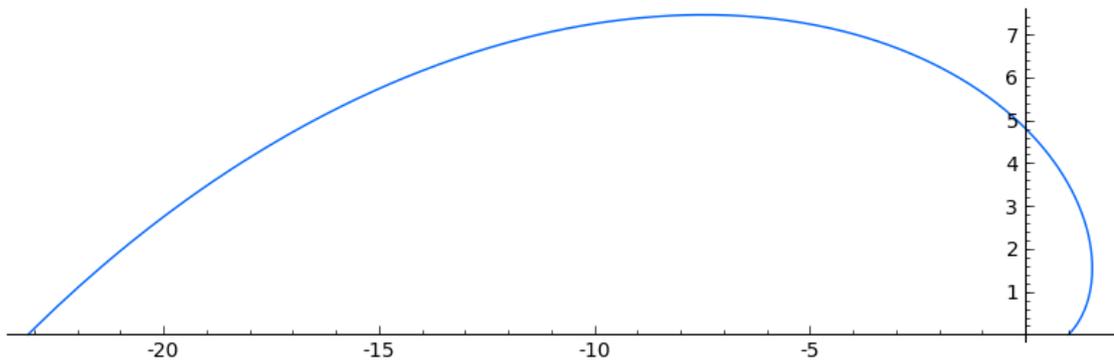


Figura 2.2: Espiral Logarítmica α no intervalo de 0 a π .

logo,

$$\begin{aligned}
 |\alpha'(t)| &= \sqrt{(e^t [\cos(t) - \text{sen}(t)])^2 + (e^t [\text{sen}(t) + \cos(t)])^2} \\
 &= \sqrt{e^{2t} [\cos^2(t) + \text{sen}^2(t) - 2 \cos(t) \text{sen}(t)] + e^{2t} [\text{sen}^2(t) + \cos^2(t) + 2 \cos(t) \text{sen}(t)]} \\
 &= \sqrt{e^{2t} - 2e^{2t} \cos(t) \text{sen}(t) + e^{2t} + 2e^{2t} \cos(t) \text{sen}(t)} \\
 &= \sqrt{e^{2t} + e^{2t}} \\
 &= \sqrt{2e^{2t}}.
 \end{aligned}$$

A função comprimento de arco de α , a partir de $t_0 = 0$, é

$$s(t) = \sqrt{2}e^t - \sqrt{2}.$$

A função inversa é dada por

$$g(s) = \ln \left[\frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \right].$$

Portanto,

$$\beta(s) = \left(\left[\frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \right] \cos(\ln \left[\frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \right]), \left[\frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \right] \text{sen}(\ln \left[\frac{s}{\sqrt{2}} + 1 \right]) \right)$$

é uma reparametrização de α pelo comprimento de arco.

2.3 Curvatura

Introduziremos nesta seção a noção sobre a curvatura, que é uma função que mede o quanto uma curva se "curva". De fato, quanto menor a curvatura, mais a curva se aproxima de uma reta e quanto maior a curvatura, temos uma maior taxa de variação da curva no ponto. Quando uma

curvatura é constante, temos círculos e quando a curvatura é nula, temos retas. É importante notificar que estamos trabalhando com curvas suaves regulares.

Dado uma curva $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^2$; $\alpha(s) = (x(s), y(s))$; $s \in J$ parametrizada pelo comprimento de arco, então $T(s) = (x'(s), y'(s))$ é um vetor unitário tangente a α no ponto $\alpha(s)$. Podemos achar o vetor $N(s)$ ortogonal a $T(s)$, fazendo $\langle T(s), N(s) \rangle = 0$, em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ denota o produto interno. Dessa forma, vemos que $N(s) = (-y'(s), x'(s))$ é um vetor unitário ortogonal a $T(s)$, dito vetor normal da curva α no ponto $\alpha(s)$. $\{T(s), N(s)\}$ forma uma base de vetores, chamada Referencial de Frenet:

$$T(s) = (x'(s), y'(s)), \quad N(s) = (-y'(s), x'(s)).$$

Proposição 2.3.1. *Seja α uma curva parametrizada pelo comprimento de arco. Então, $\alpha'(s)$ é ortogonal a $\alpha''(s)$.*

Demonstração. Sabe-se que $|\alpha'(s)| = 1$, então:

$$\langle \alpha'(s), \alpha'(s) \rangle = 1^2$$

e, derivando essa igualdade:

$$\langle \alpha''(s), \alpha'(s) \rangle + \langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle = 0 \iff 2 \langle \alpha'(s), \alpha''(s) \rangle = 0$$

Logo, $\alpha' \perp \alpha''$. □

Da proposição 2.3.1, segue que $T(s) \perp T'(s)$ e por isso $T'(s)$ é paralelo a $N(s)$. Logo, existe uma função $k(s)$ tal que $T'(s) = k(s)N(s)$. A função $k(s)$ é denominada curvatura de α .

Como $T'(s) = k(s)N(s)$, temos,

$$\langle T'(s), N(s) \rangle = \langle k(s)N(s), N(s) \rangle = k(s)|N(s)|^2.$$

Por $N(s)$ ser unitário, então $\langle T'(s), N(s) \rangle = k(s)$ e concluímos que

$$k(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle = -x''(s)y'(s) + y''(s)x'(s).$$

Observamos que $N'(s)$ também é paralelo a $T(s)$, logo existe $k_1(s)$ tal que $N'(s) = k_1(s)T(s)$ e

$$\langle N'(s), T(s) \rangle = \langle k_1(s)T(s), T(s) \rangle = k_1(s)|T(s)|^2.$$

Por $T(s)$ ser unitário, então $\langle N'(s), T(s) \rangle = k_1(s)$, concluímos que

$$k_1(s) = \langle N'(s), T(s) \rangle = -y''(s)x'(s) + x''(s)y'(s) = -k(s),$$

obtendo assim as seguintes relações, conhecidas como Fórmulas de Frenet de uma curva plana:

$$T'(s) = k(s)N(s) \quad (2.3)$$

e

$$N'(s) = -k(s)T(s). \quad (2.4)$$

Note que $|k(s)| = |T'(s)|$.

Seja $\alpha(s)$ uma curva regular de curvatura $k(s) \neq 0$, então o valor $p(s) = \frac{1}{k(s)}$ é denominado raio de curvatura de α em s . O círculo de raio $p(s)$ e centro

$$c(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)}N(s)$$

é denominado círculo osculador e $c(s)$ é o centro de curvatura. À medida que o parâmetro s varia, o centro de curvatura descreve uma curva geométrica denominada evoluta de α , cujas retas tangentes são sempre ortogonais à curva α . Observamos que, à medida que o círculo osculador aumenta, mais a curva se "transforma" em uma reta.

Toda curva regular admite uma reparametrização pelo comprimento de arco. Dessa forma pode-se calcular sua função curvatura através do referencial de Frenet. No entanto, existe outra forma de estudar a curvatura sem ter de reparametrizar a curva.

Proposição 2.3.2. *Seja $\alpha(t) = (x(t), y(t))$, $t \in I$, uma curva regular. Então*

$$T(t) = \frac{(x', y')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}, \quad N(t) = \frac{(-y', x')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}, \quad k(t) = \frac{-x''y' + x'y''}{[(x')^2 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

Demonstração. Seja $\beta(s)$ uma reparametrização de α por comprimento de arco. Derivando $\beta(s(t)) = \alpha(t)$ temos, pela Regra da Cadeia

$$\frac{d\beta}{ds} \frac{ds}{dt} = \alpha'(t),$$

do qual concluímos que

$$\frac{d\beta}{ds} = T(t) = \frac{(x', y')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}},$$

já que $\frac{ds}{dt} = |\alpha'(t)|$.

Pela definição de vetor normal, temos

$$N(t) = \frac{(-y', x')}{\sqrt{(x')^2 + (y')^2}}.$$

Observamos agora que pela regra da cadeia e do produto obtemos:

$$\begin{aligned}\beta(s(t)) = \alpha(t) &\rightarrow \beta'(s(t))s'(t) = \alpha'(t) \\ &\rightarrow \beta''(s(t))s'(t)s'(t) + s''(t)\beta'(s(t)) = \alpha''(t) \\ &\rightarrow \frac{d^2\beta}{ds^2} [s'(t)]^2 + \frac{d\beta}{ds} s''(t) = \alpha''(t) \\ &\rightarrow \frac{d^2\beta}{ds^2} = \frac{\alpha''(t)}{[s'(t)]^2} - \frac{1}{[s'(t)]^2} \frac{d\beta}{ds} s''(t).\end{aligned}$$

Finalmente, como $\langle T'(s), N(s) \rangle = k(s)$, em termos da função β teremos:

$$k(t) = \left\langle \frac{d^2\beta}{ds^2}(s(t)), N(t) \right\rangle = \left\langle \frac{\alpha''(t)}{[s'(t)]^2}, N(t) \right\rangle - \left\langle \frac{1}{[s'(t)]^2} \frac{d\beta}{ds} s''(t), N(t) \right\rangle.$$

Mas os vetores $\frac{d\beta}{ds}$ e $N(t)$ são ortogonais logo

$$k(t) = \left\langle \frac{d^2\beta}{ds^2}(s(t)), N(t) \right\rangle = \frac{-x''y' + x'y''}{[(x')^2 + (y')^2]^{\frac{3}{2}}}.$$

□

2.4 Teorema Fundamental das Curvas Planas

Vamos mostrar agora uma interpretação geométrica da curvatura.

Proposição 2.4.1. *Seja a aplicação $\alpha : J \rightarrow \mathbb{R}^2$ uma curva regular parametrizada pelo comprimento de arco. Dados dois vetores $e_1 = (1, 0)$ e $e_2 = (0, 1)$ e as fórmulas de Frenet, seja $\theta(s)$ o ângulo formado por $T(s)$ e e_1 . Então, $\theta'(s) = k(s)$.*

Demonstração. Como $\{e_1, e_2\}$ é a base canônica, pode-se escrever $T(s)$ como combinação linear de e_1 e e_2 , então

$$T(s) = \cos\theta(s)e_1 + \sin\theta(s)e_2,$$

$$T'(s) = -\sin\theta(s)\theta'(s)e_1 + \cos\theta(s)\theta'(s)e_2 = \theta'(s)(-\sin\theta(s), \cos\theta(s)). \quad (2.5)$$

Logo, de (2.5), temos que $\langle T'(s), e_1 \rangle = -\theta'(s)\sin\theta(s)$ e de (2.3) temos

$$\langle T'(s), e_1 \rangle = k(s)\langle N(s), e_1 \rangle. \quad (2.6)$$

É fácil observar que o ângulo entre e_1 e $N(s)$ é $(\frac{\pi}{2} + \theta(s))$ e das fórmulas de produto escalar temos que $\langle N(s), e_1 \rangle = |N(s)||e_1|\cos(\frac{\pi}{2} + \theta(s)) = \cos(\frac{\pi}{2} + \theta(s))$, logo de (2.6)

$$\langle T'(s), e_1 \rangle = k(s)\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta(s)\right) = -\theta'(s)\sin\theta(s)$$

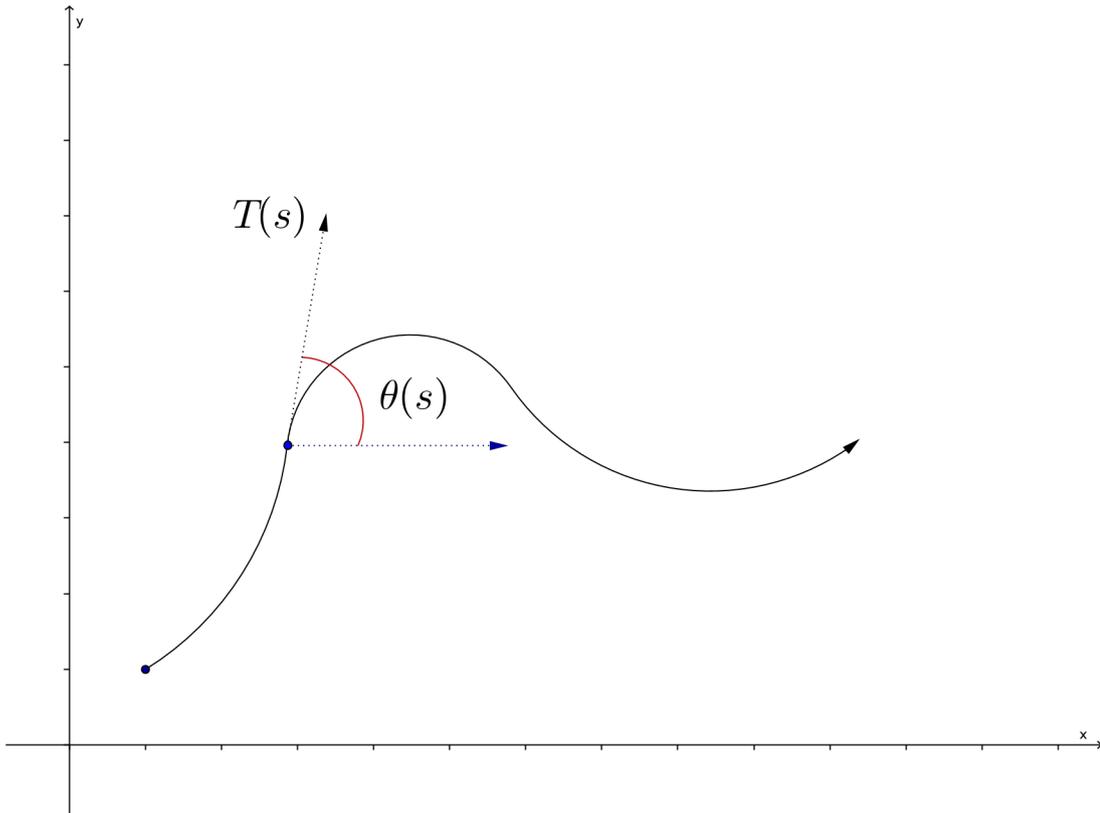


Figura 2.3: Interpretação Geométrica da Curvatura.

e sabendo que $\cos(a + b) = \cos a \cos b - \text{sen } a \text{sen } b$ então, $\cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta(s)\right) = -\text{sen } \theta(s)$ e com isso:

$$-k(s) \text{sen } \theta(s) = -\theta'(s) \text{sen } \theta(s).$$

Concluimos portanto que:

$$k(s) = \theta'(s).$$

□

Ou seja, a função curvatura mede a taxa de variação de $\theta(s)$. Essa proposição nos permite conceitualizar o Teorema Fundamental das Curvas Planas, que mostra que a curvatura determina uma curva parametrizada pelo comprimento de arco e essa curva é única a menos de um movimento rígido.

Definição 2.4.1. Um movimento rígido é uma aplicação $\mathbf{M}: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$ tal que $\mathbf{M} = \mathbf{T}_b \circ \mathbf{R}_\phi$ em que \mathbf{R}_ϕ é uma rotação de ângulo ϕ , em torno da origem, no sentido anti-horário, e \mathbf{T}_b é a translação definida pelo vetor b :

$$\mathbf{R}_\phi(x, y) = (x \cos \phi - y \text{sen } \phi, x \text{sen } \phi + y \cos \phi),$$

$$\mathbf{T}_b(v) = v + b.$$

Teorema 2.4.1. Teorema Fundamental das Curvas Planas

A. Dada uma aplicação diferenciável $k : I \rightarrow \mathbb{R}$, então existe uma curva parametrizada pelo comprimento de arco $\alpha : I \rightarrow \mathbb{R}^2$ cuja curvatura coincide com k .

B. A curva $\alpha(s)$ é única quando fixados $\alpha(s_0) = p_0$ e $\alpha'(s_0) = v_0$ de modo que v_0 é um vetor unitário de \mathbb{R}^2 .

C. Caso duas curvas $\alpha(s)$ e $\bar{\alpha}(s)$ tenham a mesma curvatura $k : I \rightarrow \mathbb{R}$, então elas diferem apenas pelas suas posições no plano, existindo um movimento rígido \mathbf{M} com uma rotação \mathbf{R} uma translação \mathbf{T} de modo que $\bar{\alpha}(s) = \mathbf{M}(\alpha(s))$.

Demonstração. **A.** Pela proposição 2.4.1 tomando s_0 fixo então

$$\theta(s) = \int_{s_0}^s k(\rho) d\rho$$

onde $\theta(s)$ é o ângulo entre o vetor $T(s)$ e e_1 . Seja $p_0 = (x_0, y_0)$ de \mathbb{R}^2 e $a \in \mathbb{R}$ definimos a curva $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ por

$$x(s) = x_0 + \int_{s_0}^s \cos(\theta(\rho) + a) d\rho,$$

$$y(s) = y_0 + \int_{s_0}^s \text{sen}(\theta(\rho) + a) d\rho.$$

Observamos que $\alpha'(s) = (\cos(\theta(s) + a), \text{sen}(\theta(s) + a))$ e $|\alpha'(s)| = 1$ ou seja, $\alpha(s)$ esta parametrizada pelo comprimento de arco. Além disso como $\theta(t)$ é o ângulo formado por $\alpha'(t)$ e o eixo x então sua curvatura é $k(s) = \theta'(s) = \langle T'(s), N(s) \rangle$.

B. Sendo $\alpha(s) = (x(s), y(s))$ então pela definição de curvatura $T'(s) = k(s)N(s)$ logo

$$(x'', y'') = k(-y', x')$$

ou seja pode-se montar um sistema

$$x'' = -ky'$$

$$y'' = kx',$$

logo segue do teorema de unicidade de solução de equações diferenciais que só existe uma curva com $\alpha(s_0) = p_0$ e $\alpha'(s_0) = v_0$ que satisfaz o sistema acima.

C. Seja α e $\bar{\alpha}$ duas curvas que têm a mesma curvatura. Vamos mostrar que existe um movimento rígido \mathbf{M} tal que $\bar{\alpha}(s) = \mathbf{M}(\alpha(s))$. Temos que

$$\alpha(s) = \left(x_0 + \int_{s_0}^s \cos(\theta(\rho) + a) d\rho, y_0 + \int_{s_0}^s \text{sen}(\theta(\rho) + a) d\rho \right),$$

$$\bar{\alpha}(s) = (\bar{x}_0 + \int_{s_0}^s \cos(\theta(\rho) + \bar{a})d\rho, \bar{y}_0 + \int_{s_0}^s \text{sen}(\theta(\rho) + \bar{a})d\rho).$$

Desta maneira $\bar{\alpha}$ tem a mesma curvatura de α e o item B nos garante que sua parametrização seja dessa forma. Dado o vetor de translação b tal que $\mathbf{T}_b(v) = v + (\bar{x}_0 - x_0, \bar{y}_0 - y_0)$ e como $a, \bar{a} \in \mathbb{R}$ existe ϕ real tal que $\bar{a} = a + \phi$ logo:

$$\begin{aligned} \bar{\alpha}(s) &= \mathbf{T}_b(x_0 + \int_{s_0}^s \cos(\theta(\rho) + a + \phi)d\rho, y_0 + \int_{s_0}^s \text{sen}(\theta(\rho) + a + \phi)d\rho) \\ &= \mathbf{T}_b(x_0 + \int_{s_0}^s [\cos(\theta(\rho) + a) \cos(\phi) - \text{sen}(\theta(\rho) + a) \text{sen}(\phi)] d\rho, \\ &\quad y_0 + \int_{s_0}^s [\text{sen}(\theta(\rho) + a) \cos(\phi) + \cos(\theta(\rho) + a) \text{sen}(\phi)] d\rho) \\ &= \mathbf{T}_b(x_0 + \cos(\phi) \int_{s_0}^s \cos(\theta(\rho) + a)d\rho - \text{sen}(\phi) \int_{s_0}^s \text{sen}(\theta(\rho) + a)d\rho, \\ &\quad y_0 + \cos(\phi) \int_{s_0}^s \text{sen}(\theta(\rho) + a)d\rho + \text{sen}(\phi) \int_{s_0}^s \cos(\theta(\rho) + a)d\rho) \\ &= \mathbf{T}_b \mathbf{R}_\phi(x_0 + \int_{s_0}^s \cos(\theta(\rho) + a)d\rho, y_0 + \int_{s_0}^s \text{sen}(\theta(\rho) + a)d\rho) \\ &= \mathbf{T}_b \mathbf{R}_\phi(\alpha(s)). \end{aligned}$$

□

3 A Espiral de Euler

3.1 Estudo da Forma

A espiral de Euler, ao longo do tempo, foi associada a diversos problemas diferentes e, conseqüentemente, foi construída de maneiras diferentes, primeiro como um problema de elasticidade, depois para associar valores de difração da luz e, por último, como uma curva de transição. Ao nos perguntarmos qual curva é gerada pela curvatura da função identidade $k(s) = s$, o Teorema Fundamental das Curvas Planas nos permite responder que é a Espiral de Euler.

Exemplo 3.1.1. *Vamos achar a parametrização das curvas que têm curvatura $k(s) = s$. Pelo Teorema 2.4.1*

$$\theta(t) = \int_0^t x \, dx = \frac{t^2}{2}$$

$$\alpha(t) = \left(\int_0^t \cos\left(\frac{x^2}{2}\right) dx, \int_0^t \sin\left(\frac{x^2}{2}\right) dx \right)$$

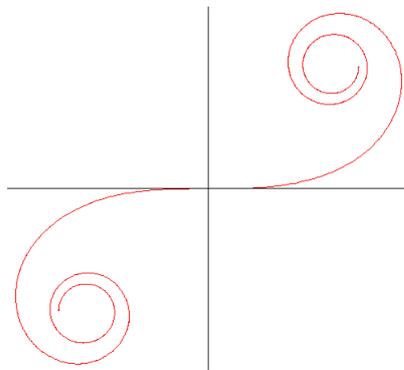


Figura 3.1: Curva gerada pela curvatura $k(s) = s$.

As integrais na curva α no exemplo 3.1.1 geralmente são chamadas de integrais de Fresnel, quem as estudou na forma $\left(\int_{t_0}^t \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx, \int_{t_0}^t \sin\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx \right)$. Na época, Fresnel criou uma tabela com vários valores dessas integrais. Pelo fato de que as integrais do tipo não podem ser expressas em termos de funções elementares, é necessário o auxílio de métodos numéricos para calcular as coordenadas da curva. Em seguida, faremos um esboço do gráfico da curva.

De fato as integrais de Fresnel são convergentes e nesse caso $\lim_{t \rightarrow \infty} \alpha(t) = (\frac{\sqrt{\pi}}{2}, \frac{\sqrt{\pi}}{2})$, o que mostraremos nas seções seguintes. Além disso, α tem tangentes horizontais em:

$$\alpha'(t) = (1, 0), \alpha'(t) = (-1, 0)$$

$$t \rightarrow 0, \sqrt{2\pi}, 2\sqrt{\pi}, \sqrt{6\pi}, 2\sqrt{2\pi}, \dots;$$

e α tem tangentes verticais em:

$$\alpha'(t) = (0, 1), \alpha'(t) = (0, -1)$$

$$t \rightarrow \sqrt{\pi}, \sqrt{3\pi}, \sqrt{5\pi}, \sqrt{7\pi}, \dots;$$

Observamos que a frequência das tangentes horizontais e verticais aumenta com o passar do tempo t (Figura 3.3), o que é de se esperar, pois a curvatura de α está sempre aumentando. Além disso, quando $t > 0$ a curvatura é sempre positiva, o que faz a curva descrever uma trajetória no sentido anti-horário. Com essas informações podemos esboçar o gráfico de α quando $t > 0$. Quando $t < 0$, os senos e os cossenos não mudam de sinal, mas como consequência trivial das próprias integrais, a curva terá valores negativos. Fazendo a simetria, temos o esboço da curva α (Figura 3.1). Vale observar que quando $t < 0$ a curvatura é negativa e a curva gira no sentido horário. Se considerarmos uma curvatura sempre positiva k^2 , a trajetória seria sempre anti-horária e o parâmetro t estaria elevado à terceira potência, desse modo a função seno trocaria de sinal e teríamos uma curva como a Figura 3.2.

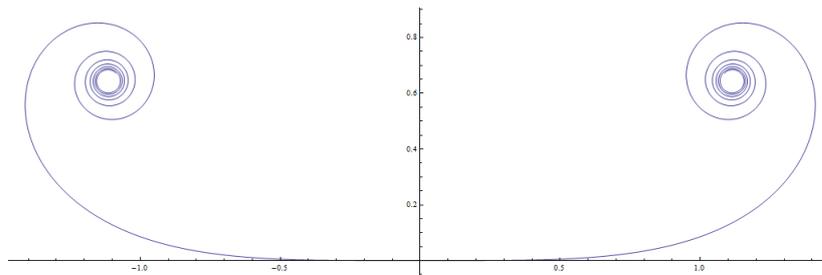


Figura 3.2: Variação da Espiral de Euler.

3.2 Integrais de Fresnel

Um dos problemas da Espiral de Euler é entender o que acontece com os valores de x e de y , quando t tende para valores muito grandes. Sabemos que as funções seno e cosseno na sua forma natural não convergem, porém, quando elevamos o parâmetro ao quadrado, as funções se compactam à medida que t aumenta, (Figura 3.3). Observamos que a frequência das funções seno e cosseno, neste caso, aumenta muito rápido, compactando a área superior e inferior

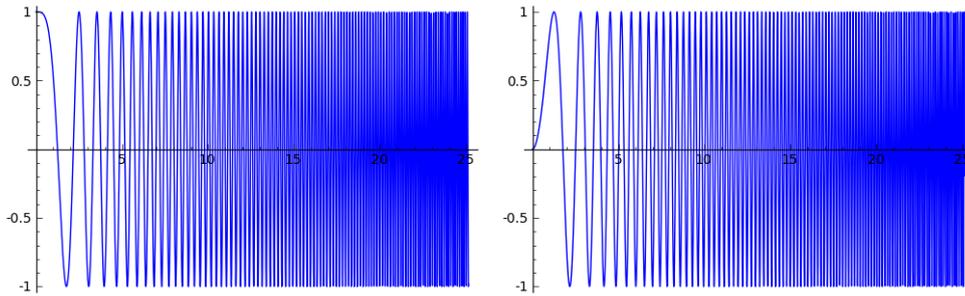


Figura 3.3: $\cos(t^2)$ e $\text{sen}(t^2)$ respectivamente.

da figura. Como consequência, a partir de um momento, a soma das áreas será muito próxima de 0, nos permitindo integrar (intuitivamente) a parte anterior.

Aqui temos o gráfico das integrais de Fresnel (Figura 3.4), em que:

$$C(x) = \int_{t_0}^{\infty} \cos\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx \quad S(x) = \int_{t_0}^{\infty} \text{sen}\left(\frac{\pi x^2}{2}\right) dx$$

Para demonstrar a convergência das Integrais de Fresnel, vamos enunciar o Teorema de Dirichlet e seus corolários (ver C. Buck [2], p.92).

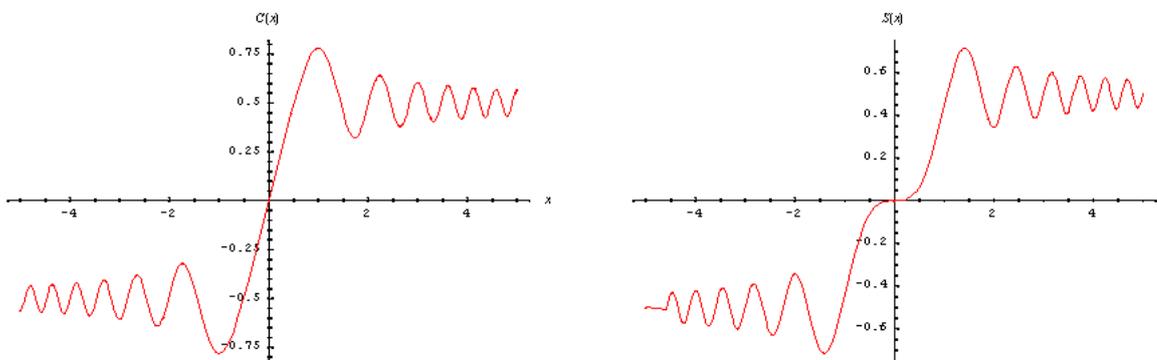


Figura 3.4: Valores reais da integral de Fresnel.

chlet e seus corolários (ver C. Buck [2], p.92).

3.2.1 Teste de Dirichlet

Para iniciar esta seção, vamos mostrar alguns fundamentos para explicarmos o Teste de Dirichlet. Dizemos que f é monótona crescente se $f(x_1) \leq f(x_2)$ sempre que $x_1 \leq x_2$, $x_1, x_2 \in D$ e f é monótona decrescente se $f(x_1) \geq f(x_2)$ sempre que $x_1 \leq x_2$, $x_1, x_2 \in D$.

Dizemos que uma função contínua f é limitada em um intervalo A quando existe um M real tal que $|f(x)| \leq M$ para todo $x \in A$. A seguir, um exemplo de função limitada:

Exemplo 3.2.1.

Seja $f(x) = \cos(x)$ tal que $0 \leq x \leq 2\pi$, logo $|f(x)| \leq 1$ para todo x .

Uma função também pode ser contínua e não limitada:

Exemplo 3.2.2.

Seja $g(x) = \frac{1}{x}$ tal que $0 < x \leq 1$ pois para qualquer M que escolhermos, sempre vai existir um x_1 próximo de 0 o quanto quisermos, tal que $f(x_1) > M$.

Outro resultado importante é o teste da comparação, pois, como explicado anteriormente com as Integrais de Fresnel, a convergência de uma integral imprópria $\int_0^\infty f(x)dx$ depende de como $f(x)$ se comporta onde $x \rightarrow \infty$.

Teorema 3.2.1 (Teste da Comparação).

Sejam f e g funções contínuas no intervalo $a \leq x < b$ tal que $a, b \in \mathbb{R}$ ou que b represente ∞ e $0 \leq f(x) \leq g(x)$. Se $\int_a^b g$ convergir então $\int_a^b f$ também converge e ainda $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Demonstração. Seja $F(r) = \int_a^r f$ e $G(r) = \int_a^r g$. Por hipótese, $f(r) \leq g(r)$ para todo $r < b$ e o $\lim_{r \rightarrow b} G(r)$ existe. Como $F' = f$ é não-negativa, então podemos dizer que F é uma função monótona crescente quando $r \rightarrow b$; mas como F é limitada pelo limite de G que existe, então $\lim_{r \rightarrow b} F(r)$ existe e é menor ou igual ao $\lim_{r \rightarrow b} G(r)$. \square

Dizemos que uma integral imprópria $\int_a^b f$ é absolutamente convergente se $\int_a^b |f|$ converge e condicionalmente convergente se $\int_a^b |f|$ é divergente. Como no teste da comparação as duas funções em questão devem ser positivas, o próximo resultado nos dá mais possibilidades para usar o mesmo.

Teorema 3.2.2.

$\int_a^b f$ é sempre convergente quando $\int_a^b |f(x)|dx$ converge.

Demonstração. Observamos que $-|f(x)| \leq f(x) \leq |f(x)|$, assim $0 \leq |f(x)| + f(x) \leq 2|f(x)|$, pelo Teorema 3.2.1 se $\int_a^b |f(x)|dx$ converge, então $\int_a^b (|f(x)| + f(x))dx$ também é convergente, subtraindo a integral convergente $\int_a^b |f(x)|dx$ concluímos então que $\int_a^b f(x)dx$ converge. \square

Teorema 3.2.3 (Teste de Dirichlet).

Sejam f , g e g' contínuas no intervalo $c \leq x < \infty$, então $\int_c^\infty f(x)g(x)dx$ converge se f e g satisfazem as propriedades:

1. $\lim_{x \rightarrow \infty} g(x) = 0$,
2. $\int_c^\infty g'$ é absolutamente convergente,
3. $F(r) = \int_c^r f$ é limitada para $c \leq r < \infty$.

Demonstração. Vamos mostrar que $\int_c^\infty f(x)g(x)dx$ é convergente, usando integração por partes $\int u dv = uv - \int v du$, sendo $u = g(x)$ e $v = F(x)$:

$$\begin{aligned} \int_c^r f(x)g(x)dx &= \int_c^r g(x)dF(x) = F(x)g(x)\Big|_c^r - \int_c^r F(x)dg(x) \\ &= F(r)g(r) - F(c)g(c) - \int_c^r F(x)g'(x)dx. \end{aligned}$$

Como $F(r)$ é limitada, então existe um M tal que $|F(r)| \leq M$ para todo $r \geq c$. Multiplicando a desigualdade por $|g(x)|$ obtemos $|F(r)g(r)| \leq M|g(r)|$ e pelo item 1, $\lim_{r \rightarrow \infty} F(r)g(r) = 0$. Multiplicando agora $|F(r)| \leq M$ por $|g'(x)|$ temos $|F(x)g'(x)| \leq M|g'(x)|$ e como $\int_c^\infty g'$ é absolutamente convergente por hipótese, pelo Teorema 3.2.1 $\int_c^\infty F(x)g'(x)$ é convergente. Logo, o $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_c^r f(x)g(x)dx$ existe, ou seja, a integral imprópria converge e tem o valor de $F(c)g(c) - \int_c^\infty F(x)g'(x)dx$. \square

Corolário 3.2.3.1.

$\int_c^\infty fg$ converge se f satisfaz o item 3 do Teorema 3.2.3 e se $g(x)$ for uma função monótona decrescendo para 0 quando $x \rightarrow \infty$.

Demonstração. Precisamos mostrar que o item 2 acontece, pois os itens 1 e 3 são satisfeitos por hipótese. Como $g(x)$ é uma função monótona decrescente, sua derivada $g'(x)$ será sempre negativa. Assim

$$\int_c^r |g'(x)|dx = - \int_c^r g'(x)dx = -g(x)\Big|_c^r = g(c) - g(r).$$

Por hipótese, $g(r)$ vai decrescer para 0, logo o $\lim_{r \rightarrow \infty} \int_c^r |g'(x)|dx$ vai existir e será igual a $g(c)$, em outras palavras $\int_c^\infty g'(x)dx$ é absolutamente convergente. Logo, pelo Teorema 3.2.3, $\int_c^\infty fg$ converge. \square

Corolário 3.2.3.2.

Se g é de classe C^1 para $c \leq x < \infty$ e $g(x)$ é uma função monótona decrescendo para 0 quando $x \rightarrow \infty$, então as integrais $\int_c^\infty g(x) \operatorname{sen}(x)dx$ e $\int_c^\infty g(x) \operatorname{cos}(x)dx$ são convergentes.

Demonstração. Temos que $\operatorname{sen}(x)$ e $\operatorname{cos}(x)$ são limitadas. Resta provar que $\operatorname{sen}(x)$ e $\operatorname{cos}(x)$ satisfazem o item 3 do Teorema 3.2.3. De fato, se $f(x) = \operatorname{sen}x$,

$$\left| \int_c^r \operatorname{sen}(x)dx \right| = \left| -\operatorname{cos}(x) \Big|_c^r \right| = |\operatorname{cos}(c) - \operatorname{cos}(r)| \leq 2$$

e, se $f(x) = \cos x$,

$$\left| \int_c^r \cos(x) dx \right| = \left| \left[\text{sen}(x) \right]_c^r \right| = |\text{sen}(r) - \text{sen}(c)| \leq 2.$$

Logo, o item 3 do Teorema 3.2.3 acontece e a tese segue do Corolário 3.2.3.1. \square

Esses resultados já são suficientes para mostrar a convergência das integrais de Fresnel.

Corolário 3.2.3.3. *As integrais $\int_0^\infty \cos x^2 dx$ e $\int_0^\infty \text{sen } x^2 dx$ convergem.*

Demonstração. Vamos analisar o caso do cosseno:

$$\int_0^\infty \cos(x^2) dx.$$

Aplicando uma mudança de variável $u = x^2 \rightarrow |x| = \sqrt{u}$, como x está variando de 0 a ∞ , então $x = \sqrt{u}$, logo $dx = \frac{du}{2\sqrt{u}}$. Analisando o conjunto imagem de $x = \sqrt{u}$ observamos que se $x = 0$, $u = 0$ e se x explode para infinito u também irá. Portanto, com a mudança de variável, temos:

$$\int_0^\infty \frac{\cos(u) du}{2\sqrt{u}}.$$

Nota-se que $\frac{1}{2\sqrt{u}}$ é monótona decrescente mas não é limitada de 0 até 1. Aplicando o Corolário 3.2.3.2 de 1 a ∞ , concluímos que $\int_1^\infty \frac{\cos(u) du}{2\sqrt{u}}$ é convergente. Considerando que $\frac{\cos(u)}{2\sqrt{u}} \leq \frac{1}{\sqrt{u}}$ e que $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}} du$ é uma integral imprópria, em que $\frac{1}{\sqrt{u}}$ é descontínua em 0 no intervalo $(0, 1]$. Mas $\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}} du = \lim_{t \rightarrow 0^+} \int_0^1 \frac{1}{\sqrt{u}} du = \lim_{t \rightarrow 0^+} 2\sqrt{u} \Big|_0^1 = 2$, logo, pelo Teorema 3.2.1, $\int_0^1 \frac{\cos(u) du}{2\sqrt{u}}$ também é convergente. A demonstração para $\int_0^\infty \text{sen}(x^2) dx$ é análoga. \square

Mostraremos agora que $\int_0^\infty \cos(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$ e que $\int_0^\infty \text{sen}(x^2) dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$, usando o Teorema de Cauchy para funções de variável complexa (R.V. Churchill [4], p.109):

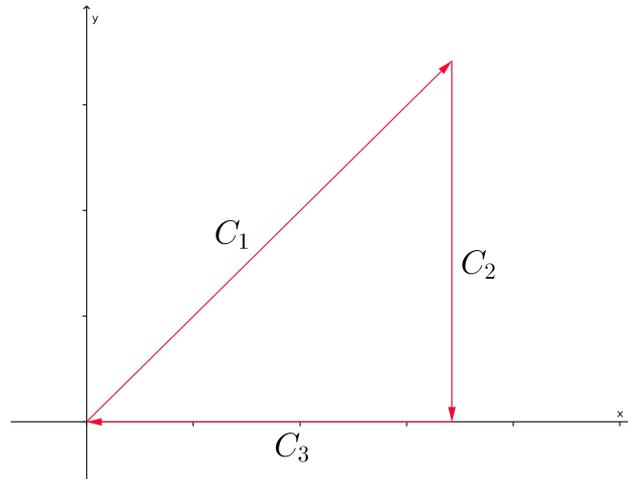
Teorema 3.2.4. (Cauchy). *Se $f(z)$ é diferenciável complexa em um retângulo D , $z = x + iy$ e se C é um caminho contínuo, diferenciável por partes, fechado e contido em D , então,*

$$\oint_C f(z) dz = 0.$$

Corolário 3.2.4.1. $\int_0^\infty \cos x^2 dx = \int_0^\infty \text{sen } x^2 dx = \sqrt{\frac{\pi}{8}}$.

Demonstração. Primeiro vamos observar que $\cos x^2$ e $\sin x^2$ podem ser usadas no plano complexo como $f(z) = e^{iz^2}$ sendo $z = x + iy$. Em nosso caso, usaremos a integral de linha complexa e fechada por partes de $f(z) = e^{-z^2}$ e $C = C_1 \cup C_2 \cup C_3$, onde:

$$C_1 : z = x + iy ; 0 \leq x \leq R \quad C_2 : z = R + i(R - y) ; 0 \leq y \leq R \quad C_3 : z = R - x ; 0 \leq x \leq R$$



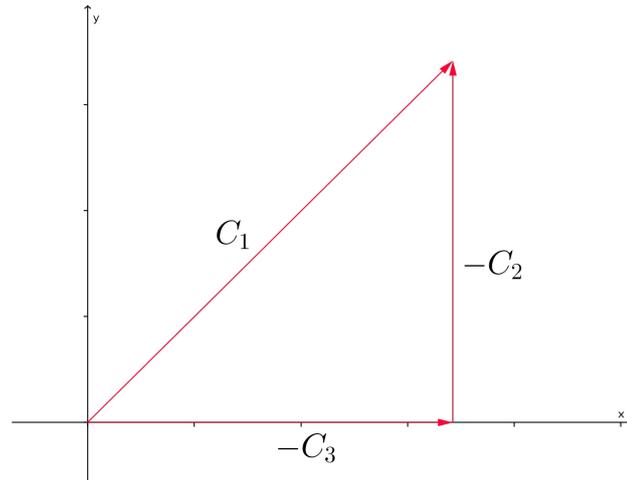
Aqui o R será um número real fixo, e depois faremos o R tender para o infinito. O fato de usarmos o sinal negativo em $f(z) = e^{-z^2}$, se deve a utilizarmos um resultado conhecido do cálculo $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-x^2} dx = \sqrt{\pi}$.

O Teorema de Cauchy mostra que, para um número R positivo

$$\begin{aligned} \oint_C e^{-z^2} dz &= \int_{C_1} e^{-z^2} dz + \int_{C_2} e^{-z^2} dz + \int_{C_3} e^{-z^2} dz \\ &= \int_{C_1} e^{-z^2} dz - \int_{-C_2} e^{-z^2} dz - \int_{-C_3} e^{-z^2} dz \\ &= 0. \end{aligned}$$

Os caminhos C_2 e C_3 foram invertidos para simplificar as contas, mas, como trocamos o sinal a igualdade continua sendo 0.

$$C_1 : z = x + iy ; 0 \leq x \leq R \quad -C_2 : z = R + iy ; 0 \leq y \leq R \quad -C_3 : z = x ; 0 \leq x \leq R$$



Expressamos a integral como:

$$\oint_C e^{-z^2} dz = (1+i) \underbrace{\int_0^R e^{-2ix^2} dx}_* - i \int_0^R e^{y^2-R^2} e^{-2iRy} dy - \int_0^R e^{-x^2} dx = 0.$$

Fazendo uma mudança de variável na integral *, $x = \frac{u}{\sqrt{2}} \rightarrow dx = \frac{du}{\sqrt{2}}$, obtemos:

$$\frac{(1+i)}{\sqrt{2}} \underbrace{\int_0^{\sqrt{2}R} e^{-iu^2} du}_I - i \underbrace{\int_0^R e^{y^2-R^2} e^{-2iRy} dy}_{II} - \underbrace{\int_0^R e^{-x^2} dx}_{III} = 0. \quad (3.1)$$

Note que, pela Fórmula de Euler, $e^{-iu^2} = \cos u^2 - i \sin u^2$ e, portanto, a integral (I) é a que estamos procurando e a integral (III) tem um valor conhecido, considerando que mandaremos R para o infinito. Vamos mostrar que a integral (II) vai se tornar desprezível, no sentido de que ela é uma expressão que depende de R e que tem o limite 0 quando $R \rightarrow \infty$.

Para avaliar a segunda integral, vamos estimar a seguinte:

$$\int_0^R |e^{y^2-R^2} e^{-2iRy}| dy = \int_0^R e^{y^2-R^2} dy = \int_0^R e^{(y+R)(y-R)} dy \leq \int_0^R e^{2R(y-R)} dy.$$

Por sua vez:

$$\begin{aligned}
 \int_0^R e^{2R(y-R)} dy &= \int_0^R e^{2Ry} e^{-2R^2} dy & (3.2) \\
 &= e^{-2R^2} \int_0^R e^{2Ry} dy \\
 &= \frac{1}{e^{-2R^2}} \cdot \frac{e^{2Ry}}{2R} \Big|_0^R \\
 &= \frac{1}{e^{-2R^2}} \cdot \left(\frac{e^{2R^2}}{2R} - \frac{e^0}{2R} \right) \\
 &= \frac{1}{2R} - \frac{1}{2Re^{2R^2}}
 \end{aligned}$$

e quando $R \rightarrow \infty$,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{2R} - \frac{1}{2Re^{2R^2}} = 0.$$

Isto é, a integral 3.2 converge para 0, e pelo teste da comparação, a integral (II) é absolutamente convergente e portanto ela converge para zero quando $R \rightarrow \infty$.

Com isto, multiplicando por $\frac{\sqrt{2}}{(1+i)}$, e enviando $R \rightarrow \infty$ na equação (3.1), temos

$$\int_0^\infty e^{-iu^2} du = \frac{\sqrt{2}}{(1+i)} \frac{\sqrt{\pi}}{2} = \sqrt{\frac{\pi}{8}}(1-i), \quad (3.3)$$

pois sabemos que $\int_0^\infty e^{-x^2} dx = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$ (ver Stewart [16] p.931).

Sejam $A = \int_0^\infty \cos x^2 dx$ e $B = \int_0^\infty \sin x^2 dx$ as integrais que buscamos. Então, a equação 3.3 diz que

$$A - iB = \sqrt{\frac{\pi}{8}}(1-i)$$

e com isto A e B têm os valores que queríamos demonstrar. □

4 Algumas Propriedades

Ernesto Cesàro foi um matemático do século 19, professor da universidade de Nápoles, na Itália. Em sua obra, *Lezione di Geometria Intrinseca*, Cesàro nomeia a Espiral de Euler por "Clothoide", palavra de origem grega que significa torcer ao girar. Nesse trabalho [3], p.81, Cesàro demonstra algumas propriedades da curva. "Vemos que cada arco de Clotóide tem o centro de gravidade no centro de semelhança dos círculos osculadores extremos"¹. Também cita que a Clotóide é a única curva apresentando essa propriedade.

De acordo com [17], Teixeira, p.102, é demonstrado, como veremos a seguir, que o centro de gravidade de um arco qualquer da Clotóide está situado na linha reta que une os centros de curvatura das extremidades do mesmo arco. "le centre de gravité d'un arc quelconque de la clothoide est situé sur la droite qui passe par les centres de courbure correspondant aux extrémités de cet arc.". Faremos a demonstração dessa afirmativa e assim confirmaremos se o centro de gravidade também é um centro de semelhança.

4.1 Centro de Gravidade

Poisson [13], p.122, define o centro de gravidade (G_x, G_y) de uma linha.

Definição 4.1.1. *Considere o arco, com pontos iniciais e finais s_0 e s_1 respectivamente. Seja $S = s_1 - s_0$, então o centro de gravidade G_x e G_y do arco tomado será:*

$$SG_x = \int_{s_0}^{s_1} x ds, \quad SG_y = \int_{s_0}^{s_1} y ds.$$

4.2 Homotetia

Definição 4.2.1. *Dada uma figura F e um ponto O . Seja F' a figura que reúne todos os pontos resultantes da multiplicação de todos os pontos de F por um valor real λ relativo ao centro O . Então, F e F' são denominadas figuras homotéticas e O o centro de homotetia (centro de semelhança). Quando $\lambda > 0$ dizemos que a homotetia é direta e quando $\lambda < 0$ dizemos que a homotetia é inversa.*

¹"si vede che ogni arco di Clotoide ha il baricentro in un centro di similitudine dei circoli osculatori estremi."

4.2.1 Centro de semelhança de circunferências

Dois círculos são sempre homotéticos (Figura 4.1). Precisamos encontrar o centro de semelhança (centros de homotetia) de dois círculos osculadores da Clotóide, referentes aos extremos do arco. Dois círculos podem ter até dois centros de semelhança, o inverso e o direto. Quando os círculos são concêntricos temos apenas um centro de semelhança, o direto. No caso citado por Cesàro, o centro de gravidade é o centro de semelhança direto.

Para descobrir o centro de semelhança de dois círculos, deve-se:

- 1 - Traçar um diâmetro em cada Circunferência que sejam paralelos.
- 2 - Traçar uma reta r que passa pelo centro das duas circunferências.
- 3 - Traçar uma reta que passa pelas extremidades dos diâmetros situados no semi-plano dividido por r e a interceptando em H_1 ; esse é o centro de homotetia direto.
- 4- Traçar uma reta que passa pelas extremidades dos diâmetros situados nos semi-planos opostos divididos por r , a interceptando em H_2 ; esse é o centro de homotetia inverso.

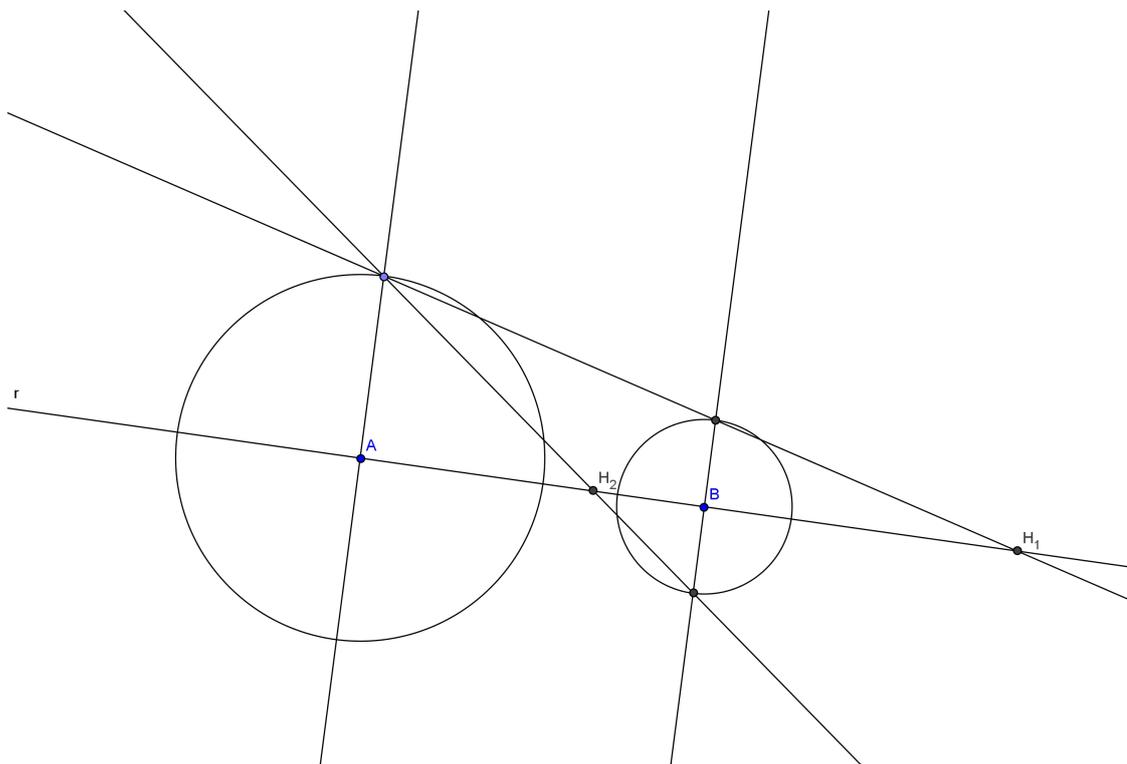


Figura 4.1: Centro de Homotetia Direto H_1 e inverso H_2 de duas circunferências.

4.3 Demonstrações das Propriedades

Propriedade 1. *O centro de gravidade de qualquer arco da Clotóide está na linha reta que liga o centro dos círculos osculadores das extremidades do arco.*

Seja a equação da Clotóide definida pela equação de Cesàro $ps = a^2$, lembrando que $p = \frac{1}{k}$ é o raio de curvatura, s o comprimento de arco e a uma constante. Logo, pelo Teorema 2.4.1,

$$x = \int_0^s \cos\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) ds, \quad y = \int_0^s \operatorname{sen}\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) ds.$$

Definimos a evoluta da Clotóide através da equação:

$$(A(s), B(s)) = c(s) = \alpha(s) + \frac{1}{k(s)}N(s),$$

sendo $\alpha(s)$ a Clotóide e A e B as coordenadas do centro de curvatura $c(s)$. Observamos que:

$$N(s) = \left(-\operatorname{sen}\left(\frac{s^2}{2a^2}\right), \cos\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) \right),$$

$$A(s) = x - \frac{a^2}{s} \operatorname{sen}\left(\frac{s^2}{2a^2}\right), \quad B(s) = y + \frac{a^2}{s} \cos\left(\frac{s^2}{2a^2}\right), \quad (4.1)$$

equações estas que determinam as coordenadas A e B dos pontos da evoluta da função de s .

Sejam s_0 e s_1 os valores de s , a contar da origem das coordenadas até as extremidades de um arco da Clotóide, (x_0, y_0) e (x_1, y_1) as coordenadas destes pontos e (G_x, G_y) as do centro de gravidade do arco. Se $S = s_1 - s_0$, então:

$$SG_x = \int_{s_0}^{s_1} x ds \text{ e } SG_y = \int_{s_0}^{s_1} y ds.$$

Logo,

$$SG_x = \int_{s_0}^{s_1} ds \int_0^s \cos\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) ds.$$

Fazendo $u = \int_0^s \cos\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) ds$, temos $du = \cos\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) ds$ e, fazendo $dv = ds$, por integração por parte, temos:

$$\begin{aligned} \int_{s_0}^{s_1} u dv &= s \int_0^s \cos\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) ds \Big|_{s_0}^{s_1} - \int_{s_0}^{s_1} s \cos\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) ds \\ SG_x &= s_1 \int_0^{s_1} \cos\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) ds - s_0 \int_0^{s_0} \cos\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) ds - a^2 \operatorname{sen}\left(\frac{s_1^2}{2a^2}\right) + a^2 \operatorname{sen}\left(\frac{s_0^2}{2a^2}\right) \end{aligned}$$

e, do mesmo modo,

$$\begin{aligned} SG_y &= \int_{s_0}^{s_1} ds \int_0^s \operatorname{sen} \left(\frac{s^2}{2a^2} \right) ds \\ &= s_1 \int_0^{s_1} \operatorname{sen} \left(\frac{s^2}{2a^2} \right) ds - s_0 \int_0^{s_0} \operatorname{sen} \left(\frac{s^2}{2a^2} \right) ds + a^2 \cos \left(\frac{s_1^2}{2a^2} \right) - a^2 \cos \left(\frac{s_0^2}{2a^2} \right). \end{aligned}$$

Observamos que as seguintes equações são verdadeiras:

$$SG_x = A_1 s_1 - A_0 s_0$$

$$SG_y = B_1 s_1 - B_0 s_0$$

onde $A_1 = A(s_1), A_0 = A(s_0), B_1 = B(s_1), B_0 = B(s_0)$. Através dessas igualdades, demonstraremos o seguinte resultado:

$$\lambda := \det \begin{pmatrix} G_x & G_y & 1 \\ A_0 & B_0 & 1 \\ A_1 & B_1 & 1 \end{pmatrix} = 0.$$

Pela geometria analítica sabemos que esse determinante, quando igual a zero, mostra que as coordenadas (A_0, B_0) , (A_1, B_1) e (G_x, G_y) são colineares.

Calculando o determinante, obtemos:

$$\begin{aligned} \lambda &= G_x B_0 + G_y A_1 + A_0 B_1 - A_1 B_0 - G_x B_1 - G_y A_0 \\ &= \frac{B_0 A_1 s_1}{S} - \frac{A_0 s_0 B_0}{S} + \frac{A_1 B_1 s_1}{S} - \frac{B_0 s_0 A_1}{S} + A_0 B_1 - A_1 B_0 - \frac{A_1 s_1 B_1}{S} + \frac{A_0 s_0 B_1}{S} \\ &\quad - \frac{A_0 B_1 s_1}{S} + \frac{B_0 s_0 A_0}{S} \\ \lambda &= \frac{B_0 A_1 s_1}{S} - \frac{B_0 s_0 A_1}{S} + A_0 B_1 - A_1 B_0 + \frac{A_0 s_0 B_1}{S} - \frac{A_0 B_1 s_1}{S} \\ &= \frac{A_0 B_1}{S} (s_0 - s_1) - \frac{A_1 B_0}{S} (s_0 - s_1) + A_0 B_1 - A_1 B_0 \\ &= (A_0 B_1 - A_1 B_0) \left[1 + \frac{(s_0 - s_1)}{S} \right]. \end{aligned}$$

Mas, $S = s_1 - s_0 \rightarrow \frac{s_0 - s_1}{S} = -1$ logo:

$$\lambda = (A_0 B_1 - A_1 B_0) \underbrace{\left[1 + \frac{(s_0 - s_1)}{S} \right]}_0 = 0$$

estando, então, demonstrado que o centro de gravidade de um arco qualquer da Clotóide está contido na reta que une os centros de curvatura das extremidades do mesmo arco.

Propriedade 2. O centro de gravidade do arco OM da Clotóide, contado a partir da origem O até um ponto M , está localizado na interseção da reta perpendicular à tangente em O que passa pelo centro do círculo osculador em M , com o círculo osculador em M .

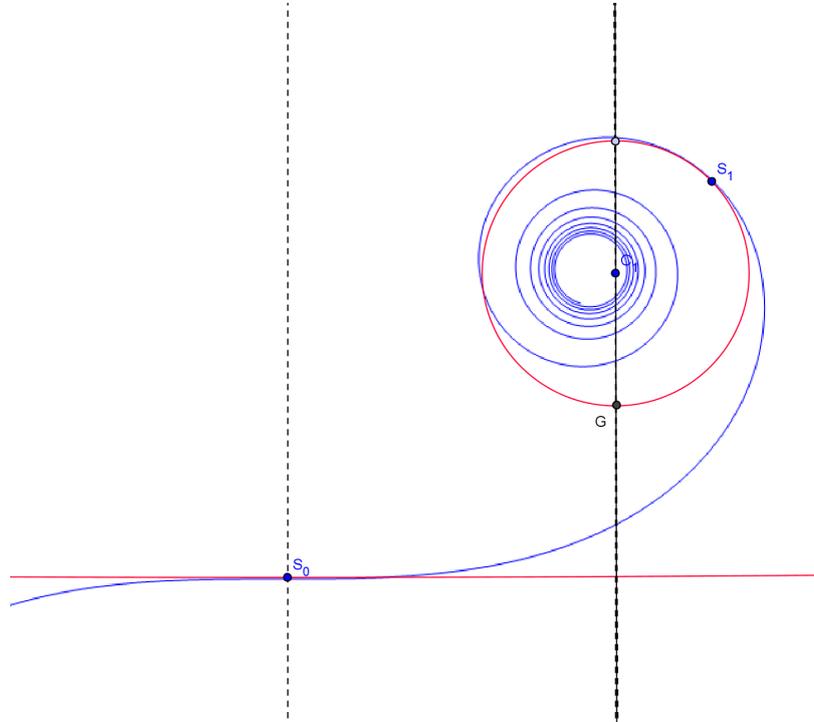


Figura 4.2: Centro de Gravidade G de um arco contado a partir da origem.

Sendo $s_0 = 0$, as coordenadas do centro de gravidade do arco OM são expressas pelas fórmulas

$$s_1 G_x = s_1 \int_0^{s_1} \cos\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) ds - a^2 \operatorname{sen}\left(\frac{s_1^2}{2a^2}\right)$$

$$s_1 G_y = s_1 \int_0^{s_1} \operatorname{sen}\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) ds + a^2 \left(\cos\left(\frac{s_1^2}{2a^2}\right) - 1\right)$$

ou seja,

$$G_x = A_1 \tag{4.2}$$

e

$$s_1 G_y = s_1 B_1 - a^2. \tag{4.3}$$

Sendo a equação do círculo osculador da Clotóide, no ponto (x_1, y_1) ,

$$(G_x - A_1)^2 + (G_y - B_1)^2 = \frac{a^4}{s_1^2},$$

é fácil verificar de 4.2 e 4.3 que G_x e G_y satisfazem-na. Observe que a coordenada G_x coincide com a do círculo osculado em (x_1, y_1) e a coordenada de G_y coincide com a do círculo osculador em (x_1, y_1) menos uma constante cujo valor é o raio de curvatura no ponto. Concluimos então que o centro de gravidade do arco OM da Clotóide está situado na interseção do círculo osculador em M com a perpendicular à tangente em O , traçada pelo ponto (A_1, B_1) .

Propriedade 3. *O centro de gravidade de um arco da Clotóide é um centro de semelhança dos círculos osculadores das extremidades do arco (Figura 4.3).*

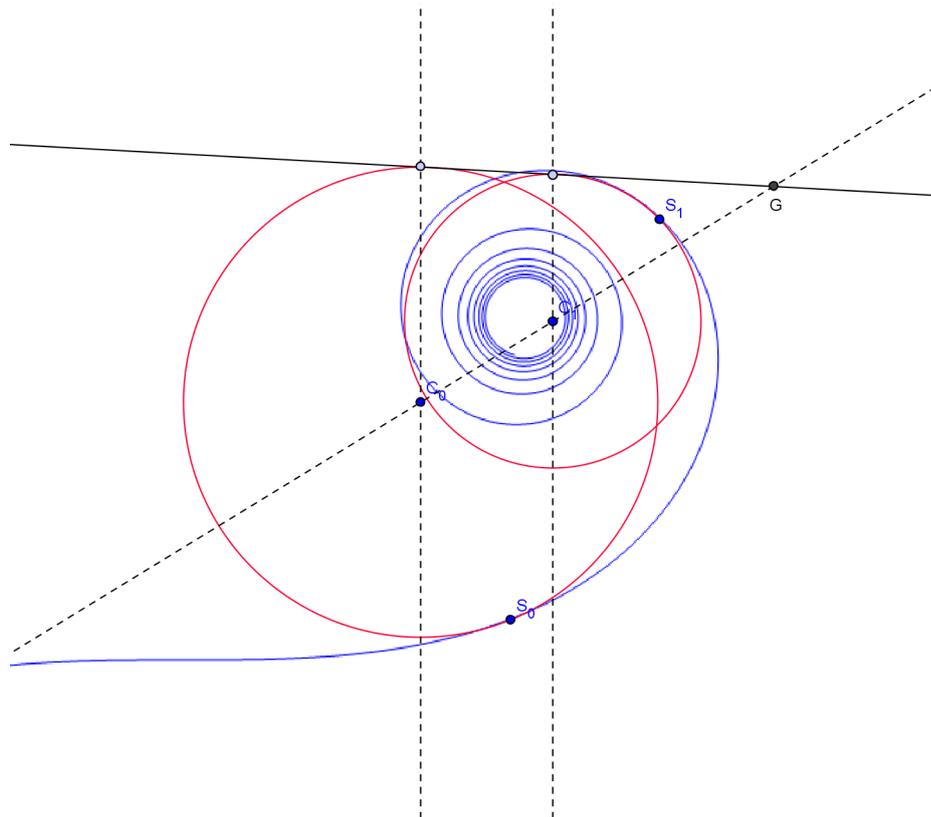


Figura 4.3: Centro de Gravidade G de um arco qualquer da Clotóide.

Seja um arco da Clotóide de s_0 a s_1 . Já sabemos que o centro de gravidade desse arco está situado na reta z que liga os centros de curvatura correspondentes. Vamos considerar os diâmetros perpendiculares ao eixo x das circunferências osculadoras correspondentes. Determinaremos a equação da reta z_1 que passa pela interseção dos diâmetros com os círculos osculadores situados no mesmo semi-plano dividido pela reta z e mostraremos que o centro de curvatura está situado na interseção das retas z e z_1 . Assim, o centro de gravidade do arco seria um centro de homotetia direto de duas circunferências (Figura 4.3).

Para calcularmos a equação da reta z , sendo p o raio das circunferências correspondentes, temos:

$$\det \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ A_0 & B_0 & 1 \\ A_1 & B_1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$xB_0 + yA_1 + A_0B_1 - A_1B_0 - B_1x - A_0y = 0$$

$$y(A_1 - A_0) - x(B_1 - B_0) + A_0B_1 - A_1B_0 = 0.$$

Para calcularmos a equação da reta z_1 temos:

$$\det \begin{pmatrix} x & y & 1 \\ A_0 & B_0 + p_0 & 1 \\ A_1 & B_1 + p_1 & 1 \end{pmatrix} = 0$$

$$x(B_0 + p_0) + yA_1 + A_0(B_1 + p_1) - A_1(B_0 + p_0) - x(B_1 + p_1) - yA_0 = 0$$

$$y(A_1 - A_0) - x(B_1 - B_0) - x(p_1 - p_0) + A_0(B_1 + p_1) - A_1(B_0 + p_0) = 0.$$

Basta encontrarmos a solução do sistema de equações:

$$\begin{cases} y = \frac{x(B_1 - B_0)}{A_1 - A_0} + \frac{A_1B_0 - A_0B_1}{A_1 - A_0} & \text{reta } z \\ y = \frac{x(B_1 - B_0)}{A_1 - A_0} + \frac{x(p_1 - p_0)}{A_1 - A_0} - \frac{A_0(B_1 + p_1)}{A_1 - A_0} + \frac{A_1(B_0 + p_0)}{A_1 - A_0} & \text{reta } z_1 \end{cases}$$

Igualando as equações:

$$\frac{x(B_1 - B_0)}{A_1 - A_0} + \frac{A_1B_0 - A_0B_1}{A_1 - A_0} = \frac{x(B_1 - B_0)}{A_1 - A_0} + \frac{x(p_1 - p_0)}{A_1 - A_0} - \frac{A_0(B_1 + p_1)}{A_1 - A_0} + \frac{A_1(B_0 + p_0)}{A_1 - A_0}$$

$$A_1B_0 - A_0B_1 = x(p_1 - p_0) - A_0B_1 - A_0p_1 + A_1B_0 + A_1p_0$$

$$x(p_1 - p_0) - A_0p_1 + A_0p_0 = 0$$

Como $p = \frac{a^2}{s}$, temos:

$$x = \frac{\frac{A_0a^2}{s_1} - \frac{A_1a^2}{s_0}}{\frac{a^2}{s_1} - \frac{a^2}{s_0}} = \frac{\frac{A_0a^2s_0}{s_0s_1} - \frac{A_1a^2s_1}{s_0s_1}}{\frac{a^2s_0}{s_0s_1} - \frac{a^2s_1}{s_0s_1}} = \frac{-a^2(A_1s_1 - A_0s_0)}{-a^2(s_1 - s_0)} = \frac{A_1s_1 - A_0s_0}{S} = G_x.$$

Aproveitando o resultado, temos na reta z que:

$$y = \frac{(A_1s_1 - A_0s_0)(B_1 - B_0)}{S(A_1 - A_0)} + \frac{A_1B_0 - A_0B_1}{A_1 - A_0}$$

$$Sy = A_1s_1B_1 - A_1s_1B_0 - A_0s_0B_1 + A_0s_0B_0 + A_1s_1B_0 - A_1s_0B_0 - A_0s_1B_1 + A_0s_0B_1$$

$$Sy = \frac{A_1(B_1s_1 - B_0s_0) - A_0(B_1s_1 - B_0s_0)}{A_1 - A_0}$$

$$y = \frac{(A_1 - A_0)(B_1s_1 - B_0s_0)}{S(A_1 - A_0)} = \frac{B_1s_1 - B_0s_0}{S} = G_y.$$

5 Apresentação Histórica e Conclusão

A história da Espiral de Euler começa indiretamente com as descobertas relacionadas a Elástica, que estuda a mecânica relacionada a molas elásticas, como por exemplo, pequenas tiras de madeiras ou lâminas de metal, ambas extremamente finas. Na idealização matemática devemos admitir que essas pequenas tiras tenham uma espessura desprezível se comparada à quantidade de dobra e que a tira seja plana não existindo torção, esticamento ou compressão.

Segundo R. Levien [10], p.16¹, uma das dificuldades na literatura sobre Elástica é que existem vários tópicos que podem ser estudados, sendo que cada um deles é responsável para esclarecer diversos problemas relacionados à Elástica. Dentre os tópicos, podemos citar o equilíbrio de momentos em um problema físico estático; o equilíbrio de forças deste mesmo sistema; a curva que minimiza a energia total de dobra de um sistema físico (ao qual a Espiral de Euler está diretamente relacionado); a solução de uma equação diferencial abstrata; e uma comparação a um outro sistema físico, o do pêndulo.

A curva traçada por uma tira elástica é caracterizada diretamente por sua curvatura em cada ponto de seu comprimento. Dobrar uma tira induz energia potencial, da mesma forma que uma mola. De acordo com a teoria da elasticidade, a energia de dobra é proporcional ao quadrado da curvatura. Assim, a energia total de dobra de uma tira de tamanho l é:

$$E[K(s)] = \int_0^l k(s)^2 ds$$

Quando completamente sem restrições, a Elástica vai assumir a forma de uma linha reta e a energia total de dobra do sistema é zero. Quando a tira for restringida, a energia de dobra vai tender ao mínimo possível nas restrições. Isso está diretamente relacionado às propriedades de curvatura, que serão demonstradas e explicadas no primeiro capítulo.

A equação da energia total de dobra está relacionada à curva de energia mínima e é melhor aplicada quando estudada pelo Cálculo de Variações, que surgiu no final do século dezessete com Leonhard Euler, Johann e Jacob Bernoulli e outros. A Espiral de Euler foi descoberta estudavam-se estudava problemas relacionados à Elástica, mas, pelo Cálculo de Variações, a Espiral de Euler está relacionada à curva de variação mínima.

¹"One difficulty in the literature is that there are many different ways to approach the elastica"

Em 1694, após seu trabalho *Curvatura Laminae Elasticae*, em que James Bernoulli solucionou o problema da Elástica, ele escreveu outros artigos que poderiam ser discutidos com as novas informações de sua obra, em que várias das soluções propostas consistiam na Espiral de Euler. Em uma de suas notas encontra-se a afirmativa² "Para encontrar a curva em que um peso a dobra em uma linha reta, isto é, constrói-se a curva $a^2 = sR$ ". Neste caso a é uma constante, s é o comprimento de arco e R é o raio de curvatura. Observamos que Bernoulli já tinha conhecimento da construção geométrica da curva e de que a curvatura é proporcional ao comprimento de arco. Apesar disso, segundo Truesdell³, apud R. Levien [10], p.98, "não é esclarecedor, uma vez que não revela que a curva é uma espiral, nem é esta indicada por sua figura."

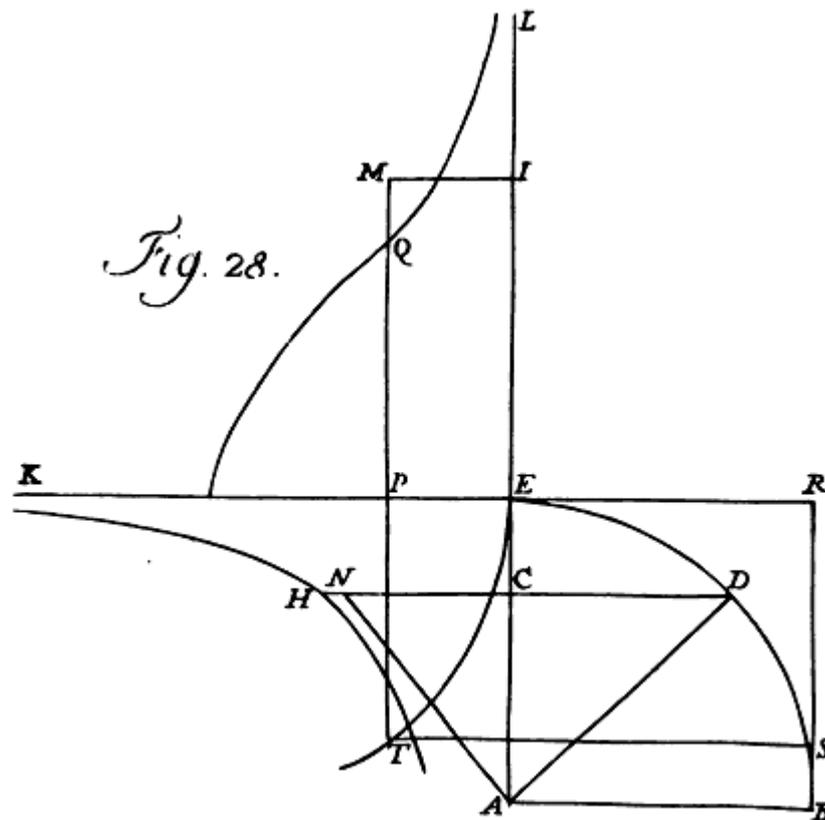


Figura 5.1: Construção de James Bernoulli [10] R. Levien, p.97.

Na Figura 5.1, em que a Espiral de Euler é a curva ET , observamos que ela não se parece com uma espiral. Temos neste caso particular somente uma parte da curva. Levando em consideração as observações de alguns pesquisadores da exatidão ou não sobre essa questão, concluímos que seu trabalho pode ser considerado incompleto, pois mesmo tendo escrito a equação da curva, supõe-se que Bernoulli não tinha conhecimento de sua verdadeira forma,

²"To find the curve which an attached weight bends into a straight line; that is, to construct the curve $a^2 = sR$ ". Bernoulli, apud R. Levien [10], p.96.

³"it is not enlightening, as it does not reveal that the curve is a spiral, nor is this indicated by his figure".

caso contrário a teria desenhado por completo. Além de não haver determinado qualquer valor numérico sobre essa curva e não haver publicado algo que demonstrasse a razão de sua equação estar correta, verificamos que somente algum tempo após a sua morte, quem pode responder a essas perguntas foi Euler, aluno de Johann Bernoulli, irmão mais novo de James Bernoulli.

Segundo R. Levien [10], p.98⁴,

Seu principal pensamento era que a curvatura é aditiva; mais especificamente, a curvatura de uma banda elástica sob força do momento é a sua curvatura num estado sem tensão mais o produto do momento e do coeficiente de elasticidade. Mas ele nunca publicou devidamente este pensamento. Na edição de seu trabalho para publicação, em 1744, seu sobrinho Nicolau I Bernoulli escreveu sobre a equação $s = -a^2/R$, "Eu não encontrei essa identidade estabelecida".

No início de 1744, Leonhard Euler já trabalhava no Cálculo de Variações e fez importantes contribuições na área. Nessa época, Euler começou seus trabalhos relacionados à Espiral que leva o seu nome. A primeira caracterização da curva foi apresentada no *Additamentum 1* (Euler [5], p.276), na seção 51.

51. Por isso, a figura AMB, que a lâmina deve ter, no seu estado natural, pode ser determinado, de modo que com a força P, actuando no sentido AP, pode ser desdobrada em linha recta AMB. Para deixar AM = s, o momento da força que actua no ponto M será igual a Ps, e o raio de curvatura do M será infinito por hipótese, ou $1/R = 0$. Agora, o arco am no seu estado natural é igual a s, e o raio de curvatura m ser tomados como r, porque esta é curva convexa para o eixo AB, a quantidade r deve ser feita negativo. Daí $Ps = Ekk/r$, ou $rs = aa$, que é a equação da curva de AmB. (EULER, 1744, §51 R. Levien [10], p.99)⁵

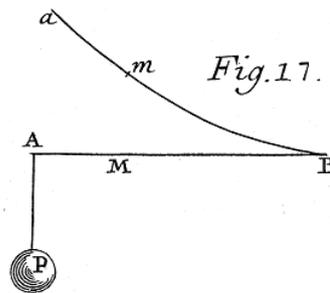


Figura 5.2: Construção de Leonhard Euler em Additamentum 1

A partir da construção de Euler, o problema passa a ser o seguinte: Que forma deve ter amB , caso a extremidade B seja fixa e a extremidade A seja jogada para baixo por uma força P de

⁴His central insight was that curvature is additive; more specifically, the curvature of an elastic band under a moment force is its curvature in an unstressed state plus the product of the moment and a coefficient of elasticity. But he never properly published this insight. In editing his work for publication in 1744, his nephew Nicholas I Bernoulli wrote about the equation $s = -a^2/R$, "I have not found this identity established".

⁵51. Hence the figure amB , which the lamina must have in its natural state, can be determined, so that by the force P , acting in the direction AP , it can be unfolded into the straight line AMB . For letting $AM = s$, the moment of the force acting at the point M will equal Ps , and the radius of curvature at M will be infinite by hypothesis, or $1/R = 0$. Now the arc am in its natural state being equal to s , and the radius of curvature at m being taken as r , because this curve is convex to the axis AB , the quantity r must be made negative. Hence $Ps = Ekk/r$, or $rs = aa$, which is the equation of the curve amB .

modo que a lâmina se achate na forma de uma linha reta AB ? (veja Figura 5.2) Euler encontra a solução diretamente da Teoria de Momentos; o momento de um ponto M qualquer da curva achatada AB é a força P vezes a distância de A até M igual a s .

Notamos que a curvatura da lâmina achatada pelo peso P é igual à curvatura da lâmina original k mais o momento Ps dividido pela constante de rigidez da lâmina Ek^2 (o quão fácil uma lâmina ou uma mola se dobra depende basicamente dessa constante). Como a lâmina achatada é reta, sua curvatura deve ser igual a zero e temos então a seguinte equação:

$$k + \frac{Ps}{Ek^2} = 0 \Rightarrow k = -\frac{Ps}{Ek^2}.$$

Euler finalmente associa todas as forças atribuídas à curva em uma constante. Como vimos no Capítulo 3, as coordenadas cartesianas da curva são

$$x = \int \sin\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) ds, \quad y = \int \cos\left(\frac{s^2}{2a^2}\right) ds.$$

Euler observa que,

À medida que o raio de curvatura diminui continuamente, fica evidente que a curva não é produzida para o infinito por quão grande seja o valor do arco tomado. A curva então estará em forma de uma espiral de modo que quando ela for completada, é enrolada, como se fosse um certo ponto que pode ser chamado de centro. O ponto parece ser muito difícil de descobrir por essa construção. (EULER, apud R. Levien [10], p.100.)

Finalmente, Euler fica curioso por um método que determina o valor do ponto do centro de convergência, concluindo: "...para que alguém pudesse encontrar um método que determinasse, mesmo que aproximadamente, o valor desta integral, no caso em que s é levado ao infinito; este problema não parece ser desprezível ao melhor desempenho dos geômetras".

Adiante, Euler expressa os valores de x e y como séries convergentes, mas nota que se s tomar valor infinito, não seria possível determinar as coordenadas da curva. O método é muito tedioso e também demanda muito tempo para fazer as contas como exemplificado em seguida. Temos uma expansão em séries de Taylor para as integrais em questão, considerando a soma até a derivada décima segunda e considerando $a = 1$, Equação (5.1). Esse método ainda hoje é eficiente caso se deseje determinar valores onde s é relativamente pequeno, como por exemplo no intervalo de 0 a 1, sendo geralmente usado para o cálculo de curvas de transição⁶. Na

⁶A curva de transição é uma curva de raio variável usada para conectar curvas circulares com tangentes, para o propósito de evitar o choque e a guinada devido à mudança de direção instantânea e também a súbita mudança de nível da pista inclinada. O principal objetivo da curva de transição, então, é o de efetuar uma direção suave enquanto o veículo está entrando ou saindo da curva

Figura 5.3, foram calculadas, no programa Sage, derivadas de ordem 200 para se conseguir um esboço suave da curva, o que justifica a escolha de Euler por descobrir um método novo.

$$x = \frac{s^3}{6} - \frac{s^7}{336} + \frac{s^{11}}{42240}, \quad y = s - \frac{s^5}{40} + \frac{s^9}{3456} - \frac{s^{13}}{599040}. \quad (5.1)$$

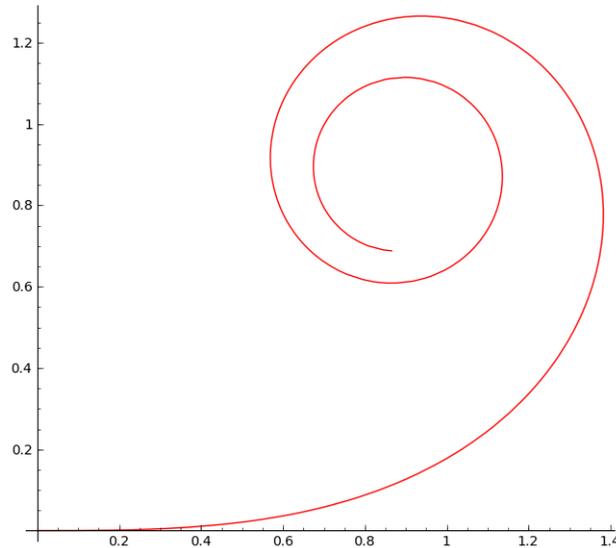


Figura 5.3: Plotagem da Espiral de Euler usando Séries de Taylor.

Aproximadamente 38 anos depois, Euler resolve o problema de convergência da Espiral em um de seus últimos trabalhos⁷. Com uma mudança de variável, obtêm-se:

$$x = \frac{a}{\sqrt{2}} \int \frac{\text{sen}(v)}{\sqrt{v}} dv, \quad y = \frac{a}{\sqrt{2}} \int \frac{\text{cos}(v)}{\sqrt{v}} dv. \quad (5.2)$$

Euler encontra uma forma de determinar os valores das integrais através de sua função Γ que para valores naturais é:

$$\Gamma(z) = \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-t} dt = 1.2.3.4\dots(n-1).$$

No caso de valores fracionários Euler mostra que $\Gamma(\frac{1}{2}) = \sqrt{\pi}$.

Lê-se na obra que $p = f \cos \theta$ e $q = f \text{sen } \theta$ então $\sqrt{pp+qq} = f$, assim, $\frac{p}{q} = \tan \theta$. Euler chega no resultado:

$$\int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-pt} \text{cos}(qt) dt = \frac{\Gamma(z) \text{cos}(z\theta)}{f^z}, \quad \int_0^{\infty} t^{z-1} e^{-pt} \text{sen}(qt) dt = \frac{\Gamma(z) \text{sen}(z\theta)}{f^z}.$$

⁷L. Euler [6], p.337.

Para determinar a coordenada de (5.2) basta considerar $q = 1$, $p = 0$, $z = \frac{1}{2}$ então $\frac{p}{q} = \tan \theta = \infty$, logo concluímos que $\theta = \frac{\pi}{2}$ e $\cos z\theta = \frac{1}{\sqrt{2}} = \sin z\theta$. Que é suficiente para determinamos o valor $\frac{a}{\sqrt{2}} \sqrt{\frac{\pi}{2}}$.

Para adiante, a Espiral de Euler tomou importância pelas descobertas de Fresnel, que relacionava uma particular integral imprópria da curva com a difração da luz. Em 1874, Cornu plotou com precisão a Espiral de Euler, por esse motivo a espiral também é conhecida pelo seu nome.

No final do Século XIX, Ernesto Cesàro nomeou a Espiral de Euler por Clotóide e mostrou várias propriedades interessantes da curva, o que ajudou a popularizar o nome Clotóide. Dentre as propriedades descobertas, podemos citar:

- 1 - A Clotóide é a única curva contemplando a propriedade em que o centro de gravidade de qualquer arco é um centro de semelhança do círculo osculador e as extremidades do arco.
- 2 - Quando uma Clotóide rola em uma linha reta, o lugar geométrico do centro de curvatura correspondente ao ponto de contato é uma hipérbole equilátera assintótica para a linha considerada.

Finalmente, em 1890, Arthur Talbot foi o primeiro a discutir em termos matemáticos o problema de uma curva de transição, que serve para ligar uma reta a uma curva circular de forma segura, sem problemas com a força centrífuga. O interessante de toda essa jornada é que a Espiral de Euler foi descoberta três vezes de formas e problemas diferentes.

A Clotóide é basicamente uma curva com curvatura proporcional ao comprimento de arco da mesma determinado a partir de um ponto fixo, nada diferente das definições de Euler. Em "Lezione de Geometria Intrinseca", Cesàro avalia propriedades de uma grande quantidade de curvas que são expressas pelo comprimento de arco, raio de curvatura e uma constante. Devido a esse trabalho, essa expressão acabou sendo denominada como Equação de Cesàro e a Espiral de Euler ou Clotóide faz parte desse conjunto. Pela Equação de Cesàro, a Clotóide é $p \cdot s = a^2$, sendo p o raio de curvatura da Clotóide num ponto qualquer, s o comprimento de arco compreendido entre esse ponto e outro ponto fixo e a uma constante.

Destacamos aqui a importância dessa espiral que, segundo Alfred Gray [9], p.50, "é uma das mais elegantes de todas as curvas planas".

Concluindo, a Espiral de Euler é de grande importância para a história da matemática e para a sociedade. Tivemos a oportunidade de evidenciar aqui, detalhes e citações de diversos autores, desde como surgiu a Espiral nos trabalhos de Elástica com James Bernoulli e Euler, nas teorias de difração da luz e nos traçados de curvas de transição. Uma história bonita de uma curva bela, que já dura alguns séculos de descobertas.

O entendimento da forma da Espiral de Euler foi bastante auxiliado pelo estudo da Geometria Diferencial. Isto nos faz entender a importância das associações feitas com a taxa de variação de uma curva e a sua curvatura, para a construção de uma boa curva de transição. No caso dos centros de gravidade da espiral de Euler, mais uma vez, a Geometria Diferencial esteve presente no estudo da evoluta que é também importante para o entendimento das propriedades únicas relativas a esses centros.

Referências Bibliográficas

- [1] BOYCE, W. E. e DIPRIMA, R. C. *Equações Diferenciais Elementares e Problemas de Valores de Contorno*. 8ªed., LTC, 2006.
- [2] BUCK, Robert Creighton. *Advanced Calculus*. 2ªed., New York - USA: McGRAW-HILL BOOK Co.Inc., 1965.
- [3] CESÀRO, Ernesto. *Lezione di Geometria Intrinseca*. Napoli - IT: Presso L'autore-Editore, 1896. Versão escaneada, disponível em: <<http://books.google.com/>> Acesso em: 28 nov. 2012
- [4] CHURCHILL, Ruel Vance. *Complex Variables and Applications*. 2ªed., New York - USA: McGRAW-HILL Book Co.Inc., 1960.
- [5] EULER, Leonhard. *E65 – Methodus inveniendi lineas curvas maximi minimive proprietate gaudentes, sive solutio problematis isoperimetrici lattissimo sensu accepti*. Additamentum 1. 1744. disponível em <<http://eulerarchive.maa.org/pages/E065.html>> Acesso em: 28 nov. 2012
- [6] EULER, Leonhard. *E675 – De valoribus integralium a termino variabilis $x = 0$ usque ad $x = \infty$ extensorum*. 1794. disponível em <<http://eulerarchive.maa.org/pages/E675.html>> Acesso em: 28 nov. 2012
- [7] EULER'S SPIRAL. *American Mathematical Monthly*. Volume 25 1918. p276-282, disponível em: <<http://www.glassblower.info/Euler-Spiral/AMM/AMM-1918.HTML>> Acesso em: 28 nov. 2012
- [8] FIGUEIREDO, Djairo Guedes. *Análise I*. v. I, 2ªed., Rio de Janeiro - RJ: LTC - Guanabara, 1996.
- [9] GRAY, Alfred. *Modern Differential Geometry of Curves and Surfaces*. (Studies in advanced mathematics), Florida - USA: CRC Press, Inc., 1993.
- [10] LEVIEN, Raphael Linus. *From Spiral to Spline: Optimal Techniques in Interactive Curve Design*. 2009. 191f. Dissertação (Phd Thesis em techniques for interactive curve design) - University of California, Berkley - USA. PDF disponível em: <<http://www.levien.com/phd/phd.html>> Acesso em: 28 nov. 2012.
- [11] M. R. B. *Nouvelles annales de mathematiques*, 4ª serie, v.5, pp. 570-573. 1905. PDF disponível em: <http://www.numdam.org/item?id=NAM_1905_4_5__564_1> Acesso em: 28 nov. 2012.
- [12] PEREIRA, Liliana I. M. S. *Uma Abordagem Interactiva ao Tratado das Curvas Especiais Notáveis de Gomes Teixeira*. 2007. 179f. Dissertação (Tese de Mestrado em Ensino da Matemática) - Faculdade de Ciências da Universidade do Porto - PT. PDF disponível em: <http://www.fc.up.pt/fcup/contactos/teses/t_050370108.pdf> Acesso em: 28 nov. 2012.

- [13] POISSON, Siméon Denis. *Traité de Mécanique*. 1833. p.121-122. Boston Public Library (2010). PDF disponível em: <<http://www.archive.org/details/traitemciani01pois>> Acesso em: 09 dez. 2012.
- [14] RUTTER, John W. *Geometry of Curves*. FLORIDA - USA: Chapman and Hall/CRC, 2000.
- [15] SOUZA, Cláudio Santos de. *Construções geométricas*. v.2, 2ªed., Rio de Janeiro: Fundação CECIERJ, 2009, p49-66. PDF disponível em: <<http://www.ebah.com.br/content/ABAAABI5sAD/aula16-construcoes-geometricas>> Acesso em: 28 nov. 2012.
- [16] STEWART, James. *Cálculo*. v. I e II, 6ªed., São Paulo - SP: CENGAGE Learning, 2010. Trad.Tec. Antônio Carlos Moretti e Antônio Carlos Gille Martins.
- [17] TEIXEIRA, Fernando Gomes. *Traité des courbes spéciales remarquables planes et gauches: ouvrage couronné et publié par l'Académie Royale des Sciences de Madrid*. Chelsea Pub. Co., 1908. PDF disponível em: <<http://books.google.com.br/books?id=p5-Sxyj0O2sC>> Acesso em: 28 nov. 2012.
- [18] TENENBLAT, Ketí. *Introdução à Geometria Diferencial*. 2ªed., São Paulo - SP: Editora Edgard Blucher Ltda, 2008.
- [19] <<http://mathworld.wolfram.com/CornuSpiral.html>>. Acesso em: 28 nov. 2012.
- [20] <<http://mathworld.wolfram.com/FresnellIntegrals.html>>. Acesso em: 28 nov. 2012.
- [21] <<http://www.sagemath.org>>. Acesso em: 28 nov. 2012.
- [22] <<http://www.wolfram.com/mathematica/>>. Acesso em: 28 nov. 2012.
- [23] <<http://www.geogebra.org/cms/>>. Acesso em: 28 nov. 2012.