

Universidade Federal de Minas Gerais  
Instituto de Ciências Exatas  
Departamento de Matemática

Sobre as Subvariedades das Variedades de  
Crescimento Quase Polinomial

Thais Silva do Nascimento

Belo Horizonte, 26 de fevereiro de 2013

Thais Silva do Nascimento

Sobre as Subvariedades das Variedades de Crescimento Quase Polinomial

Dissertação apresentada ao corpo docente de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientadora: Ana Cristina Vieira

Banca Examinadora:

Irina Sviridova (UNB)

Viviane Ribeiro Tomaz da Silva (UFMG)

André Gimenez Bueno (suplente) (UFMG)

Belo Horizonte

2013

# Resumo

Sejam  $F$  um corpo de característica zero e  $A$  uma  $F$ -álgebra. Em 1972, Regev mostrou que se  $A$  satisfaz uma identidade polinomial não-nula então a sua sequência de codimensões  $\{c_n(A)\}_{n \geq 1}$  é limitada exponencialmente. Em 1978, Kemer provou que a sequência  $\{c_n(A)\}_{n \geq 1}$  é limitada polinomialmente se, e somente se,  $Id(A)$  contém pelo menos um polinômio que não é uma identidade de  $\mathcal{G}$  e de  $UT_2$ , isto é,  $c_n(A) \leq kn^t$  se, e somente se,  $\mathcal{G}, UT_2 \notin var(A)$ , onde denotamos por  $\mathcal{G}$  a álgebra de Grassmann de dimensão infinita e por  $UT_2$  a álgebra de matrizes  $2 \times 2$  triangulares superiores. Como consequência deste fato,  $var(\mathcal{G})$  e  $var(UT_2)$  são as únicas variedades de crescimento quase polinomial, isto é, as sequências de codimensões destas variedades crescem exponencialmente mas qualquer uma de suas subvariedades próprias tem crescimento polinomial. O objetivo principal deste trabalho é apresentar os resultados de La Mattina [18] os quais classificam, a menos de PI-equivalência, todas as álgebras contidas na variedade gerada pela álgebra  $\mathcal{G}$  ou  $UT_2$ .

# Abstract

Let  $F$  be a field of characteristic zero and let  $A$  be a  $F$ -algebra. In 1972, Regev proved that if  $A$  satisfies a nonzero polynomial identity then the sequence of codimensions  $\{c_n(A)\}_{n \geq 1}$  is exponentially bounded. In 1978, Kemer proved that the sequence  $\{c_n(A)\}_{n \geq 1}$  is polynomially bounded if and only if  $Id(A)$  contains at least one polynomial which is not an identity of  $\mathcal{G}$  and of  $UT_2$ , i.e.  $c_n(A) \leq kn^t$  if and only if  $\mathcal{G}, UT_2 \notin var(A)$ , where  $\mathcal{G}$  denotes the infinite dimensional Grassmann algebra and  $UT_2$  denotes the algebra of  $2 \times 2$  upper triangular matrices. As a consequence,  $var(\mathcal{G})$  and  $var(UT_2)$  are the only two varieties of almost polynomial growth, i.e., the sequences of codimensions of those varieties grow exponentially but any proper subvariety of them has polynomial growth. The main goal of this work is to present La Mattina's results [18] which classify, up to PI-equivalence, all algebras contained in the variety generated by the algebra  $\mathcal{G}$  or  $UT_2$ .

# Agradecimentos

Primeiramente, agradeço a Deus por sempre ter me abençoado em tudo que faço, abrindo meus caminhos, me dando força e sabedoria para superar os obstáculos e me presenteando com pessoas especiais para caminhar comigo.

Aos meus pais, Aparecida e Ari, e ao meu querido namorado, Nailton, que me apoiam incondicionalmente. Agradeço a eles pelo carinho e pelo sacrifício que fazem junto comigo para que eu possa realizar mais este sonho.

Aos professores especiais que me ajudaram a sonhar mais alto e acreditar em meu potencial. Agradeço ao professor Martinho da Costa Araújo da UFMT, que foi meu orientador na graduação, me fez querer ir mais longe e, de certa forma, continua me orientando até hoje.

À minha orientadora Ana Cristina Vieira, pela qual tenho uma profunda admiração não só pela profissional dedicada que é mas também pela excelente pessoa, pela sua motivação, paciência, presteza durante este período de mestrado e, principalmente, por ter me ensinado a sempre buscar fazer o melhor e conhecer cada vez mais.

Aos amigos, que me apoiaram em tempos de crise e me proporcionaram momentos de prazer. Afinal “nem só de Álgebra viverá o homem”.

Aos colegas e professores do Mestrado pelo convívio e pelas discussões que muito contribuíram para enriquecer meu conhecimento. Especialmente a Rafael Bezerra dos Santos, que teve o trabalho de revisar este texto.

Ao PICME (Programa de Iniciação Científica e Mestrado) e à CAPES, pelo apoio financeiro.

# Sumário

<b>Resumo</b>	<b>i</b>
<b>Abstract</b>	<b>ii</b>
<b>Agradecimentos</b>	<b>iii</b>
<b>Introdução</b>	<b>vi</b>
<b>1 Conceitos Preliminares</b>	<b>1</b>
1.1 $F$ -Álgebras . . . . .	1
1.2 Produto Tensorial de Álgebras . . . . .	13
1.3 PI-Álgebras . . . . .	16
1.4 T-ideais e Variedades . . . . .	21
<b>2 Sequência de Codimensões</b>	<b>31</b>
2.1 Codimensões . . . . .	31
2.2 Cocaracteres . . . . .	38
2.3 Codimensões Próprias . . . . .	43
2.4 Crescimento das Codimensões . . . . .	47
<b>3 Construindo Álgebras</b>	<b>56</b>
3.1 Álgebras Unitárias de Crescimento Polinomial . . . . .	56

3.2	Álgebras sem Unidade de Crescimento Polinomial . . . . .	61
3.3	Álgebras de Crescimento Lento das Codimensões . . . . .	69
3.4	Variedades Minimais . . . . .	70
<b>4</b>	<b>Classificando Variedades</b>	<b>76</b>
4.1	Variedades de Crescimento Lento . . . . .	76
4.2	Subvariedades de $var(\mathcal{G})$ . . . . .	83
4.3	Subvariedades de $var(UT_2)$ . . . . .	85
4.4	Considerações Finais . . . . .	91
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>93</b>

# Introdução

A álgebra é um dos ramos mais ativos da pesquisa matemática. A PI-teoria, um dos ramos da teoria dos anéis, tem sido enormemente estudada nos últimos sessenta anos, produzindo muitos resultados interessantes.

Os países do leste europeu e a Itália estão na vanguarda deste ramo de pesquisa. No Brasil, existem três principais instituições que se aplicam na formação de doutores neste assunto. Na Universidade Estadual de Campinas, a PI-teoria é estudada principalmente em corpos de característica prima. Na Universidade Federal de Minas Gerais, a PI-teoria é estudada em corpos de característica zero. Na Universidade de Brasília, a PI-teoria é dedicada ao estudo da propriedade de Specht de T-ideais, entre outros tópicos.

Esta dissertação foi desenvolvida na área de PI-álgebras, onde o símbolo  $F$  denotará um corpo e estaremos nos concentrando em característica zero. As  $F$ -álgebras serão sempre associativas. Além disso, as  $F$ -álgebras e os anéis não serão necessariamente unitários.

Consideremos  $F\langle X \rangle$  a álgebra livre unitária gerada por  $X$ , onde  $X = \{x_1, x_2, \dots\}$  é um conjunto enumerável de variáveis não comutativas. Dizemos que uma  $F$ -álgebra  $A$  é uma PI-álgebra se existe um polinômio não nulo  $f(x_1, \dots, x_n)$  pertencente a  $F\langle X \rangle$  tal que para qualquer sequência de elementos  $(a_1, \dots, a_n)$  cujas entradas são elementos de  $A$  vale:  $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ . O polinômio  $f$  é dito uma identidade da  $F$ -álgebra  $A$ .

Uma  $F$ -álgebra comutativa é uma PI-álgebra, já que esta satisfaz o comutador duplo  $f(x_1, x_2) = [x_1, x_2]$ , onde  $[x_1, x_2] = x_1x_2 - x_2x_1$ . Definimos indutivamente o comutador de peso maior ou igual a 3 como  $[x_1, \dots, x_n] = [[x_1, \dots, x_{n-1}], x_n]$ ,  $n \geq 3$ .

Outro exemplo de uma PI-álgebra é  $UT_2$ , a álgebra das matrizes triangulares superiores  $2 \times 2$  com entradas em  $F$ . Esta álgebra satisfaz o polinômio  $[x_1, x_2][x_3, x_4]$ .



Em geral, as álgebras de dimensão finita são PI-álgebras. Um importante exemplo de PI-álgebra de dimensão infinita é a álgebra de Grassmann unitária  $\mathcal{G}$ . Podemos descrevê-la como

$$\mathcal{G} = \langle 1, e_1, e_2, \dots \mid e_i e_j = -e_j e_i \rangle.$$

Além disso, temos que  $\mathcal{G}$  pode ser escrita como a soma direta dos seguintes subespaços vetoriais.

- $\mathcal{G}^{(0)} = \text{span}_F\{e_{i_1} \dots e_{i_{2k}}; 1 \leq i_1 < \dots < i_{2k}, k \geq 0\}$ .
- $\mathcal{G}^{(1)} = \text{span}_F\{e_{j_1} \dots e_{j_{2p+1}}; 1 \leq j_1 < \dots < j_{2p+1}, p \geq 0\}$ .

Com esta decomposição, não é difícil ver que  $\mathcal{G}$  satisfaz o polinômio  $[x_1, x_2, x_3]$ .

Um objeto importante na PI-teoria é o conjunto  $Id(A)$  de todas as identidades de uma  $F$ -álgebra  $A$ . O conjunto  $Id(A)$  é um ideal que é fechado em relação aos endomorfismos de  $F\langle X \rangle$ . Um ideal com essa propriedade é chamado um T-ideal; particularmente  $Id(A)$  é chamado o T-ideal da álgebra  $A$ . Se  $Id(A)$  possui uma base finita dizemos que  $A$  tem a propriedade da base finita. Pode-se mostrar que o conjunto  $Id(A)$  é gerado por polinômios multilineares no caso em que  $A$  é uma álgebra sobre um corpo  $F$  de característica zero.

Specht conjecturou em 1950 que todo T-ideal de uma  $F$ -álgebra associativa é finitamente gerado como T-ideal sobre um corpo de característica zero. Somente em 1987, Kemer [16] conseguiu provar a conjectura de Specht. Contudo o problema de como determinar uma base para um T-ideal não foi respondido e ainda é fruto de pesquisa nos dias atuais. Só para se ter uma idéia da dificuldade desse problema, até o presente momento conhecemos uma base de  $Id(M_2(F))$ , mas desconhecemos para  $Id(M_k(F))$  no caso em que  $k \geq 3$ .

Em 1972, Regev [27] introduziu o conceito de sequência de codimensões de uma  $F$ -álgebra  $A$ . O  $n$ -ésimo elemento dessa sequência é definido abaixo:

$$c_n(A) = \dim_F \frac{P_n}{P_n \cap Id(A)},$$

onde  $P_n$  denota o conjunto de todos os polinômios multilineares de grau  $n$ .

A sequência de codimensões foi uma alternativa usada por Regev para responder a conjectura de Specht para alguns casos.

Muitos são os resultados provados a respeito da sequência de codimensões de importantes PI-álgebras. Os matemáticos Krakowski e Regev [17] provaram que

$$c_n(\mathcal{G}) = 2^{n-1}.$$

Malcev [24] mostrou que a  $n$ -ésima codimensão de  $UT_2$  é igual a:

$$c_n(UT_2) = 2^{n-1}(n-2) + 2.$$

Além disso, observamos que se  $A$  é uma álgebra nilpotente então  $x_1 \dots x_N$  é uma identidade polinomial de  $A$  para algum  $N \in \mathbb{N} - \{0\}$ . Assim  $c_n(A) = 0, \forall n \geq N$ .

Ainda em 1972, Regev provou que o produto tensorial de duas PI-álgebras é uma PI-álgebra e que toda PI-álgebra é exponencialmente limitada, ou seja, sua sequência de codimensões é limitada exponencialmente. Depois Latyshev [22] atribuiu uma cota superior para a sequência de codimensões de uma PI-álgebra, provando que se  $A$  é uma álgebra que satisfaz uma identidade de grau  $d \geq 1$  então:

$$c_n(A) \leq (d-1)^{2n}.$$

Esse último resultado é denominado neste texto como Teorema das Codimensões de Regev. Em 1979, Kemer [15] caracterizou as álgebras de crescimento polinomial das codimensões. Ele mostrou que se  $\mathcal{V}$  é uma variedade de álgebras sobre um corpo  $F$  de característica zero então  $c_n(\mathcal{V}) \leq an^k$  se, e somente se,  $\mathcal{G}, UT_2 \notin \mathcal{V}$ . Isto implica que não temos crescimento intermediário das codimensões, ou seja, ou  $\{c_n(A)\}_{n \geq 1}$  cresce exponencialmente ou cresce polinomialmente. Além disso, isto implica que  $var(\mathcal{G})$  e  $var(UT_2)$  são as únicas variedades de crescimento quase polinomial, ou seja, as sequências de codimensões destas variedades crescem exponencialmente mas qualquer uma de suas subvariedades próprias tem crescimento polinomial.

Neste trabalho, o nosso principal objetivo será classificar, a menos de PI-equivalência, as subvariedades das variedades  $var(\mathcal{G})$  e  $var(UT_2)$ , ou seja, apresentar os resultados de La Mattina [18], publicados em 2007.

Para o bom entendimento deste texto, o leitor precisa de conhecimentos básicos de álgebra linear e noções de teoria dos anéis e teoria de grupos, em especial, alguns resultados a respeito da teoria de representações e caracteres.

Nosso trabalho está dividido em quatro capítulos. No primeiro capítulo iremos fazer uma apresentação sucinta sobre módulos e álgebras, definimos o radical de Jacobson, apresentamos as definições básicas, como identidades polinomiais, T-ideais,

variedades de álgebras, polinômios multihomogêneos e multilineares. Apresentamos também o Teorema de Wedderburn-Malcev que estabelece a decomposição de uma álgebra de dimensão finita em uma álgebra semissimples e seu radical de Jacobson, uma relevante ferramenta para a demonstração dos resultados dos capítulos seguintes.

No segundo capítulo definimos a sequência das codimensões, as codimensões próprias e os cocaracteres, entre outros objetos. Apresentamos o Teorema da Base de Specht, que nos fornece uma base do espaço dos polinômios próprios multilineares, afim de obtermos o resultado que relaciona as codimensões ordinárias e as codimensões próprias de uma PI-álgebra unitária sobre um corpo infinito  $F$ . Definimos também as noções de crescimento polinomial das codimensões e de crescimento exponencial das codimensões de uma álgebra  $A$  e apresentamos resultados importantes de caracterização de álgebras de crescimento polinomial. Primeiramente, verificamos, através de um Teorema de Kemer, a importância da álgebra de Grassmann  $\mathcal{G}$  e da álgebra  $UT_2$  das matrizes triangulares superiores  $2 \times 2$ , na caracterização de crescimento polinomial quando são excluídas da variedade de uma álgebra  $A$ . E finalizamos com a decomposição do radical de Jacobson e uma importante decomposição das álgebras de dimensão finita que geram uma variedade de crescimento polinomial.

No terceiro capítulo caracterizamos as subálgebras que aparecem na classificação das subvariedades próprias das variedades  $var(UT_2)$  e  $var(\mathcal{G})$ , definindo-as e encontrando seus T-ideais e suas sequências de codimensões. Como estaremos trabalhando com álgebras de crescimento polinomial, os resultados apresentados no Capítulo 2 serão frequentemente requisitados. Ainda neste capítulo destacamos quais das álgebras apresentadas geram variedades minimais.

O último capítulo é o principal. Nele iremos classificar todas as subvariedades próprias das variedades de crescimento quase polinomial, ou seja, estaremos explicitando os resultados de La Mattina publicados em 2007, [18]. Terminamos o trabalho fazendo alguns comentários a respeito de superálgebras e dos resultados que foram estendidos do caso ordinário, como a classificação das variedades de superálgebras de crescimento polinomial feita por La Mattina em 2011, [21].

# Capítulo 1

## Conceitos Preliminares

### 1.1 $F$ -Álgebras

Os espaços vetoriais sobre um corpo  $F$  que têm estrutura de anel e que gozam de uma determinada propriedade adicional serão bastante importantes como veremos. Essas estruturas são conhecidas como  $F$ -álgebras (associativas), ou simplesmente, álgebras, caso o corpo  $F$  esteja subentendido.

O objetivo desta seção é apresentar as  $F$ -álgebras, definir o radical de Jacobson e introduzir a álgebra de Grassmann unitária. Além disso, vamos mostrar que se  $A$  é uma  $F$ -álgebra semissimples unitária então o seu radical de Jacobson é o ideal nulo e vamos também enunciar o Teorema de Wedderburn-Malcev, que fornece uma interessante decomposição para álgebras de dimensão finita e que será fundamental para o nosso trabalho.

Começaremos fazendo uma apresentação sucinta de  $R$ -módulos e anuladores, onde  $R$  é um anel, com o objetivo de definir o radical de Jacobson de  $R$  e estabelecer as propriedades dele na situação em que  $R$  é um anel artiniano unitário. Para este fim, assumiremos que, se  $I$  é um ideal próprio à esquerda de um anel unitário  $S$  então existe um ideal maximal à esquerda  $H$  de  $S$  tal que  $H \supset I$ . Este resultado é uma consequência do Lema de Zorn o qual pode ser encontrado em [14].

**Definição 1.1.** *Seja  $R$  um anel. Um  $R$ -módulo à esquerda  $M$  é um grupo abeliano sobre o qual  $R$  age linearmente, ou seja, existe uma função  $R \times M \rightarrow M$  (a imagem*

de  $(r, a)$  é denotada por  $ra$ ) tal que para todos  $r, s \in R$  e  $a, b \in M$  valem as seguintes propriedades:

- $r(a + b) = ra + rb$ ;
- $(r + s)a = ra + sa$ ;
- $r(sa) = (rs)a$ .

Quando  $R$  for um anel com unidade  $1_R$ , exigimos também que  $1_R a = a, \forall a \in M$ .

Usaremos a expressão  $R$ -módulo para nos referirmos a um  $R$ -módulo à esquerda. Podemos definir analogamente  $R$ -módulos à direita.

Um  $R$ -submódulo  $N$  de um  $R$ -módulo  $M$  é um subgrupo que é fechado sob a ação dos elementos de  $R$ . Observe que um anel  $R$  é um  $R$ -módulo e neste caso seus  $R$ -submódulos são seus ideais à esquerda. Quando  $R = F$  é um corpo temos que  $M$  é um  $F$ -espaço vetorial.

**Definição 1.2.** *Sejam  $M$  e  $N$  dois  $R$ -módulos. Um  $R$ -homomorfismo  $\phi : M \rightarrow N$  é uma aplicação tal que, para quaisquer  $m_1, m_2 \in M$  e  $r \in R$ , valem as seguintes propriedades:*

- $\phi(m_1 + m_2) = \phi(m_1) + \phi(m_2)$ ,
- $\phi(rm) = r\phi(m)$ .

Em relação à definição anterior, definimos os seguintes conjuntos:

$$\text{Ker}(\phi) = \{a \in M | \phi(a) = 0\} \text{ e } \text{Im}(\phi) = \{\phi(a) | a \in M\}.$$

Não é difícil ver que  $\text{Ker}(\phi)$  e  $\text{Im}(\phi)$  são  $R$ -submódulos de  $M$  e  $N$  respectivamente. Além disso,  $\phi$  é injetivo se, e somente se,  $\text{Ker}(\phi) = \{0\}$ .

Dizemos que dois  $R$ -módulos  $M$  e  $N$  são isomorfos (denotamos por  $M \cong N$ ) se existir um  $R$ -homomorfismo  $\theta : M \rightarrow N$  que é uma bijeção.

**Definição 1.3.** *Seja  $M$  um  $R$ -módulo. Definimos o seu anulador como:*

$$\text{ann}(M) = \{r \in R | rm = 0 \forall m \in M\}.$$

Notemos que  $\text{ann}(M)$  é um ideal bilateral de  $R$ .

**Exemplo 1.4.** Consideremos o  $\mathbb{Z}$ -módulo  $\mathbb{Z}_m$ . Podemos ver que:

$$\text{ann}(\mathbb{Z}_m) = \langle m \rangle,$$

onde  $\langle m \rangle$  denota o conjunto dos múltiplos de  $m$ .

Um  $R$ -módulo  $M$  é simples se  $M \neq \{0\}$  e seus únicos  $R$ -submódulos são  $\{0\}$  e  $M$ .

**Definição 1.5.** O radical de Jacobson de um anel  $R$ , o qual denotamos por  $J(R)$ , é definido por

$$J(R) = \bigcap_{M \in \mathcal{M}} \text{ann}(M).$$

onde  $\mathcal{M}$  denota o conjunto de todos os  $R$ -módulos simples.

Quando  $R = \{0\}$ , definimos  $J(R) = \{0\}$ .

Observe que  $J(R)$  é um ideal bilateral de  $R$ . Além disso, para anéis unitários temos sempre que  $J(R) \neq R$ .

Os anéis artinianos merecem destaque nesta dissertação.

**Definição 1.6.** Um  $R$ -módulo  $M$  é dito artiniano se qualquer cadeia descendente de  $R$ -submódulos de  $M$ :

$$M_1 \supset M_2 \supset \dots \supset M_k \supset \dots$$

estabiliza, isto é, existe  $k_0 \in \mathbb{N}$  tal que  $M_{k_0} = M_k$ ,  $\forall k \geq k_0$ .

**Definição 1.7.** Um anel  $R$  é dito artiniano à esquerda (à direita) se toda cadeia ascendente de ideais à esquerda (à direita) de  $A$  é estacionária.

Na próxima proposição, cuja demonstração segue diretamente do Lema de Zorn, veremos uma maneira de garantir que um anel é artiniano.

**Proposição 1.8.** As seguintes afirmações abaixo são equivalentes:

- **1:**  $R$  é artiniano à esquerda;
- **2:** Qualquer conjunto  $\{I_j\}_{j \in J}$  não vazio de ideais à esquerda de  $R$  possui um elemento minimal.

**Definição 1.9.** *Seja  $I$  um ideal bilateral de um anel  $R$ . O ideal  $I$  é dito nilpotente se existe  $m \in \mathbb{N} - \{0\}$  tal que, para quaisquer  $a_1, \dots, a_m \in I$ , tem-se  $a_1 \dots a_m = 0$ . O menor natural  $m$  nestas condições, chama-se índice de nilpotência de  $I$ .*

**Lema 1.10.** *Sejam  $R$  um anel unitário e  $J(R)$  o seu radical de Jacobson. Se  $b \in J(R)$  então  $R(1 - b) = R$ .*

**Prova:** Seja  $\mathcal{R}$  a coleção de todos os ideais maximais à esquerda de  $R$ . Se  $I \in \mathcal{R}$ , temos que  $R/I$  é um  $R$ -módulo simples e  $\text{ann}(R/I) \subset I$ . Deste modo, se  $b \in J(R)$  temos:

$$b \in \bigcap_{L \in \mathcal{R}} L.$$

Notemos que  $R(1 - b)$  é um ideal à esquerda de  $R$ . Se  $R(1 - b)$  estivesse contido estritamente em  $R$ , existiria pelo Lema de Zorn um ideal maximal à esquerda  $T$  tal que  $R(1 - b) \subset T$ . Como  $R$  é unitário isto acarreta que  $1 - b \in T$ . Absurdo, pois  $b \in J(R) \subset T$  e  $1 \notin T$ .

□

A próxima proposição nos permitirá caracterizar o radical de Jacobson de um anel artiniano.

**Proposição 1.11.** *Se  $I$  é um ideal nilpotente do anel unitário  $R$  então  $I \subset J(R)$ . Se  $R$  é artiniano então  $J(R)$  é nilpotente e assim é o maior ideal nilpotente de  $R$ .*

**Prova:** Começemos pela primeira destas afirmações. Seja  $I$  um ideal nilpotente. Pela definição anterior, existe  $m \in \mathbb{N} - \{0\}$  tal que  $I^m = \{0\}$ . É suficiente provar que  $IM = \{0\}$  para todo  $R$ -módulo simples  $M$ . Suponhamos que  $IN \neq \{0\}$  para algum  $R$ -módulo simples  $N$ . Notemos que  $IN$  é um subgrupo de  $N$  fechado sob a ação de  $R$ . Pela simplicidade de  $N$ , temos que  $IN = N$  e portanto  $I^2N = IN = N$ . Indutivamente, temos que  $I^pN = N \quad \forall p \in \mathbb{N} - \{0\}$ . Assim  $N = I^mN = \{0\}$ , o que é um absurdo. Isso garante que  $I \subset J(R)$ .

A demonstração da segunda afirmação é um pouco mais trabalhosa. Por simplicidade substituiremos  $J(R)$  por  $J$ . Como  $R$  é artiniano, a cadeia abaixo estabiliza:

$$J \supset J^2 \supset \dots \supset J^m \supset J^{m+1} \supset \dots .$$

Deste modo, existe  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$  tal que  $J^n = J^{n+1} = \dots$ .

Se  $J^n = \{0\}$ , concluímos que  $J$  é nilpotente e a segunda afirmação está provada. Suponhamos por absurdo que  $J^n \neq \{0\}$  e considere a seguinte família de ideais à esquerda, onde  $A = J^n$ :

$$\mathcal{J} = \{L \mid L \text{ é ideal à esquerda de } R \text{ e } AL \neq \{0\}\}.$$

A cadeia  $\mathcal{J}$  é não vazia já que  $J \in \mathcal{J}$ . Pela Proposição 1.8, existe um elemento minimal em  $\mathcal{J}$ . Denominemos este elemento por  $Z$ . Sabemos que existe um elemento  $x \in Z$  tal que  $Ax \neq \{0\}$ .

Observemos  $Ax \subset Z$  e  $Ax$  é um ideal à esquerda pertencente a  $\mathcal{J}$ . Pela minimalidade de  $Z$ , temos que  $Ax = Z$ . Isto significa que existe  $b \in A$  tal que:

$$bx = x.$$

Ou seja  $(1 - b)x = 0$ . Provaremos que  $(1 - b)$  é invertível à esquerda, assim  $x = 0$  e conseqüentemente  $Z = \{0\}$ . Este absurdo mostrará que  $J^n = \{0\}$ .

Pelo Lema 1.10, temos que  $R(1 - b) = R$ . Assim, existe  $y \in R$  tal que  $y(1 - b) = 1$ , o que mostra que  $(1 - b)$  é invertível à esquerda e o resultado está provado.

□

**Exemplo 1.12.** *Considere o anel  $R = \mathbb{Z}/p^n\mathbb{Z}$  onde  $p$  é primo. Então, todos os ideais próprios não nulos de  $R$  têm a forma  $p^iR$ , onde  $1 \leq i \leq n - 1$ . Todos estes são nilpotentes e  $pR$  é o maior deles. Assim,  $J(R) = pR$ .*

**Definição 1.13.** *Seja  $A$  um espaço vetorial sobre um corpo  $F$ . Dizemos que  $A$  é uma  $F$ -álgebra (associativa) se  $A$  é um anel tal que para todos  $a, b \in A$  e  $\alpha \in F$  vale a seguinte propriedade:*

- $\alpha(a \cdot b) = (\alpha a) \cdot b = a \cdot (\alpha b)$ .

Se  $A$  é um anel comutativo, dizemos que  $A$  é uma  $F$ -álgebra comutativa. Caso  $A$  seja um anel unitário, dizemos que  $A$  é uma álgebra unitária.

A dimensão de uma  $F$ -álgebra é a sua dimensão como espaço vetorial sobre  $F$ . Dizemos que  $A$  é gerada como álgebra por um subconjunto  $S$ , se todo elemento de  $A$



pode ser escrito como combinação linear sobre  $F$  de produtos  $s_{i_1} \cdots s_{i_k}$  onde  $s_{i_j} \in S$ . Nesse caso, escrevemos  $A = \langle S \rangle$ .

Observemos que uma  $F$ -álgebra  $A$  é um anel que é um  $F$ -módulo com a multiplicação de anel compatível com a ação de  $F$ . Além disso, se  $A$  é uma  $F$ -álgebra unitária de dimensão finita então  $A$  é um anel artinianiano. A proposição a seguir estende a Proposição 1.11, e sua demonstração pode ser vista em [23].

**Proposição 1.14.** *Seja  $A$  uma  $F$ -álgebra de dimensão finita sobre  $F$ . Então  $J(A)$  é o maior ideal nilpotente de  $A$ .*

**Exemplo 1.15.** 1. *A álgebra  $M_n(F)$  das matrizes  $n \times n$  com entradas em  $F$  é unitária e não comutativa, para  $n \geq 2$ . Além disso a sua dimensão é  $n^2$ .*

2. *A álgebra  $UT_n(F)$  das matrizes triangulares superiores  $n \times n$  é uma álgebra unitária e não comutativa, para  $n \geq 2$ , cuja a dimensão é:  $\frac{n(n+1)}{2}$ .*

3. *Consideremos um conjunto infinito enumerável de variáveis não comutativas  $X = \{x_1, x_2, \dots\}$ . Denotamos por  $F\langle X \rangle$  o espaço vetorial gerado por todas as seqüências  $x_{i_1}x_{i_2} \cdots x_{i_n}$ , com  $n \geq 0$ , munido da multiplicação natural definida por justaposição. A seqüência com  $n = 0$  denota a unidade  $1 \in F\langle X \rangle$ .  $F\langle X \rangle$  é uma álgebra unitária de dimensão infinita.*

4. *Considere um grupo  $G$ . Um exemplo importante de  $F$ -álgebra é a chamada álgebra de grupo  $FG$  a qual é definida como o conjunto das somas formais:*

$$FG := \left\{ \sum_{g \in G} r_g g \mid r_g \in F \text{ e } r_g \text{ é q.s.z.} \right\},$$

onde o termo q.s.z significa que  $r_g \neq 0$  apenas para um número finito de elementos de  $G$ .

As operações de  $FG$  são as seguintes:

$$\begin{aligned} \sum_{g \in G} \alpha_g g + \sum_{g \in G} \beta_g g &= \sum_{g \in G} (\alpha_g + \beta_g) g, \\ \left( \sum_{g \in G} \alpha_g g \right) \left( \sum_{h \in G} \beta_h h \right) &= \sum_{g, h \in G} \gamma_{gh} gh, \quad \gamma_{gh} = \alpha_g \beta_h, \end{aligned}$$

se  $\lambda \in F$  então:

$$\lambda \left( \sum_{g \in G} \alpha_g g \right) = \sum_{g \in G} \lambda \alpha_g g.$$

Claramente, a dimensão de  $FG$  é a ordem de  $G$ .

**Definição 1.16.** *Sejam  $M_1, \dots, M_k$  submódulos de um  $R$ -módulo  $M$ . Denotamos por*

$$M = M_1 \dot{+} \dots \dot{+} M_k$$

*e dizemos que  $M$  é soma direta de  $M_1, \dots, M_k$ , como módulo, se:*

1.  $M = M_1 + \dots + M_k$ ;
2. se  $m_1 + \dots + m_k = 0$ , com  $m_i \in M_i$ , então  $m_i = 0$  para todo  $i = 1, \dots, k$ .

**Definição 1.17.** *Sejam  $A_1, \dots, A_k$  subálgebras de uma  $F$ -álgebra  $A$ . Denotamos por*

$$A = A_1 \oplus \dots \oplus A_k$$

*e dizemos que  $A$  é soma direta de  $A_1, \dots, A_k$ , como álgebra, se:*

1.  $A = A_1 + \dots + A_k$ ;
2. se  $a_1 + \dots + a_k = 0$ , com  $a_i \in A_i$ , então  $a_i = 0$  para todo  $i = 1, \dots, k$ ;
3.  $A_i A_j = 0$ , para todo  $i, j = 1, \dots, k$  com  $i \neq j$ .

**Definição 1.18.** *Dizemos que  $B$  é uma  $F$ -subálgebra de  $A$  se  $B$  é um subanel e um  $F$ -submódulo de  $A$ .*

**Exemplo 1.19.** 1. *A álgebra  $UT_n(F)$  é uma subálgebra de  $M_n(F)$ .*

2. *Um exemplo de uma subálgebra de  $UT_3(F)$  é o conjunto formado pelas matrizes do tipo:*

$$D = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} : a, b, c, d \in F \right\}.$$

3. *Considere  $E = \{f \in F\langle x \rangle \mid f(0) = 0\}$ . O conjunto  $E$  é uma subálgebra de  $F\langle x \rangle$ .*

Destacamos alguns tipos especiais de  $F$ -álgebras, algumas delas mais tarde serão os exemplos iniciais de álgebras com identidades polinomiais:

**Definição 1.20.** 1.  *$A$  é simples se  $A^2 \neq \{0\}$  e esta não possui ideais bilaterais próprios.*

2.  $A$  é semissimples se esta pode ser escrita como a soma direta, não necessariamente finita, de subálgebras simples.
3.  $A$  é nilpotente se existe  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$  tal que para quaisquer  $a_1, \dots, a_n$  em  $A$ , tem-se  $a_1 \cdots a_n = 0$ . O menor natural positivo  $n$  com esta propriedade é chamado de índice de nilpotência de  $A$ .
4.  $A$  é nil de grau limitado se existe  $p \in \mathbb{N} - \{0\}$  tal que  $a^p = 0$  para todo  $a \in A$ . O menor natural positivo  $p$  com essa propriedade é chamado expoente de  $A$ .

**Exemplo 1.21.** Considerando a álgebra  $M_n(F)$ , sabemos que  $M_n(F)$  é uma álgebra unitária e não comutativa, para  $n \geq 2$ . A simplicidade desta álgebra é menos óbvia. Neste exemplo e daqui para frente, a matriz  $e_{lm} = (f_{ij}) \in M_n(F)$  denota uma matriz elementar com a seguinte regra de formação:

$$f_{ij} = 1 \text{ caso } (i, j) = (l, m)$$

$$f_{ij} = 0 \text{ caso contrário.}$$

Para verificar que  $M_n(F)$  é uma álgebra simples, consideremos o conjunto  $\hat{n} = \{1, \dots, n\}$  e um ideal bilateral  $J$  em  $M_n(F)$ . Sejam o conjunto  $X = \{(i, j) \in \hat{n} \times \hat{n}\}$  e, para cada  $(i, j) \in X$ , o seguinte ideal bilateral de  $F$ :

$$I_{i,j} = \{x \in F \mid \exists A = (a_{ij}) \in J \text{ tal que } a_{ij} = x\}.$$

Como  $F$  é um corpo, só temos duas opções:

$$I_{i,j} = \{0\} \text{ ou } I_{i,j} = F.$$

Se  $I_{i,j} = \{0\}$  para todo par  $(i, j) \in X$  então  $J = \{0\}$ . Caso exista um par  $(i_1, j_1) \in X$  tal que  $I_{i_1, j_1} = F$ , existe uma matriz  $B \in J$  tal que  $b_{i_1 j_1} = 1$ . Como  $J$  é um ideal bilateral, temos que  $e_{i_1 j_1} = e_{i_1 i_1} B e_{j_1 j_1}$  e  $e_{kl} = e_{k i_1} e_{i_1 j_1} e_{j_1 l}$  são elementos de  $J$ . Como as matrizes elementares geram  $M_n(F)$  como espaço vetorial, segue que  $J = M_n(F)$ .

Mais geralmente, se  $D$  é um anel de divisão, temos que  $M_n(D)$  é álgebra simples.

A seguir, definiremos o conceito de homomorfismo de  $F$ -álgebras.

**Definição 1.22.** Uma aplicação  $\Phi : A_1 \rightarrow A_2$  entre as  $F$ -álgebras  $A_1$  e  $A_2$  é um homomorfismo de  $F$ -álgebras se  $\phi$  é uma  $F$ -aplicação linear e para quaisquer  $a, b \in A_1$  vale a seguinte propriedade:

- $\Phi(ab) = \Phi(a)\Phi(b)$ .

Dizemos que  $\Phi$  é um isomorfismo se esta for uma aplicação bijetora. Nesse caso, dizemos que  $A_1$  e  $A_2$  são isomorfas, ou simplesmente,  $A_1 \cong A_2$ . Um homomorfismo de  $A$  em  $A$  é chamado um endomorfismo. Um endomorfismo bijetor é chamado automorfismo. Denotamos os conjuntos de endomorfismos e automorfismos de  $A$  por  $End(A)$  e  $Aut(A)$ , respectivamente. Além disso  $\Phi$  é injetora se, e somente se,  $Ker(\Phi) = \{0\}$ .

Seja  $\Phi : A \rightarrow B$  um homomorfismo de  $F$ -álgebras. É fácil ver que  $Ker(\Phi)$  é um ideal de  $A$  e  $Im(\Phi)$  é uma  $F$ -subálgebra de  $B$ . Além disso, pode-se provar que

$$A/Ker(\phi) \cong Im(\phi).$$

Este resultado é conhecido como o Teorema do homomorfismo de álgebras.

Um outro exemplo de  $F$ -álgebra é a álgebra de Grassmann unitária.

**Exemplo 1.23.** *Seja  $I \subset F\langle X \rangle$  o ideal de  $F\langle X \rangle$  gerado por:*

$$span_F\{x_i x_j + x_j x_i : i, j \geq 1\}.$$

*Para cada  $i \in \mathbb{N} - \{0\}$ , definimos  $e_i = x_i + I$ . Notemos que*

$$e_i e_j = x_i x_j + I = -x_j x_i + I = -e_j e_i.$$

*Definimos a  $F$ -álgebra de Grassmann  $\mathcal{G}$  como a  $F$ -álgebra gerada por:*

$$\{1, e_1, e_2, \dots, e_k, \dots\}.$$

*Ou seja:*

$$\mathcal{G} = \langle 1, e_1, e_2, \dots, e_k, \dots \mid e_i e_j = -e_j e_i \rangle.$$

*Desta forma, cada elemento da álgebra de Grassmann  $\mathcal{G}$  é uma combinação linear de produtos da forma  $e_{i_1} e_{i_2} \cdots e_{i_j}$ , onde  $j$  é um número natural positivo, e 1, a unidade de  $\mathcal{G}$ . Se  $\sigma$  é uma permutação de  $S_n$ , onde  $S_n$  é o grupo simétrico de grau  $n$ , temos:*

$$e_{\sigma(1)} e_{\sigma(2)} \cdots e_{\sigma(n)} = sgn(\sigma) e_1 \cdots e_n.$$

A álgebra de Grassmann fornece vários exemplos de subálgebras de dimensão finita. Para construí-las, restringimos o número de geradores a uma quantidade finita. Deste modo, para cada  $k \geq 1$ , temos a  $F$ -álgebra:

$$\mathcal{G}_k = \langle 1, e_1, e_2, \dots, e_k \mid e_i e_j = -e_j e_i \rangle,$$

a qual tem dimensão  $2^k$ .

Notemos que a  $F$ -álgebra de Grassmann é a soma direta dos seguintes espaços vetoriais:

$$\begin{aligned} \mathcal{G}^{(0)} &= \text{span}_F \{ e_{i_1} \dots e_{i_{2k}}; 1 \leq i_1 < \dots < i_{2k}, k \geq 0 \}; \\ \mathcal{G}^{(1)} &= \text{span}_F \{ e_{i_1} \dots e_{i_{2p+1}}; 1 \leq i_1 < \dots < i_{2p+1}, p \geq 0 \}. \end{aligned}$$

Esses subespaços vetoriais satisfazem as seguintes propriedades:

- $\mathcal{G} = \mathcal{G}^{(0)} \dot{+} \mathcal{G}^{(1)}$ ;
- $\mathcal{G}^{(0)}\mathcal{G}^{(0)} + \mathcal{G}^{(1)}\mathcal{G}^{(1)} \subset \mathcal{G}^{(0)}$ , isto mostra que  $\mathcal{G}^{(0)}$  é uma subálgebra e que  $\mathcal{G}^{(1)}$  não é uma subálgebra;
- $\mathcal{G}^{(0)}\mathcal{G}^{(1)} + \mathcal{G}^{(1)}\mathcal{G}^{(0)} \subset \mathcal{G}^{(1)}$ .

Sempre que lidamos com álgebras semissimples, o conhecido Teorema de Wedderburn-Artin é bastante útil. A principal consequência desse teorema é a possibilidade de decompor estas  $F$ -álgebras como a soma direta de álgebras de matrizes e sua demonstração pode ser vista em [23]. A demonstração original é feita para álgebras semissimples, mas também temos podemos considerar anéis semissimples.

**Teorema 1.24** (Teorema de Wedderburn-Artin). *Se  $A$  é uma  $F$ -álgebra semissimples de dimensão finita então  $A$  é isomorfa a uma soma direta de um número finito de álgebras de matrizes com coeficientes sobre anéis de divisão, ou seja:*

$$A \cong \bigoplus_{i=1}^k M_{n_i}(D_i),$$

onde cada  $D_i$  é um anel de divisão de dimensão finita.

Particularmente, se  $F$  é um corpo algebricamente fechado então  $D_i \cong F \ \forall i = 1, \dots, k$ , ou seja:

$$A \cong \bigoplus_{i=1}^k M_{n_i}(F).$$

**Lema 1.25.** *Seja  $A$  uma  $F$ -álgebra tal que  $A = A_1 \oplus A_2$  onde  $A_1$  e  $A_2$  são duas  $F$ -álgebras. Então*

$$J(A) \cong J(A_1) \dot{+} J(A_2).$$

*Consequentemente, por uma indução simples, se  $A = A_1 \oplus \dots \oplus A_m$  então:*

$$J(A) \cong J(A_1) \dot{+} \dots \dot{+} J(A_m).$$

**Prova:** O nosso primeiro objetivo é verificar que todo elemento de  $J(A)$  se escreve como uma soma de um elemento de  $J(A_1)$  com um elemento de  $J(A_2)$ .

Seja  $a$  um elemento de  $J(A)$ . Como  $A = A_1 \oplus A_2$  temos que  $a = a_1 + a_2$  onde  $a_1 \in A_1$  e  $a_2 \in A_2$ . Se  $a_1 \notin J(A_1)$  ou  $a_2 \notin J(A_2)$  então podemos supor, sem perda de generalidade, que existe um  $A_1$ -módulo  $N$  simples tal que  $a_1N \neq 0$ . Podemos estender  $N$  a um  $A$ -módulo simples  $\overline{N}$  da seguinte maneira: para qualquer elemento  $x \in A_2$  faremos  $x\overline{N} = \{0\}$  e quando  $x \in A_1$  faremos  $x\overline{N} = xN$ . Como  $\overline{N}$  é um  $A$ -módulo simples, temos que  $(a_1 + a_2)\overline{N} = 0$ . Contudo, temos que  $a_1N = a_1\overline{N} \neq 0$  e  $a_2\overline{N} = 0$ . Esta contradição conclui a afirmação do parágrafo anterior.

Para quaisquer  $(a_1, a_2), (b_1, b_2) \in J(A_1) \oplus J(A_2)$  e  $\lambda \in F$ , temos as seguintes operações:

- $(a_1, a_2) + (b_1, b_2) = (a_1 + b_1, a_2 + b_2)$ ;
- $(a_1, a_2)(b_1, b_2) = (a_1b_1, a_2b_2)$ ;
- $\lambda(a_1, a_2) = (\lambda a_1, \lambda a_2)$ .

Consideremos a seguinte aplicação entre  $F$ -álgebras:

$$\begin{aligned} \phi : J(A_1) \dot{+} J(A_2) &\longrightarrow J(A) \\ (a_1, a_2) &\longmapsto a_1 + a_2 \end{aligned}$$

Esta aplicação é claramente sobrejetiva. É uma aplicação linear e preserva a multiplicação a qual é compatível com a multiplicação por escalar. Assim  $\phi$  é um homomorfismo de álgebras. Além disso,  $\phi$  é injetiva já que  $Ker(\phi) = \{0\}$ .

Segue daí que  $J(A) \cong J(A_1) \oplus J(A_2)$ .

□

Uma consequência importante deste lema é o seguinte teorema.

**Teorema 1.26.** *Se  $A$  é uma  $F$ -álgebra semissimples unitária de dimensão finita então  $J(A) = \{0\}$ .*

**Prova:** Sabemos do Teorema de Wedderburn-Artin que:

$$A \cong \bigoplus_{i=1}^k M_{n_i}(D_i).$$

Com isto, segue do lema anterior que:

$$J(A) \cong \bigoplus_{i=1}^k J(M_{n_i}(D_i)).$$

Como  $J(M_{n_i}(D_i)) = \{0\}$  para todo  $i \in \{1, \dots, k\}$ , temos que  $J(A) = \{0\}$ .

□

O teorema de Wedderburn-Malcev, que anunciaremos em seguida, terá um papel muito importante nesta dissertação, como veremos no próximo capítulo. A demonstração pode ser encontrada em [12].

**Definição 1.27.** *Dizemos que  $B$  é uma  $F$ -subálgebra semissimples maximal de  $A$  se para qualquer  $F$ -subálgebra semissimples  $A'$  tal que  $B \subset A' \subset A$  implicar que  $B = A'$  ou  $A = A'$ .*

**Teorema 1.28** (Teorema de Wedderburn-Malcev). *Sejam  $A$  uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo  $F$  de característica zero e  $J(A)$  o seu radical de Jacobson. Então existe uma subálgebra semissimples maximal  $B$  tal que:*

$$A = B + J(A).$$

**Exemplo 1.29.** *Ilustraremos como o teorema Wedderburn-Malcev funciona para o caso em que a  $F$ -álgebra de dimensão finita é a álgebra das matrizes triangulares superiores  $UT_n(F)$ .*

Seja  $UT_n(F)^N$  o ideal formado pelas matrizes de  $UT_n(F)$  com diagonal principal nula. Como  $UT_n(F)$  é unitária de dimensão finita e  $UT_n(F)^N$  é o seu maior ideal nilpotente, temos:

$$J(UT_n(F)) = UT_n(F)^N.$$

Para cada  $i = 1, \dots, n$  denote por  $A_{ii} = \{ae_{ii} | a \in F\}$ . Não é difícil ver que  $A_{ii}$  é uma  $F$ -subálgebra simples de  $UT_n(F)$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Além disso a  $F$ -subálgebra baixo é maximal semissimples em  $UT_n(F)$ :

$$B = A_{11} \oplus \dots \oplus A_{nn}.$$

Com isto temos a decomposição de Wedderburn-Malcev de  $UT_n(F)$ :

$$UT_n(F) = A_{11} \oplus \dots \oplus A_{nn} + UT_n(F)^N.$$

## 1.2 Produto Tensorial de Álgebras

Nesta seção faremos uma apresentação bastante rápida sobre o produto tensorial de  $F$ -módulos que nos servirá unicamente para a construção do produto tensorial de  $F$ -álgebras. Para maiores informações, o leitor pode consultar a referência [2].

**Definição 1.30.** *Sejam  $M_1, \dots, M_r, N$   $F$ -módulos. Uma aplicação  $F$ -multilinear é uma aplicação  $\mu : M_1 \times \dots \times M_r \rightarrow N$  que é linear em cada variável, ou seja:*

$$\mu(v_1, \dots, av'_i + bv''_i, \dots, v_r) = a\mu(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_r) + b\mu(v_1, \dots, v''_i, \dots, v_r),$$

para quaisquer  $v_1 \in M_1, \dots, v'_i \in M_i, v''_i \in M_i, \dots, v_r \in M_r$  e  $a, b \in F$ .

**Proposição 1.31.** *Sejam  $M_1, \dots, M_r$   $F$ -módulos. Então existe um par  $(T, g)$  consistindo de um  $F$ -módulo  $T$  (o qual denotamos por  $M_1 \otimes \dots \otimes M_r$ ) e uma aplicação  $F$ -multilinear  $g : M_1 \times \dots \times M_r \rightarrow T$  com as seguintes propriedades:*

1. **Existência.** *Para todo o  $F$ -módulo  $P$  e toda aplicação  $F$ -multilinear  $f : M_1 \times \dots \times M_r \rightarrow P$ , existe uma única  $F$ -aplicação linear  $f' : P \rightarrow T$  tal que  $f = f' \circ g$ .*
2. **Unicidade.** *Além disso, se  $(T_1, g_1)$  e  $(T_2, g_2)$  são dois pares com esta propriedade então existe um isomorfismo de  $F$ -módulos  $j : T_1 \rightarrow T_2$  tal que  $j \circ g_1 = g_2$ .*

**Prova: (Existência)** Seja  $L$  o  $F$ -módulo formado pelas combinações lineares do conjunto  $M_1 \times \dots \times M_r$ . Seja  $A$  o submódulo de  $L$  gerado pelos elementos da forma

$$(v_1, \dots, av'_i + bv''_i, \dots, v_r) - a(v_1, \dots, v'_i, \dots, v_r) - b(v_1, \dots, v''_i, \dots, v_r). \quad (2.1)$$



Denotamos o módulo quociente  $L/A$  por  $T$ .

Posto isso, definimos a aplicação  $F$ -multilinear  $g : M_1 \times \dots \times M_r \rightarrow T$  por:

$$g(a_1, \dots, a_r) = a_1 \otimes \dots \otimes a_r,$$

onde  $a_1 \otimes \dots \otimes a_r$  corresponde ao termo  $(a_1, \dots, a_r) + A$ .

Como  $f : M_1 \times \dots \times M_r \rightarrow P$  é  $F$ -multilinear, obtemos uma aplicação induzida  $\gamma : L \rightarrow P$  da seguinte forma: se  $\oplus_{i \in I} a_i(v_1, \dots, v_r) \in L$  então

$$\gamma(\oplus_{i \in I} a_i(v_1, \dots, v_r)) = \sum_{i \in I} a_i f(v_1, \dots, v_r).$$

É fácil verificar que esta aplicação está bem definida, pois apenas um número finito dos  $a_i$  não é zero. Além disso,  $\gamma$  é  $F$ -linear. Como  $f$  é  $F$ -multilinear,  $\gamma$  se anula em elementos da forma (2.1), logo em  $A$ . Por passagem ao quociente, obtemos então uma transformação  $F$ -linear  $f' : T \rightarrow P$  onde:

$$f'(x_1 \otimes \dots \otimes x_m) = \gamma(x_1, \dots, x_m) \text{ e } f = f' \circ g.$$

Notemos que a aplicação  $f'$  é única já que uma aplicação linear fica completamente determinada pela sua imagem em um conjunto gerador.

**(Unicidade)** Suponhamos que existam dois pares  $(T_1, g_1)$  e  $(T_2, g_2)$  satisfazendo o item anterior. Por definição, existem aplicações  $F$ -lineares  $f'_1 : T_1 \rightarrow T_2$  e  $f'_2 : T_2 \rightarrow T_1$  tais que  $g_2 = f'_1 \circ g_1$  e  $g_1 = f'_2 \circ g_2$ . Finalmente, notemos que  $f'_1 \circ f'_2 = 1_{T_2}$  e  $f'_2 \circ f'_1 = 1_{T_1}$ , pois  $f'_1 \circ f'_2 \circ g_2 = g_2$  e  $f'_2 \circ f'_1 \circ g_1 = g_1$ . Assim  $f'_1$  é um isomorfismo de espaços vetoriais. Como  $g_2 = f'_1 \circ g_1$ , definindo  $j := f'_1$ , concluímos a proposição.

□

Agora sejam  $A_1, \dots, A_m$   $F$ -álgebras. Podemos considerar o produto tensorial dessas  $F$ -álgebras como  $F$ -módulos como foi feito anteriormente. Podemos munir o  $F$ -módulo  $A_1 \otimes \dots \otimes A_m$  com estrutura de  $F$ -álgebra da seguinte maneira:

$$(a_1 \otimes \dots \otimes a_m) \cdot (b_1 \otimes \dots \otimes b_m) = (a_1 b_1) \otimes \dots \otimes (a_m b_m),$$

onde  $a_1 \otimes \dots \otimes a_m$  e  $b_1 \otimes \dots \otimes b_m$  são elementos de  $A_1 \otimes \dots \otimes A_m$ .

Observemos que  $1_{A_1} \otimes \dots \otimes 1_{A_m}$  é a identidade dessa multiplicação, uma vez que esta fixa todos os geradores  $c_1 \otimes \dots \otimes c_m$  de  $A_1 \otimes \dots \otimes A_m$ . Podemos provar que esta multiplicação é associativa e, assim, mostrarmos que  $A_1 \otimes \dots \otimes A_m$  é um anel. Não é difícil verificar que a multiplicação do anel  $A_1 \otimes \dots \otimes A_m$  é compatível com a ação de  $F$  neste anel como  $F$ -módulo. Com isto, concluímos que  $A_1 \otimes \dots \otimes A_m$  é uma  $F$ -álgebra.

Quando  $K$  é uma extensão de  $F$  e  $A$  é uma  $F$ -álgebra, podemos ver  $A$  como uma  $K$ -álgebra usando o produto tensorial  $A \otimes K$ .

De fato, sabemos que a  $F$ -álgebra  $A$  é descrita por uma base  $\{a_i\}$  de  $A$  sobre  $F$  e pela maneira como multiplicamos os elementos dessa base, quer dizer:

$$a_i a_j = \sum_k b_{ijk} a_k \text{ onde } b_{ijk} \in F \subset K.$$

A relação entre as  $F$ -álgebras  $A$  e  $A \otimes K$  é dada pelo conjunto  $\{a_i\}$  discutido acima. O resultado a seguir, verifica que toda base de  $A$  sobre  $F$  é uma base de  $A \otimes K$  sobre  $K$ .

**Proposição 1.32.** *Toda base de  $A$  sobre  $F$  define uma base de  $A \otimes K$  como um  $K$ -módulo.*

**Prova:** Consideremos os seguintes homomorfismos de  $F$ -álgebras:

$$\begin{aligned} i : K &\rightarrow A \otimes K \\ f &\mapsto 1 \otimes f. \\ \\ j : A &\rightarrow A \otimes K \\ a &\mapsto a \otimes 1. \end{aligned}$$

Estes homomorfismos nos mostram que as  $F$ -álgebras  $A$  e  $K$  estão isomorficamente imersas na  $F$ -álgebra  $A \otimes K$ . Se  $\{e_\alpha\}$  é uma base para  $A$  sobre  $F$  então todo elemento  $x \in A \otimes K$  tem uma única expressão

$$x = \sum e_\alpha \otimes r_\alpha = \sum (e_\alpha \otimes 1)(1 \otimes r_\alpha) = \sum j(e_\alpha)i(r_\alpha),$$

onde  $r_\alpha \in K$ . Desta maneira, podemos considerar  $A \otimes K$  como um  $K$ -módulo via  $i$  e assim  $\{j(e_\alpha)\}$  é uma base para ele.

□

Particularmente, se  $K = \overline{F}$  é o fecho algébrico de  $F$ , podemos ver  $A$  como uma  $\overline{F}$ -álgebra, ou seja,  $A$  é uma álgebra sobre um corpo algebricamente fechado.

### 1.3 PI-Álgebras

Estamos interessados em  $F$ -álgebras que satisfazem uma identidade polinomial não nula de  $F\langle X \rangle$ . Estas  $F$ -álgebras são chamadas de PI-álgebras. Nesta seção estaremos apresentando dois conceitos fundamentais : T-ideais e variedade de álgebras.

Provaremos que, quando  $F$  for um corpo de característica zero, o estudo das identidades polinomiais de um PI-álgebra  $A$  é reduzido ao estudo das chamadas identidades multilineares de  $A$ . Apresentaremos um corolário dos Teoremas de Birkhoff-Poincaré-Witt e de Witt que permite escrever os polinômios multilineares numa forma especial.

**Definição 1.33.** *Uma PI-álgebra  $A$  é uma  $F$ -álgebra que satisfaz um polinômio não nulo em  $F\langle X \rangle$ , isto é, existe  $f(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X \rangle$  não nulo tal que:*

$$f(a_1, \dots, a_n) = 0, \forall a_1, \dots, a_n \in A.$$

Neste caso, denotamos  $f \equiv 0$  em  $A$ .

O polinômio  $f$  é dito uma identidade polinomial de  $A$ . Observemos que o termo constante de uma identidade polinomial  $f$  de uma  $F$ -álgebra  $A$  é nulo já que  $f(0, \dots, 0) = 0$ .

O polinômio standard de grau  $n$  é importante no estudo de PI-álgebras. Este é definido como:

$$St_n(x_1, \dots, x_n) := \sum_{\sigma \in S_n} sgn(\sigma) x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)},$$

onde  $S_n$  é o grupo simétrico de grau  $n$  e  $sgn(\sigma)$  denota o sinal da permutação  $\sigma \in S_n$ .

Definimos o comutador de peso 2 (ou comutador duplo) como sendo o polinômio  $[x_1, x_2] := x_1x_2 - x_2x_1$ . Notemos que  $St_2(x_1, x_2) = [x_1, x_2]$ .

Indutivamente um comutador de peso  $n \geq 3$  é definido como:

$$[x_1, \dots, x_n] := [[x_1, \dots, x_{n-1}], x_n].$$

Notemos que valem as seguintes propriedades de comutadores:

1.  $[x_1, x_2] = -[x_2, x_1]$  (anticomutatividade);
2.  $[x_1, x_2, x_3] + [x_2, x_3, x_1] + [x_3, x_1, x_2] = 0$  (identidade de Jacobi).

As  $F$ -álgebras a seguir são exemplos clássicos de PI-álgebras.

- Exemplo 1.34.** 1. Qualquer  $F$ -álgebra comutativa é uma PI-álgebra. De fato, se  $a$  e  $b$  são elementos de uma  $F$ -álgebra comutativa  $C$  então  $ab = ba$ . Assim,  $C$  satisfaz o comutador duplo:  $[x_1, x_2]$ .
2. Uma  $F$ -álgebra nilpotente de índice  $m$  é uma PI-álgebra, pois satisfaz o polinômio:  $f(x_1, \dots, x_m) = x_1 \cdots x_m$ .
3. A álgebra de Grassmann  $\mathcal{G}$  é uma PI-álgebra. Note que se  $a, b \in \mathcal{G}$ , podemos escrever  $a = a_0 + a_1$  e  $b = b_0 + b_1$  onde  $a_0, b_0 \in \mathcal{G}^{(0)}$  e  $a_1, b_1 \in \mathcal{G}^{(1)}$ . Dessa maneira o comutador duplo de  $a, b$  é:

$$[a, b] = a_1 b_1 - b_1 a_1 = 2a_1 b_1.$$

Ou seja:

$$[a, b] \in \mathcal{G}^{(0)}.$$

Seja  $c \in \mathcal{G}$ . Como,  $[a, b] \in \mathcal{G}^{(0)}$ , temos que  $[a, b]$  comuta com  $c$  e portanto:

$$[[a, b], c] = [a, b]c - c[a, b] = 0.$$

Logo a álgebra de Grassmann satisfaz o polinômio  $[x_1, x_2, x_3]$ .

4. A álgebra  $UT_n(F)$  é uma PI-álgebra para a qual uma identidade polinomial é:

$$f(x_1, \dots, x_{2n}) = [x_1, x_2] \cdots [x_{2n-1}, x_{2n}].$$

Para verificar esta afirmação, consideremos  $A, B \in UT_n(F)$ . Sabemos que os elementos da diagonal principal de  $C = AB$  são da forma  $c_{ii} = a_{ii}b_{ii}$ , onde  $i \in \{1, \dots, n\}$ . O mesmo ocorre com os elementos da diagonal principal de

$D = BA$ . Assim  $[A, B]$  é um elemento do radical de Jacobson de  $UT_n(F)$ ,  $J(UT_n(F))$ . Como o expoente de  $J(UT_n(F))$  é  $n$ , para quaisquer matrizes  $A_1, \dots, A_{2n} \in UT_n(F)$ , temos que

$$f(A_1, \dots, A_{2n}) = 0.$$

5. Sejam  $A, B, C \in M_2(F)$ . Então:

$$[[A, B]^2, C] = 0.$$

De fato, considere uma matriz  $D \in M_2(F)$ . A expressão matricial do polinômio característico associado é:

$$x^2 - \text{tr}(D)x + \det(D).$$

Se  $D = [A, B]$ , temos que  $\text{tr}(D) = 0$ . Logo pelo Teorema de Cayley-Hamilton, temos:

$$D^2 + \det(D) \cdot 1_{M_2(F)} = 0.$$

Portanto  $[A, B]^2$  é um múltiplo escalar da matriz identidade,  $1_{M_2(F)}$ . Conclusão:

$$[[A, B]^2, C] = 0.$$

Logo,  $M_2(F)$  é uma PI-álgebra.

Além disso,  $M_2(F)$  satisfaz  $St_4(x_1, \dots, x_4)$ . Mais geralmente temos que  $M_n(F)$  é uma PI-álgebra, pois satisfaz o polinômio:

$$St_{2n}(x_1, \dots, x_{2n}).$$

Esse resultado é conhecido como o Teorema de Amitsur-Levitzki, (1950). A demonstração original é encontrada em [1]. Uma demonstração alternativa deste teorema pode ser encontrada em [28].

**Definição 1.35.** Dado  $f(x_1, \dots, x_n) \in F\langle X \rangle$ , podemos descrever  $f$  a partir da soma dos seus monômios  $\alpha_i u_i$ :

$$f = \sum_{i=1}^m \alpha_i u_i; \alpha_i \in F, \alpha_i \neq 0.$$

Definimos  $|u_j|_{x_i}$  como sendo o número de ocorrências da variável  $x_i$  em  $u_j$ , e o grau de  $f$  em relação a  $x_i$  por:

$$gr_{x_i}(f) := \underbrace{\max}_{1 \leq j \leq m} |u_j|_{x_i}.$$

Definimos o número de variáveis de  $u_j$ , contadas com as suas respectivas multiplicidades, como sendo  $|u_j|$ .

Caso  $|u_1| = \dots = |u_m|$ , dizemos que  $f$  é homogêneo. Para este polinômio, definimos o seu grau como sendo o número de variáveis, contando as repetições, de um dos seus monômios. Se  $f$  é um polinômio qualquer, definimos o grau de  $f$  como sendo:

$$gr(f) = \underbrace{\max}_{1 \leq j \leq m} |u_j|.$$

**Definição 1.36.** Se  $|u_1|_{x_i} = \dots = |u_m|_{x_i}$ , dizemos que  $f(x_1, \dots, x_n)$  é homogêneo na variável  $x_i$ . Quando  $f(x_1, \dots, x_n)$  é homogêneo em relação a todas as variáveis, dizemos que este é multihomogêneo. Para os polinômios multihomogêneos nas variáveis  $x_1, \dots, x_n$ , existe a denominação de multigrau que é uma  $n$ -úpla com  $n$  entradas em que o número da  $i$ -ésima entrada determina o número de vezes em que  $x_i$  aparece em um monômio de  $f$ . Se  $f$  é um polinômio multihomogêneo em que todos os seus monômios têm  $m$  símbolos, contadas as repetições, então  $f$  é multihomogêneo de grau  $m$ . Quando  $f$  é multihomogêneo de multigrau  $(1, \dots, 1)$ , dizemos que  $f$  é multilinear.

Considere  $g \in F\langle X \rangle$ . Com a definição anterior, nota-se que podemos decompor  $g$  na soma de parcelas distintas com as seguintes propriedades:

1. Cada parcela é um polinômio multihomogêneo;
2. Quaisquer duas parcelas desta decomposição têm multigraus diferentes.

Denominamos estas parcelas de componentes multihomogêneas de  $g$ .

**Exemplo 1.37.** 1.  $g(x_1, x_2, x_3, x_4) = x_1x_2^2x_3^2x_4 + x_4x_2^2x_3x_1x_3$  é um polinômio multihomogêneo.

2.  $c(x_1, x_2, x_3) = x_1x_3x_2 + x_2x_1x_3$  e  $St_n(x_1, \dots, x_n)$  são polinômios multilineares.

Daqui em diante estaremos representando o conjunto de polinômios multilineares de grau  $n$  por:

$$P_n = \text{span}_F \{x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n\}.$$

Dessa maneira, qualquer polinômio  $f \in P_n$  pode ser escrito como:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{\sigma \in S_n} \alpha_\sigma x_{\sigma(1)} \cdots x_{\sigma(n)}, \alpha_\sigma \in F.$$

Notemos que todo polinômio multilinear é linear em cada uma de suas variáveis.

Trabalhar com polinômios multilineares é bastante vantajoso, pois para verificar se um polinômio multilinear  $f$  é ou não uma identidade de uma  $F$ -álgebra  $A$  de dimensão finita, basta aplicá-lo nos elementos de uma base de  $A$ , como mostra a proposição a seguir:

**Proposição 1.38.** *Seja  $A$  uma  $F$ -álgebra de dimensão finita com base*

$$B := \{b_1, \dots, b_m\}.$$

*Considere  $f \in F\langle X \rangle$  um polinômio multilinear de grau  $n \geq 1$ . Então  $f$  é uma identidade de  $A$  se, e só se,*

$$f(a_1, \dots, a_n) = 0$$

*para qualquer sequência  $(a_1, \dots, a_n)$  de elementos no conjunto  $B$ .*

**Prova:** Seja  $f$  uma identidade de  $A$ . Então é claro que

$$f(a_1, \dots, a_n) = 0$$

para qualquer sequência  $(a_1, \dots, a_n)$  de elementos no conjunto  $B$ .

Reciprocamente, suponhamos que  $f(a_1, \dots, a_n) = 0$  para qualquer sequência  $(a_1, \dots, a_n)$  de elementos no conjunto  $B$ . Seja  $\Gamma$  o conjunto formado por todas as aplicações de  $\{1, \dots, n\}$  em  $\{1, \dots, m\}$ . Consideremos  $c_1, \dots, c_n \in A$  tais que:

$$c_i = \sum_{j=1}^m \alpha_{i,j} b_j, \alpha_{i,j} \in F.$$

Como  $f$  é um polinômio multilinear, sabemos que este é linear em cada uma das suas variáveis. Assim:

$$f(c_1, \dots, c_n) = \sum_{\sigma \in \Gamma} \alpha_{1, \sigma(1)} \cdots \alpha_{n, \sigma(n)} f(b_{\sigma(1)}, \dots, b_{\sigma(n)}).$$

Como por hipótese  $f(b_{\sigma(1)}, \dots, b_{\sigma(n)}) = 0$  para todo  $\sigma \in \Gamma$  segue que  $f(c_1, \dots, c_n) = 0$ . Deste modo,  $f \in Id(A)$ .

□

Observemos que, adaptando a demonstração desta proposição, pode-se provar que o resultado acima continua válido quando  $B$  é um conjunto infinito.

## 1.4 T-ideais e Variedades

Seja  $A$  uma  $F$ -álgebra. Consideramos o conjunto

$$Id(A) = \{f \in F\langle X \rangle \mid f \equiv 0 \text{ em } A\}$$

dos polinômios satisfeitos por  $A$ . É fácil ver que  $Id(A)$  é um ideal bilateral em  $F\langle X \rangle$ . Outro fato interessante é que  $Id(A)$  é invariante por endomorfismos de  $F\langle X \rangle$ , ou seja se  $\phi$  é um endomorfismo de  $F\langle X \rangle$  então  $\phi(Id(A)) \subseteq Id(A)$ . Para verificar isto, consideremos um polinômio  $f(x_1, \dots, x_n)$  em  $Id(A)$  e um endomorfismo  $\beta$  de  $F\langle X \rangle$

$$\left\{ \begin{array}{l} \beta : F\langle X \rangle \rightarrow F\langle X \rangle \\ x_i \mapsto g_i \end{array} \right.$$

Observemos que  $f(g_1, \dots, g_n) \equiv 0$  em  $A$ .

**Definição 1.39.** *Um ideal  $I$  em  $F\langle X \rangle$  é um T-ideal se  $\phi(I) \subseteq I$  para todo endomorfismo  $\phi$  de  $F\langle X \rangle$ .*

Deste modo,  $Id(A)$  é um T-ideal de  $F\langle X \rangle$  dito o T-ideal de  $A$ . Este abuso de linguagem é permitido graças à proposição seguinte, que mostra que todo T-ideal de  $F\langle X \rangle$  é o ideal das identidades polinomiais de alguma álgebra.

**Proposição 1.40.** *Seja  $I$  um T-ideal de  $F\langle X \rangle$ . Então  $Id(\frac{F\langle X \rangle}{I}) = I$ .*



**Prova:** Primeiramente, seja  $f \in I$ . Considere a seguinte álgebra:

$$A = \frac{F\langle X \rangle}{I}.$$

Mostraremos que  $Id(A) = I$ . Se  $f(x_1, \dots, x_n) \in I$  e  $h_1 + I, \dots, h_n + I \in A$  então existe um endomorfismo  $\phi$  de  $F\langle X \rangle$  tal que

$$f(h_1 + I, \dots, h_n + I) = f(h_1, \dots, h_n) + I = \phi(f(x_1, \dots, x_n)) + I.$$

Como  $I$  é um T-ideal, sabemos que  $\phi(f(x_1, \dots, x_n)) \in I$ . Ou seja,

$$f(h_1 + I, \dots, h_n + I) = I.$$

Como os polinômios  $h_1, \dots, h_n$  foram tomados arbitrariamente em  $F\langle X \rangle$ , concluímos que  $f \in Id(A)$  e portanto  $I \subset Id(A)$ .

Reciprocamente, seja  $f \in Id(A)$ .

Temos

$$f(x_1, \dots, x_n) + I = f(x_1 + I, \dots, x_n + I) = I.$$

Portanto,  $f(x_1, \dots, x_n) \in I$ .

Logo  $Id(A) \subset I$  e a igualdade  $I = Id(A)$  prova a proposição. □

Um T-ideal  $I$  é gerado, como T-ideal, por um conjunto  $S \subset F\langle X \rangle$  se todo elemento de  $I$  pode ser escrito como uma  $F$ -combinação linear de elementos da seguinte forma:

$$h_1 f(g_1, \dots, g_n) h_2,$$

onde os polinômios  $h_1, h_2, g_1, \dots, g_n \in F\langle X \rangle$  e  $f \in S$ . Nesse caso, escrevemos  $I = \langle S \rangle_T$ . Dois conjuntos  $S_1$  e  $S_2$  são equivalentes se  $\langle S_1 \rangle_T = \langle S_2 \rangle_T$ . Além disso, dizemos que um polinômio  $f$  é uma consequência de polinômios em um conjunto  $S \subset F\langle X \rangle$  se  $f \in \langle S \rangle_T$ .

Em 1950, Specht conjecturou que todo T-ideal  $I$  sobre um corpo de característica zero era finitamente gerado, ou seja, existe um conjunto finito  $S \subset F\langle X \rangle$  tal que  $I = \langle S \rangle_T$ . Esta conjectura foi provada em 1988, por Kemer [16].

Dizemos que uma PI-álgebra  $A$  satisfaz a propriedade da base finita se existe um conjunto finito não vazio  $R \subset F\langle X \rangle$  tal que  $Id(A) = \langle R \rangle_T$ .

Provaremos a seguir que todo T-ideal sobre um corpo infinito é gerado por polinômios multihomogêneos. Descreveremos também o processo de multilinearização. Logo após provaremos que todo T-ideal sobre um corpo de característica zero é gerado por polinômios multilineares.

**Teorema 1.41.** *Sejam  $F$  um corpo infinito,  $A$  uma  $F$ -álgebra e  $f(x_1, \dots, x_n)$  uma identidade de  $A$  tal que  $gr_{x_i}(f) = m$ . Seja  $f_j$  a componente de  $f$  de grau  $j$  ( $0 \leq j \leq m$ ) em relação à  $x_i$ , ou seja, a parcela de  $f$  formada pela soma de todos monômios de grau  $j$  em relação à  $x_i$ . Então  $f_j$  é uma identidade de  $A$ .*

**Prova:** Por hipótese, sabemos que  $f = \sum_{j=0}^m f_j$ , onde cada  $f_j$  é a parcela de  $f$  que tem grau  $j$  em relação à variável  $x_i$ . Como o corpo é infinito existem elementos distintos  $\alpha_0, \dots, \alpha_m \in F$ . Observemos que para qualquer  $\alpha \in F$ , vale:

$$f(x_1, \dots, \alpha x_i, \dots, x_n) = \sum_{k=0}^m \alpha^k f_k(x_1, \dots, x_n).$$

Como  $f$  é uma identidade de  $A$ , temos que  $f(\bar{x}_1, \dots, \alpha \bar{x}_i, \dots, \bar{x}_n) = 0$  para quaisquer  $\bar{x}_1, \dots, \bar{x}_n \in A$ . Logo se calcularmos cada um dos  $\alpha'_i$ 's em  $f$  como fizemos para  $\alpha$ , obteremos um sistema de equações com  $m + 1$  variáveis,  $f_0, \dots, f_m$ :

$$\begin{cases} f_0 + \alpha_0 f_1 + \dots + \alpha_0^m f_m = 0 \\ f_0 + \alpha_1 f_1 + \dots + \alpha_1^m f_m = 0 \\ \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \vdots \quad \ddots \quad \vdots \\ f_0 + \alpha_m f_1 + \dots + \alpha_m^m f_m = 0 \end{cases}$$

Para avaliar se este sistema homogêneo tem solução não trivial, temos que verificar se o determinante da matriz abaixo é nulo:

$$B = \begin{pmatrix} 1 & \alpha_0 & \dots & \alpha_0^m \\ 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^m \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & \alpha_m & \dots & \alpha_m^m \end{pmatrix}$$

Notemos que  $\det(B^t) = \prod_{0 \leq i < j \leq m} (\alpha_j - \alpha_i) \neq 0$  já que  $B$  é uma matriz de Vandermonde. Como  $\det(B) = \det(B^t)$ , concluímos que  $f_0, \dots, f_m$  são identidades da álgebra  $A$ .

□

Segue imediatamente deste teorema o seguinte corolário, o qual pode ser provado por uma simples indução no número de variáveis nas quais o polinômio é não-homogêneo:

**Corolário 1.42.** *Sejam  $F$  um corpo infinito e  $A$  uma  $F$ -álgebra. Considere  $f \in Id(A)$ . Então qualquer componente multihomogênea de  $f$  é uma identidade de  $A$ . Consequentemente, qualquer  $T$ -ideal sobre um corpo infinito é consequência de polinômios multihomogêneos.*

Seja  $A$  uma  $F$ -álgebra, onde  $F$  é um corpo infinito de característica diferente de 2. Dada  $f \in Id(A)$  de grau  $k$ , o próximo teorema mostra que é possível obter, a partir desta identidade, uma identidade multilinear de  $A$  de grau menor ou igual a  $k$ .

**Teorema 1.43** (Processo de Multilinearização). *Sejam  $F$  um corpo infinito de característica diferente de 2 e  $f(x_1, \dots, x_n)$  uma identidade polinomial de uma  $F$ -álgebra  $A$  de grau  $k$ . Então existe uma identidade polinomial multilinear  $h$  de  $A$  cujo o grau é menor ou igual a  $k$ .*

**Prova:** Suponhamos que  $gr_{x_i}(f) \leq 1$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Veremos que é possível obter uma identidade multilinear de  $A$  a partir de  $f$ .

Inicialmente, decomponhamos  $f$  na soma dos seus monômios:

$$f = \sum_{j=1}^m \alpha_j u_j, \quad \alpha_j \in F - \{0\}.$$

Caso tenhamos, para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$  e para todo  $j \in \{1, \dots, m\}$ ,  $|u_j|_{x_i} = 1$ , não há nada para se fazer, pois  $f$  já é multilinear. Suponhamos que  $f$  não seja multilinear. Assim, existem  $i \in \{1, \dots, n\}$  e  $j, l \in \{1, \dots, m\}$  tais que  $|u_j|_{x_i} = 0$  e  $|u_l|_{x_i} = 1$ . Seja  $x_{i_1}$  uma variável de  $f$  com esta propriedade e consideremos o seguinte endomorfismo de  $F\langle X \rangle$ :

$$\begin{aligned} \phi_{i_1} : F\langle X \rangle &\rightarrow F\langle X \rangle \\ x_j &\mapsto 0 \text{ caso } j = i_1 \\ x_j &\mapsto x_j \text{ caso contrário.} \end{aligned}$$

$\phi_{i_1}(f)$  é uma identidade de  $A$ , onde a variável  $x_{i_1}$  não aparece. Caso  $\phi_{i_1}(f)$  seja multilinear, concluímos a demonstração deste primeiro caso. Caso contrário, existe

uma variável  $x_{i_2}$  desta identidade com a propriedade que  $x_{i_1}$  tinha em  $f$ . Como na situação anterior, construímos um endomorfismo  $\phi_{i_2}$  de  $F\langle X \rangle$  que associa  $x_{i_2}$  a 0 e fixa as demais variáveis de  $\phi_{i_1}(f)$ . Caso  $\phi_{i_2}(\phi_{i_1}(f))$  seja multilinear, terminamos a demonstração. Caso contrário, repetimos o procedimento anterior. Como o número de variáveis de  $f$  é finito, este algoritmo terminará em alguma etapa e obteremos uma identidade multilinear a partir da  $f$ .

Agora, consideremos o caso em que  $gr_{x_i}(f(x_1, \dots, x_i, \dots, x_n)) = d > 1$  para algum  $i \in \hat{n}$ . Veremos que é possível obter uma identidade  $h$  de  $A$  onde  $gr_{y_i}(h(x_1, \dots, \underbrace{y_i, y_{i+1}}_{\hat{x}_i}, \dots, x_n)) = gr_{y_{i+1}}(h(x_1, \dots, \underbrace{y_i, y_{i+1}}_{\hat{x}_i}, \dots, x_n)) = d - 1$  (nestas duas notações, a  $i$ -ésima variável de  $h$  é omitida e substituída por  $y_i$  e  $y_{i+1}$ ). Por simplicidade, suporemos que  $i = 1$ .

Consideremos o seguinte polinômio:

$$h(y_1, y_2, x_2, \dots, x_n) = f(y_1 + y_2, x_2, \dots, x_n) - f(y_1, x_2, \dots, x_n) - f(y_2, x_2, \dots, x_n). \quad (4.2)$$

É fácil notar que  $h$  é uma identidade de  $A$  e que:

$$gr_{y_1}(f(y_1 + y_2, x_2, \dots, x_n)) = gr_{y_2}(f(y_1 + y_2, x_2, \dots, x_n)) = d;$$

$$gr_{y_1}(f(y_1, x_2, \dots, x_n)) = gr_{y_2}(f(y_2, x_2, \dots, x_n)) = d;$$

$$gr_{y_1}(h(y_1, y_2, x_2, \dots, x_n)) = gr_{y_2}(h(y_1, y_2, x_2, \dots, x_n)) = d - 1.$$

Se substituirmos  $y_1$  e  $y_2$  por  $x_1$  na igualdade (4.2), temos:

$$h(x_1, x_1, x_2, \dots, x_n) = f(2x_1, x_2, \dots, x_n) - 2f(x_1, \dots, x_n).$$

Seja  $f_i$  a componente de  $f$  de grau  $i$  na variável  $x_1$ , assim:

$$f(2x_1, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^d 2^i f_i.$$

Verificaremos que  $h$  é não nulo. Suponha que  $h$  é o polinômio nulo. Assim, temos:

$$f(2x_1, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^d 2^i f_i = 2f(x_1, \dots, x_n).$$

Logo:

$$f_0 = (2^2 - 2)f_2 + \dots + (2^d - 2)f_d.$$

Sabemos que  $gr_{x_1}(f_0) = 0$ , mas  $gr_{x_1}((2^2 - 2)(f_2) + \dots + (2^d - 2)(f_d)) = d > 1$ , o que é um absurdo. Assim,  $h$  é uma identidade não nula de  $A$  com a propriedade desejada.

Como  $F$  é um corpo infinito, podemos considerar  $f(x_1, \dots, x_n)$  multihomôgeneo. Caso  $f$  obedeça as hipóteses do primeiro caso, basta aplicar o algoritmo desenvolvido neste.

Caso isto não aconteça, temos que  $gr_{x_i}(f) > 1$  para algum  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Com uma indução no grau de  $x_i$ , construímos, a partir do caso anterior, uma identidade  $g$  de  $A$  com  $gr_{y_i}(g) \leq 1$ . Repetindo esse procedimento, se necessário, para as outras variáveis de  $g$ , obtemos uma identidade  $h(z_1, \dots, z_m)$  onde  $gr_{z_i}(h) \leq 1$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ . Aplicando o algoritmo do primeiro caso à  $h$ , concluímos o teorema.

□

Uma consequência do processo de multilinearização é que se  $F$  é um corpo de característica zero, que é a situação que estaremos tratando a partir daqui, então todo T-ideal de  $F\langle X \rangle$  é gerado por polinômios multilineares.

**Teorema 1.44.** *Suponhamos que  $F$  seja um corpo de característica zero. Seja  $f \in F\langle X \rangle$ . Então  $f(x_1, \dots, x_n)$  é uma consequência de uma quantidade finita de polinômios multilineares.*

**Prova:** Consideremos o T-ideal  $I = \langle f \rangle_T$ . Sabemos que existe uma  $F$ -álgebra  $A$  tal que  $Id(A) = I$ . Pelo Corolário 1.42 e para simplificar a demonstração, podemos supor que  $f$  é multihomôgeneo. Aplicamos o processo de multilinearização: se  $gr_{x_1}(f) = d > 1$  então escreveremos:

$$h = f(y_1 + y_2, x_2, \dots, x_n) = \sum_{i=0}^d \underbrace{g_i(y_1, y_2, x_2, \dots, x_n)}_{g_i},$$

onde  $gr_{y_1}g_i(y_1, y_2, x_2, \dots, x_n) = i$ ,  $gr_{y_2}g_i(y_1, y_2, x_2, \dots, x_n) = d - i$  e  $gr_{x_t}g_i(y_1, y_2, x_2, \dots, x_n) = gr_{x_t}f(y_1 + y_2, x_2, \dots, x_n)$  para todo  $t = 2, \dots, n$ .

Como  $f$  é uma identidade de  $A$ ,  $h$  também é uma identidade de  $A$ . Como  $g_0, \dots, g_d$  são as componentes multihomogêneas de  $h$ , segue do primeiro Corolário do Teorema 1.41 que cada uma dessas pertence a  $Id(A)$ . Assim,  $\langle g_1, \dots, g_{d-1} \rangle_T \subset \langle f \rangle_T$ . Além disso, notemos que para todo  $i$ , temos:

$$g_i(y_1, y_1, x_2, \dots, x_n) = \binom{d}{i} f(y_1, x_2, \dots, x_n).$$

Como a característica de  $F$  é zero, segue que  $\binom{d}{i} \neq 0$ . Portanto,  $\langle f \rangle_T = \langle g_1, \dots, g_{d-1} \rangle_T$ . Por uma indução, completamos a demonstração.

□

Dizemos que  $f$  é uma identidade estável de uma  $F$ -álgebra  $A$  se  $f$  for uma identidade de  $A \otimes C$ , onde  $C$  é uma  $F$ -álgebra comutativa qualquer. Em característica zero, todas as identidades de uma  $F$ -álgebra são estáveis, conforme o próximo resultado.

**Proposição 1.45.** *Sejam  $A$  uma  $F$ -álgebra e  $C$  uma  $F$ -álgebra comutativa unitária, onde  $F$  é um corpo de característica zero. Então  $Id(A \otimes C) = Id(A)$ .*

**Prova:** Suponhamos que  $f$  seja uma identidade de  $A \otimes C$ . Podemos supor que  $f$  é um polinômio multilinear, pois  $F$  tem característica zero. Admitamos que  $gr(f) = n$ . Então, para quaisquer  $a_1, \dots, a_n \in A$  temos que:

$$f(a_1 \otimes 1, a_2 \otimes 1, \dots, a_n \otimes 1) = f(a_1, a_2, \dots, a_n) \otimes 1 = 0.$$

Dessa maneira  $f(a_1, \dots, a_n) = 0$ .

Reciprocamente, se  $f$  é uma identidade de  $A$ , podemos supor que  $f$  é um polinômio multilinear. Se  $gr(f) = j$ , é suficiente provar que, para quaisquer  $a_1 \otimes m_1, \dots, a_j \otimes m_j \in A \otimes C$ , temos que

$$f(a_1 \otimes m_1, \dots, a_j \otimes m_j) = 0.$$

Como  $C$  é uma álgebra comutativa, segue que:

$$f(a_1 \otimes m_1, \dots, a_j \otimes m_j) = f(a_1, \dots, a_j) \otimes m_1 \cdots m_j.$$

Sabemos que  $f(a_1, \dots, a_j) = 0$  para quaisquer  $a_1, \dots, a_j \in A$ , logo  $f \in Id(A \otimes C)$ . Isto conclui a nossa proposição.

□

A próxima proposição é uma importante consequência dos Teoremas de Birkhoff-Poincaré-Witt e Witt, os quais não enunciaremos neste texto. O leitor interessado em mais informações pode consultar [4].

**Proposição 1.46.** *Seja  $F$  um corpo de característica zero. Qualquer polinômio multilinear  $f \in F\langle X \rangle$  de grau  $n$  pode ser escrito como uma  $F$ -combinação linear de polinômios do tipo:*

$$x_{i_1} \cdots x_{i_{s_1}} \underbrace{[x_{j_1}, \dots, x_{j_{s_2}}]}_{c_1} \cdots \underbrace{[x_{l_1}, \dots, x_{l_{s_m}}]}_{c_{m-1}},$$

onde  $i_1 < \cdots < i_{s_1}$ , os polinômios  $c_1, \dots, c_{m-1}$  são comutadores de pesos arbitrários nas demais variáveis e  $\sum_{i=1}^m s_i = n$ .

Para ilustrar este resultado, vejamos o seguinte exemplo com sua aplicação:

**Exemplo 1.47.** *Seja  $A$  uma  $F$ -álgebra comutativa unitária sobre um corpo de característica zero. Então:*

$$Id(A) = \langle [x_1, x_2] \rangle_T.$$

De fato, sabemos que  $[x_1, x_2]$  é uma identidade polinomial da álgebra  $A$ . Então:

$$\langle [x_1, x_2] \rangle_T \subset Id(A).$$

Seja  $f$  uma identidade de  $A$ . Podemos supor que  $f$  é multilinear já que o corpo é de característica zero. Pela observação anterior, sabemos que  $f$  pode ser escrito como:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \alpha x_1 \cdots x_n + g(x_1, \dots, x_n), \quad (4.3)$$

onde  $g \in \langle [x_1, x_2] \rangle_T$ . Façamos  $x_1 = \dots = x_n = 1$  em (4.3). Dessa maneira:

$$f(1, \dots, 1) - g(1, \dots, 1) = 0,$$

pois  $g \in \langle [x_1, x_2] \rangle_T \subset Id(A)$ . Logo  $\alpha 1^n = 0$  e portanto  $\alpha = 0$ . Assim  $f \in \langle [x_1, x_2] \rangle_T$  e:

$$\langle [x_1, x_2] \rangle_T = Id(A).$$

Definimos o T-ideal de uma  $F$ -álgebra  $A$ , como o conjunto de todos os polinômios de  $F\langle X \rangle$  que são satisfeitos por  $A$ . Contudo, podem existir outras álgebras que satisfazem as mesmas identidades de  $A$ . Isso motiva a definição de um novo conceito.

**Definição 1.48.** *Seja  $A$  uma  $F$ -álgebra. Denotamos por  $var(A)$  a classe das  $F$ -álgebras que satisfazem todas as identidades de  $A$ , ou seja:*

$$var(A) = \{B \mid Id(A) \subset Id(B)\}.$$

Dizer que uma variedade  $\mathcal{V}$  sobre  $F$  satisfaz um polinômio  $f$  significa dizer que todas as  $F$ -álgebras de  $\mathcal{V}$  satisfazem o polinômio  $f$ .

Quando duas  $F$ -álgebras  $A$  e  $B$  são tais que  $var(A) = var(B)$  então temos que  $A$  e  $B$  satisfazem exatamente as mesmas identidades. Deste modo definimos:

**Definição 1.49.** *Duas PI-álgebras  $A$  e  $B$  são álgebras PI-equivalentes se  $Id(A) = Id(B)$ . Escrevemos  $A \sim_{PI} B$ .*

Consideraremos um conjunto não vazio  $S \subset F\langle X \rangle$  e nos preocuparemos em obter informações sobre o conjunto de álgebras que satisfazem o conjunto  $S$ , ou seja, satisfazem todos os polinômios de  $S$ .

**Definição 1.50.** *Sejam  $S \subset F\langle X \rangle$  um conjunto não vazio de polinômios e  $\langle S \rangle_T$  o T-ideal gerado por este conjunto. Denotamos por  $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S)$  o conjunto de todas as álgebras que satisfazem o conjunto  $S$ . Além disso, dizemos que  $Id(\mathcal{V}) = \langle S \rangle_T$  é o T-ideal da variedade  $\mathcal{V}$ . Quando existe uma  $F$ -álgebra  $A$  tal que  $Id(A) = Id(\mathcal{V})$ , denotaremos  $\mathcal{V} = var(A)$  e diremos que  $\mathcal{V}$  é a variedade gerada por  $A$ . Dizemos que uma variedade  $\mathcal{V}$  é trivial se esta é gerada pela  $F$ -álgebra  $\{0\}$ . Uma variedade  $\mathcal{V}$  é total se esta é gerada por  $F\langle X \rangle$ .*

**Proposição 1.51.** *Se  $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S)$  é uma variedade de álgebras então existe uma  $F$ -álgebra  $A$  tal que  $\mathcal{V} = var(A)$ .*

**Prova:** De fato, consideremos o T-ideal  $I = \langle S \rangle_T$ . Como foi visto na Proposição 1.40, a  $F$ -álgebra  $A = \frac{F\langle X \rangle}{I}$  é tal que:  $Id(A) = I$ . Dessa forma,  $Id(A) = \langle S \rangle_T = Id(\mathcal{V})$  e portanto  $var(A) = \mathcal{V}$ .

□



**Exemplo 1.52.** 1. A classe de todas as álgebras comutativas é  $\mathcal{V} = \mathcal{V}(S)$  onde  $S = \{[x_1, x_2]\}$ .

2. A classe de todas as álgebras nil de expoente limitado por  $m$  é  $\mathcal{V}(S)$  onde  $S = \{x^m\}$ .

## Capítulo 2

# Sequência de Codimensões

Neste capítulo definiremos uma ação natural do grupo simétrico no espaço dos polinômios multilineares com um número fixo de variáveis. Introduziremos, também, duas sequências numéricas importantes em PI-teoria: a sequência das codimensões, introduzida por Regev em [27], e a sequência dos cocomprimentos, introduzida por Olson e Regev em [26].

Determinaremos o T-ideal e a sequência de codimensões da álgebra de Grassmann e de  $UT_2$ . Além disso, apresentaremos alguns resultados chave sobre codimensões, incluindo o Teorema das Codimensões de Regev que fornece uma cota superior para a  $n$ -ésima codimensão de uma PI-álgebra.

A partir deste momento, em todos os resultados, estaremos considerando  $F$  um corpo de característica zero.

### 2.1 Codimensões

Quando estamos trabalhando com corpos de característica zero, como vimos no Capítulo 1, todo T-ideal é gerado por polinômios multilineares, ou seja, por elementos dos espaços  $P_n$ , onde  $n \geq 1$ . Desta maneira,  $Id(A)$  é gerado pelo seguinte subespaço vetorial de  $F\langle X \rangle$ :

$$(P_1 \cap Id(A)) \oplus (P_2 \cap Id(A)) \oplus \dots \oplus (P_n \cap Id(A)) \oplus \dots$$

**Definição 2.1.** Para cada  $n \in \mathbb{N}$ , o inteiro não-negativo

$$c_n(A) = \dim \frac{P_n}{P_n \cap Id(A)}, n \geq 1.$$

é chamado  $n$ -ésima codimensão de  $A$ . Para  $\mathcal{V} = var(A)$  uma variedade de álgebras gerada por uma  $F$ -álgebra  $A$ , para todo  $n \geq 1$  definimos  $c_n(\mathcal{V}) = c_n(A)$ .

Para simplificar denotaremos por  $P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap Id(A)}, n \geq 1$ . Se conhecermos a dimensão de  $P_n(A)$ , determinamos a dimensão de  $P_n \cap Id(A)$  a qual é igual a  $n! - \dim_F P_n(A)$ .

Conhecer a sequência  $\{c_n(A)\}_{n \geq 1}$  de uma  $F$ -álgebra  $A$  é bastante importante, pois fornece uma idéia do crescimento das identidades satisfeitas por  $A$ . Porém calcular esta sequência não é um trabalho fácil na maioria das situações.

Notemos que podemos verificar se uma  $F$ -álgebra é ou não uma PI-álgebra, olhando a sequência de codimensões. De fato,  $A$  é uma PI-álgebra se, e somente, se  $c_n(A) < n!$  para algum  $n > 1$ . Além disso, se  $\mathcal{V}$  é uma variedade trivial então

$$c_n(\mathcal{V}) = 0, \forall n \geq 1.$$

A seguir damos alguns exemplos de álgebras cujas sequências de codimensões são facilmente calculadas.

**Exemplo 2.2.** 1. Seja  $A$  uma  $F$ -álgebra nilpotente de índice  $m$ . Se considerarmos  $f(x_1, \dots, x_n) \in P_n$  onde  $n \geq m$ , temos que

$$f(a_1, \dots, a_n) = 0$$

sejam quais forem  $a_1, \dots, a_n \in A$ . Dessa forma,  $c_n(A) = \dim_F P_n(A) = 0$  quando  $n \geq m$ .

2. Se  $A$  é uma  $F$ -álgebra comutativa unitária sabemos que

$$Id(A) = \langle [x_1, x_2] \rangle_T.$$

Qualquer polinômio de  $P_n$  pode ser escrito, módulo  $P_n \cap Id(A)$ , como um múltiplo escalar do polinômio

$$x_1 \cdots x_n,$$

o qual não é uma identidade de  $A$ . Logo  $\dim P_n(A) = 1, \forall n \geq 1$ .

Sabemos que, se  $I$  e  $J$  são dois T-ideais de  $F\langle X \rangle$ , existem  $F$ -álgebras  $A$  e  $B$  tais que  $I = Id(A)$  e  $J = Id(B)$ . O resultado a seguir é importante para comparar a sequência de codimensões de  $A$  e  $B$  em duas situações específicas.

**Proposição 2.3.** 1. Se  $I \subset J$  então  $c_n(B) \leq c_n(A)$ ,  $\forall n \geq 1$ .

2. Se  $I \subset J$  e  $c_n(A) = c_n(B)$  para todo  $n \geq 1$  então  $I = J$ .

**Prova:**

1. Se  $I \subset J$  temos que  $Id(A) \subset Id(B)$  e portanto  $P_n \cap Id(A) \subset P_n \cap Id(B)$ .

Dessa forma,  $dim_F(P_n \cap Id(A)) \leq dim_F(P_n \cap Id(B))$ . Assim, temos que  $c_n(B) \leq c_n(A)$ .

2. Sabemos que se  $I \subset J$  então  $P_n \cap Id(A) \subset P_n \cap Id(B)$ . Como por hipótese  $c_n(A) = c_n(B)$  para todo  $n \geq 1$ , temos

$$dim_F(P_n \cap Id(A)) = dim_F(P_n \cap Id(B)) \quad \forall n \geq 1.$$

Logo  $P_n \cap Id(A) = P_n \cap Id(B)$  para todo  $n$  natural positivo. Como todo T-ideal é gerado por polinômios multilineares (sobre um corpo de característica zero), concluímos:  $Id(A) = Id(B)$ .

□

Nos teoremas a seguir, iremos descrever o T-ideal e calcular a sequência de codimensões de  $UT_2$  e da álgebra de Grassmann. Os resultados sobre a álgebra das matrizes triangulares superiores  $2 \times 2$  foram apresentados em 1971 por Malcev e, dois anos mais tarde, Krakowski e Regev caracterizaram a álgebra de Grassmann (ver [17] e [24]). Como nosso objetivo é classificar, a menos de PI-equivalência, todas as subvariedades das variedades geradas por estas duas álgebras, estes teoremas serão constantemente citados nos próximos capítulos.

**Teorema 2.4.** *Seja  $UT_2$  a álgebra das matrizes triangulares superiores  $2 \times 2$  sobre  $F$ . Então*

1.  $Id(UT_2) = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T$ .

2.  $c_n(UT_2) = 2^{n-1}(n - 2) + 2$  para todo  $n \geq 1$ .

**Prova:** Começemos encontrando o T-ideal de  $UT_2$ . Sabemos que  $\langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T \subset Id(UT_2)$ . Seja  $f \in Id(UT_2)$  um polinômio multilinear de grau  $n$ . Usando a Proposição 1.46 temos que  $f$  se escreve, módulo  $\langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T$ , como uma combinação linear de elementos da forma:

$$x_{i_1} \dots x_{i_r} [x_{j_1}, \dots, x_{j_s}], \quad (1.1)$$

onde  $i_1 < \dots < i_r$ ,  $r + s = n$  e  $\{i_1, \dots, i_r, j_1, \dots, j_s\} = \{1, \dots, n\}$ . Denotaremos  $I = \{i_1, \dots, i_r\}$ .

Notemos que se  $z_1, \dots, z_4 \in UT_2$  então:

$$0 = [[z_1, z_2], [z_3, z_4]] = [z_1, z_2, z_3, z_4] - [z_1, z_2, z_4, z_3].$$

Dessa forma, para qualquer permutação  $\sigma \in S_p$  e  $y_1, y_2, z_1, \dots, z_p \in UT_2$  temos que:

$$[y_1, y_2, z_1, \dots, z_p] = [y_1, y_2, z_{\sigma(1)}, \dots, z_{\sigma(p)}]. \quad (1.2)$$

Pela anticomutatividade e pela identidade de Jacobi do comutador, podemos manejar os três primeiros termos do comutador que aparecem à esquerda de (1.2). Assim, é possível reposicionar os elementos que aparecem no comutador de (1.1) de tal forma que:

$$j_1 > j_2 \text{ e } j_2 < j_3 < \dots < j_s. \quad (1.3)$$

Consideremos  $J = \{j_2, \dots, j_s\}$  e  $X_{I, J, j_1} = x_{i_1} \dots x_{i_r} [x_{j_1}, \dots, x_{j_s}]$ .

Posto isso,  $f$  pode se escrito módulo  $\langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T$  como:

$$f(x_1, \dots, x_n) = \sum_{I, J, j_1} \alpha_{I, J, j_1} X_{I, J, j_1}, \quad \alpha_{I, J, j_1} \in F. \quad (1.4)$$

Como  $f \in Id(UT_2)$ , ao calcularmos  $f$  em  $(1_{UT_2}, \dots, 1_{UT_2})$ , concluímos que o coeficiente do monômio  $x_1 \dots x_n$  em (1.4) é nulo.

Para verificar que  $f \in \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T$ , provaremos que todos os coeficientes  $\alpha_{I, J, j_1}$  de (1.4) são nulos. Suponhamos por absurdo que essa afirmação não seja verdadeira. Dessa forma, existe um coeficiente não-nulo  $\alpha_{I', J', k}$ , onde  $I' = \{l_1, \dots, l_{r'}\}$ ,  $J' = \{m_1, \dots, m_{n-r'-1}\}$  e  $\{l_1, \dots, l_{r'}, m_1, \dots, m_{n-r'-1}, k\} = \{1, \dots, n\}$ , escolhido de tal forma que  $J'$  possua o menor número possível de elementos.

Façamos as seguintes substituições em (1.4):

$$(x_{l_1}, \dots, x_{l_{r'}}) = (1_{UT_2}, \dots, 1_{UT_2}),$$

$$x_k = e_{12},$$

$$(x_{m_1}, \dots, x_{m_{n-r'-1}}) = (e_{22}, \dots, e_{22}).$$

Com estas substituições feitas, temos que:

$$\alpha_{I', J', k} e_{12} = 0, \text{ ou seja, } \alpha_{I', J', k} = 0.$$

Contradição. Logo:

$$f \equiv 0 \pmod{\langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T}.$$

Ou seja,  $f \in \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T$  e portanto:

$$Id(UT_2) = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T.$$

Concluindo a demonstração do primeiro item.

Agora, se  $f$  é um polinômio multilinear de grau  $n$ , pelo que foi mostrado no item anterior, podemos escrevê-lo, módulo  $I = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle$ , como uma combinação linear de elementos da forma:

$$x_{i_1} \cdots x_{i_r} [x_k, x_{j_1}, \dots, x_{j_s}], \tag{1.5}$$

onde  $i_1 < \cdots < i_r$ ,  $k > j_1$ ,  $j_1 < j_2 < \cdots < j_s$  e  $r + s = n - 1$ . Além disso, temos que os elementos do tipo (1.5) formam uma base para

$$\frac{P_n}{P_n \cap Id(UT_2)}.$$

Contemos o número de elementos que são do tipo (1.5). Consideremos primeiro, o caso em que há  $j$  termos dentro dos comutadores, onde  $2 \leq j \leq n$ . O número total é:

$$\binom{n}{j} (j - 1).$$

Quando  $j = 0$ , temos apenas um caso.

Assim, temos:

$$c_n(UT_2) = \sum_{j=2}^n \binom{n}{j} (j - 1) + 1.$$

Para calcular  $c_n(UT_2)$ , note que:

$$\binom{n}{j}(j-1) = \frac{n!}{(n-j)!j!}(j-1) = \frac{n!}{(n-j)!(j-1)!} - \frac{n!}{(n-j)!j!}.$$

Logo:

$$\sum_{j=2}^n \binom{n}{j}(j-1) + 1 = n \left( \sum_{j=2}^n \binom{n-1}{j-1} \right) - \left( 2^n - \binom{n}{0} - \binom{n}{1} \right) + 1 =$$

$$n \left( \sum_{j=1}^{n-1} \binom{n-1}{j} \right) - \left( 2^n - \binom{n}{0} - \binom{n}{1} \right) + 1 =$$

$$n(2^{n-1} - 1) + (2 + n - 2^n) = 2^{n-1}(n-2) + 2.$$

□

**Teorema 2.5.** *Para a álgebra de Grassmann de dimensão infinita  $\mathcal{G}$ , valem para todo  $n \geq 1$ :*

1.  $Id(\mathcal{G}) = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle_T.$

2.  $c_n(\mathcal{G}) = 2^{n-1}.$

**Prova:** Recordemos que  $f(x_1, x_2, x_3) = [x_1, x_2, x_3] \in Id(\mathcal{G})$ . Dessa forma,  $L := \langle f \rangle_T \subset Id(\mathcal{G})$  e portanto  $c_n(\mathcal{G}) \leq \dim_F(\bar{L}_n)$  onde:

$$\bar{L}_n = \frac{P_n}{P_n \cap L}.$$

Se  $g$  é um polinômio multilinear de grau  $n$ , sabemos pela Proposição 1.46 que este pode ser escrito, módulo  $L$ , como combinação linear de elementos da forma:

$$x_{i_1} \cdots x_{i_r} [x_{j_1}, x_{j_2}] \cdots [x_{j_{2m-1}}, x_{j_{2m}}], \quad (1.6)$$

onde  $i_1 < \dots < i_r$ ,  $r + 2m = n$ . Sem perda de generalidade, podemos assumir:

$$j_1 < j_2, \dots \text{ e } j_{2m-1} < j_{2m}. \quad (1.7)$$

Temos para quaisquer  $a, b, c, d \in F\langle X \rangle$ :

$$[a, b, [c, d]] = [a, b][c, d] - [c, d][a, b]. \quad (1.8)$$

Além disso, um cálculo com comutadores nos mostra que:

$$[a, c][b, d] = -[a, b][c, d] + [ab, c, d] + [ac, b, d] - [a, b, d]c - [a, c, d]b. \quad (1.9)$$

Com auxílio das igualdades (1.8) e (1.9), a relação (1.7) fica como:

$$j_1 < j_2 < \cdots < j_{2m}. \quad (1.10)$$

Por outro lado, um cálculo combinatório nos mostra que:

$$c_n(\mathcal{G}) \leq \dim_F(\bar{L}_n) = 2^{n-1}.$$

Os elementos de (1.6) com a propriedade (1.10) formam um conjunto gerador para  $\frac{P_n}{P_n \cap Id(\mathcal{G})}$ . Provaremos que este conjunto é linearmente independente. Feito isso, concluiremos que  $c_n(\mathcal{G}) = 2^{n-1}$  e que  $Id(\mathcal{G}) = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle_T$ .

Consideremos um polinômio multilinear  $h(x_1, \dots, x_{r+2m})$  que é uma identidade de  $\mathcal{G}$ .

$$h = \sum_{i_1 < \dots < i_r \quad j_1 < \dots < j_{2m}} \alpha_{I, J} x_{i_1} \dots x_{i_r} [x_{j_1}, x_{j_2}] \dots [x_{j_{2m-1}}, x_{j_{2m}}], \quad (1.11)$$

onde  $I = \{i_1, \dots, i_r\}$ ,  $J = \{j_1, \dots, j_{2m}\}$  e  $\alpha_{I, J} \in F$ .

Provaremos que todos os coeficientes  $\alpha_{I, J}$  são nulos. Suponhamos por absurdo que esta afirmação não seja verdadeira. Então existe um coeficiente  $\alpha_{I', J'}$  não nulo, onde  $I' = \{p_1, \dots, p_s\}$ ,  $J' = \{k_1, \dots, k_{n-s}\}$  e  $\{p_1, \dots, p_s, k_1, \dots, k_{n-s}\} = \{1, \dots, n\}$ . Além disso  $J'$  é escolhido de forma ser o menor possível.

Façamos  $x_{p_1} = \dots = x_{p_s} = 1$  e  $x_{k_l} = e_l$  onde  $1 \leq l \leq n - s$  em (1.11). Feito isso, concluímos que  $2^{\frac{n-s}{2}} \alpha_{I', J'} e_1 \dots e_{n-s} = 0$  e portanto  $\alpha_{I', J'} = 0$ . Isto é uma contradição. Logo está comprovada a independência linear, e assim concluímos a demonstração.

□



## 2.2 Cocaracteres

O grupo simétrico  $S_n$  age sobre  $P_n$  à esquerda do seguinte modo:

$$\sigma.f(x_1, \dots, x_n) = f(x_{\sigma(1)}, \dots, x_{\sigma(n)})$$

onde  $\sigma \in S_n$  e  $f(x_1, \dots, x_n) \in P_n$ .

Como  $Id(A)$  é um T-ideal, ou seja, é invariante por endomorfismos de  $F\langle X \rangle$ , temos que  $P_n \cap Id(A)$  é invariante por esta ação, logo  $P_n(A) = \frac{P_n}{P_n \cap Id(A)}$  tem a estrutura de  $S_n$ -módulo. O  $S_n$ -caracter de  $P_n(A)$ , denotado por  $\chi_n(A)$ , é chamado  $n$ -ésimo cocaracter de  $A$ .

Sabemos que, em característica zero, existe uma correspondência biunívoca entre  $S_n$ -caracteres irredutíveis e partições  $\lambda \vdash n$ , conforme pode ser visto em [3]. Assim, podemos decompor  $\chi_n(A)$  em caracteres irredutíveis

$$\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda,$$

onde  $\chi_\lambda$  representa o caracter irredutível associado à partição  $\lambda \vdash n$  e  $m_\lambda \geq 0$ , sua multiplicidade. O que nos leva à seguinte definição:

**Definição 2.6.**

$$l_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda$$

é chamado  $n$ -ésimo cocomprimento de  $A$ .

Em outras palavras,  $l_n(A)$  conta o número de  $S_n$ -módulos irredutíveis que aparecem na decomposição de  $P_n(A)$ . Assim como foi feito em codimensões, para  $\mathcal{V} = var(A)$  uma variedade de álgebras gerada por uma  $F$ -álgebra  $A$ , para todo  $n \geq 1$  definimos  $l_n(\mathcal{V}) = l_n(A)$ .

Notemos que, dada uma álgebra  $B \in var(A)$ , temos que  $Id(A) \subset Id(B)$  e, assim,  $P_n(B)$  pode ser imerso em  $P_n(A)$ . Portanto, temos que

$$c_n(B) \leq c_n(A) \quad \text{e} \quad l_n(B) \leq l_n(A).$$

**Proposição 2.7.** *Sejam  $A$  e  $B$  duas  $F$ -álgebras e  $A \oplus B$  a soma direta de  $A$  e  $B$ . Se  $\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$ ,  $\chi_n(B) = \sum_{\lambda \vdash n} m'_\lambda \chi_\lambda$  e  $\chi_n(A \oplus B) = \sum_{\lambda \vdash n} m''_\lambda \chi_\lambda$  são os  $n$ -ésimos cocaracteres de  $A$ ,  $B$  e  $A \oplus B$ , respectivamente, então*

$$m''_\lambda \leq m_\lambda + m'_\lambda, \quad c_n(A \oplus B) \leq c_n(A) + c_n(B), \quad l_n(A \oplus B) \leq l_n(A) + l_n(B).$$

Se  $B$  é uma álgebra nilpotente e  $B^k = 0$ , então para todo  $n \geq k$  temos  $m''_\lambda = m_\lambda$ , Logo  $l_n(A \oplus B) = l_n(A)$  e  $c_n(A \oplus B) = c_n(A)$ .

**Prova:** Notemos que  $Id(A \oplus B) = Id(A) \cap Id(B)$  e consideremos a aplicação de  $S_n$ -módulos

$$\phi : P_n \rightarrow \frac{P_n}{P_n \cap Id(A)} \dot{+} \frac{P_n}{P_n \cap Id(B)}$$

dada por  $\phi(f) = (f + (P_n \cap Id(A)), f + (P_n \cap Id(B)))$ , para todo  $f \in P_n$ . Temos que  $ker(\phi) = P_n \cap Id(A) \cap Id(B) = P_n \cap Id(A \oplus B)$ . Logo temos uma imersão de  $S_n$ -módulos

$$\frac{P_n}{P_n \cap Id(A \oplus B)} \hookrightarrow \frac{P_n}{P_n \cap Id(A)} \dot{+} \frac{P_n}{P_n \cap Id(B)}.$$

Segue daí que

$$m''_\lambda \leq m_\lambda + m'_\lambda, c_n(A \oplus B) \leq c_n(A) + c_n(B), l_n(A \oplus B) \leq l_n(A) + l_n(B).$$

Além disso, se  $B$  é uma álgebra nilpotente e  $B^k = 0$ , então para todo  $n \geq k$ ,  $\frac{P_n}{P_n \cap Id(B)} = 0$  e temos que

$$\frac{P_n}{P_n \cap Id(A \oplus B)} = \frac{P_n}{P_n \cap Id(A)}$$

e, portanto,  $l_n(A \oplus B) = l_n(A)$  e  $c_n(A \oplus B) = c_n(A), \forall n \geq k$ .

□

Na Proposição 1.45, provamos que se  $A$  é uma álgebra sobre um corpo  $F$  de característica zero então  $Id(A) = Id(A \otimes C)$  para qualquer  $F$ -álgebra comutativa unitária  $C$ . Em particular, se  $K$  é uma extensão de  $F$ , temos que  $Id(A) = Id(A \otimes K)$  já que  $K$  é uma  $F$ -álgebra comutativa unitária. Contudo, nesta última igualdade, consideramos apenas as identidades de  $A \otimes K$  como  $F$ -álgebra e assim:

$$c_n^F(A) = c_n^F(A \otimes K), n \geq 1.$$

Nesta igualdade, o índice superior significa que as duas sequências de codimensões são calculadas sobre o corpo  $F$ .

Na Proposição 1.32, provamos que toda base de  $A$  como  $F$ -álgebra é uma base para  $A \otimes K$  como  $K$ -álgebra. Isto permitiu estender os escalares de  $A$  de maneira que  $A$  pudesse ser considerada como uma  $K$ -álgebra.

Uma pergunta natural que surge neste momento é: Como se relaciona a sequência de codimensões de  $A$  como  $F$ -álgebra e a sequência de codimensões de  $A$ , considerada como  $K$ -álgebra? Ou seja, qual a relação entre  $c_n^F(A)$  e  $c_n^K(A \otimes K)$ ?

Na notação acima,

$$c_n^K(A \otimes K) = \dim_K \frac{P_n^K}{P_n^K \cap Id_K(A \otimes K)}, n \geq 1,$$

$P_n^K$  denota o conjunto dos polinômios multilineares de grau  $n$  com coeficientes em  $K$  e  $Id_K(A \otimes K)$  as identidades de  $A \otimes K$  com coeficientes em  $K$ .

**Proposição 2.8.** *Sejam  $A$  uma PI-álgebra sobre um corpo  $F$  de característica zero e  $K$  uma extensão de  $F$ . Consideremos a  $K$ -álgebra  $A \otimes K$ . Então:*

$$c_n^K(A \otimes K) = c_n^F(A), \forall n \geq 1.$$

Além disso,  $m_\lambda = m_\lambda^K$  para toda  $\lambda \vdash n$  e  $l_n(A) = l_n^K(A)$ ,  $\forall n \geq 1$ .

**Prova:** Seja  $n \in \mathbb{N} - \{0\}$  e suponhamos que  $c_n^F(A) = m$ . Consideremos uma base  $f_1, \dots, f_m$  de  $P_n^F(\text{mod } P_n^F \cap Id_F(A))$ , onde  $P_n^F$  denota o conjunto dos polinômios multilineares de grau  $n$  com coeficientes em  $F$  e  $Id_F(A)$  as identidades de  $A$  com coeficientes em  $F$ . Para provarmos que  $c_n^K(A \otimes K) \leq m$ , basta mostrar que  $\dim_F(P_n^F \cap Id_F(A)) \leq \dim_K(P_n^K \cap Id_K(A \otimes K))$ , já que  $\dim_F P_n^F = \dim_K P_n^K = n!$ .

Notemos que os polinômios de  $P_n^F \cap Id_F(A)$  são da forma:

$$h = j - \sum_{i=1}^m \beta_i f_i,$$

onde  $j \in P_n^F$ , os escalares  $\beta_1, \dots, \beta_m \in F$  e obedecem a seguinte propriedade:

$$\bar{j} = \sum_{k=1}^m \beta_k \bar{f}_k, \text{ onde } \bar{j} = j + P_n^F \cap Id_F(A).$$

Como foi visto na Proposição 1.38, um polinômio multilinear não nulo em  $F\langle X \rangle$  é uma identidade de  $A$  se, e somente se, este se anula em uma base de  $A$ . Na Proposição 1.32 provamos que toda base de  $A$  sobre  $F$  é uma base de  $A \otimes K$  sobre  $K$ . Como  $h \in P_n^K$ , aplicando estas duas proposições, temos que  $h \in P_n^K \cap Id_K(A \otimes K)$  e conseqüentemente

$$c_n^K(A \otimes K) \leq m.$$

Para finalizarmos a demonstração, temos que verificar que  $c_n^K(A \otimes K) \geq m$ . Para isso, provaremos que  $f_1, \dots, f_m$  são linearmente independentes ( $\text{mod } P_n^K \cap \text{Id}_K(A \otimes K)$ ). Consideremos  $f = \gamma_1 f_1 + \dots + \gamma_m f_m \in \text{Id}_K(A \otimes K)$  com  $\gamma_1, \dots, \gamma_m \in K$ . Seja  $C$  uma base de  $K$  sobre  $F$ . Escrevamos cada um dos  $\gamma_i$  na base  $C$ :

$$\gamma_i = \sum_j \delta_{i,j} t_j; \quad i \in \{1, \dots, m\}, t_1, t_2, \dots \in C, \delta_{ij} \in F.$$

Sejam  $a_1, \dots, a_n \in A$  e  $a_1 \otimes 1, \dots, a_n \otimes 1 \in A \otimes K$ . Assim:

$$f(a_1 \otimes 1, \dots, a_n \otimes 1) = \sum_{i=1}^m \gamma_i f_i(a_1 \otimes 1, \dots, a_n \otimes 1) = \sum_j \left( \sum_{i=1}^m \delta_{i,j} f_i(a_1, \dots, a_n) \right) \otimes t_j.$$

Como  $f \in \text{Id}_K(A \otimes K)$ , temos que:

$$\sum_j \left( \sum_{i=1}^m \delta_{i,j} f_i(b_1, \dots, b_n) \right) \otimes t_j = 0 \quad \forall b_1, \dots, b_n \in A.$$

Notemos que, para qualquer sequência  $(b_1, \dots, b_n)$  de elementos no conjunto  $A$ , os vetores  $\left( \sum_{i=1}^m \delta_{i,j} f_i(b_1, \dots, b_n) \right) \otimes t_1, \left( \sum_{i=1}^m \delta_{i,j} f_i(b_1, \dots, b_n) \right) \otimes t_2, \dots$ , são linearmente independentes. Daí segue que  $\sum_{i=1}^m \delta_{i,j} f_i \in \text{Id}(A) \quad \forall j \in \{1, 2, \dots\}$ . Como  $f_1, \dots, f_m$  forma uma base para  $P_n^F(\text{mod } P_n^F \cap \text{Id}_F(A))$  temos que:

$$\delta_{i,j} = 0; \quad i \in \{1, \dots, m\}, j \in \{1, 2, \dots\}.$$

Logo  $\gamma_1 = \dots = \gamma_m = 0$  e assim:

$$c_n^F(A) = c_n^K(A \otimes K).$$

□

Pela proposição acima, nos resultados sobre a sequência de codimensões de uma  $F$ -álgebra  $A$ , podemos considerá-la sobre um corpo algebricamente fechado, pois podemos tomar  $K$  como o fecho algébrico de  $F$  e as identidades e codimensões serão mantidas.

Outra ação importante para o estudo dos T-ideais é a ação do grupo linear geral  $GL_m$ , onde consideramos polinômios homogêneos em um dado conjunto de variáveis.

Seja  $F_m\langle X \rangle = F\langle x_1, \dots, x_m \rangle$  a álgebra associativa livre em  $m$  variáveis e seja  $U = \text{span}_F\{x_1, \dots, x_m\}$ . O grupo  $GL(U) \cong GL_m$  age naturalmente sobre o conjunto  $X$  à esquerda e podemos estender esta ação diagonalmente à uma ação sobre  $F_m\langle X \rangle$ . Além disso,  $F_m\langle X \rangle \cap Id(A)$  é invariante sob esta ação, logo

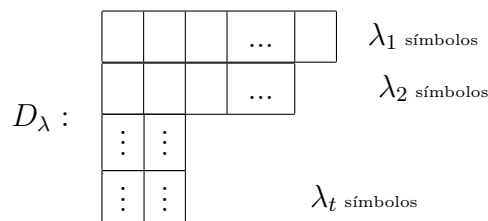
$$F_m(A) = \frac{F_m\langle X \rangle}{F_m\langle X \rangle \cap Id(A)}$$

tem uma estrutura de  $GL_m$ -módulo. Denotando por  $F_m^n$  o espaço dos polinômios homogêneos de grau  $n$  nas variáveis  $\{x_1, \dots, x_m\}$ ,

$$F_m^n(A) = \frac{F_m^n}{F_m^n \cap Id(A)}$$

é um  $GL_m$ -submódulo de  $F_m(A)$  e então podemos considerar o seu  $GL_m$ -caracter que denotamos por  $\psi_n(A)$ .

A cada partição  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_t)$  de  $n$ , associaremos o diagrama que consiste de  $n$  símbolos  $\square$  distribuídos da seguinte maneira



e este será chamado o diagrama de Young de  $\lambda$ .

Pela teoria de representações polinomiais do grupo linear geral, o  $GL_m$ -módulo  $F_m^n(A)$  é uma soma direta de  $GL_m$ -submódulos irredutíveis e existe uma correspondência um a um entre os  $GL_m$ -submódulos irredutíveis de  $F_m^n(A)$  e o conjunto de todas as partições  $\lambda \vdash n$  com  $h_1(\lambda) \leq m$ , onde  $h_i(\lambda)$  corresponde a altura da  $i$ -ésima coluna do diagrama de Young de  $\lambda$ .

Assumindo  $\bar{m}_\lambda = 0$  sempre que  $h_1(\lambda) > m$ , consideramos  $\psi_\lambda$  o  $GL_m$ -caracter irredutível associado à partição  $\lambda \vdash n$  e temos a seguinte decomposição

$$\psi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} \bar{m}_\lambda \psi_\lambda$$

onde  $\bar{m}_\lambda$  é a multiplicidade de  $\psi_\lambda$ .

A estrutura de  $S_n$ -módulo de  $P_n(A)$  e a estrutura de  $GL_m$ -módulo de  $F_m^n(A)$  estão relacionadas pelo seguinte resultado, cuja demonstração pode ser vista em [4]:

**Proposição 2.9.** ([4], Teorema 12.4.19) Se  $\chi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} m_\lambda \chi_\lambda$  é o  $n$ -ésimo cocaracter de  $A$  então, para toda  $\lambda \vdash n$  tal que  $h_1(\lambda) \leq m$ , temos  $\bar{m}_\lambda = m_\lambda$ .

Outro fato bem conhecido é que qualquer  $GL_m$ -submódulo irredutível associado a uma partição  $\lambda = (\lambda_1, \dots, \lambda_k)$  de  $n$  é gerado por um polinômio não-nulo  $f_\lambda$  chamado *vetor de altura máxima* ou *vetor de peso máximo*, da forma

$$f_\lambda = \prod_{i=1}^{\lambda_1} St_{h_i(\lambda)}(x_1, \dots, x_{h_i(\lambda)}) \sum \alpha_\sigma \sigma$$

onde  $\alpha_\sigma \in F$ , a ação à direita do grupo simétrico sobre  $F_m^n$  é definida pela permutação de lugares das variáveis. Aqui  $St_{h_i(\lambda)}(x_1, \dots, x_{h_i(\lambda)})$  é o polinômio standard de grau  $h_i(\lambda)$ . A importância deste polinômio é dada pela proposição a seguir, cuja demonstração também pode ser encontrada em [4].

**Proposição 2.10.** Seja  $\psi_n(A) = \sum_{\lambda \vdash n} \bar{m}_\lambda \psi_\lambda$  o  $GL_m$ -caracter de  $F_m^n(A)$ . Então  $\bar{m}_\lambda = 0$  se, e somente se, existe um vetor de altura máxima  $f_\lambda$  associado a  $\lambda$  que não seja uma identidade polinomial para  $A$ . Além disso,  $\bar{m}_\lambda$  é o número máximo de vetores de altura máxima linearmente independentes em  $F_m^n(A)$ .

## 2.3 Codimensões Próprias

Denotamos por  $Com(X) = \{[x_{i_1}, x_{i_2}, \dots, x_{i_k}] : k \geq 2, x_{i_j} \in X\}$  o conjunto de todos os comutadores de Lie de peso maior ou igual a 2 e consideramos  $B = B(X)$  a subálgebra com unidade de  $F\langle X \rangle$  gerada por  $Com(X)$ . Convencionamos 1 para ser o produto de um conjunto vazio de comutadores e chamamos os elementos de  $B$  de *polinômios próprios* de  $F\langle X \rangle$ .

Quando estamos estudando as identidades polinomiais de uma álgebra unitária  $A$ , os polinômios próprios tem um papel muito importante como mostra a proposição a seguir, cuja demonstração pode ser vista em [4].

**Proposição 2.11.** Se  $A$  é uma PI-álgebra unitária sobre um corpo infinito  $F$ , então todas as identidades polinomiais de  $A$  seguem a partir das identidades polinomiais próprias, isto é, daquelas em  $Id(A) \cap B$ . Se  $car F = 0$ , então as identidades polinomiais de  $A$  seguem das identidades polinomiais próprias multilineares, ou seja, daquelas em  $\bigcup_{n \geq 1} P_n \cap (Id(A) \cap B)$ .

Consideremos o espaço dos polinômios próprios multilineares nas variáveis  $x_1, \dots, x_n$  denotado por  $\Gamma_n = P_n \cap B$ , para  $n > 1$ . Convencionamos  $\Gamma_0 = \text{span}\{1\}$  e  $\dim \Gamma_0 = 1$ . Já sabemos, pela proposição anterior, que as identidades polinômias multilineares de uma PI-álgebra unitária  $A$  seguem a partir das identidades multilineares próprias, ou seja, dos elementos de  $\Gamma_n \cap \text{Id}(A)$ .

O teorema a seguir, conhecido como Teorema da Base de Specht, o qual foi provado por Specht em 1950, fornece uma base para o espaço  $\Gamma_n$ . Sua demonstração pode ser vista em [4].

**Teorema 2.12.** ([4], Teorema 4.3.9) *O espaço  $\Gamma_n$  possui uma base que consiste de produtos de comutadores:*

$$[x_{i_1}, \dots, x_{i_k}] \dots [x_{j_1}, \dots, x_{j_t}],$$

onde:

1. *Todos os produtos são multilineares nas variáveis  $x_1, \dots, x_n$ .*
2. *Cada comutador  $[x_{r_1}, \dots, x_{r_s}]$  é de peso maior ou igual a 2 e o índice máximo está na primeira posição, isto é,  $r_1 > r_2, \dots, r_s$ .*
3. *No produto dos comutadores acima temos  $k \leq \dots \leq t$ , ou seja, os comutadores estão ordenados pelos pesos.*
4. *Se  $[x_{p_1}, \dots, x_{p_s}]$  e  $[x_{q_1}, \dots, x_{q_s}]$  são dois comutadores de mesmo peso consecutivos em um produto do tipo acima, então o índice da primeira variável do primeiro comutador é menor que o índice da primeira variável do segundo comutador, ou seja,  $p_1 < q_1$ .*

**Corolário 2.13.** *Para cada  $n \geq 0$ , temos que*

$$\dim \Gamma_n = n! \left( \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!} \right).$$

**Prova:** Notemos que cada elemento da base de Specht é um produto  $C_1 C_2 \dots C_t$  de comutadores  $C_j$  em variáveis distintas dentre as variáveis  $x_1, \dots, x_n$ , com  $\text{peso}(C_j) = p_j \geq 2$ .

Associamos a cada comutador  $C_j$  de peso  $p_j$  um ciclo de comprimento  $p_j$ , onde o primeiro elemento do ciclo é o índice da primeira variável do comutador, o segundo elemento do ciclo é o índice da segunda variável do comutador e assim por diante.

Assim, o produto  $C_1 C_2 \dots C_t$  corresponde a um produto de ciclos disjuntos de comprimento maior ou igual a 2, onde todos os números de 1 até  $n$  aparecem. Logo temos uma correspondência entre a base de Specht e o conjunto das permutações caóticas em  $S_n$ , que é o conjunto das permutações em  $S_n$  que movem todos os elementos  $1, \dots, n$ . Isto acontece pois uma permutação é caótica se, e somente se, é um produto de ciclos disjuntos com comprimento maior ou igual a 2, onde todos os números de 1 até  $n$  aparecem.

Dessa forma, contando o número de permutações caóticas, obtemos:

$$\dim \Gamma_n = n! \left( \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!} \right).$$

□

**Definição 2.14.** *Duas sequências  $\{a_n\}_{n \geq 1}, \{b_n\}_{n \geq 1}$  são ditas assintoticamente equivalentes, e denotamos por  $a_n \approx b_n$ ,  $n \rightarrow \infty$ , se, e somente se,  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{b_n} = 1$ .*

Observemos que  $\sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!} \approx \frac{1}{e}$ , então

$$\dim \Gamma_n = n! \left( \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{1}{k!} \right) \approx \frac{n!}{e}, \quad n \rightarrow \infty.$$

Deste modo, ao trabalhar com polinômios próprios multilineares no lugar de polinômios multilineares arbitrários, diminuimos a quantidade de cálculos em aproximadamente  $e$  vezes, o que torna o trabalho com polinômios próprios multilineares mais vantajoso.

**Definição 2.15.** *Dada uma PI-álgebra unitária  $A$ , podemos considerar o espaço vetorial  $\Gamma_n(A) = \frac{\Gamma_n}{\Gamma_n \cap Id(A)}$ . A sequência das codimensões próprias é definida, para  $n \geq 0$ , como*

$$c_n^p(A) = \dim \frac{\Gamma_n}{\Gamma_n \cap Id(A)}.$$

Em 1996, Drensky e Regev apresentaram a relação entre as codimensões ordinárias e as codimensões próprias, quando  $A$  é unitária. Apresentamos a seguir tal relação cuja demonstração pode ser vista em [5].

**Teorema 2.16.** *Seja  $A$  uma PI-álgebra unitária. Se o conjunto  $\{f_{j_k}(x_1, \dots, x_k) : j = 1, 2, \dots, c_k^p(A)\}$  é uma base do espaço vetorial  $\Gamma_k(A)$  dos polinômios próprios*



multilineares de grau  $k$  em  $\frac{F\langle X \rangle}{F\langle X \rangle \cap Id(A)}$  então, para  $n \geq k$ , o espaço  $P_n(A)$  tem uma base consistindo de todos polinômios multilineares da forma

$$x_{p_1} \dots x_{p_{n-k}} f_{j_k}(x_{q_1}, \dots, x_{q_k}), \quad j = 1, 2, \dots, c_k^p(A), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n,$$

onde  $p_1 < \dots < p_{n-k}$  e  $q_1 < \dots < q_k$ .

**Teorema 2.17.** *Seja  $A$  uma PI-álgebra unitária sobre um corpo de característica zero, então  $c_n(A) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} c_k^p(A)$ , para  $n \geq 0$ .*

**Prova:** Como no teorema anterior, para cada  $k = 0, 1, \dots, n$ , considerando uma base

$$\{f_{j_k}(x_1, \dots, x_k) : j = 1, 2, \dots, c_k^p(A)\}$$

de  $\Gamma_k(A)$ , construímos uma base para  $P_n(A)$  formada por elementos da forma

$$x_{p_1} \dots x_{p_{n-k}} f_{j_k}(x_{q_1}, \dots, x_{q_k}), \quad j = 1, 2, \dots, c_k^p(A), \quad k = 0, 1, 2, \dots, n.$$

Assim, para cada um dos  $c_k^p(A)$  polinômios  $f_{j_k}$  em  $\Gamma_k(A)$ , construímos  $\binom{n}{k}$  polinômios do tipo descrito acima na base de  $P_n(A)$ , uma vez que temos  $\binom{n}{k}$  maneiras de escolher as  $k$  variáveis do polinômio  $f_{j_k}$ .

Logo, para cada  $k = 0, 1, \dots, n$ , temos  $\binom{n}{k} c_k^p(A)$  polinômios, e portanto o número total de polinômios na base de  $P_n(A)$  é dado por  $c_n(A) = \sum_{k=0}^n \binom{n}{k} c_k^p(A)$ .

□

**Lema 2.18.** *Seja  $A$  uma PI-álgebra unitária tal que  $c_{2k}^p(A) = 0$  para algum  $k$ , então  $c_m^p(A) = 0$ , para todo  $m \geq 2k$ .*

**Prova:** Seja  $A$  uma PI-álgebra unitária tal que  $c_{2k}^p(A) = 0$  para algum  $k$ , então temos que  $\Gamma_{2k} \subset Id(A)$ . Tomemos um polinômio multilinear próprio de grau  $n > 2k$ , como abaixo:

$$u = [x_{\sigma(1)}, \dots] \cdots [\dots, x_{\sigma(n)}] \in \Gamma_n, \sigma \in S_n, n > 2k.$$

Se  $u$  é um produto de comutadores de peso 2, então  $n$  é par e escrevemos  $u$  como

$$u = [x_{\sigma(1)}, x_{\sigma(2)}] \cdots [x_{\sigma(2k-1)}, x_{\sigma(2k)}] \cdots [x_{\sigma(n-1)}, x_{\sigma(n)}],$$

assim temos que  $u \in Id(A)$ .

Agora, se  $u$  contém algum comutador de peso maior que 2, ou seja,

$$u = [x_{\sigma(1)}, \dots] \cdots [x_{\sigma(p)}, x_{\sigma(p+1)}, x_{\sigma(p+2)}, \dots] \cdots [\dots, x_{\sigma(n)}],$$

podemos fazer uma substituição de variáveis,

$$y \rightarrow [x_{\sigma(p)}, x_{\sigma(p+1)}],$$

e mostramos que  $u$  é uma consequência de um polinômio de  $\Gamma_{n-1}$ . Repetindo este argumento indutivamente, segue que  $u \in Id(A)$ . Portanto,  $c_m^p(A) = 0$ , para todo  $m \geq 2k$ .

□

## 2.4 Crescimento das Codimensões

**Definição 2.19.** 1. Uma álgebra  $A$  tem crescimento polinomial (das codimensões) se sua sequência de codimensões  $\{c_n(A)\}_{n \geq 1}$  é limitada polinomialmente, isto é, se existem constantes  $a, t > 0$  tais que  $c_n(A) \leq an^t$ , para todo  $n \geq 1$ .

2. Uma variedade  $\mathcal{V}$  tem crescimento polinomial se  $\mathcal{V}$  é gerada por uma álgebra de crescimento polinomial.

**Definição 2.20.** 1. A sequência de codimensões  $\{c_n(A)\}_{n \geq 1}$  de uma álgebra  $A$  é limitada exponencialmente se existem constantes  $a, \alpha > 0$  tais que  $c_n(A) \leq a\alpha^n$ , para todo  $n \geq 1$ .

2. A sequência de codimensões de  $A$  cresce exponencialmente se existe uma constante  $\alpha$  tal que  $c_n(A) \approx \alpha^n$ ,  $n \rightarrow \infty$ . Neste caso, dizemos que  $A$  tem crescimento exponencial.

3. Uma variedade  $\mathcal{V}$  tem crescimento exponencial se  $\mathcal{V}$  é gerada por uma álgebra de crescimento exponencial.

Ainda em 1972, Regev mostrou que a sequência de codimensões de toda PI-álgebra é limitada exponencialmente, como pode ser visto em [27]. Neste artigo, o autor usou este fato como uma ferramenta para mostrar que se  $A$  e  $B$  são PI-álgebras então

$A \otimes B$  também satisfaz uma identidade polinomial não-nula. Um ano mais tarde em [22], Latyshev estabeleceu uma cota para este crescimento exponencial em função do grau da identidade polinomial satisfeita por  $A$ , como vemos no teorema a seguir, também conhecido como Teorema das Codimensões de Regev.

**Teorema 2.21.** ([12], Teorema 4.2.4) *Se a álgebra  $A$  satisfaz uma identidade polinomial de grau  $d \geq 1$ , então  $c_n(A) \leq (d - 1)^{2n}$ .*

Os teoremas a seguir nos fornecem uma caracterização das álgebras de crescimento polinomial. O primeiro teorema, devido a Kemer, nos dá um meio de verificar se  $\mathcal{G}$  pertence a uma variedade de álgebras. O segundo resultado garante que uma variedade de álgebras com crescimento polinomial é gerada por uma álgebra de dimensão finita. As demonstrações de ambos podem ser encontradas em [12].

**Teorema 2.22.** ([12], Teorema 7.1.4) *Seja  $\mathcal{V}$  uma variedade de álgebras sobre um corpo  $F$  de característica zero. Então  $\mathcal{G} \notin \mathcal{V}$  se, e somente se,  $\mathcal{V}$  é gerada por uma  $F$ -álgebra  $A$  de dimensão finita.*

**Teorema 2.23.** ([12], Teorema 7.2.4) *Se  $\mathcal{V}$  uma variedade de crescimento polinomial então  $\mathcal{V} = \text{var}(A)$ , para alguma álgebra  $A$  de dimensão finita.*

**Observação 2.24.** *Para  $A$  uma álgebra de dimensão finita, usando o Teorema de Wedderburn-Malcev (Teorema 1.28), temos a seguinte decomposição:*

$$A = B_1 \oplus B_2 \oplus \dots \oplus B_k + J,$$

onde os  $B_i$ 's são subálgebras simples de  $A$  e  $J = J(A)$  é o radical de Jacobson de  $A$ . A partir dos Lemas 2 e 3 da referência [10], de Giambruno e Zaicev, uma álgebra  $A$  tem crescimento polinomial se, e somente se,  $\dim_F B_i = 1$  e  $B_i J B_j = 0$ , para todo  $i \neq j$ .

O próximo teorema, conhecido como o Teorema do PI-exponente de Kemer, é um dos teoremas clássicos de Kemer e classifica as variedades de crescimento polinomial em termos da álgebra de Grassmann  $\mathcal{G}$  e da álgebra  $UT_2$  das matrizes triangulares superiores  $2 \times 2$ .

**Teorema 2.25.** *Seja  $\mathcal{V}$  uma variedade de álgebras sobre um corpo  $F$  de característica zero. Temos que  $\mathcal{V}$  tem crescimento polinomial se, e somente se,  $UT_2$  e  $\mathcal{G}$  não pertencem a  $\mathcal{V}$ .*

**Prova:** O caso em que  $\mathcal{V} = \text{var}(0)$  é imediato. Nos concentremos no caso em que  $\mathcal{V}$  é não trivial.

Suponhamos que existem constantes  $a, t > 0$  tais que  $c_n(\mathcal{V}) \leq an^t$ . Nos Teoremas 2.4 e 2.5 vimos que, para todo  $n \geq 1$ :

$$c_n(UT_2) = 2^{n-1}(n-2) + 2 \quad \text{e} \quad c_n(\mathcal{G}) = 2^{n-1}.$$

Assim, claramente  $\mathcal{G}$  e  $UT_2(F)$  não pertencem a  $\mathcal{V}$ . A primeira parte do teorema está provada.

Reciprocamente, pelo Teorema 2.22, temos que  $\mathcal{V} = \text{var}(A)$  para alguma  $F$ -álgebra de dimensão finita  $A$ , pois  $\mathcal{G} \notin \mathcal{V}$ . Pela Proposição 2.8, podemos supor que  $F$  é algebricamente fechado, já que  $c_n^{\bar{F}}(A \otimes \bar{F}) = c_n^F(A) \forall n \geq 1$ , onde  $\bar{F}$  é o fecho algébrico de  $F$ .

Pelo Teorema de Wedderburn-Malcev (Teorema 1.28), sabemos que  $A$  se escreve como  $A = B_1 \oplus \dots \oplus B_m + J$ , onde cada  $B_i$  é uma  $F$ -álgebra simples e  $J = J(A)$ . Pelo Teorema de Wedderburn-Artin (Teorema 1.24), temos que  $B_i \cong M_{n_i}(F) \quad 1 \leq i \leq m$ . Se algum  $n_i > 1$ , segue que  $A$  contém uma  $F$ -subálgebra isomorfa a  $UT_2$ . Por hipótese, isto não é possível, logo é necessário que  $n_1 = \dots = n_m = 1$ . Assim:

$$B_1 \cong B_2 \cong \dots \cong B_m \cong F.$$

Para provar que  $c_n(\mathcal{V}) \leq an^t$ , usando o fato apresentado na Observação 2.24, é suficiente verificarmos que:

$$B_i JB_k = 0 \quad \forall i, k \in \{1, \dots, m\}, \quad \text{com} \quad i \neq k.$$

Suponhamos, por absurdo que existem  $B_i$  e  $B_k$ , com  $i \neq k$ , tais que  $B_i JB_k \neq 0$ . Por simplicidade de notação, assumamos que  $B_1 JB_2 \neq 0$ . Dessa forma, existe  $j \in J$  tal que  $1_{B_1} j 1_{B_2} \neq 0$ . Notemos que  $1_{B_1}, 1_{B_2}$  e  $1_{B_1} j 1_{B_2}$  são linearmente independentes já que  $1_{B_1} 1_{B_2} = 1_{B_2} 1_{B_1} = 0$ . Seja  $B$  a seguinte  $F$ -subálgebra de  $A$ :

$$B := \text{span}_F \{1_{B_1}, 1_{B_2}, 1_{B_1} j 1_{B_2}\}.$$

Notemos que  $\dim(B) = \dim(UT_2) = 3$ . Consideremos o seguinte homomorfismo de  $F$ -álgebras:

$$\begin{aligned} \phi : \quad B &\rightarrow UT_2 \\ 1_{B_1} &\mapsto e_{11} \\ 1_{B_2} &\mapsto e_{22} \\ 1_{B_1} j 1_{B_2} &\mapsto e_{12} \end{aligned}.$$

Observemos que  $\phi$  é um isomorfismo. Assim, temos que  $A$  possui uma  $F$ -álgebra isomorfa a  $UT_2$ . Contradição, pois  $UT_2 \notin \mathcal{V}$ , completando a prova do teorema.

□

Desta descrição segue que não existe uma variedade  $\mathcal{V}$  com crescimento intermediário das codimensões, ou seja, ou  $c_n(\mathcal{V})$  é polinomialmente limitada ou  $c_n(\mathcal{V})$  cresce exponencialmente.

**Definição 2.26.** Dizemos que  $\mathcal{V}$  tem crescimento quase polinomial se  $\mathcal{V}$  cresce exponencialmente porém qualquer subvariedade própria de  $\mathcal{V}$  tem crescimento polinomial.

O Teorema do PI-expoente de Kemer mostra que  $\text{var}(\mathcal{G})$  e  $\text{var}(UT_2)$  são as únicas variedades de crescimento quase polinomial. Drensky e Regev, em [5], deram a seguinte caracterização:

**Teorema 2.27.** Seja  $A$  uma PI-álgebra unitária. Então

1. ou  $c_n(A) \geq 2^{n-1}$
2. ou  $c_n(A) = qn^k + \mathcal{O}(n^{k-1})$ , para algum inteiro  $k > 0$  e algum racional  $q \in \mathbb{Q}$ , onde  $\mathcal{O}(n^{k-1})$  é um polinômio de grau  $k - 1$ .

**Prova:** Primeiramente, suponhamos que  $c_{2^l}^p(A) \neq 0$  para todo  $l \geq 0$ . Neste caso, pelo Teorema 2.17, temos que

$$c_n(A) = \sum_{j=0}^n \binom{n}{j} c_j^p(A) \geq \sum_{j \geq 0} \binom{n}{2j} c_{2j}^p(A) \geq \sum_{j \geq 0} \binom{n}{2j} = 2^{n-1}.$$

Agora, se existe algum  $l \geq 0$  tal que  $c_{2^l}^p(A) = 0$  então, pelo Lema 2.18, existe  $k > 0$  tal que  $c_k^p(A) \neq 0$  e  $c_m^p(A) = 0$  para todo  $m > k$ . Deste modo temos  $c_n(A) = \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} c_j^p(A)$  e então

$$\begin{aligned}
c_n(A) &= \binom{n}{k} c_k^p(A) + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} c_j^p(A) \\
&= \frac{c_k^p(A)}{k!} n(n-1) \dots (n-k+1) + \sum_{j=0}^{k-1} \binom{n}{j} c_j^p(A) \\
&= \frac{c_k^p(A)}{k!} n^k + \mathcal{O}(n^{k-1}).
\end{aligned}$$

Como  $c_k^p(A)$  é um número inteiro, temos que  $q = \frac{c_k^p(A)}{k!}$  é um número racional, o que conclui a demonstração. □

Também temos uma caracterização do crescimento polinomial em termos da sequência de cocaracteres da álgebra  $A$ , como mostra o teorema a seguir. Com isto, podemos encontrar uma cota superior para o número de boxes abaixo da primeira linha de qualquer diagrama no  $n$ -ésimo cocaracter de  $A$ .

**Teorema 2.28.** ([12], Teorema 7.2.2) *Seja  $A$  uma álgebra de dimensão finita sobre um corpo  $F$  de característica zero. Então  $\{c_n(A)\}_{n \geq 1}$  é limitada polinomialmente se, e somente se,*

$$\chi_n(A) = \sum_{\substack{\lambda \vdash n \\ |\lambda| - \lambda_1 \leq q}} m_\lambda \chi_\lambda$$

onde  $J(A)^q = 0$ .

O próximo teorema, provado por Giambruno e Zaicev em 2001, caracteriza álgebras de dimensão finita que geram variedades de crescimento polinomial.

**Teorema 2.29.** ([12], Proposição 7.2.8) *Seja  $\mathcal{V}$  uma variedade de álgebras sobre um corpo algebricamente fechado  $F$ . Então  $\mathcal{V}$  tem crescimento polinomial se, e somente se,  $\mathcal{V} = \text{var}(A)$  para alguma álgebra  $A$  de dimensão finita tal que*

1.  $A = A_0 \oplus A_1 \oplus \dots \oplus A_m$  é uma soma direta como espaço vetorial de  $F$ -álgebras  $A_i = B_i + J_i$  onde, para cada  $i = 1, \dots, m$ ,  $B_i \cong F$ ,  $J_i$  é um ideal nilpotente de  $A_i$ , e  $A_0, J_1, \dots, J_m$  são ideais à direita nilpotentes de  $A$ ;
2. para todo  $i, k \in \{1, \dots, m\}$ ,  $i \neq k$ ,  $A_i A_k = 0$  e  $B_i A_0 = 0$ .

**Prova:** Suponha que  $V$  tem crescimento polinomial. Então pelo Teorema 2.23, temos que  $V = \text{var}(A)$  para alguma  $F$ -álgebra de dimensão finita  $A$ . Seja  $A = B + J$  a decomposição de Wedderburn-Malcev de  $A$ , onde  $B$  é uma subálgebra semissimples de  $A$  e  $J = J(A)$  é o radical de Jacobson de  $A$ . Escreva  $B = B_1 \oplus \dots \oplus B_m$ , com  $B_1, \dots, B_m$   $F$ -álgebras simples. Como  $c_n(A)$  é limitada polinomialmente, pela Observação 2.24,  $B_i J B_k = 0$ , para todo  $i \neq k$ , e  $\dim_F B_i = 1, i, k = 1, \dots, m$ .

Seja  $e = e_1 + \dots + e_m$  a decomposição do elemento unidade de  $B$  em idempotentes centrais ortogonais em  $B$  dados a partir do Teorema de Wedderburn-Artin. Assim  $e_i B = B_i \cong F$ . Defina, para todo  $i = 1, \dots, m$ ,  $J_i = e_i J$  e  $J_0 = \{x \in J : Bx = 0\}$ . Não é difícil mostrar que, como soma direta de espaços vetoriais,

$$A = B + J = (B_1 + J_1) \oplus \dots \oplus (B_m + J_m) \oplus J_0.$$

Agora faça  $A_i = B_i + J_i$  e  $A_0 = J_0$ . Para  $i \neq k \in \{1, \dots, m\}$ , observe que  $A_i A_k = (B_i + J_i)(B_k + J_k) = 0$ , pois  $e_i e_k = 0$  e  $B_i J B_k = 0$ . Além disso, para  $i \neq 0, B_i A_0 = 0$ .

Reciprocamente, suponha que  $V = \text{var}(A)$  onde  $A$  é uma  $F$ -álgebra de dimensão finita satisfazendo (1) e (2). Considerando  $J = A_0 + J_1 + \dots + J_m$ , das relações  $A_i A_k = 0$  e  $B_i A_0 = 0$  segue que  $J$  é um ideal bilateral nilpotente de  $A$  e que  $A$  é a soma direta como espaços vetoriais  $A = (B_1 \oplus \dots \oplus B_m) + J$ . Além disso,  $B = B_1 \oplus \dots \oplus B_m$  não contém elementos nilpotentes não nulos. De fato, como  $B_i \cong F$ , cada um dos  $B_i$ 's não contém tais elementos e se  $b = b_1 + \dots + b_m \in B$  é nilpotente então  $0 = b^k = (b_1 + \dots + b_m)^k$  para algum natural  $k$  e desde que a soma é direta, isto implica em  $b_1^k = \dots = b_m^k = 0$ , portanto  $b_i = 0$  para todo  $i = 1, \dots, m$ .

Podemos ver também que  $J$  é o radical de  $A$  pois se  $a \in A$  é um elemento nilpotente, digamos  $a^n = 0$  então escrevendo  $a = b + s$  com  $b \in B$  e  $s \in J$ , usando o fato que  $J$  é um ideal e que a soma é direta, temos  $a^n = (b + s)^n = b^n + r$ , para algum  $r \in J$  e assim,  $b^n = 0$ . Agora, usamos o fato que provamos acima para concluir que  $b = 0$  e com isso,  $a \in J$ , o que prova que  $J$  é o maior ideal nilpotente de  $A$ , ou seja, seu radical de Jacobson.

Portanto,  $A = B_1 \oplus \dots \oplus B_m + J$ , onde  $B_i \cong F$ , para todo  $i$  e como das relações definidas,  $A_i A_k = 0$  e  $B_i A_0 = 0$ , temos  $B_i J B_k = 0$ , para todo  $i \neq k$ , então segue que  $c_n(A)$  é limitada polinomialmente pela Observação 2.24.

□

Como uma consequência do resultado anterior, temos o seguinte que será bastante útil.

**Teorema 2.30.** ([12], Corolário 7.2.8) *Seja  $\mathcal{V}$  uma variedade sobre um corpo  $F$  algebricamente fechado. Se  $\mathcal{V}$  tem crescimento polinomial então  $\mathcal{V} = \text{var}(\tilde{B})$ , para alguma álgebra  $\tilde{B} = \tilde{B}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{B}_l$ , onde  $\tilde{B}_1, \dots, \tilde{B}_l$  são  $F$ -álgebras de dimensão finita e  $\dim \frac{\tilde{B}_i}{J(\tilde{B}_i)} \leq 1$ , para todo  $i = 1, \dots, l$ .*

**Prova:** Suponha que  $\mathcal{V}$  cresce polinomialmente. Como no teorema anterior, temos que  $\mathcal{V} = \text{var}(A)$  onde  $A$  é  $F$ -álgebra de dimensão finita satisfazendo (1) e (2), ou seja, temos  $A = A_0 \oplus A_1 \oplus \dots \oplus A_m$  com  $A_0 = J_0$ ,  $A_i = B_i + J_i$ , para  $i = 1, \dots, m$  e também,  $J = J_0 + \dots + J_m$  é o radical de Jacobson de  $A$ . Afirmamos que

$$\text{Id}(A) = \text{Id}(A_1 \oplus A_0) \cap \dots \cap \text{Id}(A_m \oplus A_0) \cap \text{Id}(J). \quad (4.12)$$

De fato, claramente temos  $\text{Id}(A) \subset \text{Id}(A_1 \oplus A_0) \cap \dots \cap \text{Id}(A_m \oplus A_0) \cap \text{Id}(J)$ . Agora, tome  $f \in \text{Id}(A_1 \oplus A_0) \cap \dots \cap \text{Id}(A_m \oplus A_0) \cap \text{Id}(J)$  e suponha que  $f \notin \text{Id}(A)$ . Desde que  $\text{car}(F) = 0$ , podemos assumir  $f$  multilinear e sejam  $r_1, \dots, r_s \in A$  tais que  $f(r_1, \dots, r_s) \neq 0$ . Como  $f \in \text{Id}(J)$ , entre  $r_1, \dots, r_s$  deve existir  $r_i \notin J$ . Pela linearidade, podemos assumir que  $r_i \in B_k$ , para algum  $k$ . O teorema anterior, nos diz que para todo  $l, B_l A_0 = 0$ ,  $J_l$  é um ideal à direita de  $A$  e que quando  $l \neq k$  temos  $A_k A_l = A_l A_k = 0$ . Segue daí que  $A_1, \dots, A_k$  são ideais à direita de  $A$ . Assim,  $r_1, \dots, r_{l-1}, r_{l+1}, \dots, r_s \in A_k \cup A_0$  e, portanto,  $f \notin \text{Id}(A_k \oplus A_0)$ , o que é uma contradição.

Agora, considere  $\tilde{B}_1 = A_1 + A_0, \dots, \tilde{B}_m = A_m + A_0$  e  $\tilde{B}_0 = J$ . Por (4.12), vamos ter:

$$\text{Id}(A) = \text{Id}(\tilde{B}_0 \oplus \tilde{B}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{B}_m),$$

onde para  $i = 1, \dots, m$ , temos  $\tilde{B}_i$   $F$ -álgebras de dimensão 1 sobre seus radicais e  $\tilde{B}_0$  é nilpotente, ou seja,  $A$  e  $\tilde{B}_0 \oplus \tilde{B}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{B}_m$  geram a mesma variedade e portanto, renomeando as componentes,  $\mathcal{V} = \text{var}(\tilde{B})$  com  $\tilde{B} = \tilde{B}_1 \oplus \dots \oplus \tilde{B}_l$  nas condições que queríamos.

□



Nos capítulos seguintes trabalharemos com álgebras de crescimento polinomial das codimensões. A Proposição 2.8 nos permite assumir a álgebra sobre um corpo algebricamente fechado e, portanto, lançar mão do Teorema 2.30. Assim estaremos, numa investigação inicial, buscando informações sobre álgebras tais que  $\dim \frac{A}{J(A)} \leq 1$ , ou seja, ou  $A$  é nilpotente ou  $A \cong F + J(A)$ .

O seguinte teorema sobre a decomposição do radical de Jacobson de uma álgebra de dimensão finita, apresentado por Giambruno e Zaicev em [11], é uma ferramenta importante para o estudo de PI-álgebras do tipo  $A = M_k(F) + J$ , onde  $J = J(A)$ .

Um  $R$ -módulo  $M$  é dito zero módulo à esquerda se  $rm = 0$ , para todo  $r \in R, m \in M$ . Analogamente,  $M$  é dito zero módulo à direita se  $mr = 0$ , para todo  $r \in R, m \in M$ .

**Teorema 2.31.** *Seja  $A$  uma álgebra de dimensão finita sobre  $F$  e tal que  $A = B + J$ , onde  $B = M_k(F)$  e  $J = J(A)$  é o radical de Jacobson de  $A$ . Então  $J$  pode ser decomposto na soma direta de  $B$ -bimódulos*

$$J = J_{00} \oplus J_{01} \oplus J_{10} \oplus J_{11},$$

onde, para  $i \in \{0, 1\}$ ,  $J_{ik}$  é um módulo fiel à esquerda ou um zero módulo à esquerda, conforme  $i = 1$  ou  $i = 0$ , respectivamente. Similarmente,  $J_{ik}$  é um módulo fiel à direita ou um zero módulo à direita conforme  $k = 1$  ou  $k = 0$ , respectivamente.

**Prova:** Seja  $E$  a unidade de  $B = M_k(F)$ . Denotemos por

$$\begin{array}{ll} L_E : J \rightarrow J & R_E : J \rightarrow J \\ a \mapsto Ea & a \mapsto aE \end{array}$$

as transformações lineares de  $J$  da multiplicação à esquerda e multiplicação à direita por  $E$ , respectivamente. Uma vez que  $L_E^2 = L_E$  e  $R_E^2 = R_E$ , temos que ambas são transformações lineares diagonalizáveis com autovalores 0 e 1. Além disso,  $L_ER_E = R_EL_E$ , logo  $L_E$  e  $R_E$  são simultaneamente diagonalizáveis e  $J$  se decompõe como soma dos seus autoespaços  $J = J_{00} \oplus J_{01} \oplus J_{10} \oplus J_{11}$ , onde denotamos, para  $i, k \in \{0, 1\}$ ,

$$J_{ik} = \{x \in J : R_E(x) = ix \text{ e } L_E(x) = kx\}.$$

□

Em outras palavras,  $J$  pode ser decomposto na soma direta de  $B$ -bimódulos

$$J = J_{00} \oplus J_{01} \oplus J_{10} \oplus J_{11},$$

que satisfazem as seguintes relações:

1.  $bJ_{0k} = 0$  e  $J_{i0}b = 0$ , para todo  $b \in B$ ,  $i, k \in \{0, 1\}$ ;
2. para  $i, k \in \{0, 1\}$ ,  $b \in B$ ,  $bJ_{1k} = 0 \Leftrightarrow b = 0$ ;
3. para  $i, k \in \{0, 1\}$ ,  $b \in B$ ,  $J_{i1}b = 0 \Leftrightarrow b = 0$ ;
4.  $J_{ik}J_{lm} \subseteq \delta_{kl}J_{im}$ .

## Capítulo 3

# Construindo Álgebras

Neste capítulo iremos apresentar as álgebras que aparecerão na classificação das subvariedades próprias da variedade gerada por  $UT_2$  e da variedade gerada por  $\mathcal{G}$ . Iremos também calcular o T-ideal e a sequência de codimensões de cada uma destas álgebras.

### 3.1 Álgebras Unitárias de Crescimento Polinomial

Nesta seção estaremos trabalhando com álgebras unitárias. As álgebras aqui consideradas foram apresentadas em [8] por Giambruno, La Mattina e Petrogradsky, em 2007, que estudaram álgebras de matrizes unitárias de crescimento polinomial. Começamos fixando  $t \geq 1$ , e considerando  $\mathcal{G}_t$  a álgebra de Grassmann com unidade de dimensão finita

$$\mathcal{G}_t = \langle 1, e_1, \dots, e_t \mid e_i e_j = -e_j e_i \rangle.$$

Então  $\mathcal{G}_t = \text{span}\{e_{i_1} \dots e_{i_r} \mid 0 \leq i_1 \leq i_r < t\}$  e pode ser escrita como  $\mathcal{G}_t = \mathcal{G}_t^{(0)} \oplus \mathcal{G}_t^{(1)}$ , onde  $\mathcal{G}_t^{(0)}$  é o subespaço gerado por monômios nos  $e_i$ 's de grau par e  $\mathcal{G}_t^{(1)}$  é o subespaço gerado por monômios de grau ímpar, e temos que  $\mathcal{G}_t^{(0)}$  está no centro de  $\mathcal{G}_t$ .

**Exemplo 3.1.** *Seja  $\mathcal{G}_2$  a subálgebra de  $\mathcal{G}$  gerada por  $1, e_1, e_2$ . Então  $\mathcal{G}_2 = F1 + Fe_1 + Fe_2 + Fe_1e_2$  é álgebra de Grassmann com 1 sobre um espaço vetorial bi-dimensional. Como  $\mathcal{G}_2$  é subálgebra de  $\mathcal{G}$ , temos que  $[x_1, x_2, x_3] \equiv 0$  em  $\mathcal{G}_2$ . Além disso, observe que  $[\mathcal{G}_2, \mathcal{G}_2] \subset \text{span}\{e_1e_2\}$ , logo  $[x_1, x_2][x_3, x_4] \equiv 0$  em  $\mathcal{G}_2$ . Portanto  $\langle [x_1, x_2, x_3], [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T \subset \text{Id}(\mathcal{G}_2)$ .*

Seja  $f$  uma identidade polinomial de  $\mathcal{G}_2$ . Como  $\mathcal{G}_2$  é unitária e  $\text{car}F = 0$ , podemos assumir  $f$  multilinear própria. Fazendo a redução de  $f$  módulo  $Q = \langle [x_1, x_2, x_3], [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T$ , obtemos que  $f = \alpha[x_1, x_2]$ , para algum  $\alpha \in F$ . Se avaliamos  $f$  em  $a_1 = e_1, a_2 = e_2$ , obtemos  $0 = f(a_1, a_2) = \alpha[e_1, e_2] = 2\alpha e_1 e_2$ . Então  $\alpha = 0$  e devemos ter  $f \in Q$ . Portanto  $\text{Id}(\mathcal{G}_2) = \langle [x_1, x_2, x_3], [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T$ .

O teorema a seguir caracteriza as identidades polinomiais e as codimensões de  $\mathcal{G}_t$ , no caso em que  $t$  é um número par.

**Teorema 3.2.** *Seja  $k \geq 1$  e  $F$  um corpo infinito. Então:*

1.  $\text{Id}(\mathcal{G}_{2k}) = \langle [x_1, x_2, x_3], [x_1, x_2] \cdots [x_{2k+1}, x_{2k+2}] \rangle_T$ .
2. Para  $j \leq k$ , temos que  $\{[x_1, x_2] \cdots [x_{2j-1}, x_{2j}]\}$  é uma base para  $\Gamma_{2j}(\text{mod} \Gamma_{2j} \cap \text{Id}(\mathcal{G}_{2k}))$  e  $\Gamma_{2j+1} \subset \text{Id}(\mathcal{G}_{2k})$ .
3.  $c_n(\mathcal{G}_{2k}) = \sum_{j=0}^k \binom{n}{2j} \approx \frac{1}{(2k)!} n^{2k}, n \rightarrow \infty$ .

**Prova:** Como  $\mathcal{G}_{2k}$  é subálgebra de  $\mathcal{G}$  e  $[x_1, x_2, x_3] \in \text{Id}(\mathcal{G})$ , segue imediatamente que  $[x_1, x_2, x_3] \in \text{Id}(\mathcal{G}_{2k})$ . Além disso, quando avaliamos  $[x_1, x_2] \cdots [x_{2k+1}, x_{2k+2}]$  em  $2k+2$  elementos de  $\mathcal{G}_{2k}$ , obtemos um elemento que é soma de monômios em  $e_i$ 's de grau pelo menos  $2k+1$ , logo o resultado deve ser o elemento nulo. Assim  $[x_1, x_2] \cdots [x_{2k+1}, x_{2k+2}] \in \text{Id}(\mathcal{G}_{2k})$ .

Seja  $Q = \langle [x_1, x_2, x_3], [x_1, x_2] \cdots [x_{2k+1}, x_{2k+2}] \rangle_T$ , temos que  $Q \subset \text{Id}(\mathcal{G}_{2k})$ . Agora seja  $f$  uma identidade de  $\mathcal{G}_{2k}$ , podemos assumir  $f$  multilinear própria, pois  $\mathcal{G}_{2k}$  é unitária e  $\text{car}F = 0$ . Após reduzir  $f$  módulo  $Q$ , obtemos que  $f$  é um produto de comutadores de peso 2

$$f \equiv \alpha [x_1, x_2] \cdots [x_{2j+1}, x_{2j+2}] \text{mod}(Q),$$

com  $j < k$ . Avaliando  $f$  em  $a_i = e_i$ , com  $0 \leq i \leq 2j+2$  obtemos

$$0 = f(a_1, \dots, a_{2j+2}) = 2^{j+1} \alpha e_1 \cdots e_{2j+2}$$

Logo devemos ter  $\alpha = 0$ , ou seja,  $f \in Q$ . Portanto

$$\text{Id}(\mathcal{G}_{2k}) = \langle [x_1, x_2, x_3], [x_1, x_2] \cdots [x_{2k+1}, x_{2k+2}] \rangle_T.$$

Isto também mostra que, para  $1 \leq j \leq k$ , o conjunto formado pelo polinômio  $[x_1, x_2] \cdots [x_{2j-1}, x_{2j}]$  é uma base para o conjunto dos polinômios multilineares próprios de grau  $2j$  módulo  $\Gamma_{2j} \cap Id(\mathcal{G}_{2k})$ . Logo  $c_{2j}^p(\mathcal{G}_{2k}) = 1$  e  $c_{2j+1}^p(\mathcal{G}_{2k}) = 0$  para  $j = 1, \dots, k$ .

Portanto

$$c_n(\mathcal{G}_{2k}) = \sum_{j=0}^k \binom{n}{2j} \approx \frac{1}{(2k)!} n^{2k}, n \rightarrow \infty.$$

□

Agora, consideremos  $k \geq 2$  fixo e  $E$  a matriz identidade  $k \times k$ . Também vamos considerar  $E_1 = \sum_{i=1}^{k-1} e_{i,i+1}$ , onde  $e_{ij}$  denotam as matrizes elementares  $k \times k$  usuais. Notemos que a matriz  $E_1$  tem todas as entradas nulas exceto nas entradas imediatamente acima da diagonal principal que são todas iguais a 1. Tomamos a subálgebra

$$N_k = \text{span}\{E, E_1, \dots, E_1^{k-2}; e_{12}, e_{13}, \dots, e_{1k}\}$$

da álgebra  $UT_k$  de matrizes triangulares superiores  $k \times k$ . Observamos que  $N_2 \sim_{PI} F$ , pois como  $N_2 = \text{span}\{E, e_{12}\}$  temos que  $N_2$  é comutativa.

Consideremos ainda  $U_k$ , para  $k \geq 2$ , a subálgebra de  $UT_k$  também apresentada em [8]. Temos que

$$U_k = \left\{ \alpha E + \sum_{1 \leq i < j \leq k} \alpha_{ij} e_{ij} \mid \alpha, \alpha_{ij} \in F \right\}$$

é a álgebra das matrizes  $k \times k$  triangulares superiores cuja diagonal principal tem todos os elementos iguais.

**Exemplo 3.3.** No caso  $k = 2$  e  $k = 3$  temos  $U_2 = N_2 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b \in F \right\}$  e

$$N_3 = U_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in F \right\}.$$

Para  $k \geq 4$ , temos  $N_4 \neq U_k$ , pois em  $N_k$  outros elementos se repetem além dos elementos sobre a diagonal principal. Vejamos, por exemplo,

$$N_5 = \left\{ \left( \begin{array}{ccccc} a & b & c & d & e \\ 0 & a & f & g & h \\ 0 & 0 & a & f & g \\ 0 & 0 & 0 & a & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{array} \right) \mid a, b, c, d \in F \right\}.$$

Observe que  $N_k$  é uma subálgebra de  $U_k$ . No artigo onde as álgebras acima foram introduzidas, os autores mostraram que  $[x_1, \dots, x_k]$  é uma identidade polinomial de  $U_k$  e os seguintes resultados importantes. Omitiremos a prova do seguinte teorema.

**Teorema 3.4.** ([8], Teorema 3.1) *Seja  $F$  um corpo infinito. Então:*

1. *Uma base das identidades polinomiais de  $U_k$  é dada por todos os produtos de comutadores de grau total  $k$*

$$[x_1, \dots, x_{a_1}][x_{a_1+1}, \dots, x_{a_2}] \cdots [x_{a_{r-1}+1}, \dots, x_{a_r}],$$

onde  $a_r = k$  se  $k$  é par, e no caso em que  $k$  é ímpar, a base é formada por todos estes polinômios adicionando o polinômio de grau  $k + 1$

$$[x_1, x_2] \cdots [x_k, x_{k+1}].$$

- 2.

$$c_n(U_k) = \sum_{j=0}^{k-1} \frac{n!}{(n-j)!} \theta_j \approx \theta_{k-1} n^{k-1}, n \rightarrow \infty$$

onde  $\theta_j = \sum_{s=0}^j \frac{(-1)^s}{s!}$ , com  $i \in \mathbb{N}$ .

**Teorema 3.5.** *Seja  $A$  uma álgebra unitária sobre um corpo infinito  $F$  tal que  $c_n(A) \approx qn^k, n \rightarrow \infty$ . Então  $Id(A) \supset Id(U_{k+1})$ .*

**Prova:** Como  $A$  uma álgebra unitária e  $c_n(A) \approx qn^k, n \rightarrow \infty$ , temos que

$$c_n(A) = \sum_{j=0}^k \binom{n}{j} c_j^p$$

e  $c_{k+i}^p(A) = 0$  para  $i \geq 1$ , ou seja,  $\Gamma_{k+i} \subset Id(A)$ . O teorema anterior nos diz que  $Id(U_{k+1})$  é gerado por  $\Gamma_{k+1}$  e, eventualmente, pelo polinômio

$$[x_1, x_2] \cdots [x_{k+1}, x_{k+2}] \in \Gamma_{k+2}.$$

Como  $\Gamma_{k+1}, \Gamma_{k+2} \subset Id(A)$ , segue que  $Id(U_{k+1}) \subset Id(A)$ .

□

**Teorema 3.6.** *Sejam  $k \geq 3$  e  $F$  um corpo infinito. Então:*

1.  $Id(N_k) = \langle [x_1, \dots, x_k], [x_1, x_2] [x_3, x_4] \rangle_T$ .
2. Para  $j \leq k - 1$ , temos que  $\{[x_i, x_1, x_2, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_j] \mid i = 2, 3, \dots, j\}$  é uma base para  $\Gamma_j(N_k)$ , onde  $\widehat{x}_i$  indica que a variável  $x_i$  foi omitida.
3.  $c_n(N_k) = 1 + \sum_{j=2}^{k-1} \binom{n}{j} (j-1) \approx \frac{k-2}{(k-1)!} n^{k-1}, n \rightarrow \infty$ .

**Prova:** Observe que  $E^{k-1} = e_{1k}$  e  $E_1^k = 0$ , logo  $N = span\{E, E_1, \dots, E_1^{k-2}\}$  é comutativa. Segue daí que  $[N_k, N_k] \subset span\{e_{13}, e_{14}, \dots, e_{1k}\}$ . Denotemos  $A = span\{e_{13}, e_{14}, \dots, e_{1k}\}$ . Como dados  $x, y \in A$  tem-se  $xy = 0$ , segue que  $[x_1, x_2] [x_3, x_4]$  é uma identidade de  $N_k$ . Como  $N_k$  é uma subálgebra de  $U_k$ , temos que  $[x_1, \dots, x_k]$  também é uma identidade de  $N_k$ .

Agora seja  $f \in Id(N_k)$ , como  $N_k$  é unitária e  $car F = 0$  podemos assumir  $f$  multilinear próprio. Pela Proposição 1.46, após reduzir  $f$  módulo

$$Q = \langle [x_1, \dots, x_k], [x_1, x_2] [x_3, x_4] \rangle_T,$$

temos que  $f$  pode ser escrito como uma combinação linear de comutadores de peso  $j \leq k - 1$ , ou seja,

$$f = \sum_{i=2}^j \alpha_i [x_i, x_1, x_2, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_j],$$

onde  $\widehat{x}_i$  indica que a variável  $x_i$  foi omitida.

Suponha que  $\alpha_m \neq 0$  para algum  $m = 2, \dots, j$ . Avaliemos  $f$  em  $x_m = e_{12}$  e  $x_i = E_1$ , para todo  $i \neq m$ . Como  $[E_1, E_1] = 0$  e  $[e_{1r}, E_1] = e_{1,r+1}, \forall r = 2, \dots, k - 1$ , temos que

$$f(E_1, \dots, e_{12}, \dots, E_1) = \alpha_m [e_{12}, E_1, \dots, E_1] = \alpha_m e_{1,j+1} \neq 0,$$

o que contradiz o fato de  $f$  ser uma identidade de  $N_k$ . Assim concluímos que

$$Id(N_k) = \langle [x_1, \dots, x_k], [x_1, x_2] [x_3, x_4] \rangle_T.$$

Este argumento também nos diz que, para  $j \leq k - 1$ , os comutadores  $[x_i, x_1, x_2, \dots, \widehat{x}_i, \dots, x_j]$  com  $i = 2, 3, \dots, j$ , formam uma base para  $\frac{\Gamma_j}{\Gamma_j \cap Id(N_k)}$ .

Assim, temos que  $c_j^p(N_k) = j - 1$ , para  $j = 2, \dots, k - 1$ . Logo

$$c_n(N_k) = \sum_{i=0}^r \binom{n}{j} c_i^p(N_k) = 1 + \sum_{j=2}^{k-1} \binom{n}{j} (j - 1) \approx \frac{k - 2}{(k - 1)!} n^{k-1}, n \rightarrow \infty.$$

□

Vimos que  $Id(UT_2) = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T$  e  $Id(\mathcal{G}) = \langle [x_1, x_2, x_3] \rangle_T$ , deste modo temos  $N_k \in var(UT_2)$  e  $\mathcal{G}_{2k} \in var(\mathcal{G})$ . Além disso, temos que  $N_3 \sim_{PI} \mathcal{G}_2$ , pois vale a igualdade  $Id(N_3) = \langle [x_1, x_2, x_3], [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T = Id(\mathcal{G}_2)$ .

Observemos também que  $Id(N_4) = \langle [x_1, x_2, x_3, x_4], [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T = Id(U_4)$ , logo  $N_4 \sim_{PI} U_4$ . Mas para todo  $k > 4$  temos que  $var(N_k) \subsetneq var(U_k)$ , de acordo com os Teoremas 3.6 e 3.4.

No Teorema 2.27, vimos que se um álgebra unitária  $A$  tem crescimento polinomial das codimensões então  $c_n(A) \approx qn^k$ , onde  $q = \frac{c_k^p(A)}{k!}$ . Como  $1 \leq c_k^p(A) \leq dim\Gamma_k$  e  $\frac{dim\Gamma_k}{k!} = \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{j!}$ , temos que

$$\frac{1}{k!} \leq q \leq \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{j!}.$$

Em 2007, Giambruno, La Mattina e Petrogradsky melhoraram este resultado provando que  $\frac{r}{k!} \leq q \leq \sum_{j=0}^k \frac{(-1)^j}{j!}$ , onde  $r = 1$  ou  $r = k - 1$  caso  $k$  seja par ou ímpar, respectivamente.

Deste modo, o Teorema 3.4 mostra que a álgebra  $U_k$  tem o maior crescimento polinomial possível de grau  $k - 1$ . Se  $k$  é ímpar, Teorema 3.6, mostra que  $N_k$  tem o menor crescimento polinomial de grau  $k - 1$ . Se  $k$  é par,  $\mathcal{G}^{2k}$  tem o menor crescimento polinomial possível de grau  $2k$ , pelo Teorema 3.2 .

## 3.2 Álgebras sem Unidade de Crescimento Polinomial

Dada uma subálgebra  $A$  de  $UT_k$  denotamos por  $A^*$  a subálgebra de  $UT_k$  obtida refletindo os elementos de  $A$  em relação a sua diagonal secundária. Para  $f \in F \langle X \rangle$ ,



denotamos por  $f^*$  o polinômio obtido invertendo-se a posição das variáveis em cada monômio de  $f$ . Observe que  $f$  é uma identidade de  $A$  se, e somente se,  $f^*$  é uma identidade de  $A^*$ .

**Exemplo 3.7.** Em  $UT_2$ , considere as matrizes  $A = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix}$ ,  $A^* = \begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix}$ ,  
 $B = \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix}$ ,  $B^* = \begin{pmatrix} c_2 & b_2 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix}$ . Observe que:

$$AB = \begin{pmatrix} a_1 & b_1 \\ 0 & c_1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_2 & b_2 \\ 0 & c_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_1a_2 & a_1b_2 + b_1c_2 \\ 0 & c_1c_2 \end{pmatrix}$$

$$B^*A^* = \begin{pmatrix} c_2 & b_2 \\ 0 & a_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} c_1 & b_1 \\ 0 & a_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} c_1c_2 & a_1b_2 + b_1c_2 \\ 0 & a_1a_2 \end{pmatrix} = (AB)^*$$

Deste modo vemos que  $AB = 0 \Leftrightarrow B^*A^* = 0$ .

Para  $i = 1, \dots, k$ , consideremos a subálgebra de  $UT_k$

$$A_k^{(i)} = \text{span}\{e_{ii}, e_{pq} | 1 \leq p < q \leq k\},$$

que consiste das matrizes que têm entradas nulas na diagonal principal exceto eventualmente na posição  $(i, i)$ .

Estas álgebras fazem parte de um caso particular das álgebras apresentadas por Guttermann e Regev em [13]. Neste artigo, para uma PI-álgebra associativa  $R$ , os autores consideram

$$A_i(R) = \text{span}\{e_{ii}(R), e_{pq}(R) | 1 \leq p < q \leq k\},$$

e demonstram o seguinte resultado sobre esta classe de álgebras:

**Teorema 3.8.** *Seja  $F$  um corpo, então*

1.  $Id(A_i(R)) = \langle x_1 \cdots x_{i-1} Id(R) x_i \cdots x_{k-1} \rangle_T$ ;
2.  $c_n(A_i(R)) = n(n-1) \cdots (n-k+1)c_{n-k+1}(R)$ .

A expressão  $x_1 \cdots x_{i-1} Id(R) x_i \cdots x_{k-1}$  significa os polinômios da forma  $x_1 \cdots x_{i-1} f x_i \cdots x_{k-1}$  onde  $f$  percorre os geradores de  $Id(R)$ .

Aqui, estamos nos concentrando em  $A_i(F) = A_k^{(i)}$  e, como  $F$  é comutativo, temos que  $Id(F) = \langle [x_1, x_2] \rangle_T$ .

Agora para  $k \geq 2$  definimos as subálgebras de  $UT_k$

$$A_k = \text{span}\{e_{11}, E_1, E_1^2, \dots, E_1^{k-2}; e_{12}, e_{13}, \dots, e_{1k}\},$$

$$A_k^* = \text{span}\{e_{kk}, E_1, E_1^2, \dots, E_1^{k-2}; e_{1k}, e_{2k}, \dots, e_{k-1,k}\}.$$

**Exemplo 3.9.** No caso  $k = 5$ , temos:

$$A_5 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c & d & e \\ 0 & 0 & f & g & h \\ 0 & 0 & 0 & f & g \\ 0 & 0 & 0 & 0 & f \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in F \right\}$$

$$A_5^* = \left\{ \begin{pmatrix} 0 & f & g & h & e \\ 0 & 0 & f & g & d \\ 0 & 0 & 0 & f & c \\ 0 & 0 & 0 & 0 & b \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in F \right\}$$

Observe que  $A_k$  é subálgebra de  $A_k^{(1)}$  e  $A_k^*$  é subálgebra de  $A_k^{(k)}$ . Além disso, temos que  $f \in Id(A_k)$  se, e somente se,  $f^* \in Id(A_k^*)$ . Como consequência direta do teorema anterior, segue que:

**Corolário 3.10.** Para  $k = 2$ , temos  $A_2 = A_2^{(1)} = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$  e  $A_2^* = A_2^{(2)} = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{pmatrix}$ . Além disso,

1.  $Id(A_2) = \langle [x_1, x_2] x_3 \rangle_T$ .
2.  $Id(A_2^*) = \langle x_3 [x_1, x_2] \rangle_T$ .
3.  $c_n(A_2) = c_n(A_2^*) = n, n \geq 1$ .

Em [18], La Mattina descreve explicitamente as identidades de  $A_k$  e  $A_k^*$  e também das somas diretas  $N_u \oplus A_k$ ,  $N_u \oplus A_k^*$ ,  $A_k \oplus A_t^*$  e  $N_u \oplus A_k \oplus A_t^*$ , para quaisquer  $u > 2, k, t \geq 2$ .

Antes de enunciarmos o próximo resultado, vamos fazer um exemplo que será útil não somente para a sua demonstração como também contém um raciocínio repetitivo que envolve uma indução que será usada em demonstrações de resultados posteriores.

**Exemplo 3.11.** *Vamos considerar a superálgebra  $A_4$ . Queremos mostrar que*

$$Id(A_4) = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4], [x_1, x_2]x_3x_4x_5 \rangle_T.$$

*Primeiramente, usando o fato que  $A_4$  é uma subálgebra de  $A_4^{(1)}$  e que  $[A_4, A_4] \subset \text{span}\{e_{12}, e_{13}, e_{14}\}$ , notamos que  $Q = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4], [x_1, x_2]x_3x_4x_5 \rangle \subset Id(A_4)$ .*

*Agora vamos mostrar que tipo de argumento garante que o  $T$ -ideal de  $A_4$  é exatamente  $Q$ , considerando  $f = f(x_1, \dots, x_n)$  um polinômio multilinear de grau  $n$  arbitrário. Usando a Proposição 1.46, temos que  $f$  pode ser escrita, módulo  $Q$ , como combinação linear de polinômios do tipo*

$$Y = \{x_1 \cdots x_4, x_{i_1} \cdots x_{i_r} [x_i, x_j] x_{j_1} \cdots x_{j_s}\}$$

onde

$$r + s = 2, 0 \leq s \leq 2, i > j < i_1 < \cdots < i_r, j_1 < \cdots < j_s.$$

*Mostraremos que os elementos de  $Y$  são linearmente independentes módulo  $Id(A_4)$ . Para este exemplo específico, tomamos  $n = 4$ . Fixemos  $0 \leq s \leq 2$  e denotemos  $I = \{i, j, i_1 \cdots, i_r\}$  e  $J = \{j_1, \cdots, j_s\}$  nas condições dos elementos de  $Y$  tais que  $I \cup J = \{1, \cdots, n\}$  e  $I \cap J = \emptyset$ .*

*As possibilidades para  $I$  e  $J$  como acima (com elementos ordenados) seguem no quadro abaixo:*

$s$	$J = \{j_1, j_2   j_1 < j_2\}$	$I = \{i, j, i_1, i_2   i > j < i_1 < i_2\}$
0	$\emptyset$	$\{2, 1, 3, 4\}$
	$\emptyset$	$\{3, 1, 2, 4\}$
	$\emptyset$	$\{4, 1, 2, 3\}$
1	$\{1\}$	$\{3, 2, 4\}$
	$\{1\}$	$\{4, 2, 3\}$
1	$\{2\}$	$\{3, 1, 4\}$
	$\{2\}$	$\{4, 1, 3\}$
1	$\{3\}$	$\{2, 1, 4\}$
	$\{3\}$	$\{4, 1, 2\}$
1	$\{4\}$	$\{2, 1, 3\}$
	$\{4\}$	$\{3, 1, 2\}$
2	$\{1, 2\}$	$\{4, 3\}$
	$\{1, 3\}$	$\{4, 2\}$
	$\{2, 3\}$	$\{4, 1\}$
	$\{1, 4\}$	$\{3, 2\}$
	$\{2, 4\}$	$\{3, 1\}$
	$\{3, 4\}$	$\{2, 1\}$

Vamos escrever  $f \in Id(A_4)$  de grau 4 como uma combinação linear de elementos de  $Y$  sobre  $F$ , que neste caso é da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
 f &= \alpha x_1 x_2 x_3 x_4 + \alpha_1 x_3 x_4 [x_2, x_1] + \alpha_2 x_2 x_4 [x_3, x_1] + \alpha_3 x_2 x_3 [x_4, x_1] \\
 &+ \alpha_{11}^1 x_4 [x_3, x_2] x_1 + \alpha_{12}^1 x_3 [x_4, x_2] x_1 + \alpha_{11}^2 x_4 [x_3, x_1] x_2 + \alpha_{12}^2 x_3 [x_4, x_1] x_2 \\
 &+ \alpha_{11}^3 x_2 [x_4, x_1] x_3 + \alpha_{12}^3 x_4 [x_2, x_1] x_3 + \alpha_{11}^4 x_3 [x_2, x_1] x_4 + \alpha_{12}^4 x_2 [x_3, x_1] x_4 \\
 &\quad + \alpha_2^1 [x_4, x_3] x_1 x_2 + \alpha_2^2 [x_4, x_2] x_1 x_3 + \alpha_2^3 [x_4, x_1] x_2 x_3 \\
 &\quad + \alpha_2^4 [x_3, x_2] x_1 x_4 + \alpha_2^5 [x_3, x_1] x_2 x_4 + \alpha_2^6 [x_2, x_1] x_3 x_4.
 \end{aligned}$$

Observamos que a avaliação de  $f$  em  $x_t = e_{11}$  para todo  $t$  nos diz que  $\alpha = 0$ . Reescrevemos  $f$  e consideramos avaliações em elementos de acordo com os conjuntos  $I$  e  $J$ , ou seja, considerando  $I$  e  $J$  fixos. Por exemplo, para  $s = 1$  podemos tomar  $J = \{3\}$ ,  $I = \{4, 1, 2\}$  e a avaliação em  $x_1 = e_{11}$ ,  $x_4 = e_{12}$ ,  $x_2 = e_{11}$  e  $x_3 = E_1$ , obtemos

$$\alpha_{11}^3 = 0.$$

A repetição deste argumento se dá em função do valor assumido por  $s$ , ou seja, o raciocínio indutivo sobre  $s$  com  $I$  e  $J$  fixados nos levará a concluir que todos os

coeficientes na combinação linear acima são nulos, garantindo a independência linear desejada e ao trabalhar com um caso geral ( $f$  identidade de grau  $n$  qualquer), chegaremos a conclusão:  $Q = Id(A_4)$ , como queríamos.

**Teorema 3.12.** Para  $k \geq 3$ , temos:

1.  $Id(A_k) = \langle [x_1, x_2] [x_3, x_4], [x_1, x_2] x_3 \cdots x_{k+1} \rangle_T$ .
2.  $\{x_1 \cdots x_n, x_{i_1} \cdots x_{i_r} [x_i, x_j] x_{j_1} \cdots x_{j_s} : r + s = n - 2, s < k - 1, i > j < i_1 < \cdots < i_r, j_1 < \cdots < j_s\}$  é uma base de  $P_n \text{ mod } P_n \cap Id(A_k)$ .
3.  $Id(A_k^*) = \langle [x_1, x_2] [x_3, x_4], x_3 \cdots x_{k+1} [x_1, x_2] \rangle_T$ .
4.  $c_n(A_k) = c_n(A_k^*) = 1 + \sum_{j=0}^{k-2} \binom{n}{j} (n - j - 1) \approx qn^{k-1}$ , onde  $q \in \mathbb{Q}$  é uma constante não nula.

**Prova:** Seja  $Q = \langle [x_1, x_2] [x_3, x_4], [x_1, x_2] x_3 \cdots x_{k+1} \rangle_T$ . Sabemos que  $A_k$  é subálgebra de  $A_k^{(1)}$  e, pelo Teorema 3.8,  $Id(A_k^{(1)}) = \langle [x_1, x_2] x_3 \cdots x_{k+1} \rangle_T$ . Logo

$$[x_1, x_2] x_3 \cdots x_{k+1} \in Id(A_k).$$

Além disso, como  $[A_k, A_k] \subset \text{span}\{e_{12}, e_{13}, \dots, e_{1k}\}$ , segue que  $[x_1, x_2][x_3, x_4]$  também é uma identidade de  $A_k$ . Então  $Q \subset Id(A_k)$ .

Seja  $f = f(x_1, \dots, x_n)$  multilinear de grau  $n$ . Sabemos que  $f$  módulo  $[x_1, x_2][x_3, x_4]$  é uma combinação linear de polinômios do tipo

$$[x_k, x_{j_1}, \dots, x_{j_{n-m-1}}] x_{i_1} \cdots x_{i_m},$$

onde  $i_1 < \cdots < i_m, j_1 < \cdots < j_{n-m-1}, k > j_1, m \neq n - 1$ . Logo,  $f$  pode ser escrito, módulo  $Q$ , como uma combinação linear de elementos do conjunto

$$Y = \{x_1 \cdots x_n, x_{i_1} \cdots x_{i_r} [x_i, x_j] x_{j_1} \cdots x_{j_s}\}$$

onde  $r + s = n - 2, s < k - 1, i > j < i_1 < \cdots < i_r, j_1 < \cdots < j_s$ .

Mostraremos que os elementos de  $Y$  são linearmente independentes módulo  $Id(A_k)$ .

Fixemos  $0 \leq s < k - 2$  e denotemos  $I = \{i, j, i_1, \dots, i_r\}$  e  $J = \{j_1, \dots, j_s\}$  nas condições dos elementos de  $Y$  tais que  $I \cup J = \{1, \dots, n\}$  e  $I \cap J = \emptyset$ .

Seja  $f \in Id(A_k)$  uma combinação linear de elementos de  $Y$  sobre  $F$ , ou seja,

$$f = \alpha x_1 \cdots x_n + \sum_{s=0}^{k-2} \sum_{I,J} \alpha_{I,J} x_{i_1} \cdots x_{i_r} [x_i, x_j] x_{j_1} \cdots x_{j_s} \equiv 0.$$

Avaliando em  $x_i = e_{11}$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ , obtemos

$$f(e_{11}, \dots, e_{11}) = \alpha e_{11}^n = \alpha e_{11} = 0,$$

logo devemos ter  $\alpha = 0$  e reescrevemos  $f$  como

$$f = \sum_{s=0}^{k-2} \sum_{I,J} \alpha_{I,J} x_{i_1} \cdots x_{i_r} [x_i, x_j] x_{j_1} \cdots x_{j_s} \equiv 0.$$

Agora, fixando  $I, J$ , usamos indução sobre  $s$  e avaliamos em  $x_j = e_{11}, x_i = e_{12}, x_{i_m} = e_{11}$  para  $1 \leq m \leq r$  e  $x_{j_p} = E_1$  para  $1 \leq p \leq s$  e obtemos:

$$0 = \sum_{s=0}^{k-2} \alpha_{I,J} e_{12} E_1^s$$

Como  $0 \leq s < k - 2$  está fixo e temos que  $E_1^s \neq 0$ , esta avaliação no polinômio  $f$  nos dá  $\alpha_{I,J} = 0$ .

Portanto os elementos de  $Y$  são linearmente independentes módulo  $P_n \cap Id(A_k)$ . Uma vez que  $Q \subset Id(A_k)$ , temos que

$$P_n \cap Id(A_k) \supseteq P_n \cap Q$$

segue daí que  $Id(A_k) = Q$  e os elementos de  $Y$  formam uma base para  $P_n$  módulo  $P_n \cap Id(A_k)$ . Usando uma simples contagem dos elementos desta base, obtemos

$$c_n(A_k) = 1 + \sum_{j=0}^{k-2} \binom{n}{j} (n - j - 1) \approx \frac{1}{(k-2)!} n^{k-1}, n \rightarrow \infty.$$

Finalmente, como já tínhamos observado anteriormente, sabemos que  $f \in Id(A_k)$  se, e somente se,  $f^* \in Id(A_k^*)$ . Assim temos que

$$Id(A_k^*) = \langle [x_1, x_2] [x_3, x_4], x_3 \cdots x_{k+1} [x_1, x_2] \rangle_T \quad \text{e} \quad c_n(A_k^*) = c_n(A_k).$$

□

Nos lemas a seguir, apresentaremos as identidades e a sequência de codimensões da soma direta entre duas das subálgebras de  $UT_k$  apresentadas até o momento. Acrescentamos a informação sobre a base de  $P_n \text{ mod } P_n \cap Id(A)$ , onde  $A = N_u \oplus A_k$ , pois nos será útil no próximo capítulo. A demonstração do lema a seguir segue os mesmos passos da prova do teorema anterior e encontra-se em [18]. As provas dos outros lemas se baseiam num raciocínio semelhante e também serão omitidas.

**Lema 3.13.** *Seja  $A = N_u \oplus A_k$ , com  $u \geq 3, k \geq 2$ . Então*

$$1. Id(A) = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4], [x_1, \dots, x_u]x_{u+1} \cdots x_{u+k-1} \rangle_T.$$

$$2. \{x_1 \cdots x_n, x_{p_1} \cdots x_{p_r} [x_i, x_{j_1}, \dots, x_{j_{u-1}}] x_{i_1} \cdots x_{i_s}, [x_j, x_{n_1}, \dots, x_{n_t}] x_{m_1} \cdots x_{m_q} :$$

$u + r + s = n, s < k - 1, i > j_1 < \cdots < j_{u-1} < p_1 < \cdots < p_r, i_1 < \cdots < i_s,$   
 $t < u - 1, t + q = n - 1, j > n_1 < \cdots < n_t, m_1 < \cdots < m_q\}$  é uma base de  $P_n \text{ mod } P_n \cap Id(A)$ .

$$3. c_n(A) = 1 + \sum_{j=0}^{k-2} \binom{n}{j} (n - j - 1) + \sum_{t=2}^{u-1} \binom{n}{t} (t - 1) \approx cn^{q-1}, \text{ onde}$$

$q = \max\{u, k\}$  e  $c \in \mathbb{Q}$  é uma constante não nula.

**Lema 3.14.** *Seja  $A = N_u \oplus A_k^*$ , com  $u \geq 3, k \geq 2$ . Então*

$$1. Id(A) = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4], x_{u+1} \cdots x_{u+k-1} [x_1, \dots, x_u] \rangle_T.$$

$$2. c_n(N_u \oplus A_k^*) = c_n(N_u \oplus A_k).$$

**Lema 3.15.** *Seja  $A = A_k \oplus A_t^*$ , com  $k, t \geq 2$ . Então*

$$1. Id(A) = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4], x_3 \cdots x_{t+1} [x_1, x_2] x_{t+2} \cdots x_{t+k} \rangle_T.$$

$$2. c_n(A) \approx cn^{q-1}, \text{ onde } q = \max\{k, t\} \text{ e } c \in \mathbb{Q} \text{ é uma constante não nula.}$$

**Lema 3.16.** *Seja  $A = N_u \oplus A_k \oplus A_t^*$ , com  $u \geq 3, k, t \geq 2$ . Então*

$$1. Id(A) = \langle [x_1, x_2][x_3, x_4], x_{u+1} \cdots x_{u+t-1} [x_1, \dots, x_u] x_{u+t} \cdots x_{u+t+k-2} \rangle_T.$$

$$2. c_n(A) \approx cn^{q-1}, \text{ onde } q = \max\{u, k, t\} \text{ e } c \in \mathbb{Q} \text{ é uma constante não nula.}$$

### 3.3 Álgebras de Crescimento Lento das Codimensões

O estudo sobre as subvariedades das variedades de crescimento quase polinomial, feito por La Mattina em [18], tem como base os artigos [6] e [8], publicados em 2005 e em 2007, respectivamente. O primeiro apresenta álgebras de crescimento lento das codimensões, ou seja, que têm crescimento no máximo cúbico, e o segundo faz um estudo sobre álgebras de matrizes de crescimento polinomial.

Em 2005, Giambruno e La Mattina apresentaram as álgebras de crescimento lento das codimensões abaixo. Vamos renomear estas álgebras de acordo com a nossa nomenclatura. Observe que a álgebra  $M_7$  não se encaixa no tipo de álgebras que tínhamos estudado até agora, mas será importante para a classificação de todas as subvariedades das variedades de crescimento quase polinomial.

$$M_1 = \begin{pmatrix} 0 & F \\ 0 & F \end{pmatrix} = A_2^*, \quad M_2 = \begin{pmatrix} F & F \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = A_2$$

$$M_3 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & a & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in F \right\} = N_3, \quad M_4 = \begin{pmatrix} F & F & F \\ 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_3$$

$$M_5 = \begin{pmatrix} 0 & F & F \\ 0 & 0 & F \\ 0 & 0 & F \end{pmatrix} = A_3^*, \quad M_6 = \begin{pmatrix} 0 & F & F \\ 0 & F & F \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = A_3^{(2)}$$

$$M_7 = \left\{ \begin{pmatrix} a & b & c \\ 0 & 0 & d \\ 0 & 0 & a \end{pmatrix} \mid a, b, c, d \in F \right\}$$

Vale a pena ressaltar o seguintes resultados contidos em [6] e [30].

**Lema 3.17.** 1.  $Id(M_6) = \langle z[x, y]w \rangle_T$ .

2.  $c_n(M_6) = c_n(M_7) = n(n - 1)$ .



### 3.4 Variedades Minimais

Vamos ver nesta seção que algumas das subálgebras de  $\mathcal{G}$  e  $UT_2$  geram variedades minimais, de acordo com a definição abaixo.

**Definição 3.18.** *Seja  $\mathcal{V}$  uma variedade de álgebras. Dizemos que  $\mathcal{V}$  é uma variedade minimal de crescimento polinomial se  $c_n(\mathcal{V}) \approx qn^k$ , para algum  $k \geq 1$ ,  $q > 0$  e para qualquer subvariedade própria  $\mathcal{W} \subset \mathcal{V}$  temos  $c_n(\mathcal{W}) \approx q'n^t$ , com  $t < k$ .*

Dito de outro modo, seja  $A$  um álgebra de crescimento polinomial com  $c_n(A) \approx qn^k$ , para algum  $k \geq 1$ ,  $q > 0$ . Então  $A$  gera uma variedade minimal se para qualquer álgebra  $B$  tal que  $var(B) \subsetneq var(A)$ , tivermos  $c_n(B) \approx q'n^t$ , com  $t < k$ .

As álgebras apresentadas neste capítulo são importantes, não só porque aparecem na classificação das subvariedades próprias de  $var(\mathcal{G})$  e  $var(UT_2)$ , mas também porque geram variedades minimais, como mostraremos a seguir. Antes mostraremos os seguintes lemas técnicos.

**Lema 3.19.** *Seja  $A \in var(UT_2)$  uma álgebra unitária. Se  $c_k^p(A) = 0$  para algum  $k \geq 2$ , então  $c_m^p(A) = 0$ , para todo  $m \geq k$ .*

**Prova:** Se  $k$  é par, pelo Lema 2.18, segue que  $c_m^p(A) = 0$ , para todo  $m \geq k$ . Agora se  $k$  é ímpar, ou seja,  $c_{2t+1}^p(A) = 0$  para algum  $t \geq 1$ , é suficiente mostrar que  $c_{2t+2}^p(A) = 0$ , ou seja,  $\Gamma_{2t+2} \in Id(A)$  e usar o caso geral novamente.

Note que, usando a substituição  $y \rightarrow [x_{\sigma(p)}, x_{\sigma(p+1)}]$  feita no Lema 2.18, temos que todo polinômio de  $\Gamma_{2t+2}$  é uma consequência dos polinômios de  $\Gamma_{2t+1}$  e do comutador  $[x_1, x_2] \cdots [x_{2t+1}, x_{2t+2}]$ . Como  $c_{2t+1}^p(A) = 0$  e  $[x_1, x_2][x_3, x_4] \in Id(A)$ , pois  $A \in var(UT_2)$ , temos que

$$\Gamma_{2t+1}, [x_1, x_2] \cdots [x_{2t+1}, x_{2t+2}] \subset Id(A)$$

e, portanto,  $\Gamma_{2t+2} \in Id(A)$  e segue o resultado.

□

No próximo resultado, trabalhamos com álgebras do tipo  $A = F + J$ , onde  $J = J(A)$  é o radical de Jacobson de  $A$ . Recordemos a decomposição

$$J = J_{00} \oplus J_{01} \oplus J_{10} \oplus J_{11}$$

dada no Teorema 2.31.

**Lema 3.20.** *Seja  $A = F + J$  uma  $F$ -álgebra com  $J = J_{00} + J_{01} + J_{10} + J_{11}$ . Se  $A$  satisfaz  $[x_1, \dots, x_r] \equiv 0$  para algum  $r \geq 3$ , então  $J_{10} = J_{01} = 0$  e  $A = (F + J_{11}) \oplus J_{00}$ .*

**Prova:** De fato, observe que  $J_{01} = [J_{01}, \underbrace{F, \dots, F}_{r-1}] = 0$  e  $J_{10} = [J_{10}, \underbrace{F, \dots, F}_{r-1}] = 0$ .

Portanto  $A = (F + J_{11}) \oplus J_{00}$ .

□

Tendo em mãos os dois lemas anteriores e conhecendo o T-ideal e a sequência de codimensões das álgebras  $\mathcal{G}_{2k}$  e  $N_k$ , estamos em condições de mostrar que estas álgebras geram variedades minimais.

**Teorema 3.21.** *Para qualquer  $k \geq 3$ ,  $N_k$  gera uma variedade minimal.*

**Prova:** Suponha que a álgebra  $A \in \text{var}(N_k)$  gera uma subvariedade de  $\text{var}(N_k)$  tal que  $c_n(A) \approx qn^{k-1}$ , para algum  $q > 0$ . Provaremos que  $A \sim_{PI} N_k$ , completando a prova.

Como  $A$  tem crescimento polinomial das codimensões, pelo Teorema 2.30, podemos assumir que

$$A = B_1 \oplus \dots \oplus B_m$$

tem dimensão finita, onde  $B_1, \dots, B_m$  são tais que  $\dim \frac{B_i}{J(B_i)} \leq 1$ . Como

$$c_n(A) \leq c_n(B_1) + \dots + c_n(B_m)$$

e  $c_n(A) \approx qn^{k-1}$ , existe alguma subálgebra  $B_i$  tal que  $c_n(B_i) \approx bn^{k-1}$ ,  $b > 0$ . Assim, temos que

$$\text{var}(N_k) \supset \text{var}(A) \supset \text{var}(F + J(B_i)) \supset \text{var}(F + J_{11}(B_i)).$$

Agora, como  $B_i \in \text{var}(N_k)$ , temos que  $[x_1, \dots, x_k] \equiv 0$  é uma identidade de  $B_i$  e, pelo Lema 3.20, temos que  $B_i = F + J(B_i) = (F + J_{11}(B_i)) \oplus J_{00}(B_i)$ .

Uma vez que  $J_{00}(B_i)$  é nilpotente, temos que  $c_n(B_i) = c_n(F + J_{11}(B_i))$ , para  $n$  suficientemente grande. Logo, para mostrar que  $A \sim_{PI} N_k$ , basta mostrar que  $F + J_{11}(B_i) \sim_{PI} N_k$ . Note que  $F + J_{11}(B_i)$  é unitária, deste modo podemos assumir  $A$  unitária inicialmente.

Sobre  $N_k$ , pelo Teorema 3.6, sabemos que

$$c_n(N_k) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} c_i^p(N_k) = 1 + \sum_{j=2}^{k-1} \binom{n}{j} (j-1).$$

Para cada  $i = 2, \dots, k-1$ , seja

$$f = [x_2, x_1] \underbrace{x_1 \cdots x_1}_{i-2}$$

o vetor de altura máxima associado à partição  $\lambda = (i-1, 1) \vdash i$ . Avaliando  $f$  nos elementos  $a_1 = (e_{11} + e_{22} + \dots + e_{kk}) + e_{12}$  e  $a_2 = e_{2k}$  de  $N_k$ , obtemos  $f(a_1, a_2) = e_{1k} \neq 0$ , ou seja,  $f$  não é uma identidade de  $N_k$ . Logo, para  $i = 2, \dots, k-1$ , o cocaracter  $\chi_{(i-1,i)}$  participa do  $i$ -ésimo cocaracter próprio  $\chi_i^p(N_k)$  com multiplicidade não nula. Desde que, pelo Teorema 3.6,  $c_i^p(N_k) = i-1$  para  $2 \leq i \leq k-1$ , segue que  $\chi_i^p(N_k) = \chi_{(i-1,i)}$ .

Agora, uma vez que  $A$  é unitária e  $c_n(A) \approx qn^{k-1}$ , temos que

$$c_n(A) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} c_i^p(A)$$

e pelo Lema 3.19, devemos ter  $c_i^p(A) \neq 0$  para todo  $2 \leq i \leq k-1$ .

Por hipótese,  $A \in \text{var}(N_k)$ , ou seja,  $\text{Id}(A) \supset \text{Id}(N_k)$ . Assim temos um isomorfismo entre  $\frac{\Gamma_i}{\Gamma_i \cap \text{Id}(A)}$  e um módulo quociente de  $\frac{\Gamma_i}{\Gamma_i \cap \text{Id}(N_k)}$ . Assim, se  $\chi_i^p(A) = \sum_{\lambda \vdash i} m_\lambda \chi_\lambda$  e  $\chi_i^p(N_k) = \sum_{\lambda \vdash i} m'_\lambda \chi_\lambda$ , devemos ter  $m_\lambda \leq m'_\lambda$  para todo  $\lambda \vdash i$ . Pelo que argumentamos acima, para todo  $2 \leq i \leq k-1$  temos  $\chi_i^p(N_k) = \chi_{(i-1,i)}$  e  $c_i^p(A) \neq 0$ , obtemos  $\chi_i^p(A) = \chi_{(i-1,i)}$  também. Então

$$c_n(A) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} c_i^p(A) = 1 + \sum_{j=2}^{k-1} \binom{n}{j} (j-1) = c_n(N_k).$$

Portanto  $A$  e  $N_k$  têm a mesma sequência das codimensões e, uma vez que  $\text{Id}(A) \supset \text{Id}(N_k)$ , segue daí a igualdade  $\text{Id}(N_k) = \text{Id}(A)$ , concluindo a demonstração.

□

**Teorema 3.22.** *Para qualquer  $k \geq 1$ ,  $\mathcal{G}_{2k}$  gera uma variedade minimal.*

**Prova:** Seja  $A \in \text{var}(\mathcal{G}_{2k})$  e suponha que  $c_n(A) \approx qn^{2k}$ , para algum  $q > 0$ . Vamos mostrar que  $A \sim_{PI} \mathcal{G}_{2k}$ . como na demonstração do teorema anterior, obtemos que  $A$  é uma álgebra unitária. Como  $A \in \text{var}(\mathcal{G}_{2k})$ , usando o Teorema 3.2, temos que  $c_{2j+1}^p(A) = 0$  para  $j \geq 0$  e

$$c_n(A) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} c_i^p(A) = \sum_{j=0}^k \binom{n}{2j} c_{2j}^p(A).$$

Agora pelo Lema 2.18, devemos ter  $c_{2j}^p(A) \neq 0$  para todo  $j = 0, \dots, k$ , caso contrário, não teríamos  $c_n(A) \approx qn^{2k}$ . Além disso, como  $A \in \text{var}(\mathcal{G}_{2k})$  temos que  $\text{Id}(\mathcal{G}_{2k}) \subset \text{Id}(A)$ , então  $c_{2j}^p(A) \leq c_{2j}^p(\mathcal{G}_{2k}) = 1$ . Segue daí que  $c_n(A) = c_n(\mathcal{G}_{2k})$  para todo  $n$  e, portanto,  $A \sim_{PI} \mathcal{G}_{2k}$ .

□

Antes de mostrarmos que  $A_k$  e  $A_k^*$  geram variedades minimais, precisamos de mais alguns resultados a respeito de álgebras do tipo  $A = F + J$ .

**Lema 3.23.** *Seja  $A = F + J \in \text{var}(UT_2)$ . Então  $J_{10}J_{01} = J_{01}J_{10} = J_{01}[J_{11}, J_{11}] = [J_{11}, J_{11}]J_{10} = J_{10}[J_{00}, J_{00}] = [J_{00}, J_{00}]J_{01} = 0$ .*

**Prova:** A prova segue imediatamente, basta observar que  $J_{01} = [J_{01}, F]$ ,  $J_{10} = [J_{10}, F]$  e que  $[x_1, x_2][x_3, x_4]$  é uma identidade de  $A$ .

□

**Lema 3.24.** *Se  $A = F + J \in \text{var}(A_k)$ , então  $J_{01} = [J_{11}, J_{11}] = 0$ . Similarmente, se  $A = F + J \in \text{var}(A_k^*)$ , então  $J_{10} = [J_{11}, J_{11}] = 0$ .*

**Prova:** Note que  $J_{01} = [J_{01}, F] \underbrace{F \cdots F}_{k-1}$ ,  $[J_{11}, J_{11}] \underbrace{F \cdots F}_{k-1} = [J_{11}, J_{11}]$ , e use a identidade  $[x_1, x_2]x_3 \cdots x_{k+1} \in \text{Id}(A_k)$  para mostrar que  $J_{01} = [J_{11}, J_{11}] = 0$ . Analogamente, observe que  $J_{10} = \underbrace{F \cdots F}_{k-1}[J_{10}, F]$ ,  $[J_{11}, J_{11}] = \underbrace{F \cdots F}_{k-1}[J_{11}, J_{11}]$  e use a identidade  $x_3 \cdots x_{k+1}[x_1, x_2] \in \text{Id}(A_k^*)$  para mostrar que  $J_{10} = [J_{11}, J_{11}] = 0$ .

□

**Lema 3.25.** 1. Seja  $A = F + J \in \text{var}(A_k)$ . Se  $c_n(A) \approx qn^{k-1}$ , para algum  $q > 0$ , então  $A \sim_{PI} A_k$ .

2. Seja  $A = F + J \in \text{var}(A_k^*)$ . Se  $c_n(A) \approx qn^{k-1}$ , para algum  $q > 0$ , então  $A \sim_{PI} A_k^*$ .

**Prova:** Apresentaremos apenas a prova do primeiro item, pois a demonstração do segundo item é semelhante. Seja  $A \in \text{var}(A_k)$ , pelo lema anterior, devemos ter  $A = F + J_{11} + J_{10} + J_{00}$  e  $[J_{11}, J_{11}] = 0$ . Suponha que  $J_{10}J_{00}^{k-2} = 0$ . Se  $J^m = 0$ , afirmamos que para todo  $n \geq m$

$$f = x_{k+1} \cdots x_n [x_1, x_2] x_3 \cdots x_k \in \text{Id}(A).$$

De fato, pela multilinearidade de  $f$ , podemos avaliar  $x_1, \dots, x_n$  em uma base de  $A$  que seja união das bases de  $J_{11}, J_{10}, J_{00}$  e  $1 = 1_F$ . Como  $J^m = 0$ , se todas as variáveis de  $f$  são avaliadas em  $J$ , obtemos que o resultado da avaliação é nulo. Logo ao menos uma variável deve ser avaliada em 1. Desde que  $[J_{11}, J_{11}] = [F, J_{11}] = 0$ , precisamos checar a avaliação de  $x_1$  e  $x_2$  em  $F$  e  $J_{10}$  ou em  $J_{11}$  e  $J_{10}$ , respectivamente. Nos dois casos, como  $J_{10}J_{00}^{k-2} = 0$  obtemos a avaliação nula. Logo  $f$  é uma identidade de  $A$ .

Agora, como  $A \in \text{var}(A_k)$ , pelo Teorema 3.12, uma base para  $\frac{P_n}{P_n \cap \text{Id}(A)}$  está contida na base apresentada para  $\frac{P_n}{P_n \cap \text{Id}(A_k)}$ ,

$$\{x_1 \cdots x_n, x_{i_1} \cdots x_{i_r} [x_i, x_j] x_{j_1} \cdots x_{j_s}\}$$

onde  $r + s = n - 2, s < k - 1, i > j < i_1 < \cdots < i_r, j_1 < \cdots < j_s$ . Além disso, mostramos que  $x_{k+1} \cdots x_n [x_1, x_2] x_3 \cdots x_k \in \text{Id}(A)$ , segue que, para  $n \geq m$ , uma base de  $\frac{P_n}{P_n \cap \text{Id}(A)}$  está contida no conjunto

$$\{x_1 \cdots x_n, x_{i_1} \cdots x_{i_r} [x_i, x_j] x_{j_1} \cdots x_{j_s}\}$$

onde  $r + s = n - 2, i > j < i_1 < \cdots < i_r, j_1 < \cdots < j_s$ , agora com  $s < k - 2$ . Assim temos que

$$c_n(A) \leq 1 + \sum_{j=0}^{k-3} \binom{n}{j} (n - j - 1) \approx qn^{k-2},$$

contradizendo a hipótese inicial de que  $c_n(A) \approx qn^{k-1}$ .

Portanto devemos ter  $J_{10}J_{00}^{k-2} \neq 0$ , ou seja, existem elementos  $a \in J_{10}$ ,  $b_1, \dots, b_{k-2} \in J_{00}$  tais que  $ab_1 \cdots b_{k-2} \neq 0$ . Tomemos  $f \in Id(A)$  um polinômio multilinear de grau  $n$ . Pelo Teorema 3.12, podemos escrever  $f$ , módulo  $A_k$ , como

$$f = \alpha x_1 \cdots x_n + \sum_{s=0}^{k-2} \sum_{I,L} \alpha_{I,J} x_{i_1} \cdots x_{i_r} [x_i, x_j] x_{j_1} \cdots x_{j_s} + g,$$

onde  $g \in Id(A_k)$ ,  $I = \{i, j, i_1, \dots, i_r\}$ ,  $L = \{j_1, \dots, j_s\}$ ,  $I \cup L = \{1, \dots, n\}$ ,  $I \cap L = \emptyset$  e  $i > j < i_1 < \dots < i_r, j_1 < \dots < j_s$ .

Avaliando em  $x_i = 1_F$  para todo  $i = 1, \dots, n$ , obtemos  $\alpha = 0$ . Depois, usando indução sobre  $s$ , fixados  $I, J$ , avaliamos em  $x_{i_m} = 1_F$ , para  $1 \leq m \leq r$ ,  $x_j = 1_F, x_i = a$  e  $x_{i_p} = b_p$ , para  $1 \leq p \leq s$ , obtemos  $\alpha_{I,J} = 0$ . Portanto  $f = g \in Id(A_k)$  e  $Id(A) = Id(A_k)$ . Assim, mostramos que  $A \sim_{PI} A_k$

□

**Teorema 3.26.** *Para qualquer  $k \geq 2$ ,  $A_k$  e  $A_k^*$  geram variedades minimais.*

**Prova:** Seja  $A \in var(A_k)$  tal que  $c_n(A) \approx qn^{k-1}$  para algum  $q > 0$ . Como  $A$  tem crescimento polinomial das codimensões, como anteriormente, podemos assumir que

$$A = B_1 \oplus \dots \oplus B_m$$

tem dimensão finita, onde  $B_1, \dots, B_m$  são tais que  $dim \frac{B_i}{J(B_i)} \leq 1$ , onde  $J(B_i)$  denota o radical de Jacobson de  $B_i$ , para  $1 \leq i \leq m$ . Ou seja,  $B_i = F + J(B_i)$  ou  $B_i = J(B_i)$  é nilpotente. Como

$$c_n(A) \leq c_n(B_1) + \dots + c_n(B_m),$$

existe  $B_i$  tal que  $c_n(B_i) \approx bn^{k-1}$ , com  $b > 0$ . Como  $B_i \in var(A_k)$ , pelo lema anterior, segue que  $B_i \sim_{PI} A_k$ . Assim temos que

$$var(A_k) = var(B_i) \subset var(A) \subset var(A_k)$$

e obtemos  $var(A) = var(A_k)$ . Portanto  $A_k$  gera uma variedade minimal. De modo análogo, podemos mostrar que  $A_k^*$  também gera uma variedade minimal.

□

## Capítulo 4

# Classificando Variedades

Finalmente, começaremos a classificar as subvariedades próprias da variedade gerada pela álgebra de Grassmann  $\mathcal{G}$  e da variedade gerada pela álgebra de matrizes  $2 \times 2$  triangulares superiores  $UT_2$ . Os resultados principais deste capítulo foram provados por La Mattina [18] em 2007 e revistos em [19] em 2008. No entanto, este trabalho começou em 2005 em conjunto com Giambruno, ver [6], ao classificar álgebras de crescimento lento das codimensões.

### 4.1 Variedades de Crescimento Lento

Nesta seção iremos classificar de acordo com [18], a menos de PI-equivalência, todas as álgebras que geram variedades de crescimento no máximo linear ou variedades de crescimento no máximo cúbico, caso sejam álgebras unitárias, sempre considerando  $F$  um corpo de característica zero.

**Teorema 4.1.** *Seja  $A$  uma  $F$ -álgebra unitária. Se  $c_n(A) \approx qn^k$ , para algum  $q \geq 1$  e  $k \leq 3$ , então ou  $A \sim_{PI} F$  ou  $A \sim_{PI} N_3$  ou  $A \sim_{PI} N_4$ .*

**Prova:** Como  $A$  é unitária, temos que

$$c_n(A) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{i} c_i^p(A).$$

Suponha  $c_n(A) \leq qn^3$ . Temos que  $c_0^p(A) = \dim \Gamma_0 = 1$ ,  $c_1^p(A) = \dim \Gamma_1 = 0$  e  $c_2^p(A) \leq \dim \Gamma_2 \leq 1$ , assim analisaremos os possíveis valores de  $k$ .

Se  $k = 0$  então  $c_n(A) = 1$ , logo  $A \sim_{PI} F$ .

Se  $k = 2$  então  $c_n(A) = 1 + \frac{n(n-1)}{2} = c_n(N_3)$ . Como  $c_3^p(A) = c_4^p(A) = 0$ , segue que  $Id(N_3) \subset Id(A)$ , logo  $A \sim_{PI} N_3$ .

Agora, se  $k = 3$  temos que  $c_3^p(A) = 3 - 1 = 2$ , então

$$c_n(A) = 1 + \frac{n(n-1)}{2} + 2 \frac{n(n-1)(n-2)}{3!}.$$

Como  $c_4^p(A) = 0$ , segue que  $c_m^p(A) = 0, \forall m \geq 4$ , então  $\Gamma_4 \subset Id(A)$ . Mas, pelo Teorema 3.6,  $\Gamma_4$  é base para as identidades de  $N_4$ , logo  $Id(N_4) \subset Id(A)$  e temos  $A \sim_{PI} N_4$ .

□

Observe que se  $A$  é uma álgebra unitária então as suas codimensões não podem crescer linearmente. Segue imediatamente deste teorema o seguinte corolário.

**Corolário 4.2.** *Seja  $A$  uma  $F$ -álgebra unitária. Se  $c_n(A) \approx qn^k$ , para algum  $q \geq 1$  e  $k \leq 3$ , então*

$$\text{ou } c_n(A) = 1 \text{ ou } c_n(A) = 1 + \frac{n(n-1)}{2} \text{ ou } c_n(A) = 1 + \frac{n(n-1)}{2} + \frac{n(n-1)(n-2)}{3}.$$

Logo, ou  $q = 1$  ou  $q = \frac{1}{2}$  ou  $q = \frac{1}{3}$ .

Agora vamos classificar as álgebras, não necessariamente unitárias, de crescimento no máximo linear. Recordemos que se  $var(A)$  é uma variedade de crescimento polinomial das codimensões, podemos assumir que  $A$  é de dimensão finita e que  $A = B_1 \oplus \dots \oplus B_m$  com  $B_i = J(B_i)$  ou  $B_i = F + J(B_i)$ . Assim, comecemos nosso estudo com álgebras do tipo  $A = F + J$ , onde  $J = J(A)$ . Aqui usaremos frequentemente a decomposição do radical de Jacobson:

$$J = J_{00} + J_{01} + J_{10} + J_{11},$$

vista no capítulo anterior. As demonstrações dos lemas a seguir foram baseadas em [6].

**Lema 4.3.** *Seja  $A = F + J$  uma  $F$ -álgebra. Se  $[J_{11}, J_{11}] \neq 0$ , então  $N_3 \in var(A)$ .*



**Prova:** Inicialmente, observe que  $A' = F + J_{11}$  é uma subálgebra de  $A$ . Provaremos que  $N_3 \in \text{var}(A')$ . Portanto, sem perda de generalidade, podemos assumir  $A = F + J$ , com  $J = J_{11}$ .

Pela hipótese,  $J$  não é comutativo, então  $J^2 \neq 0$ . Seja  $k > 2$  o menor inteiro tal que  $J^k = 0$  e  $J^{k-1} \neq 0$ . Usaremos indução sobre  $k$ .

Se  $k = 3$  então  $N_3 \sim_{PI} A$ . De fato, como  $1_F$  comuta com  $J = J_{11}$ ,  $F$  comuta com  $J$ , logo  $[A, A] = [J, J] \subset J^2$ . Segue que

$$[A, A, A] \subset [J^2, F + J] = [J^2, J] \subset J^3 = 0$$

$$[A, A][A, A] \subset J^4 = 0.$$

Assim, pelo Teorema 3.6,  $Id(N_3) \subset Id(A)$ . Reciprocamente, se  $f \in Id(A)$  é um polinômio multilinear de grau  $n$ , pelo Teorema 3.6, podemos escrever

$$f = \alpha x_1 \cdots x_n + \sum_{\substack{i < j \\ i_1 < \cdots < i_{n-2}}} \alpha_{ij} x_{i_1} \cdots x_{i_{n-2}} [x_i, x_j] + g$$

onde  $g \in Id(N_3)$ .

Avaliando em  $x_i = 1_F$ , para todo  $i = 1, \dots, n$ , obtemos  $\alpha = 0$ . Como  $[J, J] \neq 0$ , existem dois elementos  $a, b \in J$  tais que  $[a, b] \neq 0$ . Suponha que  $\alpha_{i_0, j_0} \neq 0$ , para algum  $i_0, j_0 \in \{1, \dots, n\}$ . Tomemos  $c_1, \dots, c_n \in A$  com  $c_{i_0} = a, c_{j_0} = b$  e  $c_r = 1_F$ , para todo  $r \neq i_0, j_0$ . Então

$$f(c_1, \dots, c_n) = \alpha_{i_0, j_0} [a, b] \neq 0,$$

o que contradiz  $f \in Id(A)$ . Portanto, devemos ter  $f = g \in Id(N_3)$ , ou seja,  $Id(A) = Id(N_3)$  e  $N_3 \sim_{PI} A$ .

Agora, suponhamos  $k > 3$  e  $[J^{k-2}, J] \neq 0$ . Seja  $a \in J^{k-2}$  e  $b \in J$  tais que  $[a, b] \neq 0$  e consideremos  $B$  a subálgebra de  $A$ , gerada por  $\{1_F, a, b\}$ . Então  $B$  é gerada linearmente pelos elementos  $\{1_F, a, b, ab, ba, b^2, \dots, b^{k-2}\}$ , segue daí que  $[B, B] \subset J^{k-1}$  o que implica

$$[B, B, B] = 0 \text{ e } [B, B][B, B] = 0,$$

ou seja,  $Id(N_3) \subset Id(B)$ . A outra inclusão é provada de modo similar ao caso anterior. Então obtemos  $N_3 \sim_{PI} B$ , ou seja,  $N_3 \in \text{var}(A)$ .

Portanto podemos assumir  $[J^{k-2}, J] = 0$ . Suponhamos inicialmente que  $[J, J] \subset J^{k-2}$ . Como por hipótese temos  $J^k = 0$ , segue que

$$[A, A, A] = [J, J, J] \subset [J^{k-2}, J] = 0,$$

$$[A, A][A, A] = [J, J][J, J] \subset J^{k-2}J^2 = J^k = 0.$$

Logo  $Id(N_3) \subset Id(A)$ . Agora, considerando  $f \in Id(A)$  um polinômio multilinear de grau  $n$ , mais uma vez usando o Teorema 3.6, podemos escrever

$$f = \alpha x_1 \cdots x_n + \sum_{\substack{i < j \\ i_1 < \cdots < i_{n-2}}} \alpha_{ij} x_{i_1} \cdots x_{i_{n-2}} [x_i, x_j] + g$$

onde  $g \in Id(N_3)$ . Como existem, por hipótese,  $a, b \in J$  tais que  $[a, b] \neq 0$ , pelo mesmo processo acima, obtemos  $f = g \in Id(N_3)$ . Logo  $N_3 \sim_{PI} A$ , neste caso.

Para completar a prova, precisamos considerar o caso  $[J, J] \not\subset J^{k-2}$ . Isto nos diz que  $\bar{A} = A/J^{k-2}$  não é comutativa, pois

$$[\bar{A}, \bar{A}] = [J, J] + J^{k-2} \neq 0.$$

Como  $J(\bar{A}) = J_{11}(\bar{A})$ , segue que  $J(\bar{A}) = J/J^{k-2}$  não é comutativo e  $J(\bar{A})^{k-2} = 0$  com  $k > 4$ . Pela hipótese de indução,  $N_3 \in var(\bar{A})$  e como  $\bar{A} \in var(A)$ , segue que  $N_3 \in var(A)$ .

□

**Lema 4.4.** *Seja  $A = F + J$  uma  $F$ -álgebra com  $J_{11}$  comutativo.*

1. *Se  $J_{01} \neq 0$  então  $B = F + J_{01}$  ou  $B = F + J_{01} + J_{11}$  é uma subálgebra  $PI$ -equivalente à  $A_2^*$ .*
2. *Se  $J_{10} \neq 0$  então  $B = F + J_{10}$  ou  $B = F + J_{10} + J_{11}$  é uma subálgebra  $PI$ -equivalente à  $A_2$ .*

**Prova:** Nas condições do item 1, suponhamos  $J_{01} \neq 0$ . É claro que  $B = F + J_{01}$  e  $B = F + J_{01} + J_{11}$  são subálgebras de  $A$ . Como  $J_{11}$  é comutativo, temos que  $[J_{11}, J_{11}] = 0$ . Segue daí que  $[B, B] \subset J_{01}$  e então  $B[B, B] = 0$ . Portanto, pelo Corolário 3.10 temos  $Id(A_2^*) \subset Id(B)$ . Por outro lado, tomando  $f \in Id(B)$  multilinear, podemos escrever  $f$  como

$$f = \sum_{\substack{i_1=1 \\ i_2 < \cdots < i_n}}^n \alpha_{i_1} x_{i_1} \cdots x_{i_n} + g$$

com  $g \in Id(A_2^*)$ . Suponha que existe  $t \in \{1, \dots, n\}$  tal que  $\alpha_t \neq 0$ . Avaliando em  $c_i = 1_F$  para  $i \neq t$  e  $c_t = b \in J_{01}, b \neq 0$  teremos  $f(c_1, \dots, c_n) = \alpha_t b 1_F = \alpha_t b \neq 0$ , contradizendo que  $f \in Id(B)$ . Portanto,  $f = g \in Id(A_2^*)$  e então  $A_2^* \sim_{PI} B$ .

De modo análogo, temos que  $B = F + J_{10}$  e  $B = F + J_{10} + J_{11}$  são subálgebras de  $A$ . Se  $J_{10} \neq 0$  e  $[J_{11}, J_{11}] = 0$  então  $[B, B] \subset J_{10}$ , logo  $[B, B]B = 0$ , e obtemos  $Id(A_2) \subset Id(B)$ , pelo Corolário 3.10. Para mostrar a inclusão contrária usamos o mesmo processo do caso anterior. E concluimos que  $A_2 \sim_{PI} B$ .

□

**Lema 4.5.** *Seja  $A = F + J$  uma  $F$ -álgebra.*

1. *Se  $J_{10}J_{00} \neq 0$  então  $A_3 \in var(A)$ .*
2. *Se  $J_{00}J_{01} \neq 0$  então  $A_3^* \in var(A)$ .*

**Prova:** Suponhamos que  $J_{10}J_{00} \neq 0$  e seja  $k \geq 1$  o maior inteiro tal que  $J_{10}J_{00}^k \neq 0$ . Então existem  $a \in J_{10}, b \in J_{00}^k$  tais que  $ab \neq 0$ . Seja  $B$  a subálgebra de  $A$  gerada por  $\{1_F, a, b\}$ . Como  $ab^2 = ba = a^2 = a1_F = 1_Fb = b1_F = 0$  vemos que  $[x, y]zw \in Id(B)$ , logo  $Id(A_3) \subset Id(B)$ , pelo Teorema 3.12. Agora, seja  $f \in Id(B)$  multilinear de grau  $n$ . Mais uma vez, pelo Teorema 3.12, podemos escrever

$$f = \sum_{\substack{i, j=1 \\ i_1 < \dots < i_{n-2}}}^n \alpha_{ij} x_{i_1} \cdots x_{i_{n-2}} x_i x_j + g,$$

onde  $g \in Id(A_3)$ , e suponha que existem  $i_0, j_0 \in \{1, \dots, n\}$  tais que  $\alpha_{i_0, j_0} \neq 0$ . Avaliemos em  $c_1, \dots, c_n \in B$  tais que  $c_{i_0} = a, c_{j_0} = b$  e  $c_r = 1_F$ , para todo  $r \neq i_0, j_0$ . Então  $f(c_1, \dots, c_n) = \alpha_{i_0, j_0} ab \neq 0$ , o que é uma contradição. Então devemos ter  $f \in Id(A_3)$  e  $Id(B) = Id(N_3)$ . Portanto  $A_3 \in var(A)$ . O item 2 é provado similarmente ao item 1.

□

**Lema 4.6.** *Seja  $A = F + J$  tal que  $J_{10} \neq 0, J_{01} \neq 0$  e  $J_{10}J_{01} = J_{01}J_{10} = 0$ . Se  $[J_{11}, J_{11}] = 0$ , então  $B = F + J_{10} + J_{01} + J_{11} \sim_{PI} A_2 \oplus A_2^*$ .*

**Prova:** Sob as hipóteses, temos que  $B = F + J_{10} + J_{01} + J_{11}$  é uma subálgebra de  $A$ . Como  $[B, B] \subset J_{01} + J_{10}$ , temos que  $z[x, y]w, [x, y][z, w] \in Id(B)$  e então  $Id(A_2 \oplus A_2^*) \subset Id(B)$ , pelo Lema 3.15. Agora,

$$Id(B) \subset Id(F + J_{10} + J_{11}) \cap Id(F + J_{01} + J_{11}) \subset Id(A_2) \cap Id(A_2^*)$$

pelo Lema 4.4, temos que  $Id(B) \subset Id(A_2 \oplus A_2^*)$ . Logo  $B \sim_{PI} A_2 \oplus A_2^*$ .

□

**Lema 4.7.** *Seja  $A = F + J$ . Se  $J_{10}J_{00} = J_{00}J_{01} = 0$  e  $J_{01}J_{10} \neq 0$  então  $M_6 \in var(A)$ .*

**Prova:** Recordemos que, pelo Lema 3.17, temos  $Id(M_6) = \langle z[x, y]w \rangle_T$ . Das relações  $J_{10}J_{00} = J_{00}J_{01} = 0$  e  $J_{01}J_{10} \neq 0$ , segue que  $J_{10}J_{01}$  é um ideal bilateral de  $A$ . Então  $\bar{A} = \frac{A}{J_{10}J_{01}}$  satisfaz as hipóteses do lema e ainda temos que  $J(\bar{A})_{01}J(\bar{A})_{10} \neq 0$  e  $J(\bar{A})_{10}J(\bar{A})_{01} = 0$ . Provaremos que  $M_6 \in var(\bar{A})$ , portanto podemos assumir que  $A$  satisfaz  $J_{01}J_{10} \neq 0$  e  $J_{10}J_{01} = 0$ . Seja  $a \in J_{01}, b \in J_{10}$  tais que  $ab \neq 0$  e  $B$  a subálgebra gerada por  $\{1_F, a, b\}$ . Como  $ba = aba = 1_F a = b1_F = 0$  então  $[B, B] \subset span\{a, b, ab\}$ . Segue daí que  $B[B, B] \subset span\{b, ab\}$  e  $B[B, B]B = 0$ . Logo  $Id(M_6) \subset Id(B)$ .

Reciprocamente, tomando  $f \in Id(B)$  multilinear de grau  $n$ , podemos escrever

$$f = \sum_{\substack{i, j=1 \\ i_1 < \dots < i_{n-2}}}^n \alpha_{ij} x_i x_{i_1} \cdots x_{i_{n-2}} x_j + g,$$

onde  $g \in Id(M_6)$ . Suponha que existem  $i_0, j_0 \in \{1, \dots, n\}$  tais que  $\alpha_{i_0, j_0} \neq 0$ . Avaliemos  $f$  em elementos  $c_1, \dots, c_n \in B$  tais que  $c_{i_0} = a, c_{j_0} = b$  e  $c_r = 1_F$ , para todo  $r \neq i_0, j_0$ . Então  $f(c_1, \dots, c_n) = \alpha_{i_0, j_0} ab \neq 0$ , o que é uma contradição, pois  $f \in Id(B)$ . Então devemos ter  $f \in Id(M_6)$  e  $M_6 \sim_{PI} B$ . Logo  $M_6 \in var(A)$ .

□

**Lema 4.8.** *Seja  $A = F + J$  com  $J_{10}J_{01} \neq 0$  e  $J_{01}J_{10} = 0$  então  $M_7 \in var(A)$ .*

**Prova:** Sejam  $a \in J_{01}, b \in J_{10}$  tais que  $ab \neq 0$ . Então a álgebra  $B$  gerada por  $1_F, a, b$  sobre  $F$  é isomorfa a  $M_7$ . De fato, como  $J_{01}^2 = J_{10}^2 = J_{01}J_{10} = 0$ , segue que

$a^2 = b^2 = ba = 0$ , então  $B = \text{span}\{1_F, a, b, ab\}$ . Considerando

$$\begin{aligned} \varphi : M_7 &\rightarrow B \\ 1_F &\mapsto e_{11} + e_{33} \\ a &\mapsto e_{12} \\ b &\mapsto e_{23} \\ ab &\mapsto e_{13} \end{aligned}$$

temos que  $\phi$  é um isomorfismo. Portanto  $M_7 \in \text{var}(A)$ .

□

**Teorema 4.9.** *Seja  $A$  uma  $F$ -álgebra. Então as seguintes condições são equivalentes:*

1.  $c_n(A) \leq kn$  para todo  $n \geq 1$ , para alguma constante  $k$ ;
2.  $N_3, A_3, A_3^*, M_6, M_7 \notin \text{var}(A)$ ;
3.  $A$  é PI-equivalente ou a  $N$  ou  $C \oplus N$  ou  $A_2 \oplus N$  ou  $A_2^* \oplus N$  ou  $A_2 \oplus A_2^* \oplus N$  onde  $N$  é uma álgebra nilpotente e  $C$  é uma álgebra comutativa.

**Prova:** Assumindo que a sequência das codimensões é linearmente limitada, temos que

$$N_3, A_3, A_3^*, M_6, M_7 \notin \text{var}(A),$$

pelo Teoremas 3.6 e 3.12 e pelo Lema 3.17. Portanto o item 1 implica o item 2.

Agora assumindo válido o item 2, como  $N_3 \in \text{var}(UT_2)$ ,  $G_2 \in \text{var}(\mathcal{G})$  e  $N_3 \sim_{PI} G_2$ , então  $UT_2, \mathcal{G} \notin \text{var}(A)$ . Logo, pelo Teorema 2.25,  $A$  tem crescimento polinomial das codimensões.

Desde que podemos assumir que  $F$  é algebricamente fechado, pelo Teorema 2.30, temos

$$A = B_1 \oplus \dots \oplus B_m$$

com  $\dim \frac{B_i}{J(B_i)} \leq 1$ . Suponha que  $B_i$  não é nilpotente para algum  $i$ , ou seja,  $B_i = F + J$ , onde  $J = J(B_i)$ . Como  $N_3 \notin \text{var}(A)$ , pelo Lema 4.3 devemos ter  $[J_{11}, J_{11}] = 0$ . Agora, pelos Lemas 4.5, 4.7 e 4.8, como  $A_3, A_3^*, M_6, M_7 \notin \text{var}(A)$  temos que  $J_{10}J_{00} = J_{00}J_{01} = J_{01}J_{10} = J_{10}J_{01} = 0$ . Sob estas condições,  $J_{00}$  é um ideal bilateral nilpotente de  $B_i$  e podemos escrever  $B_i = (F + J_{01} + J_{10} + J_{11}) \oplus J_{00}$ . Agora, usando os Lemas 4.4 e 4.6 podem ocorrer os seguintes casos:

1. se  $J_{01} \neq 0$  e  $J_{10} = 0$  então  $B_i \sim_{PI} A_2^* \oplus N$ ;
2. se  $J_{01} = 0$  e  $J_{10} \neq 0$  então  $B_i \sim_{PI} A_2 \oplus N$ ;
3. se  $J_{01} = J_{10} = 0$  então  $B_i \sim_{PI} C \oplus N$ ;
4. se  $J_{01} \neq 0$  e  $J_{10} \neq 0$  então  $B_i \sim_{PI} A_2 \oplus A_2^* \oplus N$ .

Aplicando cada caso a cada um dos  $B'_i$ s na decomposição de  $A$ , obtemos que  $A$  é PI-equivalente ou a  $N$  ou  $C \oplus N$  ou  $A_2 \oplus N$  ou  $A_2^* \oplus N$  ou  $A_2 \oplus A_2^* \oplus N$  onde  $N$  é uma álgebra nilpotente e  $C$  é uma álgebra comutativa. Isto prova que o item 2 implica o item 3.

Finalmente, o item 3 implica o item 1, uma vez que todas as álgebras envolvidas têm a sequência das codimensões linearmente limitada.

□

Este teorema também nos permite classificar todas as possíveis sequências de codimensões linearmente limitadas.

**Corolário 4.10.** *Seja  $A$  uma  $F$ -álgebra tal que  $c_n(A) \leq kn$  para todo  $n \geq 1$  e para alguma constante  $k$ . Então existe  $n_0$  tal que para todo  $n > n_0$  devemos ter ou  $c_n(A) = 0$  ou  $c_n(A) = 1$  ou  $c_n(A) = 2n - 1$ .*

## 4.2 Subvariedades de $var(\mathcal{G})$

Também usamos o Teorema 4.9 para começar a classificar as subvariedades da variedade gerada por  $\mathcal{G}$ . Uma vez que  $A_k, A_k^* \notin var(\mathcal{G})$  para todo  $k \geq 2$ , primeiramente obtemos o seguinte resultado:

**Corolário 4.11.** *Seja  $A \in var(\mathcal{G})$  tal que  $c_n(A) \leq kn$ , para todo  $n \geq 1$  e para alguma constante  $k$ . Então  $A$  é PI-equivalente ou a  $N$  ou  $C \oplus N$ , onde  $N$  é uma álgebra nilpotente e  $C$  é uma álgebra comutativa.*

Agora vamos classificar, a menos de PI-equivalência, todas as subvariedades da variedade gerada pela álgebra de Grassmann.

**Teorema 4.12.** *Seja  $A \in var(\mathcal{G})$ . Então ou  $A \sim_{PI} \mathcal{G}$  ou  $A \sim_{PI} N$  ou  $A \sim_{PI} N \oplus C$  ou  $A \sim_{PI} \mathcal{G}_{2k} \oplus N$ , para algum  $k \geq 1$ , onde  $N$  é uma álgebra nilpotente e  $C$  é uma álgebra comutativa.*

**Prova:** Se  $A \sim_{PI} \mathcal{G}$  não há nada a provar. Suponha que  $A$  gere uma subvariedade própria de  $var(\mathcal{G})$ , então, pelo Teorema 2.25,  $A$  tem crescimento polinomial das codimensões, ou seja,  $c_n(A) \approx qn^r$ , para algum  $r \geq 0$  e  $q$  constante. Se  $r \leq 1$ , pelo corolário anterior, segue que  $A \sim_{PI} N$  ou  $A \sim_{PI} C \oplus N$  onde  $C$  é uma álgebra comutativa e  $N$  é nilpotente.

Seja  $r > 1$ . Podemos assumir  $F$  algebricamente fechado e  $A = B_1 \oplus \dots \oplus B_m$  com  $\dim \frac{B_i}{J(B_i)} \leq 1$ . Como  $A$  satisfaz  $[x_1, x_2, x_3] \equiv 0$ , pelo Lema 3.20,  $B_i = (F + J_{11}) \oplus J_{00}$  ou  $B_i$  é nilpotente. Logo  $A = B_1 \oplus \dots \oplus B_m = B \oplus N$ , onde  $B$  é uma álgebra unitária. Então

$$c_n(A) = c_n(B) = \sum_{i=0}^r \binom{n}{i} c_i^p(B)$$

para  $n$  suficientemente grande. Como  $[x_1, x_2, x_3] \in Id(A)$ , temos que  $c_{2j+1}^p = 0$ , para todo  $j \geq 1$ , logo  $r = 2k$  para algum  $k \geq 1$  e

$$c_n(B) = \sum_{i=0}^k \binom{n}{2i} c_i^p(B),$$

$c_n(B) \approx qn^{2k}$ . Além disso, como  $c_{2k+2}(B) = 0$ , temos que  $\Gamma_{2k+2} \subset Id(B)$ , então pelo Teorema 3.2 temos que  $B \in var(\mathcal{G}_{2k})$ .

Agora, pelo Teorema 3.22,  $\mathcal{G}_{2k}$  gera uma variedade minimal e  $c_n(\mathcal{G}_{2k}) \approx q'n^{2k}$ , então devemos ter  $B \sim_{PI} \mathcal{G}_{2k}$ . Logo  $A \sim_{PI} \mathcal{G}_{2k} \oplus N$ .

□

Os próximos dois corolários seguem imediatamente do Teorema 4.12. Eles nos permitem classificar todas as sequências de codimensões das álgebras que pertencem à variedade gerada por  $\mathcal{G}$  e classificar as álgebras que geram subvariedades minimais da variedade gerada por  $\mathcal{G}$ , ao usar o Teorema 3.22.

**Corolário 4.13.** *Seja  $A \in var(\mathcal{G})$  tal que  $var(A) \subsetneq var(\mathcal{G})$ . Então existe um natural  $n_0$  tal que para todo  $n > n_0$  devemos ter*

$$\text{ou } c_n(A) = 0 \text{ ou } c_n(A) = 1 \text{ ou } c_n(A) = \sum_{j=0}^k \binom{n}{2j} \approx \frac{1}{(2k)!} n^{2k}$$

para algum  $k \geq 1$ .

**Corolário 4.14.** *Uma álgebra  $A \in var(\mathcal{G})$  gera uma variedade minimal se, e somente se,  $A \sim_{PI} \mathcal{G}_{2k}$ , para algum  $k \geq 1$ .*

### 4.3 Subvariedades de $var(UT_2)$

Vamos provar agora os resultados obtidos por La Mattina em [18] que classificam todas as subvariedades de  $var(UT_2)$ , a menos de PI-equivalência. Começemos analisando as subvariedades próprias geradas por álgebras unitárias.

**Lema 4.15.** *Seja  $A \in var(UT_2)$  uma álgebra unitária tal que  $var(A) \subsetneq var(UT_2)$ . Então  $A \sim_{PI} N_k$ , para algum  $k \geq 2$ .*

**Prova:** Como  $A$  gera uma variedade própria de  $UT_2$ , pelo Teorema 2.25, segue que  $A$  tem crescimento polinomial, digamos  $c_n(A) \approx qn^{k-1}$ , para algum  $q$  constante e  $k \geq 1$ . Se  $k \leq 4$ , pelo Teorema 4.1 temos que  $A \sim_{PI} N_k$  para  $k \in \{2, 3, 4\}$ .

Suponha  $k > 4$ , como  $A$  é unitária temos  $c_n(A) = \sum_{i=0}^{k-1} \binom{n}{i} c_i^p(A)$ . Assim  $c_k^p(A) = 0$ , ou seja,  $\Gamma_k \subset Id(A)$  e temos que  $[x_1, \dots, x_k] \in Id(A)$ , então  $Id(N_k) \subset Id(A)$  pelo Teorema 3.6. Contudo  $N_k$  gera uma variedade minimal, como vimos no Teorema 3.21, e  $c_n(N_k) \approx an^{k-1}$  para alguma constante  $a$ . Então devemos ter  $A \sim_{PI} N_k$ .

□

Para classificar todas as subvariedades próprias de  $var(UT_2)$ , faremos um estudo semelhante à classificação das álgebras de crescimento linear começando com álgebras do tipo  $A = F + J$ . Novamente estaremos nos apoiando no Teorema 2.31, sobre a decomposição do radical e considerando  $J = J_{00} \oplus J_{01} \oplus J_{10} \oplus J_{00}$ .

**Lema 4.16.** *Seja  $A = F + J \in var(UT_2)$  então  $A \sim_{PI} (F + J_{11} + J_{10} + J_{00}) \oplus (F + J_{11} + J_{01} + J_{00})$ .*



**Prova:** Denotemos por  $B_1 = F + J_{11} + J_{10} + J_{00}$  e  $B_2 = F + J_{11} + J_{01} + J_{00}$ . Como  $B_1$  e  $B_2$  são subálgebras de  $A$ , temos que

$$Id(A) \subset Id(B_1 \oplus B_2) = Id(B_1) \cap Id(B_2).$$

Agora observe que  $J_{01} = [J_{01}, F]$  e  $J_{10} = [J_{10}, F]$ , logo se  $A = F + J \in var(UT_2)$ , usando que  $[x_1, x_2][x_3, x_4] \in Id(UT_2)$  temos que  $J_{10}J_{01} = J_{01}J_{10} = 0$ . Segue daí que o produto de quaisquer dois elementos de  $A$  é um elemento de  $B_1 \oplus B_2$ , então  $Id(B_1 \oplus B_2) \subset Id(A)$ . Portanto  $A \sim_{PI} B_1 \oplus B_2$ .

□

**Lema 4.17.** *Seja  $J_{11}$  comutativo.*

1. *Se  $A = F + J_{11} + J_{10} + J_{00} \in var(UT_2)$  com  $J_{10} \neq 0$  então existe uma constante  $k \geq 2$  tal que  $A \sim_{PI} A_k \oplus N$ , para alguma álgebra nilpotente  $N$ ;*
2. *Se  $A = F + J_{11} + J_{01} + J_{00} \in var(UT_2)$  com  $J_{01} \neq 0$  então existe uma constante  $k \geq 2$  tal que  $A \sim_{PI} A_k^* \oplus N$ , para alguma álgebra nilpotente  $N$ .*

**Prova:** Iremos demonstrar apenas o primeiro item, a prova do segundo item é similar. Seja  $A = F + J_{11} + J_{10} + J_{00} \in var(UT_2)$  com  $J_{10} \neq 0$  e  $J_{11}$  comutativo. Se  $J_{10}J_{00} = 0$  então  $A = (F + J_{11} + J_{10}) \oplus J_{00}$ . Como  $J_{11}$  é comutativo, pelo Lema 4.4, temos que  $(F + J_{11} + J_{10}) \sim_{PI} A_2$ . Logo  $A \sim_{PI} A_2 \oplus N$ , onde  $N = J_{00}$  é nilpotente.

Suponha que  $J_{10}J_{00} \neq 0$  e tome  $t$  o maior inteiro tal que  $J_{10}J_{00}^t \neq 0$ . Se  $[J_{00}, J_{00}]J_{00}^{t+1} = 0$  então devemos ter

$$[A, A] = J_{10} + [J_{00}, J_{00}], \quad [A, A]A^{t+1} = 0$$

então  $[x_1, x_2]x_3 \dots x_{t+3} \in Id(A)$  e, pelo Teorema 3.12,  $Id(A_{t+2}) \subset Id(A)$ . Agora como  $J_{10}J_{00}^t \neq 0$  existem  $a \in J_{10}$ , e  $b_1, \dots, b_t \in J_{00}$  tais que  $ab_1 \dots b_t \neq 0$ , usando o mesmo argumento da prova do Teorema 3.26, devemos ter  $Id(A) \subset Id(A_{t+2})$ . Logo  $A \sim_{PI} A_{t+2}$ .

Suponhamos, agora, que  $[J_{00}, J_{00}]J_{00}^{t+1} \neq 0$ . Mostraremos que  $A \sim_{PI} A_{t+2} \oplus J_{00}$ . Seja  $U$  o ideal à direita gerado por  $[J_{00}, J_{00}]$ . Como  $A \in var(UT_2)$ , temos que

$$J_{10}[J_{00}, J_{00}] = [J_{10}, F][J_{00}, J_{00}] = 0,$$

então temos que  $AU = UA$ , logo  $U$  é um ideal bilateral de  $A$ . Considere  $\bar{A} = \frac{A}{U}$ . Como  $J_{10}J_{00}^{t+1} = 0$ , temos que

$$[A, A]A^{t+1} = [J_{00}, J_{00}]J_{00}^{t+1},$$

então  $[x_1, x_2]x_3 \dots x_{t+3} \in Id(\bar{A})$  e  $Id(A_{t+2}) \subset Id(\bar{A})$ . Além disso, novamente como na demonstração do Teorema 3.26, verificamos que  $Id(\bar{A}) \subset Id(A_{t+2})$  e  $\bar{A} \sim_{PI} A_{t+2}$ . Mas  $Id(A) \subset Id(\bar{A}) = Id(A_{t+2})$  então  $Id(A) \subset Id(A_{t+2}) \cap Id(J_{00})$ . Logo  $Id(A) \subset Id(A_{t+2} \oplus J_{00})$ .

Reciprocamente, seja  $f \in Id(A_{t+2} \oplus J_{00})$  multilinear de grau  $n$ . Suponha  $n \leq t + 2$ . Como  $f \in Id(A_{t+2})$ , então devemos ter que  $f$  é consequência de  $[x_1, x_2][x_3, x_4] \in Id(A)$ , logo  $f \in Id(A)$ .

Agora, se  $n > t + 2$  então, pela Proposição 1.46 e pelo Teorema 2.4, podemos escrever

$$\begin{aligned} f = & \alpha x_1 \cdots x_n + \sum_{l=0}^t \sum_{I,L} \alpha_{I,L} x_{i_1} \cdots x_{i_r} [x_i, x_j] x_{j_1} \cdots x_{j_l} + \\ & + \sum_{p>t} \sum_{M,N} \alpha_{M,N} x_{m_1} \cdots x_{m_s} [x_k, x_l] x_{n_1} \cdots x_{n_p} + g \end{aligned}$$

onde  $g \in \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T$  e  $I = \{i, j, i_1, \dots, i_r\}$ ,  $L = \{j_1, \dots, j_l\}$ ,  $M = \{k, l, m_1, \dots, m_s\}$ ,  $N = \{n_1, \dots, n_p\}$ ,  $I \cup L = M \cup N = \{1, \dots, n\}$ ,  $I \cap L = M \cap N = \emptyset$  e  $i > j < i_1 < \dots < i_r$ ,  $j_1 < \dots < j_l$ ,  $k > l < m_1 < \dots < m_s$ ,  $n_1 < \dots < n_p$ .

Pelo Teorema 3.12 temos que  $g$  e  $\sum_{p>t} \sum_{M,N} \alpha_{M,N} x_{m_1} \cdots x_{m_s} [x_i, x_j] x_{n_1} \cdots x_{n_p}$  são identidades de  $A_{t+2}$ , pois  $p \geq t + 1$ . Além disso, o mesmo teorema nos diz que os monômios que aparecem na primeira soma são linearmente independentes módulo  $Id(A_{t+2})$ . Como  $f \in Id(A_{t+2})$  devemos ter  $\alpha = \alpha_{I,L} = 0$ . Segue que

$$f \equiv \sum_{p>t} \sum_{M,N} \alpha_{M,N} x_{m_1} \cdots x_{m_s} [x_k, x_l] x_{n_1} \cdots x_{n_p} \pmod{\langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T}.$$

Como  $f \in Id(J_{00})$ , a avaliação de  $f$  sobre  $J_{00}$  é nula. Além disso temos que  $J_{10}[J_{00}, J_{00}] = J_{10}J_{00}^{t+1} = 0$  e  $J_{11}$  é comutativo, segue daí que qualquer avaliação de  $f$  em  $A$  é nula. Logo  $f \in Id(A)$  e, portanto,  $A \sim_{PI} A_{t+2} \oplus J_{00}$ .

□

**Lema 4.18.** *Seja  $J_{11}$  não comutativo.*

1. *Se  $A = F + J_{11} + J_{10} + J_{00} \in \text{var}(UT_2)$  com  $J_{10} \neq 0$  então existem constantes  $k \geq 2, u > 2$  tais que  $A \sim_{PI} N_u \oplus A_k \oplus N$ , para alguma álgebra nilpotente  $N$ ;*
2. *Se  $A = F + J_{11} + J_{01} + J_{00} \in \text{var}(UT_2)$  com  $J_{01} \neq 0$  então existem constantes  $k \geq 2, u > 2$  tais que  $A \sim_{PI} N_u \oplus A_k^* \oplus N$ , para alguma álgebra nilpotente  $N$ .*

**Prova:** Seja  $A = F + J_{11} + J_{10} + J_{00} \in \text{var}(UT_2)$  com  $J_{10} \neq 0$  e  $J_{11}$  não comutativo. Seja  $B = F + J_{10} + J_{00}$ . Como  $J_{11}(B) = 0$  é comutativo, pelo lema anterior, temos que  $B \sim_{PI} A_{t+2} \oplus J_{00}$ , para algum  $t \geq 0$ . Como  $D = F + J_{11}$  é unitária, pelo Lema 4.15, temos que  $F + J_{11} \sim_{PI} N_u$ , para algum  $u > 2$ . Provaremos que  $A \sim_{PI} N_u \oplus A_{t+2} \oplus J_{00}$ . Se  $f \in \text{Id}(A)$ , como  $B$  e  $D$  são subálgebras de  $A$ ,  $f \in \text{Id}(D) \cap \text{Id}(B) = \text{Id}(D \oplus B)$ , logo  $f \in \text{Id}(N_u \oplus A_{t+2} \oplus J_{00})$ .

Reciprocamente, seja  $f \in \text{Id}(N_u \oplus A_{t+2} \oplus J_{00})$  multilinear de grau  $n$ . Se  $n < u + t + 1$ , como  $f \in \text{Id}(N_u \oplus A_{t+2})$ ,  $f$  deve ser uma consequência de

$$[x_1, x_2][x_3, x_4] \in \text{Id}(A),$$

logo  $f \in \text{Id}(A)$ . Agora se  $n \geq u + t + 1$ , pelo Teorema 2.4, escrevemos  $f$  como

$$\begin{aligned} f &= \alpha x_1 \cdots x_n + \sum_{d=0}^t \sum_{Z,V} \alpha_{Z,V} x_{z_1} \cdots x_{z_c} [x_k, x_{w_1}, \dots, x_{w_{u-1}}] x_{v_1} \cdots x_{v_d} + \\ &+ \sum_{l>t} \sum_{M,N} \gamma_{M,N} x_{m_1} \cdots x_{m_q} [x_i, x_{j_1}, \dots, x_{j_{u-1}}] x_{n_1} \cdots x_{n_l} + \\ &+ \sum_{s=1}^{u-2} \sum_{I,L} \beta_{I,L} [x_j, x_{k_1}, \dots, x_{k_s}] x_{l_1} \cdots x_{l_r} + g \end{aligned}$$

onde  $g \in \langle [x_1, x_2][x_3, x_4] \rangle_T$ ,  $Z = \{k, w_1, \dots, w_{u-1}, z_1, \dots, z_c\}$ ,  $V = \{v_1, \dots, v_d\}$ ,  $M = \{i, j_1, \dots, j_{u-1}, m_1, \dots, m_q\}$ ,  $N = \{n_1, \dots, n_l\}$ ,  $I = \{j, k_1, \dots, k_s\}$  e  $L = \{l_1, \dots, l_r\}$  são tais que  $Z \cup V = M \cup N = I \cup L = \{1, \dots, n\}$  e  $Z \cap V = M \cap N = I \cap L = \emptyset$ , com  $k > w_1 < \dots < w_{u-1} < z_1 < \dots < z_c, v_1 < \dots < v_d, i > j_1 < \dots < j_{u-1} < m_1 < \dots < m_q, n_1 < \dots < n_l, j > k_1 < \dots < k_s$  e  $l_1 < \dots < l_r$ . Como  $f$  é uma identidade de  $N_u \oplus A_{t+2}$  e os monômios que aparecem na primeira e na última soma são linearmente independentes módulo  $\text{Id}(N_u \oplus A_{t+2})$ , devemos ter  $\alpha = \alpha_{Z,V} = \beta_{I,L} = 0$ , para quaisquer  $Z, V, I, L$ . Logo temos

$$f = \sum_{l>t} \sum_{M,N} \gamma_{M,N} x_{m_1} \cdots x_{m_q} [x_i, x_{j_1}, \dots, x_{j_{u-1}}] x_{n_1} \cdots x_{n_l} + g$$

Como  $f \in Id(J_{00})$ , a avaliação de  $f$  sobre  $J_{00}$  é nula. Além disso, como no lema anterior, temos que

$$J_{10}[J_{00}, J_{00}] = [J_{11}, J_{11}]J_{10} = J_{10}J_{00}^{t+1} = 0, \underbrace{[J_{11}, \dots, J_{11}]}_u = 0.$$

Segue daí que qualquer avaliação sobre  $A$  é nula. Logo  $f \in Id(A)$  e temos  $A \sim_{PI} N_u \oplus A_k \oplus N$  com  $k \geq 2, u > 2$  constantes e  $N$  nilpotente. A demonstração do segundo caso é análoga a que acabamos de fazer.

□

**Lema 4.19.** *Seja  $A = F + J \in var(UT_2)$  com  $J_{10} \neq 0$  e  $J_{01} \neq 0$ . Então ou  $A \sim_{PI} A_k \oplus A_r^* \oplus N$  ou  $A \sim_{PI} N_u \oplus A_k \oplus A_r^* \oplus N$ , onde  $N$  é uma álgebra nilpotente, para  $k, r \geq 2$  e  $u \geq 3$  constantes.*

**Prova:** Pelo Lema 4.16 temos que  $A \sim_{PI} B_1 \oplus B_2$ , onde  $B_1 = F + J_{11} + J_{10} + J_{00}$  e  $B_2 = F + J_{11} + J_{01} + J_{00}$ . Usando os lemas anteriores, 4.17 e 4.18, ou  $B_1 \sim_{PI} A_k \oplus N$  ou  $B_1 \sim_{PI} N_u \oplus A_k \oplus N$ , onde  $N$  é uma álgebra nilpotente, para constantes  $k \geq 2, t > 2$ . Também temos que  $B_2 \sim_{PI} A_r^* \oplus N$  ou  $B_2 \sim_{PI} N_u \oplus A_r^* \oplus N$ , para  $r \geq 2, u > 2$ . Logo  $A \sim_{PI} A_k \oplus A_r^* \oplus N$  ou  $A \sim_{PI} N_u \oplus A_k \oplus A_r^* \oplus N$ , para  $k, r \geq 2$  e  $u > 2$  como queríamos.

□

Agora temos condições de classificar todas as subvariedades da variedade gerada por  $UT_2$ .

**Teorema 4.20.** *Seja  $A \in var(UT_2)$ . Então  $A$  é PI-equivalente a uma das seguintes álgebras:  $UT_2, N, N_u \oplus N, N_u \oplus A_k \oplus N, N_u \oplus A_k^* \oplus N, N_u \oplus A_k \oplus A_r^* \oplus N$ , onde  $N$  é uma álgebra nilpotente e  $u, k, r \geq 2$ .*

**Prova:** Se  $A \sim_{PI} UT_2$  não há nada para provar. Logo podemos assumir que  $A$  gera uma subvariedade própria de  $UT_2$  e, portanto,  $c_n(A)$  é polinomialmente limitada. Assim, novamente pelo Teorema 2.30, podemos assumir que

$$A = B_1 \oplus \dots \oplus B_m$$

com  $\dim \frac{B_i}{J(B_i)} \leq 1$ ,  $1 \leq i \leq m$ . Agora, se  $A$  não é nilpotente, então  $B_i = F + J$  para algum  $i$  e seja  $J(B_i) = J_{00} + J_{01} + J_{10} + J_{11}$ .

Agora consideramos todas as possíveis situações para  $J_{01}$ ,  $J_{10}$ ,  $J_{11}$  e usamos os lemas anteriores, ou seja, um dos seguintes casos ocorre:

1. Se  $J_{01} = J_{10} = 0$  então  $B_i$  é uma álgebra unitária e, pelo Lema 4.15,  $B_i \sim_{PI} N_{t_i} \oplus N$ ;
2. Se  $J_{11}$  é comutativo, pelo Lema 4.17,  $B_i \sim_{PI} A_k \oplus N$  ou  $B_i \sim_{PI} A_k^* \oplus N$ , caso  $J_{01} = 0$  ou  $J_{10} = 0$ , respectivamente;
3. Se  $J_{11}$  não é comutativo, pelo Lema 4.18,  $B_i \sim_{PI} N_u \oplus A_k \oplus N$  ou  $B_i \sim_{PI} N_u \oplus A_k^* \oplus N$ , caso  $J_{01} = 0$  ou  $J_{10} = 0$ , respectivamente;
4. Se  $J_{01} \neq 0$  e  $J_{10} \neq 0$  então  $B_i \sim_{PI} A_k \oplus A_r^* \oplus N$  ou  $B_i \sim_{PI} N_u \oplus A_k \oplus A_r^* \oplus N$ , pelo Lema 4.19,

onde em cada situação  $N$  é alguma álgebra nilpotente.

Como  $A = B_1 \oplus \dots \oplus B_m$ , combinando as situações possíveis, obtemos a conclusão desejada.

□

Também podemos classificar as álgebras que geram subvariedades minimais de  $var(UT_2)$ .

**Corolário 4.21.** *Uma álgebra  $A \in var(UT_2)$  gera uma variedade minimal se, e somente se, ou  $A \sim_{PI} N_u$  ou  $A \sim_{PI} A_k$  ou  $A \sim_{PI} A_k^*$ , para algum  $k \geq 2, u \geq 3$ .*

**Prova:** Se  $A$  é PI-equivalente à alguma das álgebras  $N_t, A_k, A_k^*, t \geq 3, k \geq 2$ , então pelos Teoremas 3.21 e 3.26  $A$  gera uma variedade minimal. A recíproca segue imediatamente do teorema anterior.

□

## 4.4 Considerações Finais

No capítulo inicial deste texto, apresentamos a álgebra de Grassmann e listamos algumas de suas propriedades. Uma delas afirmava que existem espaços vetoriais  $\mathcal{G}^{(0)}$  e  $\mathcal{G}^{(1)}$  tais que:

1.  $\mathcal{G} = \mathcal{G}^{(0)} \oplus \mathcal{G}^{(1)}$ ;
2.  $\mathcal{G}^{(0)}\mathcal{G}^{(0)} + \mathcal{G}^{(1)}\mathcal{G}^{(1)} \subset \mathcal{G}^{(0)}$ ;
3.  $\mathcal{G}^{(1)}\mathcal{G}^{(0)} + \mathcal{G}^{(0)}\mathcal{G}^{(1)} \subset \mathcal{G}^{(1)}$ .

Uma  $F$ -álgebra  $A$  que possui dois  $F$ -subespaços vetoriais  $A^{(0)}$  e  $A^{(1)}$  que têm as propriedades listadas acima de  $\mathcal{G}^{(0)}$  e  $\mathcal{G}^{(1)}$ , respectivamente, é o que chamamos de uma  $F$ -superálgebra.

**Definição 4.22.** *Dizemos que uma  $F$ -álgebra  $A$  é uma superálgebra se existem dois subespaços vetoriais  $A^{(0)}$  e  $A^{(1)}$ , tais que:*

1.  $A = A^{(0)} \oplus A^{(1)}$ ;
2.  $A^{(0)}A^{(0)} + A^{(1)}A^{(1)} \subset A^{(0)}$ ;
3.  $A^{(1)}A^{(0)} + A^{(0)}A^{(1)} \subset A^{(1)}$ .

Notemos que  $A^{(0)}$  é uma  $F$ -subálgebra de  $A$ , entretanto  $A^{(1)}$  não é uma  $F$ -álgebra. Denominamos o par  $(A^{(0)}, A^{(1)})$  como uma  $\mathbb{Z}_2$ -gradação de  $A$ . Por simplicidade, denominamos  $A^{(0)}$  como sendo a parte par e  $A^{(1)}$  como sendo a parte ímpar. Qualquer elemento  $a \in A$  é escrito como  $a_0 + a_1$  onde  $a_0 \in A^{(0)}$  e  $a_1 \in A^{(1)}$ . Dizemos que  $a_0$  e  $a_1$  são as parcelas homogêneas de  $a$ . Muitos autores costumam se referir às  $F$ -superálgebras como  $F$ -álgebras  $\mathbb{Z}_2$ -graduadas ou  $F$ -álgebras homogêneas.

A álgebra livre associativa  $F\langle X \rangle$  tem uma estrutura natural de superálgebra. Escrevemos  $X = Y \cup Z$ , a união disjunta de dois conjuntos enumeráveis. Se denotamos por  $F^0$  o subespaço de  $F\langle X \rangle$  gerado por todos os monômios nas variáveis de  $X$  tendo grau par nas variáveis de  $Z$  e por  $F^1$  o subespaço gerado por todos os monômios de grau ímpar nas variáveis de  $Z$ , então  $F\langle Y \cup Z \rangle = F^0 \oplus F^1$  é uma álgebra  $\mathbb{Z}_2$ -graduada, chamada superálgebra livre em  $Y$  e  $Z$  sobre  $F$ .

Dada uma superálgebra  $A$  dizemos que  $f(y_1, \dots, y_n, z_1, \dots, z_m) \in F\langle Y \cup Z \rangle$  é uma identidade graduada de  $A$  se

$$f(a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_m) = 0,$$

para todo  $a_1, \dots, a_n \in A^{(0)}, b_1, \dots, b_m \in A^{(1)}$  e denotamos por  $Id^{gr}(A)$  o conjunto das identidades graduadas satisfeitas por  $A$ . Temos que  $Id^{gr}(A)$  é um  $T_2$ -ideal, ou seja, é invariante sob todos os endomorfismos de  $F\langle Y \cup Z \rangle$  que preservam a  $\mathbb{Z}_2$ -gradação. Seja  $\mathcal{V}^{gr}$  uma variedade de superálgebras sobre  $F$ . Escrevemos  $\mathcal{V}^{gr} = var^{gr}(A)$  caso  $\mathcal{V}^{gr}$  é gerada pela superálgebra  $A$ , ou seja,

$$var^{gr}(A) = \{B \mid Id^{gr}(A) \subset Id^{gr}(B)\}.$$

É bem conhecido que, em característica zero, toda identidade graduada é equivalente a um sistema de identidades multilineares graduadas. Portanto se denotamos por

$$P_n^{gr} = span_F\{w_{\sigma(1)}, \dots, w_{\sigma(n)} \mid \sigma \in S_n, w_i = y_i \text{ ou } w_i = z_i, i = 1, \dots, n\}$$

o espaço dos polinômios multilineares graduados de grau  $n$  em  $y_1, z_1, \dots, y_n, z_n$  o estudo de  $Id^{gr}(A)$  equivale ao estudo de  $P_n^{gr} \cap Id^{gr}(A)$ , para todo  $n \geq 1$ . O inteiro não-negativo

$$c_n^{gr}(A) = dim \frac{P_n^{gr}}{P_n^{gr} \cap Id^{gr}(A)}, n \geq 1.$$

é chamado  $n$ -ésima codimensão graduada de  $A$ .

Assim como no caso ordinário, para uma superálgebra  $A$  também podemos definir a seqüência de cocaracteres graduados  $\{\chi_n^{gr}(A)\}_{n \geq 1}$  e a seqüência de cocomprimentos graduados  $\{l_n^{gr}(A)\}_{n \geq 1}$  e muitos resultados têm sido especulados a respeito destas seqüências nos últimos anos.

O leitor mais atento deve ter notado que toda  $F$ -álgebra é uma  $F$ -superálgebra com  $\mathbb{Z}_2$ -gradação trivial, ou seja,  $(A, \{0\})$ . Notemos que neste caso  $Id^{gr}(A) = \langle Id(A), z \rangle_{T_2}$ , onde  $Id(A) \subset F\langle Y \rangle$  são as identidades ordinárias da  $F$ -álgebra  $A$ .

Portanto a teoria das identidades graduadas generaliza a teoria das identidades polinomiais ordinárias. A relação entre as codimensões ordinárias e graduadas é a

seguinte: dada uma superálgebra  $A$ ,  $c_n(A) \leq c_n^{gr}(A)$  para todo  $n \geq 1$  e, caso  $A$  seja uma PI-álgebra então  $c_n^{gr}(A) \leq 2^n c_n(A)$ .

Denotamos por  $\mathcal{G}$  e  $UT_2$  a álgebra de Grassmann e a álgebra de matrizes triangulares superiores  $2 \times 2$ , respectivamente, com graduação trivial. Consideramos  $\mathcal{G}^{gr}$  a álgebra de Grassmann com graduação natural  $(\mathcal{G}^{(0)}, \mathcal{G}^{(1)})$ , como anteriormente. Escrevemos  $UT_2^{gr}$  para denotar a álgebra  $UT_2$  com graduação  $(UT_2^{(0)}, UT_2^{(1)})$ , onde  $UT_2^{(0)} = Fe_{11} + Fe_{22}$  e  $UT_2^{(1)} = Fe_{12}$ . Finalmente, seja  $F \oplus tF$  a álgebra comutativa com graduação  $(F, tF)$ , onde  $t^2 = 1$ . Em [9], temos a seguinte caracterização das variedades de superálgebras de crescimento polinomial:  $c_n^{gr}(\mathcal{V}^{gr}) \leq an^k$  se, e somente se,  $\mathcal{G}, \mathcal{G}^{gr}, UT_2, UT_2^{gr}, F \oplus tF \notin \mathcal{V}^{gr}$ .

Portanto  $var^{gr}(\mathcal{G}), var^{gr}(\mathcal{G}^{gr}), var^{gr}(UT_2), var^{gr}(UT_2^{gr})$  e  $var^{gr}(F \oplus tF)$  são as únicas variedades de superálgebras de crescimento quase polinomial. Como no caso graduado, temos que não existem superálgebras com crescimento intermediário das codimensões.

Em 2011, La Mattina classificou, em [21], todas as subvariedades das variedades de superálgebras de crescimento quase polinomial, dando um lista completa de superálgebras de dimensão finita gerando suas subvariedades próprias. Neste artigo, a autora estendeu a classificação feita para as variedades ordinárias de crescimento quase polinomial, que apresentamos neste texto.

A respeito de álgebras de crescimento polinomial, vimos a caracterização de Kemer:  $\{c_n(A)\}_{n \geq 1}$  é polinomialmente limitada se, e somente se,  $UT_2(F)$  e  $\mathcal{G}$  não pertencem a  $var(A)$ . Este resultado pode ser reformulado como o seguinte:  $c_n(A)$  é polinomialmente limitada se, e somente se,  $l_n(A) \leq k$ , para alguma constante  $k$  e para todo  $n \geq 1$ , o que foi provado por Mishchenko, Regev e Zaicev em [25].

Atualmente tem-se trabalhado buscando refinar o resultado acima dependendo de uma constante  $k$ . Em [7], Giambruno, La Mattina e Misso classificaram a menos de PI-equivalência as álgebras tais que  $l_n(A) \leq 2$ . Mais tarde, em [20], La Mattina aumentou a cota para 4 e classificou todas as álgebras tais que  $l_n(A) \leq 4$ . Mais recentemente, em [29], A.C. Vieira classificou as superálgebras que satisfazem  $l_n^{gr}(A) \leq 2$ . A classificação das subvariedades das variedades de superálgebras de crescimento quase polinomial feita por La Mattina, em [21], pode facilitar o trabalho para cotas maiores.



## Referências Bibliográficas

- [1] S.A. Amitsur and J. Levitzki. *Minimal identities for algebras*. Proc. Amer. Math. Soc. **1** (1950) 449-463.
- [2] M. Atiyah and I. Macdonald. *Introduction to commutative algebra*. Addison-Wesley, 1969.
- [3] C. W. Curtis and I. Reiner. *Representation theory of finite groups and associative algebras*. New York: Interscience Publishers, 1962.
- [4] V. Drensky. *Free Algebras and PI-Algebras*. Springer-Verlag Singapore, 2000.
- [5] V. Drensky and A. Regev. *Exact asymptotics behavior of the codimensions of some P.I. algebras*. Israel Journal of Mathematics **96** (1996) 231-242.
- [6] A. Giambruno and D. La Mattina. *PI-algebras with slow codimension growth*. Journal of Algebra **284** (2005) 371-391.
- [7] A. Giambruno, D. La Mattina and P. Misso. *Polynomial Identities on Superalgebras: Classifying Linear growth*. J. of Pure and Applied Algebra **207** (2006) 215-240.
- [8] A. Giambruno, D. La Mattina. and V.M. Petrogradsky. *Matrix algebras of polynomial codimension growth*. Israel Journal of Mathematics **158** (2007) 367-378.
- [9] A. Giambruno, S. Mishchenko and M. Zaicev. *Polynomial identities on superalgebras and almost polynomial growth*. Special issue dedicated to Alexei Ivanovich Kostrikin, Comm. Algebra **29** (2001) no. 9, 3787-3800.
- [10] A. Giambruno and M. Zaicev. *On codimension growth of finitely generated associative algebras*. Adv. Math., **140** (1998) 145-155.
- [11] A. Giambruno and M. Zaicev. *Asymptotics for the standard and Capelli identities*. Israel Journal of Mathematics. **135** (2003) 125-145.

- [12] A.Giambruno and M.Zaicev. *Polynomial Identities and Asymptotic Methods*. AMS Mathematical Surveys and Monographs, Vol 122 - Providence R.I., 2005.
- [13] A. Gutterman and A. Regev. *On the growth of identities*. Algebra (Moscow, 1998), Berlin (2000) 319-330.
- [14] P.R. Halmos. *Teoria Ingênua dos Conjuntos*. Editora Ciência Moderna, 2001.
- [15] A.R. Kemer. *Varieties of finite rank*. Proc. 15th All the Union Algebraic Conf., Krasnoyarsk 2, 1979.
- [16] A.R. Kemer. *Ideals of Identities of Associative Algebras*. AMS Translations of Math. Monographs. Vol 87, 1988.
- [17] D. Krakowski and A.Regev. *The polynomial identities of the Grassmann algebra*. Trans. Amer. Math. Soc. **181**(1973) 429-438.
- [18] D. La Mattina. *Varieties of almost polynomial growth: classifying their subvarieties*. Manuscripta Math. 123 (2007) 185-203.
- [19] D. La Mattina. *Varieties of algebras of polynomial growth*. Bollettino Unione Math. Ital. (9) I (2008) 525-538
- [20] D. La Mattina. *Characterizing varieties of colength  $\leq 4$* . Communications in Algebra **37** (2009) 1793-1807.
- [21] D. La Mattina. *Varieties of superalgebras of almost polynomial growth*. Journal of Algebra **336** (2011) 209-226.
- [22] V.N. Latyshev. *On Regev's theorem on identities in tensor product of PI-algebras*. Ups. Mat. Nauk. **27** (1973) 213-214.
- [23] T. Y. Lam. *A First Course in Noncommutative Rings*. Springer-Verlag, 1991.
- [24] Yu. N. Malcev. *A basis for the identities of the algebras of upper triangular matrices*. Algebra and Logic **10** (1971) 393-400.
- [25] S.P. Mishchenko, A. Regev and M. Zaicev. *A Characterization of PI-algebras with bounded multiplicities of cocharacters*. J. Algebra 219 (1999) 356-368.
- [26] J. B. Olson and A. Regev. *An application of representation theory to PI-algebras*. Proc. Amer. Math. Soc. **55** (1976) 253-257.
- [27] A.Regev. *Existence of identities in  $A \otimes B$* . Israel J. Math **11** (1972) 131-152.

- [28] S. Rosset. *A new proof of the Amitsur-Levitzki identity*. Israel J. Math. **23** (1976) 187-188.
- [29] A. C. Vieira. *Supervarieties of small graded colength*. Journal of Pure and Applied Algebra **217**, n.2 (2013) 322-333.
- [30] A. C. Vieira and S.M. Jorge. *On minimal varieties of quadratic growth*. Linear Algebra and its Appl. **418** (2006) 925-938.