Universidade Federal de Minas Gerais

Crescimento polinomial das codimensões e $*$-codimensões

Amanda da Costa Vasconcelos

Orientadora: Viviane Ribeiro Tomaz da Silva

Belo Horizonte
2013

Amanda da Costa Vasconcelos

Crescimento polinomial das codimensões e $*$-codimensões

Dissertação submetida à banca examinadora, designada pelo programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientadora: Viviane Ribeiro Tomaz da Silva

Belo Horizonte
2013

Agradecimentos

A Deus, por ser meu melhor amigo e por me permitir sentir Sua presença e amor dia após dia. Muito obrigada, Senhor, por ser a minha fortaleza e motivo da minha alegria.

À professora Viviane Ribeiro Tomaz da Silva, que com enorme dedicação e paciência me orientou durante o mestrado, e que com o tempo de convivência se tornou um grande exemplo de educadora, pesquisadora e ser humano.

Às professoras da banca, Irina Sviridova e Ana Cristina Vieira, pelo cuidado na leitura da dissertação e pelas importantes observações e correções.

Aos professores e funcionário do Departamento de Matemática da UFMG que certamente contribuíram para a minha formação.

Aos amigos da Matemática, Luciana, Willian, Natália, Silvia, Larissa, Gabriela e Marina, pelos muitos momentos juntos.

Aos amigos do EJC, que quando estão comigo me fazem sentir mais próxima do céu.

Ao Erick, pelo companheirismo, compreensão, paciência e torcida.

Aos meus pais, pelo amor incondicional, dedicação e por todos os valores transmitidos. Obrigada por sempre me incentivarem nos estudos e tanto se esfoçarem por esta vitória.

Às minha irmãs pelo carinho, apoio, amizade e por sempre acreditarem em mim.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

A todos o meu muito obrigada!

Resumo

Seja F um corpo de característica zero. Dizemos que a sequência de codimensões de uma álgebra A é polinomialmente limitada se existem constantes α e t tais que $c_n(A) \leq \alpha n^t$ para todo $n \geq 1$. Nesta dissertação, faremos um estudo do crescimento polinomial das codimensões e $*$-codimensões, baseado nos artigos de Giambruno - Zaicev e de Giambruno - Mishchenko sobre o assunto. Nosso enfoque principal se dará em uma interessante descrição das álgebras (e álgebras com involução $*$, respectivamente) com crescimento polinomial das codimensões ($*$-codimensões, respectivamente) na linguagem dos cocaracteres ($*$-cocaracteres, respectivamente). Para isto, exploraremos as teorias de representações do grupo simétrico S_n e do grupo hiperoctaedral $\mathbb{Z}_2 \wr S_n$. Além disso, veremos que, sob determinadas hipóteses, as álgebras com crescimento polinomial das codimensões podem ser decompostas em apropriadas subálgebras de dimensões finitas.

Abstract

Let F be a field of characteristic zero. We say that the sequence of codimensions of an algebra A is polynomially bounded if there exist constants α and t such that $c_n(A) \leq \alpha n^t$ for all $n \geq 1$. In this dissertation, we will study the polynomial growth of codimensions and $*$-codimensions, based on the articles of Giambruno - Zaicev and of Giambruno - Mishchenko on the subject. Our main goal is to give an interesting description of the algebras (and algebras with involution $*$, respectively) with polynomial growth of codimensions ($*$-codimensions, respectively) in the language of cocharacters ($*$-cocharacters, respectively). For this, we will exploit the theories of representations of the symmetric group S_n and of the hyperoctahedral group $\mathbb{Z}_2 \wr S_n$. Furthermore, we will see that, under some hypotheses, the algebras with polynomial growth of codimensions can be decomposed into appropriate finite-dimensional subalgebras.

Sumário

Introdução

Sejam F um corpo de característica zero e A uma F-álgebra associativa. Considere a álgebra livre associativa unitária $F\langle X\rangle$, onde $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ é um conjunto de variáveis não comutativas. Um polinômio $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$ é uma identidade polinomial de A se f se anula sob qualquer substituição de elementos de A. Se existe um polinômio $f \neq 0$ que é uma identidade polinomial de A então dizemos que A é uma álgebra com identidade polinomial, ou simplesmente uma PI-álgebra. Por exemplo, se C é uma álgebra comutativa então C é uma PI-álgebra, pois o polinômio $[x_1,x_2] := x_1x_2 - x_2x_1$ se anula para qualquer substituição de elementos de C.

O estudo de PI-álgebras, também conhecido como PI-teoria, teve início com pesquisas realizadas por Dehn [4], Wagner [39] e Hall [20], que foram publicadas em 1922, 1936 e 1943, respectivamente. Alguns anos depois, em 1948, a PI-teoria começou a ser estudada mais profundamente por Kaplansky [23] em um trabalho que trata da estrutura das PI-álgebras.

Mas, em 1950, o estudo das PI-álgebras ganhou uma nova direção, depois de um trabalho publicado por Amitsur e Levitzki [1]. Neste artigo podemos encontrar a prova, por meio de argumentos combinatórios, de que o polinômio standard de grau $2n$ é uma identidade polinomial da álgebra de matrizes $M_n(F)$. Além disso, os autores ainda provaram que esta é a identidade de menor grau de $M_n(F)$. Depois disso, várias outras demonstrações deste resultado foram dadas por diferentes algebristas. Daí em diante, vários matemáticos têm trabalhado buscando descrever as identidades polinomiais de determinadas álgebras.

Denote por $Id(A)$ o conjunto formado pelas identidades polinomiais de uma álgebra A. Temos que $Id(A)$ é um ideal de $F\langle X\rangle$ e além disso é fechado sob todos os endomorfismo de $F\langle X\rangle$, sendo então um T-ideal. Portanto, a fim de descrever completamente $Id(A)$ é suficiente determinar seu conjunto gerador como T-ideal. Daí surge a seguinte pergunta: tal conjunto é finitamente gerado? Em 1950, Specht conjecturou que, quando F é um corpo de característica zero, todo T-ideal é gerado, como T-ideal, por um conjunto finito. Mas este resultado só foi demonstrado em 1987 por Kemer ([26], [27]) e hoje conhecemos o conjunto das identidades de importantes PI-álgebras, dentre elas as álgebras comutativas, a álgebra de Grassmann de dimensão infinita (que denotaremos por E), a álgebra $M_2(F)$ das matrizes 2×2 com entradas em F e a subálgebra $UT_2(F)$ das matrizes triangulares superiores.

Porém, descrever um conjunto finito de geradores para o conjunto das identidades polinomiais não é uma tarefa fácil. Por exemplo, o T-ideal $Id(M_n(F))$ foi completamente determinado apenas no caso $n = 2$ ([35], [5]). Para $n \geq 3$, o problema ainda está em aberto. Desta dificuldade em descrever o conjunto das identidades polinomiais de uma álgebra surge a necessidade de analisar $Id(A)$ por outros caminhos. Um destes caminhos foi dado por meio de uma função que mede o crescimento das identidades do T-ideal. Esta ideia foi introduzida por Regev [36] em 1972, e se tornou um grande objeto de estudo em PI-teoria.

Mais precisamente, seja P_n o F-espaço vetorial dos polinômios multilineares nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$. Ou seja

$$P_n = span_F\{x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}.$$

Dada uma F-álgebra A, considere

$$P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap Id(A)}.$$

A dimensão de $P_n(A)$ sobre F é denominada n-ésima codimensão de A e denotada por $c_n(A)$.

A sequência de codimensões foi uma alternativa proposta por Regev para tentar uma aproximação da descrição do T-ideal das identidades de uma álgebra. Existem muitos resultados provados a respeito da sequência de codimensões de importantes PI-álgebras. Por exemplo, Krakowski e Regev [29] provaram que $c_n(E) = 2^{n-1}$ e Malcev [33] provou que $c_n(UT_2(F)) = 2^{n-1}(n-2) + 2$.

Também em 1972, Regev [36] provou que, para qualquer PI-álgebra A, $c_n(A)$ é exponencialmente limitada, isto é, existem constantes $a, \alpha > 0$ tais que $c_n(A) \leq a\alpha^n$ para todo n. Daí em diante surgiu o interesse de alguns matemáticos em estudar casos particulares de limitação da sequência $\{c_n(A)\}_{n\geq 1}$.

Um caso que se destaca é o estudo de álgebras com sequências de codimensões polinomialmente limitadas, principal objeto de estudo desta dissertação. Dizer que a sequência $\{c_n(A)\}_{\geq 1}$ é polinomialmente limitada significa que existem constantes a, t tais que, para todo n, $c_n(A) \leq an^t$. Se tratando de tais álgebras, o matemático Kemer provou uma série de resultados. Em 1978, Kemer [24] deu uma caracterização dos T-ideais de tais álgebras na linguagem da teoria de representações do grupo simétrico S_n. No ano seguinte, o referido autor [25] fez uma nova caracterização utilizando as álgebras E e $UT_2(F)$, a saber: $\{c_n(A)\}_{n\geq 1}$ é polinomialmente limitada se, e somente se, $Id(A) \nsubseteq Id(E)$ e $Id(A) \nsubseteq Id(UT_2(F))$. Já em 1991, Kemer [28] provou um resultado que nos permite reduzir o estudo das álgebras com sequências das codimensões polinomialmente limitadas àquelas com dimensão finita. Mais precisamente, se $\{c_n(A)\}_{n\geq 1}$ é polinomialmente limitada então $Id(A) = Id(B)$ para uma apropriada álgebra B de dimensão finita.

Partindo de um enfoque diferente, Giambruno e Zaicev [17], em 2000, fizeram uma interessante caracterização de álgebras com crescimento polinomial das codimensões, utilizando a decomposição do n-ésimo cocaracter em S_n-caracteres irredutíveis. Lembrando que o grupo simétrico S_n age sobre P_n fazendo com que $P_n(A)$ se torne um S_n-módulo, o S_n-caracter de $P_n(A)$ é chamado n-ésimo cocaracter de A e é denotado por $\chi_n(A)$. Como os S_n-caracteres irredutíveis são indexados por partições de n então podemos escrever

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda,$$

onde χ_λ é o S_n-caracter associado à partição λ e m_λ é a respectiva multiplicidade. Em [17], os autores mostraram que o n-ésimo cocaracter das álgebras com crescimento polinomial das codimensões tem uma decomposição apropriada. Mais precisamente:

Teorema 1. *Sejam A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo F de característica zero e $J(A)$ seu radical de Jacobson. Então $\{c_n(A)\}_{n\geq 1}$ é polinomialmente limitada se, e somente se,*

$$\chi_n(A) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ n-\lambda_1 < q}} m_\lambda \chi_\lambda$$

onde $J(A)^q = \{0\}$.

Note que, embora o resultado acima tenha como hipótese o fato de A ter dimensão finita, utilizando o resultado supracitado de Kemer, obtemos uma caracterização que independe da finitude da dimensão de A.

A fim de estudar o Teorema 1, utilizamos uma série de resultados e o conceito de PI-expoente de uma PI-álgebra, o qual é definido como $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}$ (caso o limite exista). Como exemplo temos que $\exp(E) = \exp(UT_2(F)) = 2$. Na década de 90, Giambruno e Zaicev ([15], [16]) mostraram que o PI-expoente de qualquer PI-álgebra associativa sobre um corpo de característica zero existe e é um inteiro não negativo. Vale ressaltar que as álgebras com crescimento polinomial das codimensões são exatamente aquelas cujo o PI-expoente é menor ou igual a 1. Em 2000, Giambruno e Zaicev [18] classificaram as álgebras de PI-expoente 2.

Em um outro contexto, podemos nos perguntar se também é possível obter uma caracterização das álgebras com involução com crescimento polinomial das $*$-codimensões. Para responder a esta pergunta, considere A uma F-álgebra associativa com involução $*$. Se $\{x_1, x_2, \ldots\}$ é um conjunto de variáveis, denotamos por $F\langle X,*\rangle$ a álgebra livre associativa unitária gerada por $\{x_1,x_1^*,x_2,x_2^*,\ldots\}$. Dizemos que um $*$-polinômio $f = f(x_1,x_1^*,\ldots,x_n,x_n^*) \in F\langle X,*\rangle$ é uma $*$-identidade de $(A,*)$ se $f(a_1,a_1^*,\ldots,a_n,a_n^*) = 0$ para quaisquer $a_1,\ldots,a_n \in A$. Por exemplo, $f(x_1,x_1^*) = [x_1,x_1^*]$ é uma $*$-identidade da álgebra comutativa $G_2 = F \oplus F$, munida da involução $(a,b)^* = (b,a)$. Analogamente ao caso ordinário, o conjunto $Id(A,*)$ formado por todas as $*$-identidades de A é um T_*-ideal. Isto significa que $Id(A,*)$ é um ideal de $F\langle X,*\rangle$ que é fechado sob todos os endomorfismo de $F\langle X,*\rangle$ que comutam com a involução $*$.

Se A é uma álgebra com involução $*$, considere

$$P_n(A,*) = \frac{P_n(*)}{P_n(*) \cap Id(A,*)},$$

onde $P_n(*) = span_F\{x_{\sigma(1)}^{a_1}\cdots x_{\sigma(n)}^{a_n} \mid \sigma \in S_n, a_i \in \{1,*\}\}$ é o espaço vetorial dos $*$-polinômios multilineares nas variáveis $x_1,x_1^*,\ldots,x_n,x_n^*$. A dimensão de $P_n(A,*)$ é chamada n-ésima $*$-codimensão de A e denotada por $c_n(A,*)$. O grupo hiperoctaedral $\mathbb{Z}_2 \wr S_n$ age sobre $P_n(*)$ e portanto $P_n(A,*)$ se torna um $\mathbb{Z}_2 \wr S_n$-módulo. O $\mathbb{Z}_2 \wr S_n$-caracter de $P_n(A,*)$ é denotado por $\chi_n(A,*)$ e é chamado n-ésimo $*$-cocaracter de A. Lembrando que os $\mathbb{Z}_2 \wr S_n$-caracteres irredutíveis são indexados por pares de partições (λ,μ), tais que $\lambda \vdash r$ e $\mu \vdash n-r$, $r = 0,\ldots,n$, então o n-ésimo $*$-cocaracter de A pode ser escrito como

$$\chi_n(A,*) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{\substack{\lambda\vdash r\\ \mu\vdash n-r}} \bar{m}_{\lambda,\mu}\chi_{\lambda,\mu}.$$

Assim como no caso ordinário, a sequência das $*$-codimensões é exponencialmente limitada. Este resultado foi obtido por Giambruno e Regev [14] em 1985. Mais tarde, em 1996, Berele [2] exibiu um limite exponencial explícito para a sequência $\{c_n(A,*)\}_{n\geq 1}$. Podemos assim fazer uma interessante análise quando a sequência $\{c_n(A,*)\}_{n\geq 1}$ é polinomialmente limitada.

Em 2000, Giambruno e Zaicev classificaram as álgebras de dimensão finita com involução cujas sequências $\{c_n(A,*)\}$ são polinomialmente limitadas. Analogamente ao caso ordinário, esta caracterização foi feita a partir da decomposição do n-ésimo $*$-cocaracter. Mais precisamente, os autores provaram o seguinte resultado:

Teorema 2. *Sejam F um corpo de característica zero e A uma F-álgebra de dimensão finita com involução $*$. Então a sequência de $*$-codimensões $\{c_n(A,*)\}_{n\geq 1}$ é polinomialmente limitada se, e somente se,*

$$\chi_n(A,*) = \sum_{\substack{|\lambda|+|\mu|=n\\ n-\lambda_1<q}} m_{\lambda,\mu}\chi_{\lambda,\mu},$$

onde $J(A)^q = \{0\}$.

Mas também é possível obter uma classificação geral que independa do fato da álgebra ter dimensão finita. Neste sentido, Giambruno e Mishchenko [10] publicaram em 2001 o seguinte resultado:

Teorema 3. *Seja A uma álgebra com involução $*$ sobre um corpo de característica zero. Então $c_n(A,*) \leq \alpha n^t$ para certos α e t se, e somente se, existe uma constante δ tal que*

$$\chi_n(A,*) = \sum_{|\lambda|+|\mu|=n} m_{\lambda,\mu}\chi_{\lambda,\mu}$$

e $m_{\lambda,\mu} = 0$ sempre que ou $|\lambda| - \lambda_1 > \delta$ ou $|\mu| > \delta$.

Os Teoremas 1, 2 e 3 estão entre os principais resultados trabalhados nesta dissertação. Vale ressaltar que os mesmos, além de tratarem de resultados importantes em PI-teoria e relacionados entre si, apresentam demonstrações que envolvem técnicas diferentes e muito interessantes. É importante também mencionar que a compreensão de tais demonstrações requer o estudo de diversos conceitos e resultados importantes da teoria de álgebras, envolvendo semissimplicidade, teoremas de estrutura, teoria geral de representações e caracteres, teoria de Young, PI-álgebras e PI-expoente. Muitos destes resultados serão abordados ao longo desta dissertação, que se divide em seis capítulos.

O primeiro capítulo é destinado a uma séries de resultados e definições básicas. Definimos semissimplicidade em módulos e anéis, caracteres induzidos e apresentamos importantes teoremas. Dentre eles estão os Teoremas de Wedderburn-Artin, de Maschke e de Wedderburn-Malcev.

No segundo capítulo, definimos PI-álgebras, a álgebra de Grassmann, polinômios multilineares, polinômios alternados e, em particular, o polinômio standard. Definimos também a n-ésima codimensão de uma álgebra, o PI-expoente de uma PI-álgebra e apresentamos alguns resultados que caracterizam as álgebras com sequências de codimensões polinomialmente limitadas a partir do PI-expoente.

No terceiro capítulo, apresentamos a teoria de Young sobre as representações de S_n, vemos como o grupo simétrico age sobre o conjunto dos polinômios multilineares e definimos o n-ésimo cocaracter de uma álgebra. Por fim vemos como funciona a interessante regra de Littlewood-Richardson.

Já no quarto capítulo, definimos involução e apresentamos alguns resultados sobre álgebras de dimensão finita com involução, dentre eles uma generalização do Teorema de Wedderburn-Malcev. Definimos $*$-identidades, o T_*-ideal de uma álgebra e também a n-ésima $*$-codimensão. Na última seção, vemos como os grupos hiperoctaedral e $S_r \times S_{n-r}$ agem sobre conjuntos de $*$-polinômios multilineares. A partir disto, definimos o n-ésimo $*$-cocaracter e o $(r,n-r)$-ésimo $*$-cocaracter de uma álgebra com involução.

Duas caracterizações para as álgebras com crescimento polinomial das codimensões são vistas no quinto capítulo. A primeira delas envolve a decomposição de Wedderburn-Malcev de uma álgebra de dimensão finita. A segunda caracterização é feita a partir da decomposição do n-ésimo cocaracter de uma álgebra de dimensão finita, enunciada no Teorema 1. Neste mesmo capítulo apresentamos um resultado similar à segunda caracterização, o qual vale em geral para álgebras sobre corpos de característica zero.

No sexto, e último capítulo, apresentamos a demonstração do Teorema 2, utilizando técnicas semelhantes às do capítulo anterior. Por fim, por meio de técnicas diferentes, apresentamos a demonstração do Teorema 3.

Terminamos o trabalho fazendo alguns comentários gerais a respeito das álgebras com crescimento polinomial das codimensões e $*$-codimensões, e mencionando algumas classificações de outros casos particulares, dentre os quais se encontram os de superálgebras.

Capítulo 1

Conceitos Básicos

Ao longo deste capítulo vamos enunciar alguns resultados gerais que serão utilizados nos demais capítulos. Sempre escreveremos R para denotar um anel com unidade e F para denotar um corpo.

1.1 Módulos e F-álgebras

Vamos apresentar nesta seção o conceito de módulos e F-álgebras. Veremos também vários exemplos.

Definição 1.1.1. *Um grupo abeliano aditivo M dotado de uma multiplicação por escalar*

$$\begin{array}{rcl} R \times M & \rightarrow & M \\ (r,m) & \mapsto & r \cdot m \end{array}$$

*é chamado um R-**módulo (à esquerda)** se, para quaisquer $r_1, r_2 \in R$ e $m_1, m_2 \in M$, as seguintes condições são satisfeitas:*

i) $1 \cdot m_1 = m_1$;

ii) $(r_1 r_2) \cdot m_1 = r_1 \cdot (r_2 \cdot m_1)$;

iii) $(r_1 + r_2) \cdot m_1 = r_1 \cdot m_1 + r_2 \cdot m_1$;

iv) $r_1 \cdot (m_1 + m_2) = r_1 \cdot m_1 + r_1 \cdot m_2$.

A fim de simplificar a notação, se $r \in R$ e $m \in M$, vamos escrever apenas rm para denotar a operação $r \cdot m$. De maneira análoga podemos definir um R-**módulo à direita**. No decorrer deste trabalho, a menos de menção ao contrário, escreveremos simplesmente R-**módulo** sempre que trabalharmos com R-módulo à esquerda.

Definição 1.1.2. *Sejam M e N módulos sobre um anel R. Uma função $f : M \to N$ é um **isomorfismo de R-módulos** se f é uma bijeção e se para quaisquer m_1, $m_2 \in M$ e $r \in R$ vale*

$$f(m_1 + m_2) = f(m_1) + f(m_2) \quad e \quad f(rm_1) = rf(m_1).$$

Definição 1.1.3. *Sejam M um R-módulo e N um subconjunto de M. Se N, com a operação induzida de M, ainda for um R-módulo então dizemos que N é um **R-submódulo de** M.*

Chamaremos os submódulos M e $\{0\}$ de um módulo M de **submódulos triviais**.

Exemplo 1.1.4. *Considere o anel dos inteiros $\mathbb{Z}$ e seja G um grupo abeliano aditivo. Defina*

$$zg = \underbrace{g + \cdots + g}_{z \ vezes} \quad se \quad z \geq 0$$

e

$$zg = \underbrace{(-g) + \cdots + (-g)}_{-z \ vezes} \quad se \quad z < 0.$$

Com este produto, o grupo G é um $\mathbb{Z}$-módulo. Além disso, os subgrupos de G são os $\mathbb{Z}$-submódulos de G.

Definição 1.1.5. *Sejam G um grupo (não necessariamente finito) e R um anel. Considere o conjunto RG formado por todas as combinações lineares formais do tipo*

$$\alpha = \sum_{g \in G} a_g g$$

onde $a_g \in R$ e $a_g \neq 0$ apenas para um número finito de elementos de G. Dados $\alpha = \sum_{g \in G} a_g g$ e $\beta = \sum_{h \in G} b_h h$ em RG, defina as seguintes operações:

$$\alpha + \beta = \sum_{g \in G} (a_g + b_g) g,$$

$$\alpha\beta = \sum_{g,h \in G} a_g b_h gh.$$

*Com estas operações, RG se torna um anel com unidade chamado **anel de grupo de G sobre R**.*

Se $\lambda \in R$ definimos também outra operação dada por

$$\lambda\alpha = \sum_{g \in G} (\lambda a_g) g$$

e assim RG se torna um R-módulo.

Exemplo 1.1.6. *Se R é um anel, considere*

$$\begin{array}{rcl} R \times R & \rightarrow & R \\ (r,s) & \mapsto & rs. \end{array}$$

Munido desta operação, R é um R-módulo. É fácil verificar que os R-submódulos de R são os ideais à esquerda de R.

O exemplo acima nos mostra que todo anel R pode ser visto como um R-módulo. Além disso, se $R = F$ é um corpo, então a noção de R-módulo coincide com a noção de espaço vetorial sobre F.

Se M_1 e M_2 são submódulos de um R-módulo M, definimos a **soma** de M_1 e M_2 como

$$M_1 + M_2 = \{m_1 + m_2 \mid m_1 \in M_1, m_2 \in M_2\}.$$

A soma assim definida, também é um submódulo de M. Podemos agora definir soma direta de submódulos.

Definição 1.1.7. *Sejam $M_1, \ldots, M_k$ submódulos de um R-módulo M. Escrevemos*

$$M = M_1 \dot{+} \cdots \dot{+} M_k$$

*e dizemos que M é **soma direta** de $M_1, \ldots, M_k$ (como módulo) se*

i) $M = M_1 + \cdots + M_k$;

ii) $m_1 + \cdots + m_k = 0$, $m_i \in M_i$, *implica* $m_i = 0$ *para* $i = 1, \ldots, k$.

Definição 1.1.8. *Seja M um R-módulo. Dizemos que M é um **módulo simples** ou **irredutível** se $M \neq \{0\}$ e os únicos submódulos de M são os submódulos triviais. Por outro lado, se $M \neq \{0\}$ possuir submódulo não trivial, então dizemos que M é **redutível**.*

Exemplo 1.1.9. *Se p é primo então o anel $\mathbb{Z}_p$ é um $\mathbb{Z}_p$-módulo simples. De fato, seus únicos ideais à esquerda são $\{0\}$ e $\mathbb{Z}_p$.*

Definição 1.1.10. *Seja F um corpo. Um espaço vetorial A sobre F é chamado uma F-**álgebra** associativa (ou apenas álgebra) se A é um anel e, para quaisquer $a, b \in A$ e $\alpha \in F$, tivermos*

$$\alpha(a \cdot b) = (\alpha a) \cdot b = a \cdot (\alpha b)$$

onde $\cdot$ denota a operação de multiplicação no anel A.

*Se B é um subconjunto de A que ainda é uma F-álgebra então dizemos que B é uma F-**subálgebra** de A.*

Se A for um anel comutativo dizemos que A é uma **F-álgebra comutativa.** Definimos a **dimensão** de uma álgebra A como a dimensão do espaço vetorial A sobre F.

Vejamos alguns exemplos de álgebras.

Exemplo 1.1.11. *Denote por $M_n(F)$ o conjunto das matrizes $n \times n$ com entradas em F munido das operações usuais. É fácil ver que $M_n(F)$ é, para $n \geq 2$, uma F-álgebra não comutativa de dimensão n^2.*

Exemplo 1.1.12. *Seja $UT_n(F)$ o conjunto das matrizes triangulares superiores com entradas em F e com operações induzidas de $M_n(F)$. Então $UT_n(F)$ é uma F-álgebra não comutativa de dimensão $\frac{(n+1)n}{2}$, para $n \geq 2$.*

Definição 1.1.13. *Sejam $A_1, \ldots, A_k$ subálgebras de uma F-álgebra A. Escrevemos*

$$A = A_1 \oplus \cdots \oplus A_k$$

*e dizemos que A é **soma direta** de $A_1, \ldots, A_k$ (como álgebra) se*

i) $A = A_1 + \cdots + A_k$;

ii) $a_1 + \cdots + a_k = 0$, $a_i \in A_i$, *implica* $a_i = 0$ *para* $i = 1, \ldots, k$;

iii) $A_iA_j = \{0\}$ *para* $i,j = 1, \ldots, k$ *e* $i \neq j$.

1.2 Produto Tensorial

Vamos ver nesta seção a definição e alguns resultados sobre produto tensorial de R-módulos. Veremos também como este produto funciona em F-álgebras.

Definição 1.2.1. *Sejam A e B R-módulos. Considere o módulo livre*

$$L = span_R\{(a,b) \mid a \in A, b \in B\},$$

e J o submódulo de L gerado por elementos da forma

$$\begin{aligned}
&(a + a',b) - (a,b) - (a',b)\\
&(a,b + b') - (a,b) - (a,b')\\
&(ra,b) - r(a,b)\\
&(a,rb) - r(a,b)
\end{aligned}$$

*onde $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ e $r \in R$. O grupo quociente L/J é chamado **produto tensorial** de A e B e denotado por $A \otimes_R B$. A classe $(a,b) + J$ é denotada por $a \otimes b$.*

Note que um elemento típico de $A \otimes_R B$ é da forma

$$\sum_i r_i(a_i \otimes b_i)$$

onde $a_i \in A$, $b_i \in B$ e $r_i \in R$. Além disso, da definição de produto tensorial, se $a, a' \in A$, $b, b' \in B$ e $r \in R$ então as seguintes propriedades são satisfeitas:

i) $(a + a') \otimes b = a \otimes b + a' \otimes b$

ii) $a \otimes (b + b') = a \otimes b + a \otimes b'$

iii) $r(a \otimes b) = (ra) \otimes b = a \otimes (rb)$.

Se F é um corpo e A e B são F-álgebras então a multiplicação

$$(a \otimes b)(a' \otimes b') = (aa') \otimes (bb')$$

está bem definida e isso faz com que $A \otimes_F B$ se torne uma F-álgebra. E ainda, no caso em que K é uma extensão de F temos o seguinte resultado:

Proposição 1.2.2 ([34], Proposição 2.10.10)**.** *Se K é uma extensão de F e A é uma F-álgebra então $A \otimes_F K$ é uma K-álgebra.*

A proposição acima é muito útil, pois muitas vezes precisamos trabalhar sobre corpos algebricamente fechados. Consideramos então $\bar{F}$ o fecho algébrico de F e temos que $A \otimes_F \bar{F}$ é uma álgebra sobre o corpo algebricamente fechado $\bar{F}$. Além disso, o subconjunto $A \otimes 1$ é uma subálgebra de $A \otimes_F \bar{F}$ isomorfa a A.

Para falar em corpos de decomposição de um grupo vejamos a seguinte definição:

Definição 1.2.3. *Sejam A uma F-álgebra e M um A-módulo irredutível. Dizemos que M é **absolutamente irredutível** se $M \otimes_F K$ é um $A \otimes_F K$-módulo irredutível para toda extensão K de F.*

Definição 1.2.4. *Seja G um grupo finito. Dizemos que F é um **corpo de decomposição de G** se todo FG-módulo irredutível for absolutamente irredutível.*

Vale ressaltar que todo grupo finito possui um corpo de decomposição. De fato, se G é um grupo finito então existe um corpo de números algébricos que é corpo de decomposição de G (veja o Teorema 29.16 de [3]).

Observação 1.2.5. *No caso do grupo simétrico S_n todo corpo de característica zero é corpo de decomposição de S_n (veja §29 de [3]).*

Em relação à observação acima, veremos no final da próxima seção que, em geral, isto não acontece para qualquer grupo.

1.3 Semissimplicidade

Esta seção é dedicada a semissimplicidade de módulos e anéis. Apresentaremos também alguns teoremas importantes. Dentre eles estão os conhecidos Teorema de Wedderburn-Artin e o Teorema de Maschke.

Definição 1.3.1. *Seja M um R-módulo. Dizemos que M é um **módulo semissimples** se, para todo submódulo N de M, existir um submódulo N' tal que $M = N \dotplus N'$.*

Como consequência da definição acima, todo módulo simples é semissimples. Mas a recíproca não é verdadeira. Veremos isso mais adiante através de um exemplo.

Podemos estender a noção de semissimplicidade de módulos para anéis:

Definição 1.3.2. *Seja R um anel. Dizemos que R é **semissimples** se o R-módulo R for semissimples.*

O próximo teorema relaciona a semissimplicidade de R com a semissimplicidade dos R-módulos. Antes de enunciá-lo, precisaremos da seguinte definição:

Definição 1.3.3.

*i) Seja $I \neq \{0\}$ um ideal à esquerda de R. Se, para qualquer ideal J à esquerda de R tal que $\{0\} \subseteq J \subseteq I$, tivermos $J = \{0\}$ ou $J = I$, dizemos que I é um **ideal à esquerda minimal** de R;*

*ii) Seja $I \neq R$ um ideal à esquerda de R. Se, para qualquer ideal L à esquerda de R tal que $I \subseteq L \subseteq R$, tivermos $L = I$ ou $L = R$, então dizemos que I é um **ideal à esquerda maximal** de R.*

Teorema 1.3.4 ([34], Teorema 2.5.7)**.** *Dado um anel R, as seguintes condições são equivalentes:*

i) Todo R-módulo é semissimples;

ii) R é um anel semissimples;

iii) R é soma direta de um número finito de ideais à esquerda minimais.

Exemplo 1.3.5. *Considere $M_n(D)$ o anel de matrizes $n \times n$ com entradas em D, onde D é um anel de divisão. Defina*

$$L_1 = \begin{bmatrix} D & 0 & \cdots & 0 \\ D & 0 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D & 0 & \cdots & 0 \end{bmatrix}, \ldots, L_n = \begin{bmatrix} 0 & 0 & \cdots & D \\ 0 & 0 & \cdots & D \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & D \end{bmatrix}.$$

Pode-se verificar que L_i é um ideal à esquerda minimal de $M_n(D)$, para $i = 1, \ldots, n$. Além disso, é fácil ver que

$$M_n(D) = L_1 \dotplus \cdots \dotplus L_n.$$

Pelo teorema anterior, $M_n(D)$ é um anel semissimples. Porém, $M_n(D)$ não é um $M_n(D)$-módulo simples. Temos então um exemplo de que módulo semissimples não implica em módulo simples.

Se R é um anel semissimples, o Teorema 1.3.4 nos diz que podemos escrever R como uma soma direta de ideais à esquerda minimais. Reordenando, se necessário, podemos agrupar os ideais isomorfos:

$$R = \underbrace{L_{11} \dotplus \cdots \dotplus L_{1r_1}}_{I_1} \dotplus \underbrace{L_{21} \dotplus \cdots \dotplus L_{2r_2}}_{I_2} \dotplus \cdots \dotplus \underbrace{L_{s1} \dotplus \cdots \dotplus L_{sr_s}}_{I_s}.$$

Com esta notação, $L_{ij} \cong L_{ik}$ e $L_{ij}L_{hk} = \{0\}$ se $i \neq h$ (veja Lema 2.5.13 de [34]). Além disso, pode-se provar que, cada I_i é um ideal bilateral minimal de R, $I_iI_j = \{0\}$ *se* $i \neq j$ e $I_i \cong M_{n_i}(D_i)$, para algum $n_i \in \mathbb{N}$ e algum anel de divisão D_i. Temos então o conhecido Teorema de Wedderburn-Artin.

Teorema 1.3.6 ([34], Teorema 2.6.18 - **Wedderburn-Artin**). *Um anel R é semissimples se, e somente se, R é soma direta de álgebras de matrizes sobre anéis de divisão:*

$$R \cong M_{n_1}(D_1) \oplus \cdots \oplus M_{n_s}(D_s).$$

Retomando as ideias discutidas acima, se R é semissimples então podemos escrever $R = I_1 \oplus \cdots \oplus I_s$, onde cada I_i é um ideal bilateral minimal de R. Além disso, como consequência direta da Proposição 2.6.7 de [34] temos que estes são todos os ideais bilaterais minimais de R. Temos assim o seguinte resultado:

Proposição 1.3.7. *R é um anel semissimples se, e somente se,*

$$R = L_1 \oplus \cdots \oplus L_s$$

onde cada L_i é um ideal bilateral minimal de R. Neste caso, se L é um ideal bilateral minimal de R então $L = L_k$ para algum $k = 1, \ldots, s$.

Um elemento $e \in R$ é **idempotente** se $e^2 = e$. Por outro lado, um elemento $r \in R$ é **nilpotente** se $r^n = 0$ para algum n natural. Apresentaremos a seguir alguns resultados importantes.

Proposição 1.3.8 ([34], Teorema 2.5.10). *Seja R um anel. Então R é semissimples se, e somente se, todo ideal L à esquerda de R é da forma $L = Re$, onde $e \in R$ é um idempotente.*

Podemos também utilizar idempotentes para caracterizar a decomposição de anéis semissimples como soma de ideais bilaterais minimais.

Teorema 1.3.9 ([34], Teorema 2.6.9). *Seja $R = \oplus_{i=1}^{s} L_i$ a decomposição de um anel semissimples como uma soma direta de ideais bilaterais minimais. Então existe uma família $\{e_1, \ldots, e_s\}$ de elementos de R tais que:*

i) $e_i \neq 0$ *é um idempotente central,* $i = 1, \ldots, s$*;*

ii) *Se* $i \neq j$ *então* $e_i e_j = 0$*;*

iii) $1 = e_1 + \cdots + e_s$*;*

iv) e_i *não pode ser escrito como* $e_i = e_i' + e_i''$ *onde* e_i', e_i'' *são idempotentes centrais tais que* $e_i', e_i'' \neq 0$ *e* $e_i' e_i'' = 0$, $i = 1, \ldots, s$.

Agora, quando trabalhamos com o anel de grupo RG, obtemos através do Teorema de Maschke condições necessárias e suficientes para que RG seja semissimples.

Teorema 1.3.10 ([34], Teorema 3.4.7 - **Maschke**). *Seja G um grupo. Então RG é semissimples se, e somente se, as seguintes condições são satisfeitas:*

i) R *é um anel semissimples;*

ii) G *é finito;*

iii) $|G|$ *é invertível em* R.

O corolário abaixo é consequência imediata do Teorema de Maschke.

Corolário 1.3.11 ([34], Corolário 3.4.8). *Sejam G um grupo finito e F um corpo. Então FG é semissimples se, e somente se, $char(F) \nmid |G|$. Em particular, se F é um corpo de característica zero e G é um grupo finito então FG é semissimples.*

Teorema 1.3.12 ([34], Corolário 3.4.10). *Sejam G um grupo finito e F um corpo algebricamente fechado tal que $char(F) \nmid |G|$. Então*

$$FG \cong \bigoplus_{i=1}^{r} M_{n_i}(F)$$

onde $n_1^2 + n_2^2 + \cdots + n_r^2 = |G|$.

Portanto, se tivermos um grupo finito G e um corpo algebricamente fechado F então o anel de grupo FG pode ser escrito como uma soma direta de álgebras de matrizes sobre F. Mas em geral isso não acontece. Vejamos um exemplo:

Exemplo 1.3.13 ([34], Exemplo 4.2.8). *Seja G o grupo cíclico de ordem 7 gerado por um elemento $a \in G$, isto é, $G = (a \mid a^7 = 1)$. Se $F = \mathbb{Q}$ é o corpo dos racionais então*

$$\mathbb{Q}G \cong \mathbb{Q} \oplus \mathbb{Q}(\zeta)$$

onde ζ denota uma raiz primitiva da unidade de ordem 7.

Por outro lado, se $F = \mathbb{C}$ é o corpo dos complexos então

$$\mathbb{Q}G = \underbrace{\mathbb{C} \oplus \cdots \oplus \mathbb{C}}_{7 \text{ vezes}}.$$

Portanto, nem sempre podemos escrever FG como soma de álgebras de matrizes sobre o corpo F. No entanto, se F for corpo de decomposição de G então sempre conseguimos obter esta decomposição. Além disso, o número de componentes é exatamente o número de classes de conjugação de G.

Teorema 1.3.14. *Sejam G um grupo finito e F um corpo tal que $char(F) \nmid |G|$. Então F é corpo de decomposição de G se, e somente se,*

$$FG \cong \bigoplus_{i=1}^{r} M_{n_i}(F),$$

onde $n_i \in \mathbb{N}$ para todo i, e r é o número de classes de conjugação de G.

Em particular, como todo corpo de característica zero é corpo de decomposição de S_n, então

$$FS_n \cong \bigoplus_{i=1}^{r} M_{n_i}(F)$$

onde r é o número de classes de conjugação de S_n.

1.4 Radical de Jacobson e Teorema de Wedderburn-Malcev

O radical de Jacobson será muito utilizado no decorrer deste trabalho. Agora, vamos defini-lo e apresentar alguns resultados. Para começar, denote por $\mathcal{I}$ o conjunto de todos os ideais à esquerda maximais de R. Relembre que R denota um anel com unidade.

Definição 1.4.1. *O **radical de Jacobson** de R, denotado por $J(R)$, é dado pela interseção de todos os ideais à esquerda maximais de R. Ou seja,*

$$J(R) = \bigcap_{I \in \mathcal{I}} I.$$

Temos então que $J(R)$ é um ideal à esquerda de R. Pode-se também definir o radical de Jacobson como a interseção de todos os ideais à direita maximais de R. Esta definição é equivalente à definição dada acima e dela temos que $J(R)$ é um ideal à direita de R. Portanto, $J(R)$ é um ideal bilateral de R. Além desta, existem outras definições equivalentes à Definição 1.4.1. Vejamos isto através do seguinte lema:

Lema 1.4.2 ([31], Lema 4.1 e Lema 4.2)**.** *Para todo $y \in R$ a seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $y \in J(R)$;

ii) $1 - xy$ *é invertível para todo* $x \in R$;

iii) $yM = \{0\}$ *para qualquer R-módulo simples M.*

Quando trabalhamos com uma álgebra A de dimensão finita obtemos outras caracterizações para o radical de Jacobson $J(A)$. Antes de ver como isso acontece considere a próxima definição.

Definição 1.4.3. *Seja I um ideal de R. Dizemos que I é* ***nilpotente*** *se existe um natural n tal que $I^n = \{0\}$. O menor inteiro n com esta propriedade é chamado* ***índice de nilpotência de*** *I.*

Proposição 1.4.4 ([31], Lema 4.1 e Lema 4.2)**.** *Seja A uma F-álgebra de dimensão finita sobre F. Então $J(A)$ é o maior ideal nilpotente de A.*

Exemplo 1.4.5. *O radical de Jacobson de $UT_n(F)$ é o ideal das matrizes triangulares estritamente superiores. De fato, se $A = (\alpha_{ij}) \in UT_n(F)$ é tal que, para algum $i = 1, \ldots ,n$, temos $\alpha_{ii} \neq 0$ então A^n possui a entrada (i,i) não nula. Mais precisamente, a entrada (i,i) é $\alpha_{ii}^n \neq 0$. Como $J(UT_n(F))$ é o maior ideal nilpotente, segue que $A \notin J(UT_n(F))$.*

Reciprocamente, se A é uma matriz triangular estritamente superior então A pode ser escrita como

$$A = \sum_{1\leq i<j\leq n} \alpha_{ij} E_{ij} = \sum_{2\leq i+1\leq j\leq n} \alpha_{ij} E_{ij}$$

onde $\alpha_{ij} \in F$ e

$$E_{ij}E_{kl} = \begin{cases} E_{il}, & se \quad j = k, \\ 0, & se \quad j \neq k. \end{cases}$$

Como $j \geq i + 1$ e $l \geq k + 1$, para $j = k$ teremos $l \geq i + 2$. Assim

$$A^2 = \sum_{3\leq i+2\leq j\leq n} \beta_{ij} E_{ij}$$

onde $\beta_{ij} \in F$. De forma análoga segue que

$$A^m = \sum_{m+1 \leq i+m \leq j \leq n} \gamma_{ij} E_{ij}$$

onde $\gamma_{ij} \in F$. Logo, para $m \geq n$, temos que $A^m = \{0\}$.

Também é possível caracterizar o radical de Jacobson de uma álgebra de dimensão finita A de acordo com a semissimplicidade desta álgebra.

Proposição 1.4.6 ([34], Teorema 2.7.16)**.** *Seja A uma F-álgebra de dimensão finita. Então A é semissimples se, e somente se, $J(A) = \{0\}$.*

Além disso, quando consideramos o fecho algébrico de F, temos o seguinte resultado.

Lema 1.4.7 ([38], Teorema 2.5.36)**.** *Seja A uma F-álgebra e $\bar{F}$ o fecho algébrico de F. Então*

$$J(\bar{A}) = J(A) \otimes_F \bar{F}$$

onde $\bar{A} = A \otimes_F \bar{F}$.

Em seguida, apresentamos um resultado sobre radical de Jacobson de álgebras de dimensão finita, que será muito importante para demonstrar os principais resultados desta dissertação.

Teorema 1.4.8. *Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre F. Se $\bar{A} = A \otimes_F \bar{F}$ então $J(A)^q = \{0\}$ se, e somente se, $J(\bar{A})^q = \{0\}$.*

Demonstração. Primeiramente suponha $J(A)^q = \{0\}$. Tome $a_1 \otimes b_1, \ldots, a_q \otimes b_q \in J(A) \otimes_F \bar{A}$. Então temos que

$$(a_1 \otimes b_1) \cdots (a_q \otimes b_q) = \underbrace{(a_1 \cdots a_q)}_{\in J(A)^q} \otimes (b_1 \cdots b_q) = 0.$$

Logo, $J(\bar{A})^q = \{0\}$.

Reciprocamente, suponha $J(\bar{A})^q = \{0\}$. Então

$$(a_1 \otimes b_1) \cdots (a_q \otimes b_q) = 0$$

para quaisquer $a_1, \ldots, a_q \in J(A)$ e $b_1, \ldots, b_q \in \bar{A}$. Em particular, temos que

$$0 = (a_1 \otimes 1) \cdots (a_q \otimes 1) = (a_1 \cdots a_q) \otimes 1.$$

Portanto, $a_1 \cdots a_q = 0$ para todo $a_i \in J(A)$, com $i = 1, \ldots, q$. Isso implica que $J(A)^q = \{0\}$. $\square$

Finalizamos esta seção com um resultado muito importante no estudo de álgebras. O Teorema de Wedderburn-Malcev será utilizado com recorrência ao longo deste trabalho, principalmente nas seções finais. Antes de enunciá-lo, vejamos o conceito de F-subálgebra maximal.

Definição 1.4.9. *Uma F-subálgebra B é **maximal** em A se para qualquer F-subálgebra A' tal que $B \subseteq A' \subseteq A$ tivermos $A' = B$ ou $A' = A$.*

Teorema 1.4.10 ([19], Teorema 3.4.3 - **Wedderburn-Malcev**). *Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo F de característica zero e seja $J(A)$ seu radical de Jacobson. Então existe uma subálgebra semissimples maximal B tal que*

$$A = B \dotplus J(A).$$

Além disso, se B e B' são subálgebras semissimples tais que $A = B \dotplus J(A) = B' \dotplus J(A)$, então existe $x \in J(A)$ tal que $B' = (1+x)B(1+x)^{-1}$.

Tendo em vista o Teorema de Wedderburn-Artin, se $char(F) = 0$ e A é uma F-álgebra de dimensão finita, então podemos escrever

$$A = B_1 \oplus \cdots \oplus B_m \dotplus J(A)$$

onde $B_i \cong M_{n_i}(D_i)$ para algum anel de divisão D_i.

Exemplo 1.4.11. *Considere a álgebra $UT_2(F)$ das matrizes triangulares superiores 2×2. Como vimos no Exemplo 1.4.5,*

$$J(UT_2(F)) = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & \beta \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \mid \beta \in F \right\} = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Se

$$B_1 = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ e } B_2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix}$$

então pode-se verificar que $B_1 \oplus B_2$ é uma subálgebra semissimples maximal em $UT_2(F)$. Logo, a decomposição de Wedderburn-Malcev de $UT_2(F)$ é dada por

$$UT_2(F) = \begin{pmatrix} F & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \oplus \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & F \end{pmatrix} \dotplus \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

1.5 Caracteres

Veremos nesta seção o conceito de caracteres. Iniciaremos falando um pouco sobre representações. Para isto, considere G um grupo finito e V um espaço vetorial de dimensão finita sobre um corpo F. Denote por $GL(V)$ o grupo das transformações lineares invertíveis de V.

Definição 1.5.1. *Uma **representação** de G em V é um homomorfismo*

$$\begin{array}{rccc} \rho: & G & \to & GL(V) \\ & g & \mapsto & \rho_g. \end{array}$$

*O **grau** da representação é definido como a dimensão de V sobre F.*

Note que a escolha de uma base de V define um isomorfismo de $GL(V)$ em $GL_n(F)$, o grupo das matrizes $n \times n$ invertíveis com entradas em F. Assim, para cada representação ρ de G em V podemos associar uma **representação matricial**:

$$\begin{array}{rccc} [\rho]: & G & \to & GL_n(F) \\ & g & \mapsto & [\rho_g]_\beta \end{array}$$

onde β é uma base de V.

A fim de exibir a representação matricial de um grupo G é suficiente determinar a representação matricial correspondente ao conjunto dos geradores de G.

Exemplo 1.5.2. *Considere agora o grupo simétrico S_3. As permutações* (12) *e* (123) *geram S_3. Defina*

$$X = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \text{ e } Y = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

A função

$$\begin{array}{rccc} \rho: & S_3 & \to & GL_3(\mathbb{R}) \\ & (12) & \mapsto & X \\ & (123) & \mapsto & Y \end{array}$$

é uma representação de grau 3 de S_3 sobre $\mathbb{R}$.

Uma conexão entre representações e módulos é obtida através de anéis de grupo.

Proposição 1.5.3 ([34], Proposição 4.2.1)**.** *Sejam G um grupo e F um corpo. Então existe uma bijeção entre representações de G sobre F e FG-módulos de dimensão finita sobre F.*

Relembre que se $A = (a_{ij})$ é uma matriz $n \times n$ então a função

$$tr(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ii}$$

é chamada **traço** de A. A partir desta definição podemos falar sobre caracteres. Vejamos a definição:

Definição 1.5.4. *Considere M o FG-módulo que corresponde à representação matricial $g \mapsto [\rho_g]$ de G, onde $[\rho_g] \in GL_n(F)$. Defina a função $\chi : G \to F$ dada por*

$$\chi(g) = tr[\rho_g].$$

*Dizemos então que χ é o **caracter** de G produzido pela representação ρ ou produzido pelo módulo correspondente M. O **grau do caracter** χ, dado por $\chi(1)$, é o grau da representação ρ. Se o FG-módulo correspondente M for irredutível então dizemos que χ é um caracter **irredutível**. Caso contrário, dizemos que χ é **redutível**.*

Exemplo 1.5.5. *Considerando a representação de S_3 dada no Exemplo 1.5.2 temos que*

$$\chi(1) = 3, \ \ \chi((12)) = 1 \quad e \quad \chi((123)) = 0.$$

Além disso, temos que

$$\chi((13)) = 1, \ \ \chi((23)) = 1 \quad e \quad \chi((132)) = 0.$$

Lembrando que $char(F) = 0$ e tendo em vista o Teorema de Maschke (Teorema 1.3.10), observamos que qualquer caracter redutível é escrito como soma de caracteres irredutíveis. Além disso, sob determinadas hipóteses, o número de caracteres irredutíveis de um grupo está relacionado com número de classes de conjugação do grupo. Vejamos isto através do próximo teorema.

Teorema 1.5.6 ([3], §30)**.** *Seja F um corpo de decomposição de G. Então o número de caracteres irredutíveis de G é igual ao número de classes de conjugação de G.*

Podemos nos perguntar também se dados dois FG-módulos M e N com caracteres χ e ψ, respectivamente, como calcular o caracter associado ao módulo $M \otimes_{FG} N$. Em resposta a esta pergunta temos o seguinte resultado.

Proposição 1.5.7 ([22], Proposição 19.6)**.** *Sejam M e N FG-módulos com caracteres χ e ψ, respectivamente. Então o caracter do FG-módulo $M \otimes_{FG} N$ é dado por*

$$(\chi\psi)(g) = \chi(g)\psi(g)$$

para todo $g \in G$.

Terminamos esta seção com definições que serão utilizadas no Capítulo 3.

Definição 1.5.8. *Seja G um grupo e $\rho_1 : G \to GL(V)$ e $\rho_2 : G \to GL(W)$ duas representações de G sobre um corpo F. Então ρ_1 e ρ_2 são **equivalentes** se existir um isomorfismo de módulos $\Phi : V \to W$ tal que $\rho_2 = \Phi\rho_1\Phi^{-1}$. Caso contrário, dizemos que ρ_1 e ρ_2 são **não equivalentes**.*

Definição 1.5.9. *Sejam* $\chi_1, \ldots, \chi_r$ *caracteres de um grupo* G. *Dizemos que* $\{\chi_1, \ldots, \chi_r\}$ *é um* ***conjunto completo de caracteres irredutíveis de*** G *se* r *é o número de representações irredutíveis não equivalentes de* G *e cada* χ_i *corresponde a uma destas representações irredutíveis.*

1.6 Módulos e caracteres induzidos

Agora vamos construir um FG-módulo a partir de um FH-módulo, onde H é um subgrupo de um grupo finito G.

Definição 1.6.1. *Sejam* H *um subgrupo de um grupo finito* G *e* M *um* FH*-módulo. Então*

$$M\uparrow G := FG \otimes_{FH} M$$

é um FG*-módulo chamado* ***módulo induzido de*** M.

Observe que podemos escrever G como união disjunta de classes laterais à esquerda de H da seguinte forma

$$G = g_1 H \cup g_2 H \cup \cdots \cup g_t H$$

onde $g_1 = 1$ e $t = [G : H]$ é o número de classes laterais distintas à esquerda de H em G. Então todo elemento de G pode ser expresso como um produto $g_i h$, $1 \leq i \leq t$, $h \in H$ com g_i e h unicamente determinados. Portanto, cada elemento de FG pode ser escrito de maneira única como

$$\sum_{i=1}^{t} g_i b_i$$

com $b_i \in FH$. Assim temos que

$$FG = g_1 FH \dotplus \cdots \dotplus g_t FH$$

é um FH-módulo. Segue então que

$$\begin{aligned} M\uparrow G &= FG \otimes_{FH} M = (g_1 FH \dotplus \cdots \dotplus g_t FH) \otimes_{FH} M \\ &= (g_1 FH \otimes_{FH} M) \dotplus \cdots \dotplus (g_t FH \otimes_{FH} M) \\ &= g_1 \otimes M \dotplus \cdots \dotplus g_t \otimes M \end{aligned}$$

e obtemos assim uma decomposição explícita para $M\uparrow G$.

Definição 1.6.2. *Se* χ *é o caracter do* FH*-módulo* M *então denotamos por* $\chi\uparrow G$ *o caracter do módulo* $M\uparrow G$ *chamado* ***caracter induzido***. *Dizemos também que* $\chi\uparrow G$ *é induzido de* χ.

É natural nos perguntar como fazemos para obter o caracter induzido $\chi\uparrow G$ a partir de χ. Para responder a esta pergunta, considere uma F-base $\{m_1,\ldots,m_r\}$ de M. Dado $h \in H$, para cada $i = 1,\ldots,r$, existem $\alpha_{ji}(h) \in F$, $j = 1,\ldots,r$, tais que

$$hm_i = \sum_{j=1}^{r} \alpha_{ji}(h)m_j.$$

Se T é a representação matricial correspondente a M associada à base acima, então

$$T(h) = (\alpha_{ij}(h)).$$

Além disso, se $t = [G : H]$ então o conjunto

$$\mathcal{B} = \{g_i \otimes m_j \mid 1 \leq i \leq t, 1 \leq j \leq r\}$$

forma uma base para $M \uparrow G$ sobre F. Partindo deste conjunto vamos calcular a matriz da representação U correspondente ao módulo $M\uparrow G$. Para isto, precisamos escrever, para cada $g \in G$ e cada $g_i \otimes m_j \in \mathcal{B}$, o elemento $g(g_i \otimes m_j)$ como uma combinação linear sobre F dos elementos de $\mathcal{B}$. Note que $gg_i = g_k h$ para algum $h \in H$ e k tal que $1 \leq k \leq t$. Segue que

$$g(g_i \otimes m_j) = gg_i \otimes m_j = g_k h \otimes m_j = g_k \otimes hm_j = \sum_{s=1}^{r} \alpha_{sj}(h) g_k \otimes m_s. \tag{1.1}$$

Podemos estender o domínio de α_{sj} (de H para G) tomando

$$\alpha_{sj}(x) = 0 \text{ se } x \in G, x \notin H. \tag{1.2}$$

Lembrando que $h = g_k^{-1} g g_i$ e usando (1.2), podemos escrever (1.1) da seguinte forma

$$g(g_i \otimes m_j) = \sum_{s=1}^{r} \sum_{k=1}^{t} \alpha_{sj}(g_k^{-1} g g_i) g_k \otimes m_s. \tag{1.3}$$

Reordenado os elementos da base $\mathcal{B}$ da seguinte maneira

$$g_1 \otimes m_1, \ldots, g_1 \otimes m_r, g_2 \otimes m_1, \ldots, g_2 \otimes m_r, \ldots, g_t \otimes m_1, \ldots, g_t \otimes m_r$$

e tendo em vista a Equação (1.3) podemos escrever

$$U(g) = \begin{pmatrix}
\alpha_{11}(g_1^{-1}gg_1) & \cdots & \alpha_{1r}(g_1^{-1}gg_1) & \cdots & \cdots & \alpha_{11}(g_1^{-1}gg_t) & \cdots & \alpha_{1r}(g_1^{-1}gg_t) \\
\vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\
\alpha_{r1}(g_1^{-1}gg_1) & \cdots & \alpha_{rr}(g_1^{-1}gg_1) & \cdots & \cdots & \alpha_{r1}(g_1^{-1}gg_t) & \cdots & \alpha_{rr}(g_1^{-1}gg_t) \\
\vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & & \vdots \\
\vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & & \vdots \\
\alpha_{11}(g_t^{-1}gg_1) & \cdots & \alpha_{1r}(g_t^{-1}gg_1) & \cdots & \cdots & \alpha_{11}(g_t^{-1}gg_t) & \cdots & \alpha_{1r}(g_t^{-1}gg_t) \\
\vdots & & \vdots & & & \vdots & & \vdots \\
\alpha_{r1}(g_t^{-1}gg_1) & \cdots & \alpha_{rr}(g_t^{-1}gg_1) & \cdots & \cdots & \alpha_{r1}(g_t^{-1}gg_t) & \cdots & \alpha_{rr}(g_t^{-1}gg_t)
\end{pmatrix}$$

Estendendo T para todo G de modo que $T(x) = 0$ para $x \in G, x \notin H$ teremos que $U(g)$ é uma matriz $(t \times r) \times (t \times r)$. Mais precisamente temos que

$$U(g) = \begin{pmatrix} T(g_1^{-1} g g_1) & \cdots & T(g_1^{-1} g g_t) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ T(g_t^{-1} g g_1) & \cdots & T(g_t^{-1} g g_t) \end{pmatrix}.$$

A partir da matriz de representação U, obtemos então o caracter induzido $\chi \uparrow G$ associado ao módulo $M \uparrow G$.

Capítulo 2

PI-álgebras

Neste capítulo apresentaremos algumas definições e resultados em PI-teoria. Veremos também algumas propriedades de polinômios multilineares e de T-ideais e ainda vamos introduzir a sequência de codimensões de uma álgebra. Os conceitos apresentados aqui são de grande importância para o desenvolvimento do trabalho. Ao longo do capítulo F denotará um corpo.

2.1 Definições e exemplos

Considere $X = \{x_1, x_2, \ldots\}$ um conjunto enumerável de elementos não comutativos. Estes elementos são chamados variáveis. Uma **palavra** em X é uma sequência $x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$, onde $x_{i_j} \in X$ e n é um inteiro não negativo. Se $n = 0$ então denotaremos a palavra por 1.

Seja $F\langle X\rangle$ o espaço vetorial cuja base é formada por todas as palavras de X, incluindo a palavra 1. O produto de um escalar em F por uma palavra será chamado de **monômio**. Se $\alpha x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}$ e $\beta x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}$ são monômios pertencentes a $F\langle X\rangle$ então o produtos deste monômios é dado da seguinte forma:

$$(\alpha x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n})(\beta x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}) = \alpha\beta x_{i_1}x_{i_2}\cdots x_{i_n}x_{j_1}x_{j_2}\cdots x_{j_m}.$$

Com este produto definido, dizemos que $F\langle X\rangle$ é a **álgebra livre associativa unitária gerada por** X. Vamos chamar os elementos de $F\langle X\rangle$ de **polinômios** e se $f \in F\langle X\rangle$ escrevemos $f = f(x_1, \ldots, x_n)$ para indicar que as únicas variáveis de f são $x_1, \ldots, x_n$.

Definição 2.1.1. *Sejam A uma F-álgebra e $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$. Dizemos que f é uma **identidade polinomial** de A se $f(a_1, \ldots, a_n) = 0$ para quaisquer $a_1, \ldots, a_n \in A$. Neste caso escrevemos $f \equiv 0$.*

O polinômio trivial $f = 0$ é uma identidade para qualquer álgebra A e é dito **identidade trivial**. Por isso, vamos considerar o seguinte:

Definição 2.1.2. *Uma álgebra A é uma* ***PI-álgebra*** *(ou álgebra com identidade polinomial) se A satisfaz uma identidade polinomial não trivial.*

Antes de vermos alguns exemplos, vamos definir o comutador de Lie:

Definição 2.1.3. *O* ***comutador de Lie*** *de peso 2 é dado por*

$$[a,b] = ab - ba$$

e o ***comutador de peso*** $n \geq 3$ *é dado por*

$$[a_1, \ldots, a_{n-1}, a_n] = [[a_1, \ldots, a_{n-1}], a_n].$$

Exemplo 2.1.4. *Seja A uma álgebra comutativa e considere*

$$f(x_1,x_2) = [x_1,x_2] = x_1x_2 - x_2x_1.$$

Como $f \equiv 0$ em A temos que A é uma PI-álgebra.

Dizemos que uma álgebra A é **nilpotente** se existe um inteiro $n \geq 1$ tal que $A^n = \{0\}$. O menor inteiro n com tal propriedade é chamado **índice de nilpotência da álgebra** A.

Exemplo 2.1.5. *Seja A uma álgebra nilpotente. Então A é uma PI-álgebra. De fato, se n é o índice de nilpotência de A então o polinômio*

$$f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdots x_n,$$

é uma identidade de A.

Exemplo 2.1.6. *Considere a álgebra $UT_n(F)$. Temos que*

$$f(x_1, \ldots, x_{2n}) = [x_1,x_2] \cdots [x_{2n-1},x_{2n}]$$

é uma identidade de $UT_n(F)$.

Por exemplo, para $n = 2$ temos que o comutador de duas matrizes $A,B \in UT_2(F)$ é da forma

$$[A,B] = \begin{pmatrix} 0 & \alpha \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

onde $\alpha \in F$. Em geral, se $A, B \in UT_n(F)$, então

$$[A,B] \in \begin{pmatrix} 0 & F & \cdots & F \\ 0 & 0 & \cdots & F \\ \vdots & \vdots & \ddots & F \\ 0 & 0 & \cdots & 0 \end{pmatrix}.$$

Ou seja, o comutador de duas matrizes triangulares superiores é uma matriz triangular estritamente superior. Denote por $I_n(F)$ a álgebra das matrizes triangulares $n \times n$ estritamente superiores. Vimos através do Exemplo 1.4.5 que $I_n(F)$ é nilpotente. Além disso, seu índice de nilpotência é n. Segue deste fato que, se $A_1, A_2, \ldots, A_{2n-1}, A_{2n} \in UT_n(F)$, então

$$[A_1,A_2]\cdots[A_{2n-1},A_{2n}] = 0.$$

Logo

$$f(x_1,\ldots,x_{2n}) = [x_1,x_2]\cdots[x_{2n-1},x_{2n}] \equiv 0$$

em $UT_n(F)$.

Através do próximo exemplo, vamos definir uma álgebra de grande importância na teoria de PI-álgebras.

Exemplo 2.1.7. *Seja F um corpo de característica diferente de 2. Denote por E a* ***álgebra de Grassmann*** *de dimensão infinita sobre F definida tomando $E = F\langle X\rangle/I$, onde I denota o ideal gerado por $\{x_ix_j + x_jx_i \mid i,j \geq 1\}$. Se, para cada $i \geq 1$, fazemos $e_i = x_i + I$, então E é gerado como álgebra por*

$$\{1, e_1,e_2,\ldots \mid e_ie_j = -e_je_i\}.$$

Vamos definir também $E^{(0)} = span_F\{e_{i_1}\cdots e_{i_{2k}} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_{2k},\ k \geq 0\}$ e $E^{(1)} = span_F\{e_{i_1}\cdots e_{i_{2k+1}} \mid 1 \leq i_1 < \cdots < i_{2k+1},\ k \geq 0\}$.

Se $x = e_{i_1}\cdots e_{i_m}$ e $y = e_{j_1}\cdots e_{j_n}$ então

$$\begin{aligned} xy &= (e_{i_1}\cdots e_{i_m})(e_{j_1}\cdots e_{j_n}) = (-1)^{mn}(e_{j_1}\cdots e_{j_n})(e_{i_1}\cdots e_{i_m}) \\ &= (-1)^{mn}yx. \end{aligned}$$

Assim, se m e n são ímpares (isto é, $x,y \in E^{(1)}$) temos $xy = -yx$ e, portanto, os elementos de $E^{(1)}$ anti-comutam. Por outro lado, se m é par (isto é, $x \in E^{(0)}$), então para todo natural n, temos que $xy = yx$ e, portanto, $E^{(0)}$ está contido no centro de E, que denotamos por $Z(E)$. Na verdade, facilmente se conclui que $Z(E) \subseteq E^{(0)}$ e segue que $Z(E) = E^{(0)}$.

Observe ainda que se $y_1, y_2 \in E$ então $[y_1,y_2] \in E^{(0)}$. Para ver isso, considere $y_1 = e_{i_1}\cdots e_{i_m}$ e $y_2 = e_{j_1}\cdots e_{j_n}$. Então

$$\begin{aligned} [y_1,y_2] &= [e_{i_1}\cdots e_{i_m},e_{j_1}\cdots e_{j_n}] \\ &= e_{i_1}\cdots e_{i_m}e_{j_1}\cdots e_{j_n} - (-1)^{mn}e_{i_1}\cdots e_{i_m}e_{j_1}\cdots e_{j_n}. \end{aligned}$$

Se $(-1)^{mn} = 1$ então $[y_1,y_2] = 0 \in E^{(0)}$. Se $(-1)^{mn} = -1$ então mn é ímpar e assim m e n são ímpares. Portanto, $m + n$ é par e segue imediatamente que o comutador está em $E^{(0)}$.

Como $E^{(0)} = Z(E)$, concluímos que a álgebra de Grassmann E satisfaz a identidade

$$f(x_1,x_2,x_3) = [[x_1,x_2],x_3].$$

A seguir daremos algumas definições importantes.

Definição 2.1.8. *Dada uma álgebra A, definimos*

$$Id(A) = \{f \in F\langle X\rangle \mid f \equiv 0 \text{ em } A\}$$

*como o **conjunto das identidades de** A.*

Um ideal I de $F\langle X\rangle$ é um T**-ideal** se $\varphi(I) \subseteq I$ para qualquer endomorfismo φ de $F\langle X\rangle$. O conjunto $Id(A)$ é um T-ideal, pois se $f = f(x_1,\ldots,x_n) \in Id(A)$ então $f(g_1,\ldots,g_n) \in Id(A)$ para quaisquer polinômios $g_1,\ldots,g_n \in F\langle X\rangle$. Dizemos então que $Id(A)$ é gerado como T-ideal pelas identidades polinomiais de A.

Muitas vezes é mais conveniente trabalhar com corpos algebricamente fechados e por isso existe a necessidade de estender o corpo base de uma álgebra. Vejamos o que acontece com o T-ideal das identidades ao estender F:

Teorema 2.1.9 ([15], Observação 1)**.** *Sejam A uma PI-álgebra sobre um corpo F e K uma extensão de F. Se $Id_F(A) \subseteq F\langle X\rangle$ e $Id_K(\bar{A}) \subseteq K\langle X\rangle$ denotam os T-ideais das identidades de A e $\bar{A} = A \otimes_F K$, respectivamente, então*

$$Id_F(A) \otimes_F K = Id_K(\bar{A}).$$

Enunciaremos um resultado envolvendo a álgebra de Grassmann que será utilizado no Capítulo 5 para demonstrar o Teorema 5.2.2. Este resultado foi provado por A. Kemer em 1988 e ele mostra que, se estamos interessados em estudar o T-ideal de uma álgebra A e sabemos que $Id(A) \nsubseteq Id(E)$, então podemos assumir que a dimensão de A sobre F é finita.

Teorema 2.1.10 (A. Kemer, [28] Teorema 2.3)**.** *Seja A uma álgebra tal que $Id(A) \nsubseteq Id(E)$, onde E é a álgebra de Grassmann. Então existe uma álgebra de dimensão finita B tal que $Id(A) = Id(B)$.*

2.2 Polinômios multilineares

Definição 2.2.1. *Sejam $u = \alpha x_{i_1}\cdots x_{i_k}$ um monômio e $f = f(x_1,\ldots,x_n)$ um polinômio, ambos em $F\langle X\rangle$.*

*i) O **grau do monômio** u é o comprimento da palavra u. Portanto o grau de u é k. Vamos utilizar a notação: $\deg u = k$;*

ii) *O* ***grau de*** u ***em*** x_i *é igual ao número de vezes que* x_i *aparece em* u*. Vamos denotar:* $\deg_{x_i} u$;

iii) *O* ***grau do polinômio*** f *será denotado por* $\deg f$ *e é dado pelo comprimento do maior monômio de* f;

iv) *O* ***grau de*** f ***em*** x_i *será denotado por* $\deg_{x_i} f$ *e é o maior* $\deg_{x_i} u$, *onde* u *é um monômio de* f.

Se $\deg_{x_i} f = 1$ dizemos que f é um **polinômio linear** em x_i.

Exemplo 2.2.2. *Considere* $f = f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_3x_2^2x_1x_4 - x_3x_4x_3^2x_1 + x_1x_3x_4x_2x_4$. *Então*

$$\deg_{x_1} f = 1,\ \deg_{x_2} f = 2,\ \deg_{x_3} f = 3,\ \deg_{x_4} f = 2.$$

Definição 2.2.3. *Um polinômio* $f \in F\langle X\rangle$ *é* ***homogêneo na variável*** x_i *se* x_i *aparece com mesmo grau em todos os monômios de* f*. Se* f *é homogêneo em todas as suas variáveis então dizemos que* f *é* ***multihomogêneo****.*

Definição 2.2.4. *Se* $f \in F\langle X\rangle$ *é um polinômio multihomogêneo e linear em todas as variáveis então* f *é dito um* ***polinômio multilinear****.*

Exemplo 2.2.5. *O polinômio*

$$g(x_1,x_2,x_3) = x_1^2x_2x_3 + 4x_2x_1x_3x_1 - 3x_1x_3x_2x_1$$

é multihomogêneo mas não é multilinear. Já o polinômio

$$h(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_1x_4x_3x_2 + 2x_3x_2x_1x_4 - 7x_4x_2x_1x_3 + x_1x_2x_4x_3$$

é multilinear.

Uma observação interessante que pode ser provada utilizando o Teorema de Poincaré-Birkhoff-Witt ([6], Teorema 1.3.2) e o Teorema de Witt ([6], Teorema 1.3.5) é a seguinte:

Observação 2.2.6. *Um polinômio multilinear de grau* n *é combinação linear sobre* F *de produtos do tipo*

$$x_{i_1}\cdots x_{i_k}c_1\cdots c_s$$

onde $i_1 < \ldots < i_k$ *e* $c_1,\ldots,c_s$ *são comutadores de pesos arbitrários nas demais variáveis.*

Seja

$$P_n = span_F\{x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} | \sigma \in S_n\}$$

o espaço vetorial dos polinômios multilineares nas variáveis $x_1, \ldots, x_n$ na álgebra livre $F\langle X\rangle$. Dada uma álgebra A defina

$$P_n(A) := \frac{P_n}{P_n \cap Id(A)}.$$

Definição 2.2.7. *O inteiro não-negativo*

$$c_n(A) = \dim_F P_n(A)$$

é chamado n***-ésima codimensão*** *da álgebra* A*.*

Exemplo 2.2.8. *Seja* A *uma álgebra comutativa. Então* $ab = ba$ *para quaisquer* $a, b \in A$ *e assim* $[x_1, x_2] \in Id(A)$*. Portanto, dado* $x_{i_1} \cdots x_{i_n} \in P_n$ *temos que*

$$x_{i_1} \cdots x_{i_n} - x_1 \cdots x_n \equiv 0 \pmod{Id(A)}.$$

Logo, $x_1 \cdots x_n$ *gera* $P_n(A)$ *módulo* $Id(A)$ *e portanto* $c_n(A) \leq 1$*. Em particular, se* A *é uma álgebra comutativa não nilpotente, então* $c_n(A) = 1$ *para todo* $n \geq 1$*.*

Exemplo 2.2.9. *Se* A *é uma álgebra nilpotente com índice de nilpotência* m *então é fácil ver que* $c_n(A) = 0$ *se* $n \geq m$*.*

No próximo capítulo vamos calcular também a n-ésima codimensão da álgebra de Grassmann E. Agora vamos ver como os polinômios multilineares desempenham um importante papel quando a característica do corpo é zero. Primeiramente apresentaremos o **processo de multilinearização**. Dada uma identidade f de uma álgebra A obtemos, através do processo de multilinearização, uma outra identidade que é multilinear. A seguir veremos como este processo funciona.

Considere $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in F\langle X\rangle$ uma identidade polinomial da álgebra A. Suponha primeiramente que em cada monômio a variável x_i aparece com grau menor ou igual a 1, $i = 1, \ldots, n$. Se x_1 não aparece em algum monômio defina

$$\begin{array}{rlll} \varphi_1 : & x_1 & \mapsto & 0 \\ & x_i & \mapsto & x_i, \quad i \neq 1. \end{array}$$

O polinômio $\varphi_1(f)$ ainda é uma identidade polinomial de A obtida de f sem os monômios que contêm x_1. Se em algum monômio de $\varphi_1(f)$ a variável x_2 tem grau zero, repetimos o processo: defina

$$\begin{array}{rlll} \varphi_2 : & x_2 & \mapsto & 0 \\ & x_i & \mapsto & x_i, \quad i \neq 2. \end{array}$$

Assim, $\varphi_2\varphi_1(f)$ ainda é uma identidade de A obtida de $\varphi_1(f)$ sem os monômios que contêm x_2. Fazendo isto com todas as variáveis que não aparecem em algum monômio, obtemos uma sequência de aplicações $\varphi_1,\varphi_2,\ldots,\varphi_l$ tal que $\varphi_l\ldots\varphi_2\varphi_1(f)$ é um polinômio multilinear de grau menor ou igual a k que ainda é uma identidade de A.

Agora suponha que existe uma variável, digamos x_1, tal que $\deg_{x_1} f = d > 1$. Considere

$$h = h(y_1,y_2,x_2,\ldots,x_n) = f(y_1+y_2,x_2,\ldots,x_n) - f(y_1,x_2,\ldots,x_n) - f(y_2,x_2,\ldots,x_n).$$

O polinômio h ainda é uma identidade polinomial de A. Vamos mostrar que h é uma identidade não trivial. Suponha por contradição que $h = 0$. Fazendo $y_1 = y_2 = x_1$ temos que

$$\begin{aligned} 0 &= h(x_1,x_1,x_2,\ldots,x_n) \\ &= f(2x_1,\ldots,x_n) - 2f(x_1,\ldots,x_n). \end{aligned}$$

Portanto,

$$f(2x_1,\ldots,x_n) = 2f(x_1,\ldots,x_n).$$

Podemos escrever $f = f_0+f_1+\cdots+f_d$ onde f_i denota a soma de todos os monômios de f em que x_1 aparece i vezes. Assim, $f_i(2x_1,\ldots,x_n) = 2^i f(x_1,\ldots,x_n)$ e desta forma obtemos

$$2(f_0+f_1+\cdots+f_d) = f_0+2f_1+\cdots+2^d f_d.$$

Então

$$f_0 = (2^2-2)f_2+\cdots+(2^d-2)f_d.$$

Mas isso é uma contradição, já que no lado esquerdo da igualdade acima a variável x_1 não aparece, enquanto no lado direito, sendo $d > 1$ e $char(F) = 0$, a mesma variável aparece com grau maior ou igual a 2. Logo, h é uma identidade não trivial.

Portanto obtemos uma identidade h tal que $\deg_{y_1} h = \deg_{y_2} h = d-1 < \deg_{x_1} f$. Logo, através de um processo indutivo e a partir da identidade f, é possível obter um identidade g de A que é um polinômio multilinear.

Como consequência do processo de multilinearização temos a seguinte proposição.

Proposição 2.2.10 ([19], Corolário 1.3.9)**.** *Seja F um corpo de característica zero. Então todo T-ideal é gerado, como um T-ideal, pelos polinômios multilineares que ele contém.*

2.3 Outros tipos de identidades

Apresentaremos nesta seção a definição de polinômio alternado e algumas propriedades que serão utilizadas no decorrer deste trabalho. Veremos também um exemplo importante de polinômio alternado: o polinômio standard.

Definição 2.3.1. *Seja $f = f(x_1, \ldots ,x_n,y_1, \ldots ,y_t)$ um polinômio linear nas variáveis $x_1, \ldots ,x_n$. Dizemos que f é um* ***polinômio alternado*** *nas variáveis se, para $1 \leq i,j \leq n$ com $i \neq j$, ao substituir x_i no lugar x_j, o polinômio f se anula.*

Se $f = f(x_1, \ldots ,x_n,y_1, \ldots ,y_t)$ é alternado nas variáveis $x_1, \ldots ,x_n$ então

$$\begin{aligned} 0 &= f(x_1, \ldots , x_i + x_j, \ldots ,x_i + x_j, \ldots ,x_n,y_1, \ldots ,y_t) + \\ &\quad -f(x_1, \ldots , x_i, \ldots ,x_i, \ldots ,x_n,y_1, \ldots ,y_t) - f(x_1, \ldots , x_j, \ldots ,x_j, \ldots ,x_n,y_1, \ldots ,y_t) \\ &= f(x_1, \ldots , x_i, \ldots ,x_j, \ldots ,x_n,y_1, \ldots ,y_t) + f(x_1, \ldots , x_j, \ldots ,x_i, \ldots ,x_n,y_1, \ldots ,y_t). \end{aligned}$$

Por outro lado, se

$$f(x_1, \ldots , x_i, \ldots ,x_j, \ldots ,x_n,y_1, \ldots ,y_t) + f(x_1, \ldots , x_j, \ldots ,x_i, \ldots ,x_n,y_1, \ldots ,y_t) = 0$$

e, desde que $char(F) \neq 2$, então temos que

$$f(x_1, \ldots , x_i, \ldots ,x_i, \ldots ,x_n,y_1, \ldots ,y_t) = 0$$

e concluímos que f é um polinômio alternado nas variáveis $x_1, \ldots ,x_n$. Portanto,

$$f(x_1, \ldots , x_i, \ldots ,x_j, \ldots ,x_n,y_1, \ldots ,y_t) = -f(x_1, \ldots , x_j, \ldots ,x_i, \ldots ,x_n,y_1, \ldots ,y_t)$$

é uma propriedade equivalente à Definição 2.3.1, no caso em que $char(F) \neq 2$. Além disso, de uma maneira mais geral, se $\sigma \in S_n$, então

$$f(x_{\sigma(1)}, \ldots ,x_{\sigma(n)},y_1, \ldots ,y_t) = (sgn\ \sigma) f(x_1, \ldots ,x_n,y_1, \ldots ,y_t),$$

onde $sgn\ \sigma$ é o sinal da permutação σ. O próximo resultado que vamos apresentar é uma propriedade básica sobre polinômios alternados.

Proposição 2.3.2. *Sejam $f = f(x_1, \ldots , x_n,y_1, \ldots ,y_t)$ um polinômio alternado em $x_1, \ldots ,x_n$ e A uma F-álgebra. Se $a_1, \ldots , a_n \in A$ são linearmente dependentes sobre F, então $f(a_1, \ldots ,a_n,b_1, \ldots ,b_t) = 0$ para quaisquer $b_1, \ldots ,b_t \in A$.*

Demonstração. Como $a_1, \ldots ,a_n$ são linearmente dependentes, podemos escrever um dos a_i's, digamos a_1, como combinação dos demais. Ou seja,

$$a_1 = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i a_i.$$

Por linearidade temos que

$$f(a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_t) = \sum_{i=2}^{n} \alpha_i f(a_i,a_2,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_t).$$

Por outro lado, como f é um polinômio alternado em $x_1,\ldots,x_n$, cada parcela da soma anterior é zero. Logo,

$$f(a_1,\ldots,a_n,b_1,\ldots,b_t) = 0$$

para quaisquer $b_1,\ldots,b_t \in A$. $\square$

Definição 2.3.3. *O polinômio*

$$St_n = St_n(x_1,\ldots,x_n) = \sum_{\sigma\in S_n} (sgn\ \sigma) x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$$

*é chamado **polinômio standard de grau** n.*

O polinômio standard é um polinômio alternado. De fato,

$$\begin{aligned} St_n(x_1,\ldots,x_i,\ldots,x_j,\ldots,x_n) &= \sum_{\sigma\in S_n} (sgn\ \sigma) x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(i)} \cdots x_{\sigma(j)} \cdots x_{\sigma(n)} \\ &= -\sum_{\sigma\in S_n} (sgn\ \sigma) x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(j)} \cdots x_{\sigma(i)} \cdots x_{\sigma(n)} \\ &= -St_n(x_1,\ldots,x_j,\ldots,x_i,\ldots,x_n). \end{aligned}$$

Pode-se provar que se St_n é uma identidade polinomial de uma álgebra A então St_{n+1} também é uma identidade de A (veja [19], Proposição 1.5.7). Portanto, se St_n é uma identidade polinomial de A então $St_{n+1},St_{n+2},St_{n+3},\ldots$ também são identidades de A.

Teorema 2.3.4. *Seja A uma F-álgebra com $\dim_F A = n < \infty$. Então A satisfaz a identidade St_{n+1}.*

Demonstração. Basta observar que St_{n+1} é alternado e usar a Proposição 2.3.2. $\square$

Desde que $\dim_F M_n(F) = n^2$, como consequência do teorema acima temos o seguinte corolário.

Corolário 2.3.5. *A álgebra de matrizes $M_n(F)$ satisfaz a identidade St_{n^2+1}.*

Portanto $M_n(F)$ satisfaz qualquer St_m, para $m \geq n^2 + 1$. As perguntas que surgem naturalmente são as seguintes: $M_n(F)$ satisfaz algum polinômio standard de grau menor que n^2+1? Se sim, qual é o menor k tal que St_k seja uma identidade de $M_n(F)$?

É possível mostrar que St_{2n-1} não é uma identidade de $M_n(F)$. Para isto, considere a substituição

$$x_1 = E_{11},\ x_2 = E_{12},\ x_3 = E_{22}, \ldots, x_{2n-1} = E_{nn}$$

onde E_{ij} denota a matriz com $a_{ij} = 1$ e as demais entradas nulas. Lembrando que

$$E_{ij}E_{kl} = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad j \neq k \\ E_{il}, & \text{se} \quad j = k. \end{cases}$$

Portanto, ao substituir no polinômio standard, só restará a parcela referente à permutação identidade. Logo,

$$St_{2n-1}(E_{11}, E_{12}, E_{22}, \ldots, E_{nn}) = E_{11}E_{12}E_{22} \cdots E_{nn} = E_{1n} \neq 0.$$

Assim, $M_n(F)$ também não satisfaz nenhum polinômio standard de grau menor que $2n-1$, pois se satisfizesse teríamos que St_{2n-1} seria uma identidade, o que é um absurdo. E respondendo às perguntas que fizemos acima, temos um importante resultado conhecido como **Teorema de Amitsur-Levitzki.**

Teorema 2.3.6 ([19], Teorema 1.7.7). *A álgebra $M_n(F)$ satisfaz o polinômio standard St_{2n}.*

Concluímos assim que o menor grau de um polinômio standard satisfeito por $M_n(F)$ é $2n$.

2.4 PI-expoente

Seja F um corpo de característica zero. Considere a sequência de codimensões $\{c_n(A)\}_{n\geq 1}$. Vamos introduzir a noção de PI-expoente, mostrar como calculá-lo e também daremos alguns exemplos. Antes de definir o PI-expoente vejamos um importante teorema conhecido como **Teorema das codimensões de Regev**.

Teorema 2.4.1 ([32]). *Se A é uma álgebra que satisfaz uma identidade de grau $d \geq 1$, então $c_n(A) \leq (d-1)^{2n}$ para todo $n \geq 1$.*

O que este teorema nos diz é que, para cada PI-álgebra, existe β inteiro não-negativo tal que

$$0 \leq c_n(A) \leq \beta^n.$$

Assim, $\{\sqrt[n]{c_n(A)}\}_{n\geq 1}$ é uma sequência limitada e portanto faz sentido falar em limite superior e inferior desta sequência.

Definição 2.4.2. *Para qualquer PI-álgebra A, defina*

$$\overline{\exp}(A) := \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)} \quad e \quad \underline{\exp}(A) := \liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}.$$

Caso tenhamos $\overline{\exp}(A) = \underline{\exp}(A)$ então a sequência $\{\sqrt[n]{c_n(A)}\}_{n\geq 1}$ possui limite. Neste caso, defina o ***PI-expoente de*** *A como*

$$\exp(A) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{c_n(A)}.$$

Vejamos alguns exemplos de PI-expoente.

Exemplo 2.4.3. *No Exemplo 2.2.9 vimos que se A é uma álgebra nilpotente com índice de nilpotência m, então $c_n(A) = 0$ se $n \geq m$. Neste caso,*

$$\overline{\exp}(A) = \underline{\exp}(A) = 0.$$

Logo,

$$\exp(A) = 0.$$

Exemplo 2.4.4. *Como veremos no Teorema 3.2.7, $c_n(E) = 2^{n-1}$. Logo,*

$$\exp(E) = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2^{n-1}} = 2.$$

Em 1980, Amitsur formulou a seguinte conjectura:

Conjectura 2.4.5. *Dada uma PI-álgebra A qualquer,* $\exp(A)$ *existe e é um inteiro não-negativo.*

Mais tarde, na década de 90, A. Giambruno e M. Zaicev provaram esta conjectura no caso em F é um corpo de característica zero, a partir do seguinte resultado:

Teorema 2.4.6 (Giambruno e Zaicev)**.** *Seja A uma PI-álgebra sobre um corpo F. Então existem um inteiro $q \geq 0$ e constantes C_1, C_2, r_1, r_2 tais que $C_1 \neq 0$ e*

$$C_1 n^{r_1} q^n \leq c_n(A) \leq C_2 n^{r_2} q^n.$$

A demonstração pode ser encontrada nos artigos [15] e [16]. Como conclusão do resultado acima, temos que o PI-expoente existe e é o inteiro $q \geq 0$ do enunciado. A pergunta agora é: quem é este inteiro q? Existe alguma forma de determiná-lo? Em resposta a tais perguntas, considere A uma F-álgebra de dimensão finita e seja

$$A = B_1 \oplus \cdots \oplus B_m \dotplus J$$

sua decomposição de Wedderburn-Malcev, onde $J = J(A)$ é o radical de Jacobson de A e cada B_i é uma subálgebra simples de A. Considere todos os produtos do tipo

$$B_{i_1}JB_{i_2}J\cdots JB_{i_r} \neq \{0\}, \tag{2.1}$$

onde $B_{i_1},\ldots,B_{i_r}$ são subálgebras distintas contidas no conjunto $\{B_1,\ldots,B_m\}$ com $r \geq 1$. Defina

$$\tilde{q} := \max \dim_F(B_{i_1} \oplus \cdots \oplus B_{i_r}) \tag{2.2}$$

como sendo a maior dimensão das subálgebras $B_{i_1} \oplus \cdots \oplus B_{i_r}$ tais que $B_{i_1},\ldots,B_{i_r}$ satisfazem a condição da Equação (2.1). No caso em que F é um corpo algebricamente fechado, é possível provar que $\tilde{q} = q$, ou seja, $\exp(A) = \tilde{q}$ (veja [19], Proposição 6.5.1). Temos assim o seguinte resultado:

Teorema 2.4.7. *Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo F algebricamente fechado de característica zero. Então $\exp(A)$ existe e é o inteiro $\tilde{q}$ definido em (2.2).*

O exemplo a seguir mostra como este fato pode ser útil.

Exemplo 2.4.8. *Considere F um corpo algebricamente fechado e $UT_2(F)$ a álgebra das matrizes triangulares superiores 2×2 com entradas em F. Com a notação do Exemplo 1.4.11 temos que $B_1JB_2 \neq \{0\}$. Logo $\exp(UT_2(F)) = \dim_F(B_1 \oplus B_2) = 2$.*

Lembrando que o objetivo principal deste trabalho é estudar álgebras com crescimento polinomial das codimensões, isto é, álgebras cuja sequência de codimensões satisfaz $c_n(A) \leq \alpha n^t$ para todo n e certas constantes α e t, terminamos esta seção mostrando como relacionar tais álgebras com o PI-expoente.

Proposição 2.4.9. *Seja A uma PI-álgebra. Então $\{c_n(A)\}_{n\geq 1}$ é polinomialmente limitada se, e somente se, $\exp(A) \leq 1$.*

Demonstração. Suponha $\{c_n(A)\}_{n\geq 1}$ polinomialmente limitada. Então existem constantes α, t tais que $c_n(A) \leq \alpha n^t$. Considere primeiramente o caso em que $\alpha = 0$, ou seja, em que $c_n(A) = 0$. Então A é uma álgebra nilpotente e como vimos no Exemplo 2.4.3, $\exp(A) = 0$ e a proposição está provada para $\alpha = 0$.

Considere agora $\alpha > 0$. Assim, temos

$$\exp(A) \leq \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{\alpha n^t} = \lim_{n\to\infty} e^{\ln \sqrt[n]{\alpha n^t}} = \lim_{n\to\infty} e^{\frac{1}{n}(\ln \alpha n^t)} = \lim_{n\to\infty} e^{\left(\frac{\ln \alpha}{n} + t\frac{\ln n}{n}\right)}.$$

Como $\displaystyle\lim_{n\to\infty}\left(\frac{\ln \alpha}{n} + t\frac{\ln n}{n}\right) = 0$ segue que $\displaystyle\lim_{n\to\infty} e^{\left(\frac{\ln \alpha}{n} + t\frac{\ln n}{n}\right)} = 1$. Logo $\exp(A) \leq 1$ também para $\alpha > 0$.

Reciprocamente, suponha $\exp(A) \leq 1$. Então $(\exp(A))^n \leq 1$. Pelo Teorema 2.4.6, temos que

$$c_n(A) \leq C_2 n^{r_2} q^n \leq C_2 n^{r_2}$$

e isto conclui a demonstração. $\square$

Capítulo 3

Representações de S_n e PI-álgebras

Neste capítulo estudaremos as representações do grupo simétrico S_n através da teoria desenvolvida por Alfred Young. Veremos como esta teoria tem grande importância no estudo das PI-álgebras e alguns resultados aqui apresentados serão muito utilizados nos capítulos finais.

No decorrer deste capítulo vamos assumir que F é um corpo de característica zero.

3.1 Representações do Grupo Simétrico

Seja $n \geq 1$ um inteiro. Uma **partição** λ de n é uma sequência finita de inteiros $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r)$ tal que $\lambda_1 \geq \cdots \geq \lambda_r > 0$ e $\sum_{i=1}^{r} \lambda_i = n$. Escrevemos $\lambda \vdash n$ ou $|\lambda| = n$. Por exemplo, $\lambda = (4{,}3{,}1{,}1)$ e $\mu = (4{,}2{,}2{,}1)$ são partições de $n = 9$.

Se $r = 1$ então $\lambda_1 = n$ e escrevemos $\lambda = (n)$. No caso em que $\lambda_1 = \cdots = \lambda_n = 1$ escrevemos $\lambda = (1^n)$. Mais geralmente, vamos escrever $\lambda = (k^d)$ quando $\lambda = (\underbrace{k, \ldots, k}_{d\ vezes})$ e $n = kd$.

Relembre que toda permutação $\pi \in S_n$ tem uma decomposição em ciclos disjuntos que é única a menos da ordem dos fatores. Assim, se $\pi \in S_n$ e $\pi = (a_{11} \ldots a_{1\lambda_1}) \ldots (a_{r1} \ldots a_{r\lambda_r})$ é uma decomposição em ciclos disjuntos com $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \cdots \geq \lambda_r$ dizemos que $(\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ é o **tipo de decomposição** de π. Pode-se verificar que dois elementos de S_n são conjugados se, e somente se, eles têm o mesmo tipo de decomposição. Isto significa que as classes de conjugação de S_n são caracterizadas pelos tipos de decomposição. Logo, a partição $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ determina unicamente a classe de conjugação de π. Como o número de S_n-caracteres irredutíveis é igual ao número de classes de conjugação de S_n segue que todos os caracteres irredutíveis de S_n podem ser indexados por partições de n. Portanto, podemos enunciar o seguinte resultado:

Proposição 3.1.1. *Sejam F um corpo de característica zero e $n \geq 1$ um inteiro. Então existe uma correspondência biunívoca entre os S_n-caracteres irredutíveis e as partições de n. Assim, denotando por χ_λ o caracter irredutível correspondente a $\lambda \vdash n$, teremos que $\{\chi_\lambda \mid \lambda \vdash n\}$ é um conjunto completo de caracteres irredutíveis de S_n. Denote por $d_\lambda = \chi_\lambda(1)$ o grau de χ_λ, $\lambda \vdash n$. Então*

$$FS_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} I_\lambda \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} M_{d_\lambda}(F)$$

onde I_λ é um ideal bilateral minimal.

No fim desta seção iremos escrever explicitamente cada componente I_λ e assim refinaremos a decomposição da álgebra de grupo FS_n.

Se $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \vdash n$, o **diagrama de Young** associado a λ é o subconjunto finito de $\mathbb{Z} \times \mathbb{Z}$ definido como

$$D_\lambda = \{(i,j) \in \mathbb{Z} \times \mathbb{Z} \mid i = 1, \ldots, r \text{ e } j = 1, \ldots, \lambda_i\}.$$

Em outras palavras, o diagrama de Young D_λ consiste de n boxes distribuídos em r linhas de modo que o número de boxes na i-ésima linha é exatamente λ_i.

Exemplo 3.1.2. *Se $\lambda = (4,3,1,1)$ e $\mu = (4,2,2,1)$ então*

$$D_\lambda = \ydiagram{4,3,1,1} \quad e \ D_\mu = \ydiagram{4,2,2,1} \ .$$

Para uma partição $\lambda \vdash n$ vamos denotar por λ' a **partição conjugada** de λ. Escrevemos $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_s)$ onde λ'_j é o número de boxes na coluna j de λ. Desta forma, o diagrama $D_{\lambda'}$ é obtido de D_λ ao trocar as linhas pelas colunas. Note que as partições acima $\lambda = (4,3,1,1)$ e $\mu = (4,2,2,1)$ são partições conjugadas.

Seja $\lambda \vdash n$. Uma **tabela de Young** T_λ do diagrama D_λ é um preenchimento dos boxes de D_λ com os inteiros $1,2,\ldots,n$. Dizemos que T_λ é uma tabela do **tipo** λ e, quando necessário, vamos escrever $T_\lambda = D_\lambda(a_{ij})$, onde a_{ij} é o inteiro no box (i,j). Observe que existem $n!$ tabelas de Young associadas a cada partição λ de n.

Exemplo 3.1.3. *Para a partição $\lambda = (2,1)$,*

$$T_\lambda^{(1)} = \begin{ytableau} 1 & 2 \\ 3 \end{ytableau}\ , T_\lambda^{(2)} = \begin{ytableau} 1 & 3 \\ 2 \end{ytableau}\ , T_\lambda^{(3)} = \begin{ytableau} 2 & 1 \\ 3 \end{ytableau}\ ,$$

$$T_\lambda^{(4)} = \begin{array}{|c|c|}\hline 2 & 3 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\ , T_\lambda^{(5)} = \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 1 \\ \hline 2 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\ \ e\ T_\lambda^{(6)} = \begin{array}{|c|c|}\hline 3 & 2 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}$$

são todas as tabelas do tipo λ.

Definição 3.1.4. *Uma tabela* T_λ *do tipo* λ *é* ***standard*** *se os inteiros em cada linha e em cada coluna de* T_λ *crescem da esquerda para a direita e de cima para baixo, respectivamente.*

Exemplo 3.1.5. *Seja* $\lambda = (4,2,1)$ *e considere as tabelas:*

$$T_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 3 & 5 & 6 \\ \hline 2 & 7 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2} 4 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array} \qquad e\ T_\lambda^* = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 5 & 6 & 7 \\ \hline 4 & 3 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2} 2 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\ .$$

Temos que T_λ *é um exemplo de tabela standard do tipo* λ *e* T_λ^* *não é standard.*

Existe uma importante relação entre tabelas standard e o grau dos S_n-caracteres irredutíveis. Pode-se provar que, dada uma partição $\lambda \vdash n$, o número de tabelas standard do tipo λ é igual ao grau d_λ de χ_λ. O inteiro d_λ pode ser calculado pela conhecida Fórmula do Gancho. A fim de explicitá-la introduziremos mais algumas definições.

Para qualquer box $(i,j) \in D_\lambda$ definimos o **gancho** com extremidade em (i,j) como sendo o conjunto

$$\{(i,k); j \leq k \leq \lambda_i\} \cup \{(l,j); i < l \leq \lambda'_j\}.$$

Observe que o gancho com extremidade em (i,j) é o conjunto dos boxes da linha i que estão à direita do box (i,j), incluindo o box (i,j), e os boxes da coluna j que estão abaixo do box (i,j). Se denotarmos por h_{ij} o número de boxes no gancho com extremidade em (i,j) então

$$h_{ij} = \lambda_i - (j-1) + \lambda'_j - i = \lambda_i + \lambda'_j - i - j + 1.$$

Exemplo 3.1.6. *Se* $\lambda = (4,3,1)$ *então o gancho com extremidades em* $(1,2)$ *é o conjunto de boxes marcados com* $\times$ *na figura abaixo*

$$D_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline \ & \times & \times & \times \\ \hline \ & \times & \ & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-3} \ & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1}\end{array}\ .$$

Temos assim que $h_{12} = 4$.

Teorema 3.1.7 (Fórmula do Gancho). *Se $\lambda \vdash n$ então*

$$d_\lambda = \frac{n!}{\displaystyle\prod_{i,j} h_{ij}},$$

onde o produto percorre todos os boxes de D_λ.

A demonstração do teorema acima pode ser vista no Teorema 2.3.21 de [21].

Exemplo 3.1.8. *Vamos calcular d_λ para algumas partições:*

1. *Para $\lambda = (2,2,1)$ temos o seguinte diagrama de Young*

$$D_\lambda = \begin{array}{|c|c|}\hline & \\ \hline & \\ \hline \\ \cline{1-1} \end{array}$$

e $d_\lambda = \dfrac{5!}{4 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 1} = 5.$

2. *Para $\lambda = (n)$*

$$D_{(n)} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & \cdots & \\ \hline \end{array}$$

temos que $d_{(n)} = \dfrac{n!}{n \cdot (n-1) \cdots 2 \cdot 1} = 1.$

3. *Para $\lambda^{(k)} = (k,1^{n-k})$*

$$D_{\lambda^{(k)}} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline & & \cdots & \\ \hline \\ \cline{1-1} \vdots \\ \cline{1-1} \\ \cline{1-1} \end{array}$$

temos que $d_{\lambda^{(k)}} = \dfrac{n!}{n(k-1)!(n-k)!} = \dfrac{(n-1)!}{(k-1)!(n-1-(k-1))!} = \binom{n-1}{k-1}.$

Vale destacar que, conforme mencionamos anteriormente, d_λ é exatamente o número de tabelas standard do tipo λ. Por exemplo, no caso em que $\lambda = (2,2,1)$ vimos acima que $d_\lambda = 5$ e temos as seguintes tabelas standard:

$$T_\lambda^{(1)} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline 5 \\ \cline{1-1} \end{array}, T_\lambda^{(2)} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1} \end{array}, T_\lambda^{(3)} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 4 \\ \hline 5 \\ \cline{1-1} \end{array}, T_\lambda^{(4)} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 3 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 4 \\ \cline{1-1} \end{array} \text{ e } T_\lambda^{(5)} = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 4 \\ \hline 2 & 5 \\ \hline 3 \\ \cline{1-1} \end{array}.$$

Definição 3.1.9. *Se $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_r) \vdash n$, o* ***estabilizador-linha*** *de uma tabela de Young T_λ é dado por*

$$R_{T_\lambda} = S_{\lambda_1}(a_{11}, a_{12}, \ldots, a_{1\lambda_1}) \times \cdots \times S_{\lambda_r}(a_{r1}, a_{r2}, \ldots, a_{r\lambda_r})$$

onde $S_{\lambda_i}(a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{i\lambda_i})$ denota o grupo simétrico agindo sobre os inteiros $a_{i1}, a_{i2}, \ldots, a_{i\lambda_i}$. O ***estabilizador-coluna*** *é dado por*

$$C_{T_\lambda} = S_{\lambda'_1}(a_{11}, a_{21}, \ldots, a_{\lambda'_1 1}) \times \cdots \times S_{\lambda'_s}(a_{1\lambda_1}, a_{2\lambda_1}, \ldots, a_{\lambda'_s \lambda_1})$$

onde $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_s)$ é a partição conjugada de λ.

Note que, como o próprio nome diz, R_{T_λ} (C_{T_λ}, respectivamente) é o subgrupo de S_n que consiste de todas as permutações que estabilizam as linhas (as colunas, respectivamente) de T_λ.

Exemplo 3.1.10. *Se considerarmos $\lambda = (4,2,1)$ e a tabela de Young do tipo λ*

$$T_\lambda = \begin{array}{|c|c|c|c|} \hline 3 & 2 & 6 & 1 \\ \hline 5 & 7 & \multicolumn{2}{c}{} \\ \cline{1-2} 4 & \multicolumn{3}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \; .$$

Então $R_{T_\lambda} = S_4(1,2,3,6) \times S_2(5,7) \times S_1(4)$ e $C_{T_\lambda} = S_3(3,4,5) \times S_2(2,7) \times S_1(6) \times S_1(1)$.

Fixando uma partição $\lambda \vdash n$ e uma tabela de Young T_λ, podemos usar os subgrupos R_{T_λ} e C_{T_λ} para definir o seguinte elemento de FS_n:

$$e_{T_\lambda} = \sum_{\sigma \in R_{T_\lambda}} \sum_{\tau \in C_{T_\lambda}} (sgn\ \tau)\sigma\tau,$$

onde $sgn\ \tau$ é o sinal da permutação τ. Pode-se provar que o elemento e_{T_λ} é um idempotente essencial, isto é, existe $a \in F$ tal que $e_{T_\lambda}^2 = a e_{T_\lambda}$ e ainda é possível provar que $a = \frac{n!}{d_\lambda}$. Note que, como a está em F, então e_{T_λ} e $\frac{e_{T_\lambda}}{a}$ geram o mesmo ideal à esquerda, isto é, $FS_n e_{T_\lambda} = FS_n \frac{e_{T_\lambda}}{a}$.

Temos ainda que, dada uma partição $\lambda \vdash n$, o grupo simétrico S_n age sobre conjunto das tabelas de Young do tipo λ da seguinte maneira: se $\sigma \in S_n$ e $T_\lambda = D_\lambda(a_{ij})$ então $\sigma T_\lambda = D_\lambda(\sigma(a_{ij}))$.

Exemplo 3.1.11. *Considere*

$$T_\lambda = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 5 & 2 \\ \hline 3 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \quad e \; T^*_\lambda = \begin{array}{|c|c|} \hline 4 & 2 \\ \hline 3 & 5 \\ \hline 1 & \multicolumn{1}{c}{} \\ \cline{1-1} \end{array} \; .$$

Então $T^*_\lambda = (14253)T_\lambda$.

Dados $\sigma \in S_n$, e λ partição de n, então $e_{\sigma T_\lambda} = \sigma e_{T_\lambda}\sigma^{-1}$. De fato, se $\{b_1, \ldots, b_r\} \subseteq \{a_1, \ldots, a_k\}$ e $\eta = (b_1 \ldots b_r)$ é um r-ciclo em S_k então $(\sigma(b_1) \ldots \sigma(b_r)) = \sigma\eta\sigma^{-1}$. Assim,

$$S_k(\sigma(a_1), \ldots, \sigma(a_k)) = \sigma S_k(a_1, \ldots, a_1)\sigma^{-1}$$

e isso implica que $R_{\sigma T_\lambda} = \sigma R_{T_\lambda}\sigma^{-1}$ e $C_{\sigma T_\lambda} = \sigma C_{T_\lambda}\sigma^{-1}$. Consequentemente, temos que

$$\begin{aligned}
\sigma e_{T_\lambda}\sigma^{-1} &= \sigma\left(\sum_{\rho\in R_{T_\lambda}}\sum_{\tau\in C_{T_\lambda}}(sgn\ \tau)\rho\tau\right)\sigma^{-1} = \left(\sum_{\rho\in R_{T_\lambda}}\sigma\rho\sigma^{-1}\right)\left(\sum_{\tau\in C_{T_\lambda}}(sgn\ \sigma\tau\sigma^{-1})\sigma\tau\sigma^{-1}\right)\\
&= \left(\sum_{\rho'\in\sigma R_{T_\lambda}\sigma^{-1}}\rho'\right)\left(\sum_{\tau'\in\sigma C_{T_\lambda}\sigma^{-1}}(sgn\ \tau')\tau'\right) = \left(\sum_{\rho'\in R_{\sigma T_\lambda}}\rho'\right)\left(\sum_{\tau'\in C_{\sigma T_\lambda}}(sgn\ \tau')\tau'\right)\\
&= e_{\sigma T_\lambda}.
\end{aligned}$$

Logo, $e_{\sigma T_\lambda} = \sigma e_{T_\lambda}\sigma^{-1}$.

Assim, se T_λ e T_λ^* são duas tabelas do mesmo tipo então existe $\sigma \in S_n$ tal que $T_\lambda^* = \sigma T_\lambda$, o que implica $e_{T_\lambda^*} = e_{\sigma T_\lambda} = \sigma e_{T_\lambda}\sigma^{-1}$. Segue que

$$FS_n e_{T_\lambda^*} = FS_n\sigma e_{T_\lambda}\sigma^{-1} = FS_n e_{T_\lambda}\sigma^{-1}.$$

Portanto,

$$\begin{aligned}
\phi : FS_n e_{T_\lambda} &\longrightarrow FS_n e_{T_\lambda^*}\\
a &\longmapsto a\sigma^{-1}
\end{aligned}$$

é um isomorfismo de $FS_n e_{T_\lambda}$ em $FS_n e_{T_\lambda^*}$ e assim $FS_n e_{T_\lambda}$ e $FS_n e_{T_\lambda^*}$ são isomorfos como S_n-módulos.

Pode-se verificar também que $FS_n e_{T_\lambda}$ é um ideal à esquerda minimal de FS_n. Em resumo temos o seguinte resultado:

Proposição 3.1.12. *Para qualquer tabela de Young T_λ do tipo $\lambda \vdash n$, o elemento e_{T_λ} é um idempotente essencial minimal de FS_n e $FS_n e_{T_\lambda}$ é um ideal à esquerda minimal de FS_n com caracter χ_λ. Se T_λ e T_λ^* são tabelas de Young do mesmo tipo então e_{T_λ} e $e_{T_\lambda^*}$ são conjugados em FS_n através de algum $\sigma \in S_n$. Além disso, $\sigma e_{T_\lambda}\sigma^{-1} = e_{\sigma T_\lambda}$.*

Finalmente obtemos a decomposição explícita de I_λ e consequentemente de FS_n.

Proposição 3.1.13. *Seja I_λ o ideal bilateral minimal de FS_n correspondente à partição $\lambda \vdash n$. Então*

$$I_\lambda = \sum_{T_\lambda} FS_n e_{T_\lambda},$$

onde a soma percorre todas as tabelas de Young do tipo λ. Ainda, se $T_1,\ldots,T_{d_\lambda}$ são todas as tabelas standard do tipo λ, então

$$I_\lambda = \dot{+}_{i=1}^{d_\lambda} FS_n e_{T_i}.$$

3.2 Ação de S_n sobre polinômios multilineares

Nesta seção vamos apresentar uma ação de S_n sobre espaço dos polinômios multilineares em n variáveis fixas.

Relembre que

$$P_n = span_F\{x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n)} | \sigma \in S_n\}$$

é o espaço vetorial dos polinômios multilineares nas variáveis $x_1,\ldots,x_n$ na álgebra livre $F\langle X\rangle$. Considere

$$\begin{array}{cccc} \phi: & FS_n & \longrightarrow & P_n \\ & \sum_{\sigma\in S_n}\alpha_\sigma\sigma & \longmapsto & \sum_{\sigma\in S_n}\alpha_\sigma x_{\sigma(1)}\cdots x_{\sigma(n)}. \end{array}$$

A função ϕ assim definida é um isomorfismo linear. Este isomorfismo faz com que P_n se torne um S_n-módulo. O grupo S_n age à esquerda de P_n permutando as variáveis de um polinômio. Isto é, para um polinômio $f(x_1,\ldots,x_n) \in P_n$ e para $\sigma \in S_n$ temos que

$$\sigma f(x_1,\ldots,x_n) = f(x_{\sigma(1)},\ldots,x_{\sigma(n)}).$$

Observação 3.2.1. *Se $f = f(x_1,\ldots,x_n)$ e T_λ é uma tabela de Young, onde $\lambda \vdash n$, então o polinômio $e_{T_\lambda}f$ é combinação linear de polinômios alternados em λ_1 conjuntos disjuntos de variáveis. Como exemplo considere, o polinômio $f(x_1,x_2,x_3,x_4) = x_2x_1x_3x_4$ e, para $\lambda = (2,1,1)$, considere a tabela de Young*

$$T_\lambda = \begin{array}{|c|c|} \hline 1 & 4 \\ \hline 2 & \\ \cline{1-1} 3 & \\ \cline{1-1} \end{array}\ .$$

Temos que $R_{T_\lambda} = S_2(1,4)$ e $C_{T_\lambda} = S_3$. Daí segue que

$$\begin{aligned} e_{T_\lambda}f &= \left(\sum_{\sigma\in S_2(1,4)}\sigma\left(\sum_{\tau\in S_3}(sgn\ \tau)\tau\right)\right)(x_2x_1x_3x_4) \\ &= (x_2x_1x_3x_4 - x_2x_3x_1x_4 - x_1x_2x_3x_4 + x_1x_3x_2x_4 - x_3x_1x_2x_4 + x_3x_2x_1x_4) \\ &\quad +(x_2x_4x_3x_1 - x_2x_3x_4x_1 - x_4x_2x_3x_1 + x_4x_3x_2x_1 - x_3x_4x_2x_1 + x_3x_2x_4x_1). \end{aligned}$$

O primeiro parênteses é um polinômio alternado nos conjuntos $\{x_1,x_2,x_3\}$ e $\{x_4\}$. Já o segundo parênteses é um polinômio alternado nos conjuntos $\{x_2,x_3,x_4\}$ e $\{x_1\}$.

Agora, seja A uma PI-álgebra e $Id(A)$ o T-ideal das suas identidades. Como T-ideais são fechados sob permutações das variáveis, temos que $P_n \cap Id(A)$ é um S_n-módulo à esquerda de P_n. Portanto

$$P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap Id(A)}$$

tem uma estrutura de S_n-módulo.

Definição 3.2.2. *Para $n \geq 1$, o S_n-caracter de $P_n(A)$ é chamado **n-ésimo cocaracter de** A e é denotado por $\chi_n(A)$.*

Se decompormos o n-ésimo cocaracter em caracteres irredutíveis, obtemos

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda, \tag{3.1}$$

onde χ_λ é o S_n-caracter irredutível associado à partição $\lambda \vdash n$ e $m_\lambda \geq 0$ é a correspondente multiplicidade.

Quando necessário, vamos utilizar as notações

$$P_n^L(A) = \frac{P_n}{P_n \cap Id_L(A)}, \quad c_n^L(A) = \dim_L P_n^L(A) \quad \text{e} \quad \chi_n^L(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda^L \chi_\lambda$$

para enfatizar que estamos trabalhando sobre o corpo L.

Note que, ao estender o corpo base, a decomposição do n-ésimo cocaracter não se altera. De fato, temos o seguinte resultado:

Proposição 3.2.3 ([19], Teorema 4.1.9)**.** *Sejam A uma PI-álgebra sobre um corpo F, $F \subseteq K$ uma extensão e $\bar{A} = A \otimes_F K$. Então*

$$c_n^F(A) = c_n^K(\bar{A}).$$

Além disso, considerando a decomposição de $\chi_n^F(A)$ e $\chi_n^K(A)$ em componentes irredutíveis temos que $m_\lambda^F = m_\lambda^K$ para toda partição $\lambda \vdash n$.

A seguir apresentaremos uma ferramenta que nos ajudará a encontrar o n-ésimo cocaracter.

Teorema 3.2.4. *Seja A uma PI-álgebra com n-ésimo cocaracter $\chi_n(A)$ dado por (3.1). Para uma partição $\mu \vdash n$, a multiplicidade m_μ é igual a zero se, e somente se, para qualquer tabela de Young T_μ do tipo μ e qualquer polinômio $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in P_n$, a álgebra A satisfaz a identidade $e_{T_\mu} f \equiv 0$.*

Demonstração. Como vimos na Proposição 3.1.1, a álgebra de grupo FS_n pode ser escrita da seguinte forma

$$FS_n = \bigoplus_{\lambda \vdash n} I_\lambda.$$

Por outro lado, de acordo com a Proposição 3.1.13, se $\mathcal{T}$ denota o conjunto das tabelas standards do tipo λ, então cada I_λ é da forma

$$I_\lambda = \sum_{T_\lambda \ tabela} FS_n e_{T_\lambda} = \dot{+}_{T_\lambda \in \mathcal{T}} FS_n e_{T_i}.$$

Agrupando os módulos isomorfos temos que

$$I_\lambda \cong d_\lambda M_\lambda$$

onde $M_\lambda = FS_n e_{T_\lambda}$, para alguma tabela T_λ com $\lambda \vdash n$. Portanto, teremos

$$FS_n \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} (d_\lambda M_\lambda)\,. \tag{3.2}$$

Lembrando que $P_n(A)$ é um FS_n-módulo temos que

$$P_n(A) \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} (m_\lambda M_\lambda)$$

onde m_λ é a multiplicidade associada à partição λ. Fixando $\mu \vdash n$ temos que $m_\mu = 0$ se, e somente se, $I_\mu P_n(A) = \{0\}$. De fato,

$$I_\mu P_n(A) \cong I_\mu \left(\bigoplus_{\lambda \vdash n} m_\lambda M_\lambda \right) = \bigoplus_{\lambda \vdash n} m_\lambda I_\mu M_\lambda.$$

Como $I_\mu M_\lambda \subseteq I_\mu I_\lambda$ segue que $I_\mu M_\lambda = \{0\}$ se $\mu \neq \lambda$. Portanto, $I_\mu P_n(A) \cong m_\mu I_\mu M_\mu$. Uma vez que $e_{T_\mu} \in I_\mu$, $e_{T_\mu} \in M_\mu$ e $e_{T_\mu}^2 \neq 0$ temos que $I_\mu M_\mu \neq \{0\}$ e assim $I_\mu P_n(A) = \{0\}$ se, e somente se, $m_\mu = 0$.

Por outro lado, temos claramente que $I_\mu P_n(A) = \{0\}$ se, e somente se, $I_\mu P_n \subseteq P_n \cap Id(A)$, ou seja, se e somente se

$$\left(\sum_{T_\mu} FS_n e_{T_\mu} \right) P_n \subseteq P_n \cap Id(A).$$

Por sua vez, isso acontece se, e somente se, $e_{T_\mu} f \in Id(A)$ para todo $f \in P_n$ e toda tabela T_μ do tipo μ. Portanto, m_μ é igual a zero se, e somente se, para qualquer tabela T_μ do tipo μ e qualquer polinômio $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in P_n$, a álgebra A satisfaz a identidade $e_{T_\mu} f \equiv 0$. $\square$

Exemplo 3.2.5. *Como vimos no Exemplo 2.2.8, se C é uma álgebra comutativa não nilpotente, então $c_n(C) = 1$. Neste caso, temos $\chi_n(C) = \chi_{(n)}$. Para ver isto, considere a partição $(n) \vdash n$, o polinômio $f = f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdots x_n$ e a tabela*

$$T_{(n)} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & \cdots & n \\ \hline\end{array}\ .$$

É fácil ver que $e_{T_{(n)}} f = \sum_{\sigma \in S_n} x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}$ não é uma identidade de C. Portanto, $m_{(n)} \geq 1$. Além disso, pelo item ii) do Exemplo 3.1.8, temos que $d_{(n)} = 1$. Assim, temos que

$$1 = c_n(C) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda d_\lambda \geq m_{(n)} d_{(n)} = m_{(n)} \geq 1.$$

Logo, $m_{(n)} = 1$. Concluímos assim que $\chi_n(C) = \chi_{(n)}$.

Exemplo 3.2.6. *Considere a álgebra de Grassmann E de dimensão infinita sobre F. Vamos mostrar que, para $k = 1, 2, \ldots$, a multiplicidade $m_{\lambda^{(k)}}$ associada à partição $\lambda^{(k)} = (k, 1^{n-k})$ de n é não nula. Para isto, apresentaremos uma tabela de Young do tipo $\lambda^{(k)}$ e um polinômio $f \in P_n$ tais que $e_{T_{\lambda^{(k)}}} f$ não é uma identidade em E, e como consequência do teorema acima concluiremos que $m_{\lambda^{(k)}} \geq 1$.*

Considere a seguinte tabela de Young:

$$T_{\lambda^{(k)}} = \begin{array}{|c|c|c|c|}\hline 1 & 2 & \cdots & k \\ \hline k+1 \\ \cline{1-1} \vdots \\ \cline{1-1} n-1 \\ \cline{1-1} n \\ \cline{1-1}\end{array}$$

onde os inteiros $1, \ldots, k$ foram colocados de forma crescente da esquerda para a direita na primeira linha e os inteiros $k+1, \ldots, n$ foram colocados também de forma crescente de cima para baixo nos boxes restantes. Então temos que $R_{T_\lambda} = S_k(1, \ldots, k)$ e $C_{T_\lambda} = S_{n-k+1}(1, k+1, \ldots, n-1, n)$. Considere também $f = f(x_1, \ldots, x_n) = x_1 \cdots x_n$. Então

$$\begin{aligned} e_{T_\lambda} f &= \left(\sum_{\sigma \in R_{T_\lambda}} \sigma \right) \left(\sum_{\tau \in C_{T_\lambda}} (sgn\ \tau)\tau \right) x_1 \cdots x_n \\ &= \left(\sum_{\sigma \in S_k} \sigma \right) \left(\sum_{\tau \in S_{n-k+1}(1, k+1, \ldots, n-1, n)} (sgn\ \tau) x_{\tau(1)} x_2 \cdots x_k x_{\tau(k+1)} \cdots x_{\tau(n)} \right). \end{aligned}$$

Agora vamos substituir $x_1, \ldots, x_n$ por $\bar{x}_1, \ldots, \bar{x}_n$, respectivamente, onde

$$\bar{x}_1 = e_1,\ \bar{x}_{k+1} = e_2,\ \ldots,\ \bar{x}_n = e_{n-k+1}$$

e

$$\bar{x}_2 = e_{n-k+2}e_{n-k+3},\ \bar{x}_3 = e_{n-k+4}e_{n-k+5},\ \ldots,\ \bar{x}_k = e_{n+k-2}e_{n+k-1}.$$

Observe que $\bar{x}_2,\bar{x}_3,\ldots,\bar{x}_k \in E^{(0)}$ *e* $\bar{x}_1,\bar{x}_{k+1},\ldots,\bar{x}_n \in E^{(1)}$. *Portanto* $\bar{x}_2,\bar{x}_3,\ldots,\bar{x}_k$ *são elementos centrais e* $\bar{x}_1,\bar{x}_{k+1},\ldots,\bar{x}_n$ *são elementos que anti-comutam. Desta forma, obtemos*

$$e_{T_\lambda} f(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n) = \underbrace{\left(\sum_{\sigma\in S_k}\sigma\right)\bar{x}_2\cdots\bar{x}_k}_{(*)}\underbrace{\left(\sum_{\tau\in S_{n-k+1}(1,k+1,\ldots,n-1,n)}(sgn\ \tau)\bar{x}_{\tau(1)}\bar{x}_{\tau(k+1)}\cdots\bar{x}_{\tau(n)}\right)}_{(**)}.$$

Note que $(*)$ *é igual a* $k!\,\bar{x}_2\cdots\bar{x}_k$ *e* $(**)$ *é igual a* $(n-k+1)!\,\bar{x}_1\bar{x}_{k+1}\cdots\bar{x}_n$. *Segue então que*

$$\begin{aligned} e_{T_\lambda} f(\bar{x}_1,\ldots,\bar{x}_n) &= (n-k+1)!\,k!\,\bar{x}_2\cdots\bar{x}_k\bar{x}_1\bar{x}_{k+1}\cdots\bar{x}_n \\ &= (n-k+1)!\,k!\,\bar{x}_1\bar{x}_{k+1}\cdots\bar{x}_n\bar{x}_2\cdots\bar{x}_k \\ &= (n-k+1)!\,k!\,e_1e_2\cdots e_{n-k+1}e_{n-k+2}e_{n-k+3}\cdots e_{n+k-2}e_{n+k-1} \neq 0. \end{aligned}$$

No teorema a seguir vamos calcular o T-ideal, as sequências de codimensões e de cocaracteres da álgebra de Grassmann.

Teorema 3.2.7. *Seja* E *a álgebra de Grassmann de dimensão infinita sobre um corpo de característica zero. Então as seguintes condições são satisfeitas:*

1. *O* T*-ideal das identidades de* E *é gerado pelo polinômio* $[[x_1,x_2],x_3]$;
2. $c_n(E) = 2^{n-1}$;
3. $\chi_n(E) = \sum_{k=1}^{n} \chi_{\lambda^{(k)}}$, *onde* $\lambda^{(k)} = (k,1^{n-k})$.

Demonstração. Como vimos no Exemplo 2.1.7,

$$[[x_1,x_2],x_3] \equiv 0 \tag{3.3}$$

em E. Seja I o T-ideal gerado por $[[x_1,x_2],x_3]$. Defina

$$P_n(I) = \frac{P_n}{P_n \cap I}$$

e seja $c_n(I) = \dim_F P_n(I)$. Claramente, $I \subseteq Id(E)$ e portanto $c_n(E) \leq c_n(I)$. Afirmamos que

$$[x,y][z,y] \equiv 0 \pmod{I} \tag{3.4}$$

De fato,

$$0 \equiv [[zy,y],x] = [[z,y]y,x] = [z,y]yx - x[z,y]y \equiv [z,y]yx - xy[z,y] \pmod{I},$$

já que $[z,y]y \equiv y[z,y] \pmod{I}$. Por outro lado,

$$0 \equiv [[z,y],yx] = [z,y]yx - yx[z,y] \pmod{I}.$$

Assim temos que $xy[z,y] - yx[z,y] \equiv 0 \pmod{I}$ e portanto $[x,y][z,y] \equiv 0 \pmod{I}$.

Linearizando a Equação (3.4) obtemos

$$[x,y_1][z,y_2] + [x,y_2][z,y_1] \equiv 0 \pmod{I}$$

e portanto

$$[x,y_1][z,y_2] \equiv -[x,y_2][z,y_1] \pmod{I}. \tag{3.5}$$

Das Equações (3.3) e (3.5) e da Observação 2.2.6 temos que qualquer polinômio multilinear em I é combinação linear de produtos do tipo

$$x_{i_1} \cdots x_{i_k}[x_{j_1},x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2m-1}},x_{j_{2m}}]$$

com $i_1 < \ldots < i_k$; $j_1 < \ldots < j_{2m}$; $2m + k = n$. Note que a quantidade de polinômios desta forma é igual a 2^{n-1}. Com efeito, x_1 pode ocupar duas posições: x_{i_1} ou x_{j_1}. Após determinar a posição de x_1 vamos colocar a variável x_2. Esta também pode ser colocada em duas posições: se x_1 está em x_{i_1} então x_2 será colocada em x_{i_2} ou em x_{j_1}; se x_1 está em x_{j_1} então x_2 será colocada em x_{i_1} ou em x_{j_2}. Com raciocínio análogo, pode-se verificar que cada uma das variáveis $x_3, \ldots ,x_{n-1}$ podem ser dispostas em duas posições. Após colocar todas estas variáveis, a posição a ser ocupada por x_n fica unicamente determinada e assim o número de polinômios satisfazendo as condições acima é 2^{n-1}. Com isso, temo que $c_n(I) \leq 2^{n-1}$.

Agora, para concluir o teorema, basta lembrar que $m_{\lambda^{(k)}} \geq 1$ (veja exemplo anterior). De fato, com isto temos que

$$c_n(E) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda d_\lambda \geq \sum_{k=1}^{n} d_{\lambda^{(k)}}.$$

Como vimos no item 3. do Exemplo 3.1.8, $d_{\lambda^{(k)}} = \binom{n-1}{k-1}$ e daí segue que

$$c_n(E) \geq \sum_{k=1}^{n} \binom{n-1}{k-1} = 2^{n-1}.$$

Assim, $m_{\lambda^{(k)}} = 1$ para $k = 1,2, \ldots,$ e $m_\mu = 0$ para qualquer outra partição μ de n. Logo,

$$\chi_n(E) = \sum_{k=1}^{n} \chi_{\lambda^{(k)}}.$$

Por fim, sendo $c_n(E) = c_n(I)$ temos que $\dim_F(P_n \cap Id(E)) = \dim_F(P_n \cap I)$ e como $I \subset Id(E)$ segue que $P_n \cap Id(E) = P_n \cap I$. Mas como $Id(E)$ é gerado pelos polinômios multilineares que ele contém (veja a Proposição 2.2.10) concluímos que $Id(E) = I$ e o teorema está provado. $\square$

Por fim, apresentamos um resultado que será utilizado no Capítulo 5. Lembrando que $P_n(A)$ tem uma estrutura de FS_n-módulo, podemos escrevê-lo como

$$P_n(A) = \dot{+} m_\lambda M_\lambda,$$

onde M_λ denota o S_n-módulo irredutível correspondente à partição $\lambda \vdash n$ e m_λ é a respectiva multiplicidade.

Lema 3.2.8. *Se* $\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$ *então* $m_\lambda \leq d_\lambda$.

Demonstração. Se $\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$, então $P_n(A) \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} (m_\lambda M_\lambda)$, onde cada $M_\lambda = FS_n e_{T_\lambda}$ para alguma tabela T_λ com $\lambda \vdash n$. Por outro lado, P_n é isomorfo à FS_n e $FS_n \cong \bigoplus_{\lambda \vdash n} (d_\lambda M_\lambda)$ (veja a Equação (3.2)). Logo, $m_\lambda \leq d_\lambda$. $\square$

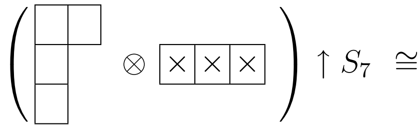
3.3 A Regra de Littlewood-Richardson

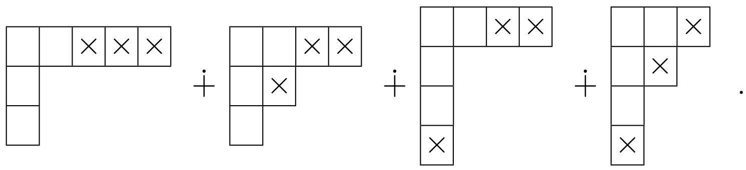
Considere a imersão de $S_n \times S_m$ em S_{n+m} onde S_m age sobre $\{n+1, \ldots, n+m\}$. Sejam N um S_n-módulo irredutível e M um S_m-módulo irredutível. Então existem partições $\lambda \vdash n$ e $\mu \vdash m$ tais que N e M estão associadas à λ e μ, respectivamente, e assim podemos escrever $N = N_\lambda$ e $M = M_\mu$. O módulo $N_\lambda \otimes_F M_\mu$ tem claramente uma estrutura de $S_n \times S_m$-módulo. Utilizaremos a **regra de Littlewood-Richardson** para calcular o módulo induzido $(N_\lambda \otimes_F M_\mu) \uparrow S_{m+n}$. Vamos descrever a regra por meio de exemplos para facilitar o entendimento.

Considere $\lambda \vdash n$ e $\mu \vdash m$. Primeiramente veremos como obtemos o módulo $(N_\lambda \otimes_F M_{(m)}) \uparrow S_{n+m}$, onde (m) denota a partição de m cujo diagrama de Young só possui uma linha com m boxes. Através do regra de Littlewood-Richardson, temos que $(N_\lambda \otimes_F M_{(m)}) \uparrow S_{n+m}$ é uma soma direta de módulos irredutíveis, os quais por sua vez estão associados à partições de $n+m$ cujos diagramas de Young são obtidos da seguinte maneira: adicionamos ao diagrama D_λ os m boxes do outro diagrama de modo que ainda tenhamos um diagrama de Young e que quaisquer dois destes m boxes não estejam na mesma coluna.

Para entender como este processo funciona, considere o seguinte exemplo, onde a fim de simplificar a notação estamos identificando um S_{n+m}-módulo com o correspondente diagrama de Young.

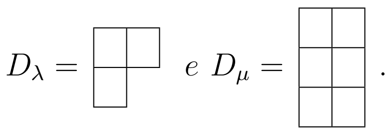
Exemplo 3.3.1. *Sejam* $\lambda = (2,1,1)$ *e* $m = 3$. *Então*





Agora vejamos um caso mais geral. Se $\lambda \vdash n$ e $\mu \vdash m$ então o módulo induzido $(N_\lambda \otimes_F M_\mu) \uparrow S_{n+m}$ também é uma soma de módulos irredutíveis que por sua vez estão associados à partições de $n + m$ cujos respectivos diagramas de Young são obtidos da seguinte forma: os boxes da primeira linha de D_μ são adicionados ao diagrama D_λ seguindo a regra dada acima - quaisquer dois novos boxes não podem estar na mesma coluna e o diagrama obtido é um diagrama de Young. Feito isso, vamos adicionar, aos diagramas obtidos no processo anterior, os boxes da segunda linha de D_μ: dois deles não podem ficar na mesma coluna e além disso em uma linha só podem ser colocados x novos boxes se nas linhas de cima já tivermos, no total, pelo menos x boxes que foram colocados no processo imediatamente anterior. Deste modo, prosseguimos com todas as linhas de D_μ. Vale ressaltar que, ao fim de cada processo, os diagramas obtidos são sempre de Young. Para esclarecer como este processo funciona, vejamos um exemplo:

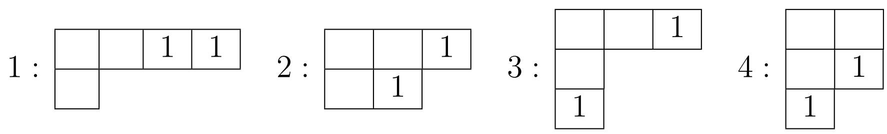
Exemplo 3.3.2. *Considere* $\lambda = (2,1)$ *e* $\mu = (2,2,2)$. *Temos os respectivos diagramas:*



Para facilitar, vamos preencher o diagrama D_μ *da seguinte forma:*

$$D_\mu = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 1 \\ \hline 2 & 2 \\ \hline 3 & 3 \\ \hline \end{array}\,.$$

1ª Etapa: *Vamos adicionar os boxes da primeira linha de* D_μ *que estão preenchidos com 1 da mesma maneira que fizemos no exemplo anterior. Obtemos estes diagramas:*



2^a ***Etapa:*** *Agora vamos adicionar a cada um dos diagramas da 1^a etapa os boxes da segunda linha de D_μ que estão preenchidos com o número 2. Dois destes boxes não podem ser estar na mesma coluna. Além disso a quantidade de boxes com o número 2 em uma linha deve ser menor ou igual a quantidade total de boxes com o número 1 nas linhas anteriores.*

Do diagrama 1. obtemos os seguintes diagramas:

$$a : \begin{ytableau} \none & \none & 1 & 1 \\ \none & 2 & 2 \end{ytableau} \qquad b : \begin{ytableau} \none & \none & 1 & 1 \\ \none & 2 \\ 2 \end{ytableau}$$

Do diagrama 2. obtemos os seguintes diagramas:

$$a : \begin{ytableau} \none & \none & 1 \\ \none & 1 & 2 \\ 2 \end{ytableau} \qquad b : \begin{ytableau} \none & \none & 1 \\ \none & 1 \\ 2 & 2 \end{ytableau}$$

Do diagrama 3. obtemos o seguinte diagrama:

$$a : \begin{ytableau} \none & \none & 1 \\ \none & 2 \\ 1 \\ 2 \end{ytableau}$$

Do diagrama 4. obtemos o seguinte diagrama:

$$a : \begin{ytableau} \none & \none \\ \none & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 \end{ytableau}$$

3^a ***Etapa:*** *Por fim, adicionamos os boxes preenchidos com o número 3 às tabelas obtidas na 2^a etapa. Do mesmo modo, o número de boxes com o número 3 em uma linha deve ser menor ou igual à quantidade total de boxes com o número 2 nas linhas anteriores e não pode conter dois boxes com o número 3 em uma mesma coluna.*

Do diagrama 1.a. obtemos o seguinte diagrama:

$$\begin{ytableau} \none & \none & 1 & 1 \\ \none & 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{ytableau}$$

Do diagrama 1.b. obtemos o seguinte diagrama:

$$\begin{ytableau} \ & \ & 1 & 1 \\ \ & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 \end{ytableau}$$

Do diagrama 2.a. obtemos o seguinte diagrama:

$$\begin{ytableau} \ & \ & 1 \\ \ & 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 \end{ytableau}$$

Do diagrama 2.b. obtemos o seguinte diagrama:

$$\begin{ytableau} \ & \ & 1 \\ \ & 1 \\ 2 & 2 \\ 3 & 3 \end{ytableau}$$

Do diagrama 3.a. obtemos o seguinte diagrama:

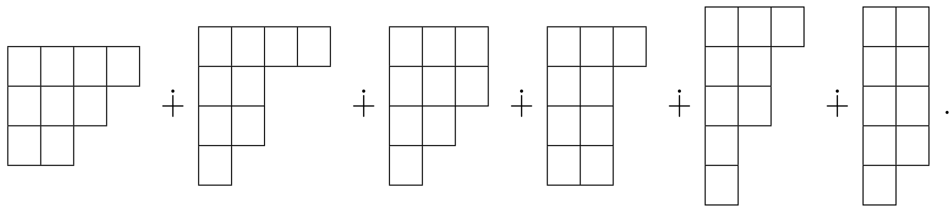
$$\begin{ytableau} \ & \ & 1 \\ \ & 2 \\ 1 & 3 \\ 2 \\ 3 \end{ytableau}$$

Finalmente, do diagrama 4.a. obtemos o seguinte diagrama:

$$\begin{ytableau} \ & \ \\ \ & 1 \\ 1 & 2 \\ 2 & 3 \\ 3 \end{ytableau}$$

Portanto, concluímos que

$$\left(\ydiagram{2,1} \otimes \ydiagram{2,2,2} \right) \uparrow S_9 \cong$$



Observação 3.3.3. *Sejam $\lambda \vdash n$ e $\mu \vdash m$. Considere W_ν um módulo irredutível que aparece na decomposição de $(N_\lambda \otimes_F M_\mu) \uparrow S_{n+m}$. Pela regra de Littlewood-Richardson, temos:*

i) Desde que D_ν é obtido adicionando apropriadamente os boxes de D_μ ao diagrama D_λ, se existe uma constante β tal que $n - \lambda_1 > \beta$, então o número de boxes abaixo da primeira linha de D_ν também será maior que β.

ii) Desde que todos os boxes abaixo da primeira linha de D_μ são colocados abaixo da primeira linha de D_λ, se existe uma constante β tal que $m - \mu_1 > \beta$, teremos que o número de boxes abaixo da primeira linha de D_ν também será maior que β.

Capítulo 4

Álgebras com involução

4.1 Definições e exemplos

Vamos apresentar agora a definição de involução em uma F-álgebra e daremos alguns exemplos de álgebras com involução.

Definição 4.1.1. *Seja A uma F-álgebra. Uma aplicação linear $*: A \to A$ é dita uma* ***involução em A****, se para todo $x,y \in A$ e $\alpha \in F$ vale:*

(i) $(xy)^* = y^* x^*$;

(ii) $(x^*)^* = x$.

Dizemos que uma álgebra A é uma **álgebra com involução** se existe uma aplicação $*$ que satisfaz as condições da Definição 4.1.1.

Exemplo 4.1.2. ***A aplicação identidade em uma álgebra comutativa.***
Seja A uma álgebra comutativa e considere a aplicação

$$\begin{array}{rccc} *: & A & \to & A \\ & x & \mapsto & x. \end{array}$$

Claramente, as condições (i), (ii) e (iv) são satisfeitas. A condição (iii) segue do fato da álgebra ser comutativa e portanto a aplicação é uma involução.

Exemplo 4.1.3. ***Involução transposta em*** $M_n(F)$.
Seja $M_n(F)$ a álgebra de matrizes $n \times n$ sobre um corpo F. Para uma matriz $A = (a_{ij})$ considere

$$\begin{array}{rccc} t: & M_n(F) & \to & M_n(F) \\ & (a_{ij}) & \mapsto & (a_{ji}). \end{array}$$

Lembrando que F é um corpo, verifica-se facilmente que t é uma involução denominada transposta.

Exemplo 4.1.4. ***Involução simplética em*** $M_{2n}(F)$.

Seja $* : M_{2n}(F) \to M_{2n}(F)$ *definida da seguinte forma: para*

$$A = \begin{pmatrix} B & C \\ D & E \end{pmatrix} \in M_{2n}(F)$$

com $B,C,D,E \in M_n(F)$ *definimos*

$$A^* = \begin{pmatrix} E^t & -C^t \\ -D^t & B^t \end{pmatrix},$$

onde t *é a aplicação transposta definida no exemplo anterior. É fácil verificar que* $*$ *é uma involução, denominada simplética.*

Exemplo 4.1.5. *Involução na álgebra* G_2.

Considere a álgebra $G_2 := F \oplus F$. *Para* $x,y \in G_2$ *com* $x = x_1 + x_2$ *e* $y = y_1 + y_2$ *temos que*

$$xy = x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + x_2y_2$$

onde $x_1y_2 = x_2y_1 = 0$ *já que* G_2 *é soma direta como álgebra. Portanto,* $xy = x_1y_1 + x_2y_2$ *e para simplificar a notação vamos escrever apenas* $x = (x_1,x_2)$, $y = (y_1,y_2)$ *e*

$$xy = (x_1,x_2)(y_1,y_2) = (x_1y_1,x_2y_2).$$

A aplicação

$$\begin{array}{rccc} * : & G_2 & \to & G_2 \\ & (x,y) & \mapsto & (y,x) \end{array}$$

é uma involução em G_2. *Vamos verificar (iii):*

$$[(x,y)(\bar{x},\bar{y})]^* = (x\bar{x},y\bar{y})^* = (y\bar{y},x\bar{x}) = (\bar{y}y,\bar{x}x) = (\bar{y},\bar{x})(y,x) = (\bar{x},\bar{y})^*(x,y)^*.$$

Os demais itens da Definição 4.1.1 são imediatos.

Exemplo 4.1.6. *Considere a seguinte subálgebra de* $M_4(F)$

$$M = F(E_{11} + E_{44}) \dotplus FE_{12} \dotplus F(E_{22} + E_{33}) \dotplus FE_{34}$$

e defina a operação $*$ *da seguinte forma*

$$\begin{pmatrix} u & r & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & v \\ 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix}^* = \begin{pmatrix} u & v & 0 & 0 \\ 0 & s & 0 & 0 \\ 0 & 0 & s & r \\ 0 & 0 & 0 & u \end{pmatrix}.$$

Os itens (i), (ii) e (iv) da definição são claramente satisfeitos. O item (iii) pode ser verificado através de um cálculo simples. Concluímos assim que $*$ *é uma involução em* M.

Definição 4.1.7. *Seja A uma álgebra com involução. Dizemos que $a \in A$ é um **elemento simétrico** se $a^* = a$. O conjunto dos elementos simétricos de A é*

$$A^+ = \{a \in A \mid a^* = a\}.$$

*Por outro lado se $a \in A$ é tal que $a^* = -a$ dizemos que a é um **elemento anti-simétrico**. O conjunto dos elementos anti-simétricos de A é*

$$A^- = \{a \in A \mid a^* = -a\}.$$

Observe que se $char(F) \neq 2$ então $A = A^+ \dot{+} A^-$. De fato, $A^+ \cap A^- = \{0\}$ e além disso, dado $a \in A$, temos que

$$a = \underbrace{\frac{a + a^*}{2}}_{\in A^+} + \underbrace{\frac{a - a^*}{2}}_{\in A^-}.$$

Exemplo 4.1.8. *Considere a álgebra G_2. É fácil notar que*

$$G_2^+ = span_F\{(1,1)\} \quad e \quad G_2^- = span_F\{(1,-1)\}.$$

4.2 Álgebras de dimensão finita com involução

Um ideal I é $*$-invariante se $I^* = I$. Dizemos que uma álgebra A é **$*$-simples** se A não possui ideais não triviais $*$-invariantes. O objetivo desta seção é mostrar que se A é uma álgebra de dimensão finita com involução $*$ então podemos escrever $A = B \dot{+} J$, onde J é o radical de Jacobson, e a subálgebra B é semissimples $*$-invariante. Este resultado é análogo ao Teorema de Wedderburn-Malcev. Vamos assumir que $char(F) = 0$.

Exemplo 4.2.1. *A álgebra G_2 é $*$-simples.*

Considere a involução $*$ definida no Exemplo 4.1.5. Os únicos ideais bilaterais não triviais de G_2 são $F_1 = span_F\{(1,0)\}$ e $F_2 = span_F\{(0,1)\}$. Para ver isto, suponha que J seja um ideal bilateral não nulo diferente de F_1 e F_2. Então existe $(a,b) \in J$, com $a,b \neq 0$. Dado $(r_1,r_2) \in G_2$ temos que $(r_1a,r_2b) \in J$. Em particular, tomando $r_1 = 1$ e $r_2 = 0$ temos que $(a,0) \in J$. Desta forma, temos que $(1,0) \in J$ e com isso concluímos que $F_1 \subseteq J$. De maneira análoga, temos que $F_2 \subseteq J$ e segue que $F_1 \oplus F_2 \subseteq J$. Logo, $J = G_2$. Também é facil ver que $(F_1)^* = F_2$. Logo, G_2 é $*$-simples.

Proposição 4.2.2 ([17], Observação 1)**.** *Seja B uma álgebra semissimples com involução e $\dim_F B < \infty$. Então $B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_t$, onde $B_1, \ldots, B_t$ são álgebras $*$-simples.*

Demonstração. Suponha B semissimples. Seja $B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_n$ sua decomposição em componentes simples, onde os B_i's são todos os ideais bilaterais minimais de B (veja a Proposição 1.3.7). Como B_i^* também é ideal bilateral minimal de B segue que $B_i^* = B_j$ para algum $j \in \{1, \ldots, n\}$. Se $i = j$ escreva $C_i = B_i$ e claramente temos que C_i é $*$-simples. Se $i \neq j$ escreva $C_i = B_i \oplus B_j$. Daí temos

$$C_i^* = (B_i \oplus B_j)^* = B_i^* \oplus B_j^* = B_j \oplus B_i = C_i.$$

Além disso, é fácil ver que B_i e B_j são os únicos ideais bilaterais não triviais de C_i. No entanto, B_i e B_j não são $*$-invariantes, o que implica que C_i é $*$-simples. Então existe um subconjunto $\{k_1, \ldots, k_t\} \subseteq \{1, \ldots, n\}$ tal que

$$B = C_{k_1} \oplus \cdots \oplus C_{k_t},$$

onde cada C_{k_r} é $*$- simples. □

O radical de Jacobson de uma álgebra de dimensão finita com involução é $*$-invariante. Vejamos isto através do próximo lema.

Lema 4.2.3. *Sejam A uma álgebra de dimensão finita com involução $*$ sobre F e J seu radical de Jacobson. Então $J^* = J$.*

Demonstração. Observe primeiramente que J^* é um ideal de A. Como vimos na Proposição 1.4.4, J é nilpotente. Seja n o índice de nilpotência de J. Tome $j_1^*, \ldots, j_n^* \in J^*$. Temos que

$$j_1^* \cdots j_n^* = (j_n \cdots j_1)^* = 0^* = 0.$$

Portanto J^* é um ideal nilpotente. Pela Proposição 1.4.4, concluímos que

$$J^* \subseteq J.$$

Aplicando a involução na relação acima obtemos

$$J = (J^*)^* \subseteq J^*.$$

Logo, $J = J^*$. □

Na demonstração do próximo lema, $I \lhd_{max} A$ denotará um ideal à esquerda I maximal em A.

Lema 4.2.4. *Sejam A uma álgebra unitária de dimensão finita sobre um corpo F, B uma subálgebra de A e $J(B)$ seu radical de Jacobson. Se n é o índice de nilpotência de $J := J(A)$ e $J^{n-1} \subseteq J(B)$, então*

$$J(B/J^{n-1}) = J(B)/J^{n-1}.$$

Demonstração. Sejam I um ideal à esquerda de A com $I \supseteq J^{n-1}$ e $\tilde{I} = I/J^{n-1}$. Primeiramente, devemos observar que I é um ideal à esquerda maximal em A se, e somente se, $\tilde{I}$ é um ideal à esquerda maximal em A/J^{n-1}. De fato, se $\tilde{I}$ não é maximal em A/J^{n-1} então existe L/J^{n-1} ideal de A/J^{n-1} tal que $I/J^{n-1} \subsetneq L/J^{n-1} \subsetneq A/J^{n-1}$, o que implica $I \subsetneq L \subsetneq A$. Portanto, I não é um ideal à esquerda maximal em A. De maneira análoga, verifica-se que se $\tilde{I}$ é um ideal à esquerda maximal em A/J^{n-1} então I é um ideal à esquerda maximal em A.

Segue então da definição de radical de Jacobson que

$$J(B/J^{n-1}) = \bigcap_{\substack{I/J^{n-1} \lhd_{max} B/J^{n-1} \\ I \supseteq J^{n-1}}} I/J^{n-1} = \bigcap_{\substack{I \lhd_{max} B \\ I \supseteq J^{n-1}}} I/J^{n-1} = \left(\bigcap_{\substack{I \lhd_{max} B \\ I \supseteq J^{n-1}}} I \right) / J^{n-1} = J(B)/J^{n-1},$$

como queríamos. $\square$

Teorema 4.2.5 ([17], Teorema 4)**.** *Sejam A uma F-álgebra de dimensão finita com involução $*$ sobre um corpo de característica zero e J seu radical de Jacobson. Então $J^* = J$ e existe uma subálgebra semissimples maximal B tal que $B^* = B$ e $A = B \dotplus J$.*

Demonstração. Primeiramente, se $J = \{0\}$ então temos que $A = B$. Portanto, B é subálgebra semissimples maximal $*$-invariante. Agora considere $A = B \dotplus J$ onde B é uma subálgebra semissimples maximal de A e suponha $J \neq \{0\}$ e $J^2 = \{0\}$. Como B^* também é uma subálgebra semissimples maximal de A, pelo Teorema de Wedderburn-Malcev existe $y \in J$ tal que $B^* = (1-y)B(1-y)^{-1}$ e como $J^2 = \{0\}$ temos que $(1-y)^{-1} = 1 + y$ e, portanto, $B^* = (1-y)B(1+y)$. Ou seja, dado $b \in B$ existe $\bar{b} \in B$ tal que

$$b^* = (1-y)\bar{b}(1+y).$$

Assim, se $\bar{\bar{b}} \in B$ é tal que $\bar{b}^* = (1-y)\bar{\bar{b}}(1+y)$, então, desde que $1^* = 1$, temos que

$$\begin{aligned} b = (b^*)^* &= (1+y^*)\bar{b}^*(1-y^*) = (1+y^*)(1-y)\bar{\bar{b}}(1+y)(1-y^*) \\ &= \bar{\bar{b}} + \underbrace{\bar{\bar{b}}(y-y^*) + (y^*-y)\bar{\bar{b}}}_{\in J} + \underbrace{(y^*-y)\bar{\bar{b}}(y-y^*)}_{\in J^2 = \{0\}} \end{aligned}$$

Logo $b = \bar{\bar{b}} + j$, para algum $j \in J$. Portanto $b - \bar{\bar{b}} \in B \cap J = \{0\}$, o que implica que $b = \bar{\bar{b}}$. Assim,

$$b = b + b(y-y^*) - (y-y^*)b$$

o que implica $b(y-y^*) = (y-y^*)b$. Escrevendo $y = \frac{y+y^*}{2} + \frac{y-y^*}{2}$ e utilizando o fato de termos $J^2 = \{0\}$, pode-se verificar que $b^* = \left(1 - \frac{y+y^*}{2}\right) \bar{b} \left(1 + \frac{y+y^*}{2}\right)$. Portanto

$$B^* = (1-s)B(1+s)$$

onde $s^* = s = \frac{y+y^*}{2}$ é um elemento simétrico em J.

Vamos mostrar agora que

$$B' = \left(1 - \frac{s}{2}\right) B \left(1 + \frac{s}{2}\right)$$

é a álgebra que procuramos. Tome $a \in B'$. Então existe $b \in B$ tal que $a = \left(1 - \frac{s}{2}\right) b \left(1 + \frac{s}{2}\right)$ e assim

$$\begin{aligned} a^* &= \left(1 + \frac{s^*}{2}\right) b^* \left(1 - \frac{s^*}{2}\right) = \left(1 + \frac{s}{2}\right) (1-s)\, \bar{b}\, (1+s) \left(1 - \frac{s}{2}\right) \\ &= \left(1 - s + \frac{s}{2} - \frac{s^2}{2}\right) \bar{b} \left(1 + s - \frac{s}{2} - \frac{s^2}{2}\right) = \left(1 - \frac{s}{2}\right) \bar{b} \left(1 + \frac{s}{2}\right) \in B'. \end{aligned}$$

Logo, $(B')^* = B'$. A maximalidade e semissimplicidade de B' segue do fato de termos $B' \cong B$ e o teorema está provado quando $J^2 = \{0\}$.

Suponha agora que $J^n = \{0\}$ e $J^{n-1} \neq \{0\}$, $n > 2$. Como $J = J^*$ temos que $(J^{n-1})^* = J^{n-1}$. Assim A/J^{n-1} possui uma estrutura de álgebra com involução induzida. Além disso, $J(A/J^{n-1}) = J(A)/J^{n-1}$ o que implica $(J(A/J^{n-1}))^{n-1} = \{0\}$. Por indução em n, temos que A/J^{n-1} pode ser escrito como

$$A/J^{n-1} = B_1 \dotplus J_1 \tag{4.1}$$

onde B_1 é subálgebra semissimples maximal de A/J^{n-1} que é $*$-invariante e J_1 é o radical de Jacobson de A/J^{n-1}. Por outro lado, pelo Teorema da Correspondência, temos que $B_1 = B/J^{n-1}$, para alguma subálgebra B de A com $J^{n-1} \subseteq B$. Uma vez que B_1 é semissimples, segue que $J(B/J^{n-1}) = \{0\}$ e desta forma $J(B) = J^{n-1}$. Como $(J^{n-1})^2 \subseteq J^{2(n-1)} = \{0\}$ temos $(J(B))^2 = \{0\}$ e, desde que B é $*$-invariante (já que B_1 e J são $*$-invariantes), podemos aplicar o caso anterior. Temos assim que existe uma subálgebra semissimples maximal $\tilde{B}$ de B tal que

$$B = \tilde{B} \dotplus J(B) = \tilde{B} \dotplus J^{n-1} \quad \text{e} \quad \tilde{B}^* = \tilde{B}.$$

Além disso, como J_1 é o radical de Jacobson de A/J^{n-1} temos que $J_1 = J/J^{n-1}$ e assim, desde que $B_1 = B/J^{n-1}$, segue da Equação (4.1) que $A = B + J$. Portanto,

$$A = B + J = (\tilde{B} \dotplus J^{n-1}) + J = \tilde{B} + J.$$

Falta verificar que a última soma acima é direta. Para isto, considere $b \in \tilde{B}$ e $x \in J$ tais que

$$0 = b + x.$$

Considerando as classes em A/J^{n-1}, obtemos

$$\overline{0} = \overline{b} + \overline{x},$$

onde $\overline{b} \in B_1$ e $\overline{x} \in J_1$. Assim, desde que em (4.1) a soma é direta, temos que $\overline{b} = \overline{0}$, o que implica $b \in J^{n-1}$. Desta forma, $b \in J^{n-1} \cap \tilde{B} = \{0\}$, ou seja, $b = 0$ e segue disso que $x = 0$. Concluímos então que $A = \tilde{B} \dotplus J$, com $\tilde{B}$ subálgebra semissimples maximal $*$-invariante. □

4.3 $*$-identidades polinomiais

Considere A uma álgebra com involução $*$. O objetivo desta seção é fazer um estudo análogo àquele apresentado no Capítulo 2. Vamos começar estudando as $*$-identidades polinomiais de $(A,*)$.

Sejam $X = \{x_1,x_2,\ldots\}$ e F um corpo de característica zero. Denotamos por $F\langle X,*\rangle$ a álgebra livre associativa unitária gerada por $\{x_1,x_1^*,x_2,x_2^*,\ldots\}$. Note que $F\langle X,*\rangle$ tem uma involução induzida obtida estendendo-se linearmente a aplicação $*$ tal que

$$(x_i^*)^* = x_i,\ (x_i)^* = x_i^*$$

e ainda para $k \geq 2$

$$(x_{i_1}^{a_{i_1}} x_{i_2}^{a_{i_2}} \cdots x_{i_{k-1}}^{a_{i_{k-1}}} x_{i_k}^{a_{i_k}})^* = (x_{i_k}^{a_{i_k}})^* (x_{i_{k-1}}^{a_{i_{k-1}}})^* \cdots (x_{i_2}^{a_{i_2}})^* (x_{i_1}^{a_{i_1}})^*,$$

onde $a_{i_j} \in \{1,*\}$. Os elementos de $F\langle X,*\rangle$ são chamados de **$*$-polinômios**. Se $f \in F\langle X,*\rangle$ vamos escrever $f = f(x_1,x_1^*,\ldots,x_n,x_n^*)$ indicando que $x_1,\ldots,x_n$ são únicas variáveis de f podendo aparecer com involução ou não.

Definição 4.3.1. *Seja $f = f(x_1,x_1^*,\ldots,x_n,x_n^*) \in F\langle X,*\rangle$.*

*i) Se u é um monômio de f então o **grau de** u **na variável** x_i é o número de vezes que $x_i^{a_i}$ aparece em u onde $a_i \in \{1,*\}$, que denotaremos por $\deg_{x_i} u$;*

*ii) O **grau de** f **em** x_i é o maior $\deg_{x_i} u$ onde u é um monômio de f;*

*iii) Se, para todo $i = 1,\ldots,n$, x_i aparece em todos os monônios de f com grau 1 então dizemos que f é **multilinear**.*

Definição 4.3.2. *Seja A uma álgebra com involução $*$. Dado $f = f(x_1,x_1^*,\ldots,x_n,x_n^*) \in F\langle X,*\rangle$ dizemos que f é uma* ***$*$-identidade*** *de A se*

$$f(a_1,a_1^*,\ldots,a_n,a_n^*) = 0$$

para quaisquer $a_1,\ldots,a_n \in A$. Neste caso, escrevemos $f \equiv 0$ em $(A,*)$.

Exemplo 4.3.3. *$*$-identidades de G_2.*

Por definição, $G_2 = F \oplus F$ é uma álgebra comutativa. Portanto $[x_1,x_1^*]$, $[x_1,x_2^*]$, $[x_1^*,x_2^*]$ e $[x_1,x_2]$ são $*$-identidades em G_2.

Definição 4.3.4. *Dada uma álgebra A com involução $*$ definimos*

$$Id(A,*) = \{f \in F\langle X,*\rangle \mid f \equiv 0 \text{ em } (A,*)\}$$

como o ***conjunto das $*$-identidades*** *de A.*

O conjunto $Id(A,*)$ é um T_*-ideal de $F\langle X,*\rangle$, isto é, $Id(A,*)$ é um ideal de $F\langle X,*\rangle$ que é fechado sob todos os endomorfismos que comutam com a involução $*$. Isto significa que $Id(A,*)$ é fechado sob qualquer endomorfismo $\psi : F\langle X,*\rangle \to F\langle X,*\rangle$ que satisfaz

$$\begin{aligned}\psi(f(x_1,x_1^*,\ldots,x_n,x_n^*)) &= f(\psi(x_1),\psi(x_1^*),\ldots,\psi(x_n),\psi(x_n^*))\\ &= f(\psi(x_1),\psi(x_1)^*,\ldots,\psi(x_n),\psi(x_n)^*),\end{aligned}$$

para todo $f \in F\langle X,*\rangle$.

Definição 4.3.5. *Dizemos que dois conjuntos de $*$-polinômios são* ***$*$-equivalentes*** *se geram o mesmo T_*-ideal.*

Em analogia à Proposição 2.2.10 temos o seguinte resultado.

Proposição 4.3.6. *Seja F um corpo de característica zero. Então todo T_*-ideal é gerado pelos $*$-polinômios multilineares que ele contém.*

Seja

$$P_n(*) = span_F\{x_{\sigma(1)}^{a_1}\cdots x_{\sigma(n)}^{a_n} \mid \sigma \in S_n, a_i \in \{1,*\}\}$$

o espaço vetorial dos $*$-polinômios multilineares em $x_1,x_1^*,\ldots,x_n,x_n^*$. Defina

$$P_n(A,*) := \frac{P_n(*)}{P_n(*) \cap Id(A,*)}.$$

Definição 4.3.7. *A dimensão de $P_n(A,*)$ sobre F é denominada a* ***n-ésima $*$-codimensão*** *de A e denotada por $c_n(A,*)$.*

O próximo lema nos mostra uma relação entre a n-ésima codimensão e a n-ésima $*$-codimensão de uma álgebra A com involução $*$.

Lema 4.3.8. *Seja A uma álgebra com involução $*$. Então $c_n(A) \leq c_n(A,*)$.*

Demonstração. Se $f \in Id(A)$ então $f \in F\langle X\rangle$. Além disso, f também está em $Id(A,*)$. Por outro lado, se $f \in F\langle X\rangle \cap Id(A,*)$ então $f \in Id(A)$. Portanto,

$$Id(A) = F\langle X\rangle \cap Id(A,*).$$

Por definição, $c_n(A)$ é o número máximo de elementos de P_n que são linearmente independentes módulo $Id(A)$. Seja $\{m_i\}_{i=1}^t$ um conjunto de elementos de P_n linearmente independentes módulo $Id(A)$, com $t = c_n(A)$. Se

$$\sum_{i=1}^{t} \alpha_i m_i \equiv 0 \pmod{Id(A,*)}$$

então, como $m_i \in F\langle X\rangle$ para todo $i = 1,\ldots,t$, temos

$$\sum_{i=1}^{t} \alpha_i m_i \equiv 0 \pmod{Id(A,*) \cap F\langle X\rangle}$$

e assim

$$\sum_{i=1}^{t} \alpha_i m_i \equiv 0 \pmod{Id(A)}.$$

Como $\{m_i\}_{i=1}^t$ é linearmente independente módulo $Id(A)$, concluímos que $\alpha_i = 0$ para $i = 1,\ldots,t$. Portanto, $\{m_i\}_{i=1}^t$ ainda é linearmente independente módulo $Id(A,*)$. Conluímos assim que $c_n(A) \leq c_n(A,*)$. $\square$

Agora, se escrevemos $y_i = x_i + x_i^*$ e $z_i = x_i - x_i^*$ para $i = 1,2,\ldots,$ então

$$x_i = \frac{y_i + z_i}{2} \quad \text{e} \quad x_i^* = \frac{y_i - z_i}{2}.$$

Assim temos que

$$P_n(*) = span_F\{w_{\sigma(1)} \cdots w_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n, w_i = y_i \text{ } ou \text{ } w_i = z_i, i = 1,\ldots n\}.$$

A fim de facilitar nosso estudo, para $r = 0,\ldots,n$, vamos definir

$$P_{r,n-r} = span_F\{w_{\sigma(1)}...w_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n, w_i = y_i \text{ para } i=1,...,r \text{ } e \text{ } w_i = z_{n-i+1} \text{ para } i=r+1,...,n\}$$

como o espaço dos polinômios multilineares nas variáveis $y_1,\ldots,y_r,z_1,\ldots,z_{n-r}$.

Note que as $*$-identidades de uma álgebra com involução $*$ podem ser escritas tanto utilizando as variáveis $x_1,x_1^*,x_2,x_2^*,\ldots$, quanto utilizando as variáveis do conjunto $\{y_1,z_1,y_2,z_2,\ldots\}$.

Exemplo 4.3.9. *Como vimos no Exemplo 4.3.3,* $[x_1,x_1^*]$, $[x_1,x_2^*]$, $[x_1^*,x_2^*]$ *e* $[x_1,x_2]$ *são* $*$*-identidades da álgebra* G_2*. Observe que cada uma destas identidades pode ser reescrita utilizando as variáveis* y_1, y_2, z_1 *e* z_2*. Em particular,* $[x_1,x_2^*]$ *pode ser reescrita da seguinte forma*

$$[x_1,x_2^*] = \left[\frac{y_1+z_1}{2},\frac{y_2-z_2}{2}\right] = \frac{1}{4}\left([y_1,y_2]+[z_1,y_2]-[y_1,z_2]-[z_1,z_2]\right).$$

Por outro lado, cada comutador de Lie que aparece do lado direito da igualdade acima também é uma identidade de G_2*. De fato,*

$$[y_1,z_2] = [x_1+x_1^*,x_2-x_2^*] = [x_1,x_2]-[x_1,x_2^*]+[x_1^*,x_2]-[x_1^*,x_2^*].$$

De modo análogo, verifica-se que os demais comutadores também são identidades de G_2*.*

Defina então

$$P_{r,n-r}(A,*) := \frac{P_{r,n-r}}{P_{r,n-r}\cap Id(A,*)}.$$

Observe que o estudo de $P_n(*)\cap Id(A,*)$ se resume ao estudo de $P_{r,n-r}\cap Id(A,*)$ com $r=0,\dots,n$ e, como veremos mais adiante, $P_{r,n-r}(A,*)$ tem uma estrutura de $S_r\times S_{n-r}$-módulo o que facilita todo o trabalho.

Definição 4.3.10. *A dimensão de* $P_{r,n-r}(A,*)$ *sobre* F *é chamada* $(r,n-r)$***-ésima*** $*$***-codimensão*** *da álgebra* A *e é denotada por* $c_{r,n-r}(A,*)$*.*

O próximo resultado irá relacionar $c_n(A,*)$ e $c_{r,n-r}(A,*)$.

Teorema 4.3.11 ([7], Teorema 1.3)**.** *Seja* A *uma álgebra com involução* $*$*. Então*

$$c_n(A,*) = \sum_{r=0}^{n}\binom{n}{r}c_{r,n-r}(A,*).$$

A seguir, caracterizaremos o T_*-ideal das identidades de $(G_2,*)$ e utilizaremos o teorema anterior para calcular a n-ésima $*$-codimensão da álgebra G_2.

Proposição 4.3.12 ([10], Lema 1)**.** *Para todo* $n\geq 1$,

1. *O* T_**-ideal das* $*$*-identidades de* $(G_2,*)$ *é gerado pelos* $*$*-polinômios* $[y_1,y_2]$, $[y_1,z_1]$ *e* $[z_1,z_2]$*;*

2. $c_n(G_2,*) = 2^n$.

Demonstração. Seja $I = \langle [y_1,y_2], [y_1,z_1], [z_1,z_2] \rangle_{T_*}$ o T_*-ideal gerado por $[y_1,y_2]$, $[y_1,z_1]$ e $[z_1,z_2]$. Para, $r = 0, \ldots ,n$, defina

$$P_{r,n-r}(I) := \frac{P_{r,n-r}}{P_{r,n-r} \cap I}.$$

Dado um monômio qualquer

$$w_{\sigma(1)} \cdots w_{\sigma(n)} \in P_{r,n-r}$$

temos que

$$w_{\sigma(1)} \cdots w_{\sigma(n)} \equiv y_1 \cdots y_r z_1 \cdots z_{n-r} \pmod{I}.$$

Portanto, se $c_{r,n-r}(I)$ denota a dimensão de $P_{r,n-r}(I)$ então

$$c_{r,n-r}(I) \leq 1.$$

Por outro lado, como $[y_1,y_2]$, $[y_1,z_1]$ e $[z_1,z_2]$ são $*$-identidades de $(G_2,*)$, é claro que $I \subseteq Id(G_2,*)$ e segue que

$$c_{r,n-r}(G_2,*) \leq c_{r,n-r}(I).$$

Mas ainda temos que $1 \leq c_{r,n-r}(G_2,*)$. Para verificar esta última desigualdade basta exibir um $*$-polinômio de $P_{r,n-r}$ que não é uma identidade de $(G_2,*)$. Seja

$$f(y_1, \ldots , y_r,z_1, \ldots ,z_{n-r}) = y_1 \cdots y_r z_1 \cdots z_{n-r} \in P_{r,n-r}$$

e considere a substituição

$$y_1 = \cdots = y_r = (1,1) \;\; e \;\; z_1 = \cdots = z_{n-r} = (1, -1).$$

Teremos

$$f(\underbrace{(1,1), \ldots ,(1,1)}_{r \ vezes}, \underbrace{(1, -1), \ldots ,(1, -1)}_{n-r \ vezes}) = (1,(-1)^{n-r}) \neq 0.$$

Logo,

$$1 \leq c_{r,n-r}(G_2,*) \leq c_{r,n-r}(I) \leq 1$$

e portanto, para $r = 0, \ldots ,n$, temos $c_{r,n-r}(G_2,*) = c_{r,n-r}(I) = 1$. Desta forma concluímos que

$$c_n(G_2,*) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} c_{r,n-r}(G_2,*) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} = 2^n.$$

Finalmente, já que $c_{r,n-r}(G_2,*) = c_{r,n-r}(I)$ segue que $\dim_F(P_{r,n-r} \cap I) = \dim_F(P_{r,n-r} \cap Id(G_2,*))$ e lembrando que $I \subseteq Id(G_2,*)$ concluímos que $P_{r,n-r} \cap I = P_{r,n-r} \cap Id(G_2,*)$, para todo $r = 0, \ldots ,n$. Uma vez que $Id(G_2,*)$ é gerado pelos $*$-polinômios multilineares que ele contém (veja Proposição 4.3.6), concluímos que $Id(G_2,*) = I$ e a proposição está provada.

$\square$

Para finalizar a seção, apresentamos um teorema que mostra que um T_*-ideal não está contido em $Id(G_2,*)$ se, e somente se, z^d pertence a este ideal, onde z é uma variável anti-simétrica.

Teorema 4.3.13 ([10], Teorema 2)**.** *Seja A uma álgebra com involução $*$. Então $Id(A,*) \nsubseteq Id(G_2,*)$ se, e somente se, $z^d \in Id(A,*)$, para algum $d \geq 1$, onde z é uma variável anti-simétrica.*

Demonstração. Se $z^d \in Id(A,*)$, então $Id(A,*) \nsubseteq Id(G_2,*)$ pois, claramente, z^d não é uma identidade em $(G_2,*)$.

Agora suponha que $Id(A,*) \nsubseteq Id(G_2,*)$. Então existe $f = f(y_1, \ldots ,y_r,z_1, \ldots , z_m) \in Id(A,*)$ que não está em $Id(G_2,*)$. Podemos assumir que f é multilinear. Consequentemente, f não se anula em uma base de G_2. Sejam $a = (1,1)$ e $b = (1,-1)$. Temos que $\{a\}$ e $\{b\}$ são bases de G_2^+ e G_2^-, respectivamente, e portanto $\{a,b\}$ é uma base de G_2. Observe que $b^2 = a$. Assim,

$$0 \neq f(\underbrace{a, \ldots ,a}_{r\ vezes}, \underbrace{b, \ldots ,b}_{m\ vezes}) = f(\underbrace{b^2, \ldots ,b^2}_{r\ vezes}, \underbrace{b, \ldots ,b}_{m\ vezes}) = \alpha b^{m+2r},$$

o que implica $\alpha \neq 0$. Agora note que z^2 é um elemento simétrico. Portanto,

$$Id(A,*) \ni f(\underbrace{z^2, \ldots ,z^2}_{r\ vezes}, \underbrace{z, \ldots ,z}_{m\ vezes}) = \alpha z^{m+2r}.$$

Uma vez que temos $\alpha \neq 0$, concluímos que $z^{m+2r} \in Id(A,*)$. $\square$

4.4 Ações

Ao longo desta seção, A denotará uma F-álgebra com involução $*$ e F um corpo de característica zero.

4.4.1 Ação de H_n sobre $P_n(*)$

Definição 4.4.1. *Considere o grupo simétrico S_n e seja G um grupo. O conjunto*

$$\{(a_1, \ldots ,a_n; \sigma) \mid a_i \in G, \sigma \in S_n\}$$

junto com a lei de composição

$$(a_1, \ldots ,a_n; \sigma)(b_1, \ldots ,b_n; \tau) := (a_1 b_{\sigma^{-1}(1)}, \ldots ,a_n b_{\sigma^{-1}(n)}; \sigma\tau)$$

é um grupo chamado ***produto entrelaçado*** *de G por S_n e é denotado por $G \wr S_n$.*

Definição 4.4.2. *O* ***grupo hiperoctaedral*** $H_n = \mathbb{Z}_2 \wr S_n$ *é o produto entrelaçado de* $\mathbb{Z}_2 = \{1,*\}$*, o grupo multiplicativo de ordem* 2*, por* S_n*.*

Considere

$$\begin{array}{cccc} \phi: & FH_n & \longrightarrow & P_n(*) \\ & \displaystyle\sum_{(a;\sigma)\in H_n} \alpha_{(a;\sigma)}(a;\sigma) & \longmapsto & \displaystyle\sum_{(a;\sigma)\in H_n} \alpha_{(a;\sigma)} x_{\sigma(1)}^{a_{\sigma(1)}} \cdots x_{\sigma(n)}^{a_{\sigma(n)}} \end{array},$$

onde, a fim de simplificar a notação, estamos escrevendo $a = (a_1, \ldots, a_n)$ com $a_i \in \mathbb{Z}_2$. A função ϕ é um isomorfismo que faz com que $P_n(*)$ se torne um H_n-módulo. Mais precisamente, H_n age à esquerda de $P_n(*)$ da seguinte maneira: se $f(x_1,x_1^*,\ldots,x_n,x_n^*) \in P_n(*)$ e $(a_1,\ldots,a_n;\sigma) \in H_n$ então

$$(a_1,\ldots,a_n;\sigma)f(x_1,x_1^*,\ldots,x_n,x_n^*) = f(x_{\sigma(1)}^{a_{\sigma(1)}},(x_{\sigma(1)}^{a_{\sigma(1)}})^*,\ldots,x_{\sigma(n)}^{a_{\sigma(n)}},(x_{\sigma(n)}^{a_{\sigma(n)}})^*).$$

Exemplo 4.4.3. *Considere*

$$f = f(x_1,x_1^*,x_2,x_2^*,x_3,x_3^*) = x_1x_2x_3^* + x_3x_1^*x_2 + x_1^*x_3x_2^* \in P_3(*)$$

e $(a_1,a_2,a_3;\sigma) = (1,*,*;(132)) \in H_3$*. Então*

$$\begin{aligned} (a_1,a_2,a_3;\sigma)f &= x_{\sigma(1)}^{a_{\sigma(1)}} x_{\sigma(2)}^{a_{\sigma(2)}} (x_{\sigma(3)}^{a_{\sigma(3)}})^* + x_{\sigma(3)}^{a_{\sigma(3)}} (x_{\sigma(1)}^{a_{\sigma(1)}})^* x_{\sigma(2)}^{a_{\sigma(2)}} + (x_{\sigma(1)}^{a_{\sigma(1)}})^* x_{\sigma(3)}^{a_{\sigma(3)}} (x_{\sigma(2)}^{a_{\sigma(2)}})^* \\ &= x_3^*x_1(x_2^*)^* + x_2^*(x_3^*)^*x_1 + (x_3^*)^*x_2^*x_1^* = x_3^*x_1x_2 + x_2^*x_3x_1 + x_3x_2^*x_1^*. \end{aligned}$$

Pode-se verificar que o ideal das $*$-identidades $Id(A,*)$ é fechado sob a ação de H_n e assim $P_n(*) \cap Id(A,*)$ é um H_n-módulo. Portanto

$$P_n(A,*) = \frac{P_n(*)}{P_n(*) \cap Id(A,*)}$$

também tem uma estrutura de H_n-módulo.

Definição 4.4.4. *Chamamos o* H_n*-caracter de* $P_n(A,*)$ *de* n***-ésimo*** $*$***-cocaracter*** *de* A *e denotamos por* $\chi_n(A,*)$*.*

Em [37], A. Regev prova a existência de uma correspondência biunívoca entre os H_n-caracteres irredutíveis e os pares de partições (λ,μ) tais que $\lambda \vdash r$ e $\mu \vdash n-r$, $r = 0,\ldots,n$. Portanto, o H_n-caracter irredutível associado ao par (λ,μ) será denotado por $\chi_{\lambda,\mu}$. Assim, podemos escrever

$$\chi_n(A,*) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{\substack{\lambda\vdash r \\ \mu\vdash n-r}} \bar{m}_{\lambda,\mu}\chi_{\lambda,\mu}, \tag{4.2}$$

onde $\bar{m}_{\lambda,\mu}$ é a multiplicidade associada ao par de partições (λ,μ). Escreveremos $\chi_{\lambda,\mu}(1) = \bar{d}_{\lambda,\mu}$. A proposição a seguir relaciona o grau do H_n-caracter com o grau do S_r-caracter associado à λ e o grau do S_{n-r}-caracter associado à μ.

Proposição 4.4.5 ([7]). *Se* $\lambda \vdash r$ *e* $\mu \vdash n-r$ *então*

$$\bar{d}_{\lambda,\mu} = \binom{n}{r} d_\lambda d_\mu.$$

4.4.2 Ação de $S_r \times S_{n-r}$ sobre $P_{r,n-r}$

Considere agora, para $0 \leq r \leq n$, a ação do grupo $S_r \times S_{n-r}$ em $P_{r,n-r}$ dada da seguinte forma: se $\sigma \in S_r$, $\tau \in S_{n-r}$ e $f(y_1, \ldots, y_r, z_1, \ldots, z_{n-r}) \in P_{r,n-r}$ então

$$(\sigma,\tau)f(y_1, \ldots, y_r, z_1, \ldots, z_{n-r}) = f(y_{\sigma(1)}, \ldots, y_{\sigma(r)}, z_{\tau(1)}, \ldots, z_{\tau(n-r)}).$$

Portanto,

$$P_{r,n-r}(A,*) = \frac{P_{r,n-r}}{P_{r,n-r} \cap Id(A,*)}$$

tem uma estrutura de $S_r \times S_{n-r}$-módulo à esquerda, já que $Id(A,*)$ é fechado sob esta ação. O $S_r \times S_{n-r}$-caracter de $P_{r,n-r}(A)$ será denotado por $\psi_{r,n-r}(A,*)$ e chamado $(r,n-r)$**-ésimo** $*$**-cocaracter**. Podemos escrevê-lo da seguinte forma

$$\psi_{r,n-r}(A,*) = \sum_{\substack{\lambda \vdash r \\ \mu \vdash n-r}} m_{\lambda,\mu} \psi_{\lambda,\mu},$$

onde $\psi_{\lambda,\mu} = \chi_\lambda \otimes \chi_\mu$ é o $S_r \times S_{n-r}$-caracter irredutível associado ao par de partições (λ,μ) e $m_{\lambda,\mu}$ é a respectiva multiplicidade. Escrevemos $\psi_{\lambda,\mu}(1) = d_{\lambda,\mu}$. Assim temos

$$d_{\lambda,\mu} = (\chi_\lambda \otimes \chi_\mu)(1) = \chi_\lambda(1)\chi_\mu(1) = d_\lambda d_\mu.$$

Portanto, a $(r,n-r)$-ésima $*$-codimensão de $(A,*)$ pode ser escrita como

$$c_{r,n-r}(A,*) = \sum_{\substack{\lambda \vdash r \\ \mu \vdash n-r}} m_{\lambda,\mu} d_{\lambda,\mu} = \sum_{\substack{\lambda \vdash r \\ \mu \vdash n-r}} m_{\lambda,\mu} d_\lambda d_\mu$$

Existe uma conexão entre $\chi_n(A,*)$ e $\psi_{r,n-r}(A,*)$ que será dada através do seguinte resultado:

Teorema 4.4.6 ([7], Teorema 1.3). *Seja A uma álgebra com involução. Se*

$$\chi_n(A,*) = \sum_{r=0}^{n} \sum_{\substack{\lambda \vdash r \\ \mu \vdash n-r}} \bar{m}_{\lambda,\mu} \chi_{\lambda,\mu} \quad e \quad \psi_{r,n-r}(A,*) = \sum_{\substack{\lambda \vdash r \\ \mu \vdash n-r}} m_{\lambda,\mu} \psi_{\lambda,\mu},$$

então $m_{\lambda,\mu} = \bar{m}_{\lambda,\mu}$ *para todas as partições* $\lambda \vdash r$ *e* $\mu \vdash n-r$.

Assim, de modo análogo à Proposição 3.2.4, apresentaremos agora um resultado muito útil para encontrar os n-ésimos $*$-cocaracteres.

Teorema 4.4.7. *Seja A uma álgebra com involução com n-ésimo $*$-cocaracter $\chi_n(A,*)$ dado pela Equação (4.2). Para um par de partições (λ,μ), $\lambda \vdash r$ e $\mu \vdash n-r$, a multiplicidade $m_{\lambda,\mu}$ é igual a zero se, e somente se, para quaisquer tabelas de Young T_λ do tipo λ e T_μ do tipo μ e qualquer polinômio $f = f(y_1,\dots,y_r,z_1,\dots,z_{n-r})$ pertencente a $P_{r,n-r}$, a álgebra $(A,*)$ satisfaz a $*$-identidade $e_{T_\lambda}e_{T_\mu}f \equiv 0$.*

Utilizando o resultado acima daremos a decomposição explícita do n-ésimo $*$-cocaracter da álgebra $(G_2,*)$.

Proposição 4.4.8. *Para todo $n \geq 1$,*

$$\chi_n(G_2,*) = \sum_{r=0}^{n} \chi_{(r),(n-r)}.$$

Demonstração. Primeiramente observe que

$$c_{r,n-r}(G_2,*) = \sum_{\substack{\lambda\vdash r\\ \mu\vdash n-r}} m_{\lambda,\mu}d_{\lambda,\mu}.$$

Agora considere as seguintes tabelas de Young

$$T_{(r)} = \boxed{1}\boxed{2}\boxed{\cdots}\boxed{r} \quad \text{e } T_{(n-r)} = \boxed{1}\boxed{2}\boxed{\cdots}\boxed{n-r}\ .$$

Ou seja, os inteiros foram colocados em $T_{(r)}$ e $T_{(n-r)}$ de maneira crescente da esquerda para a direita. Temos que

$$e_{T_{(r)}} = \sum_{\sigma\in S_r}\sigma \quad \text{e} \quad e_{T_{(n-r)}} = \sum_{\tau\in S_{n-r}}\tau.$$

Tomando $f(y_1,\dots,y_r,z_1,\dots,z_{n-r}) = y_1\dots y_r z_1\dots z_{n-r} \in P_{r,n-r}$ temos que

$$\begin{aligned} e_{T_{(r)}}e_{T_{(n-r)}}f &= \left(\sum_{\sigma\in S_r}\sigma\right)\left(\sum_{\tau\in S_{n-r}}\tau\right)(y_1\dots y_r z_1\dots z_{n-r}) \\ &= \sum_{\sigma\in S_r}\sum_{\tau\in S_{n-r}} y_{\sigma(1)}\cdots y_{\sigma(r)}z_{\tau(1)}\cdots z_{\tau(n-r)}. \end{aligned}$$

Considerando a substituição $y_1 = \cdots = y_r = (1,1)$ e $z_1 = \cdots = z_{n-r} = (1,-1)$ obtemos

$$\begin{aligned} & e_{T_{(r)}}e_{T_{(n-r)}}f(\underbrace{(1,1),\dots,(1,1)}_{r\ vezes},\underbrace{(1,-1),\dots,(1,-1)}_{n-r\ vezes}) = \\ &= \sum_{\sigma\in S_r}\sum_{\tau\in S_{n-r}} \underbrace{(1,1)\dots(1,1)}_{r\ vezes}\underbrace{(1,-1)\dots(1,-1)}_{n-r\ vezes} \\ &= |S_r||S_{n-r}|(1,(-1)^{n-r}) \neq 0. \end{aligned}$$

Isso significa que $m_{(r),(n-r)} \geq 1$. Como $d_{(r)} = d_{(n-r)} = 1$ (veja Item 2 do Exemplo 3.1.8), temos que $d_{(r),(n-r)} = d_{(r)}d_{(n-r)} = 1$.

Por outro lado, da Proposição 4.3.12 temos $c_{r,n-r}(G_2,*) = 1$. Logo,

$$1 = c_{r,n-r}(G_2,*) = \sum_{\substack{\lambda \vdash r \\ \mu \vdash n-r}} m_{\lambda,\mu} d_{\lambda,\mu} \geq m_{(r),(n-r)} d_{(r),(n-r)} = m_{(r),(n-r)} \geq 1.$$

Portanto $m_{(r),(n-r)} = 1$, para $r = 0, \ldots, n$, e todas as demais multiplicidades são nulas. Concluímos assim que

$$\chi_n(G_2, *) = \sum_{r=0}^{n} \chi_{(r),(n-r)}.$$

□

A seguir apresentamos um resultado de Berele que mostra que, se A é uma PI-álgebra com involução $*$, então as multiplicidades associadas ao H_n-caracter $\chi_{\lambda,\mu}$ em $\chi_n(A,*)$ são polinomialmente limitadas.

Proposição 4.4.9 ([2], Teorema 15)**.** *Seja A uma PI-álgebra com involução $*$. Se $m_{\lambda,\mu}$ é a multiplicidade associada ao H_n-caracter $\chi_{\lambda,\mu}$, então existe um polinômio $g(n)$ tal que*

$$\sum_{r=0}^{n} \sum_{\substack{\lambda \vdash r \\ \mu \vdash n-r}} m_{\lambda,\mu} \leq g(n).$$

Em particular, se $\lambda \vdash r$ e $\mu \vdash n-r$ então $m_{\lambda,\mu}$ é (uniformemente) polinomialmente limitada.

Terminamos a seção com uma observação que será útil no Capítulo 6.

Observação 4.4.10. *Sejam T_λ e T_μ tabelas Young do tipo $\lambda \vdash r$ e $\mu \vdash n-r$, respectivamente, e $f = f(y_1, \ldots y_r, z_1, \ldots, z_{n-r})$ um polinômio em $P_{r,n-r}$. Considere g o polinômio obtido de $e_{T_\lambda} e_{T_\mu} f$ ao substituir as variáveis anti-simétricas correspondentes à primeira linha de T_μ por z. Então g e $e_{T_\lambda} e_{T_\mu} f$ são $*$-equivalentes. Vejamos dois exemplos:*

- *Considere $\mu = (3)$, $f(z_1, z_2, z_3) = z_3 z_1 z_2 \in P_{0,3}$ e a tabela*

$$T_\mu = \boxed{1 \mid 2 \mid 3}\ .$$

Temos que $R_{T_\mu} = S_3$ e $C_{T_\mu} = \{(1)\}$. Assim,

$$e_{T_\mu} f = \sum_{\sigma \in S_3} z_{\sigma(3)} z_{\sigma(1)} z_{\sigma(2)}.$$

Substituindo z_1, z_2 *e* z_3 *por* z *em* $e_{T_\mu}f$, *obtemos*

$$g(z) = 3!z^3.$$

Observe que g *é obtido de* $e_{T_\mu}f$ *ao considerar um endomorfismo tal que* $h(z_1) = h(z_2) = h(z_3) = z$. *Por outro lado, desde que* $char(F) = 0$, *temos que* $e_{T_\mu}f$ *é obtido de* g *através do processo de multilinearização. Portanto,* $e_{T_\mu}f$ *e* g *são* $*$-*equivalentes.*

- *Considere* $\mu = (2,2)$, $f(z_1,z_2,z_3,z_4) = z_2z_3z_1z_4 \in P_{0,4}$ *e a tabela*

$$T_\mu = \begin{array}{|c|c|}\hline 1 & 2 \\ \hline 3 & 4 \\ \hline\end{array}\,.$$

Temos que $R_{T_\mu} = S_2(1,2) \times S_2(3,4)$ *e* $C_{T_\mu} = S_2(1,3) \times S_2(2,4)$. *Segue que*

$$\begin{aligned} e_{T_\mu}f = {} & z_2z_3z_1z_4 + z_1z_3z_2z_4 - z_2z_1z_3z_4 - z_1z_2z_3z_4 - z_4z_3z_1z_2 - z_4z_3z_2z_1 + z_4z_1z_3z_2 + z_4z_2z_3z_1 \\ & + z_2z_4z_1z_3 + z_1z_4z_2z_3 - z_2z_1z_4z_3 - z_1z_2z_4z_3 - z_3z_4z_1z_2 - z_3z_4z_2z_1 + z_3z_1z_4z_2 + z_3z_2z_4z_1. \end{aligned}$$

Substituindo z_1 *e* z_2 *por* z *em* $e_{T_\mu}f$, *obtemos*

$$g(z,z_3,z_4) = 2!(zz_3zz_4 - z^2z_3z_4 - z_4z_3z^2 + z_4zz_3z + zz_4zz_3 - z^2z_4z_3 - z_3z_4z^2 + z_3zz_4z).$$

Observe que, analogamente ao caso anterior, g *é obtido de* $e_{T_\mu}f$ *ao considerar um endomorfismo tal que* $h(z_1) = h(z_2) = z$. *Por outro lado, desde que* $char(F) = 0$, *temos que* $e_{T_\mu}f$ *é obtido de* g *através do processo de multilinearização. Portanto,* $e_{T_\mu}f$ *e* g *são* $*$-*equivalentes.*

Capítulo 5

Álgebras com crescimento polinomial das codimensões

Nos capítulos anteriores vimos algumas definições e resultados básicos. Agora daremos uma caracterização das álgebras com crescimento polinomial das codimensões. Lembramos que a sequência de codimensões de uma álgebra A é **polinomialmente limitada**, se existem constantes α e t tais que, para todo n, $c_n(A) \leq \alpha n^t$. Os principais resultados aqui estudados podem ser encontrados no artigo [17] de Giambruno e Zaicev. Vamos assumir que F é um corpo de característica zero.

5.1 Álgebras de dimensão finita e suas decomposições

Nesta primeira seção veremos que, sob determinadas hipóteses, a sequência de codimensões de uma álgebra A tem crescimento polinomial se, e somente se, a álgebra A pode ser decomposta em soma de apropriadas subálgebras. Antes de apresentar este resultado, vejamos a proposição a seguir:

Proposição 5.1.1. *Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado F de característica zero. Considere a decomposição de Wedderburn-Malcev $A = B_1 \oplus \cdots \oplus B_m \dotplus J$ onde $J = J(A)$ é o radical de Jacobson de A e B_i é subálgebra simples de A, para $i = 1, \ldots, m$. Então $\{c_n(A)\}_{n\geq 1}$ é polinomialmente limitada se, e somente se, $B_iJB_k = \{0\}$ para $i \neq k$ e $B_i \cong F$, $i,k = 1, \ldots, m$.*

Demonstração. Suponha $\{c_n(A)\}_{n\geq 1}$ polinomialmente limitada. Pela Proposição 2.4.9 temos $\exp(A) \leq 1$. Então, pelo Teorema 2.4.7,

$$\max \dim_F(B_{i_1} \oplus \cdots \oplus B_{i_r}) \leq 1$$

onde $B_{i_1}, \ldots, B_{i_r}$ satisfazem a condição da Equação (2.1). Lembrando que, para cada j, B_j satisfaz claramente a Equação (2.1) e $\dim_F B_j \geq 1$ temos que

$$1 \leq \dim_F B_j \leq \max \dim_F(B_{i_1} \oplus \cdots \oplus B_{i_r}) \leq 1$$

o que implica que $\dim_F B_j = 1$ e portanto $B_j \cong F$ para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$. Além disso, da equação acima temos também que a maior dimensão das subálgebras $B_{i_1} \oplus \cdots \oplus B_{i_r}$ tais que $B_{i_1}, \ldots, B_{i_r}$ satisfazem a condição da Equação (2.1) é 1. Logo, $B_i J B_k = \{0\}$ para $i \neq k$.

Por outro lado, se $B_i J B_k = \{0\}$ para $i \neq k$ e $B_i \cong F$, $i,k = 1, \ldots, m$, então temos que $\max \dim_F(B_{i_1} \oplus \cdots \oplus B_{i_r})$, tais que $B_{i_1}, \ldots, B_{i_r}$ satisfazem a Equação (2.1), é 1. Pelo Teorema 2.4.7 segue que $\exp(A) = 1$ e pela Proposição 2.4.9 concluímos que $\{c_n(A)\}_{n \geq 1}$ é polinomialmente limitada. $\square$

Teorema 5.1.2 ([17], Teorema 2)**.** *Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado F de característica zero. Então a sequência de codimensões $\{c_n(A)\}_{n \geq 1}$ é polinomialmente limitada se, e somente se,*

1. *$A = A_0 \dotplus A_1 \dotplus \cdots \dotplus A_m$ é uma soma direta (como espaço vetorial) de F-álgebras onde, para $i = 1, \ldots, m$, $A_i = B_i \dotplus J_i$, $B_i \cong F$, J_i é um ideal bilateral nilpotente de A_i, e $A_0, J_1, \ldots, J_m$ são ideais à direita de A nilpotentes;*

2. *para todo $i, k \in \{1, \ldots, m\}, i \neq k, A_i A_k = \{0\}$ e $B_i A_0 = \{0\}$.*

Demonstração. Suponha $\{c_n(A)\}_{n \geq 1}$ polinomialmente limitada. Considere a decomposição de Wedderburn-Malcev

$$A = B_1 \oplus \cdots \oplus B_m \dotplus J \tag{5.1}$$

da álgebra A, onde J é o radical de Jacobson de A e B_i é subálgebra simples, $i = 1, \ldots, m$. Considere também $1 = e_1 + \cdots + e_m$ a decomposição do elemento unidade de $B := B_1 \oplus \cdots \oplus B_m$ em idempotentes centrais ortogonais minimais (veja o Teorema 1.3.9). Pela Proposição 5.1.1 temos que $e_i B = B_i \cong F$. Defina, para $i = 1, \ldots, m$,

$$J_i = e_i J \quad \text{e} \quad J_0 = \{x \in J \mid Bx = 0\}.$$

Escrevendo

$$A_i = B_i + J_i, \quad \text{para} \quad i = 1, \ldots, m, \quad \text{e} \quad A_0 = J_0$$

temos claramente que A_i é uma F-álgebra e podemos notar que J_i é ideal bilateral nilpotente de A_i (relembre que J é ideal bilateral nilpotente de A e e_i é unidade de B_i) e ainda que $A_0, J_1, \ldots, J_m$ são ideais à direita de A nilpotentes. Temos também que:

• $A = (B_1 + J_1) \dot{+} \cdots \dot{+} (B_m + J_m) \dot{+} J_0$. De fato, dado $a \in A$, por (5.1), temos que

$$\begin{aligned} a &= b_1 + \cdots + b_m + x \\ &= b_1 + \cdots + b_m + (e_1x + \cdots + e_mx + x - e_1x - \cdots - e_mx) \\ &= (b_1 + e_1x) + \cdots + (b_m + e_mx) + (x - e_1x - \cdots - e_mx) \end{aligned}$$

onde $b_i \in B_i$, para $i = 1, \ldots, m$, e $x \in J$. Claramente, $b_i + e_ix \in B_i + J_i$, $i = 1, \ldots, m$. Além disso, $x - e_1x - \cdots - e_mx \in J_0$ e assim $A = (B_1 + J_1) + \cdots + (B_m + J_m) + J_0$.

Perceba também que a soma é direta. De fato, se

$$0 = a_0 + a_1 + \cdots + a_m,$$

onde $a_i \in A_i$, com $i = 0, \ldots ,m$, então para cada $j = 1, \ldots ,m$, temos

$$0 = \underbrace{e_ja_0}_{0} + \underbrace{e_ja_1}_{0} + \cdots + \underbrace{e_ja_j}_{a_j} + \cdots \underbrace{e_ja_m}_{0},$$

o que implica $a_j = 0$. Concluímos assim que $A = A_0 \dot{+} A_1 \dot{+} \cdots \dot{+} A_m$ é uma soma direta (como espaço vetorial) de F-álgebras.

• Para todo $i,k = 1, \ldots, m$, $i \neq k$, $A_iA_k = \{0\}$ e $B_iA_0 = \{0\}$. De fato, basta provar que dado $a_i \in A_i$ e $a_k \in A_k$ então $a_ia_k = 0$. Temos que a_i e a_k podem ser escritos como $a_i = e_ib + e_ix$ e $a_k = e_k\bar{b} + e_k\bar{x}$ onde $b, \bar{b} \in B$ e $x, \bar{x} \in J$. Assim,

$$\begin{aligned} a_ia_k &= (e_ib + e_ix)(e_k\bar{b} + e_k\bar{x}) = e_ibe_k\bar{b} + e_ibe_k\bar{x} + e_ixe_k\bar{b} + e_ixe_k\bar{x} \\ &= b\underbrace{e_ie_k}_{0}\bar{b} + b\underbrace{e_ie_k}_{0}\bar{x} + \underbrace{e_ixe_k}_{0}\bar{b} + \underbrace{e_ixe_k}_{0}\bar{x} = 0, \end{aligned}$$

já que e_i, e_k são centrais em B, $e_ie_k = 0$ e $B_iJB_k = \{0\}$ (veja a Proposição 5.1.1). Agora vamos verificar que $B_iA_0 = \{0\}$ para $i = 1, \ldots ,m$. Um elemento b_i de B_i é da forma $b_i = e_ib$ para algum $b \in B$. Por outro lado, por definição, temos que $A_0 = \{x \in J \mid Bx = 0\}$. Então, para qualquer $x \in A_0$, segue que

$$b_ix = e_i\underbrace{bx}_{0} = 0$$

Desta forma concluímos que A satisfaz 1 e 2.

Reciprocamente, suponha que A satisfaça 1 e 2. Seja

$$J = A_0 \dot{+} J_1 \dot{+} \cdots \dot{+} J_m.$$

Claramente

$$A = B_1 \dot{+} \cdots \dot{+} B_m \dot{+} J.$$

Além disso, desde que $A_iA_k = \{0\}$ para todo $i \neq k$, temos que $B_iB_k = \{0\}$. Logo

$$A = B_1 \oplus \cdots \oplus B_m \dotplus J,$$

onde B_i é álgebra simples isomorfa a F. Temos ainda que:

• $J = A_0 \dotplus J_1 \dotplus \cdots \dotplus J_m$ é um ideal bilateral nilpotente de A. De fato, como $A_0, J_1, \ldots, J_m$ já são ideais à direita de A nilpotentes, temos que J é ideal à direita de A nilpotente. Falta provar que J também é ideal à esquerda de A. Para isto basta provar que, se $a \in A$, $x_0 \in A_0$ e $x_i \in J_i$, $i = 1, \ldots, m$, então $ax_i \in J$ e $ax_0 \in J$. Sendo a um elemento de A, existem $a_i \in A_i$, $b_i \in B_i$ e $j_i \in J_i$ tais que $a = a_0 + a_1 + \ldots + a_m = a_0 + (b_1 + j_1) + \cdots + (b_m + j_m)$. Logo, desde que A_0 é ideal à direita de A e J_i é ideal bilateral de A_i, temos

$$\begin{aligned} ax_i &= (a_0 + a_1 + \cdots + a_i + \cdots + a_m)x_i \\ &= \underbrace{a_0x_i}_{\in A_0 \subseteq J} + \underbrace{a_1x_i}_{0} + \cdots + \underbrace{a_ix_i}_{\in J_i \subseteq J} + \cdots + \underbrace{a_mx_i}_{0} \in J, \end{aligned}$$

para $i = 1, \ldots, m$. Por outro lado, como J_i é ideal à direita de A e $B_iA_0 = \{0\}$ temos

$$\begin{aligned} ax_0 &= (a_0 + (b_1 + j_1) + \cdots + (b_m + j_m))x_0 \\ &= \underbrace{a_0x_0}_{\in A_0 \subseteq J} + \underbrace{b_1x_0}_{0} + \underbrace{j_1x_0}_{\in J_1 \subseteq J} + \cdots + \underbrace{b_mx_0}_{0} + \underbrace{j_mx_0}_{\in J_m \subseteq J} \in J. \end{aligned}$$

• $B := B_1 \oplus \cdots \oplus B_m$ não possui elementos nilpotentes não nulos. De fato, se $0 \neq b_i \in B_i$ então b_i não é um elemento nilpotente, uma vez que $B_i \cong F$. Assim, se $b = b_1 + \cdots + b_m \in B$, com $b_i \in B_i$, é um elemento nilpotente então existe algum $n \in \mathbb{N}$ tal que

$$0 = b^n = (b_1 + \cdots + b_m)^n = b_1^n + \cdots + b_m^n$$

o que implica

$$b_1^n = \cdots = b_m^n = 0$$

e portanto $b_1 = \cdots = b_n = 0$. Logo $b = 0$.

Note que, com as informações acima, concluímos facilmente que J é o radical de Jacobson de A. De fato, como já temos que J é um ideal bilateral nilpotente de A, basta mostrarmos que todo elemento nilpotente de A pertence a J. Se $a \in A$ é um elemento nilpotente, então $a = b + j$ com $b \in B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_m$ e $j \in J$, e existe $n \in \mathbb{N}$ tal que $a^n = 0$. Logo, desde que J é um ideal de A, temos

$$0 = a^n = (b + j)^n = b^n + \tilde{j}.$$

para algum $\tilde{j} \in J$. Logo $b^n = 0$ o que implica $b = 0$. Com isso concluímos que $a \in J$. Assim, J é o maior ideal bilateral nilpotente de A e portanto é o radical de Jacobson de A.

Desta forma $A = B_1 \oplus \cdots \oplus B_m \dotplus J$ é a decomposição de Wedderburn-Malcev da álgebra A com $B_i \cong F$ para $i = 1, \ldots, m$. A fim de concluirmos nossa demonstração, basta mostrarmos que $B_iJB_k = \{0\}$ para $i \neq k$ com $i,k = 1, \ldots, m$, e assim o resultado seguirá da Proposição 5.1.1. Se $i \neq k$, com $i,k = 1, \ldots, m$ então

$$\begin{aligned} B_iJB_k &= B_i(A_0 \dotplus J_1 \dotplus \cdots \dotplus J_i \dotplus \cdots \dotplus J_k \dotplus \cdots \dotplus J_m)B_k \\ &= \underbrace{B_iA_0}_{0} B_k + \underbrace{B_iJ_1}_{0} B_k + \cdots + B_i \underbrace{J_iB_k}_{0} + \cdots + \underbrace{B_iJ_k}_{0} B_k + \cdots + \underbrace{B_iJ_m}_{0} B_k \\ &= \{0\}, \end{aligned}$$

pois, por hipótese, para todo $i, k \in \{1, \ldots, m\}, i \neq k, A_iA_k = \{0\}$ e $B_iA_0 = \{0\}$. Logo, $B_iJB_k = \{0\}$. Assim, pela Proposição 5.1.1, temos que $\{c_n(A)\}_{n\geq 1}$ é polinomialmente limitada. $\square$

Como consequência imediata do resultado acima temos o seguinte corolário:

Corolário 5.1.3 ([17], Corolário 2)**.** *Sejam A a álgebra descrita no teorema acima e J o seu radical de Jacobson. Então*

$$Id(A) = Id(C_1) \cap \ldots \cap Id(C_m) \cap Id(J),$$

onde $C_i = A_i \dotplus A_0$, para $i = 1, \ldots, m$.

Demonstração. Claramente, $Id(A) \subseteq Id(C_1) \cap \ldots \cap Id(C_m) \cap Id(J)$. Considere agora $f \in Id(C_1) \cap \ldots \cap Id(C_m) \cap Id(J)$ e suponha que $f \notin Id(A)$. Então existem $r_1, \ldots, r_s \in A$ tais que $f(r_1, \ldots, r_s) \neq 0$. Como $char(F) = 0$ podemos assumir que f é multilinear e ainda que, para cada $i = 1, \ldots, m$, $r_i \in A_k$, para algum k. Já que $f \in Id(J)$, existe $i \in \{1, \ldots, s\}$ tal que $r_i \in B_k$, para um determinado $k \in \{1, \ldots, m\}$. Como $A_kA_j = A_jA_k = \{0\}$ para todo $j \in \{1, \ldots, m\}$, $j \neq k$, temos que $r_1, \ldots, r_{i-1}, r_{i+1}, \ldots, r_s \in A_k \cup A_0$. Portanto $f \notin Id(C_k)$ o que é uma contradição. Logo $Id(C_1) \cap \ldots \cap Id(C_m) \cap Id(J) \subseteq Id(A)$ e portanto $Id(A) = Id(C_1) \cap \ldots \cap Id(C_m) \cap Id(J)$. $\square$

5.2 A sequência de cocaracteres

Agora daremos uma caracterização do crescimento polinomial em termos da sequência de cocaracteres da álgebra em questão. Vamos começar a seção observando a sequência de cocaracteres e de codimensões de algumas álgebras de dimensão finita. Sempre que conveniente vamos substituir o índice λ do S_n-caracter associado a partição $\lambda \vdash n$ pelo diagrama D_λ.

Como vimos no Exemplo 3.2.5, uma álgebra comutativa não nilpotente C é polinomialmente limitada. De fato, $c_n(C) = 1$. Além disso, o n-ésimo cocaracter de C é dado por

$$\chi_n(C) = \chi_{\boxed{\leftarrow n \rightarrow}} .$$

Agora, considerando a álgebra

$$\tilde{M} := \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{pmatrix},$$

Giambruno e La Matina [9] provaram que $c_n(\tilde{M}) = n$. No mesmo artigo, os autores provaram que

$$\chi_n(\tilde{M}) = \chi_{\boxed{\leftarrow n \rightarrow}} + \chi_{\begin{array}{l}\boxed{\leftarrow n-1 \rightarrow}\\ \boxed{}\end{array}}$$

Observe que, assim como as álgebras comutativas não nilpotentes, a álgebra $\tilde{M}$ é polinomialmente limitada. Podemos notar também uma interessante ligação entre a decomposição dos cocaracteres destas álgebras com o índice de nilpotência do racical de Jacobson. De fato, se $\dim_F C < \infty$, então $J(C) = \{0\}$. Portanto, o índice de nilpotência de $J(C)$ é 1. Além disso, o único S_n-caracter irredutível que aparece na decomposição de $\chi_n(C)$ está associado à partição $(n) \vdash n$ cujo diagrama não possui boxes abaixo da primeira linha.

No caso da álgebra $\tilde{M}$, pode-se verificar que $J(\tilde{M}) = FE_{12}$ e o índice de nilpotência do seu radical de Jacobson é 2. Já a decomposição de $\chi_n(\tilde{M})$ é tal que, os S_n-caracteres irredutíveis que têm multiplicidade não nula estão associados a partições de n cujos diagramas possuem menos de 2 boxes abaixo da primeira linha.

Então podemos nos perguntar se existe uma relação entre a decomposição do n-ésimo cocaracter e o índice de nilpotência do radical de Jacobson das álgebras de dimensão finita cujas sequências de codimensões são polinomialmente limitada. Para responder a tal pergunta, começamos observando que se $\lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_r)$ é uma partição de n, então $n - \lambda_1$ é o número de boxes abaixo da primeira linha do diagrama D_λ. Além disso, a partir de agora, sempre que q for o índice de nilpotência do radical de Jacobson da álgebra A, escreveremos simplesmente $J(A)^q = \{0\}$.

Teorema 5.2.1 ([17], Teorema 3). *Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo F de característica zero. Então $\{c_n(A)\}_{n\geq 1}$ é polinomialmente limitada se, e somente se,*

$$\chi_n(A) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ n-\lambda_1 < q}} m_\lambda \chi_\lambda$$

onde $J(A)^q = \{0\}$.

Demonstração. Primeiramente devemos lembrar que a decomposição de $\chi_n(A)$ não se altera quando estendemos o corpo F (veja Proposição 3.2.3). Além disso, pelo Teorema 1.4.8, $J(A \otimes_F \bar{F})^q = \{0\}$ se, e somente se, $J(A)^q = \{0\}$, e assim podemos assumir que F é um corpo algebricamente fechado.

Suponha que a sequência $\{c_n(A)\}_{n\geq 1}$ seja polinomialmente limitada. Seja $\lambda \vdash n$ tal que $|\lambda| - \lambda_1 \geq q$ e suponha por contradição que $m_\lambda \neq 0$. Então, pelo Teorema 3.2.4, existem uma tabela T_λ e um polinômio $f = f(x_1, \ldots, x_n) \in P_n$ tais que $e_{T_\lambda} f \notin Id(A)$. Sejam $t = \lambda_1$ e $\lambda' = (\lambda'_1, \ldots, \lambda'_t)$ a partição conjugada de λ. Então $e_{T_\lambda} f$ é combinação linear de polinômios alternados, sendo que cada um destes polinômios é alternado em t conjuntos disjuntos de λ'_1 variáveis, $\ldots, \lambda'_t$ variáveis (veja a Observação 3.2.1). Vamos provar que cada um desses polinômios alternados de $e_{T_\lambda} f$ pertence a $Id(A)$ contradizendo o fato de $e_{T_\lambda} f \notin Id(A)$.

Seja $A = B_1 \oplus \cdots \oplus B_m \dotplus J$ a decomposição de Wedderburn-Malcev da álgebra A, onde J é o radical de Jacobson de A e B_i é subálgebra simples de A, $i = 1, \ldots, m$. Pela Proposição 5.1.1 temos $B_i J B_k = \{0\}$ para todo $i \neq k$ e $B_i \cong F$, $i = 1, \ldots, m$. Vamos fixar uma base de A constituída pela união de bases de $B_1, \ldots, B_m$ e J, respectivamente. Seja g um polinômio alternado de $e_{T_\lambda} f$. Como $B_i B_k = B_i J B_k = \{0\}$, para todo $i \neq k$, para que g não seja uma identidade em A devemos substituir as variáveis por elementos de J e de no máximo uma única componente simples, digamos B_i. Já que $\dim_F B_i = 1$, podemos substituir em cada conjunto alternado no máximo um elemento de B_i (veja a Proposição 2.3.2). Ou seja, podemos substituir no máximo λ_1 elementos de B_i. Assim, devemos substituir pelo menos $n - \lambda_1 \geq q$ elementos de J. Mas $J^q = \{0\}$. Logo, $g \equiv 0$ em A. Portanto todo polinômio alternado de $e_{T_\lambda} f$ é uma identidade de A, o que implica que $e_{T_\lambda} f \in Id(A)$, o que é uma contradição.

Agora vamos supor que $\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$. Então $m_\lambda = 0$ sempre que $n - \lambda_1 \geq q$. Para $\lambda_1 > n - q$, a fórmula do gancho nos fornece

$$d_\lambda \leq \frac{n!}{\lambda_1!} < \frac{n!}{(n-q)!} = n(n-1)\cdots(n-q+1) \leq n^q. \tag{5.2}$$

Portanto, desde que $m_\lambda \leq d_\lambda$ (veja Lema 3.2.8), temos

$$c_n(A) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ n-\lambda_1 < q}} m_\lambda d_\lambda \leq \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ n-\lambda_1 < q}} d_\lambda^2 < \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ n-\lambda_1 < q}} n^{2q} < C n^{2q},$$

para alguma constante C que depende apenas de q (note que podemos tomar $C = 1 + \sum_{t=1}^{q} \mathtt{p}(t)$, onde $\mathtt{p}(t)$ é a quantidade de partições de t). Esta desigualdade completa a prova do teorema. $\square$

O teorema acima nos diz que $\{c_n(A)\}_{n\geq 1}$ é polinomialmente limitada se, e somente se, a multiplicidade m_λ do caracter irredutível associado à λ for nula sempre que D_λ possuir mais que $q-1$ boxes abaixo da primeira linha, onde q é tal que $J(A)^q = \{0\}$.

Podemos nos perguntar se o resultado acima pode ser generalizado para álgebras de dimensões quaisquer. A fim de responder a tal questão podemos utilizar o seguinte resultado de Kemer:

Teorema 5.2.2. *Seja A uma PI-álgebra. Se para todo n, $c_n(A) \leq \alpha n^t$ para certas constantes α, t, então existe uma álgebra B de dimensão finita tal que $Id(A) = Id(B)$.*

Demonstração. Considere a álgebra de Grassmann E de dimensão infinita sobre F. Pelo Teorema 3.2.7, $c_n(E) = 2^{n-1}$. Então, para n suficientemente grande, $c_n(A) < c_n(E)$. Logo, $Id(A) \nsubseteq Id(E)$. Pelo Teorema 2.1.10, existe uma álgebra B de dimensão finita sobre F tal que $Id(A) = Id(B)$, o que conclui o resultado. $\square$

O que o resultado acima nos diz é que, no caso de uma PI-álgebra A cuja sequência de codimensões é polinomialmente limitada, existe uma álgebra B de dimensão finita tal que $Id(A) = Id(B)$ e assim, pelo Teorema 5.2.1,

$$\chi_n(A) = \chi_n(B) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ n-\lambda_1 < q}} m_\lambda \chi_\lambda,$$

onde q é tal que $J(B)^q = \{0\}$. Portanto podemos enunciar um resultado geral para as PI-álgebras com crescimento polinomial das codimensões em termos da sequência de cocaracteres.

Teorema 5.2.3. *Seja A uma PI-álgebra sobre um corpo F de característica zero. Então $\{c_n(A)\}_{n\geq 1}$ é polinomialmente se, e somente se, existe uma constante δ tal que*

$$\chi_n(A) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ n-\lambda_1 < \delta}} m_\lambda \chi_\lambda$$

para todo $n \geq 1$.

Voltando ao estudo da álgebra de Grassmann E visto no Teorema 3.2.7, podemos observar que $c_n(E)$ não é polinomialmente limitada (já que $c_n(E) = 2^{n-1}$) e não existe uma constante δ que satisfaça as condições do enunciado uma vez que

$$\chi_n(E) = \sum_{k=1}^{n} \chi_{\begin{array}{l}\boxed{\leftarrow k \rightarrow}\\ \boxed{\substack{\uparrow \\ n-k \\ \downarrow}}\end{array}} .$$

Capítulo 6

Crescimento polinomial das $*$-codimensões

Ao longo deste capítulo F sempre será um corpo de característica zero e $(A,*)$ uma F-álgebra A com involução $*$. Na primeira seção vamos caracterizar as álgebras de dimensão finita com crescimento polinomial das $*$-codimensões. Já na segunda seção, utilizando técnicas diferentes, apresentaremos uma caracterização geral das álgebras cujas sequências das $*$-codimensões são polinomialmente limitadas. Os resultados estudados neste capítulo podem ser encontrados nos artigos [17] de Giambruno e Zaicev e [10] de Giambruno e Mishchenko.

6.1 Álgebras de dimensão finita

Começamos esta seção relacionando o crescimento polinomial de $\{c_n(A)\}_{n\geq 1}$ com o crescimento polinomial de $\{c_n(A,*)\}_{n\geq 1}$.

Teorema 6.1.1 ([17], Teorema 6)**.** *Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo F algebricamente fechado de característica zero. Então a sequência de $*$-codimensões $\{c_n(A,*)\}_{n\geq 1}$ é polinomialmente limitada se, e somente se,*

1. *a sequência de codimensões $\{c_n(A)\}_{n\geq 1}$ é polinomialmente limitada;*

2. *$A = B \dotplus J$, onde B é uma subálgebra semissimples maximal de A e $b^* = b$ para todo $b \in B$.*

Note que este é um resultado mais forte que o Teorema 4.2.5. De fato, antes podíamos garantir apenas a existência de uma subálgebra semissimples maximal B que era $*$-invariante. Mas sob a hipótese de que F é um corpo algebricamente fechado e a sequência $\{c_n(A,*)\}_{n\geq 1}$ é polinomialmente limitada, temos que a subálgebra semissimples maximal B é mais que $*$-invariante. Na verdade, todos os elementos de B são simétricos.

Demonstração. Suponha que a sequência $\{c_n(A,*)\}_{n\geq 1}$ é polinomialmente limitada. Pela Proposição 4.3.8 segue que $\{c_n(A)\}_{n\geq 1}$ também é polinomialmente limitada. Assim, pelo Teorema 4.2.5, $A = B \dotplus J$ onde $B^* = B$ e J é o radical de Jacobson de A. Desde que $B = B_1 \oplus \cdots \oplus B_m$ com B_i subálgebra simples, aplicando a Proposição 5.1.1, temos que $A = B_1 \oplus \cdots \oplus B_m \dotplus J$, com $B_i \cong F$ e $B_iJB_k = \{0\}$ para $i \neq k$. Precisamos provar que $b = b^*$. Suponha por contradição que não temos a igualdade anterior. Como $B_i \cong F$, se B_i é $*$-simples então $b_i^* = b_i$ para todo $b_i \in B_i$. Então deve existir B_i, B_k tais que $C = B_i \oplus B_k \cong F \oplus F$ é $*$-simples com involução $(a,b)^* = (b,a)$. Note que $C \cong G_2$. Portanto, $c_n(C,*) = 2^n$. Como $C \subseteq A$ então $2^n = c_n(C,*) \leq c_n(A,*)$ contradizendo o fato de $\{c_n(A,*)\}_{n\geq 1}$ ser polinomialmente limitada.

Reciprocamente, suponha $A = B \dotplus J$ com $b^* = b$ para todo $b \in B$ e $\{c_n(A)\}_{n\geq 1}$ polinomialmente limitada. Queremos mostrar que $\{c_n(A,*)\}_{n\geq 1}$ é polinomialmente limitada. Para isto, estudaremos $c_{r,n-r}(A,*)$.

Se $f(x_1,\ldots,x_n) \in P_n \cap Id(A)$ então $f(y_1,\ldots,y_r,z_{r+1},\ldots,z_n) \in P_{r,n-r} \cap Id(A,*)$, para $r = 0,\ldots,n$. Logo, $P_n \cap Id(A) \subseteq P_{r,n-r} \cap Id(A,*)$ e portanto

$$c_{r,n-r}(A,*) \leq c_n(A) \leq \alpha n^t,$$

onde α e t são constantes.

Se $a \in A$ então podemos escrever $a = b + j$ com $b \in B$ e $j \in J$. Uma vez que $b^* = b$ segue que $A^- \subseteq J$. De fato, se $a = b + j \in A^-$, então temos também $a = -a^* = -b^* - j^* = -b - j^*$. Logo, $a = \frac{j-j^*}{2} \in J$, já que $J^* = J$. Seja q tal que $J^q = \{0\}$. Isso implica que $(A^-)^q = \{0\}$. Assim, para $f = f(y_1,\ldots,y_r,z_{r+1},\ldots,z_n) \in P_{r,n-r}(A,*)$ temos que $f \in Id(A,*)$ sempre que tivermos $n - r \geq q$ e assim teremos $c_{r,n-r}(A,*) = 0$. Segue do Teorema 4.3.11 que

$$c_n(A,*) = \sum_{r=0}^{n} \binom{n}{r} c_{r,n-r}(A,*) \leq \alpha n^t \sum_{r=n-q+1}^{n} \binom{n}{r} = \alpha n^t \sum_{s=o}^{q-1} \binom{n}{s} \leq \alpha q n^{t+q}.$$

Portanto, $\{c_n(A,*)\}_{n\geq 1}$ é polinomialmente limitada. □

Veremos agora um lema que será utilizado nas demonstrações dos Teoremas 6.1.3 e 6.2.3.

Lema 6.1.2. *Sejam A uma um F-álgebra com involução $*$ e F um corpo de característica zero. Considere*

$$\chi_n(A,*) = \sum_{|\lambda|+|\mu|=n} m_{\lambda,\mu}\chi_{\lambda,\mu}$$

o n-ésimo $*$-cocaracter de A. Se existe uma constante δ tal que $m_{\lambda,\mu} = 0$ sempre que $|\lambda| - \lambda_1 > \delta$ ou $|\mu| > \delta$, então $\{c_n(A,*)\}_{n\geq 1}$ é polinomialmente limitada.

Demonstração. Suponha que exista uma constante δ satisfazendo as condições do enunciado. Temos assim que se $m_{\lambda,\mu} \neq 0$, com $\lambda \vdash r$, $\mu \vdash n-r$, então $|\lambda| - \lambda_1 = r - \lambda_1 \leq \delta$ e $|\mu| = n - r \leq \delta$. Assim, $d_\lambda \leq r^\delta$ (veja a Equação (5.2)) o que implica $d_\lambda \leq n^\delta$, e $d_\mu \leq \delta!$ se $m_{\lambda,\mu} \neq 0$. Desta forma temos que

$$c_n(A,*) = \sum_{\substack{0\leq r\leq n\\ \lambda\vdash r,\, \mu\vdash n-r}} m_{\lambda,\mu} d_{\lambda,\mu} = \sum_{\substack{0\leq r\leq n\\ \lambda\vdash r,\, \mu\vdash n-r}} m_{\lambda,\mu} \binom{n}{r} d_\lambda d_\mu \leq \sum_{\substack{0\leq r\leq n\\ \lambda\vdash r,\, \mu\vdash n-r\\ r-\lambda_1\leq\delta,\, n-r\leq\delta}} m_{\lambda,\mu} \binom{n}{r} n^\delta \delta!.$$

Pela Proposição 4.4.9, existem constantes α e t tais que $m_{\lambda,\mu} \leq \alpha n^t$.Temos assim que

$$c_n(A,*) \leq \sum_{\substack{0\leq r\leq n\\ \lambda\vdash r,\, \mu\vdash n-r\\ r-\lambda_1\leq\delta,\, n-r\leq\delta}} \alpha n^t \binom{n}{r} n^\delta \delta! \ \leq \ \alpha\delta! n^{t+\delta} \sum_{n-\delta\leq r\leq n} \binom{n}{r} \underbrace{\sum_{\substack{\lambda\vdash r,\, \mu\vdash n-r\\ r-\lambda_1\leq\delta,\, n-r\leq\delta}} 1}_{(\star)}.$$

Note que $(\star)$ pode ser substituída por uma constante C que depende apenas de δ. De fato, se denotamos por $\mathtt{p}(t)$ a quantidade de partições de t e por $\lceil\delta\rceil$ o menor inteiro maior ou igual a δ, então podemos tomar $C = \left(1 + \sum_{t=1}^{\lceil\delta\rceil} \mathtt{p}(t)\right)^2$. Assim,

$$c_n(A,*) \leq \alpha\delta! n^{t+\delta} C \sum_{s=0}^{\delta} \binom{n}{s} \leq \alpha C\delta!(\delta+1) n^{t+\delta} n^\delta = \beta n^k,$$

onde $\beta = \alpha C\delta!(\delta+1)$ e $k = t + 2\delta$. E isto conclui a demonstração do lema. $\square$

Tendo em vista o lema acima, apresentaremos um resultado análogo ao Teorema 5.2.1 para álgebras com involução.

Teorema 6.1.3 ([17], Teorema 7)**.** *Seja A uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo F de característica zero. Então a sequência de $*$-codimensões $\{c_n(A,*)\}_{n\geq 1}$ é polinomialmente limitada se, e somente se,*

$$\chi_n(A,*) = \sum_{\substack{|\lambda|+|\mu|=n\\ n-\lambda_1<q}} m_{\lambda,\mu}\chi_{\lambda,\mu},$$

onde $J(A)^q = \{0\}$.

Demonstração. Primeiramente observe que a decomposição de $P_n(*)$ em H_n-módulos irredutíveis não muda quando estendemos F. Portanto, podemos assumir que F é algebricamente fechado.

Vamos supor que $\{c_n(A,*)\}_{n\geq 1}$ é polinomialmente limitada e considere $\lambda = (\lambda_1, \ldots, \lambda_s) \vdash r$, $\mu \vdash n-r$ tais que $n-\lambda_1 \geq q$. Suponha por contradição que $m_{\lambda,\mu} \neq 0$. Então existem tabelas T_λ e T_μ e um polinômio $f \in P_{r,n-r}$ tais que $e_{T_\lambda}e_{T_\mu}f \notin Id(A,*)$. Temos que $e_{T_\lambda}e_{T_\mu}f$ é combinação linear de polinômios alternados, sendo que cada um destes polinômios é alternados em $t = \lambda_1$ conjuntos disjuntos de λ'_1 variáveis, $\ldots$, λ'_t variáveis simétricas. Vamos provar que cada um desses polinômios alternados está em $Id(A,*)$.

Pelo Teorema 6.1.1 temos que, como $\{c_n(A,*)\}_{n\geq 1}$ é polinomialmente limitada, então $\{c_n(A)\}_{n\geq 1}$ também é polinomialmente limitada e $A = B \dotplus J$ onde J é o radical de Jacobson de A e $b^* = b$ para todo $b \in B$. Portanto, pela Proposição 5.1.1, temos que $A = B_1 \oplus \cdots \oplus B_m \dotplus J$, onde B_i é subálgebra simples de A isomorfa a F, $i = 1, \ldots, m$, $B_iB_k = B_iJB_k = \{0\}$ para $i \neq k$, e $b_i^* = b_i$ para todo $b_i \in B_i$. Seja g um dos polinômios alternados de $e_{T_\lambda}e_{T_\mu}f$. Para que g não seja uma $*$-identidade de A, poderemos substituir as variáveis por elementos de apenas uma das componentes simples, digamos B_i, e de J. Além disso, como $b_i = b_i^*$ para todo $b_i \in B_i$ e $\dim_F B_i = 1$, em cada conjunto alternado de variáveis simétricas podemos substituir no máximo um elemento de B_i. Assim, como podemos substituir os elementos de B_i apenas nas variáveis simétricas, vamos substituir no máximo λ_1 elementos de B_i e pelo menos $|\lambda| - \lambda_1 + |\mu| = n - \lambda_1 \geq q$ elementos de J. Como $J^q = \{0\}$ concluímos que $g \equiv 0$, o que é uma contradição.

A recíproca segue do lema anterior. De fato, basta tomar $\delta = q$. Assim, se $|\lambda| - \lambda_1 > \delta$ ou $|\mu| > \delta$ então

$$n - \lambda_1 = |\lambda| + |\mu| - \lambda_1 > \delta = q$$

o que implica $m_{\lambda,\mu} = 0$ e, pelo lema, $\{c_n(A,*)\}_{n\geq 1}$ é polinomialmente limitada. $\square$

Portanto, dada uma álgebra A de dimensão finita com involução $*$, a sequência das $*$-codimensões é polinomialmente limitada se, e somente se, a multiplicidade $m_{\lambda,\mu}$ associada ao par de partições $\lambda \vdash r$ e $\mu \vdash n-r$, $r = 0, \ldots, n$, for nula sempre que $n - \lambda_1 \geq q$, ou seja, sempre que a quantidade de boxes em D_μ somada com a quantidade de boxes abaixo da primeira linha de D_λ for maior ou igual a q.

6.2 Caso geral

Para caracterizar as álgebras com involução com crescimento polinomial das $*$-codimensões, sem que a álgebra A tenha necessariamente dimensão finita sobre F, vamos precisar de alguns resultados. Começamos pelo seguinte lema:

Lema 6.2.1 ([10], Lema 2)**.** *Seja A uma álgebra com involução sobre um corpo F de característica zero tal que $c_n(A,*) \leq \alpha n^t$ para algumas constantes α e t. Então existe uma constante β tal que*

$$\chi_n(A,*) = \sum_{|\lambda|+|\mu|=n} m_{\lambda,\mu}\chi_{\lambda,\mu}, \tag{6.1}$$

onde $m_{\lambda,\mu} = 0$ se ou $|\lambda| - \lambda_1 > \beta$ ou $|\mu| - \mu_1 > \beta$.

Demonstração. Inicialmente vamos considerar a decomposição do n-ésimo cocaracter de A em S_n-caracteres irredutíveis

$$\chi_n(A) = \sum_{\nu\vdash n} m_\nu\chi_\nu.$$

Pela Proposição 4.3.8, temos que $c_n(A) \leq c_n(A,*) \leq \alpha n^t$. Portanto, $c_n(A)$ é polinomialmente limitada e assim, pelo Teorema 5.2.3, existe uma constante β tal que $m_\nu = 0$ sempre que $|\nu| - \nu_1 \geq \beta$.

Vamos supor, por contradição, que existem partições $\lambda \vdash n$ e $\mu \vdash n-r$ tais que $|\lambda| - \lambda_1 > \beta$ (ou $|\mu| - \mu_1 > \beta$) e $m_{\lambda,\mu} \neq 0$. Então, pelo Teorema 4.4.7, existem tabelas T_λ, T_μ e um polinômio $f = f(y_1,\ldots,y_r,z_1,\ldots,z_{n-r}) \in P_{r,n-r}$ tais que $e_{T_\lambda}e_{T_\mu}f \notin Id(A,*)$.

Em particular $e_{T_\lambda}e_{T_\mu}f(x_1,\ldots,x_r,x_{r+1},\ldots,x_n) \notin Id(A)$. Observe que

$$F(S_r \times S_{n-r})e_{T_\lambda}e_{T_\mu}f(x_1,\ldots,x_r,x_{r+1},\ldots,x_n)$$

é um $S_r \times S_{n-r}$-módulo irredutível, onde S_r age sobre as variáveis $x_1,\ldots,x_r$ e S_{n-r} age sobre $x_{r+1},\ldots,x_n$. Considere M a indução deste módulo à S_n, isto é,

$$M = F(S_r \times S_{n-r})e_{T_\lambda}e_{T_\mu}f \uparrow S_n$$

e denote por $\chi_n(M)$ o S_n-caracter de M. Podemos escrevê-lo em termos dos S_n-caracteres irredutíveis da seguinte maneira:

$$\chi_n(M) = \sum_{\nu\vdash n} m'_\nu\chi_\nu.$$

Como $|\lambda| - \lambda_1 > \beta$ (ou $|\mu| - \mu_1 > \beta$, respectivamente) temos, pelo item (i) da Observação 3.3.3 (ou item (ii) da Observação 3.3.3, respectivamente), que $m'_\nu = 0$ para toda partição $\nu \vdash n$ tal que $|\nu| - \nu_1 \leq \beta$.

Agora, note que como $f \notin Id(A)$, existe um submódulo irredutível N de M tal que $N \cap Id(A) = \{0\}$. E assim, desde que $N \subseteq M \subseteq P_n$ temos que N está isomorficamente imerso em $P_n(A)$. Portanto, se δ é a partição de n associada à N então, em $\chi_n(A)$, temos $m_\delta > 0$, o que implica $|\delta| - \delta_1 < \beta$. Por outro lado, em $\chi\uparrow(M)$, temos $m'_\delta > 0$ o que implica $|\delta| - \delta_1 > \beta$, o que é um absurdo. Portanto, $m_{\lambda,\mu} = 0$ sempre que $|\lambda| - \lambda_1 > \beta$ (ou $|\mu| - \mu_1 > \beta$). □

Lema 6.2.2 ([10], Lema 3). *Seja A uma álgebra com involução $*$ sobre um corpo F de característica zero tal que $c_n(A,*) \leq \alpha n^t$ para algumas constantes α e t. Então existe uma constante γ tal que, na Equação (6.1), $m_{\lambda,\mu} = 0$ se $|\lambda| > \gamma$ e $|\mu| > \gamma$.*

Demonstração. Considere $n > 2t$. Se r é tal que $r > t$ e $n-r > t$, então $t < r < n-t$ e isso implica que

$$\binom{n}{r} \geq \binom{n}{t+1}.$$

Além disso,

$$\binom{n}{t+1} = \frac{n!}{(t+1)!(n-t-1)!} = \frac{n(n-1)\cdots(n-t)}{(t+1)!}.$$

Isso significa que $\binom{n}{t+1}$ é um polinômio de grau $t+1$. Então existe $N \in \mathbb{N}$ tal que, para $n > N$,

$$\binom{n}{t+1} > \alpha n^t \geq c_n(A,*).$$

Seja $\gamma = \max\{N,t\}$. Se tivéssemos $\lambda \vdash r$ e $\mu \vdash n-r$ tais que $r = |\lambda| > \gamma$, $n-r = |\mu| > \gamma$ e $m_{\lambda,\mu} \neq 0$ então teríamos

$$c_n(A,*) \geq \bar{d}_{\lambda,\mu} = \binom{n}{r} d_\lambda d_\mu \geq \binom{n}{r} \geq \binom{n}{t+1} > c_n(A,*),$$

o que é uma contradição. Portanto $m_{\lambda,\mu} = 0$ sempre que $|\lambda| > \gamma$ e $|\mu| > \gamma$ e concluímos o lema. □

Munidos dos lemas anteriores, podemos agora apresentar uma classificação geral das álgebras com involução $*$ com crescimento polinomial das $*$-codimensões.

Teorema 6.2.3 ([10], Teorema 3). *Seja A uma álgebra com involução $*$ sobre um corpo F de característica zero. Então $c_n(A,*) \leq \alpha n^t$ para certos α e t se, e somente se, existe uma constante δ tal que*

$$\chi_n(A,*) = \sum_{|\lambda|+|\mu|=n} m_{\lambda,\mu}\chi_{\lambda,\mu}$$

e $m_{\lambda,\mu} = 0$ sempre que ou $|\lambda| - \lambda_1 > \delta$ ou $|\mu| > \delta$.

Demonstração. Suponha $c_n(A,*) \leq \alpha n^t$. Vimos na Proposição 4.3.12 que $c_n(G_2,*)$ tem crescimento exponencial o que implica que $Id(A,*) \nsubseteq Id(G_2,*)$. Assim, de acordo com o Teorema 4.3.13, existe um inteiro $d \geq 1$ tal que $z^d \in Id(A,*)$.

Seja δ uma constante (a ser determinada posteriormente) e considere μ uma partição tal que $|\mu| > \delta$. Suponha que, para alguma partição λ de $n - |\mu|$, temos que $m_{\lambda,\mu} \neq 0$. Pelo Lema 6.2.1, existe β tal que

$$|\mu| - \mu_1 \leq \beta$$

e pelo Lema 6.2.2 existe γ tal que

$$|\lambda| \leq \gamma. \tag{6.2}$$

Note que (6.2) é verdadeira uma vez que o δ a ser escolhido seja maior que γ, pois assim teremos $|\mu| > \delta > \gamma$ o que implica $|\lambda| \leq \gamma$.

Para quaisquer tabelas T_λ e T_μ e qualquer polinômio $f \in P_{r,n-r}$, seja g o polinômio obtido de $e_{T_\lambda} e_{T_\mu} f$ substituindo todas as variáveis anti-simétricas da primeira linha de μ por z. Note que, como $char(F) = 0$, então $e_{T_\lambda} e_{T_\mu} f$ e g são $*$-equivalentes, isto é, $e_{T_\lambda} e_{T_\mu} f$ e g geram o mesmo T_*-ideal (veja a Observação 4.4.10). Portanto, para provar que $e_{T_\lambda} e_{T_\mu} f$ se anula em $(A,*)$ é suficiente provar que $g \equiv 0$ em $(A,*)$. Então vamos determinar δ de forma que cada monômio de g contenha z^d.

Considerando em cada monômio as posições ocupadas pelas $n - \mu_1$ variáveis de g que são diferentes de z, vemos que as variáveis z podem ser dispostas em $n - \mu_1 + 1$ posições diferentes (podendo inclusive ter mais de uma variável z em um mesmo espaço). Para garantirmos, pelo Princípio da Casa dos Pombos, que cada monômio contenha z^d é suficiente termos $(d-1)(n-\mu_1+1)+1$ variáveis z. Portanto é suficiente ter

$$\mu_1 \geq (d-1)(n-\mu_1+1)+1.$$

Como $(d-1)(n-\mu_1+1)+1 = d(n-\mu_1+1)-n+\mu_1$, então $\mu_1 \geq (d-1)(n-\mu_1+1)$ é equivalente a $n \geq d(n-\mu_1+1)$. Assim, desde que

$$n - \mu_1 = |\lambda| + |\mu| - \mu_1 \leq \gamma + \beta,$$

é suficiente tomarmos $n \geq d(\gamma+\beta+1)$, pois neste caso teremos

$$n \geq d(\gamma+\beta+1) \geq d(n-\mu_1+1).$$

Como $n = |\lambda| + |\mu| \geq |\mu|$ é claro que basta tomar

$$\delta = d(\gamma+\beta+1)$$

para que $g \equiv 0$ em $(A,*)$. Portanto $e_{T_\lambda} e_{T_\mu} f \equiv 0$ em $(A,*)$, o que implica $m_{\lambda,\mu} = 0$, uma contradição. Logo $m_{\lambda,\mu} = 0$ sempre que $|\mu| > \delta$.

Por outro lado, se $|\lambda| - \lambda_1 > \delta$ então $|\lambda| - \lambda_1 > \beta$ e assim $m_{\lambda,\mu} = 0$ também neste caso (veja Lema 6.2.1). A recíproca do teorema segue do Lema 6.1.2 e a demonstração está concluída. $\square$

O que o teorema acima nos diz é que se o H_n-caracter irredutível $\chi_{\lambda,\mu}$ aparece na decomposição do n-ésimo $*$-cocaracter da álgebra em questão com multiplicidade diferente de zero, então D_λ tem no máximo δ boxes abaixo da primeira linha e D_μ tem no máximo δ boxes no total, para alguma constante δ (que independe da escolha do par (λ,μ)).

Para finalizar a seção, apresentamos um teorema que mostra que a sequência de codimensões de qualquer T_*-ideal contendo propriamente $Id(G_2,*)$ tem crescimento polinomial.

Teorema 6.2.4 ([10], Teorema 4)**.** *Seja A uma álgebra com involução $*$ sobre um corpo F de característica zero tal que*

$$Id(A,*) \supsetneq Id(G_2,*).$$

Então $\{c_n(A,*)\}_{n\geq 1}$ é polinomialmente limitada.

Demonstração. Para quaisquer λ, μ sejam $m_{\lambda,\mu}$ e $m'_{\lambda,\mu}$ as multiplicidades de $\chi_{\lambda,\mu}$ em $\chi_n(A,*)$ e em $\chi_n(G_2,*)$, respectivamente. Como $Id(A,*) \supsetneq Id(G_2,*)$, segue que $m_{\lambda,\mu} \leq m'_{\lambda,\mu}$. Pela Proposição 4.4.8,

$$\chi_n(G_2,*) = \sum_{r=0}^{n} \chi_{(r),(n-r)}, \tag{6.3}$$

o que implica que

$$\chi_n(A,*) = \sum_{r=0}^{n} m_r \chi_{(r),(n-r)}$$

com $m_r \in \{0,1\}$. Por outro lado, pelo Teorema 4.3.13, existe $d \geq 1$ tal que $z^d \in Id(A,*)$ e, pela Proposição 4.3.12, todas as variáveis simétricas e anti-simétricas comutam módulo $Id(G_2,*)$. Assim,

$$m_r = 0, \quad \text{para todo } r \text{ tal que } n-r \geq d. \tag{6.4}$$

Tomando então $\delta = d$, a fim de concluirmos a demonstração deste resultado, aplicando o teorema anterior, basta mostrarmos que se $|\lambda| - \lambda_1 > \delta$ ou $|\mu| > \delta$, então $m_{\lambda,\mu} = 0$. Uma vez que os únicos H_n-caracteres irredutíveis que aparecem na Equação (6.3) são àqueles cujos os respectivos diagramas possuem somente uma linha, temos claramente que se $|\lambda| - \lambda_1 > \delta$, então $m_{\lambda,\mu} = 0$. E ainda, usando também (6.4), concluímos que se $|\mu| > \delta$, então $m_{\lambda,\mu} = 0$. □

Considerações Finais

Conforme mencionamos na Introdução, existem diferentes maneiras de descrever F-álgebras com crescimento polinomial das codimensões, onde F é um corpo de característica zero. Uma delas é um resultado bastante conhecido de Kemer (veja [25]) que relaciona tais álgebras com a álgebra de Grassmann E e com a álgebra $UT_2(F)$ das matrizes triangulares superiores 2×2. Nesta dissertação, trabalhamos com um resultado de A. Giambruno e M. Zaicev [17], que nos dá condições necessárias e suficientes para que uma álgebra A tenha crescimento polinomial da sequência de codimensões. Tais condições foram dadas tendo em vista a decomposição do n-ésimo cocaracter de A em S_n-caracteres irredutíveis.

Para que fosse possível fazer tal caracterização por meio da decomposição do n-ésimo cocaracter, o conceito de PI-expoente de uma álgebra foi apresentado juntamente com alguns exemplos para que esta ideia ficasse mais clara. Daí vimos que existe uma estreita relação entre o PI-expoente de A e o fato desta álgebra A ter a sequência $\{c_n(A)\}_{n\geq 1}$ polinomialmente limitada ou não.

Além disso, de posse do Teorema 5.2.2, que permitia reduzir nosso estudo ao de álgebras de dimensão finita, e do Teorema 1.4.8 e da Proposição 3.2.3, que nos permitiam trabalhar sobre corpos algebricamente fechados, utilizamos como ferramenta principal o seguinte resultado: se considerarmos a decomposição de Wedderburn-Malcev de uma álgebra A de dimensão finita sobre um corpo algebricamente fechado

$$A = B_1 \oplus \cdots \oplus B_m \dotplus J \tag{6.5}$$

onde $J = J(A)$ é o radical de Jacobson de A e B_i é subálgebra simples de A, $i = 1, \ldots, m$, então podemos relacionar o fato de termos todos os $B_i's$ isomorfos ou não a F e todos os produtos do tipo B_iJB_k nulos ou não, onde $i \neq k$, com o crescimento polinomial das codimensões.

Em geral, se F é um corpo de característica zero, reunindo as várias caracterizações de uma álgebra com a sequência $\{c_n(A)\}_{n\geq 1}$ polinomialmente limitada trabalhadas nesta dissertação (veja Proposição 2.4.9 e Teorema 5.2.1) e a dada por Kemer [25] obtemos o seguinte teorema:

Teorema 6.2.5. *Seja A uma PI-álgebra sobre um corpo F de característica zero. As seguintes condições são equivalentes:*

i) *A sequência $\{c_n(A)\}_{n\geq 1}$ é polinomialmente limitada;*

ii) $\exp(A) \leq 1$;

iii) $Id(A) \nsubseteq Id(E)$ *e* $Id(A) \nsubseteq Id(UT_2(F))$;

iv) *Existe uma constante q tal que* $\chi_n(A) = \sum\limits_{\substack{\lambda\vdash n \\ |\lambda|-\lambda_1<q}} m_\lambda \chi_\lambda$ *para todo* $n \geq 1$.

Vimos que, quando a dimensão de A é finita, a constante q citada no quarto item é tal que $J(A)^q = \{0\}$. Se F for algebricamente fechado obtemos outras duas equivalências vistas na Proposição 5.1.1 e no Teorema 5.1.2.

Vale mencionar que, fixado um inteiro não negativo t, existem classificações particulares sobre as álgebras A tais que $c_n(A) \leq \alpha n^t$. Por exemplo, em 2005, Giambruno e La Mattina [9] descreveram as álgebras cuja sequência de codimensões é limitada por uma constante, isto é, $t = 0$, e álgebras cuja sequência é linearmente limitada, isto é, $t = 1$. Posteriormente, em 2007, La Mattina [30] apresentou um resultado mais geral, exibindo, para cada $k \geq 1$ fixo, álgebras cuja n-ésima codimensão é da ordem de qn^{k-1}, onde $q \in \mathbb{Q}$ é uma constante não nula.

Voltando ao estudo geral das álgebras cujas sequências de codimensões são polinomialmente limitadas, vimos que, no caso em que A está dotada de uma involução $*$, não necessariamente temos $\{c_n(A,*)\}$ polinomialmente limitada. Por exemplo, para todo n, $c_n(G_2) = 1$ (veja Exemplo 2.2.8), mas $c_n(G_2,*) = 2^n$ (veja a Proposição 4.3.12).

Porém, sob determinadas hipóteses, o crescimento polinomial das codimensões implica no crescimento polinomial das $*$-codimensões. Mais precisamente vimos o seguinte resultado:

Teorema 6.1.1. *Seja A uma álgebra com involução de dimensão finita sobre um corpo F algebricamente fechado de característica zero. Então as seguintes afirmações são equivalentes:*

i) $\{c_n(A,*)\}_{n\geq 1}$ *é polinomialmente limitada;*

ii) *a sequência de codimensões* $\{c_n(A)\}_{n\geq 1}$ *é polinomialmente limitada e* $A = B \dotplus J(A)$, *onde B é uma subálgebra semissimples maximal de A com* $b = b^*$ *para todo* $b \in B$;

O resultado acima foi fundamental para demonstrar o Teorema 6.1.3 que, por sua vez, só é válido para as álgebras de dimensão finita. No entanto, utilizando técnicas diferentes e bastantes interessantes, obtivemos a seguinte classificação geral para as álgebras com crescimento polinomial das $*$-codimensões:

Teorema 6.2.3. *Seja A uma álgebra com involução $*$ sobre um corpo F de característica zero. Então $c_n(A,*) \leq \alpha n^t$ para algumas constantes α, t se, e somente se, existe uma constante δ tal que*

$$\chi_n(A,*) = \sum_{\substack{|\lambda|+|\mu|=n \\ |\lambda|-\lambda_1\leq\delta \\ |\mu|\leq\delta}} m_{\lambda,\mu}\chi_{\lambda,\mu}.$$

Como consequência vimos que, se A é uma álgebra com involução $*$ tal que $Id(G_2,*) \subsetneq Id(A,*)$, então $\{c_n(A,*)\}_{n\geq 1}$ é polinomialmente limitada. Mais geralmente, Giambruno e Mishchenko [11] provaram em 2001 que $\{c_n(A,*)\}_{n\geq 1}$ é polinomialmente limitada se, e somente se, $Id(A,*) \nsubseteq Id(G_2,*)$ e $Id(A,*) \nsubseteq Id(M,*)$ (veja nos Exemplos 4.1.5 e 4.1.6 como a involução é definida nestas álgebras). Note que este resultado é análogo ao resultado de Kemer do caso ordinário.

Lembrando que uma involução é um antiautomorfismo de ordem 2, é natural nos perguntarmos o seguinte: o que acontece se A é uma álgebra com um automorfismo de ordem 2? Estas álgebras são conhecidas como **superálgebras** ou **álgebras $\mathbb{Z}_2$-graduadas**, isto é, são álgebras que podem ser escritas como soma de subespaços $A = A^{(0)} \dot{+} A^{(1)}$. Além disso, os subespaços $A^{(0)}$ e $A^{(1)}$ satisfazem $A^{(0)}A^{(0)} + A^{(1)}A^{(1)} \subseteq A^{(0)}$ e $A^{(0)}A^{(1)} + A^{(1)}A^{(0)} \subseteq A^{(1)}$.

Note que toda álgebra associativa é uma superálgebra. De fato, basta considerar $A^{(0)} = A$ e $A^{(1)} = \{0\}$. Esta graduação é chamada **graduação trivial**. Um outro exemplo de superálgebra é a álgebra de Grassmann com a graduação dada no Exemplo 2.1.7 denominada **graduação canônica**.

No contexto de superálgebras, podemos definir conceitos análogos àqueles apresentados nesta dissertação para o caso ordinário e para álgebra com involução (veja [19]). Além disso, podemos obter resultados análogos. Por exemplo, temos o seguinte resultado:

Teorema 6.2.6 ([19], Teorema 11.9.3)**.** *Seja A uma superálgebra de dimensão finita sobre um corpo F algebricamente fechado de característica zero. Então* $\mathrm{supexp}(A) \leq 1$ *se, e somente se:*

1. $\exp(A) \leq 1$;
2. $A = B \dot{+} J(A)$ *onde B é uma subálgebra semissimples maximal comutativa com uma $\mathbb{Z}_2$-graduação trivial induzida.*

Vale ressaltar que as superálgebras cujas sequências $\{c_n^{gr}(A)\}$ são polinomialmente limitadas são aquelas tais que $\mathrm{supexp}(A) \leq 1$.

Mas seria possível obter uma caracterização das superálgebras com crescimento polinomial das codimensões graduadas por meio da sequência dos cocaracteres graduados? A resposta é sim e foi obtida por Giambruno, Zaicev e Mishchenko [13] em 2002:

Teorema 6.2.7. *Seja A uma superálgebra sobre um corpo F algebricamente fechado de característica zero. Então $c_n^{gr}(A) \leq \alpha n^t$, para certas constantes α e t se, e somente se, existe uma constante q tal que*

$$\chi_n^{gr}(A) = \sum_{\substack{|\lambda|+|\mu|=n \\ |\lambda|-\lambda_1 \leq q \\ |\mu| \leq q}} m_{\lambda,\mu}\chi_{\lambda,\mu}.$$

Finalmente mencionamos que os mesmos autores provaram também um resultado análogo ao de Kemer [25] para o caso de superálgebras. Este resultado pode ser encontrado em [12].

Referências Bibliográficas

[1] S. A. Amitsur and J. Levitzki. *Minimal identities for algebras.* Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950) 449-463.

[2] A. Berele. *Cocharacters sequences for algebras with Hopf algebra actions.* J. Algebra **185** (1996) 869-885.

[3] C. W. Curtis and I. Reiner. *Representation theory of finite groups and associative algebras.* Interscience Publishers, New York, 1962.

[4] M. Dehn. *Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlsysteme.* Math. Ann. **85** (1922) 184-194.

[5] V. Drensky. *A minimal basis for the identities of a second-order matrix algebra over a field of characteristic 0.* Algebra and Logic **20** (1981) 188-194.

[6] V. Drensky. *Free Algebras and PI-Algebras.* Springer-Verlag, Singapore, 2000.

[7] V. Drensky and A. Giambruno. *Cocharacters, codimensions and Hilbert series of the polynomial identities for 2×2 matrices with involution.* Canadian J. Math. **46** (1994) 718-733.

[8] B. Farb and K Dennis. *Noncommutative Algebra.* Graduate Texts in Mathematics, Spring Verlag, 1993.

[9] A. Giambruno and D. La Mattina. *PI-Algebras with Slow Codimension Growth.* Journal of Algebra **284** (2005) 371-391.

[10] A. Giambruno and S. Mishchenko. *Polynomial growth of the $*$-codimensions and Young diagrams.* Communications in Algebra, **29(1)** (2001) 277-284.

[11] A. Giambruno and S. Mishchenko. *On star-varieties with almost polynomial growth.* Algebra Coll. **8** (2001) 33-42.

[12] A. Giambruno, S. Mishchenko and M. Zaicev. *Polynomial identities on superalgebras and almost polynomial growth*. Communications in Algebra **29(9)** (2001) 3787-3800.

[13] A. Giambruno, S. Mishchenko and M. Zaicev. *Group actions and asymptotic behavior of graded polynomial identities*. J. London Math. Soc. **66** (2002) 295-312.

[14] A. Giambruno and A. Regev. *Wreath products and P.I. algebras*. J. Pure Appl. Algebra, **35** (1985) 133-149.

[15] A. Giambruno and M. Zaicev. *On codimension growth of finitely generated associative algebras*. Adv. Math. **140** (1998) 145-155.

[16] A. Giambruno and M. Zaicev. *Exponential codimension growth of P.I. algebras: an exact estimative*. Adv. Math. **142** (1999) 221-243.

[17] A. Giambruno and M. Zaicev. *A characterization of algebras with polinomial growth of the codimensions*. Proc. Amer. Math. Soc. **129(1)** (2000) 59-67.

[18] A. Giambruno and M. Zaicev. *A characterization of varieties of associative algebras of exponent 2*. Serdica Math. J. **26** (2000) 245-252.

[19] A. Giambruno and M. Zaicev. *Polynomial Identities and Asymptotic Methods*. AMS Mathematical Surveys and Monographs, **Vol. 122**, Providence R.I., 2005.

[20] M. Hall. *Projective planes*. Trans. Amer. Math. Soc. **54** (1943) 229-277.

[21] G. James and A. Kerber. *The Representation Theory of the Symmetric Group*. Encyclopedia of Mathematics and its Applications, 1981.

[22] G. James and M. Liebeck. *Representation and Characters of Groups*. Second edition, Cambridge University Press, (2001).

[23] I. Kaplansky. *Rings with a polynomial identity*. Bull. Amer. Math. Soc. **54** (1948) 496-500.

[24] A. R. Kemer. *T-Ideals with Power Growth of the Codimension are Specht*. Siberian Math. J. **19** (1978) 37-48.

[25] A. R. Kemer. *Varieties of finite rank*. Proc. 15th All the Union Algebraic Conf., Krasnoyarsh **2** (1979) (in Russian).

[26] A. R. Kemer. *Varieties and $\mathbb{Z}_2$-graded algebras*. Math. USSR Izv. **25** (1985) 359-374.

[27] A. R. Kemer. *Finite basis property of identities of associative algebras.* Algebra and Logic **26** (1987) 362-397.

[28] A. R. Kemer. *Ideals of identities of associatives algebras*. Transl. Math. Monogr., **87**, Amer. Math. Soc., Providence RI, 1991. MR **92f:**16031.

[29] D. Krakowski and A. Regev. *The polynomial identities of the Grassmann algebra*. Trans. Amer. Math. Soc. **181** (1973) 429-438.

[30] D. La Mattina. *Varieties of almost polynomial growth: classifying their subvarieties*. Manuscripta Math. **123** (2007) 185-203.

[31] T. Y. Lam. *A First Course in Noncommutative Rings*. Springer-Verlag, 1991.

[32] V. N. Latyshev. *On Regev's theorem on identities in a tensor product of PI-algebras*. Ups. Mat. Nauk. **27** (1973) 213-214 (in Russian).

[33] Yu. N. Malcev. *A basis for the identities of the algebra of upper triangular matrices*. (Russian) Algebra i Logika **10** (1971) 393-400; English translation: Algebra and Logic **10** (1971).

[34] C. P. Milies and S. K. Sehgal. *An introduction to group rings*. Kluwer Academic Publishers, (2002).

[35] Yu. P. Razmyslov. *Finite basing of the identities of a matrix algebra of second order over a field of characteristic zero*. Algebra and Logic **12** (1973) 47-63.

[36] A. Regev. *Existence of identities in $A \otimes B$*. Israel J. Algebra **11** (1972) 131-152.

[37] A. Regev. *The representations of wreath products via double centralizing theorems*. J. Algebra **102** (1986) 423-443.

[38] L. H. Rowen. *Ring Theory*. Academic Press, New York, 1988. MR **89h:**160001.

[39] W. Wagner. *Über die Grundlagen der projektiven Geometrie und allgemeine Zahlsysteme*. Math. Ann. **113** (1936) 528-567.