

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Percolação Congelada

Daniel Ungaretti Borges

Orientador:

Bernardo Nunes Borges de Lima

Apoio: CNPq

Belo Horizonte - MG

2013

Resumo


Em ALDOUS, D. J., *The percolation process on a tree where infinite clusters are frozen*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 128(3):465-477, 2000, criou-se a primeira versão de percolação congelada, modelando o processo de formação de gel. Este modelo congela clusters infinitos de elos na árvore binária. A partir deste artigo, surgiram variações do modelo que utilizam outros processos de congelamento e/ou outros tipos de grafo. Nesta dissertação, são expostos resultados a respeito de alguns dos principais modelos já estudados: modelos de percolação congelada na árvore binária, em \mathbb{Z} e em \mathbb{Z}^2 . Vamos discutir a existência dos modelos nestes diferentes grafos e estudar como se comporta a probabilidade de um determinado sítio estar congelado ou não.

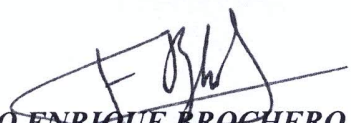
Agradecimentos


Gostaria de agradecer à minha família pelo apoio que recebi. Meus pais, João e Ruth, e meus irmãos, Matheus e Luciana, sempre estiveram ao meu lado e me incentivaram quando optei por estudar matemática. Boa parte do que sou e do que conquistei até agora eu devo a eles. Gostaria também de agradecer à Alice por toda a ajuda que me deu. Ela está presente em todos os aspectos da minha vida, e no processo de escrever esta dissertação não foi diferente. Finalmente, gostaria de agradecer ao meu orientador, Bernardo, por me introduzir na área de Probabilidade e por me acompanhar desde minha entrada na graduação até o final do mestrado. Esta dissertação demorou para ser escrita. Foram muitas correções e recorções até que eu ficasse satisfeito com o resultado final, e várias vezes eu precisei de alguém, em geral minha mãe, a Alice ou o Bernardo, me cobrando para retomar a elaboração da dissertação. Obrigado a todos vocês.

ATA DA BICENTÉSIMA DÉCIMA PRIMEIRA DEFESA DE DISSERTAÇÃO DO ALUNO DANIEL UNGARETTI BORGES, REGULARMENTE MATRICULADO NO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA DO INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, REALIZADA NO DIA 01 DE MARÇO DE 2013.

No primeiro dia do mês de março de 2013, às 13h00 horas, na 3060, reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para julgar a defesa de dissertação do aluno **Daniel Ungaretti Borges**, intitulada: "*Percolação Congelada*", requisito final para obtenção do Grau de mestre em Matemática. Abrindo a sessão, o Senhor Presidente da Comissão, Prof. Bernardo Nunes Borges de Lima, após dar conhecimento aos presentes o teor das normas regulamentares do trabalho final, passou a palavra ao candidato para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa do candidato. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se sem a presença do candidato e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: o candidato foi considerado aprovado, por unanimidade. O resultado final foi comunicado publicamente ao candidato pelo Senhor Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente Ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 01 de março de 2013.


PROF. BERNARDO NUNES BORGES DE LIMA - ORIENTADOR
Orientador (UFMG)


PROF. FABIO ENRIQUE BROCHERO MARTÍNEZ
Examinador (UFMG)


PROF. LUIZ RENATO GONÇALVES FONTES
Examinador (IME-USP)

Sumário

Resumo	iii
Introdução	1
1 Considerações Iniciais	3
1.1 Percolação	3
1.1.1 Percolação de Elos de Bernoulli em \mathbb{Z}^d	4
1.2 Percolação Congelada	8
2 O Modelo em \mathbb{Z}	11
2.1 Existência	11
2.2 Cálculos Exatos: $N = 2$	13
2.3 Densidade de Vértices Ativos	16
3 O Modelo em \mathbb{Z}^2	21
3.1 Dualidade em \mathbb{Z}^2 e a Desigualdade RSW	22
3.2 A Questão da Existência	24
3.3 Densidade de Vértices Ativos	26
4 O Modelo na Árvore Binária	31
4.1 Resultado sobre Convergência	31
4.2 Estudo de β_N	35
4.3 Convergência de β_N a β_∞	40
Bibliografia	53

Introdução

A percolação congelada é um tema de pesquisa recente, tendo se iniciado com o artigo *The percolation process on a tree where infinite clusters are frozen*, de D. Aldous [1]. Sendo assim, ainda há muitas perguntas não respondidas a respeito de modelos de percolação congelada. O objetivo principal desta dissertação é dar uma visão geral do que se sabe atualmente para alguns modelos específicos. Além disso, buscou-se apresentar o assunto de maneira bastante detalhada, o que tem como vantagem trazer ao leitor argumentos mais claros, mas possui também o efeito colateral de prolongar o texto um pouco mais do que foi inicialmente previsto.

Esta dissertação está dividida em 4 capítulos. No primeiro capítulo, discutimos percolação independente de Bernoulli e introduzimos ideias gerais sobre percolação congelada. Uma referência que aborda de maneira bastante completa os resultados de percolação mais essenciais é o livro *Percolation*, de Grimmett [10]. Os capítulos subsequentes contêm um estudo de percolação congelada em grafos específicos: \mathbb{Z} , \mathbb{Z}^2 e a árvore binária. O estudo feito para \mathbb{Z} tem como referência a tese de Rachel Brouwer [7]. O estudo de \mathbb{Z}^2 se encontra no artigo *A Percolation Process on the Square Lattice Where Large Finite Clusters are Frozen*, de van den Berg, de Lima e Nolin [5]. E o estudo da árvore binária é baseado no artigo *A Percolation Process on the Binary Tree Where Large Finite Clusters are Frozen*, de van den Berg, Kiss e Nolin [4]. Como existem muitas variações dentre os modelos de percolação congelada, os capítulos começam com uma formulação breve de qual modelo será trabalhado exatamente, e na sequência discutem a existência do modelo.

A maior parte dos teoremas apresentados nesta dissertação utiliza apenas matemática elementar: assuntos iniciais de teoria das probabilidades, um pouco de combinatória, algumas equações diferenciais. Os resultados mais específicos que necessitamos são os relativos à teoria de percolação: $p_c(\mathbb{Z}^2) = 1/2$ e a teoria de Russo Seymour Welsh, por exemplo. É por isso que o primeiro capítulo contém uma introdução rápida à percolação de Bernoulli. Entretanto, isso não significa que os resultados obtidos são fáceis, ou pouco importantes.

Capítulo 1

Considerações Iniciais

1.1 Percolação

Nesta seção introduzimos o que entendemos por percolação e alguns resultados clássicos da teoria. Em essência, quando falamos em percolação temos a seguinte ideia em mente. Inicialmente, precisamos de um grafo. Um *grafo* pode ser definido como um par ordenado $G = (V, E)$, onde V é o conjunto de *sítios* (ou *vértices*) e $E \subset V \times V$ é o conjunto de *elos*. Em geral, nós não trabalharemos com elos ligando um vértice a si mesmo. Logo, se $e \in E$ temos $e = \{a, b\}$ onde $a, b \in V$ são distintos. Os elementos a e b são ditos *extremidades* do elo e e a partir de agora denotaremos e por $\langle a, b \rangle$.

Além disso, como ficará claro adiante, para nossos objetivos só fará sentido considerarmos grafos G com $|V| = \infty$ e conexos. Por *conexos*, queremos dizer que dados quaisquer 2 vértices $a, b \in V$ distintos existe um *caminho* γ ligando a e b , ou seja, uma sequência finita de elos e_1, e_2, \dots, e_n tais que $e_i = \langle x_i, y_i \rangle$ com $x_1 = a$, $y_i = x_{i+1}$ para $i = 1, \dots, n-1$ e $y_n = b$, e além disso os sítios x_1, \dots, x_n são todos distintos (não há loops). Um *circuito* é um caminho tal que $a = b$. Podemos definir o comprimento de um caminho como sendo $|\gamma| =$ número de elos que compõem o caminho.

Em seguida, consideramos que cada elo de G pode estar *aberto* ou *fechado*. Iremos representar essa situação formalmente considerando o conjunto $\Omega = \{0, 1\}^E$. Um elemento qualquer $\omega \in \Omega$ será dito uma *configuração* e a condição $e \in E$ está aberto será traduzida por $\omega(e) = 1$. Naturalmente, dizemos que e está fechado quando $\omega(e) = 0$. Dado um grafo G , um *subgrafo* de G é um grafo $G' = (V', E')$ tal que $V' \subset V$ e $E' \subset E$. Veja que uma configuração ω induz em G um subgrafo tomando $V' = V$ e $E' = \{e \in E ; \omega(e) = 1\}$. Em geral, chamaremos de *clusters* as componentes conexas deste subgrafo. Veja que, fixado um sítio, podemos falar no cluster deste sítio, que é nada mais que a componente conexa da qual este sítio faz parte. Às vezes consideraremos também o subgrafo formado pelos elos fechados, e nestas situações pode ser necessário enfatizar se estamos lidando com o subgrafo de elos abertos ou não. Nestes casos, usaremos os termos: cluster aberto, cluster fechado, caminho aberto, etc. Caso não seja mencionado nada, assumimos que estamos trabalhando com o subgrafo de elos abertos.

Nós definimos então alguma medida de probabilidade em Ω e estudamos o comportamento das configurações aleatórias geradas por essa medida, as propriedades dos clusters formados, especialmente

a existência de clusters infinitos. Dizemos que uma configuração ω *percola* se ela possui como subgrafo uma componente conexa infinita. Além disso, dizemos que um determinado vértice percola quando o seu cluster é infinito. Dados dois vértices a, b de G e uma configuração, escrevemos $a \leftrightarrow b$ se existe um caminho aberto (ou seja, formado apenas por elos abertos) que tem a e b como extremidades. Uma notação natural para dizer que o vértice a percola é $a \leftrightarrow \infty$.

O modelo de percolação mais simples, e consequentemente o mais bem entendido, é o que chamamos de percolação de elos de Bernoulli. Nele, consideramos $\Omega = \{0, 1\}^E$ como espaço amostral e a σ -álgebra gerada pelos conjuntos cilíndricos. Para definir a medida, fixamos um parâmetro $p \in [0, 1]$ que representará a probabilidade de um elo qualquer e estar aberto, ou seja, definiremos para cada e uma medida μ_e tal que $\mu_e(\omega(e) = 1) = p$ e $\mu_e(\omega(e) = 0) = 1 - p$ e finalmente definimos nossa medida como sendo a medida produto

$$P_p = \prod_{e \in E} \mu_e \quad (1.1)$$

Perceba que deste modo o estado de cada elo é independente dos demais. O modelo de percolação de elos de Bernoulli foi o primeiro a ser estudado, e o grafo utilizado neste estudo foi a rede hipercúbica \mathbb{Z}^d . Atualmente, existem muitas variações deste primeiro modelo; uma das mais imediatas é considerar que os vértices, ao invés dos elos, é que podem estar abertos ou fechados. Também podemos considerar outras medidas, grafos diferentes, ou então modificar o processo, e é de se esperar que cada variação apresente propriedades distintas. O modelo de percolação congelada, que estudaremos nos capítulos subsequentes, é uma destas variações.

1.1.1 Percolação de Elos de Bernoulli em \mathbb{Z}^d

Como já observamos, a percolação de elos de Bernoulli em \mathbb{Z}^d foi o primeiro modelo a ser estudado, e é certamente um dos mais importantes. Como não há espaço para fazer uma exposição mais detalhada da teoria que já existe sobre este modelo, nos contentaremos em dar uma breve introdução, mencionando os principais resultados. Faremos algumas das demonstrações quando a ideia por trás da demonstração for útil no futuro.

Quando falamos na rede hipercúbica \mathbb{Z}^d , estamos nos referindo ao grafo com vértices em \mathbb{Z}^d e elos conectando vértices adjacentes, ou seja, vértices que estão a distância 1 entre si, na norma da soma. Denotaremos tal conjunto de elos por \mathbb{E}^d .

Como já mencionamos, nossa principal pergunta é sobre a existência ou não de clusters infinitos. No modelo em questão, perceba que o evento $\{\omega \in \Omega ; \omega \text{ percola}\}$ depende das variáveis aleatórias independentes e identicamente distribuídas (iid.) $X_e = \omega(e)$, $e \in \mathbb{E}^d$, que têm distribuição Bernoulli de parâmetro p . Entretanto, tal evento independe de qualquer quantidade finita das variáveis X_e , sendo portanto um evento caudal. Segue-se então pela Lei 0-1 de Kolmogorov que $P_p(\omega \text{ percola})$ vale 0 ou 1. É de se esperar que tal probabilidade valha zero apenas para valores pequenos de p .

Fixado um sítio de \mathbb{Z}^d , digamos a origem, o evento $\{0 \leftrightarrow \infty\}$ está intimamente associado ao evento $\{\omega \text{ percola}\}$. Podemos explicitar esta relação através da proposição abaixo, definindo antes a

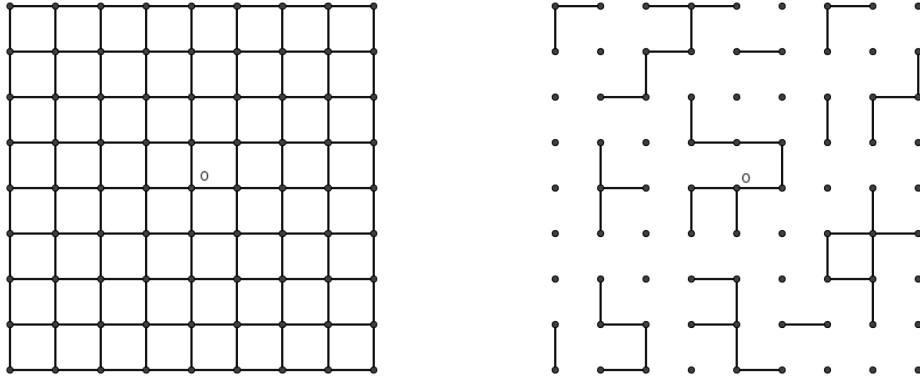


Figura 1.1: O grafo \mathbb{Z}^2 e um exemplo de configuração

função $\theta : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ tal que:

$$\theta(p) := P_p(0 \leftrightarrow \infty) \quad (1.2)$$

Proposição 1.1 $P_p(\omega \text{ percola}) = 0 \Leftrightarrow \theta(p) = 0$

Demonstração: A ida da proposição é imediata. De fato, $P_p(\omega \text{ percola}) = 0$ significa que não há clusters infinitos quase certamente, e assim o cluster da origem não será infinito com probabilidade 1. Para verificar a volta, observe que o grafo que estamos trabalhando é *transitivo* (não daremos uma definição formal, mas basta a ideia intuitiva de que cada sítio é idêntico ao outro quando olhamos apenas para as relações de adjacência no grafo) e que a medida que utilizamos é invariante por translações. Sendo assim, a escolha da origem para a definição de $\theta(p)$ é arbitrária, ou seja, se $x \in \mathbb{Z}^d$ temos $P_p(x \leftrightarrow \infty) = \theta(p)$. Logo,

$$P_p(\omega \text{ percola}) = P_p \left(\bigcup_{x \in \mathbb{Z}^d} (x \leftrightarrow \infty) \right) \leq \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} P_p(x \leftrightarrow \infty) = \sum_{x \in \mathbb{Z}^d} \theta(p) = 0 \quad (1.3)$$

e o resultado segue. \square

Desta forma, entender o comportamento da função θ é suficiente para dizermos se há percolação ou não. Mas podemos dizer muito mais do que isso.

Primeiramente, vamos analisar o comportamento de $\theta(p)$ para p assumindo valores extremos. Quando $p = 0$, todos os elos de \mathbb{Z}^d estarão fechados com probabilidade 1 e portanto $\theta(p) = 0$. De forma análoga, quando $p = 1$ temos $\theta(p) = 1$. Pensando agora nos valores de p suficientemente próximos de 0, a intuição nos diz que nas configurações típicas devem existir poucos elos abertos e portanto a probabilidade de a origem percolar continuará sendo 0. Entretanto, ao aumentarmos gradativamente o valor de p deve-se ter $\theta(p) > 0$ para algum valor p' e a partir daí para valores maiores do parâmetro p teremos sempre $\theta(p) > 0$.

O raciocínio acima está baseado em uma propriedade da função θ ainda não demonstrada, a de que ela é não-decrescente. A demonstração deste fato é bem instrutiva pois introduz a ideia de *acoplamento*, que será bastante utilizada mais à frente. Podemos resumi-la da seguinte forma: quando queremos comparar processos de percolação com parâmetros $p_1, p_2 \in [0, 1]$ distintos, estamos a princípio

falando de espaços de probabilidade diferentes, o que dificulta relacionarmos os dois processos. Uma possível solução para isso é criar um espaço de probabilidade maior, que contenha os dois processos ao mesmo tempo.

O acoplamento mais usualmente utilizado é obtido considerando-se como espaço amostral o conjunto $\tilde{\Omega} = [0, 1]^{\mathbb{E}^d}$. Para tal, criamos uma família de variáveis aleatórias iid. $(X(e) ; e \in \mathbb{E}^d)$ onde cada $X(e)$ tem distribuição uniforme em $[0, 1]$. Veja que se escolhermos $p \in [0, 1]$, podemos definir a variável aleatória

$$\eta_p(e) = \begin{cases} 1 & \text{se } X(e) < p \\ 0 & \text{se } X(e) \geq p \end{cases} \quad (1.4)$$

Caso $\eta_p(e) = 1$, diremos que o elo e é p -aberto, e caso contrário diremos que ele é p -fechado. Observe que os $\eta_p(e)$'s são independentes e que $\mathbb{P}(\eta_p(e) = 1) = p = 1 - \mathbb{P}(\eta_p(e) = 0)$. Sendo assim, o vetor η_p pode ser visto como uma configuração aleatória em um processo de percolação de elos com parâmetro p . Tal acoplamento é muito útil, pois conseguimos acoplar modelos com qualquer parâmetro $p \in [0, 1]$ de forma ‘crescente’ em p , onde tal denominação fica mais clara ao ler a demonstração da proposição abaixo. Utilizando este acoplamento, a demonstração é imediata.

Proposição 1.2 *A função $\theta(p)$ é não decrescente em p .*

Demonstração: Sejam $p_1, p_2 \in [0, 1]$ com $p_1 < p_2$. Basta observar que:

$$\begin{aligned} \theta(p_1) &= \mathbb{P}(\omega \in \tilde{\Omega}; \text{ Há percolação em } \eta_{p_1}) \\ &\leq \mathbb{P}(\omega \in \tilde{\Omega}; \text{ Há percolação em } \eta_{p_2}) \\ &= \theta(p_2) \end{aligned}$$

onde a desigualdade se justifica da seguinte maneira: se um elo e é p_1 -aberto, então $\eta_{p_2}(e) \geq \eta_{p_1}(e) = 1 \Rightarrow \eta_{p_2}(e) = 1$ e conseqüentemente o elo e é p_2 -aberto. Mas então, se o cluster aberto da origem de η_{p_1} for infinito o de η_{p_2} certamente também será, e a desigualdade segue por inclusão de eventos. \square

Continuando o raciocínio apresentado acima, deve existir um valor p_c , que denominaremos ponto crítico, para o qual temos $\theta(p) = 0$ se $p < p_c$ e $\theta(p) > 0$ se $p > p_c$.

Definição 1.1 *Definimos o ponto crítico p_c como $p_c := \sup\{p \in [0, 1]; \theta(p) = 0\}$*

Observamos que o ponto crítico da função $\theta(p)$ depende da dimensão em que estamos trabalhando, isto é, $p_c = p_c(d)$. Até agora temos trabalhado com \mathbb{Z}^d para d inteiro positivo, mas o caso $d = 1$ é pouco interessante. Isso se deve ao fato de que quando $d = 1$ temos que $p_c(1) = 1$ e portanto o modelo apresenta transição de fase trivial. Entretanto, para $d \geq 2$ pode-se mostrar que a transição de fase é não-trivial:

Teorema 1.3 *Para $d \geq 2$, temos $0 < p_c(d) < 1$.*

Utilizando o Teorema 1.3 e as informações que já obtivemos, podemos esboçar a função $\theta(p)$. Ressaltamos que o esboço na Figura 1.2 supõe, sem prova, alguns resultados a respeito desta função.

Sabe-se atualmente que a função θ é identicamente nula em $[0, p_c)$ e que é estritamente crescente e C^∞ em $(p_c, 1]$, para qualquer dimensão d . Entretanto, o estudo de $\theta(p_c)$ é muito mais delicado. Um dos problemas mais famosos em probabilidade é demonstrar que $\theta(p_c(d)) = 0$ para $d \geq 2$. Os casos $d = 2$ e d suficientemente grande (pelo menos $d \geq 19$) já estão provados, mas para os valores de d intermediários, $3 \leq d \leq 18$, o problema continua em aberto.

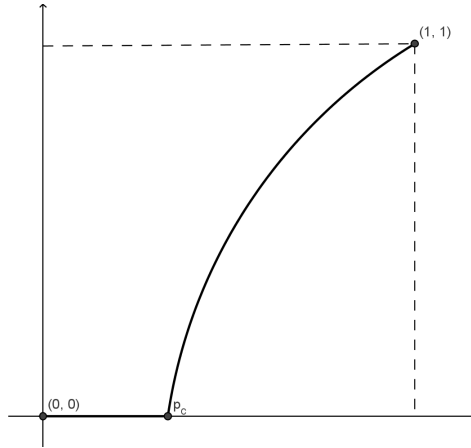


Figura 1.2: Esboço da função $\theta(p)$

O Teorema 1.3 foi demonstrado por Broadbent e Hammersley (1957), no primeiro artigo (do ponto de vista matemático) a respeito de percolação. Ele nos diz que o modelo de percolação de elos de Bernoulli passa por uma transição de fase: chamamos o intervalo $[0, p_c)$ de fase *subcrítica* e o intervalo $(p_c, 1]$ de fase *supercrítica*. Em p_c , ocorre a chamada fase *crítica*. Cada uma destas fases possui características únicas.

Fase Subcrítica Na fase subcrítica, temos $p < p_c$ e portanto não há percolação e o cluster da origem é finito quase certamente. É claro que se C é o cluster aberto da origem, a probabilidade de seu tamanho $|C|$ ser n decai para zero com n (pois os eventos $\{|C| = n\}$ são disjuntos). O principal resultado da fase subcrítica diz que esta probabilidade decai exponencialmente. Mais precisamente, quando $p < p_c$, temos que existe $\alpha(p) > 0$ tal que $P_p(|C| = n) \leq e^{-\alpha(p)n}$.

Fase Supercrítica Na fase supercrítica, sabemos que há percolação. Uma pergunta que se segue a esta informação é sobre a quantidade de clusters infinitos que existem na fase supercrítica. Sabe-se que nesta fase, com probabilidade 1, existe um único cluster infinito. Além disso, dado que $|C| < \infty$ também temos decaimento subexponencial para $P_p(|C| = n)$ nesta fase.

Fase Crítica A fase crítica é certamente a que é menos entendida. Como já dissemos, ainda não se sabe se há percolação na fase crítica para alguns valores de d , apesar de haver razões para se acreditar que $\theta(p_c) = 0$ para $d \geq 2$. Além disso, ainda não é bem compreendida a taxa de decaimento de $P_{p_c}(|C| = n)$, apesar de se conjecturar que $P_{p_c}(|C| \geq n) \approx n^{-1/d}$ quando $n \rightarrow \infty$, onde definimos que $a_n \approx b_n$ se $\frac{\log a_n}{\log b_n} \rightarrow 1$. Além disso, tenta-se compreender melhor também o comportamento do modelo quando $p \rightarrow p_c$.

A partir do entendimento do modelo de percolação de elos de Bernoulli, é natural tentar estender os resultados a grafos mais gerais. Resultados como $p_c(G) \in (0, 1)$ e unicidade do cluster infinito na fase supercrítica valem para classes bem gerais de grafos. Um resultado deste tipo que precisaremos mais a frente é o seguinte:

Teorema 1.4 *Seja $G = (V, E)$ um grafo infinito conexo com E enumerável, origem 0 e tal que o grau de qualquer $x \in V$ é limitado uniformemente por Δ finito. Então $p_c(x) = \sup\{p \in [0, 1]; P_p(x \leftrightarrow \infty) = 0\}$ independe de x e $p_c \geq \frac{1}{\Delta-1} > 0$.*

O Teorema 1.4 vale quando consideramos percolação de elos ou de sítios de Bernoulli. Além disso, nas mesmas hipóteses do teorema vale também que $p_c^{\text{sítio}} \geq p_c^{\text{elo}}$.

1.2 Percolação Congelada

Após definirmos o modelo clássico de percolação, introduziremos uma variação deste modelo, a percolação congelada. Historicamente, a primeira versão de percolação congelada surgiu em [1], onde tal modelo é usado como uma aproximação do processo de formação de um gel. De maneira informal, começamos com um conjunto de ‘moléculas’ a princípio desconectadas. Com o passar do tempo elas formam ligações entre si formando polímeros cada vez maiores, até que ficam grandes demais e param de crescer. Vamos formalizar um pouco esta ideia.

Seja $G = (V, E)$ um grafo com sítios em V e elos em E , como usual. Considere a família de variáveis aleatórias iid. $(U_v : v \in V)$, onde cada uma delas tem distribuição uniforme em $[0, 1]$. Utilizaremos um parâmetro $t \in [0, 1]$ para contar a passagem do tempo. No tempo $t = 0$, todos os sítios em V estarão desativados, e à medida que o tempo passa, os sítios mudarão de estado. Quando o tempo t atinge o valor U_v , o sítio v muda seu estado de desativado para ativado.

Até aqui, não há diferença em relação à percolação de sítios independente de Bernoulli. Veja que a construção acima nada mais é que o acoplamento padrão que discutimos na Proposição 1.2. A diferença principal do modelo é que os sítios de G podem passar para um terceiro estado, que denominamos congelado. A ideia é congelar um cluster de sítios abertos no tempo em que ele atingir um certo tamanho crítico.

Existem muitas variações deste modelo. Uma primeira alteração possível é associar as variáveis aleatórias uniformes aos elos de G ao invés dos vértices. Outra variação é em relação ao critério usado para congelar um cluster aberto. Existem tantas maneiras diferentes de se definir um modelo de percolação congelada que optou-se por não se dar uma definição formal do que é percolação congelada nesta dissertação. Assim, evitamos o risco de restringir demais a definição.

Entretanto, em qualquer uma destas versões a introdução de um critério de congelamento modifica muito o processo pois o estado de um sítio será afetado pelo de seus vizinhos. Sendo assim, a independência é perdida e o processo descrito acima de forma ingênua pode se mostrar bem mais complicado do que imaginamos a princípio.

De fato, a princípio não é claro nem mesmo que a regra que escolhermos dará origem a algum processo, especialmente se optarmos por congelar clusters infinitos. O modelo de Aldous em [1] congela

clusters infinitos em percolação de elos, e parte do artigo é dedicada justamente a mostrar que tal modelo é bem definido na árvore binária. Benjamini e Schramm forneceram um argumento que demonstra que em \mathbb{Z}^2 , usando o mesmo modelo que Aldous, o processo não está bem definido. Dessa forma, surgem razões para se congelar clusters finitos, pois às vezes conseguimos garantir a existência do modelo no caso finito apesar de o modelo infinito não existir.

Mas o que queremos dizer com o modelo existir? Observe que, de acordo com a construção acima, fixados os valores de U_v para $v \in G$ deveria ser possível determinar o estado de um sítio em qualquer tempo t . Ou seja, dada uma configuração e um tempo t deveríamos conseguir dizer quais clusters estão congelados, ativos e desativados. Matematicamente falando, se $S = \{\text{desativado}, \text{ativo}, \text{congelado}\}$ deveria existir uma família de funções $f_v : [0, 1] \rightarrow S$ que indique qual o estado do vértice v em cada instante em $[0, 1]$ e respeite as regras que estabelecemos. Mas em geral, nada impede que exista mais de uma família com tal propriedade, ou que não exista nenhuma.

Para dar um exemplo concreto, suponha que estamos trabalhando no grafo $G = (\mathbb{N}, E)$ onde E é o conjunto dos elos ligando um natural ao seu sucessor, que cada $n \in \mathbb{N}$ possui sua variável aleatória U_n e que observamos que U_n é uma sequência estritamente decrescente, digamos $U_n = \frac{1}{n+2}$. Além disso, suponha que quando um cluster tem dois vértices, ele congela. Nesta configuração, quando $t = 1$ a origem estará congelada ou não? Veja que os sítios de G são ativados em ordem da direita para a esquerda. A origem congelará apenas se em $t = U_1$ o sítio 1 não congelar com o 2. Da mesma forma, um sítio n congelará com o sítio $n + 1$ apenas se em $t = U_{n+1}$ o sítio $n + 1$ não congelar com o $n + 2$, e podemos ver que desta forma há uma espécie de dependência infinita. Poderíamos então escolher 2 maneiras diferentes de realizar o congelamento, respeitando a regra estabelecida: em uma, os clusters congelados seriam todos da forma $C = \{2n + 1, 2n + 2\}$, com $n \in \mathbb{N}$; na outra, eles seriam da forma $C = \{2n, 2n + 1\}$ com $n \in \mathbb{N}$.

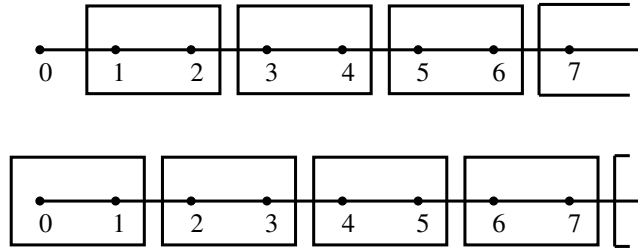


Figura 1.3: Quando $U_n = \frac{1}{n+2}$, há 2 maneiras de realizar o congelamento

No exemplo em questão, há 2 maneiras diferentes de dizer quem congelou ou não. Será que isso inviabiliza o modelo? Não necessariamente. Podemos argumentar que uma configuração na qual U_n forma uma sequência decrescente não é uma ‘configuração representativa’ pois $P(U_n > U_{n+1}, \forall n) = 0$. Se $\Omega = [0, 1]^{\mathbb{N}}$, podemos criar uma função $g : \Omega \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$ tal que $g(\omega) =$ número de maneiras de escolher como congelar os clusters respeitando as regras fixadas, para cada $\omega \in \Omega$. Sendo assim, podemos definir:

Definição 1.2 *Um modelo de percolação congelada está bem definido se $g(\omega) = 1$ quase certamente.*

Nos próximos capítulos discutiremos modelos de percolação congelada em alguns dos grafos mais

canônicos em percolação: \mathbb{Z}^d e a árvore binária. A escolha por estudar grafos específicos não é uma simplificação arbitrária. De fato, a percolação congelada é um modelo relativamente recente e não existem muitos resultados que abrangem uma classe geral de grafos. Além disso, o entendimento de casos particulares nos fornece indícios que podem levar a generalizações. As principais questões a serem respondidas sobre o modelo são:

- Existe o modelo que congela clusters infinitos?
- É possível calcular a probabilidade de um determinado vértice estar congelado (ou ativo) em um tempo t , em especial quando $t = 1$?
- Se não, podemos achar cotas razoáveis?
- O modelo finito converge em algum sentido para o modelo infinito (caso exista)?

Capítulo 2

O Modelo em \mathbb{Z}

O primeiro modelo que estudaremos será o modelo de percolação congelada de sítios em \mathbb{Z} que congela clusters finitos. Tal modelo apareceu pela primeira vez na tese de doutorado de Rachel Brouwer [7], e este capítulo se baseia nessa referência.

As variáveis aleatórias iid. U_v , com $v \in \mathbb{Z}$, têm como sempre distribuição uniforme em $[0, 1]$. Fixamos um parâmetro $N \in \mathbb{N}$, $N \geq 2$, de forma que um cluster mudará de ativo para congelado assim que o número de sítios do cluster for maior ou igual a N . Observamos que, quando já existe um cluster congelado e depois um sítio vizinho a ele congela, consideraremos que os clusters não se uniram.

2.1 Existência

Como mencionamos no Capítulo 1, nem sempre o processo de congelamento que descrevemos está bem definido. É fácil ver que o modelo que congela clusters infinitos em \mathbb{Z} de fato existe. Ele é um modelo trivial, pois como $p_c(\mathbb{Z}) = 1$ temos que nenhum sítio está congelado para um tempo $t \in [0, 1)$ e que todos congelam no tempo 1 formando um único cluster infinito.

Logo abaixo, argumentamos que o modelo com parâmetro N de fato existe. Observe que o modelo que definimos acima para \mathbb{Z} pode ser considerado em \mathbb{Z}^d sem problema algum. Como não nos exigirá esforço extra, atacaremos a questão da existência do modelo com parâmetro N em \mathbb{Z}^d , com $1 \leq d \in \mathbb{N}$.

Além disso, é do nosso interesse calcular a probabilidade de um sítio específico, digamos a origem, estar ativado (ou congelado) no tempo t , e para tal o conjunto em questão deve ser mensurável. A proposição abaixo também nos garante isso.

Proposição 2.1 *No modelo de percolação congelada em \mathbb{Z}^d com parâmetro $N \in \mathbb{N}$, podemos determinar o estado da origem em um tempo t qualquer e ele depende apenas de um número finito de sítios quase certamente.*

Demonstração: A ideia é mostrar que se sabemos os estados dos sítios em um tempo s e andamos com o tempo apenas um pouco, então o estado da origem depende apenas de um número finito de sítios. Para tal, seja $B = [-N, N]^d$ e se $x \in (2N\mathbb{Z})^d$, definimos $B_x = x + B$. Dessa forma, as caixas B_x

particionam \mathbb{Z}^d . Depois, consideramos a variável aleatória $Y_x = \mathbb{1}_{\{\exists z \in B_x : U_z \in [s, t]\}}$ (função indicadora), onde escolhemos t da seguinte maneira.

Seja G o grafo com sítios em $(2N\mathbb{Z})^d$ e elos ligando x a y se $\|x - y\| = 2N$ na norma do máximo em \mathbb{Z}^d . Dessa forma, G não é apenas uma renormalização de \mathbb{Z}^d , pois os sítios terão vizinhos na diagonal. Observe que as variáveis Y_x são independentes e que $P(Y_x = 1) = 1 - [1 - (t - s)]^{(2N)^d} = p$, onde p é função de $t - s$. Sabemos que o grafo G tem ponto crítico $p_c(G)$ estritamente maior do que zero para percolação de Bernoulli de sítios, pois o grau de cada um de seus vértices é $3^d - 1$ e portanto é uniformemente limitado (consequência do Teorema 1.4). Tome $t - s$ suficientemente pequeno para que $p < p_c(G)$. Então o cluster aberto da origem de G é finito quase certamente e assim, na transição do tempo s para o tempo t , os estados dos vértices de \mathbb{Z}^d que estão neste cluster não são influenciados pelos sítios de \mathbb{Z}^d que estão fora da fronteira externa deste cluster (ver Figura 2.1). No caso em que o cluster da origem é vazio, o estado da origem não é influenciado.

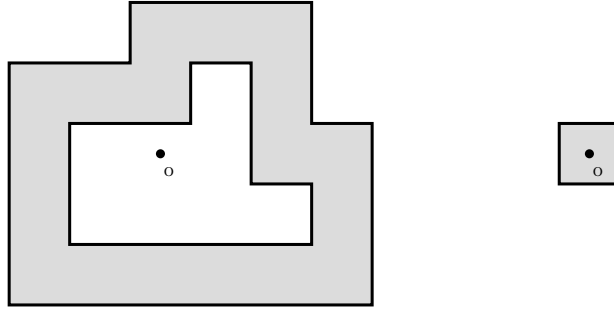


Figura 2.1: Na região cinza, os sítios não são ativados em $[s, t]$. À direita, o caso em que o cluster da origem é vazio.

Sendo assim, como conhecemos os estados dos sítios no tempo zero (todos estão desativados) podemos, olhando um número finito de U_z 's conhecer o estado da origem em um tempo $t_0 > 0$, desde que $p(t_0) < p_c(G)$. É claro que este argumento pode ser aplicado para um sítio $x \in \mathbb{Z}^d$ qualquer.

Seja $T = \sup\{t \in [0, 1] \mid \text{podemos identificar o estado da origem em todo tempo } s \in [0, t] \text{ observando finitos } U_z \text{'s}\}$. Sabemos que $T > 0$. Se fosse $T < 1$, poderíamos tomar $s < T$ e $t > T$ suficientemente próximos para que $p(t - s) < p_c(G)$. Assim, a percolação no grafo G é subcrítica, e quase certamente o cluster da origem C é finito. Agora, como $s < T$ podemos determinar sucessivamente os estados dos sítios de C no tempo s e também os da fronteira externa de C em G , observando um número finito de U_z 's. Como antes, podemos então achar o estado da origem em t já que conseguimos isolá-la. Mas isso implica que $t \leq T$, absurdo! Concluimos que $T = 1$. \square

Corolário 2.1 *No modelo de percolação congelada em \mathbb{Z}^d com parâmetro $N \in \mathbb{N}$, um cluster C ao congelar tem tamanho $N \leq |C| \leq 2d(N - 1) + 1$.*

Demonstração: Pela proposição acima, o estado de um sítio qualquer depende apenas de um número finito de sítios. Assim, se um cluster C congelou seu congelamento só foi influenciado por um número finito de variáveis aleatórias. Digamos que U_{v_1}, \dots, U_{v_n} foram as variáveis que determinaram o congelamento.

Com probabilidade 1, elas são todas diferentes. Logo, podemos agora nos importar apenas com a ordem de tais variáveis. Como em \mathbb{Z}^d um sítio tem $2d$ vizinhos, o maior cluster que se pode formar ocorre quando ele está cercado por $2d$ clusters ativos de tamanho $N - 1$ e depois é ativado. \square

2.2 Cálculos Exatos: $N = 2$

Vamos agora fixar um N e trabalhar com o modelo de percolação congelada de sítios com este parâmetro. Seja $C(t)$ o conjunto dos sítios congelados no tempo t e denotemos a medida de probabilidade que usamos por $P_N(\cdot)$, para enfatizar que estamos no modelo com parâmetro N . Após estabelecermos a existência dos modelos finitos, a próxima pergunta que surge naturalmente é se conseguimos calcular explicitamente a probabilidade $P_N(0 \in C(t))$, especialmente quando $t = 1$. Infelizmente, os cálculos são excessivamente extensos para se obter fórmulas desse tipo quando $N > 2$. Entretanto, o caso $N = 2$ é razoavelmente simples e além disso introduz uma ideia de como se obter fórmulas exatas para este tipo de probabilidade, ideia esta que voltará a aparecer quando estudarmos percolação congelada na árvore binária, no Capítulo 4.

Essencialmente, o que faremos é deduzir uma equação diferencial para uma função próxima de $F(t) := P_2(0 \in C(t))$, resolvê-la e depois deduzir a expressão de $F(t)$.

Teorema 2.2 *Para $N = 2$, a probabilidade de a origem estar congelada no tempo t é dada por*

$$F(t) = 4t + 4e^{-t} - \frac{1}{3}t^3 + 4te^{-t} + 2e^{-2t} - 6$$

Em particular, $F(1) = \frac{8}{e} + \frac{2}{e^2} - \frac{7}{3} \approx 0,88$.

Demonstração: Seja Y_i o tempo em que o sítio i congela, de forma que $F(t)$ é a função de distribuição de Y_0 . Além disso, defina \vec{Y}_i como sendo o tempo em que o sítio i congela considerando apenas a semi-reta $\mathbb{Z} \cap [i, \infty)$ e também \overleftarrow{Y}_i como o tempo em que i congela considerando apenas a semi-reta $\mathbb{Z} \cap (\infty, i]$. Para as 3 variáveis aleatórias acima, consideramos que elas assumem valor ∞ quando o sítio i não congela.

Como estamos no caso $N = 2$, observe que $Y_0 = \min\{\vec{Y}_0, \overleftarrow{Y}_0\}$ e ainda que \vec{Y}_0 e \overleftarrow{Y}_0 possuem a mesma distribuição, por simetria. Logo, se conseguirmos obter $F_h(t)$, a distribuição de \vec{Y}_0 , podemos obter em seguida a função $F(t)$. Podemos separar o evento $\{\vec{Y}_0 \leq t\}$ nos casos em que 0 e 1 congelam à direita antes de t e no caso complementar, obtendo assim:

$$F_h(t) = P(\vec{Y}_0 \leq t) = P(\vec{Y}_0 \leq t, \vec{Y}_1 \leq t) + P(\vec{Y}_0 \leq t, \vec{Y}_1 > t) \quad (2.1)$$

Vamos tratar cada uma das parcelas de (2.1) separadamente. No que se segue, utilizamos várias vezes a inclusão de eventos

$$\{\vec{Y}_i \leq t\} \subset \{U_i \leq t, U_{i+1} \leq t\} \subset \{U_i \leq t\}. \quad (2.2)$$

Utilizando-a com $i = 0$, podemos afirmar que para a primeira parcela da soma da Equação (2.1) vale:

$$P(\vec{Y}_0 \leq t, \vec{Y}_1 \leq t) = P(\vec{Y}_0 \leq t, U_0 \leq \vec{Y}_1 \leq t) + P(\vec{Y}_0 \leq t, \vec{Y}_1 < U_0 \leq t) \quad (2.3)$$

A segunda parcela do lado direito da Equação (2.3) é zero, pois se 1 congela à direita antes de 0 ativar, então 0 nunca congelará pela direita. Em relação à primeira parcela, veja que se U_0 ativa antes de 1 congelar à direita, então forçosamente a origem congela à direita antes de 1 o fazer. Segue-se que:

$$P\left(\vec{Y}_0 \leq t, \vec{Y}_1 \leq t\right) = P\left(U_0 \leq \vec{Y}_1 \leq t\right) \quad (2.4)$$

Vamos agora para a segunda parcela de (2.1). Usando a Equação (2.2) com $i = 0$ e 1, obtemos:

$$P\left(\vec{Y}_0 \leq t, \vec{Y}_1 > t\right) = P\left(U_0 \leq t, U_1 \leq t, \vec{Y}_0 \leq t, \vec{Y}_1 > t\right) = P\left(U_0 \leq t, U_1 \leq t, \vec{Y}_1 > t\right) \quad (2.5)$$

onde a última igualdade decorre do evento ao lado direito estar contido no evento $\{\vec{Y}_0 \leq t\}$. Combinando as Equações (2.1), (2.4) e (2.5), concluímos que:

$$F_h(t) = P\left(U_0 \leq \vec{Y}_1 \leq t\right) + P\left(U_0 \leq t, U_1 \leq t, \vec{Y}_1 > t\right) \quad (2.6)$$

Observamos que o evento $\{U_1 \leq t, \vec{Y}_1 > t\}$ depende apenas de $(U_i ; i \geq 1)$, sendo portanto independente de U_0 . Sendo assim, temos:

$$\begin{aligned} F_h(t) &= P\left(U_0 \leq \vec{Y}_1 \leq t\right) + P\left(U_0 \leq t, U_1 \leq t, \vec{Y}_1 > t\right) \\ &= P\left(U_0 \leq \vec{Y}_1 \leq t\right) + P(U_0 \leq t)P\left(U_1 \leq t, \vec{Y}_1 > t\right) \\ &= P\left(U_0 \leq \vec{Y}_1 \leq t\right) + P(U_0 \leq t)\left[P(U_1 \leq t) - P\left(U_1 \leq t, \vec{Y}_1 \leq t\right)\right] \\ &= P\left(U_0 \leq \vec{Y}_1 \leq t\right) + P(U_0 \leq t)\left[P(U_1 \leq t) - P\left(\vec{Y}_1 \leq t\right)\right] \end{aligned}$$

Mas veja que $P\left(\vec{Y}_1 \leq t\right) = F_h(t)$ e também que $P(U_i \leq t) = t$. Além disso, podemos calcular $P\left(U_0 \leq \vec{Y}_1 \leq t\right)$ em função das distribuições de U_0 e \vec{Y}_1 . De fato, condicionando no evento em que $U_0 = s$:

$$\begin{aligned} P\left(U_0 \leq \vec{Y}_1 \leq t\right) &= \int_0^t P\left(U_0 \leq \vec{Y}_1 \leq t \mid U_0 = s\right) ds = \int_0^t P\left(s \leq \vec{Y}_1 \leq t\right) ds \\ &= \int_0^t F_h(t) - F_h(s) ds = tF_h(t) - \int_0^t F_h(s) ds \quad (2.7) \end{aligned}$$

Substituindo estes valores e derivando em relação a t :

$$\frac{dF_h(t)}{dt} = \frac{d}{dt} \left[tF_h(t) - \int_0^t F_h(s) ds + t(t - F_h(t)) \right] = \frac{d}{dt} \left[t^2 - \int_0^t F_h(s) ds \right] = 2t - F_h(t) \quad (2.8)$$

Como condição de contorno da Equação (2.8), devemos ter $F_h(0) = 0$. Resolvendo esta equação diferencial concluímos que $F_h(t) = 2t - 2 + 2e^{-t}$. Falta agora relacionar $F(t)$ com $F_h(t)$:

$$\begin{aligned} F(t) &= P(Y_0 \leq t) = P\left(\min\left\{\vec{Y}_0, \hat{Y}_0\right\} \leq t\right) \\ &= P\left(\left\{\vec{Y}_0 \leq t\right\} \cup \left\{\hat{Y}_0 \leq t\right\}\right) \\ &= P\left(\vec{Y}_0 \leq t\right) + P\left(\hat{Y}_0 \leq t\right) - P\left(\vec{Y}_0 \leq t, \hat{Y}_0 \leq t\right) \\ &= 2F_h(t) - P\left(\vec{Y}_0 \leq t, \hat{Y}_0 \leq t\right) \quad (2.9) \end{aligned}$$

Agora, iremos utilizar argumentos análogos aos utilizados para obter $P(\vec{Y}_0 \leq t)$ para encontrar uma expressão para $P(\vec{Y}_0 \leq t, \overleftarrow{Y}_0 \leq t)$. Observamos inicialmente que da Equação (2.6) podemos escrever que:

$$\{\vec{Y}_0 \leq t\} = \{U_0 \leq \vec{Y}_1 \leq t\} \cup \{U_0 \leq t, U_1 \leq t, \vec{Y}_1 > t\} \quad (2.10)$$

Na Equação (2.10), o símbolo \cup representa que a união é disjunta. Além disso, esta equação possui um análogo para o evento em que 0 congela à esquerda:

$$\{\overleftarrow{Y}_0 \leq t\} = \{U_0 \leq \overleftarrow{Y}_{-1} \leq t\} \cup \{U_0 \leq t, U_{-1} \leq t, \overleftarrow{Y}_{-1} > t\} \quad (2.11)$$

Fazendo a interseção das Equações (2.10) e (2.11), obtemos:

$$\begin{aligned} \{\vec{Y}_0 \leq t, \overleftarrow{Y}_0 \leq t\} &= \{U_0 \leq \vec{Y}_1 \leq t, U_0 \leq \overleftarrow{Y}_{-1} \leq t\} \cup \{U_0 \leq \vec{Y}_1 \leq t, U_{-1} \leq t, \overleftarrow{Y}_{-1} > t\} \cup \\ &\cup \{U_0 \leq \overleftarrow{Y}_{-1} \leq t, U_1 \leq t, \vec{Y}_1 > t\} \cup \{U_i \leq t, i \in \{0, \pm 1\}, \overleftarrow{Y}_{-1} > t, \vec{Y}_1 > t\} \\ &=: C_1 \cup C_2 \cup C_3 \cup C_4 \end{aligned} \quad (2.12)$$

Vamos calcular as probabilidades dos eventos C_i . Para C_1 , basta condicionar na variável U_0 , que é independente das variáveis \overleftarrow{Y}_{-1} e \vec{Y}_1 . Temos então:

$$\begin{aligned} P(C_1) &= P(U_0 \leq \vec{Y}_1 \leq t, U_0 \leq \overleftarrow{Y}_{-1} \leq t) \\ &= \int_0^t P(s \leq \vec{Y}_1 \leq t, s \leq \overleftarrow{Y}_{-1} \leq t \mid U_0 = s) ds \\ &= \int_0^t P(s \leq \vec{Y}_1 \leq t) P(s \leq \overleftarrow{Y}_{-1} \leq t) ds \\ &= \int_0^t [F_h(t) - F_h(s)]^2 ds \end{aligned}$$

Observe também que os eventos C_2 e C_3 têm a mesma probabilidade. Vamos fazer a conta apenas para C_2 , pois C_3 é um caso análogo. Para C_2 , observamos que os eventos $\{U_0 \leq \vec{Y}_1 \leq t\}$ e $\{U_{-1} \leq t, \overleftarrow{Y}_{-1} > t\}$ são independentes, logo:

$$\begin{aligned} P(C_2) &= P(U_0 \leq \vec{Y}_1 \leq t, U_{-1} \leq t, \overleftarrow{Y}_{-1} > t) \\ &= P(U_0 \leq \vec{Y}_1 \leq t) P(U_{-1} \leq t, \overleftarrow{Y}_{-1} > t) \\ &= \left[\int_0^t F_h(t) - F_h(s) ds \right] [P(U_{-1} \leq t) - P(\overleftarrow{Y}_{-1} \leq t)] \\ &= \left[\int_0^t F_h(t) - F_h(s) ds \right] [t - F_h(t)] \end{aligned}$$

onde usamos a Equação (2.7). Finalmente, para calcular a probabilidade de C_4 nós observamos que os eventos $\{U_0 \leq t\}$, $\{U_1 \leq t, \vec{Y}_1 > t\}$ e $\{U_{-1} \leq t, \overleftarrow{Y}_{-1} > t\}$ são independentes. Então:

$$\begin{aligned} P(C_4) &= P(U_i \leq t, i \in \{0, \pm 1\}, \overleftarrow{Y}_{-1} > t, \vec{Y}_1 > t) \\ &= P(U_0 \leq t) P(U_1 \leq t, \vec{Y}_1 > t) P(U_{-1} \leq t, \overleftarrow{Y}_{-1} > t) \\ &= t [t - F_h(t)]^2 \end{aligned}$$

Sendo assim, somando as probabilidades dos eventos C_i que calculamos, obtemos que:

$$P\left(\vec{Y}_0 \leq t, \overleftarrow{Y}_0 \leq t\right) = \int_0^t [F_h(t) - F_h(s)]^2 ds + t[t - F_h(t)]^2 + 2[t - F_h(t)] \int_0^t [F_h(t) - F_h(s)] ds \quad (2.13)$$

Podemos simplificar o lado direito da Equação (2.13), obtendo:

$$P\left(\vec{Y}_0 \leq t, \overleftarrow{Y}_0 \leq t\right) = t^3 + \int_0^t F_h(s)^2 ds - 2t \int_0^t F_h(s) ds \quad (2.14)$$

Substituindo o valor de $F_h(s)$ que obtivemos, conseguimos finalmente encontrar a expressão enunciada pelo teorema. De fato, basta calcular as seguintes integrais:

$$\begin{aligned} \int_0^t F_h(s) ds &= t^2 - 2t - 2e^{-t} + 2 \\ \int_0^t F_h(s)^2 ds &= \frac{4}{3}t^3 - 4t^2 + 4t - 8te^{-t} - 2e^{-2t} + 2 \end{aligned}$$

Substituir seus valores na Equação (2.14):

$$\begin{aligned} P\left(\vec{Y}_0 \leq t, \overleftarrow{Y}_0 \leq t\right) &= t^3 + \left(\frac{4}{3}t^3 - 4t^2 + 4t - 8te^{-t} - 2e^{-2t} + 2\right) - 2t(t^2 - 2t - 2e^{-t} + 2) \\ &= \frac{1}{3}t^3 - 4te^{-t} - 2e^{-2t} + 2 \end{aligned}$$

E substituir este último resultado na Equação (2.9):

$$\begin{aligned} F(t) &= 2F_h(t) - \left(\frac{1}{3}t^3 - 4te^{-t} - 2e^{-2t} + 2\right) \\ &= 4t + 4e^{-t} - \frac{1}{3}t^3 + 4te^{-t} + 2e^{-2t} - 6 \end{aligned} \quad \square$$

2.3 Densidade de Vértices Ativos

Já vimos até então que $P_N(0 \in C(t))$ está bem definido e que os clusters congelados têm tamanho entre N e $2N - 1$. Além disso, apesar de termos obtido resultados precisos para $N = 2$ em qualquer tempo t , o caminho que trilhamos é muito mais árduo para valores de N maiores.

Logo, é razoável diminuirmos nossa ambição de encontrar exatamente qual a probabilidade de a origem estar congelada em um tempo qualquer, e buscarmos entender o comportamento de $P_N(0 \in C(1))$ quando N é grande.

Utilizando a invariância translacional do processo, não é difícil ver que $P_N(0 \in C(1)) \geq \frac{N}{2N-1} \downarrow \frac{1}{2}$ quando $N \rightarrow \infty$. De fato, observe que no tempo 1 aparecem clusters congelados e ativos intercalados, e que 2 clusters ativos não podem ficar lado a lado. Sendo assim, a menor densidade de sítios congelados em qualquer configuração no tempo 1 é obtida quando não ocorrem 2 clusters congelados vizinhos, os clusters congelados têm tamanho mínimo e os ativos têm tamanho máximo.

Segue-se então que tal densidade é maior ou igual a $\frac{N}{2N-1}$. Sendo assim, vemos que $P_N(0 \in C(1))$ está afastada de zero para N grande. A princípio, poderia ocorrer que quando N é suficientemente

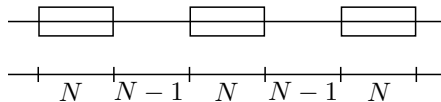


Figura 2.2: Minimizando densidade de sítios congelados. Os retângulos representam clusters congelados.

grande a densidade de sítios congelados tende para 1. O teorema abaixo exclui esta possibilidade, além de melhorar nossa cota para $P_N(0 \in C(1))$. Denotemos por $A(t)$ o conjunto dos sítios ativos no tempo t . Então:

Teorema 2.3 *Para percolação de sítios congelada em \mathbb{Z} temos:*

- (i) $\liminf_N P_N(0 \in A(1)) \geq \frac{1}{8}$.
- (ii) $\liminf_N P_N(0 \in C(1)) \geq 2 - 2 \log 2$.

Demonstração: Inicialmente, denotaremos o cluster ativo de um sítio $x \in \mathbb{Z}$ por A_x e o cluster congelado por C_x . Particionamos o evento $\{0 \in A(1)\}$ de acordo com os possíveis tamanhos de A_0 . Observe que se o cluster ativo da origem tem i sítios, existem exatamente i clusters diferentes possíveis, um para cada posição que a origem pode assumir no cluster. Além disso, a invariância translacional nos diz que a probabilidade de i sítios consecutivos estarem ativos independe da localização deles em \mathbb{Z} . Denotando o conjunto $[a, b] \cap \mathbb{Z}$ apenas por $[a, b]$, podemos então escrever:

$$P_N(0 \in A(1)) = P_N\left(\bigcup_{i=1}^{N-1} \{|A_0| = i\}\right) = \sum_{i=1}^{N-1} P_N(|A_0| = i) = \sum_{i=1}^{N-1} i P_N(A_0 = [0, i-1])$$

Observe também que para o cluster ativo da origem ser $[0, i-1]$, é necessário e suficiente que o sítio -1 congele antes do 0 ativar e o sítio i congele antes do $i-1$ ativar. Se denotarmos por $C(U_k^-)$ o conjunto dos sítios $j \in \mathbb{Z}$ que congelam antes de k ativar, temos para todo $i = 1, 2, \dots, N-1$ que

$$P_N(A_0 = [0, i-1]) = P_N(-1 \in C(U_0^-), i \in C(U_{i-1}^-)).$$

Como o evento $\{-1 \in C(U_0^-)\}$ depende apenas do estado dos sítios menores ou iguais a 0, e o evento $\{i \in C(U_{i-1}^-)\}$ depende dos sítios maiores ou iguais a $i-1$, os eventos são independentes quando $i \geq 2$. Desprezando da soma o termo com $i = 1$ e observando que por simetria os eventos $\{-1 \in C(U_0^-)\}$ e $\{i \in C(U_{i-1}^-)\}$ têm a mesma probabilidade que o evento $\{1 \in C(U_0^-)\}$, obtemos:

$$P_N(0 \in A(1)) \geq \sum_{i=2}^{N-1} i P_N(1 \in C(U_0^-))^2 \quad (2.15)$$

Vamos então encontrar uma boa cota inferior para $P_N(1 \in C(U_0^-))$. Se o sítio 1 congela antes do zero ativar, podemos novamente particionar nosso evento nos possíveis tamanhos do cluster congelado. Suponha agora que sabemos o tamanho do cluster congelado C_1 e que 0 estava desativado quando tal cluster congelou. O congelamento de C_1 pode a princípio depender de sítios muito distantes. Como queremos apenas uma cota inferior, podemos nos focar no caso mais simples em que o outro sítio vizinho

do cluster C_1 também não se ativou antes do congelamento de C_1 . Neste caso, nosso evento só depende de $|C_1| + 2$ índices de $(U_j)_j$.

$$\begin{aligned} P_N(1 \in C(U_0^-)) &= \sum_{j=0}^{N-1} P_N(1 \in C(U_0^-), C_1 = [1, N+j]) \\ &\geq \sum_{j=0}^{N-1} P_N(1 \in C(U_0^-), N+j \in C(U_{N+j+1}^-)) = \sum_{j=0}^{N-1} p^N(j) \end{aligned} \quad (2.16)$$

Na última igualdade, nós definimos $p^N(j) := P_N(1 \in C(U_0^-), N+j \in C(U_{N+j+1}^-))$. Agora, calcularemos o valor exato de $p^N(j)$. Tal evento só depende da ordem das variáveis U_k , com $0 \leq k \leq N+j+1$. Há 2 condições que devem ser satisfeitas para que o evento ocorra:

- Os sítios 0 e $N+j+1$ devem ser os últimos a serem ativados, ou seja: $\min\{U_0, U_{N+j+1}\} \geq \max\{U_k, 1 \leq k \leq N+j\}$.
- Como há menos de $2N$ sítios entre 0 e $N+j+1$, é impossível que eles dêem origem a mais de um cluster congelado. Entretanto, para que todos eles congelem juntos sem deixar sítios ativos sobrando, devemos pedir que o último sítio que ative esteja na região central. Mais especificamente, queremos que o sítio l tal que $U_l = \max\{U_k, 1 \leq k \leq N+j\}$ pertença a $[j+1, N]$.

Os dois eventos descritos acima são claramente independentes, e como as variáveis U_k são uniformes em $[0, 1]$ e independentes, a probabilidade de elas estarem em uma ordem específica é equiprovável. Segue-se assim que:

$$p^N(j) = \frac{2 \cdot (N+j)!}{(N+j+2)!} \cdot \frac{N-(j+1)+1}{N+j} = \frac{2(N-j)}{(N+j)(N+j+1)(N+j+2)}$$

Voltando ao somatório em (2.16):

$$\begin{aligned} \sum_{j=0}^{N-1} p^N(j) &= \sum_{j=0}^{N-1} (N-j) \frac{2}{(N+j)(N+j+1)(N+j+2)} \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} (N-j) \left[\frac{1}{N+j} - \frac{2}{N+j+1} + \frac{1}{N+j+2} \right] \\ &= \left[\sum_{j=0}^{N-1} \frac{N-j}{N+j} - \sum_{j=0}^{N-1} \frac{N-j}{N+j+1} \right] - \left[\sum_{j=0}^{N-1} \frac{N-j}{N+j+1} - \sum_{j=0}^{N-1} \frac{N-j}{N+j+2} \right] \\ &= \left[\left(\frac{N}{N} + \frac{N-1}{N+1} + \dots + \frac{1}{2N-1} \right) - \left(\frac{N}{N+1} + \frac{N-1}{N+2} + \dots + \frac{1}{2N} \right) \right] \\ &\quad - \left[\left(\frac{N}{N+1} + \frac{N-1}{N+2} + \dots + \frac{1}{2N} \right) - \left(\frac{N}{N+2} + \frac{N-1}{N+3} + \dots + \frac{1}{2N+1} \right) \right] \\ &= \left[1 - \frac{1}{N+1} - \frac{1}{N+2} - \dots - \frac{1}{2N} \right] - \left[\frac{N}{N+1} - \frac{1}{N+2} - \frac{1}{N+3} - \dots - \frac{1}{2N+1} \right] \\ &= 1 - \frac{1}{N+1} - \frac{N}{N+1} + \frac{1}{2N+1} = \frac{1}{2N+1} \end{aligned}$$

Finalmente, substituindo nossa cota na Equação (2.15) segue-se que:

$$P_N(0 \in A(1)) \geq \sum_{i=2}^{N-1} i \left(\frac{1}{2N+1} \right)^2 = \left(\frac{1}{2N+1} \right)^2 \frac{(N+1)(N-2)}{2} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \frac{1}{8}$$

Logo, $\liminf_N P_N(0 \in A(1)) \geq \frac{1}{8}$ e o item (i) está demonstrado. Para demonstrar o item (ii), basta fazer essencialmente o mesmo tipo de conta feito em (i):

$$\begin{aligned} P_N(0 \in C(1)) &= P_N \left(\bigcup_{j=0}^{N-1} \{|C_0| = N+j\} \right) = \sum_{j=0}^{N-1} (N+j) P_N(C_0 = [0, N+j-1]) \\ &\geq \sum_{j=0}^{N-1} (N+j) P_N(0 \in C(U_{-1}^-), N+j-1 \in C(U_{N+j}^-)) \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} (N+j) \frac{2(N-j)}{(N+j)(N+j+1)(N+j+2)} = \sum_{j=0}^{N-1} \frac{2(N-j)}{(N+j+1)(N+j+2)} \\ &= \sum_{j=0}^{N-1} 2(N-j) \left(\frac{1}{(N+j+1)} - \frac{1}{(N+j+2)} \right) \\ &= 2 \left[\sum_{j=0}^{N-1} \frac{(N-j)}{(N+j+1)} - \sum_{j=0}^{N-1} \frac{(N-j)}{(N+j+2)} \right] \\ &= 2 \left[\left(\frac{N}{N+1} + \frac{N-1}{N+2} + \dots + \frac{1}{2N} \right) - \left(\frac{N}{N+2} + \frac{N-1}{N+3} + \dots + \frac{1}{2N+1} \right) \right] \\ &= 2 \left[\frac{N}{N+1} - \frac{1}{N+2} - \frac{1}{N+3} - \dots - \frac{1}{2N+1} \right] = 2 - 2 \sum_{j=0}^N \frac{1}{N+j+1} \\ &= 2 - 2 \sum_{j=0}^N \frac{1}{N+1} \frac{1}{1 + \frac{j}{N+1}} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 2 - 2 \int_0^1 \frac{1}{1+x} dx = 2 - 2 \ln(2) \quad \square \end{aligned}$$

Finalizamos esta seção chamando atenção ao fato de que para o modelo que congela clusters infinitos, que pode ser interpretado como tomar o parâmetro $N = \infty$, temos que $P_\infty(0 \in C(1)) = 1$, mas o Teorema 2.3 nos diz que $\limsup_N P_N(0 \in C(1)) = 1 - \liminf_N P_N(0 \in A(1)) \leq \frac{7}{8}$. Sendo assim, o comportamento do modelo finito não se aproxima daquele do modelo infinito quando $N \rightarrow \infty$.

Capítulo 3

O Modelo em \mathbb{Z}^2

Vamos agora estudar percolação congelada em \mathbb{Z}^2 . Diferentemente do modelo apresentado no Capítulo 2, nosso modelo agora será de percolação de elos. Então definimos uma família de variáveis aleatórias $(U_x : x \in \mathbb{E}^2)$ iid. com distribuição uniforme em $[0, 1]$ assim como já havíamos feito outras vezes. Entretanto, mudaremos nosso critério de congelamento. Estudaremos tanto o modelo infinito quanto o de parâmetro N , mas mediremos o tamanho de um cluster C através de seu diâmetro, e não de seu número de vértices. Ou seja, se $C \subset \mathbb{Z}^2$ é o conjunto dos vértices de um cluster (ativo ou congelado), o diâmetro do cluster será $\text{diam } C = \sup\{\|x - y\|; x, y \in C\}$ onde a norma usada é a do máximo. Como antes, no modelo de parâmetro N um cluster congelará quando atingir um diâmetro maior ou igual a N .

É claro que no modelo infinito esta modificação não altera em nada o congelamento, mas ela faz diferença no modelo finito. Além disso, haverá uma nova diferença em relação ao congelamento. Veja que nossa noção de tamanho está associada com a quantidade de vértices, mas nos perguntamos se um elo está congelado ou não. E se um elo estiver conectando um cluster congelado a um ativo? Se após algum tempo tal cluster ativo congelar, uma das extremidades de e pertencerá a dois clusters congelados. É mais simples trabalharmos com clusters que são disjuntos.

Uma solução para isso é considerar que quando um cluster congela, toda a sua fronteira externa de elos, que estão inativos neste momento, permanece inativa para sempre. Em outras palavras, o elo e fica inativo até o tempo U_e , no qual ele verifica se alguma de suas extremidades pertence a um cluster congelado. Se a resposta for afirmativa, ele permanecerá inativo até o fim. Senão, ele é ativado e pode congelar ou não dependendo do diâmetro de seu cluster.

Observe que desta maneira, podemos determinar se um cluster está congelado ou não olhando apenas para seu diâmetro: se $\text{diam } C < N$ então ele não congelou, e se $\text{diam } C \geq N$ ele congelou. Sendo assim, é desnecessário considerar que os elos podem ter 3 estados, podemos simplesmente considerar que elos ativos ou congelados estão *abertos* e os inativos estão *fechados*.

Faremos apenas mais uma observação com respeito à notação. Usaremos a notação que já apresentamos junto com o acoplamento padrão: um elo e é dito t -aberto se $U_e < t$ e t -fechado caso contrário. Chamamos a atenção ao fato de que um elo t -aberto pode se encontrar fechado no tempo t , caso no tempo U_e houvesse um cluster congelado em uma de suas extremidades.

3.1 Dualidade em \mathbb{Z}^2 e a Desigualdade RSW

A percolação de elos de Bernoulli em \mathbb{Z}^2 possui duas propriedades especiais que a distinguem da percolação de elos de Bernoulli em \mathbb{Z}^d com $d \geq 3$, a *planaridade* e *dualidade*. Combinadas, elas são responsáveis por um grande número de resultados que valem para \mathbb{Z}^2 mas não foram ainda esclarecidos para dimensões maiores. A demonstração de que $\theta(p_c) = 0$ é um exemplo. Através delas, é possível até mesmo mostrar que o ponto crítico para $d = 2$ é exatamente $\frac{1}{2}$, enquanto não há a menor razão para se acreditar que obteremos o valor exato de $p_c(\mathbb{Z}^d)$ em outras dimensões.

Nos dois resultados que mostraremos a respeito do modelo descrito de percolação congelada em \mathbb{Z}^2 , essas propriedades possuem um papel central, assim como uma de suas consequências: uma técnica conhecida por desigualdade de Russo-Seymour-Welsh (RSW). Não demonstraremos todos os resultados que usaremos, mas ao menos explicaremos as ideias por trás de tal técnica e algumas de suas implicações. Para maiores informações, indicamos a referência [10].

Quando nos referimos a planaridade, estamos nos referindo de modo geral à ideia de que fixada uma caixa, se temos um caminho que liga seus lados esquerdo e direito, e temos outro caminho ligando seu topo e seu fundo, então os dois caminhos devem se cruzar. É claro que em dimensões maiores que 2 há espaço de sobra para existirem caminhos deste tipo que não se cruzam.

Vamos agora introduzir o conceito de dualidade. Considere o grafo \mathbb{Z}_*^2 , que denominaremos o dual de \mathbb{Z}^2 , como sendo o grafo \mathbb{Z}^2 transladado pelo vetor $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$.

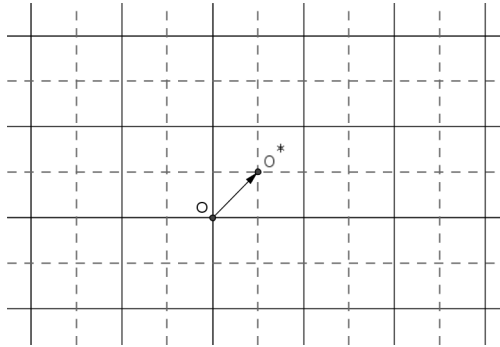


Figura 3.1: \mathbb{Z}^2 e seu dual

Observe que cada elo de \mathbb{Z}^2 cruza exatamente um elo de \mathbb{Z}_*^2 . Sendo assim, podemos considerar que uma configuração ω de \mathbb{Z}^2 induz em seu dual uma configuração da seguinte maneira: elos correspondentes em \mathbb{Z}^2 e \mathbb{Z}_*^2 possuem o mesmo estado. Em outras palavras, se um elo estiver aberto (resp. fechado), seu correspondente estará aberto (fechado). Dessa forma, utilizando a dualidade conseguimos acoplar dois processos de percolação de elos de Bernoulli, um com parâmetro p no primal e outro com parâmetro p no dual.

Tal acoplamento nos permite tirar conclusões não óbvias a respeito de alguns eventos. Por exemplo, seja $A = \{0 \leftrightarrow \infty\}$, $B = \{\text{existe um circuito fechado no dual ao redor da origem}\}$ e $C = \{\text{existe um circuito fechado no primal ao redor da origem}\}$. Então é bastante intuitivo (apesar de ter uma demonstração bastante técnica, veja em [11]) que A e B são o mesmo evento, e é claro que $P_p(B) = P_p(C)$. Logo, $P_p(A) = P_p(C)$, apesar de A e C serem eventos distintos.

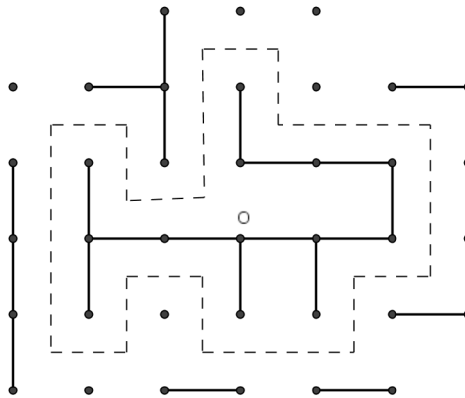


Figura 3.2: Aglomerado aberto finito da origem em \mathbb{Z}^2 e seu circuito dual fechado

Este fato é uma das ideias centrais da demonstração do Teorema 1.3, que optamos por omitir. Utilizando a planaridade, podemos demonstrar o seguinte lema. Seja $LR(l)$ o evento em que existe um cruzamento da esquerda para a direita da caixa $B(l) = [-l, l]^2$, ou seja, um caminho aberto ligando seus lados esquerdo e direito. Além disso, seja $LR(kl, l)$ o evento em que existe um cruzamento esquerda-direita do retângulo $B(kl, l) = [-l, (2k - 1)l] \times [-l, l]$ (aqui, k representa a razão entre largura e altura da caixa). Então vale que

Lema 3.1 *Para todo $p \in [0, 1]$, se $P_p(LR(l)) = \tau$ então $P_p(LR(\frac{3}{2}l, l)) \geq (1 - \sqrt{1 - \tau})^3$.*

O Lema 3.1, apesar de parecer bastante singelo, é a pedra fundamental sobre a qual se baseiam muitos dos resultados desta seção. A combinação deste resultado com a desigualdade FKG (para referência, ver [10]), nos permite tirar conclusões bastante interessantes sobre eventos relacionados ao cruzamento de caixas ou sobre a existência de circuitos. Podemos mostrar que:

Proposição 3.1 *Dado $k \in \mathbb{N}$, se $P_p(LR(l)) = \tau = \tau(p, l)$ então existe uma função $f = f_k : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ independente de l , estritamente crescente, com $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e tal que*

$$P_p(LR(kl, l)) \geq f(\tau)$$

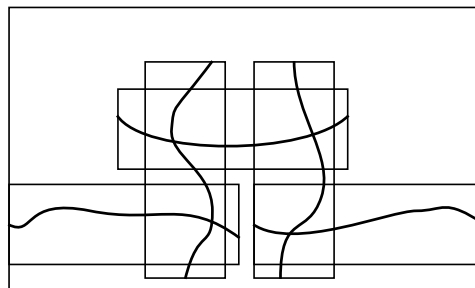


Figura 3.3: Construção de caminho cruzando um retângulo

A ideia por trás da Proposição 3.1 é simples: sobrepor várias caixas de mesmo tamanho de $B(\frac{3}{2}l, l)$, de forma que se houver cruzamentos em todas elas então formaremos um cruzamento da caixa

maior. Veja que para um determinado l_0 fixo só precisamos de um número finito de caixas. Além disso, como as proporções das caixas estão fixas, a construção feita para l_0 servirá para qualquer outro l , por semelhança. A conclusão do resultado depende da desigualdade FKG, por isso não entraremos em detalhes.

Uma observação importante é que a mesma demonstração se aplica se trocarmos a caixa $B(\frac{3}{2}l, l)$ por uma outra com proporções fixas cujo tamanho varia com l e trocarmos o evento $LR(kl, l)$ por algum outro que envolva a existência de um caminho aberto em determinada região, desde que tal caminho possa ser obtido da mesma forma que descrevemos no parágrafo acima e se respeitem as proporções. Um outro resultado muito importante, este proveniente da dualidade, é a seguinte proposição:

Proposição 3.2 *Se $p = p_c(\mathbb{Z}^2) = \frac{1}{2}$, então para qualquer $l \in \mathbb{N}$ temos $P_p(LR(l)) \in [\frac{1}{4}, \frac{3}{4}]$.*

Segue como corolário das Proposições 3.1 e 3.2 que a fase crítica apresenta um comportamento especial. Seja $O(l)$ o evento em que existe um circuito aberto ao redor da origem no anel $B(3l) \setminus B(l)$. Podemos combiná-las para conseguir o seguinte:

Corolário 3.1 *Fixado $k \in \mathbb{N}$, existe $\alpha = \alpha(k) > 0$ tal que $P_{\frac{1}{2}}(LR(kl, l)) \geq \alpha$ para todo $l \in \mathbb{N}$. Além disso, existe $\beta > 0$ tal que, para todo $l \in \mathbb{N}$, temos $P_{\frac{1}{2}}(O(l)) \geq \beta$.*

Mencionamos aqui uma consequência simples deste corolário, que segue do Lema de Borel-Cantelli e do fato de que $\theta(1/2) = 0$. Precisaremos da Proposição 3.3 para abordar a existência do modelo infinito de percolação congelada em \mathbb{Z}^2 , na próxima seção.

Proposição 3.3 *Se $p = 1/2$, com probabilidade 1 existem infinitos circuitos abertos disjuntos ao redor da origem.*

3.2 A Questão da Existência

Como discutimos no Capítulo 1, o modelo de percolação congelada que idealizamos pode nem mesmo existir, dependendo das escolhas que fazemos de grafo e de critério de congelamento. No Capítulo 2, mostramos um modelo em \mathbb{Z} tal que sua versão que congela clusters infinitos existe. Veremos agora que quando tentamos congelar clusters infinitos em \mathbb{Z}^2 segundo o critério que descrevemos no início deste capítulo, o modelo resultante não está bem definido.

O teorema abaixo demonstra esta não existência, e foi baseado no artigo de van den Berg e Tóth [6]. Entretanto, a primeira argumentação sobre este fato foi feita por Benjamini e Schramm [3].

Teorema 3.4 *Não existe o processo de percolação congelada de elos em \mathbb{Z}^2 que congela clusters infinitos.*

Demonstração: Considere o acoplamento usual, como apresentamos logo antes da Proposição 1.2. É fato conhecido que em \mathbb{Z}^2 temos $p_c = 1/2$ e que $\theta(1/2) = 0$, e assim temos que no tempo $1/2$ quase certamente não existe algum cluster congelado. Além disso, sabemos pela Proposição 3.3 que com probabilidade 1 existem infinitos circuitos $1/2$ -abertos disjuntos que circulam a origem. Vamos denotar tais circuitos por c_1, c_2, \dots de forma que os circuitos mais internos sejam os de menor numeração. Além disso, tal escolha

pode ser tornada única se tomamos c_1 como o circuito $1/2$ -aberto mais interno que circula a origem, c_2 como o circuito $1/2$ -aberto mais interno que circula a origem e não está conectado a c_1 por caminho $1/2$ -aberto, e assim sucessivamente.

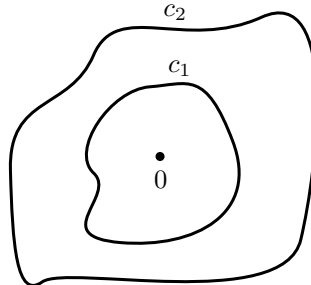


Figura 3.4: Circuitos disjuntos ao redor da origem em \mathbb{Z}^2

Agora, defina $p_i = p_i(\omega) = \inf\{p : c_i \text{ está conectado a } c_{i+1} \text{ por caminho } p\text{-aberto}\}$. Como há um número finito de caminhos ligando c_i a c_{i+1} , o valor de p_i coincide com U_e para algum elo e entre os dois circuitos. Observe que, devido a isso, os p_i são todos distintos quase certamente.

Afirmamos agora que $p_n \rightarrow 1/2$ quando $n \rightarrow \infty$. De fato, fixado $p > 1/2$ temos que há um único cluster infinito de elos p -abertos e se fixamos um vértice v dele, um caminho p -aberto infinito que saia de v atravessará todos os circuitos c_n com n suficientemente grande, implicando que $p_n \leq p, \forall n$ grande.

Vamos fixar uma configuração ω . Podemos nos restringir apenas às configurações que possuam todas as propriedades quase certas que mencionamos acima. Se o modelo em discussão existisse, dado um $p > 1/2$ qualquer, seria possível identificar quais clusters estão congelados e quais não estão no tempo p . É fácil ver que caso um circuito c_n congele, ele deve congelar por inteiro. Logo existiria um sequência de funções $I_n : [1/2, 1] \rightarrow \{0, 1\}$, $n \in \mathbb{N}$, tal que $I_n(p) = 0$ se, e só se, c_n não está congelado no tempo p .

As funções I_n devem possuir algumas propriedades. Há apenas duas formas possíveis para I_n . Uma delas é $I_n(p) = 0 \forall p \in [1/2, 1]$, representando que o circuito c_n não congela. A outra é que existe um tempo $t_n \in (1/2, 1]$ em que c_n congela, e assim temos

$$I_n(p) = \begin{cases} 0 & , \text{ se } p < t_n \\ 1 & , \text{ caso contrário} \end{cases} \quad (3.1)$$

Vamos fixar $p > 1/2$. Sabemos que existe um único cluster p -aberto infinito, e portanto deve haver algum cluster congelado no tempo p . Além disso, se para algum n temos que $I_n(p) = 1$, então o cluster congelado de c_n no tempo p contém também todo circuito c_l com $l > n$, já que tal cluster é infinito. Sendo assim, existe $n_0 = \min\{n \in \mathbb{N} ; I_l(p) = 1, \forall l \geq n\}$.

Naturalmente, temos que $1/2 < p_{n_0} \leq t_{n_0} \leq p$. Escolha agora $p' \in (1/2, p_{n_0})$. De maneira análoga à que justificamos acima, deve existir $n'_0 = \min\{n \in \mathbb{N} ; I_l(p') = 1, \forall l \geq n\}$. Veja que como $p' < p_{n_0}$, o circuito $c_{n'_0}$ congelou antes de c_{n_0} se conectar a c_{n_0+1} e conseqüentemente, antes de c_{n_0} congelar. Portanto, devemos ter $n'_0 > n_0$. Mas então, no tempo p' nós temos $I_{n_0}(p') = 0$ e $I_{n'_0}(p') = 1$, ou seja, o circuito c_{n_0} não havia congelado no tempo p' e já estava cercado por um cluster congelado. Logo, é impossível que ele esteja congelado no tempo p , absurdo! \square

3.3 Densidade de Vértices Ativos

Como vimos na seção anterior, o modelo de percolação congelada de elos em que congelamos clusters infinitos não existe. Entretanto, já vimos na Proposição 2.1 que o modelo com um parâmetro N de congelamento existe para qualquer $d \in \mathbb{N}$, pelo menos da forma apresentada na Seção 2.1. Não é difícil adaptar a demonstração da Proposição 2.1 para o modelo deste capítulo.

Sendo assim, é natural estudarmos qual a probabilidade do cluster de um certo sítio terminar ativo no modelo de parâmetro N . Nesta seção, estudamos como tal probabilidade se comporta quando $N \rightarrow \infty$. Será que a não existência do modelo infinito para \mathbb{Z}^2 é de alguma forma relacionada com este comportamento? Seja C^N o cluster da origem no tempo 1. Mais especificamente, mostraremos o seguinte resultado, presente em van den Berg, de Lima e Nolin [5]:

Teorema 3.5 *Para percolação congelada em \mathbb{Z}^2 temos que para todo $a, b \in (0, 1)$ com $a < b$ vale que*

$$\liminf_N P(\text{diam } C^N \in (aN, bN)) > 0$$

Demonstração: Para demonstrá-lo, construiremos um evento de probabilidade uniformemente afastada de 0 para N grande e tal que sua ocorrência implique que $\text{diam } C^N \in (aN, bN)$. A ideia geral da construção é conseguir criar um cluster congelado que cerque a origem em um determinado tempo mas não a contenha, e além disso deixe pouco espaço para o cluster da origem crescer, impedindo seu congelamento. Tal evento é baseado na construção geométrica que descrevemos abaixo. Apesar de aparentemente complicada, ela é razoavelmente intuitiva quando tentamos seguir a ideia geral que apresentamos. A Figura 3.5 é essencial para o entendimento da construção.

Para $k \in \mathbb{N}$, definimos $B(k) = [-\lfloor k/2 \rfloor, \lfloor k/2 \rfloor]^2$. Escolhemos $c \in (a, b)$ qualquer e depois tomamos l tal que $l + (b - c)/2 < 1 < l + (b + c)/2$. Além disso, escolha $\epsilon \in (0, 1)$ de forma que $l + (b - c)/2 + \epsilon < 1$. Mais tarde, se necessário podemos diminuir ϵ ainda mais. Chamaremos de:

- R o retângulo de comprimento $(l + (b - c)/2)N$ e altura ϵN , posicionado de forma que seu lado esquerdo esteja centralizado sobre o lado direito da caixa $B(cN)$.
- Λ a união da caixa $B(bN)$ com R , e Λ' o conjunto dos pontos cuja distância a Λ é $\leq \epsilon N$.
- T o retângulo de comprimento $4\epsilon N$ e altura $3\epsilon N$ tal que seu lado esquerdo está centralizado sobre o lado direito de $B(bN)$.
- L_1 (respectivamente L_2) o retângulo de comprimento ϵN cujo lado de baixo (resp. cima) está o mais à direita possível sobre o lado superior (resp. lado inferior) de $B(cN)$ e o lado de cima (resp. baixo) está sobre a fronteira de Λ' .

Utilizando os objetos definidos acima, podemos então definir um evento que de fato execute nossa ideia de ‘isolar’ a origem, e assim basta mostrar que quando $N \rightarrow \infty$ tal evento possui probabilidade uniformemente afastada de zero. No lema abaixo, quando falamos que existe um cruzamento horizontal de uma caixa, queremos dizer que existe um caminho ligando o lado esquerdo ao lado direito dela.

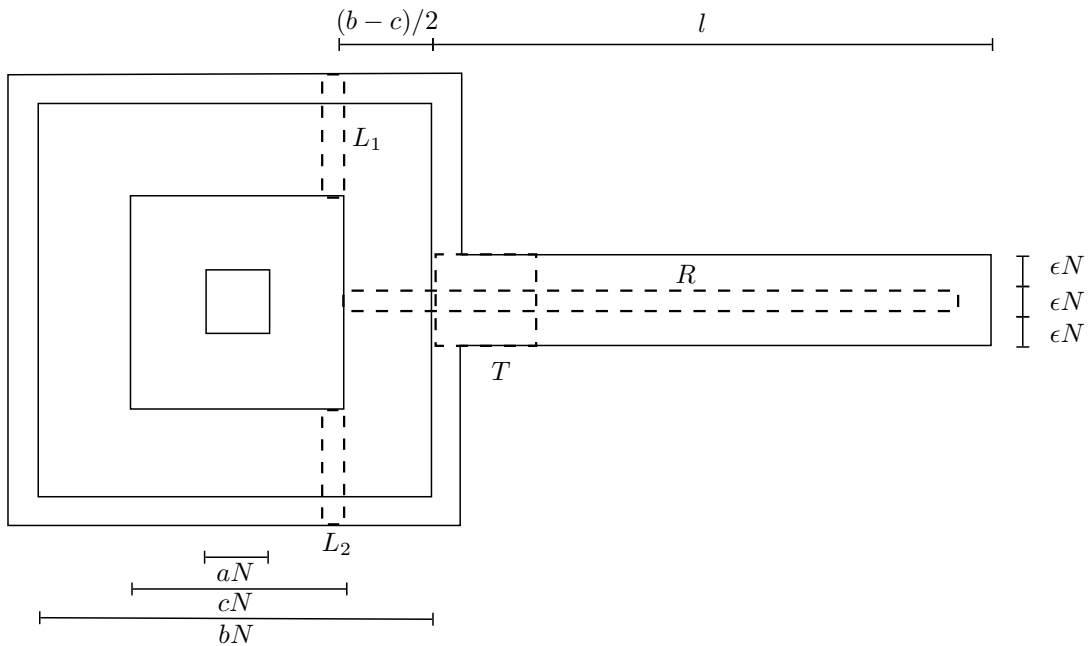


Figura 3.5: Caixas usadas na construção do evento

Lema 3.2 *Se existe $\tau \in (0, 1/2)$ tal que os eventos (i) - (vi) abaixo valem, então $\text{diam } C^N \in (aN, bN)$.*

- (i) *existe circuito τ -aberto γ no anel $B(bN) \setminus B(cN)$.*
- (ii) *existe circuito dual 1/2-fechado no anel $B(cN) \setminus B(aN)$.*
- (iii) *existe circuito dual 1/2-fechado π no anel $\Lambda' \setminus \Lambda$.*
- (iv) *existem caminhos duais 1/2-fechados π_1 em L_1 e π_2 em L_2 , conectando γ e π .*
- (v) *existe um caminho 1/2-aberto em R conectando γ ao lado direito de R .*
- (vi) *não existe um cruzamento horizontal τ -aberto na região de T entre os dois trechos do caminho π .*

Demonstração: A demonstração do Lema 3.2 é bem direta. Se de fato este τ existe, no tempo τ o circuito γ estará aberto e não estará congelado, pois o evento (vi) limita o diâmetro máximo do cluster aberto que contém γ a $(b + 5\epsilon)N < N$ se ϵ é pequeno. Analogamente, nenhum cluster no interior de π e à direita de T pode congelar até o tempo τ , pois seu diâmetro é limitado por lN .

No tempo $1/2$, por (v) existe um cruzamento horizontal aberto em R ligando γ ao lado direito de R . Observe que um cluster aberto que existia à direita de T no tempo τ e que não tenha se ligado a γ não pode ter congelado, devido à existência dos caminhos π_1 e π_2 mencionados em (iv). Logo, no tempo $1/2$ o cluster aberto de γ está unido ao cruzamento aberto de R , e ambos congelaram juntos. Por (ii), a origem não congelou e portanto seu cluster no tempo 1 terá tamanho entre aN e bN . \square

De volta à demonstração do Teorema 3.5, para cotar a probabilidade do evento descrito no lema utilizaremos algumas vezes os resultados da Seção 3.1 e também nos aproveitamos de que se γ é o circuito τ -aberto mais interno em $B(bN) \setminus B(cN)$ (evento $E_1(\gamma)$) e π é o circuito dual mais externo em $\Lambda' \setminus \Lambda$ (evento $E_3(\pi)$), então muitos dos outros eventos descritos no lema são independentes. É importante observar que o tempo τ que aparece no Lema 3.2 não precisa ser o mesmo para cada valor de N , só

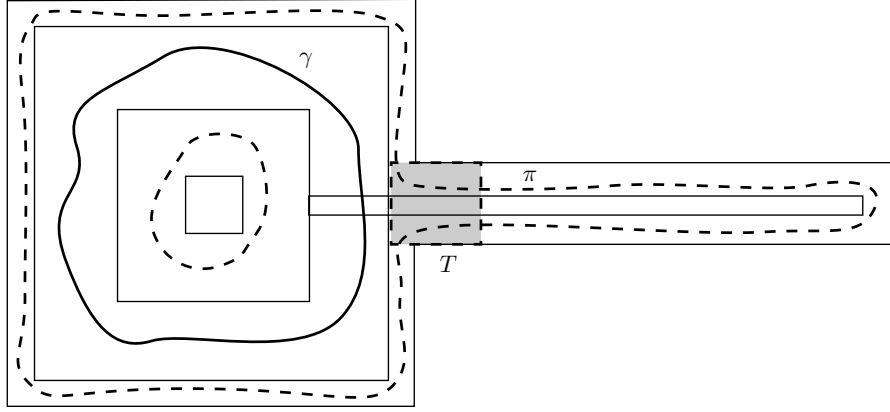


Figura 3.6: No tempo τ , T separa duas regiões dentro de π

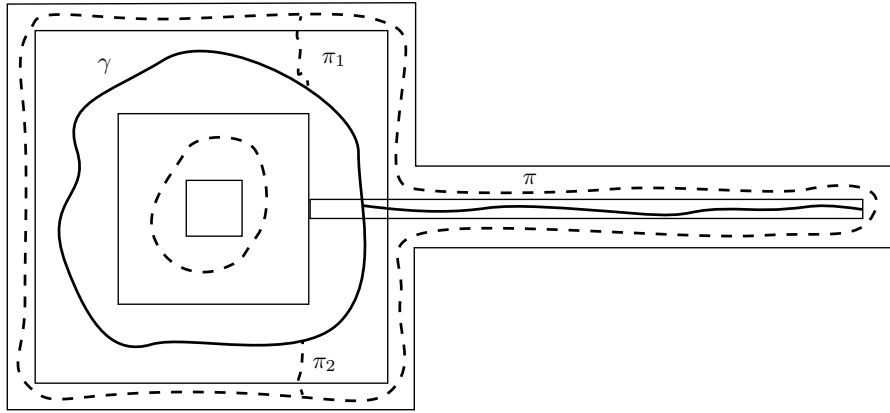


Figura 3.7: No tempo $1/2$, dois clusters abertos se juntaram e congelaram isolando a origem

precisamos escolher $\tau(N)$ de forma que ele sempre esteja em $(0, 1/2)$ e que a probabilidade do evento descrito no lema acontecer esteja uniformemente afastada de zero.

Vamos agora explicitar os eventos que iremos utilizar. Fixados os circuitos γ e π , considere os seguintes eventos:

- $E_1(\gamma)$: γ é o circuito τ -aberto mais interno em $B(bN) \setminus B(cN)$.
- E_2 : existe circuito dual $1/2$ -fechado no anel $B(cN) \setminus B(aN)$.
- $E_3(\pi)$: π é o circuito dual $1/2$ -fechado mais externo no anel $\Lambda' \setminus \Lambda$.
- $E_4(\gamma, \pi)$: existem caminhos duais $1/2$ -fechados π_1 em L_1 e π_2 em L_2 , conectando γ e π .
- $E_5(\gamma)$: existe um caminho $1/2$ -aberto em R conectando γ ao lado direito de R .
- $E_6(\pi)$: não existe um cruzamento horizontal τ -aberto na região de T entre os dois trechos do caminho π .

Podemos começar a cotar a probabilidade do evento do lema ocorrer particionando-o com respeito aos possíveis circuitos γ e π , de onde concluímos que ela vale:

$$p(N) = \sum_{\gamma, \pi} \mathbb{P}(E_1(\gamma), E_2, E_3(\pi), E_4(\gamma, \pi), E_5(\gamma), E_6(\pi)) \quad (3.2)$$

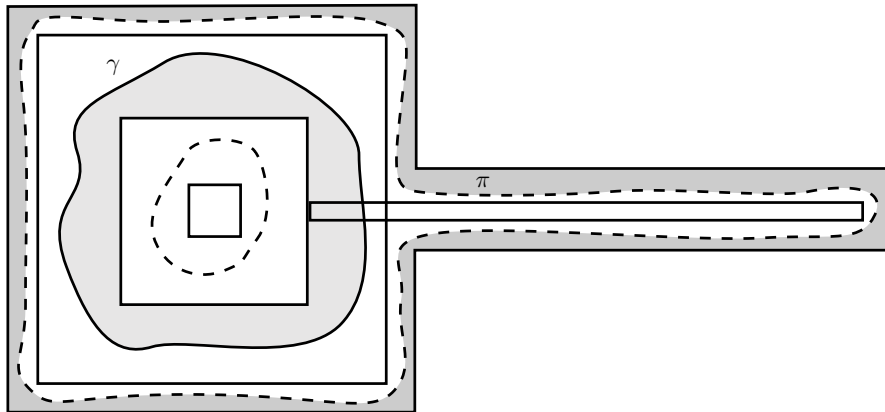


Figura 3.8: As regiões sombreadas mostram de quais elos dependem $E_1(\gamma)$ e $E_3(\pi)$

Veja que muitos destes eventos dependem de elos distintos, sendo que E_5 e E_6 são os dois eventos que apresentam ‘mais dependência’, pois tratam de cruzamentos na mesma direção na caixa R . Seja $A = E_1(\gamma) \cap E_3(\pi)$ e $B = E_5(\gamma) \cap E_6(\pi)$. Então

$$p(N) = \sum_{\gamma, \pi} \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B|A) \mathbb{P}(E_4|A, B) \mathbb{P}(E_2|A, B, E_4) = \sum_{\gamma, \pi} \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B) \mathbb{P}(E_4) \mathbb{P}(E_2) \quad (3.3)$$

onde a última igualdade se deve à independência dos eventos que estamos condicionando. Utilizando o Corolário 3.1, é fácil ver que $\mathbb{P}(E_4(\gamma, \pi))$ está uniformemente afastada de zero, pois ela é maior ou igual à probabilidade de haver um cruzamento vertical 1/2-fechado de L_1 e de L_2 , que são retângulos de proporção fixa. Veja que esta cota independe de π e γ . De forma análoga, temos que $\mathbb{P}(E_2)$ também está uniformemente afastada de zero. Logo, existe uma constante $C_1 > 0$ tal que

$$p(N) \geq C_1 \sum_{\gamma, \pi} \mathbb{P}(A) \mathbb{P}(B)$$

Agora, tudo depende da nossa escolha de $\tau(N)$. Seja $\alpha = \alpha(N)$ a probabilidade de termos um cruzamento horizontal 1/2-aberto do retângulo R . Novamente pelo Corolário 3.1, temos que $\alpha(N)$ está afastado de zero. Escolheremos $\tau(N)$ de forma que

$$\mathbb{P}(\exists \text{ cruzamento } \tau(N)\text{-aberto de } T) = \frac{\alpha(N)}{2} \quad (3.4)$$

Veja que $\tau(N)$ está bem definido. De fato, seja

$$g : [0, 1] \rightarrow [0, 1] \text{ tal que } g(t) := \mathbb{P}(\exists \text{ cruzamento } t\text{-aberto de } T). \quad (3.5)$$

Então g é não-decrescente, por acoplamento. Temos que g também é um polinômio, pois é a soma sobre todas as (finitas) configurações favoráveis da probabilidade delas ocorrerem. Logo, g é contínua e estritamente crescente. Além disso, como $g(0) = 0$ e $g(1/2) > \alpha(N)$, segue do Teorema do Valor Intermediário que existe $\tau(N) \in (0, 1/2)$ tal como em (3.4), e é claro que este $\tau(N)$ é único. Observe que:

$$\mathbb{P}(B) = \mathbb{P}(E_5(\gamma) \cap E_6(\pi)) = \mathbb{P}(E_5(\gamma)) - \mathbb{P}(E_5(\gamma) \cap E_6(\pi)^c) \geq \mathbb{P}(E_5(\gamma)) - \mathbb{P}(E_6(\pi)^c)$$

É claro que $\mathbb{P}(E_5(\gamma)) \geq \alpha$, por inclusão de eventos. Temos também que, por construção:

$$\begin{aligned} \mathbb{P}(E_6(\pi)^c) &= \mathbb{P}(\exists \text{ cruzamento horizontal } \tau\text{-aberto em } T \text{ entre os 2 trechos de } \pi) \\ &\leq \mathbb{P}(\exists \text{ cruzamento horizontal } \tau\text{-aberto em } T) \\ &=: \frac{\alpha}{2} \end{aligned}$$

Dessa forma, conseguimos cotar $\mathbb{P}(B)$ por $\alpha - \alpha/2 = \alpha/2$, que está afastado de zero. Digamos que $\mathbb{P}(B) \geq C_2 > 0$. Utilizando esta cota e a independência dos eventos $E_1(\gamma)$ e $E_3(\pi)$, obtemos:

$$\begin{aligned} p(N) &\geq C_1 C_2 \sum_{\gamma, \pi} \mathbb{P}(A) = C_3 \sum_{\gamma, \pi} \mathbb{P}(E_1(\gamma)) \mathbb{P}(E_3(\pi)) \\ &= C_3 \mathbb{P}(\exists \gamma \text{ circuito } \tau\text{-aberto em } B(bN) \setminus B(cN)) \mathbb{P}(\exists \pi \text{ circuito dual } 1/2\text{-fechado em } \Lambda' \setminus \Lambda) \end{aligned}$$

onde $C_3 = C_1 C_2 > 0$. Se aplicarmos o que discutimos com a Proposição 3.1 e o Corolário 3.1 para a probabilidade de existir um circuito dual 1/2-fechado em $\Lambda' \setminus \Lambda$, concluímos que esta probabilidade também está afastada de zero, digamos por uma constante C_4 . Para finalizarmos a demonstração falta apenas estimarmos por baixo a probabilidade de haver um circuito τ -aberto em $B(bN) \setminus B(cN)$. Isto é consequência da Proposição 3.1: existe uma função estritamente crescente $f : [0, 1] \rightarrow [0, 1]$ e independe de N tal que $f(0) = 0$, $f(1) = 1$ e

$$\mathbb{P}(\exists \gamma \text{ circuito } \tau\text{-aberto em } B(bN) \setminus B(cN)) \geq f(\mathbb{P}(\exists \text{ cruzamento } \tau\text{-aberto de } T)) = f(\alpha/2) > 0$$

Sendo assim, segue-se que $p(N) \geq C_5 > 0$, para todo $N \in \mathbb{N}$ e estamos feitos. \square

Capítulo 4

O Modelo na Árvore Binária

Neste capítulo, o grafo com o qual trabalharemos será a árvore binária com raiz, que denotaremos por T . Tal grafo é a árvore que possui um único sítio com grau 1, que é a raiz da árvore, e todos os outros sítios têm grau 3. A partir de agora, chamaremos tal grafo simplesmente de árvore binária. Estudaremos nele o modelo de percolação congelada de elos, da mesma forma que fizemos em \mathbb{Z}^2 : cada elo e começa fechado no tempo zero e se torna aberto no tempo U_e caso neste tempo nenhuma de suas duas extremidades pertença a um cluster congelado, onde por congelado queremos dizer que o cluster tem número de elos maior que um parâmetro $N \in \mathbb{N}$. Observamos que o modelo infinito pode ser visto como tomando $N = \infty$.

O artigo de Aldous [1] foi o que iniciou o estudo de percolação congelada. Nele se demonstra que o modelo infinito para a árvore binária está bem definido e são fornecidas informações quantitativas a respeito deste modelo. Apesar de não apresentarmos o conteúdo de [1], iremos assumir parte do que é demonstrado nele. Durante este capítulo, seguiremos van den Berg, Kiss e Nolin [4]. Como veremos, a referência [4] mostra que há uma certa convergência do modelo finito para o infinito.

4.1 Resultado sobre Convergência

Começamos apresentando o principal teorema que desenvolveremos neste capítulo, que trata sobre a convergência do modelo finito para o modelo de Aldous. Seja \mathcal{C}_t o cluster da raiz de T no tempo t . O principal resultado apresentado em [4] é o seguinte:

Teorema 4.1 *No modelo de percolação congelada na árvore binária vale que:*

- a) $P_N(\mathcal{C}_t = C) \rightarrow P_\infty(\mathcal{C}_t = C)$ quando $N \rightarrow \infty$, para todo cluster finito C fixado.
- b) $\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} P_N(k \leq |\mathcal{C}_t| < N) = 0$
- c) $\lim_{N \rightarrow \infty} P_N(N \leq |\mathcal{C}_t|) = P_\infty(|\mathcal{C}_t| = \infty)$

No artigo original, menciona-se que este resultado pode ser estendido para outros modelos de percolação congelada na árvore binária, obtidos a partir do que estamos estudando pela alteração da

noção de tamanho de um cluster. Se esta nova medida de tamanho satisfizer algumas hipóteses, o mesmo tipo de resultado será válido, mas nós estudaremos apenas o caso em que o tamanho do cluster é dado pelo seu número de elos.

A principal vantagem de se trabalhar com a árvore binária T é que tal grafo é suficientemente simples para que possamos fazer contas mais precisas, nos aproveitando também de sua estrutura geométrica. Denotemos por \mathcal{A}_t o conjunto dos elos abertos no tempo t e seja $e_0 = \langle v_0, v_1 \rangle$ o único elo que sai de v_0 , a raiz de T . Se $T = (V, E)$ e $e \in E$ é um elo com $e \neq e_0$, então $T \setminus e$ contém duas componentes conexas, sendo que apenas uma delas contém o elo e_0 . Seja T_e a outra componente, juntamente com o elo e . Observe que T_e é uma árvore isomorfa a T .

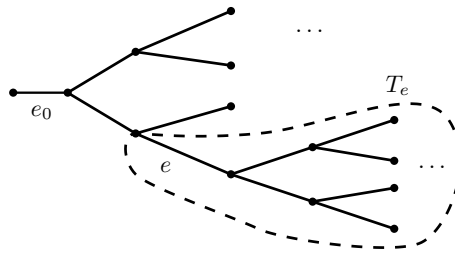


Figura 4.1: A árvore T_e é isomorfa a T

As variáveis aleatórias $(U_x : x \in E)$ que utilizamos para definir a percolação congelada em T induzem um processo de percolação congelada em T_e ; para tal basta ignorar as variáveis U_x com $x \notin T_e$. Se denotarmos por $\mathcal{A}_t(e)$ o conjunto de elos abertos no tempo t deste outro processo, é claro que \mathcal{A}_t e $\mathcal{A}_t(e)$ têm a mesma distribuição, devido ao isomorfismo de T e T_e . Veja que, mais uma vez, estamos nos utilizando de um acoplamento: a família de variáveis U_x é a mesma para os processos \mathcal{A}_t e $\mathcal{A}_t(e)$ com $e \neq e_0$.

Nesta construção se encontra um dos principais passos para a demonstração do teorema. Vejamos o porquê. No espírito do item *a)* do Teorema 4.1, suponhamos que, fixado um cluster finito C que contém a raiz, queremos calcular a probabilidade do evento $\{\mathcal{C}_t = C\}$. Para tal devemos ter que os elos de C estão abertos no tempo t e que os elos de sua fronteira externa ∂C estão fechados em t . Podemos supor que o número de elos de C é menor que nosso parâmetro N , pois queremos estudar $P_N(\mathcal{C}_t = C)$ para N grande. Sabemos que um elo e qualquer só pode estar fechado no tempo t se $U_e > t$ (e portanto e não teve oportunidade de abrir) ou se $U_e \leq t$ mas quando e tentou abrir havia um cluster congelado em uma de suas extremidades. Como $|C| < N$, se $e \in \partial C$ está fechado no tempo t , a informação do tamanho de C impede que e esteja fechado devido a C estar congelado. Logo, e só estará fechado se ele não pertencer a $\mathcal{A}_t(e)$. Sendo assim:

$$P_N(\mathcal{C}_t = C) = P_N \left(\bigcap_{e \in C} \{e \in \mathcal{A}_t\} \cap \bigcap_{e \in \partial C} \{e \notin \mathcal{A}_t(e)\} \right) \quad (4.1)$$

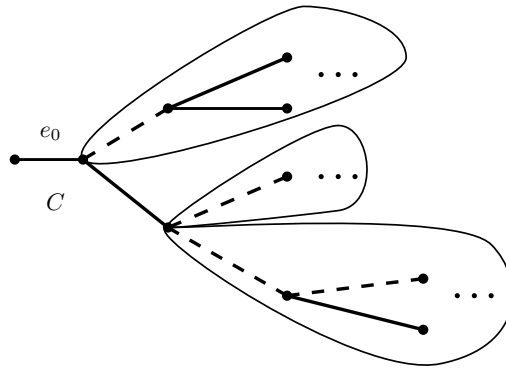


Figura 4.2: Cercando C ; os eventos $\{e \notin \mathcal{A}_t(e)\}$ são independentes para $e \in \partial C$

Seja $A = \bigcap_{e \in \partial C} \{e \notin \mathcal{A}_t(e)\}$. Veja que dentro do evento A , para que $e \in C$ esteja aberto basta que $U_e < t$. Além disso, os eventos $\{e \notin \mathcal{A}_t(e)\}$ com $e \in \partial C$ e $\{U_e < t\}$ com $e \in C$ são independentes (veja Figura 4.2). Logo,

$$\begin{aligned}
 P_N(\mathcal{C}_t = C) &= P_N \left(\bigcap_{e \in C} \{U_e < t\} \cap \bigcap_{e \in \partial C} \{e \notin \mathcal{A}_t(e)\} \right) \\
 &= t^{|\mathcal{C}|} \prod_{e \in \partial C} P_N(e \notin \mathcal{A}_t(e)) \\
 &= t^{|\mathcal{C}|} P_N(e_0 \notin \mathcal{A}_t)^{|\mathcal{C}|+1}
 \end{aligned} \tag{4.2}$$

onde a última igualdade se justifica porque os processos \mathcal{A}_t e $\mathcal{A}_t(e)$ são identicamente distribuídos e $|\partial C| = |\mathcal{C}| + 1$. Dessa forma, o estudo de $P_N(\mathcal{C}_t = C)$ está intimamente relacionado ao estudo da seguinte função:

$$\beta_N(t) := P_N(e_0 \notin \mathcal{A}_t) = P_N(e_0 \text{ está fechado no tempo } t) = P_N(|\mathcal{C}_t| = 0) \tag{4.3}$$

A função β_N está definida mesmo no modelo que congela clusters infinitos, caso em que a denotamos por β_∞ . Não é difícil ver que β_N é decrescente em t , pois se $t \leq s$ então $\{e_0 \notin \mathcal{A}_s\} \subset \{e_0 \notin \mathcal{A}_t\}$. Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned}
 \beta_N(t) &= P_N(U_{e_0} \geq t) + P_N(U_{e_0} < t \text{ mas } e_0 \text{ está fechado no tempo } t) \\
 &= (1 - t) + P_N(U_{e_0} < t \text{ mas } e_0 \text{ está fechado no tempo } t)
 \end{aligned}$$

Observe que se e_0 teve sua oportunidade de abrir em um tempo menor que t mas ainda está fechado no tempo t , então ele obrigatoriamente tinha alguma extremidade em um cluster congelado, e não terá mais oportunidades de abrir. Sendo assim, a probabilidade deste evento ocorrer é crescente em t , o que implica que $\beta_N(t) - 1 + t$ é crescente em t .

Para conseguirmos mais informação a respeito da função β_N , nós iremos deduzir uma equação diferencial para ela. Após alguns cálculos, conseguiremos mostrar que $\beta_N \rightarrow \beta_\infty$ uniformemente quando $N \rightarrow \infty$, o que demonstra *a*), pois a Equação (4.2) também se aplica quando $N = \infty$:

$$P_N(\mathcal{C}_t = C) = t^{|\mathcal{C}|} \beta_N(t)^{|\mathcal{C}|+1} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} t^{|\mathcal{C}|} \beta_\infty(t)^{|\mathcal{C}|+1} = P_\infty(\mathcal{C}_t = C) \tag{4.4}$$

Entretanto, para mostrarmos o item *b)* será necessário um estudo mais fino da convergência de β_N , pois precisaremos estimar qual a velocidade de convergência para β_∞ . Finalmente, veremos que os itens *a)* e *b)* implicam *c)*. A respeito do conteúdo do Teorema 4.1, temos que os itens *a)* e *c)* são bastante naturais. O item *a)* nos informa sobre o comportamento de \mathcal{C}_t quando ele é finito. Já o item *c)* diz que a probabilidade de \mathcal{C}_t estar congelado no modelo finito converge quando $N \rightarrow \infty$ para a do modelo infinito. Entretanto, o item *b)* pode a princípio parecer um tanto obscuro. Vamos analisar a demonstração de *c)* agora, pois ela nos dá uma motivação para *b)*.

Lema 4.1 *Os itens a) e b) implicam c).*

Demonstração: Queremos mostrar que $\lim_N P_N(N \leq |\mathcal{C}_t|) = P_\infty(|\mathcal{C}_t| = \infty)$. A ideia é utilizar a convergência que já temos para clusters C finitos. Primeiramente, observamos que fixado $k \in \mathbb{N}$ temos:

$$P_N(|\mathcal{C}_t| < k) = \sum_{C; |C| < k} P_N(\mathcal{C}_t = C) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} \sum_{C; |C| < k} P_\infty(\mathcal{C}_t = C) = P_\infty(|\mathcal{C}_t| < k) \quad (4.5)$$

Tomando complementares, isso implica que:

$$\lim_{N \rightarrow \infty} P_N(k \leq |\mathcal{C}_t|) = P_\infty(k \leq |\mathcal{C}_t|) \quad (4.6)$$

Temos também que os eventos $\{k \leq |\mathcal{C}_t|\}$ crescem para $\{|\mathcal{C}_t| = \infty\}$ quando k tende a infinito, e portanto $\lim_{k \rightarrow \infty} P_\infty(k \leq |\mathcal{C}_t|)$ existe e é igual a $P_\infty(|\mathcal{C}_t| = \infty)$. Agora, observe que se $k \leq N$ vale que:

$$P_N(N \leq |\mathcal{C}_t|) = P_N(k \leq |\mathcal{C}_t|) - P_N(k \leq |\mathcal{C}_t| < N) \quad (4.7)$$

Por um lado, a Equação (4.7) nos diz que $P_N(N \leq |\mathcal{C}_t|) \leq P_N(k \leq |\mathcal{C}_t|)$, $\forall k \leq N$. Tomando o limite superior dos dois lados e usando a Equação (4.6), concluímos que:

$$\limsup_N P_N(N \leq |\mathcal{C}_t|) \leq \limsup_N P_N(k \leq |\mathcal{C}_t|) = \lim_N P_N(k \leq |\mathcal{C}_t|) = P_\infty(k \leq |\mathcal{C}_t|) \quad (4.8)$$

Como isto vale para qualquer k , fazendo k tender a infinito segue-se que $\limsup_N P_N(N \leq |\mathcal{C}_t|) \leq P_\infty(|\mathcal{C}_t| = \infty)$. Vejamos agora como tratar o outro lado da desigualdade que queremos mostrar. Tomando o limite inferior na Equação (4.7) temos que:

$$\begin{aligned} \liminf_N P_N(N \leq |\mathcal{C}_t|) &= \liminf_N \{P_N(k \leq |\mathcal{C}_t|) - P_N(k \leq |\mathcal{C}_t| < N)\} \\ &\geq \liminf_N P_N(k \leq |\mathcal{C}_t|) + \liminf_N \{-P_N(k \leq |\mathcal{C}_t| < N)\} \\ &= \lim_N P_N(k \leq |\mathcal{C}_t|) - \limsup_N P_N(k \leq |\mathcal{C}_t| < N) \\ &= P_\infty(k \leq |\mathcal{C}_t|) - \limsup_N P_N(k \leq |\mathcal{C}_t| < N) \end{aligned}$$

Logo, veja que ao fazermos $k \rightarrow \infty$, para chegarmos no resultado enunciado em *c)* só precisamos que $\lim_k \limsup_N P_N(k \leq |\mathcal{C}_t| < N) = 0$, que é precisamente o afirmado em *b)*. \square

4.2 Estudo de β_N

O primeiro passo que daremos na direção de compreender melhor o comportamento das funções β_N é deduzir uma equação diferencial para cada β_N . Para tal, a propriedade que mencionamos na seção anterior assume novamente um papel essencial. Para começar, podemos observar que:

$$\beta_N(t) = 1 - P_N(e_0 \in \mathcal{A}_t) = 1 - \int_0^t P_N(e_0 \in \mathcal{A}_t | U_{e_0} = s) ds \quad (4.9)$$

onde a última igualdade foi obtida após condicionarmos em relação à variável aleatória U_{e_0} . Denotemos por $\tilde{\mathcal{C}}_s$ o cluster aberto de v_1 sem o elo e_0 . Note que, dado que $U_{e_0} = s$, onde $s \leq t$, temos que o evento em que e_0 se encontra ativo no tempo t ocorre se, e só se, quando o elo e_0 tentou ativar o cluster $\tilde{\mathcal{C}}_s$ não era grande demais, a ponto de impedir a ativação de e_0 . Sendo assim, podemos escrever

$$\begin{aligned} \beta_N(t) &= 1 - \int_0^t P_N(|\tilde{\mathcal{C}}_s| < N | U_{e_0} = s) ds \\ &= 1 - \int_0^t \sum_{k=0}^{N-1} P_N(|\tilde{\mathcal{C}}_s| = k | U_{e_0} = s) ds \end{aligned} \quad (4.10)$$

Agora, é suficiente encontrar quanto vale $P_N(|\tilde{\mathcal{C}}_s| = k | U_{e_0} = s)$ para cada valor de k . Veja que, fixado k , há apenas um número finito de clusters de tamanho k que $\tilde{\mathcal{C}}_s$ pode ser. Fixe um deles, digamos C . Como já fizemos anteriormente, podemos observar que se estamos no evento $\{\tilde{\mathcal{C}}_s = C, U_{e_0} = s\}$ então:

- Um elo $e \in C$ deve estar aberto no tempo s .
- Um elo $e \in \partial C \setminus \{e_0\}$ não está aberto no tempo s . Como C tem tamanho $k < N$, isso significa que $e \notin \mathcal{A}_s(e)$.

Sendo assim, se definimos $A = \bigcap_{e \in \partial C \setminus \{e_0\}} \{e \notin \mathcal{A}_s(e)\}$, temos que:

$$\begin{aligned} \{\tilde{\mathcal{C}}_s = C, U_{e_0} = s\} &= A \cap \{U_{e_0} = s\} \cap \bigcap_{e \in C} \{e \in \mathcal{A}_s\} \\ &= A \cap \{U_{e_0} = s\} \cap \bigcap_{e \in C} \{U_e \leq s\} \end{aligned} \quad (4.11)$$

Note que o evento A independe de $\{U_{e_0} = s\}$, os eventos $\{U_e \leq s\}$ com $e \in C$ independem de A e de U_{e_0} , e os eventos $\{e \notin \mathcal{A}_s(e)\}$ com $e \in \partial C \setminus \{e_0\}$ são independentes. Podemos escrever então que:

$$\begin{aligned} P_N(\tilde{\mathcal{C}}_s = C | U_{e_0} = s) &= P_N \left(A \cap \bigcap_{e \in C} \{U_e \leq s\} \mid U_{e_0} = s \right) \\ &= P_N(A | U_{e_0} = s) P_N \left(\bigcap_{e \in C} \{U_e \leq s\} \mid A \cap \{U_{e_0} = s\} \right) \\ &= P_N(A) P_N \left(\bigcap_{e \in C} \{U_e \leq s\} \right) \\ &= \left(\prod_{e \in \partial C \setminus \{e_0\}} P_N(e \notin \mathcal{A}_s(e)) \right) \left(\prod_{e \in C} P_N(U_e \leq s) \right) \\ &= \beta_N(s)^{|\mathcal{C}|+2} s^{|\mathcal{C}|} \end{aligned} \quad (4.12)$$

Desta forma, vemos que quando $|C| = k$ a probabilidade $P_N(\tilde{C}_s = C | U_{e_0} = s)$ não depende da forma específica de C , apenas de seu número de elos. Sendo assim, se denotarmos por a_k o número de clusters C com exatamente k elos segue-se que:

$$P_N(|\tilde{C}_s| = k | U_{e_0} = s) = a_k \beta_N(s)^{k+2} s^k \quad (4.13)$$

Como contar o número de clusters com exatamente k elos? Podemos fazê-lo deduzindo uma equação de recorrência para a sequência a_k . É fácil verificar que $a_0 = 1$. Além disso, note que se e_1 e e_2 são os elos incidentes a v_1 e diferentes de e_0 , podemos decompor os clusters C com $k+1$ elos entre os que contêm e_1 mas não e_2 (a_k possibilidades), os que contêm e_2 mas não e_1 (novamente a_k possibilidades), e os que contêm ambos. Para contar os clusters C que possuem os elos e_1 e e_2 , podemos enxergar a árvore C como sendo composta pelos dois elos já mencionados, uma árvore com j elos ao lado do elo e_1 e uma árvore com $k-1-j$ elos ao lado de e_2 (ver Figura 4.3). Basta então somar sobre os possíveis valores de j para obtermos a equação de recorrência:

$$a_{k+1} = a_k + a_k + \left(\sum_{j=0}^{k-1} a_j a_{k-1-j} \right) \quad (4.14)$$

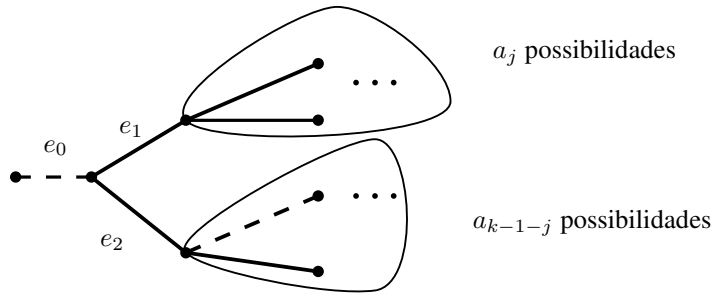


Figura 4.3: Contando clusters C que têm e_1 e e_2

A Equação (4.14) nos remete a uma sequência bastante conhecida: a sequência de Catalan, que denotaremos por c_k . Ela pode ser definida da seguinte forma: $c_0 = 1$ e $c_{k+1} = \sum_{j=0}^k c_j c_{k-j}$. Podemos então simplesmente verificar que $a_k = c_{k+1}$.

Aqui, iremos assumir algumas propriedades da sequência de Catalan (ver, por exemplo, [13]). Pode-se mostrar por exemplo que $c_k = \frac{1}{k+1} \binom{2k}{k}$. Além disso, se denotarmos por $C(x)$ a função geradora da sequência de Catalan, temos que:

$$C(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = \frac{1 - \sqrt{1 - 4x}}{2x} \quad (4.15)$$

A série na Equação (4.15) converge apenas para $|x| \leq \frac{1}{4}$. Introduzimos também uma notação para a soma parcial desta série:

$$C_N(x) = \sum_{k=0}^N c_k x^k \quad (4.16)$$

Voltando a nossas contas para determinar $\beta_N(t)$, podemos utilizar agora a Equação (4.13) e nossa contagem de clusters C de tamanho k para continuarmos as contas na Equação (4.10).

$$\begin{aligned}\beta_N(t) &= 1 - \int_0^t \sum_{k=0}^{N-1} P_N(|\tilde{\mathcal{C}}_s| = k \mid U_{e_0} = s) ds \\ &= 1 - \int_0^t \sum_{k=0}^{N-1} c_{k+1} \beta_N(s)^2 [s\beta_N(s)]^k ds\end{aligned}\tag{4.17}$$

$$\begin{aligned}&= 1 - \int_0^t \frac{\beta_N(s)^2}{s\beta_N(s)} \sum_{k=0}^{N-1} c_{k+1} [s\beta_N(s)]^{k+1} ds \\ &= 1 - \int_0^t \frac{\beta_N(s)}{s} [C_N(s\beta_N(s)) - 1] ds\end{aligned}\tag{4.18}$$

Observamos que apesar de aparecer uma divisão por s na Equação (4.18), a expressão está bem definida para $s = 0$, basta olhar para a Equação (4.17). Veja na Equação (4.17) que o integrando é limitado por $C_N(1)$, pois s e $\beta_N(s)$ são menores ou iguais a 1. Se denotarmos o integrando por $I_N(s)$, podemos escrever:

$$\begin{aligned}|\beta_N(t+h) - \beta_N(t)| &= \left| 1 - \int_0^{t+h} I_N(s) ds - 1 + \int_0^t I_N(s) ds \right| \\ &= \left| \int_t^{t+h} I_N(s) ds \right| \leq |h| |I_N(s)| \leq |h| C_N(1) \xrightarrow{h \rightarrow 0} 0\end{aligned}$$

Concluimos que as funções β_N com $N \in \mathbb{N}$ são contínuas. Mas então, observando novamente a Equação (4.17) temos que o integrando é uma função contínua, o que implica a diferenciabilidade de β_N . Podemos então derivar a Equação (4.18) em relação a t para obter a seguinte equação diferencial:

$$\beta'_N(t) = -\frac{\beta_N(t)}{t} [C_N(t\beta_N(t)) - 1]\tag{4.19}$$

Vale ressaltar que, como nós demonstramos que o modelo está bem definido, podemos concluir que a Equação (4.19) possui β_N como solução, quando fixamos a condição inicial $\beta_N(0) = 1$. Além disso, como a expressão à direita na Equação (4.19) é uma função de classe C^1 nas variáveis t e β_N (é um polinômio em t e β_N), o Teorema de Existência e Unicidade para EDOs nos garante que a função β_N é a única que satisfaz tal equação. Vamos sintetizar este resultado na forma de uma proposição:

Proposição 4.2 *Se $N \in \mathbb{N}$, a função $\beta_N(t)$ é a única solução da EDO dada pela Equação (4.19), com a condição de contorno $\beta_N(0) = 1$.*

Sabendo que β_N é a única solução da equação diferencial apresentada na Proposição 4.2, o próximo passo é tentar obter a solução desta equação. Apesar de não conseguirmos uma forma direta para esta solução, é possível escrevê-la como uma função implícita. Vamos apresentar inicialmente um argumento heurístico de como fazê-lo.

Definimos uma função auxiliar $\gamma_N(s) := s\beta_N(s)$. Temos que γ_N é uma função diferenciável e que sua derivada γ'_N é dada por:

$$\gamma'_N(s) = \beta_N(s) - \beta_N(s) [C_N(\gamma_N(s)) - 1] = \frac{\gamma_N(s)}{s} [2 - C_N(\gamma_N(s))] \quad (4.20)$$

Podemos reescrever a equação acima da seguinte forma:

$$\frac{\gamma'_N(s)}{\gamma_N(s)[2 - C_N(\gamma_N(s))]} = \frac{1}{s} \quad (4.21)$$

Em seguida, integramos de a a t ambos os lados da Equação (4.21) e fazemos a substituição de variáveis $x = \gamma_N(s)$, obtendo:

$$\log t - \log a = \int_a^t \frac{\gamma'_N(s) ds}{\gamma_N(s)[2 - C_N(\gamma_N(s))]} = \int_{\gamma_N(a)}^{\gamma_N(t)} \frac{dx}{x[2 - C_N(x)]} \quad (4.22)$$

Por outro lado, temos que:

$$\int_{\gamma_N(a)}^{\gamma_N(t)} \frac{dx}{x} = \log \gamma_N(t) - \log \gamma_N(a) = \log t + \log \beta_N(t) - \log \gamma_N(a) \quad (4.23)$$

Subtraindo a Equação (4.23) da Equação (4.22), obtemos:

$$\begin{aligned} \int_{\gamma_N(a)}^{\gamma_N(t)} \frac{C_N(x) - 1}{x[2 - C_N(x)]} dx &= [\log t - \log a] - [\log t + \log \beta_N(t) - \log \gamma_N(a)] \\ &= -\log \beta_N(t) + \log \left[\frac{\gamma_N(a)}{a} \right] = -\log \beta_N(t) + \log \beta_N(a) \end{aligned}$$

Finalmente, escolhendo $a = 0$ segue-se que $\gamma_N(a) = 0$ e $\beta_N(a) = 1$, e obtemos a equação:

$$\int_0^{t\beta_N(t)} \frac{C_N(x) - 1}{x[2 - C_N(x)]} dx = -\log \beta_N(t) \quad (4.24)$$

As contas que fizemos para chegar na Equação (4.24) são um pouco delicadas. Por exemplo, ao tomarmos $a = 0$, a Equação (4.22) deixa de fazer sentido. Entretanto, ainda pode ser verdade que a Equação (4.24) é válida. É exatamente isso que afirma nossa próxima proposição:

Proposição 4.3 Para $t \in [0, 1]$, $\beta_N(t)$ é a única solução positiva da equação em z

$$\int_0^{tz} \frac{C_N(x) - 1}{x[2 - C_N(x)]} dx + \log z = 0 \quad (4.25)$$

sujeita à restrição $tz < x_N$, onde x_N é a única solução positiva da equação $C_N(x) - 2 = 0$.

Demonstração: Começamos verificando que x_N está bem definido. Temos que o polinômio $C_N(x)$ tem todos seus coeficientes maiores que zero. Logo, $C'_N(x) = \sum_{k=1}^N k c_k x^{k-1} > 0$ quando $x > 0$ e podemos concluir que a função $C_N(x)$ é crescente neste intervalo. Temos também que $C_N(0) = 1$, e esses dois fatos combinados implicam que existe um único x_N raiz positiva de $C_N(x) = 2$. Além disso, temos que para $x > 0$

$$C_N(x) = \sum_{k=0}^N c_k x^k < \sum_{k=0}^{\infty} c_k x^k = C(x) \quad (4.26)$$

e também que $C(1/4) = 2$ pela Equação (4.15). Sendo assim, temos que $C_N(1/4) < 2$ e portanto $x_N > 1/4$. Considere agora $x \in (0, x_N)$. Já sabemos que neste intervalo temos $1 < C_N(x) < 2$. Logo, o integrando na Equação (4.25),

$$I_N(x) = \frac{C_N(x) - 1}{x[2 - C_N(x)]} = \frac{1}{2 - C_N(x)} \sum_{k=1}^N c_k x^{k-1}, \quad (4.27)$$

é positivo e podemos ver também que ele assume o valor 1 para $x = 0$. Por outro lado, quando $x \nearrow x_N$ o integrando se comporta como $\frac{\alpha}{x_N - x}$, onde $\alpha > 0$. De fato, podemos usar o fato de que x_N é uma raiz simples do polinômio $f(x) = 2 - C_N(x)$ para fatorá-lo:

$$f(x) = (x_N - x)g(x) \quad (4.28)$$

com $g(x)$ um polinômio tal que $g(x) > 0$ quando $x \in [0, x_N]$. Sendo assim, podemos reescrever o integrando da seguinte forma:

$$\frac{1 - f(x)}{xf(x)} = \frac{1 - f(x)}{xg(x)} \frac{1}{x_N - x}. \quad (4.29)$$

Basta observar então que $\frac{1 - f(x)}{xg(x)} \rightarrow \frac{1}{x_N g(x_N)} =: \alpha > 0$ quando $x \rightarrow x_N$. Mas então, devemos ter $\int_0^{x_N} I_N(x) dx = +\infty$. Agora, vamos fixar $t \in (0, 1]$. Para $z \in (0, \frac{x_N}{t})$, defina:

$$F(z) = \int_0^{tz} I_N(x) dx \quad \text{e} \quad G(z) = F(z) + \log z. \quad (4.30)$$

A função $F(z)$ é crescente, pois vimos que $I_N(x) > 0$. Como a função $\log z$ também é crescente concluímos que a função $G(z)$ é crescente. Além disso, temos que:

$$\left. \begin{array}{l} \lim_{z \rightarrow 0^+} F(z) = 0 \quad \text{e} \quad \lim_{z \rightarrow \frac{x_N}{t}^-} F(z) = +\infty \\ \lim_{z \rightarrow 0^+} \log z = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{z \rightarrow \frac{x_N}{t}^-} \log z = \log \frac{x_N}{t} \end{array} \right\} \implies \lim_{z \rightarrow 0^+} G(z) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{z \rightarrow \frac{x_N}{t}^-} G(z) = +\infty \quad (4.31)$$

Como a função $G(z)$ é contínua e crescente, o Teorema do Valor Intermediário nos diz que existe um único valor de z para o qual $G(z) = 0$. Sendo assim, para cada $t \in (0, 1]$ e $N \in \mathbb{N}$ este z existe, e desta forma nós definimos implicitamente uma função $u_N(t)$: a única que satisfaz a Equação (4.25) e a desigualdade $0 < u_N(t) < \frac{x_N}{t}$. Podemos definir $u_N(0) = 1$, bastando para tal observar a Equação (4.25) com $t = 0$.

Agora, só nos resta mostrar que a função $u_N(t)$ assim definida coincide com $\beta_N(t)$. De acordo com a Proposição 4.2, basta nós mostrarmos que $u_N(t)$ satisfaz a equação diferencial exibida em (4.19). Para tal, será necessário recorrermos ao Teorema da Função Implícita (TFI).

Vamos trabalhar novamente com a função G , mas agora vamos variar z e t , mantendo N sempre fixo. Apenas para relembrar, a função $G(z, t)$ é dada por:

$$G(z, t) = \int_0^{tz} \frac{C_N(x) - 1}{x[2 - C_N(x)]} dx + \log z \quad (4.32)$$

Temos que $G(u_N(t), t) = 0$ para todo $t \in [0, 1]$. Queremos usar o TFI para tirar informações sobre a diferenciabilidade de $u_N(t)$. Como a função G é claramente de classe C^1 , basta mostrarmos que a derivada parcial de G em relação a z , denotada por G_z , é tal que $G_z \neq 0$ em $G^{-1}(0)$. Seja $(z, t) \in G^{-1}(0)$, com $t \in [0, 1]$. Então:

$$\begin{aligned} G_z(z, t) &= \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(z+h, t) - G(z, t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{zt}^{(z+h)t} I_N(x) dx + \log(z+h) - \log z}{h} \\ &= \lim_{h \rightarrow 0} t I_N((z+h)t) + \frac{1}{z+h} = t I_N(zt) + \frac{1}{z} \end{aligned} \quad (4.33)$$

onde a penúltima igualdade foi obtida aplicando-se a Regra de L'Hopital. Observe que:

$$G_z(z, t) = 0 \iff zt I_N(zt) = -1 \quad (4.34)$$

Entretanto, pelo que já argumentamos nós sabemos que $I_N(zt)$ e zt são não negativos. Sendo assim, o TFI nos diz que existe uma única função $z(t)$ tal que $G(z(t), t) = 0$, e portanto $z(t) = u_N(t)$. Além disso, $z(t)$ é diferenciável e

$$z'(t) = -\frac{G_t(z(t), t)}{G_z(z(t), t)}. \quad (4.35)$$

De maneira análoga à que calculamos $G_z(z, t)$, nós podemos calcular também a derivada parcial de G com respeito a t , obtendo

$$G_t(z, t) = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{G(z, t+h) - G(z, t)}{h} = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\int_{zt}^{z(t+h)} I_N(x) dx}{h} = z I_N(zt). \quad (4.36)$$

Substituindo as funções obtidas para $G_z(z, t)$ e $G_t(z, t)$ na Equação (4.35), temos que:

$$\begin{aligned} z'(t) &= -\frac{z I_N(zt)}{t I_N(zt) + \frac{1}{z}} = -\frac{z}{t} \frac{C_N(zt) - 1}{zt [2 - C_N(zt)]} \frac{1}{\frac{C_N(zt) - 1}{zt [2 - C_N(zt)]} + \frac{1}{zt}} \\ &= -\frac{z}{t} \frac{C_N(zt) - 1}{[C_N(zt) - 1] + [2 - C_N(zt)]} = -\frac{z}{t} [C_N(zt) - 1] \end{aligned}$$

e como $z(t)$ satisfaz a Equação (4.19) e $z(0) = 1$, o resultado segue. \square

4.3 Convergência de β_N a β_∞

Na Seção 4.2, nós conseguimos encontrar relações para a função β_N : na Proposição 4.2 descobrimos uma equação diferencial que β_N satisfaz e na Proposição 4.3 encontramos a solução de tal equação em uma forma implícita. Nosso objetivo nesta seção é utilizar tais resultados para demonstrar a convergência de β_N para β_∞ .

Neste ponto, nós aceitaremos sem demonstração qual é a função β_∞ . Em [1], mostra-se que:

$$\beta_\infty(t) = \begin{cases} 1 - t & \text{se } 0 \leq t \leq \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4t} & \text{se } \frac{1}{2} \leq t \leq 1 \end{cases} \quad (4.37)$$

Uma consequência bastante direta da Proposição 4.3 é a seguinte proposição:

Proposição 4.4 *Se x_N é a única raiz positiva de $C_N(x) = 2$, então*

$$0 \leq \beta_N(t) - \beta_\infty(t) \leq 2 \left(x_N - \frac{1}{4} \right) \quad (4.38)$$

Demonstração: Vamos verificar as desigualdades acima. Considere inicialmente $t \in [0, 1/2]$. Como já havíamos discutido quando definimos a função $\beta_N(t)$ (Equação (4.3)), temos que $\beta_N(t)$ é decrescente em t e que $\beta_N(t) - 1 + t$ é crescente. Além disso, temos da Proposição 4.3 que $t\beta_N(t) < x_N$. Logo,

$$\begin{aligned} 0 &= \beta_N(0) - 1 + 0 \leq \beta_N(t) - 1 + t \leq \beta_N \left(\frac{1}{2} \right) - 1 + \frac{1}{2} \\ &= 2 \left[\frac{1}{2} \beta_N \left(\frac{1}{2} \right) - \frac{1}{4} \right] \leq 2 \left[x_N - \frac{1}{4} \right] \end{aligned}$$

e mostramos as desigualdades da Equação (4.38) para $t \in [0, 1/2]$. No caso em que $t \in [1/2, 1]$, vamos olhar cada desigualdade separadamente. Primeiramente, podemos observar que

$$\beta_N(t) - \frac{1}{4t} = \frac{1}{t} \left[t\beta_N(t) - \frac{1}{4} \right] \leq 2 \left[x_N - \frac{1}{4} \right] \quad (4.39)$$

Para a outra desigualdade, chamamos atenção ao fato de que a função $t\beta_N(t)$ também é uma função crescente. Isso é uma consequência da Proposição 4.3. De fato, observando a Equação (4.25) e que $\beta_N(t)$ é decrescente, podemos ver que se aumentarmos o valor de t iremos diminuir o valor de $\log z$, e portanto o valor da integral deve aumentar. Mas já sabemos que o integrando é sempre positivo, e isso implica que o valor de $t\beta_N(t)$ também deve aumentar. Como já mostramos que $0 \leq \beta_N(t) - \beta_\infty(t)$ se $t \in [0, 1/2]$, temos para $t = 1/2$ que $\beta_N(\frac{1}{2}) \geq \frac{1}{2}$. Logo,

$$\frac{1}{4} \leq \frac{1}{2} \beta_N \left(\frac{1}{2} \right) \leq t\beta_N(t) \implies \beta_N(t) \geq \frac{1}{4t} \quad (4.40)$$

e acabamos de demonstrar a Equação (4.38) para todo $t \in [0, 1]$. \square

A Proposição 4.4 é muito útil para os nossos propósitos. Ela reduz nosso problema de mostrar que $\beta_N(t) \rightarrow \beta_\infty(t)$ uniformemente a mostrar que $x_N \rightarrow 1/4$. É claro que, para x positivo, $C_N(x) < C_{N+1}(x)$ pois os coeficientes c_k são todos positivos. Como neste intervalo as funções $C_N(x)$ são crescentes, temos

$$2 = C_N(x_N) < C_{N+1}(x_N) \implies x_{N+1} < x_N \quad (4.41)$$

Como já sabíamos que $1/4 < x_N$, concluímos que existe $x_\infty = \lim x_N$ e que $x_\infty \geq 1/4$. Relembrando a discussão que fizemos na Seção 4.1, basta mostrarmos que $x_\infty = 1/4$ para provarmos o item *a*) do Teorema 4.1. Nós havíamos também afirmado que seria necessário um resultado sobre a velocidade de convergência de x_N para $1/4$ para garantirmos a validade do item *b*). Vejamos agora o porquê. Para obtermos o item *b*), precisamos estudar $P_N(k \leq |\mathcal{C}_t| < N)$. De maneira bastante semelhante ao que já fizemos nas seções anteriores:

$$\begin{aligned}
P_N(k \leq |\mathcal{C}_t| < N) &= \sum_{n=k}^{N-1} P_N(|\mathcal{C}_t| = n) = \sum_{n=k}^{N-1} c_n \beta_N(t) (t\beta_N(t))^n \\
&= \beta_N(t) \sum_{n=k}^{N-1} \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} (t\beta_N(t))^n
\end{aligned} \tag{4.42}$$

Nós já vimos que $C(x) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ só converge para $|x| \leq 1/4$. É claro que se t é tal que $t\beta_N(t) \leq 1/4$ para N suficientemente grande, então:

$$P_N(k \leq |\mathcal{C}_t| < N) \leq \sum_{n=k}^{\infty} \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} \left(\frac{1}{4}\right)^n \tag{4.43}$$

e segue-se que $\lim_k \limsup_N P_N(k \leq |\mathcal{C}_t| < N) = 0$. Entretanto, quando t não está tão próximo de zero (por exemplo para $t \in (1/2, 1]$, segundo a Proposição 4.4) temos que $x_N > t\beta_N(t) > 1/4$. Logo, caso x_N fique afastado de $1/4$ ou convirja para $1/4$ de maneira lenta, o somatório na Equação (4.42) pode divergir quando fazemos $N \rightarrow \infty$.

Vamos agora fazer contas que nos garantam que $x_N \rightarrow 1/4$ e que nos dêem uma cota superior razoável para a velocidade de convergência. O resultado que demonstraremos é o seguinte:

Proposição 4.5 *Existe $K > 0$ constante tal que, para todo $N \in \mathbb{N}$:*

$$x_N - \frac{1}{4} \leq \frac{K}{N} \tag{4.44}$$

Uma consequência imediata das Proposições 4.5 e 4.4 é a convergência uniforme de β_N para β_{∞} :

Corolário 4.1 *As funções β_N convergem uniformemente para β_{∞} , pois $\forall N \in \mathbb{N}, \forall t \in [0, 1]$ temos*

$$0 \leq \beta_N(t) - \beta_{\infty}(t) \leq \frac{2K}{N} \tag{4.45}$$

Para demonstrar a Proposição 4.5, faremos uso do lema abaixo. Durante a sua demonstração, utilizaremos a seguinte notação: dadas duas funções $f(x)$ e $g(x)$, dizemos que $f(x) = O(g(x))$ quando $x \rightarrow a$ se existe uma constante A e uma vizinhança de a tais que $|f(x)| \leq Ag(x)$ para todo x nesta vizinhança. Outra notação que utilizaremos será $f(x) \sim g(x)$ quando $x \rightarrow a$, significando $\lim_{x \rightarrow a} \frac{f(x)}{g(x)} = 1$. Esta notação também pode ser usada para descrever o comportamento assintótico de uma sequência de números reais. As notações acima são bastante comuns no estudo de comportamentos assintóticos. Para mais informações a respeito destas notações e seus usos, sugerimos a leitura de [8].

As contas que faremos para demonstrar o Lema 4.2 serão um pouco densas, envolvendo um grande número de aproximações. Observe que, apesar de seguirmos de perto as contas apresentadas em [4], haverá uma tentativa de detalhar mais estas contas. Entretanto, não conseguimos obter todas as aproximações feitas no artigo original. Apesar disso, conseguimos aproximações boas o suficiente para que o resultado seja válido.

Lema 4.2 *Considere a família de funções $g_N(x) = \sqrt{N}(C_N(\frac{1}{4} + \frac{x}{4N}) - 2)$. Temos que $g_N(x)$ converge de modo localmente uniforme quando $N \rightarrow \infty$ para a função*

$$F(x) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left(\sqrt{x} \int_0^x \frac{e^y}{\sqrt{y}} dy - e^x \right) \quad (4.46)$$

Demonstração(Lema 4.2): Lembramos inicialmente que $C(\frac{1}{4}) = 2$ (ver Equação (4.15)). Sendo assim, temos que:

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{2k}{k}}{k+1} 4^{-k} = 2 \quad (4.47)$$

Substituindo esta expressão na fórmula de $g_N(x)$, obtemos:

$$\begin{aligned} g_N(x) &= \sqrt{N} \left(\sum_{k=0}^N \frac{\binom{2k}{k}}{k+1} \left(\frac{1}{4} + \frac{x}{4N} \right)^k - \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\binom{2k}{k}}{k+1} 4^{-k} \right) \\ &= \sqrt{N} \left(\sum_{k=0}^N \frac{\binom{2k}{k}}{k+1} 4^{-k} \left[\left(1 + \frac{x}{N} \right)^k - 1 \right] \right) - \sqrt{N} \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\binom{2k}{k}}{k+1} 4^{-k} \right) \end{aligned}$$

Denotemos por:

$$\begin{cases} (A) = \sqrt{N} \left(\sum_{k=0}^N \frac{\binom{2k}{k}}{k+1} 4^{-k} \left[\left(1 + \frac{x}{N} \right)^k - 1 \right] \right) \\ (B) = \sqrt{N} \left(\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{\binom{2k}{k}}{k+1} 4^{-k} \right) \end{cases} \quad (4.48)$$

Nós vamos estimar separadamente os valores de (A) e (B). No que se segue, precisaremos usar a fórmula de Stirling para aproximar fatoriais. Iremos utilizar a seguinte versão:

$$k! = \sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e} \right)^k e^{\lambda_k}, \text{ onde } \lambda_k \in \left(\frac{1}{12k+1}, \frac{1}{12k} \right) \quad (4.49)$$

Pela Equação (4.49), podemos reescrever $\binom{2k}{k}$ como

$$\binom{2k}{k} = \frac{(2k)!}{k!k!} = \frac{\sqrt{2\pi 2k} \left(\frac{2k}{e} \right)^{2k} e^{\lambda_{2k}}}{\left(\sqrt{2\pi k} \left(\frac{k}{e} \right)^k e^{\lambda_k} \right)^2} = \frac{1}{\sqrt{\pi k}} 4^k e^{\lambda_{2k} - 2\lambda_k} \quad (4.50)$$

Usando a Equação (4.50) em (B), temos:

$$\begin{aligned} (B) &= \sqrt{N} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt{k} (k+1)} e^{\lambda_{2k} - 2\lambda_k} = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{N} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{k+1}{N} \right) \sqrt{\frac{k}{N}}} e^{\lambda_{2k} - 2\lambda_k} \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{N} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{\frac{k}{N} \sqrt{\frac{k}{N}}} \left(\frac{k}{k+1} e^{\lambda_{2k} - 2\lambda_k} \right) \end{aligned} \quad (4.51)$$

Seja $a_k = \frac{k}{k+1} e^{\lambda_{2k} - 2\lambda_k}$. Observe que, pela Equação (4.49), devemos ter:

$$\lambda_{2k} - 2\lambda_k \in \left(\frac{1}{24k+1} - \frac{1}{6k}, \frac{1}{24k} - \frac{2}{12k+1} \right) \subset \left(-\frac{1}{6k}, \frac{1}{6k} \right) \quad (4.52)$$

e portanto $b_k := \lambda_{2k} - 2\lambda_k = O(\frac{1}{k})$. Além disso, observe que $e^x = 1 + O(x)$ quando $x \rightarrow 0$. Sendo assim, podemos concluir que, quando $k \rightarrow \infty$,

$$e^{b_k} = 1 + O(b_k) = 1 + O(k^{-1}). \quad (4.53)$$

Logo, podemos afirmar que quando $k \rightarrow \infty$:

$$a_k = \left(1 - \frac{1}{k+1} \right) e^{b_k} = e^{b_k} - \frac{e^{b_k}}{k+1} = 1 + O(k^{-1}) + O(k^{-1}) + O(k^{-2}) = 1 + O(k^{-1}) \quad (4.54)$$

Mas a afirmação acima significa que existem N grande o suficiente e C constante tal que se $k > N$ então $|a_k - 1| \leq Ck^{-1} \leq CN^{-1}$. Desta forma, temos

$$\left| \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{k}{N}\right)^{\frac{3}{2}}} (a_k - 1) \right| \leq \frac{C}{N} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{k}{N}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

e portanto podemos escrever que:

$$\sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{k}{N}\right)^{\frac{3}{2}}} a_k = \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{k}{N}\right)^{\frac{3}{2}}} (a_k - 1) + \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{k}{N}\right)^{\frac{3}{2}}} = (1 + O(N^{-1})) \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{\left(\frac{k}{N}\right)^{\frac{3}{2}}}$$

Prosseguindo a partir da Equação (4.51), temos que:

$$(B) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{1}{N} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{\frac{k}{N} \sqrt{\frac{k}{N}}} a_k = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (1 + O(N^{-1})) \left[\frac{1}{N} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{\frac{k}{N} \sqrt{\frac{k}{N}}} \right] \quad (4.55)$$

Agora, vamos aproximar o somatório em (4.55) por uma integral. Basta observar que tal somatório pode ser visto como uma aproximação da integral da função $f(y) = y^{-\frac{3}{2}}$ por retângulos. Como a função $f(y)$ é decrescente, veja que:

$$\int_{1+\frac{1}{N}}^{\infty} y^{-\frac{3}{2}} dy \leq \frac{1}{N} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{\frac{k}{N} \sqrt{\frac{k}{N}}} \leq \int_1^{\infty} y^{-\frac{3}{2}} dy = 2 \quad (4.56)$$

Dessa forma, podemos concluir que:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} \sum_{k=N+1}^{\infty} \frac{1}{\frac{k}{N} \sqrt{\frac{k}{N}}} - \int_1^{\infty} y^{-\frac{3}{2}} dy \right| &\leq \int_1^{1+\frac{1}{N}} y^{-\frac{3}{2}} dy = (-2) \left[\left(1 + \frac{1}{N}\right)^{-\frac{1}{2}} - 1 \right] \\ &= (-2) \left[\left(1 - \frac{1}{2} \frac{1}{N} + \frac{3}{8} \frac{1}{N^2} - \dots\right) - 1 \right] = O(N^{-1}) \end{aligned}$$

onde na última linha usamos o Teorema Binomial generalizado. Substituindo na Equação (4.55), obtemos:

$$(B) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} (1 + O(N^{-1})) (2 + O(N^{-1})) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} + O(N^{-1}) \quad (4.57)$$

Vejam agora como se comporta (A). Para tal, iremos dividir o somatório que aparece em (A) em 2 partes, (A1) e (A2). A primeira parte, (A1), diz respeito ao somatório em que o índice k está entre 0 e $\lfloor \sqrt{N} \rfloor$. Usando a Equação (4.50), temos que:

$$|(A1)| = \sqrt{N} \left| \sum_{k=0}^{\lfloor \sqrt{N} \rfloor} \frac{\binom{2k}{k}}{k+1} 4^{-k} \left[\left(1 + \frac{x}{N}\right)^k - 1 \right] \right| = \sqrt{N} \left| \sum_{k=1}^{\lfloor \sqrt{N} \rfloor} \frac{1}{(k+1)\sqrt{\pi k}} e^{\lambda_{2k} - 2\lambda_k} \left[\left(1 + \frac{x}{N}\right)^k - 1 \right] \right|$$

Mas já vimos que $b_k = \lambda_{2k} - 2\lambda_k = O(k^{-1})$ quando $k \rightarrow \infty$, e portanto $\lim b_k = 0$ e existe uma constante C tal que $|b_k| \leq C$ para todo k . Logo, existe uma outra constante C' , possivelmente maior, tal que

$$\left| \frac{1}{\sqrt{\pi}} e^{\lambda_{2k} - 2\lambda_k} \right| \leq C'. \quad (4.58)$$

Sendo assim, podemos afirmar que:

$$\begin{aligned} |(A1)| &\leq C' \sqrt{N} \left| \sum_{k=1}^{\lfloor \sqrt{N} \rfloor} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} \left[\left(1 + \frac{x}{N}\right)^k - 1 \right] \right| \\ &\leq C' \sqrt{N} \sum_{k=1}^{\lfloor \sqrt{N} \rfloor} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} \left| \left(1 + \frac{x}{N}\right)^k - 1 \right| \\ &= C' \sqrt{N} \sum_{k=1}^{\lfloor \sqrt{N} \rfloor} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} \left| \frac{x}{N} \left[1 + \left(1 + \frac{x}{N}\right) + \dots + \left(1 + \frac{x}{N}\right)^{k-1} \right] \right| \\ &\leq C' \frac{|x|}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{\lfloor \sqrt{N} \rfloor} \frac{1}{(k+1)\sqrt{k}} \left[1 + \left(1 + \frac{|x|}{N}\right) + \dots + \left(1 + \frac{|x|}{N}\right)^{k-1} \right] \end{aligned} \quad (4.59)$$

Observe agora que $\left(1 + \frac{|x|}{N}\right)^{k-1}$ é o maior termo da soma entre colchetes, e que tal soma tem k parcelas. Logo,

$$\frac{1}{k+1} \left[1 + \left(1 + \frac{|x|}{N}\right) + \dots + \left(1 + \frac{|x|}{N}\right)^{k-1} \right] \leq \frac{k}{k+1} \left(1 + \frac{|x|}{N}\right)^{k-1} \leq \left(1 + \frac{|x|}{N}\right)^{k-1} \quad (4.60)$$

e se utilizarmos a Equação (4.60), podemos prosseguir com a Equação (4.59):

$$\begin{aligned} |(A1)| &\leq C' \frac{|x|}{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{\lfloor \sqrt{N} \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}} \left(1 + \frac{|x|}{N}\right)^{k-1} \\ &\leq C' \frac{|x|}{\sqrt{N}} \left(1 + \frac{|x|}{N}\right)^{\sqrt{N}} \sum_{k=1}^{\lfloor \sqrt{N} \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}} \end{aligned} \quad (4.61)$$

Observe que $\lim_N \left(1 + \frac{|x|}{N}\right)^N = e^{|x|}$. Sendo assim, dado $\delta > 0$, para N suficientemente grande temos:

$$\left(1 + \frac{|x|}{N}\right)^N \leq (1 + \delta)e^{|x|} \implies \left(1 + \frac{|x|}{N}\right)^{\sqrt{N}} \leq (1 + \delta)^{\frac{1}{\sqrt{N}}} e^{|x|} \quad (4.62)$$

Como $(1+\delta)^{\frac{1}{\sqrt{N}}} \rightarrow 1$ quando $N \rightarrow \infty$, temos que existe uma constante M tal que $(1+\delta)^{\frac{1}{\sqrt{N}}} \leq M$, para todo N . Desta forma, $\left(1 + \frac{|x|}{N}\right)^{\sqrt{N}} \leq Me^{|x|}$ para todo N grande, e aumentando M , se necessário, podemos garantir esta desigualdade para $N \in \mathbb{N}$.

Por outro lado, podemos estimar o somatório em (4.61) comparando-o com uma integral:

$$\sum_{k=1}^{\lfloor \sqrt{N} \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}} = 1 + \sum_{k=2}^{\lfloor \sqrt{N} \rfloor} \frac{1}{\sqrt{k}} \leq 1 + \int_1^{\sqrt{N}} \frac{1}{\sqrt{y}} dy \leq 1 + \left(2y^{\frac{1}{2}}\right)\Big|_1^{\sqrt{N}} \leq 2N^{\frac{1}{4}} \quad (4.63)$$

Substituindo estes resultados na Equação (4.61), temos:

$$|(A1)| \leq C' \frac{|x|}{\sqrt{N}} \left(Me^{|x|} \right) \left(2N^{\frac{1}{4}} \right) \leq M'|x|e^{|x|}N^{-\frac{1}{4}} \quad (4.64)$$

onde M' é uma constante que independe de N e de x . Vamos agora estudar a parte (A2).

$$\begin{aligned} (A2) &= \sqrt{N} \sum_{k=\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1}^N \frac{\binom{2k}{k}}{k+1} 4^{-k} \left[\left(1 + \frac{x}{N}\right)^k - 1 \right] \\ &= \sqrt{N} \sum_{k=\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1}^N \frac{1}{(k+1)\sqrt{\pi k}} e^{\lambda_{2k} - 2\lambda_k} \left[\left(1 + \frac{x}{N}\right)^k - 1 \right] \end{aligned} \quad (4.65)$$

Como no somatório em (A2) temos $k \in \{\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1, \dots, N\}$, podemos usar a Equação (4.54) para escrever que:

$$|a_k - 1| \leq C \frac{1}{k} \leq C \frac{1}{\sqrt{N}} \quad (4.66)$$

onde C é uma constante positiva. Logo, neste caso temos $a_k = 1 + O(N^{-\frac{1}{2}})$. Continuando com a Equação (4.65), temos:

$$\begin{aligned} (A2) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sqrt{N} \left(1 + O\left(N^{-\frac{1}{2}}\right)\right) \sum_{k=\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1}^N \frac{1}{k\sqrt{k}} \left[\left(1 + \frac{x}{N}\right)^k - 1 \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(1 + O\left(N^{-\frac{1}{2}}\right)\right) \left[\frac{1}{N} \sum_{k=\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1}^N \frac{1}{\left(\frac{k}{N}\right)^{\frac{3}{2}}} \left(\left(1 + \frac{x}{N}\right)^{N(k/N)} - 1 \right) \right] \end{aligned} \quad (4.67)$$

Novamente, queremos aproximar a expressão entre colchetes por uma integral. É de se esperar que, como $\left(1 + \frac{x}{N}\right)^N \rightarrow e^x$, tenhamos que esta expressão convirja para a integral em y da função $y^{-\frac{3}{2}}(e^{xy} - 1)$ em um intervalo apropriado. Entretanto, demonstrar esta convergência nos dará bastante trabalho, pois a função acima é um pouco mais complicada, e também não é decrescente, o que facilitou o estudo das últimas integrais. Vamos definir duas funções:

$$\begin{cases} g(y) &:= \left(\frac{y}{N}\right)^{-\frac{3}{2}} \left(e^{x\frac{y}{N}} - 1\right) \\ h(y) &:= \left(\frac{y}{N}\right)^{-\frac{3}{2}} \left(\left(1 + \frac{x}{N}\right)^y - 1\right) \end{cases}$$

O próximo passo será mostrar que podemos trocar o somatório de $h(k)$ que aparece na Equação (4.67) por um somatório em $g(k)$, que é um pouco mais simples.

Afirmação 1:
$$\frac{1}{N} \sum_{k=\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1}^N h(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1}^N g(k) + |x|e^{|x|}O\left(N^{-\frac{3}{4}}\right).$$

Demonstração: Vamos começar estimando $|g(k) - h(k)|$. Assumiremos a desigualdade $1 + y \leq e^y \leq \frac{1}{1-y}$ para $y \in (-1, 1)$. Desta forma, é claro que, elevando esta desigualdade a k obtemos:

$$(1 + y)^k \leq e^{ky} \leq (1 - y)^{-k}.$$

Uma consequência direta desta desigualdade é que, se $a = (1 - y)^{-1}$ e $b = 1 + y$ (e portanto $b \leq a$), temos:

$$0 \leq e^{ky} - (1 + y)^k \leq a^k - b^k = (a - b)(a^{k-1} + a^{k-2}b + \dots + b^{k-1}) \leq \frac{y^2}{1 - y} ka^k = y^2 ka^{k+1} \quad (4.68)$$

Fixe $x \in \mathbb{R}$. Se $x = 0$, a afirmação é óbvia pois $g(k) = h(k) = 0$, para todo k . Caso contrário, tome $N > |x|$. Fazendo $y = \frac{x}{N}$ obtemos:

$$\begin{aligned} |g(k) - h(k)| &= \left(\frac{k}{N}\right)^{-\frac{3}{2}} \left| e^{x\frac{k}{N}} - \left(1 + \frac{x}{N}\right)^k \right| \\ &\leq \left(\frac{k}{N}\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{x^2}{N^2} ka^{k+1} \end{aligned} \quad (4.69)$$

Fazendo o somatório com k percorrendo $\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1, \dots, N$:

$$\begin{aligned} \left| \frac{1}{N} \sum_{k=\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1}^N g(k) - h(k) \right| &\leq \frac{1}{N} \sum_{k=\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1}^N \left(\frac{k}{N}\right)^{-\frac{3}{2}} \frac{x^2}{N^2} ka^{k+1} \\ &= N^{-\frac{3}{2}} ax^2 \sum_{k=\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1}^N \frac{a^k}{k^{\frac{1}{2}}} \leq N^{-\frac{3}{2}} ax^2 \sum_{k=\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1}^N \frac{a^k}{(\sqrt{N})^{\frac{1}{2}}} \\ &= N^{-\frac{7}{4}} ax^2 \left| \frac{a}{a-1} (a^N - a^{\lfloor \sqrt{N} \rfloor}) \right| \\ &\leq N^{-\frac{3}{4}} a|x| (a^N + a^{\lfloor \sqrt{N} \rfloor}) \end{aligned} \quad (4.70)$$

onde na última passagem utilizamos que $\left| \frac{a}{a-1} \right| = \frac{N}{|x|}$. Observe também que $x \neq 0$ implica que $a \neq 1$ e assim podemos usar a fórmula de $\sum a^k$ sem problemas. Além disso, temos que $a^N \sim e^x$, $a^{\lfloor \sqrt{N} \rfloor} \sim 1$ quando $N \rightarrow \infty$ e que $1 + e^x \leq 2e^{|x|}$ para todo $x \in \mathbb{R}$. Podemos concluir então que:

$$\frac{1}{N} \sum_{k=\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1}^N h(k) = \frac{1}{N} \sum_{k=\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1}^N g(k) + |x|e^{|x|}O\left(N^{-\frac{3}{4}}\right) \quad (4.71)$$

e a Afirmação 1 está demonstrada. \square

Utilizando a Afirmação 1 na Equação (4.67), temos por enquanto que:

$$(A2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(1 + O\left(N^{-\frac{1}{2}}\right)\right) \left[\frac{1}{N} \sum_{k=\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1}^N g(k) + |x|e^{|x|}O\left(N^{-\frac{3}{4}}\right) \right] \quad (4.72)$$

Agora, vamos trocar o somatório de $g(k)$ por uma integral. Das outras vezes em que fizemos isso, nos aproveitamos de que as funções que trabalhávamos eram decrescentes para fazer comparações simples entre áreas. Neste caso, esta técnica não se aplica, e iremos então recorrer a algo mais forte: a Fórmula de Euler-Maclaurin. Usaremos apenas a seguinte versão (ver [2]):

Fórmula de Euler-Maclaurin: Seja $f(y)$ uma função de classe C^1 em $[m, n]$. Se $P_1(y) = y - \lfloor y \rfloor - \frac{1}{2}$, então:

$$\sum_{k=m}^n f(k) = \int_m^n f(y) dy + \frac{f(m) + f(n)}{2} + \int_m^n f'(y) P_1(y) dy. \quad (4.73)$$

Afirmção 2: $\frac{1}{N} \sum_{k=\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1}^N g(k) = \int_{\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1}^1 y^{-\frac{3}{2}} (e^{xy} - 1) dy + e^{2|x|} O\left(N^{-\frac{1}{4}}\right)$

Demonstração: Uma aplicação direta da Fórmula de Euler-Maclaurin apresentada na Equação (4.73) à função $g(k)$ nos diz que:

$$\begin{aligned} \frac{1}{N} \sum_{k=\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1}^N g(k) &= \frac{1}{N} \int_{\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1}^N g(y) dy + \frac{g(\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1) + g(N)}{2N} + \frac{1}{N} \int_{\lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1}^N g'(y) P_1(y) dy \\ &=: (I) + (II) + (III) \end{aligned}$$

Vamos analisar cada parte separadamente. Para simplificar um pouco a notação, seja $m := \lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1$. Para a parte (I), simplesmente fazemos a mudança de variável $z = \frac{y}{N}$, obtendo:

$$\frac{1}{N} \int_m^N g(y) dy = \frac{1}{N} \int_{\frac{m}{N}}^1 z^{-\frac{3}{2}} (e^{xz} - 1) N dz = \int_{\frac{m}{N}}^1 z^{-\frac{3}{2}} (e^{xz} - 1) dz \quad (4.74)$$

Só nos resta mostrar que as partes (II) e (III) são pequenas. Vejamos agora a parte (II):

$$\begin{aligned} |(II)| &\leq \frac{1}{2N} \left[e^x + 1 + \left(\frac{N}{m}\right)^{\frac{3}{2}} e^{x \frac{m}{N}} + \left(\frac{N}{m}\right)^{\frac{3}{2}} \right] \\ &\leq \frac{1}{2N} \left[e^{|x|} + e^{|x|} + \left(\frac{N}{\sqrt{N}}\right)^{\frac{3}{2}} e^{|x|} + \left(\frac{N}{\sqrt{N}}\right)^{\frac{3}{2}} e^{|x|} \right] = \frac{1}{N} e^{|x|} \left(1 + N^{\frac{3}{4}}\right) \\ &= e^{|x|} O\left(N^{-\frac{1}{4}}\right) \end{aligned} \quad (4.75)$$

Finalmente, para a parte (III) precisamos calcular antes a derivada de $g(y)$:

$$g'(y) = N^{\frac{1}{2}} y^{-\frac{3}{2}} x e^{x \frac{y}{N}} - \frac{3N^{\frac{3}{2}}}{2} y^{-\frac{5}{2}} \left(e^{x \frac{y}{N}} - 1 \right).$$

Agora, iremos substituir a derivada de $g(y)$ em (III) para estimar seu valor absoluto. Faremos novamente a mudança de variáveis $z = \frac{y}{N}$. Também utilizaremos que $|P_1(y)| \leq \frac{1}{2}$ e que se $|z| \leq 1$ então $e^{xz} \leq e^{|x|}$. Temos então:

$$\begin{aligned}
|(III)| &\leq \frac{1}{N} \left[N^{\frac{1}{2}}|x| \left| \int_m^N y^{-\frac{3}{2}} e^{x\frac{y}{N}} P_1(y) dy \right| + \frac{3}{2} N^{\frac{3}{2}} \left| \int_m^N y^{-\frac{5}{2}} (e^{x\frac{y}{N}} - 1) P_1(y) dy \right| \right] \\
&= N^{-\frac{1}{2}}|x| \left| \int_{\frac{m}{N}}^1 (zN)^{-\frac{3}{2}} e^{xz} P_1(zN) N dz \right| + \frac{3}{2} N^{\frac{1}{2}} \left| \int_{\frac{m}{N}}^1 (zN)^{-\frac{5}{2}} (e^{xz} - 1) P_1(zN) N dz \right| \\
&= N^{-1}|x| \left| \int_{\frac{m}{N}}^1 z^{-\frac{3}{2}} e^{xz} P_1(zN) dz \right| + \frac{3}{2} N^{-1} \left| \int_{\frac{m}{N}}^1 z^{-\frac{5}{2}} (e^{xz} - 1) P_1(zN) dz \right| \\
&\leq N^{-1}|x| \int_{\frac{m}{N}}^1 z^{-\frac{3}{2}} e^{xz} |P_1(zN)| dz + \frac{3}{2} N^{-1} \int_{\frac{m}{N}}^1 z^{-\frac{5}{2}} |(e^{xz} - 1) P_1(zN)| dz \\
&\leq N^{-1}|x| e^{|x|} \frac{1}{2} \int_{\frac{m}{N}}^1 z^{-\frac{3}{2}} dz + \frac{3}{2} N^{-1} \int_{\frac{m}{N}}^1 z^{-\frac{5}{2}} 2e^{|x|} \frac{1}{2} dz \\
&= N^{-1}|x| e^{|x|} \frac{1}{2} \left(-2z^{-\frac{1}{2}} \right) \Big|_{\frac{m}{N}}^1 + \frac{3}{2} N^{-1} e^{|x|} \left(-\frac{2}{3} z^{-\frac{3}{2}} \right) \Big|_{\frac{m}{N}}^1 \\
&\leq N^{-1}|x| e^{|x|} \left(\frac{N}{m} \right)^{\frac{1}{2}} + N^{-1} e^{|x|} \left(\frac{N}{m} \right)^{\frac{3}{2}} \leq |x| e^{|x|} N^{-\frac{3}{4}} + e^{|x|} N^{-\frac{1}{4}} \\
&= e^{2|x|} O(N^{-\frac{1}{4}})
\end{aligned} \tag{4.76}$$

e a Afirmação 2 segue das Equações (4.74), (4.75) e (4.76). \square

Após a Afirmação 2, a Equação (4.72) se transforma em:

$$(A2) = \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(1 + O\left(N^{-\frac{1}{2}}\right) \right) \left[\int_{\frac{m}{N}}^1 y^{-\frac{3}{2}} (e^{xy} - 1) dy + e^{2|x|} O\left(N^{-\frac{1}{4}}\right) \right] \tag{4.77}$$

onde $m = \lfloor \sqrt{N} \rfloor + 1$. Observe que quando $N \rightarrow \infty$, o limite inferior da integral vai a 0. Nossa Afirmação 3 controla o erro ao se fazer esta troca de integrais.

Afirmação 3: $\int_{\frac{m}{N}}^1 y^{-\frac{3}{2}} (e^{xy} - 1) dy = \int_0^1 y^{-\frac{3}{2}} (e^{xy} - 1) dy + e^{|x|} O\left(N^{-\frac{1}{4}}\right).$

Demonstração: Inicialmente, veja que:

$$\left| \int_{\frac{m}{N}}^1 y^{-\frac{3}{2}} (e^{xy} - 1) dy - \int_0^1 y^{-\frac{3}{2}} (e^{xy} - 1) dy \right| \leq \int_0^{\frac{m}{N}} y^{-\frac{3}{2}} |e^{xy} - 1| dy$$

Além disso, temos que $\lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{e^{xy} - 1}{y} = \lim_{y \rightarrow 0^+} \frac{xe^{xy}}{1} = x$ pela regra de L'Hopital. Desta forma, dado $\delta > 0$, se N for suficientemente grande nós temos que:

$$\int_0^{\frac{m}{N}} y^{-\frac{3}{2}} |e^{xy} - 1| dy \leq \int_0^{\frac{m}{N}} \frac{|x| + \delta}{\sqrt{y}} dy = (|x| + \delta) 2 \left(\frac{m}{N} \right)^{\frac{1}{2}} = e^{|x|} O\left(N^{-\frac{1}{4}}\right). \quad \square$$

Se usarmos a Afirmação 3 na Equação (4.77), ficamos com:

$$\begin{aligned}
(A2) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left(1 + O\left(N^{-\frac{1}{2}}\right) \right) \left[\int_0^1 y^{-\frac{3}{2}} (e^{xy} - 1) dy + e^{2|x|} O\left(N^{-\frac{1}{4}}\right) \right] \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 y^{-\frac{3}{2}} (e^{xy} - 1) dy + e^{2|x|} O\left(N^{-\frac{1}{4}}\right)
\end{aligned} \tag{4.78}$$

Consequimos assim encontrar o comportamento assintótico de (B), (A1) e (A2). Juntando as Equações (4.57), (4.64) e (4.78), podemos escrever que:

$$\begin{aligned}
g_N(x) &= (A1) + (A2) - (B) \\
&= |x|e^{|x|}O\left(N^{-\frac{1}{4}}\right) + \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 y^{-\frac{3}{2}}(e^{xy} - 1) dy + e^{2|x|}O\left(N^{-\frac{1}{4}}\right) - \frac{2}{\sqrt{\pi}} + O(N^{-1}) \\
&= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \int_0^1 y^{-\frac{3}{2}}(e^{xy} - 1) dy - \frac{2}{\sqrt{\pi}} + e^{2|x|}O\left(N^{-\frac{1}{4}}\right)
\end{aligned} \tag{4.79}$$

Consequimos assim obter o comportamento assintótico de $g_N(x)$ quando $N \rightarrow \infty$. Para obtermos a expressão enunciada no Lema 4.2, resta apenas simplificar um pouco a Equação (4.79). Integrando por partes, temos que:

$$\begin{aligned}
\int_0^1 y^{-\frac{3}{2}}(e^{xy} - 1) dy &= \int_0^1 (e^{xy} - 1) d\left(-2y^{-\frac{1}{2}}\right) = \left[(e^{xy} - 1)(-2y^{-\frac{1}{2}})\right]_{y=0}^{y=1} + \int_0^1 2y^{-\frac{1}{2}}xe^{xy} dy \\
&= -2(e^x - 1) + 2x \int_0^1 \frac{e^{xy}}{\sqrt{y}} dy = -2(e^x - 1) + 2x \int_0^x \frac{e^s}{\sqrt{\frac{s}{x}}} \frac{ds}{x} \\
&= -2(e^x - 1) + 2\sqrt{x} \int_0^x \frac{e^s}{\sqrt{s}} ds
\end{aligned} \tag{4.80}$$

onde na penúltima igualdade fizemos a substituição de variáveis $s = xy$. Substituindo esta expressão na Equação (4.79), temos finalmente que:

$$\begin{aligned}
g_N(x) &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \left[-2(e^x - 1) + 2\sqrt{x} \int_0^x \frac{e^y}{\sqrt{y}} dy \right] - \frac{2}{\sqrt{\pi}} + e^{2|x|}O\left(N^{-\frac{1}{4}}\right) \\
&= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[-e^x + \sqrt{x} \int_0^x \frac{e^y}{\sqrt{y}} dy \right] + e^{2|x|}O\left(N^{-\frac{1}{4}}\right)
\end{aligned} \tag{4.81}$$

e concluímos a demonstração do lema. \square

Demonstração(Proposição 4.5): Observe que a função $F(x)$ que encontramos no Lema 4.2 converge para infinito quando $x \rightarrow \infty$. Para enxergar isso, começamos estudando a integral $\int_0^x \frac{e^y}{\sqrt{y}} dy$. Fazendo duas integrais por partes, se $x > 1$ temos:

$$\begin{aligned}
\int_1^x \frac{e^y}{\sqrt{y}} dy &= \left(\frac{e^y}{\sqrt{y}}\right)\Big|_1^x + \frac{1}{2} \int_1^x \frac{e^y}{y^{\frac{3}{2}}} dy = \frac{e^x}{\sqrt{x}} - e + \frac{1}{2} \left[\left(\frac{e^y}{y^{\frac{3}{2}}}\right)\Big|_1^x - \frac{3}{2} \int_1^x \frac{e^y}{y^{\frac{5}{2}}} dy \right] \\
&= \frac{e^x}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} \frac{e^x}{x^{\frac{3}{2}}} - e - \frac{e}{2} + \frac{3}{4} \int_1^x \frac{e^y}{y^{\frac{5}{2}}} dy.
\end{aligned} \tag{4.82}$$

Além disso, temos que:

$$\int_1^x \frac{e^y}{y^{\frac{5}{2}}} dy = \int_1^{\frac{x}{2}} \frac{e^y}{y^{\frac{5}{2}}} dy + \int_{\frac{x}{2}}^x \frac{e^y}{y^{\frac{5}{2}}} dy \leq \int_1^{\frac{x}{2}} e^y dy + \int_{\frac{x}{2}}^x \frac{2^{\frac{5}{2}} e^y}{x^{\frac{5}{2}}} dy = e^{\frac{x}{2}} - e + 2^{\frac{5}{2}} \frac{e^x - e^{\frac{x}{2}}}{x^{\frac{5}{2}}} \tag{4.83}$$

Dessa forma, segue-se que $\int_1^x \frac{e^y}{y^{\frac{5}{2}}} dy = O\left(\frac{e^x}{x^{\frac{5}{2}}}\right)$, e portanto as Equações (4.82) e (4.83) nos fornecem que:

$$\int_0^x \frac{e^y}{\sqrt{y}} dy = \frac{e^x}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} \frac{e^x}{x^{\frac{3}{2}}} + O(1) + O\left(\frac{e^x}{x^{\frac{5}{2}}}\right) = \frac{e^x}{x^{\frac{1}{2}}} + \frac{1}{2} \frac{e^x}{x^{\frac{3}{2}}} + O\left(\frac{e^x}{x^{\frac{5}{2}}}\right) \quad (4.84)$$

Substituindo na expressão de $F(x)$, obtemos:

$$\begin{aligned} F(x) &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[\sqrt{x} \int_0^x \frac{e^y}{\sqrt{y}} dy - e^x \right] = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \left[e^x + \frac{1}{2} \frac{e^x}{x} + \sqrt{x} O\left(\frac{e^x}{x^{\frac{5}{2}}}\right) - e^x \right] \\ &= \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^x}{x} + O\left(\frac{e^x}{x^2}\right) \end{aligned} \quad (4.85)$$

de onde segue-se que $F(x) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi}} \frac{e^x}{x} \rightarrow \infty$ quando $x \rightarrow \infty$. Desta forma, existe uma constante $K > 0$ tal que $F(K) > 1$. Pelo Lema 4.2, isso implica que para N suficientemente grande, temos $g_N(K) > F(K) - \frac{1}{2} > \frac{1}{2}$. Em outras palavras, isto significa que

$$C_N \left(\frac{1}{4} + \frac{K}{4N} \right) - 2 > \frac{1}{2\sqrt{N}} > 0 \quad (4.86)$$

e assim $x_N < \frac{1}{4} + \frac{K}{4N}$. \square

A Proposição 4.5 era o último passo que faltava para completar a demonstração do item *a)* do Teorema 4.1. Para finalizar a demonstração deste teorema, resta apenas demonstrar o item *b)*.

Demonstração: Vamos retomar a Equação (4.42) e usar a fórmula de Stirling como na Equação (4.50), juntamente com a Proposição 4.5:

$$\begin{aligned} P_N(k \leq |\mathcal{C}_t| < N) &= \beta_N(t) \sum_{n=k}^{N-1} \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} (t\beta_N(t))^n \leq \sum_{n=k}^{N-1} \frac{\binom{2n}{n}}{n+1} (x_N)^n \\ &\leq \sum_{n=k}^{N-1} \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} 4^n e^{b_n} \left(\frac{1}{4} + \frac{K'}{4N} \right)^n \\ &\leq \sum_{n=k}^{N-1} \frac{1}{n+1} \frac{1}{\sqrt{\pi n}} e^{b_n} \left(1 + \frac{K'}{N} \right)^N \\ &\leq \frac{\left(1 + \frac{K'}{N} \right)^N}{\sqrt{\pi}} \sum_{n=k}^{N-1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} e^{b_n} \end{aligned} \quad (4.87)$$

Agora, observe que $\left(1 + \frac{K'}{N} \right)^N \rightarrow e^{K'}$ e portanto se enxergarmos esta expressão como uma seqüência em N , temos que ela é limitada. Além disso, já sabemos que e^{b_n} também é limitado, como fizemos quando estimamos |(A1)| na demonstração do Lema 4.2. Desta forma, existe uma constante $M > 0$ tal que:

$$P_N(k \leq |\mathcal{C}_t| < N) \leq M \sum_{n=k}^{N-1} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \leq M \sum_{n=k}^{\infty} \frac{1}{n^{\frac{3}{2}}} \leq M \int_k^{\infty} \frac{1}{x^{\frac{3}{2}}} dx = \frac{M'}{\sqrt{k}} \quad (4.88)$$

Sendo assim, tomando primeiro o limite superior em N e depois o limite em k , concluímos que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \limsup_{N \rightarrow \infty} P_N(k \leq |\mathcal{C}_t| < N) = 0. \quad \square$$

Referências Bibliográficas

- [1] ALDOUS, D. J. *The percolation process on a tree where infinite clusters are frozen*, Math. Proc. Cambridge Philos. Soc., 128(3):465-477, 2000.
- [2] ÁVILA, G. *A Série Harmônica e a Fórmula de Euler-MacLaurin*, Matemática Universitária, número 19, p. 55-63, SBM, 1995.
- [3] BENJAMINI, I., SCHRAMM, O. (1999, comunicação privada através de D. Aldous).
- [4] van den BERG, J., KISS, D., NOLIN, P. *A Percolation Process on the Binary Tree Where Large Finite Clusters are Frozen*, Electronic Communications in Probability, 2012.
- [5] van den BERG, J., de LIMA, B. N. B., NOLIN, P. *A Percolation Process on the Square Lattice Where Large Finite Clusters are Frozen*, Random Structures and Algorithms, 2012.
- [6] van den BERG, J., TÓTH, B. *A signal-recovery system: Asymptotic properties and construction of an infinite-volume process*, Stoch. Proc. Appl. 96 (2001), 177-190.
- [7] BROUWER, Rachel M., *Percolation, forest-fires and monomer-dimers (or the hunt for self-organized criticality)*, PhD thesis, VU University, Amsterdam, 2005.
- [8] de BRUIJN, N. G. *Asymptotic methods in analysis*, Amsterdam, North-Holland, 1961.
- [9] FONTES, Luiz Renato G., *Notas em Percolação*, IME - USP.
- [10] GRIMMETT, Geoffrey R., *Percolation*, Springer, 1999.
- [11] KESTEN, Harry, *Percolation Theory for Mathematicians*, Birkhäuser, Boston, 1982.
- [12] KESTEN, Harry, *Asymptotics in high dimensions for percolation*, Disorder in Physical Systems, Oxford University Press, 1990.
- [13] MELLO, M. P., MURARI, I. T. C., SANTOS, J. P. de O., *Introdução à Análise Combinatória*, Unicamp, 2002.