

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

Incêndios Florestais em Grafos

Humberto Carelos Sanna

Orientador:
Bernardo Nunes Borges de Lima

Belo Horizonte
2013

Humberto Carelos Sanna

Incêndios Florestais em Grafos

Dissertação submetida à banca examinadora, designada pelo programa de Pós-Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Matemática.

Orientador: Bernardo N. B. de Lima

Belo Horizonte

2013

Agradecimentos

Gostaria de agradecer a minha avó Niná e aos meus pais, Júlio e Juliana, pelo apoio incondicional. Ao meu orientador, Bernardo, por acreditar na minha capacidade e por ter estado sempre presente, me incentivando em todos os momentos que precisei.

Agradeço também ao meu amigo Charles, pelas conversas produtivas, pelas discussões matemáticas que não levavam nada a lugar algum, e pelo bom humor do dia-a-dia.

Ainda com relação à boa prosa, agradeço aos professores Rémy Sanchis e Marcelo Hilário por terem feito parte do meu trajeto, das conversas informais às discussões mais complexas.

À banca examinadora, obrigado por atenderem ao convite.

Por fim, agradeço ao CNPq pelo apoio financeiro, e à FAPEMIG por ter financiado meu orientador através do edital Programa Pesquisador Mineiro.

Resumo

O presente trabalho é o estudo de um sistema de partículas interagentes proposto em van den BERG, J., BROUWER, R. *Self-Organized Forest-Fires near the Critical Time*, Communications in Mathematical Physics 67, 265-277, 2006. Informalmente, podemos descrevê-lo da seguinte forma: cada sítio da rede quadrada pode estar “vazio” ou “ocupado por uma árvore”. Sítios vagos tornam-se ocupados com taxa 1. Além disso os sítios também podem ser atingidos por “raios” segundo uma taxa $\lambda > 0$ e, quando isto ocorre, o raio instantaneamente destrói todo o cluster ocupado deste sítio.

O objetivo principal aqui consiste em analisar o comportamento do sistema quando $\lambda \rightarrow 0$, em tempos maiores que o tempo crítico t_c , definido a partir do parâmetro crítico para percolação de sítios na rede quadrada, segundo a relação $p_c = 1 - e^{-t_c}$. Mais precisamente, estamos interessados em observar se, antes de algum tempo $t > t_c$, a origem do nosso sistema é destruída com probabilidade positiva quando $\lambda \rightarrow 0$.

Com a mesma motivação, modificamos o modelo inicial de duas maneiras distintas: primeiro exploramos uma dinâmica de ignição que destrói clusters suficientemente grandes na rede quadrada e consideramos o limite quando o tamanho dos clusters tende a infinito. Em seguida mantemos o mecanismo de ignição com taxa $\lambda > 0$ e consideramos o processo na árvore binária direcionada.

Sumário

Agradecimentos	ii
Resumo	iii
Introdução	2
1 Considerações Iniciais	4
1.1 Grafos	4
1.2 Percolação de Bernoulli em \mathbb{Z}^d	6
1.2.1 Alguns resultados básicos	7
1.2.2 Desigualdade FKG e Teorema RSW	10
1.3 O Processo de Poisson	13
2 Incêndios Florestais em \mathbb{Z}^2	15
2.1 Definição do modelo e problemas em aberto	15
2.2 Principais resultados	19
2.3 Remoção de clusters somente em t_c	22
2.4 Provas	26
3 Extensões	31
3.1 Ignição de clusters suficientemente grandes	31
3.2 A árvore binária	33
4 Sobre Percolação Auto-destrutiva	36
4.1 Definição e propriedades importantes	36
4.2 Comparando valores críticos	41
4.3 Prova do Lema 2.6	45
5 Incêndios florestais bem definidos	49
5.1 Incêndios em $B(m)$	49
Referências Bibliográficas	52

Introdução

Incêndios florestais são processos que atraem a atenção tanto de matemáticos quanto de físicos, pois acredita-se que, sob determinadas condições, tal modelo exiba comportamento semelhante a sistemas de partículas que apresentam criticalidade auto-organizada. Dentre os modelos mais conhecidos na literatura, podemos citar o que foi proposto por Drossel e Schwabl em [7], o qual é fortemente relacionado ao presente estudo. Por ser um assunto relativamente novo, ainda possui muitos aspectos para serem explorados. O objetivo principal dessa dissertação é estudar de maneira detalhada um aspecto que, embora singelo, é essencial para que comecemos a ter uma compreensão rigorosa sobre esse tipo de sistema. Mais precisamente, buscamos entender, para diferentes grafos, como o modelo se comporta em instantes próximos ao tempo t_c , definido a partir do ponto crítico para percolação de sítios, segundo a relação $p_c = 1 - e^{-t_c}$.

O texto está organizado em cinco capítulos. No primeiro capítulo, é feita uma exposição sucinta do material necessário para a compreensão dos incêndios florestais. Basicamente, tratamos de conceitos gerais sobre grafos, percolação de Bernoulli e processos de Poisson, tendo como base os livros *Graph Theory*, de Diestel [5], *Percolation*, de Grimmett [9], e as notas de aula intituladas *An Introduction to Stochastic Processes in Continuous Time*, de van Zanten [11]. Os dois capítulos seguintes, que constituem a parte principal da dissertação, tratam do estudo de incêndios florestais na rede quadrada e na árvore binária direcionada. A referência para esses capítulos é o artigo *Self-Organized Forest-Fires near the Critical Time*, de van den Berg e Brouwer [1]. O quarto capítulo dedica-se a provar um lema usado no segundo capítulo, sendo necessária a exposição de alguns resultados envolvendo percolação auto-destrutiva. Para tanto, nos valem do artigo *Self-Destructive Percolation*, de van den Berg e Brouwer [2] e da tese de doutorado Rachel Brouwer [4]. Por fim, o último capítulo aborda a questão da existência dos processos de incêndios florestais. A ideia aqui é ver como esses processos são definidos em caixas finitas contidas na rede quadrada, e utilizamos do artigo *Existence of multi-dimensional infinite volume self-organized critical forest-fire models*, de Durre [6], para fazer essa construção.

Para um bom entendimento do que é tratado aqui, um conhecimento sobre aspectos básicos em teoria de probabilidade, percolação e processos de Poisson é suficiente. As ferramentas mais sofisticadas que usaremos aqui envolvem percolação: tratam-se da desi-

gualdade FKG, combinada com os resultados obtidos por Russo, Seymour e Welsh para percolação na rede quadrada.

1 Considerações Iniciais

Para introduzirmos o modelo matemático de incêndios florestais, precisamos, antes de tudo, de fornecer os aparatos básicos para a construção do ambiente no qual este processo ocorre. As seções deste capítulo possuem esta finalidade, bem como a função de agregar os resultados em percolação utilizados nas demonstrações das principais proposições relativas ao nosso modelo.

1.1 Grafos

Em geral, os modelos probabilísticos que definiremos ao longo da dissertação necessitam do conceito de grafo. Um *grafo* é um par $G = (V, E)$ de conjuntos, em que $E \subseteq [V]^2$. Assim, E é formado por subconjuntos de V com dois elementos. Os elementos de V são chamados *sítios* ou *vértices* de G , e os elementos de E são chamados de *elos* de G . Dado $e = \{x, y\} \in E$, dizemos que x e y são sítios *vizinhos*. Para simplificar, escreveremos somente $e = xy$. O *grau* de um vértice x corresponde ao número de elos que possuem tal vértice. Se $G = (V, E)$ e tomarmos $W \subset V$ e $F \subset E$, então $H = (W, F)$ é chamado *subgrafo* de G . A maneira comum de se imaginar um grafo é desenhar pontos para representarem os vértices, e linhas conectando pontos para representarem elos, quando os dois vértices em questão formarem um elo. A forma como desenhamos os pontos e linhas é irrelevante. A única informação importante consiste em saber quais pares de vértices formam elos. Uma exposição detalhada sobre grafos pode ser vista em [5].

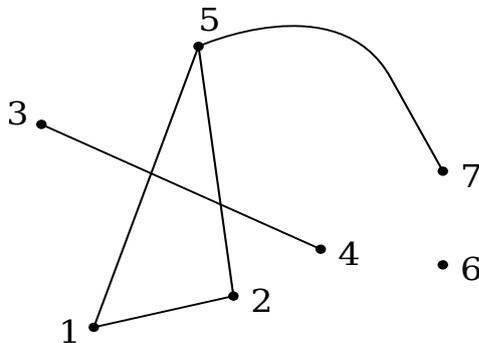


Figura 1.1: Grafo em $V = \{1, \dots, 7\}$, com conjunto de elos $E = \{\{1, 2\}, \{1, 5\}, \{2, 5\}, \{3, 4\}, \{5, 7\}\}$.

Quando falarmos sobre percolação e incêndios florestais, estudaremos alguns tipos de eventos que consideram a existência de vértices “ligados ao infinito”. Para entendermos o que isso significa, devemos primeiramente estabelecer o que são caminhos em um grafo. Dados $a, b \in V$, um *caminho* em G ligando a a b é uma sequência finita de elos $\{x_0x_1, x_1x_2, \dots, x_{n-2}x_{n-1}, x_{n-1}x_n\}$, em que $x_0 = a$, $x_n = b$, e todos os x_i são distintos. Se $a = b$ e todos os demais vértices forem distintos, teremos um *circuito* em G . O *comprimento* de um caminho é o número de elos que tal caminho possui. Dizemos que um grafo G é *conexo* se, para todo par $x, y \in V$, existe um caminho em G ligando x a y .

Em um dos problemas que veremos, será preciso atribuímos uma orientação para os elos de um grafo. Assim, dado um grafo $G = (V, E)$, dizemos que duas funções, $\text{init}: E \rightarrow V$ e $\text{ter}: E \rightarrow V$, constituem uma *orientação* para G , se elas atribuem a cada elo $e = xy$ um *vértice inicial* $\text{init}(e)$ e um *vértice terminal* $\text{ter}(e)$, satisfazendo $\{\text{init}(e), \text{ter}(e)\} = \{x, y\}$. Dizemos que o elo e está *direcionado de* $\text{init}(e)$ *para* $\text{ter}(e)$.

Até aqui, mencionamos tudo o que é necessário para introduzirmos os dois grafos que utilizaremos na maior parte do tempo. Convém agora defini-los, ambos bem conhecidos: a rede quadrada e a árvore binária orientada.

Entendemos por *rede quadrada* o grafo cujo conjunto de vértices é \mathbb{Z}^2 e o conjunto de elos são os pares de vértices $\{u, v\}$, tais que $\delta(u, v) := |u_1 - v_1| + |u_2 - v_2| = 1$. Com certo abuso de notação, escreveremos simplesmente \mathbb{Z}^2 para indicar o grafo. De maneira completamente análoga, também definimos a rede \mathbb{Z}^d , quando $d > 2$ ou $d = 1$.

A *árvore binária*, denotada por \mathcal{T} , é o grafo sem circuitos, conexo, em que um dos vértices, chamado de *raiz*, possui dois elos, e os demais vértices, três elos. Indicaremos a raiz por O . A orientação sobre \mathcal{T} consiste em direcionar os elos no sentido da raiz. Logo, dado um elo $e = xy$ de \mathcal{T} , tomamos os caminhos ligando x a O e y a O , indicados respectivamente por $x \leftrightarrow O$ e $y \leftrightarrow O$. Se $x \leftrightarrow O$ for o caminho de maior comprimento, faça $\text{init}(e) = x$ e $\text{ter}(e) = y$. Do contrário, faça $\text{init}(e) = y$ e $\text{ter}(e) = x$. Diremos sempre que $\text{init}(e)$ é *filho* de $\text{ter}(e)$. Dado um vértice v da árvore, diremos que a primeira geração de v é o conjunto dos filhos de v . A segunda geração é o conjunto dos filhos dos filhos de v , e assim em diante.

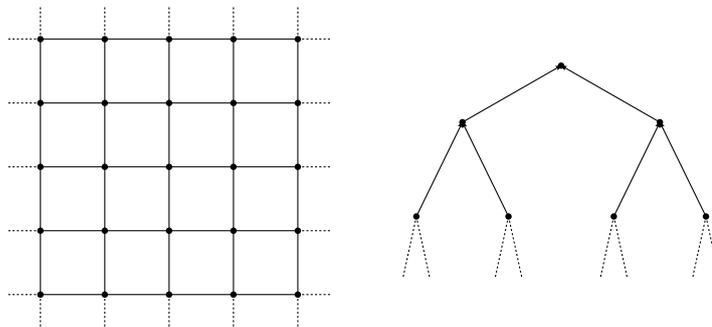


Figura 1.2: Esboço da rede quadrada e da árvore binária orientada.

1.2 Percolação de Bernoulli em \mathbb{Z}^d

Faremos agora uma breve introdução aos modelos de percolação de elos e de sítios de Bernoulli para a rede hipercúbica \mathbb{Z}^d . Não nos preocuparemos em demonstrar os resultados aqui presentes. Estes podem ser vistos de maneira detalhada em [9].

Questões envolvendo a passagem de fluidos por meios porosos sempre foram relevantes na Física e na Química. Um desses problemas, formulado por Broadbent e Hammersley em 1957 [3], consistia em determinar a probabilidade de o centro de uma pedra porosa suficientemente grande molhar, ao ser inserida na água. Ao criarem um modelo matemático para descrever este fenômeno, deu-se origem ao que entendemos por percolação, em sua forma mais simples. Neste modelo, hoje conhecido como percolação de elos de Bernoulli, representamos por meio de um grafo o material pelo qual ocorre a passagem de água. Os vértices são vistos como os poros do material, e os elos simbolizam os canais que ligam os poros. Além disso, consideramos o meio irregular, de modo que cada canal possui uma espessura própria. Tal fato acarreta na possibilidade de que alguns canais, quando muito pequenos, constituam um impedimento para a passagem do fluido. Tendo em vista o problema formulado acima, buscamos, através de um modelo probabilístico, estudar o comportamento das componentes conexas de canais que permitem a passagem de água. Formalmente, temos o seguinte:

Dado $d \in \mathbb{N}$, considere a *rede hipercúbica* \mathbb{Z}^d como sendo o grafo $(\mathbb{Z}^d, \mathbb{E}^d)$, cujo conjunto de elos consiste nos pares de vértices $\{u, v\}$, tais que $\delta(u, v) := \sum_{i=1}^d |u_i - v_i| = 1$, e fixe $p \in [0, 1]$. Para cada $e \in \mathbb{E}^d$, atribuímos dois estados possíveis, representados no espaço amostral $\Omega(e) = \{0, 1\}$. Quando $\omega(e) = 1$, dizemos que o elo e encontra-se *aberto*. Do contrário, dizemos que e está *fechado*. Munidos da σ -álgebra do conjunto de partes de $\Omega(e)$, definimos uma medida de Bernoulli μ_e , dada por $\mu_e(\omega(e) = 1) = p$ e $\mu_e(\omega(e) = 0) = 1 - p$.

Feito isso, criamos de forma natural um espaço de probabilidade em todo o grafo, ao fazermos $\Omega = \{0, 1\}^{\mathbb{E}^d}$, \mathcal{F} a σ -álgebra de Ω gerada pelos eventos cilíndricos, e introduzirmos em (Ω, \mathcal{F}) a medida produto com densidade p , dada por

$$P_p := \prod_{e \in \mathbb{E}^d} \mu_e.$$

Para os problemas que veremos adiante, é este espaço de probabilidade que levaremos em consideração. Note que, com uma simples modificação, podemos transformar nosso modelo de percolação de elos num modelo de percolação de sítios: basta substituímos o conjunto \mathbb{E}^d pelo conjunto \mathbb{Z}^d na construção que acabamos de fazer. Em ambos os casos, o estado de um elo/sítio é independente do estado dos demais. Como última observação, perceba também que, seguindo procedimento análogo ao que acabamos de fazer, podemos construir modelos de percolação em grafos mais gerais.

No que diz respeito ao conjunto Ω , podemos identificar uma relação de ordem parcial entre seus elementos, dada por $\omega_1 \leq \omega_2$ se e somente se $\omega_1(e) \leq \omega_2(e)$ para todo $e \in \mathbb{E}^d$. Além disso, cada evento elementar induz em \mathbb{Z}^d um subgrafo $H(\omega) = (\mathbb{Z}^d, K(\omega))$, em que $K(\omega) = \{e \in \mathbb{E}^d : \omega(e) = 1\}$. As componentes conexas de H , isto é, os subgrafos conexos de H que não podem ser aumentados adicionando-se elos abertos ou sítios que compartilham algum elo aberto, serão chamadas de *clusters* ou *aglomerados abertos* em ω . Dado um sítio x da rede, escrevemos $C_x = C_x(\omega)$ para denotar o *cluster aberto que contém* x na configuração ω . Em particular, definimos $C := C_0$. Quando for conveniente, usaremos C_x para indicar o conjunto de sítios pertencentes ao cluster aberto de x . Estaremos especialmente interessados na distribuição do número de vértices de C_x , denotada por $|C_x|$. Dados dois conjuntos de vértices $A, B \in \mathbb{Z}^d$, usaremos a notação ' $A \leftrightarrow B$ ' para indicar o evento

$$\{\omega : \exists \text{ um caminho aberto ligando algum sítio de } A \text{ a algum sítio de } B \text{ em } \omega\}.$$

Como exemplo, temos

$$C_x(\omega) = \{y \in \mathbb{Z}^d : x \leftrightarrow y \text{ em } \omega\}.$$

Uma propriedade interessante que obtemos quando definimos nosso processo de percolação é a independência da distribuição de $|C_x|$ com relação a x . As razões que nos levam a observar este efeito são duas: a invariância por translação da rede hipercúbica e da medida de probabilidade P_p . Informalmente, num grafo invariante por translação, cada sítio é indistinguível dos demais, no sentido que se tomarmos dois sítios, x e y , e uma configuração ω , podemos olhar para a distribuição dos elos abertos e fechados ao redor de x e obter, por meio de translações, uma configuração ω' com elos distribuídos de maneira idêntica ao redor de y . Para completar, ao atribuímos pesos iguais na hora de abrir os elos, fazemos com que as configurações ω e ω' sejam "igualmente prováveis", o que caracteriza a invariância por translação de P_p .

1.2.1 Alguns resultados básicos

Retomando o problema colocado no início da seção, estamos interessados em saber a probabilidade de o centro da pedra se molhar. A formulação matemática equivalente consiste em calcularmos a *probabilidade de percolação* $\theta(p)$, isto é, a probabilidade de um dado vértice pertencer a um cluster infinito. Considerando a invariância por translação de \mathbb{Z}^d e P_p , podemos, sem perda de generalidade, escolher o vértice em questão como sendo a origem do sistema de coordenadas. Assim, definimos

$$\theta(p) := P_p(|C| = \infty).$$

É intuitivo afirmarmos que $\theta(p)$ é uma função não-decrescente na variável p . Se fornecermos uma chance $p' \geq p$ para os elos da rede se abrirem, é de se esperar que a origem pertença a um cluster infinito com probabilidade $\theta(p') \geq \theta(p)$. Observe também que $\theta(0) = 0$ e $\theta(1) = 1$.

Levando-se em conta o que acabamos de mencionar, podemos fazer um questionamento importante sobre o modelo, que diz respeito à determinação de uma probabilidade crítica $p_c(d)$, a partir da qual a origem em \mathbb{Z}^d pertence a um cluster infinito com probabilidade positiva. Formalmente, o objeto de interesse aqui é a quantidade

$$p_c(d) := \sup\{p : \theta(p) = 0\},$$

de modo que podemos escrever

$$\theta(p) \begin{cases} = 0, & \text{se } p < p_c, \\ > 0, & \text{se } p > p_c. \end{cases}$$

Quando $d = 1$, obviamente temos $p_c(1) = 1$ e $\theta(p_c) = 1$. Em outras palavras, a origem percola se e somente se todos os elos são abertos com probabilidade 1. No entanto, para dimensões maiores, o seguinte resultado mostra que é mais fácil observarmos a existência de percolação.

Teorema 1.1 (9, p.14). *Se $d \geq 2$, então $0 < p_c(d) < 1$.*

Embora até agora tenhamos dado atenção para a questão de a origem pertencer a um aglomerado infinito aberto, a existência desse aglomerado, independentemente de sua localização no grafo, também é um ponto relevante em teoria de percolação, sendo importante falarmos um pouco sobre isso. Primeiramente, veja que quando consideramos o evento $\{\exists \text{ um cluster infinito aberto}\}$, estamos lidando com um evento caudal. De fato, para uma configuração ω neste conjunto, se desconsiderarmos o estado de qualquer quantidade finita de elos, o cluster aberto remanescente ainda é infinito. Logo, pela Lei 0-1 de Kolmogorov, a probabilidade desse evento deve ser 0 ou 1. Além disso, como veremos no teorema abaixo, esta probabilidade possui uma relação muito particular com o comportamento da função $\theta(p)$.

Teorema 1.2 (9, p.14). *Para percolação de elos em \mathbb{Z}^d , vale que*

$$P_p(\exists \text{ um cluster infinito aberto}) = \begin{cases} 0, & \text{se } \theta(p) = 0, \\ 1, & \text{se } \theta(p) > 0. \end{cases}$$

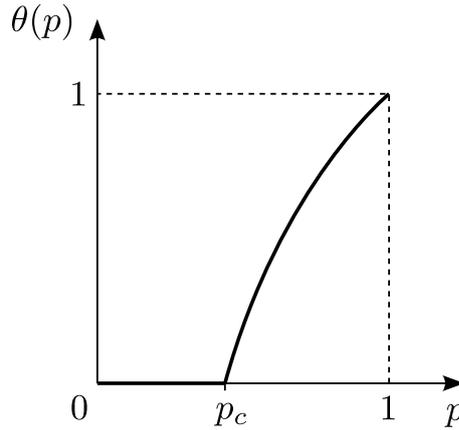


Figura 1.3: Comportamento esperado da função $\theta(p)$ para $d = 2$ e $d \geq 19$.

Note que os dois teoremas anteriores não nos permitem fazer referência sobre o comportamento do sistema quando $p = p_c$. Com eles, podemos verificar a existência de uma fase *subcrítica* ($p < p_c$), e de uma fase *supercrítica* ($p > p_c$), que são razoavelmente bem entendidas quando comparadas ao regime *crítico* ($p = p_c$). Tendo em vista o que usaremos ao longo do texto, os resultados relevantes de cada fase podem ser sintetizados da seguinte forma:

Fase subcrítica. Quando $p < p_c$, todos os clusters são finitos quase certamente. Logo, temos ausência de percolação. O aglomerado da origem $|C|$ decresce de tamanho em taxa exponencial, isto é, existe $\alpha(p) > 0$, tal que $P_p(|C| = n) \approx e^{-n\alpha(p)}$.

Fase supercrítica. Quando $p > p_c$, a existência de percolação ocorre com probabilidade 1. A questão aqui consiste em obter informações sobre a quantidade de aglomerados infinitos existentes. No caso de \mathbb{Z}^d , existe um único cluster infinito quase certamente.

Fase crítica. Como dissemos, pouco se conhece sobre o que acontece quando $p = p_c$. Para $d = 2$ e $d \geq 19$, sabe-se que $\theta(p_c) = 0$, mas resultados para as outras dimensões ainda constituem um problema em aberto. Considerando o decaimento do aglomerado da origem nos casos em que temos ausência de percolação, acredita-se que $P_{p_c}(|C| \geq n) \approx n^{-1/\delta}$, para algum $\delta = \delta(d) > 0$.

Ademais, façamos um breve comentário a respeito da continuidade da função θ . Obviamente, θ é contínua se $p < p_c$, uma vez que neste caso temos $\theta(p) = 0$. Como teorema (8.9 de [9], p.202), segue que θ é contínua à direita no intervalo $[0, 1]$. Logo, a continuidade de θ é assegurada sempre que tivermos $\theta(p_c) = 0$. De fato, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.3 (9, p.230). $\theta(p_c) = 0$ para $d = 2$ e $d \geq 19$.

Finalizando os resultados básicos, precisamos fazer pequenas observações relacionadas a percolação de sítios, uma vez que vamos recorrer a este processo nos próximos capítulos. Primeiramente, perceba que todos os objetos que definimos para percolação de elos possuem análogos neste outro modelo. Além disso, devido ao fato de estarmos lidando com

a rede hipercúbica, obtemos um comportamento semelhante ao que vimos nos teoremas acima. A razão disso é que a maior parte dos argumentos e técnicas que utilizamos podem ser adaptadas de um modelo para o outro.

Vejam agora um teorema importante que nos mostra como os valores críticos de cada processo estão ligados entre si:

Teorema 1.4 (9, p.25). *Seja $G = (V, E)$ um grafo conexo, infinito, com quantidade enumerável de elos e com vértices de grau máximo $\Delta < \infty$. Então, as probabilidades críticas para o grafo G satisfazem*

$$\frac{1}{\Delta - 1} \leq p_c^{elo} \leq p_c^{sítio} \leq 1 - (1 - p_c^{elo})^\Delta.$$

1.2.2 Desigualdade FKG e Teorema RSW

Para terminarmos esta seção, vamos expor dois importantes resultados envolvendo percolação de Bernoulli, que também são encontrados em [9]. Eles serão usados constantemente nas demonstrações do Capítulo 4. Lembramos que o espaço de probabilidade que estamos considerando é denotado por $(\Omega, \mathcal{F}, P_p)$. O operador esperança será indicado por E_p .

Dizemos que um evento $A \in \mathcal{F}$ é *crecente* se $I_A(\omega) \leq I_A(\omega')$ sempre que tivermos $\omega \leq \omega'$, sendo I_A a função indicadora de A . De maneira geral, a variável aleatória N , definida em (Ω, \mathcal{F}) , é *crecente* se $N(\omega) \leq N(\omega')$ sempre que $\omega \leq \omega'$. Um exemplo simples de evento crescente é o evento no qual existe um caminho aberto conectando os sítios x e y do grafo. Naturalmente, o número de caminhos distintos conectando x e y é uma variável aleatória crescente. Um evento A é *decrecente* se o seu complemento for crescente. Dizemos também que a variável aleatória N é *decrecente* se $-N$ for crescente.

De certa forma, é intuitivo pensarmos que dado que já existe um caminho aberto ligando dois sítios u e v , torna-se mais provável conseguirmos conectar dois outros sítios, x e y . Assim, se $A = \{x \leftrightarrow y\}$ e $B = \{u \leftrightarrow v\}$, é de se esperar que $P_p(A \cap B) \geq P_p(A)P_p(B)$. Indo nessa direção, enunciaremos o seguinte teorema:

Desigualdade FKG (9, p.34).

a) *Se X e Y são variáveis aleatórias crescentes tais que $E_p(X^2) < \infty$ e $E_p(Y^2) < \infty$, então*

$$E_p(XY) \geq E_p(X)E_p(Y).$$

b) *Se A e B são eventos crescentes, então*

$$P_p(A \cap B) \geq P_p(A)P_p(B).$$

Para o próximo passo, vamos considerar somente a rede quadrada. A razão para isso é que a planaridade de \mathbb{Z}^2 induz algumas questões interessantes sobre o processo de percolação, que não faz sentido falarmos se estivermos trabalhando em dimensões maiores. Uma delas envolve uma relação entre o cruzamento de caminhos abertos em retângulos e a existência de circuitos abertos envolvendo a origem. Antes de formalizar essa ideia, vejamos alguma notação.

Um *cruzamento esquerda-direita* em um retângulo B é um caminho aberto em B que conecta algum vértice de seu lado esquerdo a algum vértice de seu lado direito, mas sem utilizar elos em sua fronteira. Para inteiros positivos k e l , definimos o retângulo

$$B(kl, l) := [-l, (2k - 1)l] \times [-l, l].$$

Seja $LR(kl, l)$ o evento em que existe um cruzamento esquerda-direita em $B(kl, l)$. Por conveniência, denotamos $B(l, l)$ por $B(l)$ e $LR(l, l)$ por $LR(l)$. Sejam também $A(l)$ o anel $B(3l) \setminus B(l)$, e $O(l)$ o evento em que existe um circuito aberto em $A(l)$ envolvendo a origem.

O que se segue é um resultado devido a Russo, Seymour e Welsh. Basicamente, ele nos diz que se existe uma probabilidade significativa de existir um cruzamento em $B(l)$, então existe uma probabilidade significativa de existir um circuito aberto no anel $A(l)$.

Teorema RSW (9, p.315). *Se $P_p(LR(l)) = \tau$, então*

$$P_p(O(l)) \geq \{\tau(1 - \sqrt{1 - \tau})^4\}^{12}.$$

A principal aplicação deste resultado se dá quando $p = p_c = 1/2$. Nessas condições, o Lema 11.21 de [9] (p. 294) afirma que temos probabilidade $1/2$ de existir um caminho aberto no retângulo $[0, n + 1] \times [0, n]$ ligando o lado esquerdo ao lado direito. Tal caminho contém um cruzamento esquerda-direita no retângulo $[0, n + 1] \times [-1, n + 1]$. Para todos os cruzamentos possíveis em uma dada configuração, escreva x para indicar o sítio final mais inferior na borda direita. Dessa forma, temos probabilidade $1/2$ de o elo à direita de x estar aberto e, com isso, a probabilidade de um cruzamento esquerda-direita no quadrado $[0, n + 1] \times [-1, n + 2]$ é, pelo menos, $1/4$, para $n \geq 0$. Daí, concluímos que para todo $l \geq 1$, temos $P_{1/2}(LR(l)) \geq 1/4$. Pelo teorema RSW, concluímos que, assim como $P_{1/2}(LR(l))$, a probabilidade $P_{1/2}(O(l))$ também é afastada de zero, uniformemente em l .

Dentre as etapas da prova do teorema RSW, destacamos o seguinte lema, que também nos será útil:

Lema 1.5 (9, p.316). *Se $P_p(LR(l)) = \tau$, então*

$$P_p(LR(\frac{3}{2}l, l)) \geq (1 - \sqrt{1 - \tau})^3.$$

No regime crítico ($p = p_c$), as técnicas RSW discutidas acima, quando usadas em conjunto com a desigualdade FKG, fazem com que seja possível o estabelecimento de cotas inferiores para a existência de caminhos e circuitos bem mais gerais na rede. No capítulo 4, muitos dos argumentos que usaremos são consequências deste procedimento.

1.3 O Processo de Poisson

Nessa dissertação, o processo de Poisson possui um caráter bastante técnico. Vamos usá-lo na hora de criarmos nosso modelo de incêndios florestais. Para não nos estendermos tanto, manteremos o foco na tarefa de obter um espaço de probabilidade adequado para nossos fins ao término desta seção. Assim como em 1.2, não iremos demonstrar os resultados aqui presentes. Tais demonstrações podem ser encontradas em [11].

A grosso modo, o processo de Poisson é um tipo de processo de contagem de eventos pontuais que ocorrem num certo espaço de probabilidade. Tais eventos podem representar os tempos de decaimento radioativo de um material, os instantes em que uma central telefônica recebe chamadas, os tempos em que veículos atravessam determinado cruzamento, etc. Formalmente, trata-se do seguinte modelo:

Um *processo de Poisson* é uma coleção $N = (N_t)_{t \geq 0}$ de variáveis aleatórias, definidas num espaço de probabilidade (Ω, \mathcal{F}, P) , satisfazendo as seguintes propriedades:

- i) N é um processo de contagem, isto é,
 - a) N_t toma valores em \mathbb{Z}_+ , $t \geq 0$;
 - b) $s \leq t \Rightarrow N_s \leq N_t$;
 - c) (sem ocorrências simultâneas) $\lim_{s \downarrow t} N_s \leq \lim_{s \uparrow t} N_s + 1$, para todo $t \geq 0$.
- ii) (independência dos incrementos) as σ -álgebras $\sigma(N_t - N_s)$ e $\sigma(N_u, u \leq s)$ são independentes;
- iii) (incrementos estacionários) $(N_t - N_s) \stackrel{d}{=} N_{t-s}$ para todo $s \leq t$.

Para cada instante $t \geq 0$, o processo N nos fornece o número de ocorrências N_t de um evento pontual até o instante t , para todo evento elementar $\omega \in \Omega$. Mas veja que também podemos analisar o processo sob um outro ponto de vista, ao fixarmos ω e tomarmos as *trajetórias* $t \mapsto N_t$, para $t \geq 0$. Nesse sentido, podemos entender o processo N como elemento aleatório de $\mathbb{R}_+^{[0, +\infty)}$.

Vamos agora construir o processo de Poisson, acima definido. A ideia é relativamente simples, assentando-se em um teorema principal.

Construção do processo de Poisson. Seja (Ω, \mathcal{F}, P) um espaço de probabilidade que comporta uma sequência $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$ de variáveis aleatórias i.i.d., com distribuição exponencial de parâmetro λ . Logo, temos

$$P(X_n > t) = e^{-\lambda t}, \quad t > 0.$$

Em seguida, façamos $S_0 = 0$ e $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$. Observe que, quase certamente, $(S_n)_{n \geq 0}$ é uma sequência crescente de variáveis aleatórias. Finalmente, definamos

$$N_t := \max\{n : S_n \leq t\}.$$

Procedendo dessa forma, nosso processo de Poisson está criado. Note que N_t pode, em princípio, ser infinito, mas o próximo lema garante que as ocorrências, para todo t , são finitas com probabilidade 1.

Lema 1.6. *Existe um conjunto $\Omega^* \in \mathcal{F}$, com $P\{\Omega^*\} = 1$, tal que $N_t(\omega) < \infty$ para todo $t \geq 0$, $\omega \in \Omega^*$, e $S_n(\omega) < S_{n+1}(\omega)$, $n \in \{0, 1, \dots\}$.*

Observação. A restrição ao conjunto Ω^* é de grande importância para nós. O fato de N_t ser finito evitará que tenhamos que lidar com uma família de eventos indesejáveis no futuro. Por conveniência, escrevamos (Ω, \mathcal{F}, P) para indicar o espaço de probabilidade restrito.

Denotando por \mathcal{E} a σ -álgebra de \mathbb{Z}_+ gerada pelos seus conjuntos unitários, temos o seguinte resultado:

Teorema 1.7. *Para o processo N construído em (Ω, \mathcal{F}, P) , as seguintes afirmações são verdadeiras:*

- i) N é um processo de Poisson $(\mathbb{Z}_+, \mathcal{E})$ -mensurável. Mais ainda, N_t é uma v.a. \mathcal{E} -mensurável, com distribuição de Poisson de parâmetro λt , e S_n possui distribuição Gama com parâmetros (n, λ) .*
- ii) Todas as trajetórias de N são càdlàg.*

A última tarefa é construir o espaço de probabilidade adequado, ao qual nos referimos no início. Para tanto, consideramos primeiramente os espaços $(\mathbb{R}_+, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+), P_n)$, $n \in \{1, 2, \dots\}$, sendo a medida P_n definida a partir da função de distribuição exponencial de parâmetro λ . Em seguida, usando o teorema de extensão de Kolmogorov, passamos ao espaço $(\mathbb{R}_+^\infty, \mathcal{B}(\mathbb{R}_+^\infty), P)$, onde P é a medida produto

$$P := \prod_{n \in \mathbb{N}} P_n.$$

Assim feito, definimos a sequência de v.a.'s $(X_n)_{n \in \mathbb{N}}$, fazendo $X_n(x_1, \dots, x_n, \dots) := x_n$, realizamos o procedimento de construção do processo de Poisson que descrevemos e aplicamos o Lema 1.6 para nos restringirmos ao conjunto Ω^* .

2 Incêndios Florestais em \mathbb{Z}^2

Construiremos, primeiramente, o espaço de probabilidade onde ocorrem os incêndios florestais estudados neste capítulo. Em seguida, definiremos o modelo de incêndios florestais na rede quadrada e abordaremos alguns aspectos de sua dinâmica que, embora sejam intuitivos, não são triviais do ponto de vista matemático. Por fim, com a ajuda de modelos auxiliares, veremos uma tentativa feita por van den Berg e Brouwer de se aproximar dos problemas em aberto.

2.1 Definição do modelo e problemas em aberto

Com base nas considerações feitas na Seção 1.3, seja (M, \mathcal{M}, μ) o espaço de probabilidade no qual é possível definir dois processos de Poisson independentes, um com taxa 1 e outro com taxa λ . Tomando como grafo a rede quadrada e procedendo de maneira análoga ao que fizemos em percolação de elos, começaremos associando a cada sítio $v \in \mathbb{Z}^2$ o espaço (M, \mathcal{M}, μ) . Em seguida, a partir da família $(M, \mathcal{M}, \mu)_v$, $v \in \mathbb{Z}^2$, obtemos o espaço $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}_\lambda)$, em que $\Omega := \prod_{v \in V} M_v$, \mathcal{F} é a σ -álgebra de Ω gerada pelos eventos cilíndricos, e \mathcal{P}_λ é a medida produto em (Ω, \mathcal{F}) , dada por

$$\mathcal{P}_\lambda := \prod_{v \in V} \mu_v.$$

$(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}_\lambda)$ está definido em \mathbb{Z}^2 e será o espaço de probabilidade de maior interesse nesta dissertação.

Antes de passarmos adiante, vamos definir uma maneira conveniente de interpretarmos o espaço de eventos que acabamos de criar. Dado um evento elementar $\omega \in \Omega$ e um vértice $v \in V$, podemos associar $\omega(v)$ a um par ordenado de sequências $(\{t_{1,n}\}, \{t_{\lambda,n}\})(v)$, sendo a primeira associada ao processo de Poisson com taxa 1, e a segunda associada ao processo de Poisson com taxa λ . Se fizermos os termos de cada sequência representarem, respectivamente, o “crescimento de uma árvore” e a “incidência de um raio” em v , diremos que os elementos de $\{t_{1,n}\}$ são os tempos nos quais um relógio de crescimento colocado em v “apita” e, de maneira análoga, a sequência $\{t_{\lambda,n}\}$ será interpretada como “apitos” de um relógio de ignição em v .

Intuitivamente, se observarmos um evento elementar $\omega \in \Omega$ ao longo do tempo, veremos uma série de relógios de Poisson de crescimento e ignição apitando por toda a rede quadrada. Tal interpretação é essencial para compreendermos a dinâmica do modelo de incêndios florestais, que será definido a seguir. Em princípio, vamos restringir nossas análises a uma caixa finita $B(n) := [-n, n]^2$ de \mathbb{Z}^2 . Posteriormente, nos problemas que veremos, consideraremos o comportamento $n \rightarrow \infty$.

Na caixa $B(n)$, um sítio v pode estar “vazio” ou “ocupado por uma árvore”. Esses estados são denotados por 0 e 1, respectivamente, valores assumidos pela variável aleatória $\eta_v^n(t)$ num dado instante de tempo $t \geq 0$. Inicialmente, todos os sítios estão vazios. Considerando a sequência $\eta^n(t) := (\eta_v^n(t), v \in B(n))$, definamos a seguinte dinâmica para o processo: quando o relógio de crescimento de um sítio v apitar, tal sítio torna-se automaticamente ocupado por uma árvore (a menos que este já esteja ocupado, caso em que ignoramos o apito do relógio). Quando o relógio de ignição de um sítio v apitar, cada sítio w que possui um *caminho ocupado em $B(n)$ ligado a v* torna-se instantaneamente vazio (observe que, segundo este processo, se v estiver vazio então nada acontece).

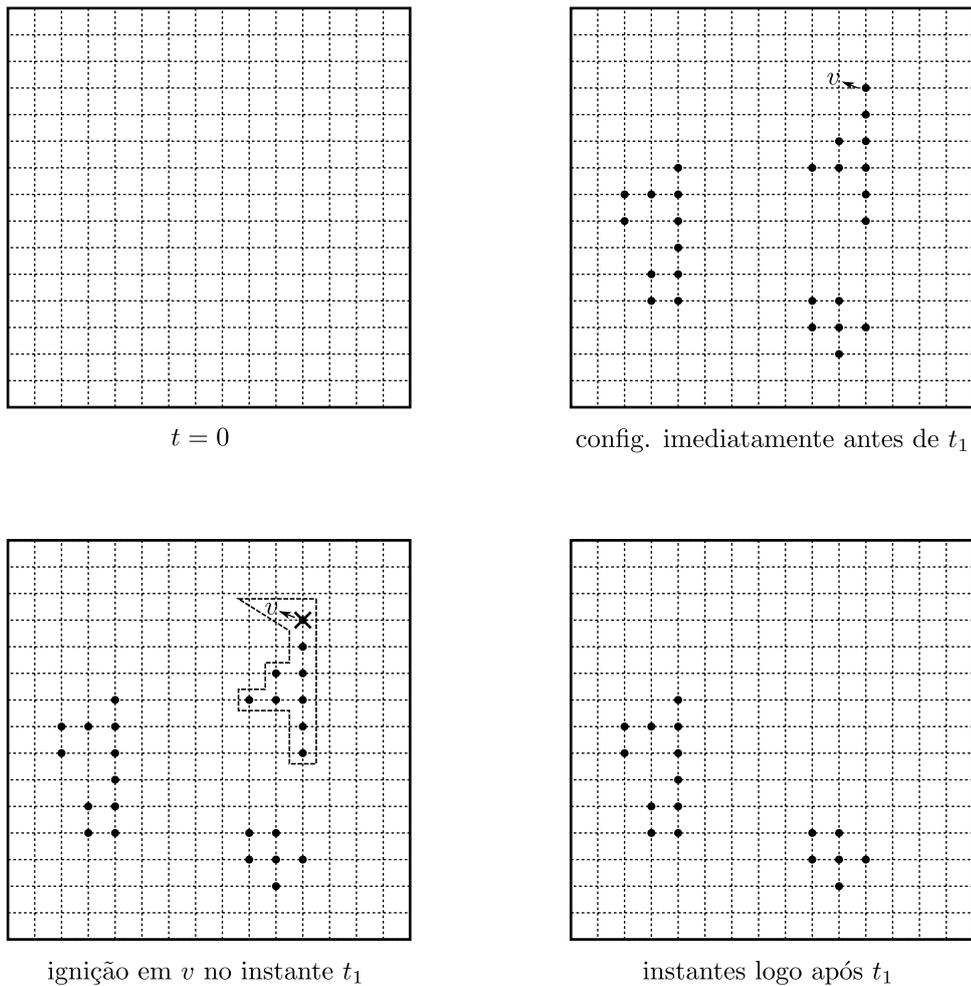


Figura 2.1: Ignição em v no instante $t_1 > 0$.

Assim definidos os modelos de incêndios florestais nas caixas $B(n)$, temos, para cada n , que $(\eta^n(t), t \geq 0)$ é uma Cadeia de Markov em tempo contínuo, irredutível e com espaço de estados finito, dado por $\{0, 1\}^{B(n)}$. É irredutível no sentido de que, dadas duas configurações em η^n quaisquer, existe uma probabilidade positiva de sairmos de uma delas em um dado instante e atingirmos a outra após um tempo finito. Além disso, como os processos $\eta^n(\cdot), n \geq 1$ dependem somente dos relógios de Poisson da rede quadrada, a medida \mathcal{P}_λ fornece um acoplamento natural entre eles, o que torna a comparação entre os incêndios em diferentes caixas uma tarefa relativamente simples. Inclusive, como veremos mais adiante, \mathcal{P}_λ também governa dois modelos auxiliares, utilizados na demonstração dos resultados principais.

Antes de prosseguirmos, façamos algumas observações com relação à notação usada.

- Para $m \leq n$, usaremos a frase “ η^n possui um incêndio em $B(m)$ antes do tempo t ” para designarmos o evento $\{\exists v \in B(m) \text{ e } \exists s \leq t \text{ tal que } \eta_v^n(s^-) = 1 \text{ e } \eta_v^n(s) = 0\}$, que também será denotado por $A(\eta^n, t, B(m))$.
- Analogamente, diremos que “ η^n possui pelo menos dois incêndios em $B(m)$ antes do tempo t ” para indicarmos o evento $\{\exists v, w \in B(m) \text{ e } \exists s < u \leq t \text{ tal que } \eta_v^n(s^-) = \eta_w^n(u^-) = 1 \text{ e } \eta_v^n(s) = \eta_w^n(u) = 0\}$, denotado por $A_2(\eta^n, t, B(m))$. Note que esta definição nos permite tomarmos v e w iguais.
- Quando não houver necessidade de indicarmos a dependência em λ ou quando estivermos lidando com eventos envolvendo apenas relógios de crescimento, omitiremos o índice em \mathcal{P}_λ .
- Dado $s > 0$, o evento indicado por $A(\eta^n, (t, t + s), B(m))$ nos diz que “ η^n possui um incêndio em $B(m)$ entre os tempos t e $t + s$ ”. Interpretação análoga será feita para $A_2(\eta^n, (t, t + s), B(m))$.

No que concerne a este modelo, é uma observação básica o fato de que, para todo tempo t e para todos os valores de m e n , $m \leq n$, a probabilidade de η^n possuir um incêndio em $B(m)$ antes do tempo t tende a zero quando $\lambda \downarrow 0$, pois

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_\lambda[A(\eta^n, t, B(m))] &= 1 - \mathcal{P}_\lambda[A^c(\eta^n, t, B(m))] \\ &\leq 1 - \mathcal{P}_\lambda(\text{nenhum rel. de ign. de } B(n) \text{ toca antes de } t) \\ &= 1 - e^{\lambda(2n+1)^2 t} \longrightarrow 0 \text{ quando } \lambda \downarrow 0. \end{aligned}$$

Portanto, vale que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \lim_{\lambda \downarrow 0} \mathcal{P}_\lambda(\eta^n \text{ possui um incêndio em } B(m) \text{ antes do tempo } t) = 0.$$

Uma pergunta que segue naturalmente esta observação é: o que acontece ao trocarmos a ordem desses limites? Em outras palavras, tal questionamento seria equivalente a saber, de uma maneira informal, qual a probabilidade de ocorrer um incêndio em $B(m)$ antes do tempo t , no limite $\lambda \downarrow 0$, para um modelo de incêndio florestal definido em toda a rede quadrada. No entanto, a questão sobre a existência de tal modelo requer um cuidado especial. Inclusive, é por este motivo que, num primeiro momento, nos restringiremos às caixas $B(n)$. Ao longo do texto, agregaremos material suficiente para uma abordagem mais adequada deste tema.

Voltando ao problema da ordem dos limites, vamos começar especificando um pouco melhor o intervalo de tempo que levaremos em consideração. Para isso, vamos utilizar o primeiro modelo auxiliar, que envolve somente os relógios de crescimento. Este modelo consiste, simplesmente, em definir para todo sítio v da rede quadrada a variável aleatória

$$\sigma_v(t) := I_{\{\text{O relógio de crescimento em } v \text{ toca em } [0,t]\}},$$

em que I é a função indicadora. Veja que, desse modo, para um dado t fixo, $\sigma_v(t)$ são v.a.'s Bernoulli de parâmetro $1 - e^{-t}$. Assim, se definirmos o *tempo crítico* t_c do processo de crescimento puro pela relação $p_c = 1 - e^{-t_c}$, no qual p_c é o valor crítico para percolação de Bernoulli de sítios na rede quadrada, teremos que $\sigma(t)$ não possui cluster infinito ocupado para $t \leq t_c$, mas possui um único cluster infinito para $t > t_c$.

A utilidade desse modelo consiste, num primeiro momento, em fornecer uma cota superior para $\mathcal{P}_\lambda[A(\eta^n, t, B(m))]$. Mais precisamente, para todo $t \geq 0$,

$$\limsup_{\lambda \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_\lambda(\eta^n \text{ possui um incêndio em } O \text{ antes do tempo } t) \leq \theta(1 - e^{-t}), \quad (2.1)$$

sendo $\theta(p)$ a probabilidade de percolação para percolação de sítios na rede quadrada com parâmetro p . Mostramos a desigualdade da seguinte forma: seja $\widehat{C}_t(O)$ o cluster ocupado de O na configuração $\sigma(t)$. Pelo que descrevemos para o processo η^n , para que haja um incêndio em O antes do tempo t , é necessário que pelo menos um dos relógios de ignição dos sítios de $\widehat{C}_t(O)$ tenha apitado antes do tempo t . Como todos os relógios de Poisson da rede são independentes, temos

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}_\lambda(\eta^n \text{ possui um incêndio em } O \text{ antes de } t) \\ & \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}_\lambda(|\widehat{C}_t(O)| = k \text{ e } \exists v \in \widehat{C}_t(O) \text{ com ignição antes de } t) \\ & \quad + \mathcal{P}_\lambda(|\widehat{C}_t(O)| = \infty) \\ & \leq \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}_\lambda(|\widehat{C}_t(O)| = k)(1 - e^{-\lambda tk}) + \theta(1 - e^{-t}). \end{aligned}$$

Visto que o somatório acima não depende de n e tende a 0 quando $\lambda \downarrow 0$, a desigualdade proposta segue. De maneira mais geral, temos, para todo m e todo $t \leq t_c$, que

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \lim_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_\lambda(\eta^n \text{ possui um incêndio em } B(m) \text{ antes do tempo } t) \leq |B(m)|\theta(1 - e^{-t}) = 0. \quad (2.2)$$

O próximo passo é estudar o comportamento de $\mathcal{P}_\lambda[A(\eta^n, t, B(m))]$ para $t > t_c$. Intuitivamente, podemos argumentar que, se nos limites estabelecidos esta probabilidade fosse zero para algum $t > t_c$, a probabilidade de não ocorrer incêndio em O seria 1. Mas quando $\lambda \downarrow 0$, é possível que eventualmente apareça um cluster infinito na rede. Como a origem intersecta com probabilidade positiva e a taxa de ignição desse cluster é infinita, a origem tem incêndio antes de t com probabilidade maior que zero, uma contradição. No entanto, a existência de um cluster infinito no processo de incêndio florestal em toda rede quadrada é algo que teríamos que demonstrar para que este raciocínio fizesse sentido. Portanto, consideraremos o regime $t > t_c$ um problema aberto. Formalmente, trata-se do seguinte:

Problema Aberto 2.1. *É verdade, para todo $t > t_c$, que*

$$\limsup_{\lambda \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_\lambda(\eta^n \text{ possui um incêndio em } O \text{ antes do tempo } t) > 0? \quad (2.3)$$

E assumindo uma resposta afirmativa para este questionamento, podemos ir um pouco mais além:

Problema Aberto 2.2. *É verdade, para todo $t > t_c$, que dado $\varepsilon > 0$, existe m tal que*

$$\limsup_{\lambda \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_\lambda(\eta^n \text{ possui um incêndio em } B(m) \text{ antes do tempo } t) > 1 - \varepsilon? \quad (2.4)$$

A pergunta acima baseia-se na ideia de que, sendo afirmativa a resposta do primeiro problema, então existe uma densidade positiva de sítios nos quais ocorrem incêndios antes do tempo t e, portanto, a probabilidade de que algum desses sítios estejam em $B(m)$ tende a 1 quando $m \rightarrow \infty$. Em contrapartida, os resultados principais presentes nesta dissertação indicam, essencialmente, uma possibilidade de que o comportamento do processo seja diferente deste que acabamos de intuir.

2.2 Principais resultados

Para expormos os resultados que se relacionam diretamente com os problemas em aberto que acabamos de colocar, precisamos antes definir um parâmetro crítico, denotado por $\hat{\delta}_c$, que possui um papel essencial nos enunciados das principais proposições. Façamos, então, esta tarefa.

Seja P_p a medida produto para percolação de sítios na rede quadrada, p_c o valor crítico desse processo e $\{V \leftrightarrow W\}$ o evento no qual existe um caminho ocupado de um conjunto V para um conjunto W , todos definidos como na Seção 1.2. Além disso, dado um inteiro positivo n , seja $G = G(n) := [-n, 3n] \times [-n, 2n]$ e $\partial G(n)$ a fronteira de G (sítios de G que possuem um vizinho em G^c). Considere também o seguinte processo, descrito de maneira informal (deixamos a descrição formal para o Capítulo 4): tome $\delta \in [0, 1]$. Declare, independentemente, os sítios de G ocupados com probabilidade p_c e vazios com probabilidade $1 - p_c$. Em seguida, destrua os clusters ocupados ligados à fronteira. Isto é, todos os vértices que possuem um caminho ocupado até ∂G tornam-se vazios. Nesta nova configuração, tome os sítios vazios e, independentemente, torne-os ocupados com parâmetro δ . Assim, a probabilidade de $v \in G$ estar ocupado é

$$\begin{aligned} & \mathbf{P}(v \text{ } p_c\text{-ocupado, } v \not\leftrightarrow \partial G) + \mathbf{P}(v \text{ } p_c\text{-ocupado, } v \leftrightarrow \partial G, v \text{ } \delta\text{-ocupado}) + \\ & \mathbf{P}(v \text{ } p_c\text{-vazio, } v \text{ } \delta\text{-ocupado}) = \\ & p_c - P_{p_c}(v \leftrightarrow \partial G) + (1 - p_c + P_{p_c}(v \leftrightarrow \partial G))\delta. \end{aligned}$$

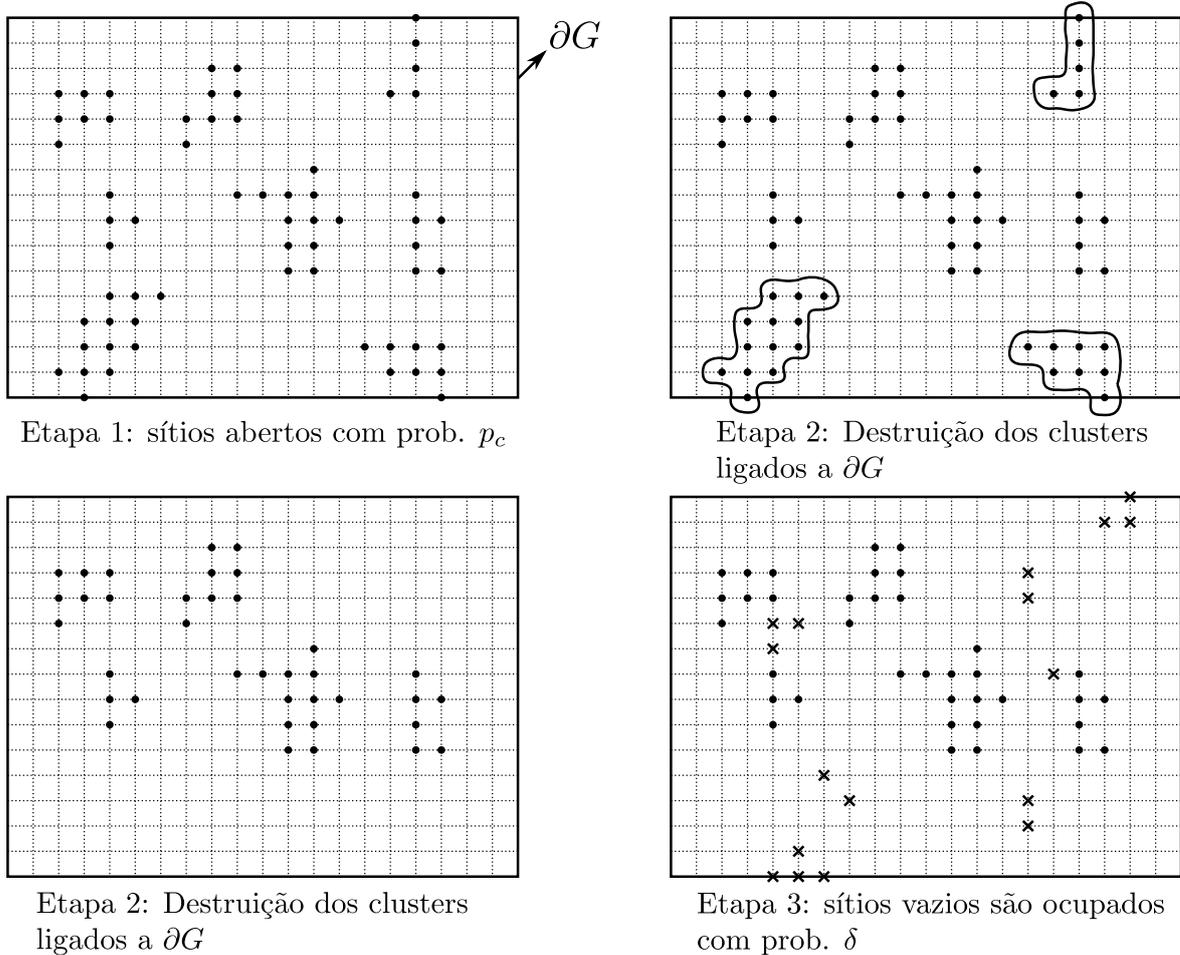


Figura 2.2: Percolação auto-destrutiva (ver Cap. 4).

Observe que se aumentarmos n e escolhermos v suficientemente “distante” de ∂G , o valor acima tende a $p_c + (1 - p_c)\delta$. Isto ocorre pois, nessas condições, o evento $\{v \leftrightarrow \partial G\}$ possui caminhos de tamanho crescente em n que, no limite $n \rightarrow \infty$, tornam-se um aglomerado infinito na rede quadrada. Como os sítios foram inicialmente abertos com parâmetro crítico p_c e $\theta(p_c) = 0$, temos que $P_{p_c}(v \leftrightarrow \partial G(n)) \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$.

Seja $R = R(n) := [0, 2n] \times [0, n]$ e $p_n(\delta)$ a probabilidade de, na configuração final, existir um cruzamento vertical em R . Como $p_n(\delta)$ é crescente em δ , podemos definir

$$\hat{\delta}_c := \sup\{\delta : \exists \varepsilon > 0 \text{ tal que } p_n(\delta) \leq 1 - \varepsilon \text{ para todo } n\}. \quad (2.5)$$

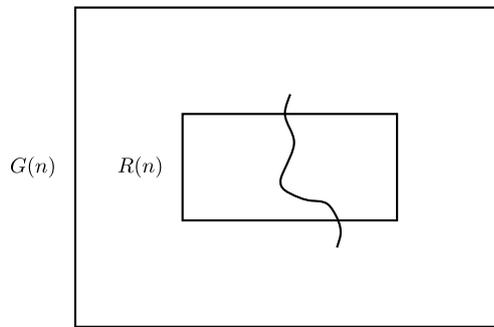


Figura 2.3: Cruzamento vertical em $R(n)$.

Sobre $\hat{\delta}_c$, ainda não existem demonstrações rigorosas que caracterizam seu comportamento. No entanto, simulações computacionais reforçam a seguinte conjectura:

Conjectura 2.3. $\hat{\delta}_c > 0$.

Este fato tem um papel crucial nas demonstrações dos resultados principais obtidos por van den Berg e Brouwer em [1], abaixo enunciados:

Teorema 2.4. Se $\hat{\delta}_c > 0$, então existe $t > t_c$ tal que, para todo m ,

$$\liminf_{\lambda \downarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_\lambda(\eta^n \text{ possui um incêndio em } B(m) \text{ antes do tempo } t) \leq \frac{1}{2}. \quad (2.6)$$

Obtemos este teorema a partir da seguinte proposição, que também constitui um importante resultado por si só:

Proposição 2.5. Se $\hat{\delta}_c > 0$, então existe $t > t_c$ tal que, para todo m ,

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_\lambda(\eta^n \text{ possui pelo menos 2 incêndios em } B(m) \text{ antes do tempo } t) = 0. \quad (2.7)$$

Observação. Assim como na definição de $\hat{\delta}_c$, quando for necessário indicar, para uma sequência (a_n) , que existe $\varepsilon > 0$, tal que $a_n < 1 - \varepsilon$ para todo n , diremos apenas que “ a_n está afastada de 1, uniformemente em n ”.

2.3 Remoção de clusters somente em t_c

A Proposição 2.5 é fundamental para a demonstração do Teorema 2.4. Para prová-la, faremos uso tanto do modelo de crescimento puro, já definido na Seção 2.1, como de um outro modelo, definido a seguir, que possui o mesmo mecanismo de crescimento, mas com remoção de árvores somente no tempo t_c . Assim como nos processos $\eta^n(\cdot)$ e $\sigma(\cdot)$, estamos levando em consideração o espaço de probabilidade $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{P}_\lambda)$.

Novamente, dizemos que um sítio $v \in \mathbb{Z}^2$ pode estar vazio (0) ou ocupado (1) em um dado instante de tempo t . Seja $I := 2\mathbb{Z}^+$ e considere os anéis $A_i := B(5 \cdot 3^i) \setminus B(3^i)$, $i \in I$. Veja que eles são disjuntos dois a dois. Agora, definimos um *cluster de contorno em A_i* (CCi) como sendo um circuito ocupado C , contido em $B(5 \cdot 3^i) \setminus B(3 \cdot 3^i)$ e envolvendo a origem, juntamente com todos os caminhos ocupados em A_i que possuem algum sítio em comum com C . Seja $\xi_v(t)$ a variável aleatória responsável por indicar o estado do vértice $v \in \mathbb{Z}^2$ no tempo t . A dinâmica do processo ocorre da seguinte maneira: em $t = 0$, todos os sítios encontram-se vazios. Quando o relógio de crescimento de um sítio apita, ele se torna imediatamente ocupado (se o mesmo já estiver ocupado, ignoramos o relógio). A remoção de sítios ocupados ocorre somente em t_c , quando, simultaneamente para todos os valores de i , todo CCi torna-se instantaneamente vazio. Depois de t_c , os sítios vazios remanescentes continuam a ser ocupados de acordo com seus respectivos relógios de crescimento.

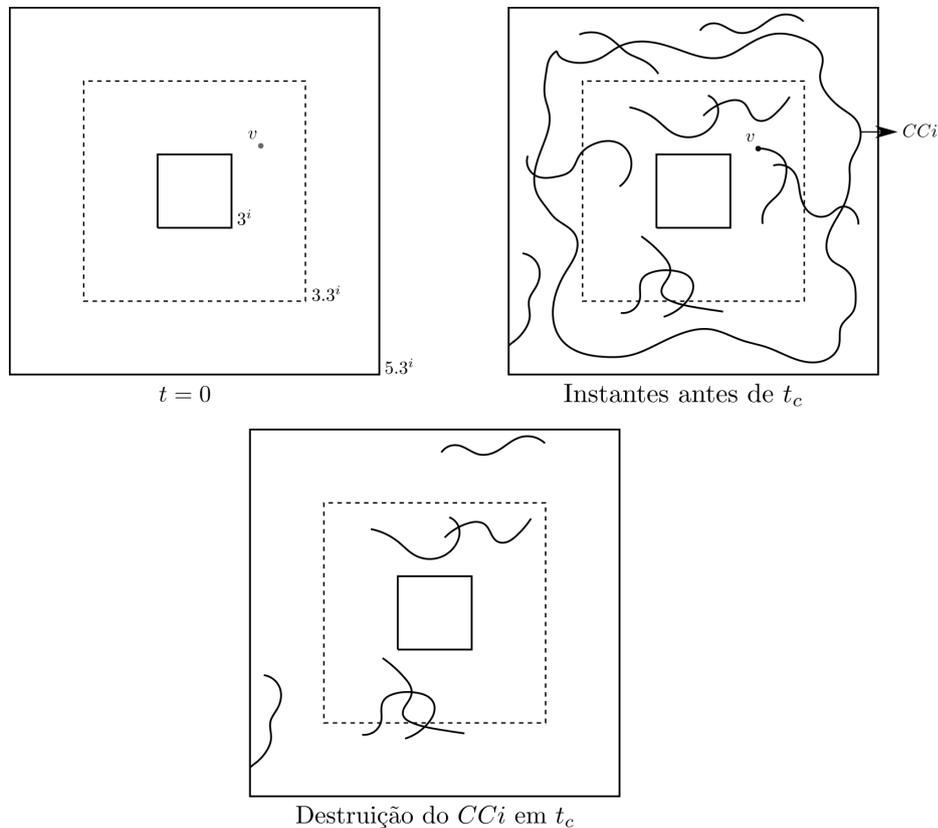


Figura 2.4: Remoção de clusters em t_c .

Este processo, assim como a quantidade $\hat{\delta}_c$, está intimamente ligado a um outro modelo de percolação, definido em [2]. Neste modelo, chamado de Percolação Auto-destrutiva, os sítios do grafo em questão são inicialmente abertos com parâmetro p . Em seguida, destruímos uma certa quantidade de vértices ocupados segundo uma regra pré-estabelecida e, por fim, para todos os sítios fechados da nova configuração, fornecemos uma chance extra δ de eles se abrirem. As definições e resultados rigorosos para este modelo serão tratados no Capítulo 4.

Sobre a dinâmica de remoção de clusters em t_c , enunciamos dois lemas importantes, que serão usados na próxima seção. O primeiro deles diz respeito à conectividade entre fronteiras de caixas para $\xi(\cdot)$ em tempos posteriores a t_c . O segundo estabelece uma comparação entre os processos $\eta^n(\cdot)$ e $\xi(\cdot)$, quando restritos a determinadas condições.

Lema 2.6. *Se $\hat{\delta}_c > 0$, existe $\gamma < 1$ e $\varepsilon > 0$, tal que para todo $i \in I$,*

$$\mathcal{P}(\partial B(3^i) \leftrightarrow \partial B(3 \cdot 3^i) \text{ na configuração } \xi(t_c + \varepsilon)) < \gamma. \quad (2.8)$$

A demonstração deste lema necessita de uma abordagem mais detalhada do modelo de Percolação Auto-Destrutiva. Sendo assim, ela será feita no Capítulo 4. Para o próximo lema, precisamos definir alguns objetos:

Seja $\tau = \tau(n, m)$ a v.a. correspondente ao primeiro instante de tempo em que η^n possui um incêndio em $B(m)$. Isto é,

$$\tau := \inf\{t : \exists v \in B(m) \text{ tal que } \eta_v^n(t^-) = 1 \text{ e } \eta_v^n(t) = 0\}.$$

Além disso, tome $0 < \lambda < 1$ e faça

$$\begin{aligned} K(\lambda) &:= \frac{1}{\sqrt[3]{\lambda}} \\ k(\lambda) &:= \frac{1}{\sqrt[4]{\lambda}} \\ A(k(\lambda), K(\lambda)) &:= B(K(\lambda)) \setminus B(k(\lambda)). \end{aligned} \quad (2.9)$$

Observação. É necessário mencionar que sempre que nos referirmos às caixas $B(K(\lambda))$ e $B(k(\lambda))$, estamos cometendo um abuso de notação. As caixas que estamos considerando são, na verdade, $B(\lfloor K(\lambda) \rfloor)$ e $B(\lfloor k(\lambda) \rfloor)$. Além disso, como veremos a seguir, o parâmetro λ aqui utilizado está diretamente relacionado com a taxa de ignição dos relógios de Poisson da medida \mathcal{P}_λ .

Considere ainda, os seguintes eventos:

$$B_1 = B_1(\lambda) := \{\text{sem ignições em } B(K(\lambda)) \text{ durante o intervalo } (0, \tau]\};$$

$$B_2 = B_2(\lambda) := \{\sigma(t_c) \text{ possui um } \star\text{-circuito vazio contornando } 0 \text{ em } A(k(\lambda), K(\lambda))\},$$

onde \star -circuito é um circuito no grafo obtido a partir da rede quadrada, adicionando-se dois elos diagonais em cada face da rede.

Lema 2.7. *Sejam $m = 3^l$, $l \in I$, e $\lambda \in (0, 1)$, tais que $k(\lambda) > m$. Em $B_1 \cap B_2$, temos, para todo $t > \tau$, $v \in B(k(\lambda)) \setminus B(m)$, e para todo $n \geq K(\lambda)$, que*

$$\eta_v^n(t) \leq \xi_v(t). \quad (2.10)$$

Demonstração. Tome n e v como no enunciado e tome $\omega \in B_1 \cap B_2$. Em princípio, escolha $t > \max\{\tau, t_c\}$. A razão para tal escolha ficará evidente no decorrer da demonstração. Para deixarmos a notação mais simples, trocaremos η^n por η , $k(\lambda)$ por k e $K(\lambda)$ por K .

Suponha que $\xi_v(t) = 0$. Vamos mostrar que isso implica em $\eta_v(t) = 0$.

Se $v \notin A_l$ e $\xi_v(t) = 0$, então o relógio de crescimento de v não tocou durante o intervalo $(0, t]$. Isso decorre do fato de os sítios exteriores aos anéis A_i , $i \in I$ não serem afetados pela remoção clusters no tempo t_c . Consequentemente, $\eta_v(t) = 0$.

Agora, se $v \in A_l$ e $\xi_v(t) = 0$, então sabemos que o relógio de crescimento de v não tocou em $(t_c, t]$. Além disso, podemos assumir que imediatamente antes de t_c , o aglomerado ocupado de v no processo ξ faz parte de um cluster de contorno em $A_l = B(5m) \setminus B(m)$ (do contrário, o relógio de crescimento de v não teria apitado em $(0, t_c]$, donde se conclui que $\eta_v(t) = 0$). Por definição de σ e ξ , este fato implica que, em t_c , o cluster ocupado de v em σ (denotado C) contorna $B(m)$. Pelo evento B_2 , temos que, no tempo t_c , C está no interior de um \star -circuito C^* vazio em $A(k, K)$.¹ Obviamente, $\eta \equiv 0$ neste \star -circuito em $(0, t_c]$, o que impede que incêndios ocorridos por ignições de sítios exteriores a C^* alcancem seu interior nesse intervalo de tempo. Veja agora que B_1 indica que o primeiro incêndio em $B(m)$ possui ignição fora da caixa $B(K)$. Dado que C^* impede incêndios em $B(m)$ com ignição fora de $B(K)$ no intervalo $(0, t_c]$, devemos necessariamente ter $\tau > t_c$. Com isso, $\eta(t_c)$ e $\sigma(t_c)$ são iguais dentro do \star -circuito e, em particular, esta conclusão vale para C . Novamente por B_1 , segue que no tempo τ um caminho conexo contendo sítios de $B(m)$ e de $B(K)^c$ torna-se instantaneamente vazio. Como este caminho contém pelo menos um sítio de C , concluímos que em algum tempo $s \in (t_c, \tau]$, ocorre um incêndio nesse cluster. Em particular, $\eta_v(s) = 0$. Como o relógio de crescimento de v não toca em $(t_c, t]$, concluímos que $\eta_v(t) = 0$. \square

¹De fato, não poderia ser o contrário, dado que C^* está contido em $A(k, K)$, e C possui um vértice v no interior de $B(k)$.

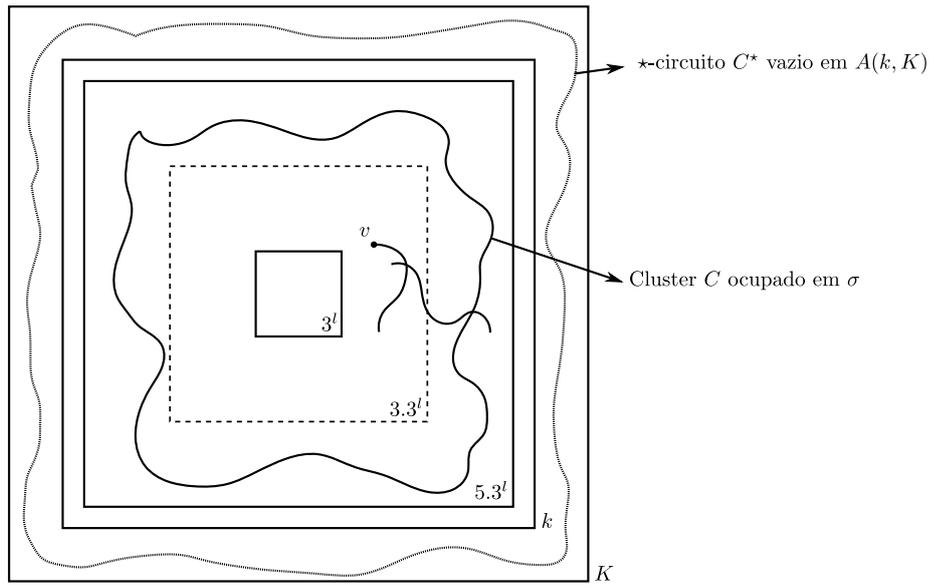


Figura 2.5: Configuração do sistema no Lema 2.7.

2.4 Provas

Munidos dos lemas e das definições apropriadas, agora estamos preparados para demonstrar os resultados principais. Começemos pela proposição.

Prova da Proposição 2.5. Fixe $m = 3^l$, $l \in I$. A razão para tal escolha deve-se ao Lema 2.7, que usaremos adiante, e ao fato de a probabilidade considerada no enunciado da proposição ser monótona em m , pois $A_2(\eta^n, t, B(m)) \subset A_2(\eta^n, t, B(m+1))$. Desse modo, se a proposição vale para m , ela também é verdadeira para todo $m' \leq m$. Consideremos, além dos objetos utilizados na seção anterior, o evento

$$\tilde{B}_1 := \{\text{sem ignições em } B(K(\lambda)) \text{ durante o intervalo } (0, t_c + \varepsilon)\}.$$

Assumindo $\hat{\delta}_c > 0$, escolha ε e γ como no Lema 2.6, e façamos $t = t_c + \varepsilon$. Observe agora que se ocorrem pelo menos dois incêndios em $B(m)$ antes de t , então vale uma das seguintes possibilidades:

- Todos os incêndios ocorrem em $(t_c, t_c + \varepsilon)$;
- Pelo menos um dos incêndios ocorre antes de t_c .

Com isso, temos

$$\mathcal{P}_\lambda[A_2(\eta^n, t, B(m))] \leq \mathcal{P}_\lambda[A(\eta^n, t_c, B(m))] + \mathcal{P}_\lambda[A_2(\eta^n, (t_c, t_c + \varepsilon), B(m))].$$

Pela relação (2.2), o primeiro termo do lado direito da desigualdade acima se anula ao considerarmos os limites $\lambda \downarrow 0$ e $n \rightarrow \infty$. Assim, é suficiente provarmos que

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_\lambda[A_2(\eta^n, (t_c, t_c + \varepsilon), B(m))] = 0.$$

Omitindo η^n e λ , começamos observando que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}[A_2((t_c, t_c + \varepsilon), B(m))] &= \mathcal{P}[A_2((t_c, t_c + \varepsilon), B(m)) \cap (\tilde{B}_1 \cap B_2)^c] \\ &\quad + \mathcal{P}[A_2((t_c, t_c + \varepsilon), B(m)) \cap \tilde{B}_1 \cap B_2] \\ &\leq \underbrace{\mathcal{P}[\tilde{B}_1^c]}_1 + \underbrace{\mathcal{P}[B_2^c]}_2 + \underbrace{\mathcal{P}[A_2((t_c, t_c + \varepsilon), B(m)) \cap \tilde{B}_1 \cap B_2]}_3. \end{aligned}$$

Estudando o comportamento de cada uma das parcelas indicadas na desigualdade acima dentro dos limites considerados no enunciado da proposição, chegaremos ao resultado desejado.

1. Para a primeira parcela, veja que o evento \tilde{B}_1 não depende de n . Além disso, por definição de $B(K(\lambda))$, temos $|B(K(\lambda))| \leq 4/\lambda^{\frac{2}{3}}$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(\tilde{B}_1^c) &= 1 - \mathcal{P}(\tilde{B}_1) = 1 - \exp\{-\lambda|B(K)|\}(t_c + \varepsilon)\} \\ &\leq 1 - \exp\{-4\lambda^{\frac{1}{3}}(t_c + \varepsilon)\} \longrightarrow 0 \text{ quando } \lambda \downarrow 0. \end{aligned}$$

2. Assim como $\mathcal{P}(\tilde{B}_1^c)$, $\mathcal{P}(B_2^c)$ também não depende de n . Como $\frac{K(\lambda)}{k(\lambda)+1} \rightarrow \infty$ quando $\lambda \downarrow 0$, temos, para λ suficientemente pequeno, que

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(B_2^c) &\leq \mathcal{P}(\partial B(k(\lambda) + 1) \leftrightarrow \partial B(K(\lambda)) \text{ em } \sigma(t_c)) \\ &\leq \mathcal{P}(\exists \text{ um aglomerado de tamanho } \geq K(\lambda) - k(\lambda) - 1 \text{ em } \sigma(t_c)). \end{aligned}$$

Como o processo de crescimento puro no instante t_c é equivalente ao modelo de percolação de sítios com parâmetro p_c , o termo após a segunda desigualdade vai a zero quando $\lambda \downarrow 0$.

Veja também que a primeira desigualdade decorre do seguinte fato:

Afirmção. *Sejam q e r inteiros positivos. Se um dado ω não possui um \star -circuito vazio em $A(r, r + q)$ contornando 0 em $\sigma(t)$, $t > 0$ então $\omega \in \{\partial B(r + 1) \leftrightarrow \partial B(r + q) \text{ em } \sigma(t)\}$.*

Prova da afirmação. Vamos fazer a prova pela contrapositiva e usando o conceito de grafo dual. Para a rede quadrada, trata-se do grafo cujo conjunto de vértices é $\{x + (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) : x \in \mathbb{Z}^2\}$, com elos ligando vértices vizinhos. Veja que em termos de elos, temos uma correspondência um a um entre os dois grafos, dado que cada elo do dual cruza exatamente um elo da rede original. Dessa forma, uma configuração de elos em \mathbb{Z}^2 induz exatamente uma configuração no dual: basta dizermos que se um elo está aberto (fechado) na rede original, seu correspondente também está aberto (fechado). Devido a isso, conseguimos um importante resultado (encontrado em [10]) que precisaremos usar na prova: todo cluster finito aberto (de elos) possui um circuito fechado no dual que o contorna. Mais ainda, dado um elo $x'y'$ desse circuito, existe um sítio v do cluster aberto tal que $\text{dist}(x', v) = \text{dist}(y', v) = \frac{\sqrt{2}}{2}$, sendo $\text{dist}(\cdot, \cdot)$ a distância euclidiana.

Dito isso, a demonstração segue de maneira relativamente simples. Suponha que $\partial B(r + 1) \leftrightarrow \partial B(r + q)$. Para estabelecer uma relação entre elos abertos e sítios abertos, diremos aqui que um elo encontra-se aberto se e somente se ambos os vértices que o constituem estão abertos. Nesse sentido, se não existe um caminho com sítios abertos ligando $\partial B(r+1)$ a $\partial B(r+q)$, com maior razão não existe um caminho de elos abertos com o mesmo comportamento. Pelo que vimos mais acima, temos um circuito

fechado no dual dentro de $\partial B(r+q)$ contornando o cluster aberto que sai de $\partial B(r+1)$. Observe agora que cada elo do circuito dual possui seu elo correspondente da rede original com um vértice aberto e outro fechado. Tomando-se todos os sítios fechados correspondentes a cada elo fechado do dual, obtemos o \star -circuito desejado. \square

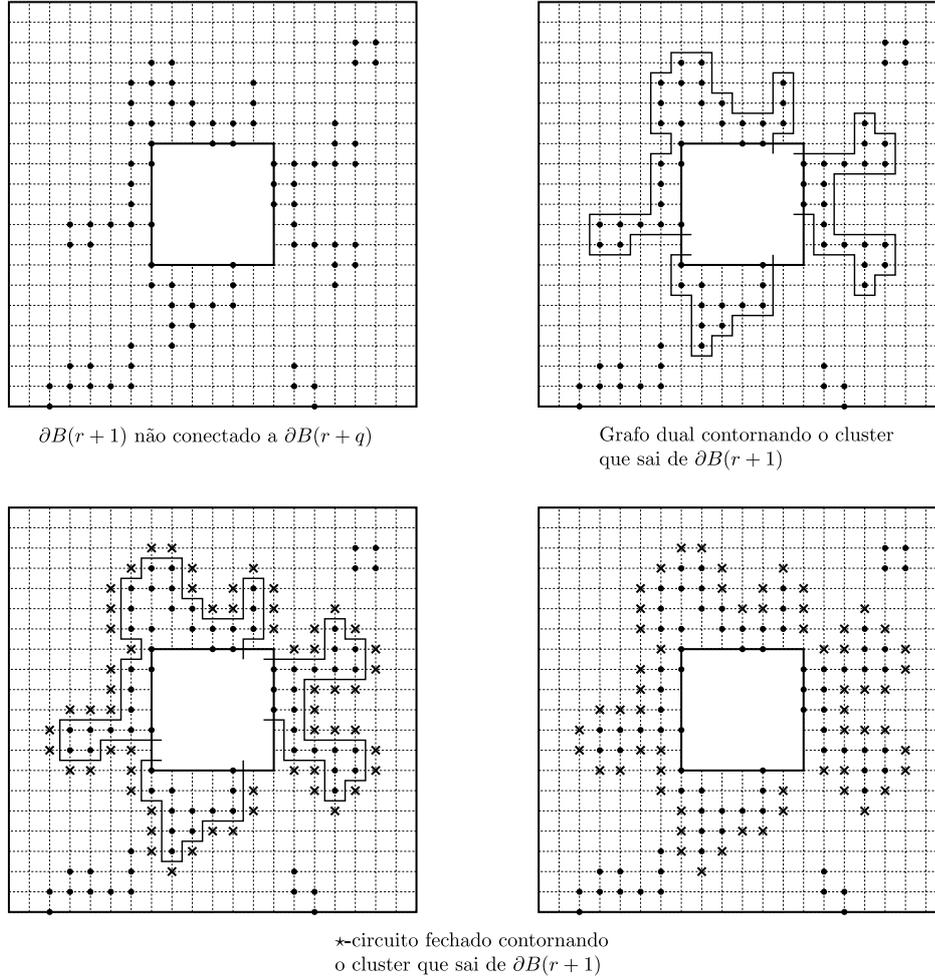


Figura 2.6: Ideia da prova da afirmação.

3. Suponha λ suficientemente pequeno, tal que $k(\lambda) > m$. Assim, valem as relações

$$\begin{aligned}
 & A_2((t_c, t_c + \varepsilon), B(m)) \cap \tilde{B}_1 \cap B_2 = \\
 & \{ \tau \in (t_c, t_c + \varepsilon) \text{ e pelo menos 1 incêndio em } B(m) \text{ em } (\tau, t_c + \varepsilon) \} \cap \tilde{B}_1 \cap B_2 \\
 & \subset \{ \partial B(m) \leftrightarrow \partial B(k(\lambda)) \text{ em } \eta^n(s) \text{ para algum } s \in (\tau, t_c + \varepsilon) \} \cap \tilde{B}_1 \cap B_2 \\
 & \subset \{ \partial B(m) \leftrightarrow \partial B(k(\lambda)) \text{ em } \eta^n(s) \text{ para algum } s \in (\tau, t_c + \varepsilon) \} \cap B_1 \cap B_2 \\
 & \subset \{ \partial B(m) \leftrightarrow \partial B(k(\lambda)) \text{ em } \xi(t_c + \varepsilon) \} =: H.
 \end{aligned}$$

A primeira relação de continência ocorre porque \tilde{B}_1 faz com que todos os incêndios que ocorrem em $B(m)$ antes de $t_c + \varepsilon$ tenham ignição fora de $B(K(\lambda))$. Consequen-

temente, devemos ter $B(m) \leftrightarrow \partial B(k(\lambda))$ para que ocorra um incêndio em $B(m)$ no intervalo $(\tau, t_c + \varepsilon)$. A segunda deve-se ao fato de $\tilde{B}_1 \subset B_1$, e a terceira relação é uma aplicação do Lema 2.7.

Para lidarmos com o evento H , observe que para cada $i \in I$, as v.a.'s $\xi_v(t), t \geq 0, v \in A_i$, são completamente determinadas pelos relógios de crescimento dentro de A_i . Seja $I(\lambda)$ o conjunto dos inteiros positivos j , com $m \leq 3^j < 5 \cdot 3^j \leq k(\lambda)$. Como os anéis A_i são disjuntos, o Lema 2.6 garante que

$$\mathcal{P}[\partial B(m) \leftrightarrow \partial B(k(\lambda)) \text{ em } \xi(t_c + \varepsilon)] \leq \gamma^{|I(\lambda)|}.$$

Observando que $k(\lambda), I(\lambda) \rightarrow \infty$ quando $\lambda \downarrow 0$, segue que

$$\lim_{\lambda \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_\lambda[A_2(\eta^n, (t_c, t_c + \varepsilon), B(m)) \cap \tilde{B}_1 \cap B_2] = 0.$$

□

Demonstrada a proposição, segue a prova do teorema.

Prova do Teorema 2.4. Suponha $\hat{\delta}_c > 0$ e que para todo $t > t_c$ existe $m = m(t)$ tal que

$$\liminf_{\lambda \downarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_\lambda[A(\eta^n, t, B(m))] > \frac{1}{2}. \quad (2.11)$$

Em particular, faça t como na Proposição 2.5 e escolha $u \in (t_c, t)$. Por (2.11), existe $m_0 = m_0(u)$ e $\alpha(u) > 0$ tais que

$$\liminf_{\lambda \downarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_\lambda[A(\eta^n, u, B(m_0))] > \frac{1}{2} + \alpha(u).$$

Como vimos anteriormente, para todo $t' > 0$, vale que

$$\limsup_{\lambda \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_\lambda[A(\eta^n, t', 0)] \leq \theta(1 - e^{-t'}).$$

Além disso,

$$\mathcal{P}_\lambda[A(\eta^n, t', B(m))] \leq \sum_{v \in B(m)} \mathcal{P}_\lambda[A(\eta^n, t', v)] = |B(m)| \mathcal{P}_\lambda[A(\eta^n, t', 0)].$$

Por essas duas desigualdades e pela continuidade de θ , podemos escolher $s > t_c$, tal que

$$\liminf_{\lambda \downarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_\lambda[A(\eta^n, s, B(m_0))] \leq \frac{\alpha(u)}{2}. \quad (2.12)$$

Novamente por (2.11), existe $m_1 = m_1(s)$, tal que

$$\liminf_{\lambda \downarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_\lambda[A(\eta^n, s, B(m_1))] > \frac{1}{2}. \quad (2.13)$$

Como as probabilidades são monótonas em m para um dado processo η^n , devemos ter $m_1 > m_0$. Veja também que

$$\begin{aligned} & \{\text{incêndio em } B(m_0) \text{ antes de } u\} \\ &= \{\text{incêndio em } B(m_0) \text{ antes de } s\} \cup \left\{ \begin{array}{l} \text{sem incêndios em } B(m_0) \text{ antes de } s, \\ \text{e incêndio em } B(m_0) \text{ em } (s, u) \end{array} \right\} \\ &= \{\text{incêndio em } B(m_0) \text{ antes de } s\} \cup \left\{ \begin{array}{l} \text{sem incêndios em } B(m_1) \text{ antes de } s, \\ \text{e incêndio em } B(m_0) \text{ em } (s, u) \end{array} \right\} \\ & \quad \cup \left\{ \begin{array}{l} \text{incêndio em } B(m_1) \text{ antes de } s, \\ \text{sem incêndios em } B(m_0) \text{ antes de } s, \\ \text{e incêndio em } B(m_0) \text{ em } (s, u) \end{array} \right\}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\mathcal{P}_\lambda[A(\eta^n, u, B(m_0))] \leq \mathcal{P}_\lambda[A(\eta^n, s, B(m_0))] + \mathcal{P}_\lambda[A^c(\eta^n, s, B(m_1))] + \mathcal{P}_\lambda[A_2(\eta^n, u, B(m_1))].$$

Para cada termo do lado direito da desigualdade acima, tome $\liminf_{\lambda \downarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty}$. Pela Proposição 2.5, o último termo vai a zero. Por (2.12), o primeiro termo é $\leq \frac{\alpha(u)}{2}$, e por (2.13), o segundo termo é $\leq \frac{1}{2}$. Assim,

$$\liminf_{\lambda \downarrow 0} \liminf_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_\lambda[A(\eta^n, u, B(m_0))] \leq \frac{1}{2} + \frac{\alpha(u)}{2},$$

uma contradição. □

3 Extensões

Em geral, os modelos de incêndios florestais são construídos com base em três características: o espaço onde o processo reside, o mecanismo de crescimento e o mecanismo de ignição. Neste capítulo, veremos como modificações nesses parâmetros interferem no comportamento do sistema, de modo que seja possível estabelecermos uma comparação com o modelo que acabamos de estudar.

3.1 Ignição de clusters suficientemente grandes

O primeiro modelo modificado sobre o qual falaremos ocorre na rede quadrada. O mecanismo de crescimento também continua sendo como antes, mas a ignição ocorre de maneira diferente: ao invés de ser baseada nos relógios de Poisson com taxa λ , ela depende de um inteiro positivo L . Neste caso, sempre que um cluster de tamanho maior ou igual a L se formar, todos os seus sítios tornam-se vazios instantaneamente. Tal mecanismo possui a vantagem de fazer com que o modelo seja bem definido em toda a rede quadrada, uma vez que as interações no sistema possuem alcance finito. Isto é, dado um evento elementar e fixado um sítio $v \in \mathbb{Z}^2$, conseguimos determinar seu estado ao longo do tempo unicamente com base nos sítios de uma caixa de tamanho $2L + 1$ centrada em v . Assim, elimina-se a necessidade de restrição do modelo às caixas $B(n)$, para depois tomarmos o limite $n \rightarrow \infty$. Inicialmente, todos os sítios encontram-se vazios.

Considerando ideia semelhante ao raciocínio que motivou a elaboração dos problemas abertos do capítulo anterior, podemos criar problemas análogos aqui. Dessa forma, é razoável tentarmos responder à seguinte pergunta:

Problema Aberto 3.1. *É verdade, para todo $t > t_c$, que*

$$\limsup_{L \rightarrow \infty} \mathcal{P}(\eta^{[L]} \text{ possui um incêndio em } O \text{ antes do tempo } t) > 0? \quad (3.1)$$

Veja também que o Problema Aberto 2.2 também possui formulação análoga neste novo modelo de incêndios florestais.

No que diz respeito aos resultados obtidos na tentativa de se aproximar dos problemas colocados, temos:

Teorema 3.2. *Se $\hat{\delta}_c > 0$, então existe $t > t_c$ tal que, para todo m ,*

$$\liminf_{L \rightarrow \infty} \mathcal{P}(\eta^{[L]} \text{ possui um incêndio em } B(m) \text{ antes do tempo } t) \leq \frac{1}{2}. \quad (3.2)$$

Proposição 3.3. *Se $\hat{\delta}_c > 0$, então existe $t > t_c$ tal que, para todo m ,*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}(\eta^{[L]} \text{ possui pelo menos 2 incêndios em } B(m) \text{ antes do tempo } t) = 0. \quad (3.3)$$

A constante $\hat{\delta}_c$ é a mesma quantidade definida no capítulo anterior. O Teorema 3.2 decorre da Proposição 3.3 da mesma forma que o Teorema 2.4 decorre da Proposição 2.5. Por sua vez, a Proposição 3.3 faz uso do Lema 2.6 e de um análogo ao Lema 2.7, que enunciaremos agora.

No lugar de $K(\lambda)$ e $k(\lambda)$, definidos em (2.9), façamos

$$\begin{aligned} K_L &:= L^{1/3}, \\ k_L &:= L^{1/4}. \end{aligned}$$

E ao invés dos eventos $B_1(\lambda)$ e $B_2(\lambda)$ vistos anteriormente, usaremos somente

$$B_3 := \{\sigma(t_c) \text{ possui um } \star\text{-circuito vazio contornando } 0 \text{ em } A(k_L, K_L)\}.$$

Seja $m = 3^l$, $l \in 2\mathbb{N}$, e $\tau = \tau(L, m)$ o primeiro instante em que $\eta^{[L]}$ possui incêndio em $B(m)$. Assim, temos:

Lema 3.4. *Em B_3 , temos, para todo $t > \tau$, $v \in B(k_L) \setminus B(m)$, que*

$$\eta_v^{[L]}(t) \leq \xi_v(t). \quad (3.4)$$

Demonstração. Escolha v e t como no enunciado do lema e tome $\omega \in B_3$. Observe que devemos ter necessariamente $\tau > t_c$, dado que o cluster aberto de v no intervalo $(0, t_c]$ possui tamanho máximo $L^{2/3} < L$.

Suponha que $\xi_v(t) = 0$. Como antes, vamos mostrar que isso implica em $\eta_v^{[L]}(t) = 0$.

Se $v \in A_l$ e $\xi_v(t) = 0$, então o relógio de crescimento de v não tocou em $(t_c, t]$. Além disso, podemos assumir que imediatamente antes de t_c , o aglomerado ocupado de v no processo ξ faz parte de um cluster de contorno em $A_l = B(5m) \setminus B(m)$ (do contrário, o relógio de crescimento de v não teria apitado em $(0, t_c]$, donde se conclui que $\eta_v(t) = 0$). Por definição de σ e ξ , este fato implica que, em t_c , o cluster ocupado de v em σ (denotado C) contorna $B(m)$, e que este se encontra no interior de um \star -circuito C^* vazio em $A(k_L, K_L)$. Obviamente, $\eta^{[L]} \equiv 0$ neste \star -circuito em $(0, t_c]$, o que impede qualquer incêndio dentro de C^* nesse intervalo de tempo (dado que nenhum cluster interior possui

tamanho suficiente para entrar em ignição). Com isso, $\eta^{[L]}(t_c)$ e $\sigma(t_c)$ são iguais dentro do \star -circuito e, em particular, esta conclusão vale para C . Assim, concluímos que no tempo τ um caminho conexo contendo sítios de $B(m)$ e de $B(K_L)^c$ torna-se instantaneamente vazio. Como este caminho contém pelo menos um sítio de C , concluímos que em algum tempo $s \in (t_c, \tau]$, ocorre um incêndio nesse cluster. Em particular, $\eta_v^{[L]}(s) = 0$. Como o relógio de crescimento de v não toca em $(t_c, t]$, concluímos que $\eta_v^{[L]}(t) = 0$. \square

Um ponto importante para observarmos é que, neste caso, a mudança do mecanismo de ignição alterou muito pouco os argumentos contidos na demonstração do lema. Podemos perceber facilmente que as linhas gerais da prova permaneceram intactas. A partir daqui, a demonstração da Proposição 3.3 e do Teorema 3.2 continua como já fizemos antes.

3.2 A árvore binária

Nesta seção, vamos considerar as mesmas dinâmicas de crescimento e ignição que usamos para o nosso processo do Capítulo 2, mas agora utilizando a árvore binária orientada, denotada por \mathcal{T} , ao invés da rede quadrada. Tomando o mesmo cuidado de antes, usaremos um análogo para as caixas $B(n)$, que consiste nos subgrafos de \mathcal{T} contendo O e suas n primeiras gerações. Tais subgrafos são indicados por $\mathcal{T}(n)$.

O modelo funciona da seguinte forma: inicialmente, todos os sítios encontram-se vazios. Novamente, sítios vazios tornam-se ocupados com taxa 1, e os sítios ocupados entram em ignição com taxa λ . Quando um sítio v entra em ignição, todos os sítios do caminho ocupado partindo de v na direção da raiz tornam-se vazios instantaneamente. Veja que dessa forma, a ideia de “incêndio florestal” fica pouco intuitiva. Uma interpretação mais conveniente seria a de um sistema nervoso: modificando-se as expressões empregadas, poderíamos dizer que quando um sítio ativo v recebe um sinal, seja de seu filho ou de fora do sistema, ele imediatamente transmite este sinal para seu pai (exceto quando $v = O$, caso em que é o receptor final) e, a partir deste momento, é necessário um tempo de recuperação com distribuição exponencial para tornar-se ativo novamente.

Seja $\zeta_v(t) \in \{0, 1\}$ a variável aleatória correspondente ao estado do vértice v no instante t . O valor 1 representa um vértice ocupado e o valor 0 designa um sítio vazio. Se precisarmos deixar clara a dependência em n do processo, escreveremos $\zeta_v^n(t)$.

É importante ressaltarmos que, assim como no Capítulo 2, devido aos relógios de Poisson independentes controlarem a dinâmica do modelo, temos um acoplamento natural entre os processos $\eta^n(\cdot)$.

Indo na direção de expor o teorema desta seção, devemos lembrar que, para percolação de sítios na árvore binária, temos $p_c = 1/2$ e $\theta(p) = (2p-1)/p$, para $p \geq 1/2$. Se juntarmos esses dados com o mesmo raciocínio que tivemos para obter a relação (2.1), concluímos

que, para $t > \log 2$,

$$\limsup_{\lambda \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_\lambda(O \text{ possui incêndio antes do tempo } t) \leq \frac{1 - 2e^{-t}}{1 - e^{-t}}.$$

Tendo em vista os problemas abertos que colocamos até agora e suas formulações análogas, podemos considerar que um maior progresso foi feito para respondê-los quando consideramos incêndios na árvore binária. Afirmamos isso devido ao fato de conseguirmos estabelecer uma cota inferior para a probabilidade de ocorrer um incêndio em O antes do tempo t .

Teorema 3.5. *Para todo $t > \log 2$,*

$$\liminf_{\lambda \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} \mathcal{P}_\lambda(\zeta^n \text{ possui um incêndio em } O \text{ antes do tempo } t) \geq \frac{1}{2} \frac{1 - 2e^{-t}}{1 - e^{-t}}. \quad (3.5)$$

Demonstração. Definamos as funções

$$f_n^\lambda(t) := \mathcal{P}_\lambda(\zeta^n \text{ possui um incêndio em } O \text{ antes do tempo } t), \quad t > 0;$$

$$g_n^\lambda(s, t) := f_n^\lambda(t) - f_n^\lambda(s), \quad 0 < s < t.$$

Nesse sentido, $g_n^\lambda(s, t)$ é a probabilidade de o primeiro incêndio em O ocorrer dentro do intervalo (s, t) .

Fixe $t > \log 2$ e suponha que exista algum $\tilde{t} \in (\log 2, t)$, tal que

$$\liminf_{\lambda \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n^\lambda(t) < \frac{1}{2} \frac{1 - 2e^{-\tilde{t}}}{1 - e^{-\tilde{t}}}. \quad (3.6)$$

Vamos mostrar que isso nos leva a uma contradição.

Por (3.6), existem $\alpha > 0$ e uma sequência $(\lambda_i, i = 1, 2, \dots)$ que é decrescente, converge para 0, e que para todo i vale

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} f_n^{\lambda_i}(t) < \frac{1}{2} \frac{1 - 2e^{-\tilde{t}}}{1 - e^{-\tilde{t}}} - \alpha. \quad (3.7)$$

Fixe j grande o suficiente, de forma que

$$e^{-\lambda_j \tilde{t}} (1 + 2\alpha(1 - e^{-\tilde{t}})) > 1. \quad (3.8)$$

A razão para tal escolha de j ficará clara logo mais.

Observe agora que, se v e w são filhos de O , então os processos $\zeta_v^{n+1}(\cdot)$ e $\zeta_w^{n+1}(\cdot)$ são independentes, visto que não compartilham nenhum relógio de Poisson entre si. Mais ainda, ambos os processos possuem a mesma distribuição de $\zeta_O^n(\cdot)$, e também não dependem dos

relógios de Poisson em O . Além disso, para garantirmos que o primeiro incêndio na raiz ocorra entre os tempos \tilde{t} e t , é suficiente que ocorram todos seguintes eventos:

- O relógio de crescimento de O tenha apitado antes de \tilde{t} ;
- O relógio de ignição de O não tenha apitado antes de \tilde{t} ;
- Ou v e w sofrem primeiro incêndio no intervalo (\tilde{t}, t) , ou v sofre primeiro incêndio no intervalo (\tilde{t}, t) e w não sofre incêndio antes do tempo t , ou w sofre primeiro incêndio no intervalo (\tilde{t}, t) e v não sofre incêndio antes do tempo t .

Portanto, ao considerarmos a árvore $\mathcal{T}(n+1)$, vale que

$$g_{n+1}^\lambda(\tilde{t}, t) \geq (1 - e^{-\tilde{t}})e^{-\lambda\tilde{t}} \left[g_n^\lambda(\tilde{t}, t)^2 + 2g_n^\lambda(\tilde{t}, t)(1 - f_n^\lambda(t)) \right], \quad (3.9)$$

onde os termos $(1 - e^{-\tilde{t}})$, $e^{-\lambda\tilde{t}}$ e a expressão entre colchetes referem-se, nesta mesma ordem, às probabilidades de cada um dos eventos mencionados imediatamente acima.

Agora, escolhemos a taxa λ acima para ser λ_j , definida em (3.8). Veja agora que, devido a (3.7), temos, para n grande o suficiente, que

$$\begin{aligned} f_n^{\lambda_j}(t) \leq \frac{1}{2} \times \frac{1 - 2e^{-\tilde{t}}}{1 - e^{-\tilde{t}}} - \alpha &\implies f_n^{\lambda_j}(t) + \alpha \leq \frac{1}{2} \times \frac{2 - 2e^{-\tilde{t}} - 1}{1 - e^{-\tilde{t}}} \implies \\ f_n^{\lambda_j}(t) + \alpha \leq 1 - \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - e^{-\tilde{t}}} &\implies \frac{1}{2} \times \frac{1}{1 - e^{-\tilde{t}}} + \alpha \leq 1 - f_n^{\lambda_j}(t) \implies \\ (1 + 2\alpha(1 - e^{-\tilde{t}})) &\leq 2(1 - f_n^{\lambda_j}(t))(1 - e^{-\tilde{t}}). \end{aligned} \quad (3.10)$$

Substituindo esta última desigualdade em (3.9) e usando g_k para denotarmos $g_k^{\lambda_j}(\tilde{t}, t)$, $k \in \mathbb{N}$, obtemos,

$$g_{n+1} \geq g_n \times \left[e^{-\lambda_j \tilde{t}} (1 + 2\alpha(1 - e^{-\tilde{t}})) \right]. \quad (3.11)$$

Como o termo entre colchetes acima não depende de n e, por 3.8, é estritamente maior que 1, concluímos que $g_n \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$, um absurdo. Portanto, segue que para todo $\tilde{t} \in (\log 2, t)$,

$$\liminf_{\lambda \downarrow 0} \limsup_{n \rightarrow \infty} f_n^\lambda(t) \geq \frac{1}{2} \frac{1 - 2e^{-\tilde{t}}}{1 - e^{-\tilde{t}}}. \quad (3.12)$$

Fazendo $\tilde{t} \uparrow t$ na desigualdade acima, demonstramos o teorema. \square

4 Sobre Percolação Auto-destrutiva

Mostramos até aqui o comportamento de diferentes tipos de incêndios florestais. Podemos estabelecer comparações entre diferentes mecanismos de ignição ou entre diferentes ambientes nos quais ocorrem os incêndios. No entanto, quando estávamos no Capítulo 2, tivemos a liberdade de definir algumas grandezas e processos sem a devida formalidade, com o objetivo de nos concentrarmos unicamente nos processos $\eta^n(\cdot)$. Como consequência, não foi possível darmos, naquele momento, uma demonstração do Lema 2.6. Por este motivo, vamos dedicar este capítulo para fazê-la. E, para tanto, será necessário introduzirmos formalmente o modelo de percolação auto-destrutiva, definido em [2] e [4]. Não vamos nos ater aos questionamentos principais que este modelo traz consigo. Simplesmente, vamos obter material necessário para tornar nosso estudo de incêndios florestais consistente.

4.1 Definição e propriedades importantes

Logo depois que fizemos a primeira referência ao Lema 2.6, demos uma ideia simples sobre o que vem a ser percolação auto-destrutiva. A definição rigorosa encontra-se a seguir.

Considere G um grafo finito ou infinito enumerável com conjunto de vértices V_G , e seja Γ um subconjunto de V_G ou o símbolo ∞ . Fixe $p, \delta \in [0, 1]$ e declare cada sítio do grafo “ocupado” com probabilidade p . Para isso, utilizamos as variáveis aleatórias independentes $\{X_i: i \in V_G\}$, com X_i assumindo o valor 1 com probabilidade p e 0 com probabilidade $1 - p$. Em seguida, devemos tornar “vazios” todos os sítios conectados a Γ por um caminho X -ocupado, isto é, os sítios $j \in V_G$ tais que existe um caminho ocupado em X ligando j a Γ . Se $\Gamma = \infty$, destruímos todos os clusters infinitos. Tal passo é descrito pelas variáveis X_i^* , definidas como

$$X_i^* = \begin{cases} 1, & \text{se } X_i = 1 \text{ e não existe nenhum caminho } X\text{-ocupado de } i \text{ para } \Gamma, \\ 0, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

Para representar a chance extra de ocuparmos os vértices vazios, consideramos as variáveis aleatórias $\{Y_i: i \in V_G\}$, independentes entre si e de cada X_i , fazendo Y_i assumir o valor 1 com probabilidade δ , e 0 com probabilidade $1 - \delta$. Por fim, descrevemos a

configuração final através das variáveis $\{Z_i := X_i^* \vee Y_i : i \in V_G\}$. Denotaremos por $\mathcal{P}_{p,\delta}^{[G;\Gamma]}$ a medida de probabilidade deste modelo.

Dentre as propriedades de $\mathcal{P}_{p,\delta}^{[G;\Gamma]}$, é necessário destacarmos uma específica, que ocorre no caso de termos G finito. Tal propriedade é chamada de associação da medida $\mathcal{P}_{p,\delta}^{[G;\Gamma]}$. Para explicarmos o que isto significa, precisamos fazer uma pequena digressão.

Considere variáveis aleatórias T_1, \dots, T_n , que assumem valores no conjunto $\{0, 1\}$, definidas em um espaço de probabilidade arbitrário com medida μ . Seja $T = (T_1, \dots, T_n)$. Diremos que a coleção $\{T_1, \dots, T_n\}$ é *associada* (ou que μ é associada em $\{0, 1\}^n$) se para todas as funções crescentes f, g , para as quais $E_\mu f(T)$, $E_\mu g(T)$ e $E_\mu f(T)g(T)$ existem, vale que

$$E_\mu f(T)g(T) \geq E_\mu f(T)E_\mu g(T).$$

No caso de termos a desigualdade estrita, temos uma situação de correlação positiva entre as v.a's, o que sugere um certo grau de dependência entre as mesmas.

Uma maneira equivalente de se formular a mesma propriedade é dizermos que para todos os eventos crescentes $A, B \subset \{0, 1\}^n$,

$$\mu(A \cap B) \geq \mu(A)\mu(B),$$

onde, com certo abuso de notação, usamos μ para indicar a medida induzida $\mu \circ T$.

De fato, sejam $f, g: \{0, 1\}^n \rightarrow \mathbb{R}$ funções crescentes para as quais $E_\mu f(T)$, $E_\mu g(T)$ e $E_\mu f(T)g(T)$ existem. Como as variáveis T_1, \dots, T_n são binárias, $f \circ T$ é simples e

$$E_\mu f(T) = \int_{\Omega'} f \circ T(\omega') d\mu(\omega') = \int_{\{0,1\}^n} f(x) d\mu \circ T(x) = \sum_{x \in \{0,1\}^n} \mu(x) f(x).$$

Caso análogo se aplica à função g .

Sejam $\{f_1, \dots, f_r\}$ e $\{g_1, \dots, g_s\}$, respectivamente, os valores assumidos pelas funções f e g . Sem perda de generalidade, façamos $f_1 < f_2 < \dots < f_r$ e $g_1 < g_2 < \dots < g_s$. Além disso, considere os eventos crescentes $F_i := \{x: f(x) \geq f_i\}$ e $G_i := \{x: g(x) \geq g_i\}$. Dessa maneira, podemos escrever

$$f(x) = \sum_{i=1}^r (f_i - f_{i-1}) \chi_{F_i}(x) \quad \text{e} \quad g(x) = \sum_{i=1}^s (g_i - g_{i-1}) \chi_{G_i}(x),$$

onde χ_* é a função indicadora do conjunto $*$ e $f_0 = g_0 = 0$. Com isso, segue que

$$\begin{aligned}
 E_\mu f(T)g(T) &= \int_{\{0,1\}^n} f(x)g(x)d\mu \circ T(x) \\
 &= \int_{\{0,1\}^n} \sum_{i=1}^r (f_i - f_{i-1})\chi_{F_i}(x) \sum_{j=1}^s (g_j - g_{j-1})\chi_{G_j}(x)d\mu \circ T(x) \\
 &= \int_{\{0,1\}^n} \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s (f_i - f_{i-1})(g_j - g_{j-1})\chi_{F_i \cap G_j}(x)d\mu \circ T(x) \\
 &= \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s (f_i - f_{i-1})(g_j - g_{j-1})\mu(F_i \cap G_j) \\
 &\geq \sum_{i=1}^r \sum_{j=1}^s (f_i - f_{i-1})(g_j - g_{j-1})\mu(F_i)\mu(G_j) \\
 &= \sum_{i=1}^r (f_i - f_{i-1})\mu(F_i) \sum_{j=1}^s (g_j - g_{j-1})\mu(G_j) \\
 &= E_\mu f(T)E_\mu g(T),
 \end{aligned}$$

onde a desigualdade vale pelo fato de os F_i 's e G_j 's serem crescentes. \square

A seguir, listamos algumas propriedades importantes de variáveis aleatórias associadas, que serão usadas no próximo lema para provar a associação de $\mathcal{P}_{p,\delta}^{[G;\Gamma]}$. Demonstrações dessas propriedades podem ser encontradas em [8].

- i) Uma coleção de variáveis aleatórias independentes é associada.
- ii) Se as coleções $\{T_1, \dots, T_n\}$ e $\{S_1, \dots, S_m\}$ são associadas e independentes entre si, então a coleção $\{T_1, \dots, T_n, S_1, \dots, S_m\}$ é associada.
- iii) Funções crescentes de variáveis aleatórias associadas são funções associadas.

Lema 4.1. *Seja G um grafo finito e Γ um subconjunto de V_G . Nessas condições, a medida $\mathcal{P}_{p,\delta}^{[G;\Gamma]}$ é associada.*

Demonstração. Tomemos as variáveis X_i, X_i^*, Y_i e Z_i , definidas no modelo de percolação auto-destrutiva. A ideia aqui consiste em mostrar que a coleção $\{Z_i : i \in V_G\}$ é associada. Para tanto, é suficiente provarmos que a coleção $\{X_i^* : i \in V_G\}$ é associada, pois como pelo item i) acima a coleção $\{Y_i\}$ é associada, segue por ii) que $\{X_i^*\} \cup \{Y_i\}$ também é uma coleção associada. Como cada Z_i é função crescente de (X_i^*, Y_i) , concluímos por iii) que a coleção $\{Z_i\}$ é associada.

Precisaremos de mais um pouco de notação. Seja $\Omega = \{0, 1\}^{V_G}$. Para cada $\omega \in \Omega$, fazamos $C(\Gamma) = C(\Gamma, \omega)$ para indicar o cluster ocupado de Γ na configuração X . Dado $W \subset V_G$, denotaremos por \overline{W} a união do conjunto W com todos os seus vizinhos. Com isso, é possível perceber que a família

$$\left\{ \left\{ \overline{C(\Gamma)} = W \right\} : W \subset V_G \right\}$$

constitui uma partição de Ω .

Se $W \subset V_G$ e $A \subset \Omega$ é crescente, o evento $\{A \text{ ocorre fora de } W\}$, também denotado A_{fW} , indicará o conjunto de todos os $\omega \in \Omega$, tais que a configuração $\hat{\omega}$ definida por

$$\hat{\omega}_i = \begin{cases} 0, & \text{se } i \in W \\ \omega_i, & \text{caso contrário.} \end{cases}$$

está em A . Em outras palavras, seja $t^W : \Omega \rightarrow \Omega$ dada por $t^W(\omega) := \hat{\omega}$, isto é, a função que toma uma configuração ω e torna vazios todos os sítios pertencentes ao conjunto W . Dessa forma, $\omega \in A_{fW}$ se e somente se $t^W(\omega) \in A$. Nesse sentido, podemos concluir que o evento A_{fW} independe dos estados dos sítios de W . Note que como A é crescente, temos A_{fW} também crescente. De fato, seja $\omega \in A_{fW}$ e tome $\omega \leq \omega'$. Por definição, $t^W(\omega) \in A$. Como t^W é função crescente, vale que $t^W(\omega) \leq t^W(\omega')$, donde segue que $t^W(\omega') \in A$, uma vez que A é um evento crescente. Veja também que, de acordo com a notação estabelecida, temos $X^*(\omega) = t^{\overline{C(\Gamma, \omega)}}(\omega)$.

Seja \mathcal{P}_p a distribuição da coleção $\{X_i : i \in V_G\}$, isto é, a medida produto com parâmetro p em Ω . Veja que, pela propriedade i), \mathcal{P}_p é associada. Analogamente, seja \mathcal{P}_p^* a medida em Ω correspondente à coleção $\{X_i^* : i \in V_G\}$.

Sendo assim, tomando-se eventos crescentes $A, B \subset \Omega$, temos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_p^*(A \cap B) &= \mathcal{P}_p(X^* \in A \cap B) \\ &= \sum_W \mathcal{P}_p(\overline{C(\Gamma)} = W, X^* \in A \cap B) \\ &= \sum_W \mathcal{P}_p(\overline{C(\Gamma)} = W, t^W \in A \cap B) \\ &= \sum_W \mathcal{P}_p(\overline{C(\Gamma)} = W, A \cap B \text{ ocorre fora de } W) \\ &= \sum_W \mathcal{P}_p(\overline{C(\Gamma)} = W) \mathcal{P}_p(A \cap B \text{ ocorre fora de } W) \\ &\geq \sum_W \mathcal{P}_p(\overline{C(\Gamma)} = W) \mathcal{P}_p(A \text{ ocorre fora de } W) \mathcal{P}_p(B \text{ ocorre fora de } W), \end{aligned}$$

com o somatório acima se estendendo sobre todos os subconjuntos $W \subset V_G$. A última

igualdade decorre do fato de o evento $\{\overline{C(\Gamma)} = W\}$ depender somente dos sítios de W e $\{A \cap B \text{ ocorre fora de } W\}$ depender somente dos sítios exteriores a W , e a desigualdade final é a aplicação da propriedade de associação da medida \mathcal{P}_p aos eventos crescentes $\{A \text{ ocorre fora de } W\}$ e $\{B \text{ ocorre fora de } W\}$, para um certo W fixo.

Dado $W \subset V_G$, usemos $f(W)$ para indicar $\mathcal{P}_p(A \text{ ocorre fora de } W)$ e $g(W)$ para $\mathcal{P}_p(B \text{ ocorre fora de } W)$. Observe que se $W \subset W'$, então $f(W) \geq f(W')$, pois temos menos sítios disponíveis para fazer A ocorrer fora do aglomerado de Γ quando escolhemos W' ao invés de W . Formalmente, dado $\omega \in \Omega$, temos $t^{W'}(\omega) \leq t^W(\omega)$. Logo, se $\omega \in A_{fW'}$, temos $t^{W'}(\omega) \in A$. Como A é crescente, vale que $t^W(\omega) \in A$ e, portanto, $\omega \in A_{fW}$.

Em particular, considere a aplicação $F: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $F(\omega) = f(\overline{C(\Gamma, \omega)})$ e veja que se $\omega_0 \leq \omega_1$, temos $\overline{C(\Gamma, \omega_0)} \subset \overline{C(\Gamma, \omega_1)}$. Pelo que foi discutido no parágrafo anterior, temos $F(\omega_1) = f(\overline{C(\Gamma, \omega_1)}) \leq f(\overline{C(\Gamma, \omega_0)}) = F(\omega_0)$, donde concluímos que F é decrescente em ω . Situação análoga ocorre com $G: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$, dada por $G(\omega) = g(\overline{C(\Gamma, \omega)})$.

Assim, vemos que

$$\begin{aligned}
 & \sum_W \mathcal{P}_p(\overline{C(\Gamma)} = W) f(W) g(W) \\
 &= \sum_W \sum_{\omega \in \Omega: \overline{C(\Gamma, \omega)} = W} \mathcal{P}_p(\omega) f(W) g(W) \\
 &= \sum_{\omega \in \Omega} \mathcal{P}_p(\omega) f(\overline{C(\Gamma, \omega)}) g(\overline{C(\Gamma, \omega)}) \\
 &= \sum_{\omega \in \Omega} \mathcal{P}_p(\omega) F(\omega) G(\omega) \\
 &= E_{\mathcal{P}_p} FG \\
 &\geq E_{\mathcal{P}_p} F \times E_{\mathcal{P}_p} G \\
 &= \sum_{\omega \in \Omega} \mathcal{P}_p(\omega) F(\omega) \sum_{\omega \in \Omega} \mathcal{P}_p(\omega) G(\omega) \\
 &= \sum_{\omega \in \Omega} \mathcal{P}_p(\omega) f(\overline{C(\Gamma, \omega)}) \sum_{\omega \in \Omega} \mathcal{P}_p(\omega) g(\overline{C(\Gamma, \omega)}) \\
 &= \left[\sum_W \sum_{\omega \in \Omega: \overline{C(\Gamma, \omega)} = W} \mathcal{P}_p(\omega) f(W) \right] \left[\sum_W \sum_{\omega \in \Omega: \overline{C(\Gamma, \omega)} = W} \mathcal{P}_p(\omega) g(W) \right] \\
 &= \sum_W \mathcal{P}_p(\overline{C(\Gamma)} = W) f(W) \sum_W \mathcal{P}_p(\overline{C(\Gamma)} = W) g(W) \\
 &= \mathcal{P}_p^*(A) \mathcal{P}_p^*(B),
 \end{aligned}$$

onde a desigualdade ocorre pelo fato de F e G serem decrescentes em ω , de modo que podemos aplicar a propriedade de associação de \mathcal{P}_p . \square

4.2 Comparando valores críticos

Analogamente ao modo como definimos $\hat{\delta}_c$, podemos escolher um grafo arbitrário \mathcal{G}_n e um retângulo $Q(n)$ contido em \mathcal{G}_n para criarmos um novo valor crítico. O questionamento importante aqui é saber quais as condições necessárias para que dois valores críticos possuam o mesmo comportamento. Essa ideia ficará clara com o próximo lema. Precisamos estabelecer tais critérios pois a chave para a prova do Lema 2.6 reside na comparação de $\hat{\delta}_c$ com outro valor crítico.

Fixe inteiros positivos k_1 e k_2 e faça, para cada n , $Q(n) := [0, k_1n] \times [0, k_2n]$, $l := [0, k_1n] \times \{0\}$ e $u := [0, k_1n] \times \{k_2n\}$. Sejam $\mathcal{G}_n, n \geq 0$, grafos tais que $Q(n) \subset \mathcal{G}_n$. Assim, podemos definir

$$p_n(\delta, \mathcal{G}_n) := \mathcal{P}_{p_c, \delta}^{[\mathcal{G}_n, \partial \mathcal{G}_n]}(l \leftrightarrow u \text{ dentro de } Q(n)),$$

e

$$\hat{\delta}_c^{\mathcal{G}_n} := \sup\{\delta: p_n(\delta, \mathcal{G}_n) \text{ está afastado de } 1, \text{ uniformemente em } n\}.$$

É evidente que $\hat{\delta}_c^{\mathcal{G}_n}$ depende da escolha dos grafos \mathcal{G}_n . Entretanto, veremos que não é necessário saber qual é a fronteira exata de cada grafo para fazermos afirmações sobre esses valores críticos. Para tanto, é suficiente saber que a fronteira de \mathcal{G}_n está suficientemente distante de $Q(n)$. Mais precisamente, temos o seguinte:

Lema 4.2. *Sejam k_1, k_2 e $Q(n)$ definidos como fizemos acima. Sejam $l = l(n) := [0, k_1n] \times \{0\}$ e $u = u(n) := [0, k_1n] \times \{k_2n\}$, respectivamente, as fronteiras inferior e superior de $Q(n)$. Além disso, fixe constantes positivas K_1 e K_2 e suponha que $\mathcal{G}_{2,n} \supset \mathcal{G}_{1,n}$ são retângulos contendo $Q(n)$, tais que*

$$\begin{aligned} \min\{|v - w|: v \in Q(n), w \in \mathcal{G}_{1,n}\} &\geq K_1n, \\ \max\{|v - w|: v \in Q(n), w \in \mathcal{G}_{2,n}\} &\leq K_2n, \end{aligned} \tag{4.1}$$

onde usamos $|\cdot|$ para denotar a distância entre dois sítios. Então, $p_n(\delta, \mathcal{G}_{1,n})$ está afastado de 1 se e somente se $p_n(\delta, \mathcal{G}_{2,n})$ está afastado de 1. De maneira equivalente, $\hat{\delta}_c^{\mathcal{G}_{1,n}} > 0$ se e somente se $\hat{\delta}_c^{\mathcal{G}_{2,n}} > 0$.

Demonstração. Por conveniência, durante a prova omitiremos a dependência em n dos grafos $\mathcal{G}_{i,n}$, $i = 1, 2$.

Primeiramente, suponha que exista $\delta > 0$ tal que $\sup_n p_n(\delta, \mathcal{G}_2) < 1$. Como \mathcal{G}_1 está contido em \mathcal{G}_2 , todo sítio de $Q(n)$ que está X -conectado a \mathcal{G}_2 também está X -conectado a \mathcal{G}_1 . Logo, $p_n(\delta, \mathcal{G}_1) \leq p_n(\delta, \mathcal{G}_2)$ e, por isso, temos $\sup_n p_n(\delta, \mathcal{G}_1) \leq \sup_n p_n(\delta, \mathcal{G}_2) < 1$.

Reciprocamente, suponha que exista $\delta > 0$, tal que

$$\sup_n p_n(\delta, \mathcal{G}_1) < 1.$$

Seja E_n o evento no qual existe um circuito X -ocupado em \mathcal{G}_1 contornando $Q(n)$ e um caminho X -ocupado conectando $\partial Q(n)$ a $\partial \mathcal{G}_2$, isto é,

$$E_n = \{\exists \text{ circuito } X\text{-ocupado em } \mathcal{G}_1 \text{ contornando } Q(n)\} \cap \{\partial Q(n) \leftrightarrow \partial \mathcal{G}_2 \text{ em } X\}.$$

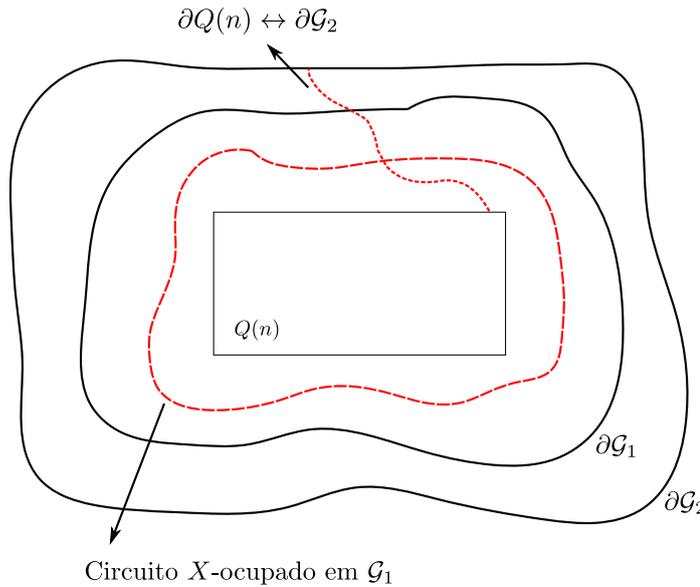


Figura 4.1: Exemplo de uma configuração em E_n .

Veja que E_n é interseção de dois eventos crescentes. Denotando por A_n e B_n o primeiro e segundo eventos à direita da igualdade acima e usando a desigualdade FKG, obtemos, para todo n ,

$$\mathcal{P}_{p_c, \delta}^{[\mathcal{G}_2, \partial \mathcal{G}_2]}(A_n) \mathcal{P}_{p_c, \delta}^{[\mathcal{G}_2, \partial \mathcal{G}_2]}(B_n) \stackrel{FKG}{\leq} \mathcal{P}_{p_c, \delta}^{[\mathcal{G}_2, \partial \mathcal{G}_2]}(E_n) \leq \mathcal{P}_{p_c, \delta}^{[\mathcal{G}_2, \partial \mathcal{G}_2]}(B_n).$$

Por (4.1) é possível observar que tanto a distância entre $\partial \mathcal{G}_1$ e $\partial Q(n)$ quanto a distância entre $\partial \mathcal{G}_2$ e $\partial Q(n)$ é da ordem de n . Assim, em decorrência das técnicas RSW aplicadas a A_n e B_n , garantimos que o evento E_n tem probabilidade positiva, afastada de 0. Para garantir que E_n possui probabilidade afastada de 1, observe que estamos considerando

apenas as variáveis X_i , e que $B_n \subset K_n := \{\exists \text{ cluster } X\text{-ocupado em } \mathcal{G}_2 \text{ de tamanho } \geq n\}$. Dessa forma, temos

$$\mathcal{P}_{p_c, \delta}^{[\mathcal{G}_2, \partial\mathcal{G}_2]}(B_n) = \mathcal{P}_{p_c}(B_n) \leq \mathcal{P}_{p_c}(K_n),$$

onde \mathcal{P}_{p_c} é equivalente à medida de probabilidade para percolação de Bernoulli de sítios em \mathbb{Z}^2 . Como o parâmetro de percolação é p_c , segue que $\mathcal{P}_{p_c}(K_n)$ é uniformemente afastada de 1.

Além disso, no evento E_n , cada sítio dentro de $Q(n)$ conectado a $\partial\mathcal{G}_1$ por um caminho X -ocupado também está conectado ao circuito X -ocupado e a $\partial\mathcal{G}_2$. Com isso temos, para todo n , que

$$\begin{aligned} p_n(\delta, \mathcal{G}_2) &\leq \mathcal{P}_{p_c, \delta}^{[\mathcal{G}_2, \partial\mathcal{G}_2]}(\{l \leftrightarrow u \text{ dentro de } Q(n)\} \cap E_n) + \mathcal{P}_{p_c}(E_n^c) \\ &= \mathcal{P}_{p_c, \delta}^{[\mathcal{G}_2, \partial\mathcal{G}_1]}(\{l \leftrightarrow u \text{ dentro de } Q(n)\} \cap E_n) + \mathcal{P}_{p_c}(E_n^c) \\ &\leq \mathcal{P}_{p_c, \delta}^{[\mathcal{G}_1, \partial\mathcal{G}_1]}(l \leftrightarrow u \text{ dentro de } Q(n))\mathcal{P}_{p_c}(E_n) + \mathcal{P}_{p_c}(E_n^c). \end{aligned}$$

Na última linha utilizamos a desigualdade FKG, visto que o evento E_n depende somente das variáveis X em $\mathcal{G}_2 \setminus Q(n)$ e é crescente nelas, e o evento em que a configuração final possui um cruzamento ocupado em $Q(n)$ é decrescente nessas mesmas variáveis X . Por hipótese, $\sup_n p_n(\delta, \mathcal{G}_1) < 1$. E como $\mathcal{P}_{p_c}(E_n^c)$ é afastado de 0 e 1, concluímos, por fim, que $\sup_n p_n(\delta, \mathcal{G}_2) < 1$. \square

No próximo lema, veremos a relevância que a forma do retângulo interno possui na determinação do valor crítico.

Lema 4.3. *Suponha o retângulo $R_1 = R_1(n) := [0, 6n] \times [0, n]$ contido no retângulo $R_2 = R_2(n)$, de modo que a distância entre ∂R_1 e ∂R_2 seja de ordem n . Façamos $l = l(n) := [0, 6n] \times \{0\}$ e $u = u(n) := [0, 6n] \times \{n\}$. Então,*

$$p'_n(\delta) := \mathcal{P}_{p_c, \delta}^{[R_2(n), \partial R_2(n)]}(l \leftrightarrow u \text{ dentro de } R_1(n))$$

é afastado de 1, uniformemente em n , se e somente se $p_n(\delta)$ é afastado de 1, uniformemente em n .

Demonstração. Suponha que $\sup p'_n(\delta) < 1$. Considerando o grafo $G(3n)$, aplicamos o lema anterior aos grafos $R_2(n)$ e $R_2(n) \cap G(3n)$, e depois aos grafos $R_2(n) \cap G(3n)$ e $G(3n)$, o que garante que as probabilidades

$$\mathcal{P}_{p_c, \delta}^{[G(3n), \partial G(3n)]}(l \leftrightarrow u \text{ dentro de } R_1(n))$$

são afastadas de 1. Como é mais fácil termos um cruzamento de cima para baixo em

$R_1(n) := [0, 6n] \times [0, n]$ do que em $R(n) := [0, 2n] \times [0, n]$, temos que as probabilidades

$$\mathcal{P}_{p_c, \delta}^{[G(3n), \partial G(3n)]}(l \leftrightarrow u \text{ dentro de } R(n))$$

também são afastadas de 1. Uma nova aplicação do lema anterior, agora aos grafos $G(3n)$ e $G(n)$ nos mostra que $\sup_n p_n(\delta) < 1$.

Reciprocamente, suponha que $\sup_n p_n(\delta) < 1$. Vamos mostrar a seguir que

$$1 - \sup_n p'_n(\delta) = \inf_n \mathcal{P}_{p_c, \delta}^{[R_2(n), \partial R_2(n)]}(l \leftrightarrow u \text{ dentro de } R_1(n)) > 0.$$

Primeiramente, observe que um cruzamento ocupado de $l(n)$ para $u(n)$ possui o seguinte comportamento: ou ele está inteiramente contido em algum dos retângulos $[kn, (k+2)n] \times [0, n]$, para $k = 0, \dots, 4$, ou pelo menos algum dos quadrados $[ln, (l+1)n] \times [0, n]$, $l = 1, \dots, 4$, possui um cruzamento esquerda-direita ocupado.

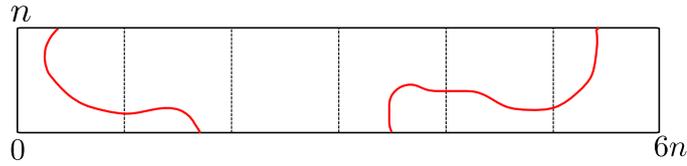


Figura 4.2: Dois tipos possíveis de cruzamento $l - u$ em R_1 .

Devemos mostrar que a probabilidade de nenhum dos eventos acima ocorrer é afastada de zero. Pela propriedade de associação da medida $\mathcal{P}_{p_c, \delta}^{[R_2(n), \partial R_2(n)]}$, obtemos

$$\begin{aligned} \mathcal{P}_{p_c, \delta}^{[R_2(n), \partial R_2(n)]}(l \leftrightarrow u \text{ dentro de } R_1(n)) &\geq \\ &\prod_{k=0}^4 \mathcal{P}_{p_c, \delta}^{[R_2(n), \partial R_2(n)]}(l \leftrightarrow u \text{ dentro de } [kn, (k+2)n] \times [0, n]) \\ &\times \prod_{l=1}^4 \mathcal{P}_{p_c, \delta}^{[R_2(n), \partial R_2(n)]}(\{ln\} \times [0, n] \leftrightarrow \{(l+1)n\} \times [0, n] \text{ dentro de } [ln, (l+1)n] \times [0, n]). \end{aligned}$$

Para as probabilidades do primeiro produto de termos acima, aplicamos uma translação em R_2 e nas caixas $[kn, (k+2)n] \times [0, n]$, e usamos o Lema 4.2 segundo a hipótese de que $\sup_n p_n(\delta) < 1$, para garantir que todos os termos são afastados de 0. No segundo produto, usamos uma rotação de 90 graus e uma translação do sistema para aplicarmos o Lema 4.2 e vemos que, para $l = 1, \dots, 4$,

$$\inf_n \mathcal{P}_{p_c, \delta}^{[R_2(n), \partial R_2(n)]}(\{ln\} \times [0, n] \leftrightarrow \{(l+1)n\} \times [0, n] \text{ dentro de } [ln, (l+1)n] \times [0, n]) > 0$$

se e somente se

$$\inf_n \mathcal{P}_{p_c, \delta}^{[G(n), \partial G(n)]}([n, 2n] \times \{0\} \leftrightarrow [n, 2n] \times \{n\} \text{ dentro de } [n, 2n] \times [0, n]) > 0.$$

Como a probabilidade de existir um cruzamento em um quadrado é menor que a probabilidade de existir um cruzamento em um retângulo no menor sentido, temos que

$$\begin{aligned} & \inf_n \mathcal{P}_{p_c, \delta}^{[G(n), \partial G(n)]}([n, 2n] \times \{0\} \leftrightarrow [n, 2n] \times \{n\} \text{ dentro de } [n, 2n] \times [0, n]) \\ & \geq \inf_n \mathcal{P}_{p_c, \delta}^{[G(n), \partial G(n)]}([0, 2n] \times \{0\} \leftrightarrow [0, 2n] \times \{n\} \text{ dentro de } [0, 2n] \times [0, n]) \\ & \geq 1 - \sup_n p_n(\delta) > 0, \end{aligned}$$

o que prova a recíproca. \square

4.3 Prova do Lema 2.6

Finalmente estamos aptos para provar o Lema 2.6. A primeira parte da demonstração é uma consequência de tudo o que vimos neste capítulo. A segunda, trata-se apenas de uma modificação do processo de percolação auto-destrutiva, para descrevê-la a partir de relógios de Poisson. Dito isso, vamos à prova:

Considere o anel $A(n, 5n) = B(5n) \setminus B(n)$. Primeiramente, declare cada sítio em $A(n, 5n)$ ocupado com probabilidade p . Em seguida, torne vazio todo sítio cujo aglomerado ocupado esteja conectado a um circuito em $A(3n, 5n)$ ao redor de $B(3n)$. Por fim, damos uma chance extra δ para cada sítio vazio tornar-se ocupado. Seja $q_n(p, \delta)$ a probabilidade de, na configuração final, $\partial B(n)$ estar conectado a $\partial B(3n)$. Usaremos daqui em diante a expressão “contorno em $A(3n, 5n)$ ” para indicar “circuito em $A(3n, 5n)$ ao redor de $B(3n)$ ”.

Lema 4.4. *Se δ é tal que a sequência $p_n(\delta)$ é uniformemente afastada de 1, então a sequência $q_n(p_c, \delta)$ é afastada de 1, uniformemente em n .*

Demonstração. Sejam $(X_i: i \in A(n, 5n))$ variáveis aleatórias de Bernoulli independentes com parâmetro p , e $(Y_i: i \in A(n, 5n))$ variáveis aleatórias de Bernoulli com parâmetro δ , independentes entre si e das variáveis (X_i) . Façamos agora, para cada $i \in A(n, 5n)$,

$$\begin{aligned} X_i^{*c} &:= I(X_i = 1 \text{ e o cluster } X\text{-ocupado de } i \text{ em } A(n, 5n) \\ & \quad \text{não possui contorno envolvendo } B(3n)), \\ X_i^{*B} &:= I(X_i = 1 \text{ e não existe caminho } X\text{-ocupado de } i \text{ em } A(n, 5n) \\ & \quad \text{para } \partial B(5n)), \end{aligned}$$

Além disso, definamos também

$$\begin{aligned} Z_i^c &:= X_i^{*c} \vee Y_i, \\ Z_i^B &:= X_i^{*B} \vee Y_i, \end{aligned}$$

$i \in A(n, 5n)$. Seja $\mathcal{P}_{p_c, \delta}$ a medida de probabilidade do modelo.

Suponha que $p_n(\delta)$ obedeça as condições do enunciado. Com isso, o Lema 4.3 garante que a sequência $p'_n(\delta)$ também é afastada de 1, uniformemente em n . Escrevendo p_n para designar $p_n(\delta)$ e q_n para designar $q_n(p_c, \delta)$, vamos mostrar que

$$\begin{aligned} q_n &\leq \mathcal{P}_{p_c, \delta}(\text{não existe contorno } X\text{-ocupado em } A(3n, 5n)) \\ &\quad + (1 - (1 - p'_n)^4) \mathcal{P}_{p_c, \delta}(\text{existe contorno } X\text{-ocupado em } A(3n, 5n)). \end{aligned} \quad (4.2)$$

Como consequência dos argumentos RSW, as probabilidades de existir um contorno X -ocupado em $A(3n, 5n)$ na configuração final são afastadas de 0 e 1, e portanto o lema segue.

Observe que para cada $i \in A(n, 3n)$, cada caminho X -ocupado conectando i a $\partial B(5n)$ intersecta todos os contornos em $A(3n, 5n)$ ao redor de $B(3n)$, caso existam. Assim, se considerarmos o evento em que existe um contorno X -ocupado em $A(3n, 5n)$, vale que, para $i \in A(n, 3n)$,

$$X_i^{*c} \leq X_i^{*B}.$$

Com isso,

$$\begin{aligned} q_n &= \mathcal{P}_{p_c, \delta}(\exists \text{ caminho } Z^c\text{-ocupado de } \partial B(n) \text{ para } \partial B(3n)) \\ &\leq \mathcal{P}_{p_c, \delta}(\exists \text{ caminho } Z^c\text{-ocupado de } \partial B(2n) \text{ para } \partial B(3n)) \\ &\leq \mathcal{P}_{p_c, \delta}(\nexists \text{ contorno } X\text{-ocupado em } A(3n, 5n)) \\ &\quad + \mathcal{P}_{p_c, \delta}(\exists \text{ contorno } X\text{-ocupado em } A(3n, 5n) \text{ e} \\ &\quad \quad \exists \text{ caminho } Z^B\text{-ocupado de } \partial B(2n) \text{ para } \partial B(3n)). \end{aligned}$$

Na última probabilidade acima, temos a interseção de dois eventos: o primeiro, $\{\exists \text{ contorno } X\text{-ocupado em } A(3n, 5n)\}$, depende exclusivamente das variáveis $(X_i : i \in A(3n, 5n))$ e é crescente nas mesmas, enquanto que o segundo, $\{\exists \text{ caminho } Z^B\text{-ocupado de } \partial B(2n) \text{ para } \partial B(3n)\}$, é decrescente nas variáveis em questão.

Dessa forma, uma aplicação da desigualdade FKG nos fornece

$$\begin{aligned}
 q_n &\leq \mathcal{P}_{p_c, \delta}(\nexists \text{ contorno } X\text{-ocupado em } A(3n, 5n)) \\
 &\quad + \mathcal{P}_{p_c, \delta}(\exists \text{ contorno } X\text{-ocupado em } A(3n, 5n)) \\
 &\quad \times \mathcal{P}_{p_c, \delta}(\exists \text{ caminho } Z^B\text{-ocupado de } \partial B(2n) \text{ para } \partial B(3n)). \tag{4.3}
 \end{aligned}$$

Sejam R_1, \dots, R_4 os quatro retângulos de tamanho $n \times 6n$ cuja união é $A(2n, 3n)$. Em particular, tomemos R_1 como o retângulo $[-3n, 3n] \times [-2n, -3n]$, façamos $l = [-3n, 3n] \times \{-3n\}$ e $u = [-3n, 3n] \times \{-2n\}$. Note que cada caminho ocupado conectando $\partial B(2n)$ a $\partial B(3n)$ deve conter pelo menos um cruzamento em algum dos retângulos R_1, \dots, R_4 , na menor direção. Ademais, pela simetria na posição dos mesmos dentro do grafo, a probabilidade de ocorrer tal cruzamento é sempre a mesma, qualquer que seja o retângulo levado em consideração.

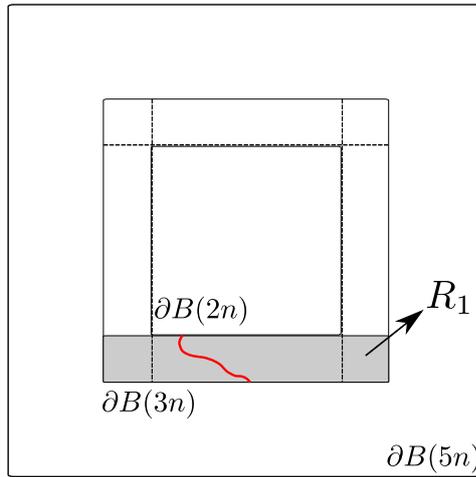


Figura 4.3: $\partial B(2n) \leftrightarrow \partial B(3n)$ em R_1 .

Assim, indicando o evento $\{\text{sem cruzamento em } R_j \text{ na menor direção}\}$ por $\{l_j \leftrightarrow u_j \text{ em } R_j\}$, $j = 1, \dots, 4$, vemos que

$$\begin{aligned}
 &\mathcal{P}_{p_c, \delta}(\exists \text{ caminho } Z^B\text{-ocupado de } \partial B(2n) \text{ para } \partial B(3n)) \\
 &= \mathcal{P}_{p_c, \delta}^{[A(n, 5n); \partial B(5n)]}(\partial B(2n) \leftrightarrow \partial B(3n)) \\
 &= 1 - \mathcal{P}_{p_c, \delta}^{[A(n, 5n); \partial B(5n)]}(\partial B(2n) \nleftrightarrow \partial B(3n)) \\
 &= 1 - \mathcal{P}_{p_c, \delta}^{[A(n, 5n); \partial B(5n)]}(\bigcap_{j=1}^4 \{l_j \leftrightarrow u_j \text{ em } R_j\}) \\
 &\leq 1 - \prod_{j=1}^4 \mathcal{P}_{p_c, \delta}^{[A(n, 5n); \partial B(5n)]}(l_j \leftrightarrow u_j \text{ em } R_j) \\
 &= 1 - \left[\mathcal{P}_{p_c, \delta}^{[A(n, 5n); \partial B(5n)]}(l \leftrightarrow u \text{ em } R_1) \right]^4 \\
 &= 1 - \left[1 - \mathcal{P}_{p_c, \delta}^{[A(n, 5n); \partial B(5n)]}(l \nleftrightarrow u \text{ em } R_1) \right]^4. \tag{4.4}
 \end{aligned}$$

A desigualdade ocorre devido à propriedade de associação de $\mathcal{P}_{p_c, \delta}^{[A(n, 5n); \partial B(5n)]}$. Como R_1 é um retângulo de tamanho $6n$ por n , podemos aplicar o Lema 4.3 para mostrar que as probabilidades $p'_n := \mathcal{P}_{p_c, \delta}^{[A(n, 5n); \partial B(5n)]}(l \leftrightarrow u \text{ em } R_1)$ são afastadas de 1. Usando este fato e substituindo (4.4) em (4.3), concluimos a demonstração. \square

Acabamos de demonstrar a primeira parte da prova. Cabe agora criarmos um processo de percolação auto-destrutiva em tempo contínuo, para que seja feita a conexão entre o lema acima e o Lema 2.6.

Novamente, seja G um grafo finito ou infinito enumerável com conjunto de vértices V_G , e seja Γ um subconjunto de V_G ou o símbolo ∞ . Para cada sítio, associamos relógios de Poisson independentes e com taxa 1. No tempo 0, todos os sítios estão vazios. Quando um relógio de Poisson de um sítio toca, este se torna automaticamente ocupado (a não ser que o sítio em questão já esteja ocupado, caso em que ignoramos o apito). Este processo continua até um certo instante τ , correspondente ao parâmetro p através da relação $1 - e^{-\tau} = p$. Neste momento ocorre a destruição. Como antes, todos os sítios que possuem um caminho ocupado até Γ tornam-se vazios instantaneamente. Por fim, o processo continua até o tempo $t > \tau$, que corresponde ao incremento δ através da relação $1 - e^{-(t-\tau)} = \delta$. Aqui, consideramos a configuração final do sistema. Veja que, após a destruição, cada sítio vazio possui um tempo $t - \tau$ para tornar-se ocupado novamente, e isso ocorre com probabilidade δ . Perceba também que a descrição da percolação auto-destrutiva feita acima nos fornece um acoplamento natural entre todas as medidas $\mathcal{P}_{p, \delta}$.

Considerando o processo de remoção de clusters em t_c descrito no Capítulo 2, façamos $\tau = t_c$ e, dado $\delta > 0$, escolha $\varepsilon > 0$ pela relação $1 - e^{-\varepsilon} = \delta$. Assim temos, nos anéis $A(3^i, 5 \cdot 3^i)$, que

$$\mathcal{P}(\partial B(3^i) \leftrightarrow \partial B(3 \cdot 3^i) \text{ na configuração } \xi(t_c + \varepsilon)) = q_{3^i}(p_c, \delta).$$

Assumindo que a Conjectura 2.3 é verdadeira, existe δ tal que a sequência $p_n(\delta)$ é afastada de 1, uniformemente em n . Com isso, extraímos a subsequência $p_{3^i}(\delta)$ e demonstramos o Lema 2.6. \square

5 Incêndios florestais bem definidos

Como vimos no início de nossa discussão sobre incêndios florestais, é natural nos perguntarmos sobre o fato de termos um modelo bem definido em toda a rede quadrada, para todos os valores de $\lambda > 0$. De um ponto de vista matemático, se escrevermos $(G_{t,v})_{t \geq 0}$ e $(I_{t,v})_{t \geq 0}$ para representarem os processos de Poisson independentes que ocorrem em $v \in \mathbb{Z}^2$, com taxas 1 e λ , respectivamente, formulamos essa questão da seguinte maneira:

Pergunta. Existem processos $\eta_v: \mathbb{R}_+ \rightarrow \{0, 1\}$, $v \in \mathbb{Z}^2$, definidos conjuntamente e em função dos processos de Poisson $(G_{t,v})_{t \geq 0}$ e $(I_{t,v})_{t \geq 0}$, satisfazendo:

- i) Para todo $v \in \mathbb{Z}^2$, $\eta_v(0) = 0$ quase certamente;
- ii) Quase certamente, para todo $v \in \mathbb{Z}^2$, a função $t \mapsto \eta_v(t)$ é càdlàg;
- iii) Para todo $t \geq 0$, os incrementos nos processos de crescimento e ignição após o tempo t , $(G_{t+s,v} - G_{t,v}, I_{t+s,v} - I_{t,v})_{s \geq 0}$, são independentes do processo de incêndio florestal $(\eta(s))$, $s \leq t$;
- iv) Para todo $v \in \mathbb{Z}^2$ e $t > 0$,
 - $G_{t^-,v} < G_{t,v} \Rightarrow \eta_v(t) = 1$;
 - $\eta_v(t^-) < \eta_v(t) \Rightarrow G_{t^-,v} < G_{t,v}$;
 - $I_{t^-,v} < I_{t,v} \Rightarrow \eta_w(t) = 0$ para todo w pertencente ao cluster ocupado de v em t^- ;
 - $\eta_v(t^-) > \eta_v(t) \Rightarrow$ existe w pertencente ao cluster ocupado de v em t^- , tal que $I_{t^-,w} < I_{t,w}$.

Tal questionamento, levantado em [1], [4] e [6], é o problema central a ser tratado em [6], sendo nele obtida uma resposta afirmativa. Como lidamos no Capítulo 2 com incêndios em caixas finitas, vamos mostrar agora como se constrói este processo.

5.1 Incêndios em $B(m)$

Considere a caixa $B(m)$ e a configuração inicial onde todos os vértices encontram-se vazios. Vamos mostrar que, quase certamente, existe uma enumeração (que depende de

ω) dos eventos de crescimento e ignição. Dada essa enumeração, construímos o processo de incêndios florestais de maneira recursiva.

Dado $v \in B(m)$, sejam $(G_{t,v})_{t \geq 0}$ e $(I_{t,v})_{t \geq 0}$, respectivamente, os processos de Poisson independentes que ocorrem em v , com taxas 1 e λ . Dito isso, denotamos o tempo do n -ésimo salto do processo $(G_{t,v})_{t \geq 0}$ por $g_{n,v}$. Nesse sentido, a variável aleatória $g_{n,v}$ indica o tempo do n -ésimo apito do relógio de crescimento em v . Analogamente para o processo $(I_{t,v})_{t \geq 0}$, o tempo da n -ésima ignição será indicado por $i_{n,v}$. Para fazermos a enumeração, devemos observar que, quase certamente, os saltos nos processos de crescimento e ignição são distintos. Isto é, dois processos quaisquer em $B(m)$ não possuem saltos simultâneos. Assim, dado um evento elementar ω , procedemos da seguinte forma:

- Seja S_1 o conjunto dos primeiros saltos de todos os relógios de $B(m)$, isto é, $S_1 = \{g_{1,v} : v \in B(m)\} \cup \{i_{1,v} : v \in B(m)\}$. Para escolhermos o primeiro termo da enumeração, fazemos $s_1 = \min S_1$;
- Sem perda de generalidade, suponha que $s_1 = g_{1,o}$. O passo seguinte consiste em atualizar o conjunto S_1 , substituindo $g_{1,o}$ por $g_{2,o}$, e considerarmos o mínimo nesse novo conjunto. Mais precisamente, fazemos $S_2 = [S_1 \setminus \{g_{1,o}\}] \cup \{g_{2,o}\}$ e escolhemos $s_2 = \min S_2$;
- Para os demais termos, basta iterar o argumento acima.

Veja que, para cada termo da sequência $(s_n)_{n \in \mathbb{N}}$, podemos associar um trio (t_n, v_n, e_n) , onde t_n , v_n , e e_n são, respectivamente, o tempo, o sítio e o tipo (crescimento ou ignição) do n -ésimo apito. Sobre o tipo de apito, indicaremos uma tentativa de crescimento por $e_n = 1$, e por $e_n = 0$ um evento de ignição. Logo, para cada $n \in \mathbb{N}$, temos

$$(t_n, v_n, e_n) \in \bigcup_{(k,v) \in \mathbb{N} \times B(m)} \{(g_{k,v}, v, 1) \cup (i_{k,v}, v, 0)\}.$$

Feita a enumeração, passamos para a construção do processo de incêndios florestais na caixa $B(m)$. O primeiro passo é criarmos uma versão “em tempo discreto”. Para todo $v \in B(m)$, defina

$$\eta_v^{disc}(0) := 0.$$

Em seguida, para todo $j \in \mathbb{N}$, faça

$$\eta_v^{disc}(j) = \begin{cases} 1, & \text{se } e_j = 1, v = v_j; \\ \eta_v^{disc}(j-1), & \text{se } e_j = 1, v \neq v_j; \\ 0, & \text{se } e_j = 0, v \leftrightarrow v_j \text{ por um caminho ocupado em } (j-1); \\ \eta_v^{disc}(j-1), & \text{se } e_j = 0, v \nleftrightarrow v_j \text{ por um caminho ocupado em } (j-1). \end{cases}$$

Note que, no primeiro caso, existe crescimento de uma árvore no sítio v . Logo, v torna-se ocupado. No segundo caso, o crescimento da árvore ocorre em um sítio $v_j \neq v$. Por isso, o estado de v não se modifica. No terceiro caso, existe ignição em algum sítio conectado a v por um caminho ocupado, o que faz com que v fique vazio. Por fim, existe ignição em um sítio não conectado a v por um caminho ocupado, o que faz com que o estado de v permaneça inalterado. Para criarmos o processo em tempo contínuo, basta fazermos, para todo $j \in \{0, 1, 2, \dots\}$ e para todo $v \in B(m)$

$$\eta_v(t) = \eta_v^{disc}(j),$$

para todo $t \in [t_j, t_{j+1})$ (tomando-se $t_0 = 0$).

□

Referências Bibliográficas

- [1] van den BERG, J., BROUWER, R. *Self-Organized Forest-Fires near the Critical Time*, Communications in Mathematical Physics 67, 265-277, 2006.
- [2] van den BERG, J., BROUWER, R. *Self-destructive percolation*, Random Structures & Algorithms, 24(4):480-501, 2004.
- [3] BROADBENT, S. R., HAMMERSLEY, J. M. *Percolation processes*, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, 53: 629-641, 1957.
- [4] BROUWER, Rachel M. *Percolation, forest-fires and monomer-dimers (or the hunt for self-organized criticality)*, PhD thesis, VU Amsterdam, 2005.
- [5] DIESTEL, Reinhard, *Graph Theory*, Third Edition, Springer-Verlag 2005.
- [6] DÜRRE, M., *Existence of multi-dimensional infinite volume self-organized critical forest-fire models*, Electronic Journal of Probability, 11 (2006): 513-539.
- [7] DROSSEL, B., SCHWABL, F. *Self-organized critical forest-fire model*, Phys. Rev. Lett., 69: 1629-1632, 1992.
- [8] ESARY, J. D., PROSCHAN F., WALKUP, D. W. *Association of Random Variables, with Applications*, The Annals of Mathematical Statistics Vol. 38, No. 5 (Oct., 1967), pp. 1466-1474.
- [9] GRIMMETT, Geoffrey R., *Percolation*, Second Edition, Springer-Verlag 1999.
- [10] KESTEN, Harry, *Percolation Theory for Mathematicians*, Birkhäuser, Boston 1982.
- [11] van ZANTEN, H., *An Introduction to Stochastic Processes in Continuous Time*, Lecture Notes (2012). Disponível em <http://www.math.leidenuniv.nl/spieksma/colleges/sp-master/Ch1.pdf>.