Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Dissertação de Mestrado

O método da iteração inversa com deslocamento aplicado ao operador de Sturm-Liouville

Mario Daniel Huamán Bolaños

Orientador: Prof. Grey Ercole

Co-orientador: Prof. Hamilton Bueno

Belo Horizonte
2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

Mario Daniel Huamán Bolaños

Orientador:
Prof. Grey Ercole
Co-orientador:
Prof. Hamilton Bueno

O MÉTODO DA ITERAÇÃO INVERSA COM DESLOCAMENTO APLICADO AO OPERADOR DE STURM-LIOUVILLE

Dissertação submetida à banca examinadora, designada pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMG, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Matemática.

Belo Horizonte - MG
Março - 2013

Agradecimentos

Agradeço a Deus, meu Senhor, por seu amor imerecido e seu cuidado ainda nas minhas fraquezas e por ensinarme a perceber as coisas importantes neste caminho.

Aos meus pais, Mario e Ketty, por o sustento, por suas orações e pela confiança que sempre me oferecem. Ao meu irmão Josúe, por conviver com minha ausência. Aos meus tios e primos por ser parte da minha inspiração para continuar esforçando-me cada día. Obrigado pelo apoio emocional e espiritual, apesar de que pelo destino, não possa compartilhar o cotidiano.

Aos meus amigos da Igreja, em Trujillo, Arequipa, São Vicente e BH, todos somos Um, obrigado pelas orações e por seu exemplo, tenho muito que aprender de vocês.

Aos colegas de mestrado. A Carlos, José, Renato e demais amigos que transitaram comigo esta nova experiência.

Aos meus orientadores Grey e Hamilton pela oportunidade e paciência, além de ser grandes profissionais são grandes pessoas, muito obrigado por compartilhar suas experiências.

Aos professores que aceitaram fazer parte da banca: Luiz Gustavo Farah, Eder Marinho e Ronaldo Brasileiro.

Ás secretarias Andréa e Kelly por sempre estarem dispostas a ajudar e por terem me tratado com atenção apesar do meu recorrente portunhol.

À CNPq pela bolsa de estudos.

Resumo

Neste trabalho usamos o Método da Iteração Inversa com deslocamento para encontrar os autovalores e correspondentes autofunções do conhecido problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} (-pu')' + qu = \lambda ru \\ \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0 \quad \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0 \end{cases}$$

em que λ é um parâmetro e p, q e r são funções reais. Para isso, consideramos ao operador

$$Tu = \frac{1}{r}((-pu')' + qu),$$

que chamamos de Sturm-Liouville. Primeiro, estabelecemos o espaço onde o operador está definido, ressaltando suas relações com as soluções clássica e fraca do problema, para depois aplicar o método iterativo ao operador de Sturm-Liouville, sendo nosso principal interesse o estudo teórico da convergência do método.

Abstract

In this work we use an iterative method inspired by the inverse iteration with shift technique of linear linear algebra to find the eigenvalues and eigenfunctions of the Sturm-Liouville problem

$$\begin{cases} (-pu')' + qu = \lambda r u \\ \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0 \quad \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0 \end{cases}$$

where λ is a parameter, and p, q and r are real functions. So, we consider the map

$$Tu = \frac{1}{r}((-pu')' + qu),$$

called Sturm-Liouville operator. First, we set the function space where the operator is defined, emphasizing its relations with the classical and weak solutions of the problem, and later apply the iterative method to the Sturm-Liouville operator where our main interest will be the theoretical study of the convergence of the method.

Sumário

Introdução geral **1**

1 Iteração inversa com deslocamento para o problema de Sturm-Liouville **3**

1.1 Autofunções e decomposição espectral 4

1.2 Definição da iteração inversa com deslocamento 8

1.3 Sobre o quociente de Rayleigh 10

1.4 Convergência em L_r^2 da iteração inversa com deslocamento 11

1.5 Convergência uniforme da iteração inversa com deslocamento 16

A Conceitos Básicos **25**

A.1 Problema de Sturm-Liouville 25

A.2 A função de Green 27

A.3 Autovalores do problema de Sturm-Liouville 33

B Espaços de Hilbert e Operadores Compactos **39**

C Espaços de Sobolev **43**

Referências bibliográficas **47**

Introdução

O estudo do conhecido problema de Sturm-Liouville

$$\begin{cases} (-pu')' + qu = \lambda ru \\ \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0 \quad \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0 \end{cases} \tag{S}$$

em que λ é um parâmetro e p, q e r são funções reais, originou-se com os trabalhos de Ch. Sturm (1836) e J. Liouville (1837), sendo o último quem estabeleceu que o problema considerado tem solução somente para uma sequência estritamente crescente $(\lambda_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de valores reais do parâmetro λ (os autovalores do problema).

Neste trabalho aplicamos o Método da Iteração Inversa com deslocamento ao operador de Sturm-Liouville,

$$Tu = \frac{1}{r}((-pu')' + qu), \tag{1}$$

para encontrar seus autovalores e correspondentes autofunções, sendo nosso principal interesse o estudo teórico da convergência do método.

Essencialmente, dada uma função u em L^2_r e um número real σ, o método captura, por um processo iterativo, o autovalor da decomposição espectral de u (na base de L^2_r formada pelas autofunções de T) que está mais próximo de σ. Além disso, o método também fornece a projeção de u no auto-espaço correspondente a esse autovalor. Uma vez que todos os auto-espaços do operador T possuem dimensão 1 (isto é, os seus autovalores são simples), todo o espectro de T pode, em princípio, ser encontrado pelo Método da Iteração Inversa com deslocamento.

No recente artigo [2] o método foi aplicado ao operador Laplaciano. No presente trabalho, adaptamos os argumentos deste artigo e estendemos a aplicação do método ao operador de Sturm-Liouville, obtendo autofunções de T como limites uniformes e, também, em L^2_r, o espaço das funções de quadrado integrável, com peso r.

Para o nosso objetivo, que é desenvolvido no Capítulo 1, primeiramente estabelecemos o espaço onde o operador está definido, ressaltando suas relações com as soluções clássica e fraca do problema. Em seguida, estudamos propriedades do espectro de T, o que nos será útil na Seção 1.2, onde definimos a iteração inversa com deslocamento e estabelecemos a notação usada no restante do trabalho. Na Seção 1.3 mostramos alguns resultados clássicos sobre o quociente de Rayleigh relacionado ao problema. Na Seção 1.4 discutimos convergência do método em L^2_r, culminando na obtenção do Teorema 1.6. Na Seção 1.5 estudamos a convergência uniforme do método. Para tanto, precisamos de uma estimativa L^∞ para as autofunções do operador de Sturm-Liouville, a qual desenvolvemos com base na técnica apresentada em [7], onde tal estimativa é feita para as autofunções do operador p-laplaciano.

Sendo $m = \min_{x\in I} p(x)$, $R = \max_{x\in I} r(x)$, $r_m = \min_{x\in I} r(x)$ e $\alpha > 0$ tal que $p(x) \geq \alpha$ para todo x, a melhor estimativa que obtivemos para a autofunção de T correspondente ao autovalor λ é dada por

$$\|e\|_\infty \leq 2^{3/2} \left(\frac{R\lambda - m}{\alpha r_m} \right)^{1/2} |I|^{1/2} \|e\|_r. \tag{2}$$

Essa estimativa claramente depende das funções p, q e r do problema de Sturm-Liouville.

A expressão (2) é importante pois, considerando a convergência da série obtida no Lema 1.9, ela nos permite obter a convergência uniforme da iteração inversa com deslocamento, resultado que é apresentado no Teorema 1.11.

No primeiro apêndice apresentamos algumas noções básicas da teoria de Sturm-Liouville. Esses resultados são ora aplicados, ora contrastados com aqueles do Capítulo 1. Salientamos o uso da função de Green na obtenção do Lema 1.8 e, por consequência, o Lema 1.9. Os dois apêndices seguintes incluem resultados da teoria de espaços de Hilbert e da teoria de espaços de Sobolev, utilizados livremente no decorrer do Capítulo 1.

Embora nesta dissertação não tenhamos nos preocupado com a implementação numérica do método de iteração, cremos que nosso trabalho sobre a convergência do método é importante. Não nos parece difícil a elaboração de um algoritmo que permita a verificação numérica do método: em [2] é apresentado um algoritmo que pode ser adaptado para nosso problema.

CAPÍTULO 1

Iteração inversa com deslocamento para o problema de Sturm-Liouville

Dado $r \in C([a,b], \mathbb{R}^+)$, consideremos em $L^2 = L^2[a,b]$ o produto interno

$$\langle f, g \rangle_r = \int_a^b f(t)g(t)r(t)dt$$

que gera a norma

$$\|f\|_r = \left(\int_a^b \mid f(t) \mid^2 r(t)dt \right)^{1/2}.$$

Como r atinge seu máximo e mínimo em $[a,b]$, temos:

$$\left(\min_{[a,b]} r(t) \right)^{1/2} \|f\|_2 \leq \|f\|_r \leq \left(\max_{[a,b]} r(t) \right)^{1/2} \|f\|_2$$

mostrando que as normas $\| \cdot \|_r$ e $\| \cdot \|_2$ (norma usual do L^2) são equivalentes.

Observação 1.1. *Nesse sentido, podemos considerar o espaço*

$$H_r^1 = \{u \in L_r^2(I) : u' \in L_r^2(I)\}$$

com o produto interno

$$\langle f, g \rangle_{1,r} = \langle f, g \rangle_r + \langle f', g' \rangle_r,$$

de modo que H_r^1 é um espaço de Banach com a norma

$$\|f\|_{1,r} = \|f\|_r + \|f'\|_r.$$

(Note que a equivalência das normas de L^2 e L_r^2 nos assegura que obtemos um espaço de Banach.)

1.1 Autofunções e decomposição espectral

Consideremos o problema de Sturm-Liouville no intervalo $I = (a, b)$

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}\left(-(pu')' + qu\right) = f \quad \text{em} \quad I, \\ u(a) = u(b) = 0 \end{cases} \tag{SL}$$

em que as funções $r \in C(\overline{I}, \mathbb{R}^+)$, $f \in L^2_r(I)$, $q \in C(\overline{I})$, $p \in C^1(\overline{I})$ com $p(x) \geq \alpha > 0$, para todo $x \in I$.

Consideraremos o operador $L : D(L) \subset L^2_r(a, b) \to L^2_r(a, b)$, definido por

$$Lu = \frac{1}{r}(-(pu')' + qu)$$

cujo domínio $D(L)$ é dado por

$$D(L) = \{u \in C^2[a, b] \,:\, u(a) = u(b) = 0\}.$$

Definição 1.1. *Uma* ***solução clássica*** *de* (SL) *é uma função* $u \in D(L)$ *que satisfaz* (SL), *isto é,* $Lu = f$.

Uma ***solução fraca*** *de* (SL) *é uma função* $u \in H^1_0(I)$ *satisfazendo*

$$\int_I pu'v'dx + \int_I quv\,dx = \int_I frv\,dx, \qquad \forall\ v \in H^1_0(I). \tag{1.1}$$

Note que:

A) Toda solução clássica é uma solução fraca.

Com efeito, se u for uma solução clássica de (SL), então integrando por partes e usando as condições de fronteira obtemos que u satisfaz (1.1).

B) Existência e unicidade da solução fraca.

Consideremos o espaço de Hilbert $(H^1_0(I), \langle\cdot,\cdot\rangle_{H^1})$ e definamos neste espaço a forma bilinear simétrica

$$a(u, v) = \int_I pu'v'dx + \int_I quv\,dx.$$

Pela desigualdade de Poincaré (C.11) temos que a é continua. Além disso, se $q \geq 0$ em I, então a forma bilinear é coerciva:

$$a(u, u) = \int_I p(u')^2\,dx + \int_I q(u)^2\,dx \geq \int_I p(u')^2\,dx \geq \alpha\|u'\|_2^2 \geq \frac{\alpha}{C^2}\|u\|^2_{H^1}.$$

Por conseguinte, pelo teorema de Lax-Milgram (B.6), dado $f \in L^2_r(I) \subset H^{-1}(I)$, existe um único $u \in H^1_0(I)$ tal que

$$a(u,v) = \int_I fvr\,dx, \quad \forall\ v \in H^1_0(I).$$

Além disso, u é obtido por

$$\min_{v\in H^1_0(I)} \left\{ \frac{1}{2}\int_I (p(v')^2 + q(v')^2)\,dx - \int_I fvr\,dx \right\}.$$

C) Regularidade da solução fraca.

Se u for uma solução fraca e $f \in L^2_r(I)$, então $u \in H^2(I)$. Com efeito, de (1.1), temos que

$$\int_I (pu')'v\,dx = \int_I (qu - fr)v\,dx \quad \forall v \in H^1_0(I).$$

Como $qu - fr \in L^2(I)$, concluímos que $(pu')' \in L^2(I)$. Assim $pu' \in H^1(I)$ e, como $\frac{1}{p} \in H^1(I)$, temos que $u' = (\frac{1}{p})(pu') \in H^1(I)$, mostrando que $u \in H^2(I)$.

Além disso, se $f \in C(\overline{I})$, então a solução fraca é de classe C^2. De fato, de

$$\int_I (pu')'v\,dx = \int_I (qu - fr)v\,dx, \qquad \forall\ v \in C^1_0(\overline{I})$$

e de $qu - fr \in C(\overline{I})$, concluímos que $(pu')' \in C(\overline{I})$ e, assim, $u \in C^2(\overline{I})$.

D) Uma solução fraca que está em $C^2(\overline{I})$ é uma solução clássica.

Com efeito, seja $u \in C^2(\overline{I})$, com $u(a) = u(b)$, e satisfazendo (1.1); então

$$\int_I (-(pu')'+qu-fr)v\,dx = 0,\ \forall\, v \in C^1_0(\overline{I}) \quad \Rightarrow \quad -(pu')'+qu-fr = 0 \quad q.t.p \text{ em } (a,b)$$

e esta igualdade é válida em $[a,b]$, pois $u \in C^2[a,b]$. Assim, u é uma solução clássica.

No Corolário A.7 encontramos uma solução $u \in D(L)$ do problema (SL).

O próximo resultado nos dá uma base ortonormal para o conjunto de soluções fracas do problema (SL).

Teorema 1.2. *Seja $r \in C(\overline{I}, \mathbb{R}^+)$, $p \in C^1(\overline{I})$ e $q \in C(\overline{I})$ com $p \geq \alpha > 0$ e $q \geq 0$ sobre I. Então existe uma sequência λ_n de números reais positivos e uma base ortonormal (e_n) de $L^2_r(I)$ tal que $(e_n) \in C^2(\overline{I})$, $\forall\ n$ e*

$$\begin{cases} (-(pe_n')' + qe_n) = \lambda_n re_n \quad \text{em} \quad (a,b) \\ e_n(a) = e_n(b) = 0. \end{cases}$$

Além disso, $\lambda_n \to \infty$ quando $n \to \infty$.

Demonstração. Das observações **B)** e **C)** temos que, para cada $f \in L^2_r(I)$, existe um único $u \in H^2(I) \cap H^1_0(I) \subset L^2_r(I)$ satisfazendo (no sentido fraco)

$$\begin{cases} \frac{1}{r}(-(pu')' + qu) = f \quad \text{em} \quad I \\ \quad u(a) = u(b) = 0. \end{cases}$$

Denotamos por $\mathcal{S}$ o operador $f \mapsto u$ em $L^2_r(I)$. Afirmamos que $\mathcal{S}$ é simétrico e compacto. De fato, de (SL) temos

$$\int_I p(u')^2\, dx + \int_I q(u)^2\, dx \ = \int_I fru\, dx,$$

decorrendo de nossas hipóteses e da desigualdade de Hölder que, para uma constante $\alpha > 0$, temos

$$\alpha \|u'\|_2^2 \leq \int_I p(u')^2\, dx \leq \int_I fru\, dx = \int_I (fr^{\frac{1}{2}})(r^{\frac{1}{2}}u)\, dx \leq \|f\|_r \|u\|_r. \tag{1.2}$$

Da desigualdade de Poincaré (C.11) e da equivalência das normas $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_r$ obtemos a existência de uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_r \leq C\|u'\|_r, \quad \forall\, u \in H^1_0(I). \tag{1.3}$$

Logo, segue-se de (1.2)que existe uma constante $A > 0$ tal que

$$A\|u'\|_r^2 \leq \|f\|_r \|u\|_r \quad \Rightarrow \quad \|u'\|_r \leq \frac{C}{A}\|f\|_r, \tag{1.4}$$

assim, aplicando (1.4) em (1.3):

$$\|u\|_r \leq C\left(\frac{C}{A}\|f\|_r\right) = \frac{C^2}{A}\|f\|_r. \tag{1.5}$$

Somando (1.4) e (1.5) e aplicando a Observacão 1.1, concluímos que

$$\|u\|_{H^1} \leq K\|u\|_{1,r} \leq B\|f\|_r \quad \forall f \in L^2_r$$

para constantes positivas K e B, isto é,

$$\|\mathcal{S}f\|_{H^1} \leq B\|f\|_r \quad \forall f \in L^2_r.$$

Por conseguinte, sendo a aplicação de L^2_r em H^1 contínua e a injecão de H^1 em L^2_r compacta, concluímos que $\mathcal{S} : L^2_r \mapsto L^2_r$ é um operador compacto.

Para provar que é simétrica, considere $f, g \in L^2_r$ e sejam $u = \mathcal{S}f$ e $v = \mathcal{S}g$ em $H^1_0(I)$. Isto é,

$$\frac{1}{r}(-(pu')' + qu) = f \qquad \text{e} \qquad \frac{1}{r}(-(pv')' + qv) = g.$$

Multiplicando essas igualdades por v e u, respectivamente, e integrando, obtemos

$$-\int_I (pu')'v\,dx + \int_I quv\,dx = \int_I frv\,dx \qquad \text{e} \qquad -\int_I (pv')'u\,dx + \int_I qvu\,dx = \int_I gru\,dx.$$

Integrando por partes e usando a condição de fronteira, obtemos

$$\int_I frv\,dx = \int_I pu'v'\,dx + \int_I quv\,dx = \int_I gru\,dx.$$

Deste modo temos,

$$\langle \mathcal{S}g, f\rangle_r = \int_I (\mathcal{S}g)fr\,dx = \int_I vfr\,dx = \int_I gur\,dx = \langle g, u\rangle_r = \langle g, \mathcal{S}f\rangle_r, \qquad \forall\ f, g \in L_r^2,$$

provando o afirmado.

Além disso, temos que $N(\mathcal{S}) = 0$, pois $\mathcal{S}f = 0$ implica $u = 0$ e, portanto, $f = 0$, isto é, 0 não é autovalor de $\mathcal{S}$. Mais ainda, integração parcial mostra que

$$\langle \mathcal{S}f, f\rangle_r = \int_I ufr\,dx = \int_I u(-(pu')' + qu)\,dx = \int_I p(u')^2\,dx + \int_I q(u)^2\,dx \ \geq 0. \tag{1.6}$$

Uma vez que L_r^2 é um espaço de Hilbert separável e $\mathcal{S}$ um operador compacto simétrico, então o teorema (B.9) garante a existência de uma base ortonormal (e_n) formada por autofunções de $\mathcal{S}$ com autovalores correspondentes (μ_n), sendo $\mu_n > 0$ consequência de (1.6) e, pela proposição (B.8) temos que $\mu_n \to 0$, assim escrevendo $\mathcal{S}e_n = \mu_n e_n$, obtemos

$$\begin{cases} \frac{1}{r}(-(pe_n')' + qe_n) = \lambda_n e_n, \quad \text{em} \quad I \\ e_n(a) = e_n(b) = 0 \end{cases}$$

sendo $\lambda_n = 1/\mu_n$. Também, como $H^1(I) \subset C(\overline{I})$, temos que $\mu_n e_n \in C(\overline{I})$, e deste modo $e_n \in C^2(\overline{I})$. $\square$

Definição 1.3. *O operador inverso de $\mathcal{S}$, será denominado*

$$T : H^2(I) \cap H_0^1(I) \subset L_r^2(I) \to L_r^2(I), \quad Tu = \frac{1}{r}(-(pu')' + qu),$$

*e será chamado o **operador de Sturm-Liouville**.*

A sequência (λ_n) da demonstração anterior é formada pelos autovalores do operador de Sturm- Liouville, sendo suas autofunções as mesmas de $\mathcal{S}$, isto é a sequencia (e_n).

Note que o operador T é uma extensão do operador L definido anteriormente, pois considerando as condições iniciais $u(a) = u(b) = 0$ temos que

$$D(L) = \{u \in C^2[a, b] \,:\, u(a) = u(b) = 0\} \subset H_0^1(I) \cap H^2(I) = D(T).$$

Assim, $D(L)$ e $D(T)$ são, respectivamente, os conjuntos das soluções clássicas e fracas do problema (SL).

Por outro lado, a observação **C)** nos diz que a imagem inversa de $C(\overline{I})$ por T é $C^2(\overline{I})$. Assim quando tratamos o problema

$$Te_n = \lambda_n e_n$$

temos que $e_n \in C^2(\overline{I})$. Logo, pela observação **D)**, temos que e_n é uma solução clássica do problema de Sturm-Liouville, portanto $e_n \in D(L)$, isto é, e_n satisfaz

$$Le_n = \lambda_n e_n.$$

Por conseguinte, as autofunções de ambos operadores são as mesmas e, assim, os autovalores são simples, de acordo com a Proposição A.3.

1.2 Definição da iteração inversa com deslocamento

Seja $(e_k)_k \subset H_0^1(I)$ uma base ortogonal (não necesariamente normalizada) de $L_r^2(I)$ formada por autofunções do operador de Sturm-Liouville T, ou seja,

$$\begin{cases} (-(pe_k')' + qe_k) = \lambda_k re_k \quad \text{em} \quad (a,b), \\ e_k(a) = e_k(b) = 0, \end{cases}$$

em que $p \in C^1(\overline{I})$, $q, r \in C(\overline{I})$ com $p \geq \alpha > 0$, $q \geq 0$ e $r > 0$ em $I = (a,b)$.

Agora, pelo Teorema 1.2 e pelo fato dos autovalores de T serem simples, temos que a sequência real (λ_k) é positiva e estritamente crescente

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 < ... < \lambda_k \to \infty. \tag{1.7}$$

Seja $\sigma > 0$ e definamos o operador deslocamento $T^\sigma = T - \sigma I$. Temos:

$$T^\sigma e_k = Te_k - \sigma e_k = (\lambda_k - \sigma)e_k$$

mostrando que e_k também é uma autofunção de T^σ correspondente ao autovalor $\lambda_k - \sigma$.

Reciprocamente, se λ for um autovalor de T^σ associado a e_k, então $\lambda = \lambda_k - \sigma$ para algum autovalor λ_k de T. Assim o espectro do operador T^σ é igual ao espectro de T trasladado de σ, sendo iguais os autoespaços correspondentes.

Dado $u \in L_r^2(I)$, seja

$$u = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k$$

a expansão de Fourier de u na base (e_k). Assim, os coeficientes α_k são dados por

$$\alpha_k = \frac{\langle u, e_k \rangle_r}{\|e_k\|_r^2} = \frac{\displaystyle\int_I ue_k r\, dx}{\displaystyle\int_I |e_k|^2 r\, dx}.$$

Seja λ_u^1 o menor autovalor cujo autoespaço associado não é ortogonal a u:

$$\lambda_u^1 = \lambda_{k_1}, \qquad \text{em que} \;\; k_1 = \min\{k : \alpha_k \neq 0\}, \quad (i.e., \langle u, e_k\rangle_r \neq 0).$$

Em outras palavras, λ_u^1 é o primeiro autovalor de T tal que u possui uma componente não nula no autoespaço correspondente.

Como cada autovalor λ de T possui multiplicidade 1, então a projeção ortogonal de u sobre o autoespaço associado a λ_u^1 é $e_u^1 = \alpha_{k_1} e_{k_1}$.

Assim a expansão de Fourier de u pode ser escrita

$$u = e_u^1 + \sum_{k>k_1} \alpha_k e_k.$$

Analogamente, denotamos por λ_u^j o j-ésimo autovalor que não é ortogonal a u e e_u^j a projeção ortogonal de u sobre o autoespaço associado a este autovalor. Assim, a expansão de u em autofunções é escrita em termos de suas componentes não nulas:

$$u = \sum_{j=1}^{\infty} e_u^j \tag{1.8}$$

e a sequência correspondente de autovalores $\{\lambda_u^j\}_{j=1}^{\infty} \subset \{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ é estritamente crescente:

$$0 < \lambda_u^1 < \lambda_u^2 < \cdots < \lambda_u^j \cdots .$$

Como sabemos, se $\sigma \in \rho(T)$[1] então $(T - \sigma I)^{-1} : L_r^2(I) \to L_r^2(I)$ é um operador bijetivo e contínuo. Portanto, sempre que σ não for um autovalor do operador de Sturm-Liouville, podemos definir uma sequência $(\phi_n) \subset H_0^1(I)$ por iteração inversa mediante $\phi_0 = u$ e

$$\begin{cases} (T - \sigma I)\phi_{n+1} = \phi_n, & \text{em} \;\; I, \\ \phi_{n+1}(a) = \phi_{n+1}(b) = 0. \end{cases}$$

Como mostraremos, o método de iteração inversa permite encontrar um autovetor aproximado quando é conhecida uma aproximação do autovalor correspondente. Assim, dado $\sigma > 0$ e ϕ_0 uma função arbitrária em L^2. O método é descrito pela equação de recorrência

$$\phi_{n+1} = (T - \sigma I)^{-1}\phi_n.$$

Se λ é o autovalor mais próximo de σ, a iteração iniciada em ϕ_0 e governada pela equação de recorrência produz – como mostraremos– em cada passo, uma aproximação para o autovetor associado ao autovalor λ na decomposição espectral de ϕ_0, isto é, na projeção de ϕ_0 sobre o autoespaço associado a λ.

[1]Sendo $\rho(T)$ o conjunto resolvente do operador de Sturm-Liouville T.

1.3 Sobre o quociente de Rayleigh

Agora consideremos o seguinte problema: encontrar $(u, \lambda) \in H_0^1(I) \times \mathbb{R}$ tal que

$$a(u, v) = \int_I pu'v'dx + \int_I quv\, dx = \lambda \int_I uvr\, dx. \tag{1.9}$$

Como a forma bilinear a é coerciva, o problema não possui solução quando $\lambda = 0$. Assim, considerando a base ortogonal $(e_k)_k \subset H_0^1(I)$ de $L_r^2(I)$, definamos $V_i = \text{spam}\{e_1, e_2, ..., e_i\}$ e $V_0 = \{0\}$.

Se $v \in H_0^1/\{0\}$, então

$$v = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\langle v, e_k \rangle_r e_k}{\|e_k\|_r^2}.$$

Ao considerarmos a forma bilinear a, temos

$$a(v, v) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\langle v, e_k \rangle_r|^2}{\|e_k\|_r^4} a(e_k, e_k) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\langle v, e_k \rangle_r|^2}{\|e_k\|_r^2} \lambda_k.$$

No caso particular em que $v \in V_m$, temos que (veja a equação (1.7))

$$a(v, v) = \sum_{k=1}^{m} \frac{|\langle v, e_k \rangle_r|^2 \lambda_k}{\|e_k\|_r^2} < \lambda_m \sum_{k=1}^{m} \frac{|\langle v, e_k \rangle_r|^2}{\|e_k\|_r^2} = \lambda_m \|v\|_r^2,$$

de acordo com a identidade de Parseval. Portanto,

$$\frac{a(v, v)}{\|v\|_r^2} < \lambda_m = \frac{a(e_m, e_m)}{\|e_m\|_r^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_m = \max_{v \in V_m, v \neq 0} \frac{a(v, v)}{\|v\|_r^2}$$

Por outro lado, se $v \perp V_{n-1}$, decorre de (1.7) que

$$a(v, v) = \sum_{k \geq n} \frac{|\langle v, e_k \rangle_r|^2 \lambda_k}{\|e_k\|_r^2} \geq \lambda_n \sum_{k \geq n} \frac{|\langle v, e_k \rangle_r|^2}{\|e_k\|_r^2} = \lambda_n \|v\|_r^2,$$

de modo que

$$\frac{a(v, v)}{\|v\|_r^2} \geq \lambda_n = \frac{a(e_n, e_n)}{\|e_n\|_r^2} \quad \Rightarrow \quad \lambda_n = \min_{\substack{v \perp V_{n-1},\\ v \neq 0}} \frac{a(v, v)}{\|v\|_r^2}$$

Em particular, temos

$$\lambda_1 = \min_{v \in H_0^1/\{0\}} \frac{a(v, v)}{\|v\|_r^2}$$

o mínimo sendo atingido em $v = e_1$.

Se definimos a função

$$R : H_0^1(I)/\{0\} \to (0, \infty), \qquad R(v) = \frac{\int_I p(v')^2\, dx + \int_I qv^2\, dx}{\int_I v^2 r\, dx}$$

(conhecida como o **quociente de Rayleigh**), temos o seguinte resultado:

Proposição 1.4. *Temos que u é um ponto critico de R se, e somente se, u for uma autofunção do operador de Sturm-Liouville T e $R(u)$ o autovalor correspondente.*

Demonstração. Dada a direção $v \in H_0^1(I)$ temos:

$$\begin{aligned} R'(u).v &= \left[\frac{\partial}{\partial t}R(u+tv)\right]_{t=0} = \frac{\partial}{\partial t}\left[\frac{a(u,u)+2ta(u,v)+t^2a(v,v)}{\|u+tv\|_r^2}\right]_{t=0} \\ &= \frac{2a(u,v)\|u\|_r^2 - 2a(u,u)\langle u,v\rangle_r}{\|u\|_r^4} = \frac{2}{\|u\|_r^2}\left(a(u,v)-R(u)\langle u,v\rangle_r\right). \end{aligned}$$

Logo, $R'(u)=0$ se, e somente se, $a(u,v)=R(u)\langle u,v\rangle_r$. Isto é, u é solução fraca de

$$\begin{cases} \frac{1}{r}(-(pu')'+qu) = R(u)u, \quad \text{em} \quad (a,b), \\ u(a)=u(b)=0. \end{cases}$$

□

Corolário 1.5. *Se u for uma autofunção do operador de Sturm-Liouville com autovalor correspondente $R(u)$, então*

$$R(v)-R(u) = O(\|v-u\|_r^2)$$

quando $v \to u$ em $L_r^2(I)$.

Demonstração. Seja $w \in L_r^2(I)$ tal que $\|w\|_r = 1$. Dado $\epsilon > 0$, considere $v = u + \epsilon w$. Assim, se $\epsilon \to 0$, então $v \to u$. Aplicando a fórmula de Taylor para a função $h(\epsilon) = R(u+\epsilon w)$, temos

$$h(\epsilon) = h(0) + h'(0)\epsilon + h''(\bar{\epsilon})\frac{\epsilon^2}{2}, \qquad \text{em que } \bar{\epsilon} \in (0,\epsilon).$$

Logo,

$$R(u+\epsilon w) = R(u) + \left[\frac{\partial}{\partial \epsilon}R(u+\epsilon w)\right]_{\epsilon=0}\epsilon + \left[\frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2}R(u+\epsilon w)\right]_{\epsilon=\bar{\epsilon}}\frac{\epsilon^2}{2}.$$

Portanto, como $R'(u)=0$, concluímos

$$R(v)-R(u) = \frac{1}{2}\left[\frac{\partial^2}{\partial \epsilon^2}R(u+\epsilon w)\right]_{\epsilon=\bar{\epsilon}}(\|v-u\|_r^2), \quad 0 < \bar{\epsilon} < \epsilon.$$

□

1.4 Convergência em L_r^2 da iteração inversa com deslocamento

Para cada $(u,\sigma) \in L_r^2(I) \times \rho(T)$,[2] considere a sequência (ϕ_n) definida por $(\phi_{n+1}) = (T-\sigma I)^{-1}\phi_n$ e $\phi_0 = u$. Uma vez que

$$u = \sum_{j=1}^{\infty}(e_u^j),$$

[2]Sendo $\rho(T)$ o conjunto resolvente do operador de Sturm-Liouville T.

temos

$$\phi_1 = (T-\sigma I)^{-1}u = \sum_{j=1}^{\infty}(T-\sigma I)^{-1}(e_u^j) = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_u^j-\sigma}e_u^j$$

e assim, iterativamente, obtemos:

$$\phi_n = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{(\lambda_u^j-\sigma)^n}e_u^j. \tag{1.10}$$

Seja λ_u^σ o autovalor de T na decomposição espectral de u que está mais proximo de σ, isto é,

$$|\lambda_u^\sigma-\sigma| = \min_{j\in\mathbb{N}}|\lambda_u^j-\sigma|. \tag{1.11}$$

Denotando por e_u^σ a projeção de u sobre o λ_u^σ-autoespaço, podemos escrever

$$\phi_n = \frac{1}{(\lambda_u^\sigma-\sigma)^n}(e_u^\sigma+\psi_n) \tag{1.12}$$

com

$$\psi_n = \sum_{|\lambda_u^j-\sigma|>|\lambda_u^\sigma-\sigma|}\left(\frac{\lambda_u^\sigma-\sigma}{\lambda_u^j-\sigma}\right)^n e_u^j. \tag{1.13}$$

Em particular, temos

$$\frac{\phi_n}{\|\phi_n\|_r} = \frac{|\lambda_u^\sigma-\sigma|^n}{(\lambda_u^\sigma-\sigma)^n}\frac{(e_u^\sigma+\psi_n)}{\|e_u^\sigma+\psi_n\|_r} = \pm\frac{e_u^\sigma+\psi_n}{\|e_u^\sigma+\psi_n\|_r} \tag{1.14}$$

em que o sinal da expressão à direita da última igualdade depende do deslocamento ser tomado antes ou depois do autovalor e também de n:

- Se o deslocamento for tomado antes do autovalor ($\lambda_u^\sigma-\sigma>0$), o sinal será positivo.
- Se o deslocamento for tomado depois do autovalor, o sinal será $(-1)^n$.

Denotaremos por λ_u^τ ao autovalor de T que aparece na decomposição espectral de u , e que é o "segundo mais proximo" de σ, i.e.

$$|\lambda_u^\tau-\sigma| = \min_{j\in\mathbb{N},\lambda_u^j\neq\lambda_u^\sigma}|\lambda_u^j-\sigma| \tag{1.15}$$

Teorema 1.6. *Seja $u\in L_r^2(I)$. Então*

(a)

$$\|\psi_n\|_r \le \left|\frac{\lambda_u^\sigma-\sigma}{\lambda_u^\tau-\sigma}\right|^n\|u\|_r$$

Em particular, $\psi\to 0$ em $L_r^2(I)$ com um ritmo exponencial.

(b) *Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\left\| \frac{e_u^\sigma + \psi_n}{\|e_u^\sigma + \psi_n\|_r} - \frac{e_u^\sigma}{\|e_u^\sigma\|_r} \right\|_r \leq \frac{4}{\|e_u^\sigma\|_r} \|\psi_n\|_r$$

para todo $n \geq n_0$. Em particular

$$\frac{e_u^\sigma + \psi_n}{\|e_u^\sigma + \psi_n\|_r} \to \frac{e_u^\sigma}{\|e_u^\sigma\|_r} \quad em\, L^2_r(I)$$

com taxa exponencial.

(c)

$$\frac{\|\phi_n\|_r}{\|\phi_{n+1}\|_r} \to |\lambda_u^\sigma - \sigma|.$$

(d)

$$\left(\int_I u \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|_r} .r\, dx \right) . \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|_r} \to e_u^\sigma \quad em\, L^2_r(I).$$

(e)

$$R(\phi_n) \to \lambda_u^\sigma \quad com \quad R(\phi_n) - \lambda_u^\sigma = O\left(\left| \frac{\lambda_u^\sigma - \sigma}{\lambda_u^\tau - \sigma} \right|^{2n} \right).$$

Demonstração. (a) De (1.13) temos

$$\|\psi_n\|_r^2 = \sum_{|\lambda_u^j - \sigma| > |\lambda_u^\sigma - \sigma|} \left| \frac{\lambda_u^\sigma - \sigma}{\lambda_u^j - \sigma} \right|^{2n} \|e_u^j\|_r^2.$$

Uma vez que, para cada $\lambda_u^j \neq \lambda_u^\sigma$, temos

$$\left| \frac{\lambda_u^\sigma - \sigma}{\lambda_u^j - \sigma} \right| \leq \left| \frac{\lambda_u^\sigma - \sigma}{\lambda_u^\tau - \sigma} \right|$$

obtemos

$$\|\psi_n\|_r^2 \leq \left| \frac{\lambda_u^\sigma - \sigma}{\lambda_u^\tau - \sigma} \right|^{2n} \sum_{|\lambda_u^j - \sigma| > |\lambda_u^\sigma - \sigma|} \|e_u^j\|_r^2 \leq \left| \frac{\lambda_u^\sigma - \sigma}{\lambda_u^\tau - \sigma} \right|^{2n} \|u\|_r^2.$$

Já que

$$\left| \frac{\lambda_u^\sigma - \sigma}{\lambda_u^\tau - \sigma} \right| < 1,$$

concluímos que $\|\psi_n\|_r \to 0$, quando $n \to \infty$.

(b) Usando (a), consideramos o número $\frac{1}{2}\|e_u^\sigma\|_r > 0$. Temos que

$$\|\psi_n\|_r \leq \frac{1}{2}\|e_u^\sigma\|_r$$

para todo $n \geq n_0$. Assim, segue-se daí que

$$\frac{1}{2} \parallel e_u^\sigma \parallel_r = \parallel e_u^\sigma \parallel_r - \frac{1}{2} \parallel e_u^\sigma \parallel_r \leq (\parallel e_u^\sigma + \psi_n \parallel_r + \parallel \psi_n \parallel_r) - \parallel \psi_n \parallel_r = \parallel e_u^\sigma + \psi_n \parallel_r$$

e, portanto,

$$\left\| \frac{e_u^\sigma + \psi_n}{\| e_u^\sigma + \psi_n \|_r} - \frac{e_u^\sigma}{\| e_u^\sigma \|_r} \right\|_r = \left\| \frac{\| e_u^\sigma \|_r \, (e_u^\sigma + \psi_n) - e_u^\sigma \, \| e_u^\sigma + \psi_n \|_r}{\| e_u^\sigma + \psi_n \|_r \| e_u^\sigma \|_r} \right\|_r$$

$$\leq \left\| \frac{e_u^\sigma (\| e_u^\sigma \|_r - \| e_u^\sigma + \psi_n \|_r) + \| e_u^\sigma \|_r \, \psi_n}{(1/2) \, \| e_u^\sigma \|_r^2} \right\|_r \leq 2 \frac{\| e_u^\sigma \|_r \| \psi_n \|_r + \| e_u^\sigma \|_r \| \psi_n \|_r}{\| e_u^\sigma \|_r^2}.$$

Assim, concluímos que

$$\left\| \frac{e_u^\sigma + \psi_n}{\| e_u^\sigma + \psi_n \|_r} - \frac{e_u^\sigma}{\| e_u^\sigma \|_r} \right\|_r \leq \frac{4}{\| e_u^\sigma \|_r} \, \| \psi_n \|_r \, .$$

Da afirmativa (a) decorre que $\psi_n \to 0$ em L_r^2, e temos a conclusão.

(c) De

$$\phi_n = \frac{1}{(\lambda_u^\sigma - \sigma)^n} (e_u^\sigma + \psi_n)$$

vem que

$$\frac{\| \phi_n \|_r}{\| \phi_{n+1} \|_r} = |\lambda_u^\sigma - \sigma| \frac{\| e_u^\sigma + \psi_n \|_r}{\| e_u^\sigma + \psi_{n+1} \|_r}.$$

Como

$$\frac{\| e_u^\sigma \|_r - \| \psi_n \|_r}{\| e_u^\sigma \|_r + \| \psi_{n+1} \|_r} \leq \frac{\| e_u^\sigma + \psi_n \|_r}{\| e_u^\sigma + \psi_{n+1} \|_r} \leq \frac{\| e_u^\sigma \|_r + \| \psi_n \|_r}{\| e_u^\sigma \|_r - \| \psi_{n+1} \|_r},$$

decorre de (a) que

$$\lim_{n \to \infty} \frac{\| \phi_n \|_r}{\| \phi_{n+1} \|_r} = |\lambda_u^\sigma - \sigma|.$$

(d) Decorre de (1.14) que

$$\left(\int_I u \frac{\phi_n}{\| \phi_n \|_r} r \, dx \right) \frac{\phi_n}{\| \phi_n \|_r} = \left\langle u, \frac{e_u^\sigma + \psi_n}{\|e_u^\sigma + \psi_n\|_r} \right\rangle_r \frac{e_u^\sigma + \psi_n}{\|e_u^\sigma + \psi_n\|_r}$$

e de (b) decorre que

$$\left\langle u, \frac{\phi_n}{\| \phi_n \|_r} \right\rangle_r \frac{\phi_n}{\| \phi_n \|_r} \longrightarrow \left\langle u, \frac{e_u^\sigma}{\| e_u^\sigma \|_r} \right\rangle_r \frac{e_u^\sigma}{\| e_u^\sigma \|_r} = e_u^\sigma \quad \text{em} \quad L_r^2(I).$$

(e) Notemos que, se $\lambda_u^\sigma \geq \sigma$, então (b) e (c) implicam que

$$\begin{aligned} \lim_{n \to \infty} \left\langle \frac{\phi_{n-1}}{\| \phi_{n-1} \|_r}, \frac{\phi_n}{\| \phi_n \|_r} \right\rangle_r \frac{\| \phi_{n-1} \|_r}{\| \phi_n \|_r} &= \lim_{n \to \infty} \left\langle \frac{e_u^\sigma + \psi_{n-1}}{\| e_u^\sigma + \psi_{n-1} \|_r}, \frac{e_u^\sigma + \psi_n}{\| e_u^\sigma + \psi_n \|_r} \right\rangle_r \frac{\| \phi_{n-1} \|_r}{\| \phi_n \|_r} \\ &= \left\langle \frac{e_u^\sigma}{\| e_u^\sigma \|_r}, \frac{e_u^\sigma}{\| e_u^\sigma \|_r} \right\rangle_r |\lambda_u^\sigma - \sigma| = \lambda_u^\sigma - \sigma, \end{aligned}$$

enquanto, se $\lambda_u^\sigma < \sigma$, de maneira análoga obtemos

$$\lim_{n \to \infty} \left\langle \frac{\phi_{n-1}}{\| \phi_{n-1} \|_r}, \frac{\phi_n}{\| \phi_n \|_r} \right\rangle_r \frac{\| \phi_{n-1} \|_r}{\| \phi_n \|_r} =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \left\langle (-1)^{n-1} \frac{e_u^\sigma + \psi_{n-1}}{\| e_u^\sigma + \psi_{n-1} \|_r}, (-1)^n \frac{e_u^\sigma + \psi_n}{\| e_u^\sigma + \psi_n \|_r} \right\rangle_r \frac{\| \phi_{n-1} \|_r}{\| \phi_n \|_r}$$

$$= -\left\langle \frac{e_u^\sigma}{\| e_u^\sigma \|_r}, \frac{e_u^\sigma}{\| e_u^\sigma \|_r} \right\rangle_r |\lambda_u^\sigma - \sigma| = \lambda_u^\sigma - \sigma.$$

Agora, consideremos a fórmulação fraca de

$$\begin{cases} (T - \sigma I)\phi_n = \phi_{n-1} \quad \text{em} \quad (a,b), \\ \phi_n(a) = \phi_n(b) = 0, \end{cases}$$

isto é, a formulação fraca de

$$\begin{cases} \dfrac{1}{r}(-(p\phi_n')' + q\phi_n) - \sigma\phi_n = \phi_{n-1} \quad \text{em} \quad (a,b), \\ \phi_n(a) = \phi_n(b) = 0. \end{cases}$$

Na fórmulação fraca queremos encontrar $\phi_n \in H_0^1(I)$ tal que

$$\int_I p\phi_n' v' dx + \int_I q\phi_n v\, dx = \sigma \int_I \phi_n v r\, dx + \int_I \phi_{n-1} v r\, dx, \qquad \forall\ v \in H_0^1(I).$$

Em particular, se $v = \phi_n$, obtemos

$$\int_I p(\phi_n')^2 dx + \int_I q(\phi_n)^2\, dx = \sigma \int_I (\phi_n)^2 r\, dx + \int_I \phi_{n-1}\phi_n r\, dx.$$

Assim,

$$R(\phi_n) = \frac{\displaystyle\int_I p(\phi_n')^2\, dx + \int_I q(\phi_n)^2\, dx}{\displaystyle\int_I (\phi_n)^2 r\, dx} = \sigma + \frac{\displaystyle\int_I \phi_{n-1}\phi_n r\, dx}{\displaystyle\int_I (\phi_n)^2 r\, dx}$$

$$= \sigma + \frac{\langle \phi_{n-1}, \phi_n \rangle_r}{\| \phi_n \|_r^2} = \sigma + \left\langle \frac{\phi_{n-1}}{\| \phi_{n-1} \|_r}, \frac{\phi_n}{\| \phi_n \|_r} \right\rangle_r \frac{\| \phi_{n-1} \|_r}{\| \phi_n \|_r}.$$

Logo, pelo que já mostramos,

$$\lim_{n\to\infty} R(\phi_n) = \sigma + (\lambda_u^\sigma - \sigma) = \lambda_u^\sigma.$$

Agora, considerando

$$u_n = \left\langle u, \frac{\phi_n}{\| \phi_n \|_r} \right\rangle_r \frac{\phi_n}{\| \phi_n \|_r},$$

decorre de (d) e do Corolário 1.5 que

$$R(\phi_n) - \lambda_u^\sigma = R(u_n) - R(e_u^\sigma) = O(\|u_n - e_u^\sigma\|_r^2) = O\left(\left| \frac{\lambda_u^\sigma - \sigma}{\lambda_u^\tau - \sigma} \right|^{2n} \right).$$

□

1.5 Convergência uniforme da iteração inversa com deslocamento

Começamos a seção por estabelecer uma estimativa L^∞ para uma autofunção do operador de Sturm-Liouville, isto é, $e \in H_0^1(I)/\{0\}$ tal que

$$\int_I pe'v'dx + \int_I qev\,dx = \lambda \int_I evr\,dx, \quad \forall\ v \in H_0^1(I) \tag{1.16}$$

em que $p \in C^1(\overline{I})$, $q, r \in C(\overline{I})$ com $p \geq \alpha > 0$, $q \geq 0$ e $r > 0$ em I.

Lema 1.7. *Seja $e \in H_0^1(I)$ uma autofunção de T correspondente ao autovalor λ. Então*

$$\|e\|_\infty \leq 2^{3/2}\left(\frac{R\lambda - m}{\alpha r_m}\right)^{1/2}|I|^{1/2}\|e\|_r$$

em que $m = \min_{x\in I} p(x)$, $R = \max_{x\in I} r(x)$ e $r_m = \min_{x\in I} r(x)$.

Demonstração. Assumamos que a autofunção e seja positiva em algum ponto. Considerando $k \in \mathbb{R}^+$, seja $v_k(x) = \max\{e(x) - k, 0\}$ como função teste, temos que (1.16) transforma-se em

$$\int_{A_k} p(e')^2\,dx + \int_{A_k} qe(e-k)\,dx = \lambda \int_{A_k} e(e-k)r\,dx \tag{1.17}$$

em que $A_k = \{x \in I/e(x) > k\}$, de onde concluímos que $\|e\|_1 > k|A_k|$.

Então, dado $\epsilon > 0$, existe $k_1 = \|e\|_1/\epsilon > 0$ tal que

$$|A_k| < \frac{\|e\|_1}{k} \leq \epsilon, \qquad \text{se}\ \ k \geq \frac{\|e\|_1}{\epsilon}; \tag{1.18}$$

isto é, $|A_k| \to 0$ quando $k \to \infty$.

Agora, como $p(x) \geq \alpha > 0$ e $q \in C(\overline{I})$, existe $m = \min_{x\in I} q(x)$ e decorre de (1.17) que

$$\alpha \int_{A_k} (e')^2\,dx + m\int_{A_k} e(e-k)\,dx \leq \lambda\int_{A_k} e(e-k)r\,dx \leq R\lambda \int_{A_k} e(e-k)\,dx.$$

Assim,

$$\alpha \int_{A_k} (e')^2\,dx \leq (R\lambda - m)\int_{A_k} e(e-k)\,dx. \tag{1.19}$$

(Se $R\lambda = m$, decorre de (1.19) que $\alpha\|e'\|_2 \leq 0$. Como $\alpha > 0$, a desigualdade de Poincaré implica que $\|e\|_{H^1} = 0$, o que é uma contradição. Assim $R\lambda - m \neq 0$ e de (1.19) vem que $R\lambda - m > 0$.)

Pela desigualdade $a \leq 2(a-k) + 2k$ $(a \geq 0)$ temos

$$\int_{A_k} e(e-k)\,dx \leq 2\int_{A_k} (e-k)^2\,dx + 2k\int_{A_k} (e-k)\,dx. \tag{1.20}$$

Por outro lado a desigualdade de Sobolev (C.12), nos fornece

$$\int_{A_k} (e-k)^2\,dx \leq \left(\frac{|A_k|}{2}\right)^2 \int_{A_k} (e')^2\,dx$$

e da desigualdade (1.19) tem-se

$$\int_{A_k} (e-k)^2\,dx \leq \left(\frac{|A_k|}{2}\right)^2 \left(\frac{R\lambda - m}{\alpha}\right) \int_{A_k} e(e-k)\,dx.$$

Aplicando a desigualdade (1.20) obtemos

$$\int_{A_k} (e-k)^2\,dx \leq \frac{|A_k|^2}{2} \left(\frac{R\lambda - m}{\alpha}\right) \int_{A_k} (e-k)^2\,dx + k\frac{|A_k|^2}{2} \left(\frac{R\lambda - m}{\alpha}\right) \int_{A_k} (e-k)\,dx.$$

Como

$$\left[1 - \frac{|A_k|^2}{2} \left(\frac{R\lambda - m}{\alpha}\right)\right] \int_{A_k} (e-k)^2\,dx \leq k \left(\frac{R\lambda - m}{\alpha}\right) \frac{|A_k|^2}{2} \int_{A_k} (e-k)\,dx,$$

tomamos $|A_k|$ tal que

$$\left[1 - \frac{|A_k|^2}{2} \left(\frac{R\lambda - m}{\alpha}\right)\right] \geq \delta \quad \text{para algum} \quad \delta > 0,$$

isto é,

$$|A_k| \leq \left[2(1-\delta)\left(\frac{\alpha}{R\lambda - m}\right)\right]^{1/2}.$$

Note que, por (1.18), isso acontece quando

$$k \geq \left(\frac{1}{2-2\delta}\right)^{1/2} \left(\frac{R\lambda - m}{\alpha}\right)^{1/2} \|u\|_1 = k_1.$$

Por conseguinte, para tal A_k, temos

$$\delta \int_{A_k} (e-k)^2\,dx \leq k \left(\frac{R\lambda - m}{\alpha}\right) \frac{|A_k|^2}{2} \int_{A_k} (e-k)\,dx \tag{1.21}$$

e aplicando a desigualdade de Hölder vem

$$\left(\int_{A_k} (e-k).1\,dx\right)^2 \leq \left(\int_{A_k} (e-k)^2\,dx\right)\left(\int_{A_k} 1\,dx\right)$$

e obtemos de (1.21) que

$$\frac{\delta}{|A_k|} \left(\int_{A_k} (e-k)\,dx\right)^2 \leq k \left(\frac{R\lambda - m}{\alpha}\right) \frac{|A_k|^2}{2} \int_{A_k} (e-k)\,dx$$

isto é,

$$\int_{A_k} (e-k)\,dx \leq \frac{k}{\delta} \left(\frac{R\lambda - m}{\alpha}\right) \frac{|A_k|^3}{2} \quad \text{para} \quad k \geq k_1. \tag{1.22}$$

A última desigualdade é necessária para limitar o supremo essencial de u. Com efeito, escrevendo

$$f(k) = \int_{A_k} (e-k)\,dx = \int_k^\infty |A_t|\,dt,$$

notemos que f é decrecente e que $f'(k) = -|A_k|$; desse modo, a desigualdade (1.22) pode ser escrita como

$$f(k) \leq \frac{k}{2\delta}\left(\frac{R\lambda - m}{\alpha}\right)(f'(k))^3$$

e, assim,

$$k^{-1/3} \leq -\left(\frac{1}{2\delta}\right)^{1/3}\left(\frac{R\lambda - m}{\alpha}\right)^{1/3}(f'(k)f(k)^{-1/3}).$$

Integrando, obtemos

$$\int_{k_1}^k x^{-1/3}\,dx \leq -\left(\frac{1}{2\delta}\right)^{1/3}\left(\frac{R\lambda - m}{\alpha}\right)^{1/3}\int_{k_1}^k f(x)^{-1/3}f'(x)\,dx$$

isto é,

$$\left[\frac{3}{2}x^{2/3}\right]_{k_1}^k \leq -\left(\frac{1}{2\delta}\right)^{1/3}\left(\frac{R\lambda - m}{\alpha}\right)^{1/3}\left[\frac{3}{2}f(x)^{2/3}\right]_{k_1}^k.$$

Assim,

$$k^{2/3} - k_1^{2/3} \leq \left(\frac{1}{2\delta}\right)^{1/3}\left(\frac{R\lambda - m}{\alpha}\right)^{1/3}(f(k_1)^{2/3} - f(k)^{2/3}).$$

Como $f(k_1) \leq f(0) = \|u\|_1$ e $f(k) \geq 0$, temos

$$k \leq \left(\frac{1}{2}\right)^{1/2}\left[\left(\frac{1}{1-\delta}\right)^{1/3} + \left(\frac{1}{\delta}\right)^{1/3}\right]^{3/2}\left(\frac{R\lambda - m}{\alpha}\right)^{1/2}\|u\|_1.$$

Como a função

$$\omega(x) = \left(\left(\frac{1}{1-x}\right)^{1/3} + \left(\frac{1}{x}\right)^{1/3}\right)^{3/2}$$

possui um mínimo em $x = 1/2$ (pois ω' se anula nesse ponto), fazemos $\delta = 1/2$ e obtemos

$$|A_k| \leq \left(\frac{\alpha}{R\lambda - m}\right)^{1/2} \quad \text{em que} \quad k \geq \left(\frac{R\lambda - m}{\alpha}\right)^{1/2}\|e\|_1 = k_1.$$

Uma vez que $\|e\|_\infty = \inf\{k \geq 0 : \mu\{|e| > k\} = 0\}$, temos

$$\|e\|_\infty \leq 2^{3/2}\left(\frac{R\lambda - m}{\alpha}\right)^{1/2}\|e\|_1$$

e, pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\|e\|_\infty \leq 2^{3/2}\left(\frac{R\lambda - m}{\alpha}\right)^{1/2}|I|^{1/2}\|e\|_2.$$

Finalmente, usando a equivalência das normas $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_r$, obtemos

$$\|e\|_\infty \leq 2^{3/2}\left(\frac{R\lambda - m}{\alpha r_m}\right)^{1/2}|I|^{1/2}\|e\|_r.$$

□

No próximo lema, mostraremos que a convergência de uma série formada pelos autovalores λ_u^j que aparecem na decomposição espectral de uma função $u \in L_r^2(I)$ depende da convergência da série do Teorema A.12 d). Note que diferentemente do Apêndice A, a base $(e_k)_k$ não precisa ser ortonormal.

Lema 1.8. *Dada a sequência ortogonal $(e_k)_k \subset H_0^1(I)$ de L_r^2 formada pelas autofunções do operador T e sendo λ_k seus respectivos autovalores, então a série*

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j^2}$$

é convergente.

Demonstração. De acordo com o Corolário A.7, se $Te_j = \lambda_j e_j$, então

$$e_j(x) = \langle \lambda_j e_j, G(x,.)\rangle_r\,. \tag{1.23}$$

Agora, como a função de Green $G(x,.)$ é um elemento de $C_{L_r^2}[a,b]$, aplicando a desigualdade de Bessel à sequência ortonormal $(e_j/\|e_j\|_r)_j$ de $L_r^2[a,b]$, obtemos

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|\left\langle G(x,.),\frac{e_j}{\|e_j\|_r}\right\rangle_r\right|^2 \leq \|G(x,.)\|_r^2.$$

Multiplicando por $r(x)$ e integrando com respeito a x (note que $\|G(x,.)\|_r^2$ permite a aplicação do Teorema da Convergência Dominada), por (1.23) obtemos

$$\begin{aligned}\int_a^b \|G(x,.)\|_r^2\, r(x)\,dx &\geq \int_a^b \sum_{j=1}^{\infty}\left|\left\langle G(x,.),\frac{e_j}{\|e_j\|_r}\right\rangle_r\right|^2 r(x)\,dx\\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\|e_j\|_r^2}\int_a^b \left|\langle G(x,.),e_j\rangle_r\right|^2 r(x)\,dx\\ &= \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\|e_j\|_r^2}\int_a^b \frac{|e_j(x)|^2}{\lambda_j^2}\, r(x)\,dx = \sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j^2}.\end{aligned}$$

Daí, como G é contínua, obtemos a convergência da série:

$$\sum_{j=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_j^2} \leq \int_a^b \|G(x,.)\|_r^2\, r(x)\,dx = \int_a^b\int_a^b |G(x,\sigma)|^2 r(\sigma) r(x)\,d\sigma\,dx < \infty.$$

□

Lema 1.9. *Sendo* $R = \max_I r(x)$, $m = \min_I q(x)$, *a convergência da série*

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$$

implica que a série

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(R\lambda_u^j - m)^{1/2}}{|\lambda_u^j - \sigma|^{7/2}} \tag{1.24}$$

também é convergente.

Demonstração. Sendo $m \geq 0$, temos

$$\frac{(R\lambda_u^j - m)^{1/2}}{|\lambda_u^j - \sigma|^{3+1/2}} \leq \frac{(R\lambda_u^j)^{1/2}}{|\lambda_u^j - \sigma|^{3+1/2}}.$$

Basta, portanto, provar a convergência de

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{(\lambda_u^j)^{1/2}}{|\lambda_u^j - \sigma|^{3+1/2}}.$$

Uma vez que $\{\lambda_u^j\}_{j\in\mathbb{N}} \subset \{\lambda_j\}_{j\in\mathbb{N}}$, temos

$$\sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{(\lambda_u^j)^2} \leq \sum_{j=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_j^2}$$

e é suficiente mostrar que

$$\frac{(\lambda_u^j)^{1/2}}{|\lambda_u^j - \sigma|^{3+1/2}} \leq \frac{1}{(\lambda_u^j)^2}$$

para todo j suficientemente grande. Para isso, defina $f : (\sigma, +\infty) \to \mathbb{R}$ por

$$f(t) = \left(\frac{t}{t-\sigma}\right)^{2+1/2}.$$

Como f é decrescente, existe $t_0 > \sigma$ tal que

$$f(t) < t - \sigma, \qquad \forall\ t > t_0.$$

Uma vez que $\lambda_u^j \to \infty$, existe j_0 tal que

$$|\lambda_u^j - \sigma| = \lambda_u^j - \sigma \quad \forall j \geq j_0.$$

Assim, se j for suficientemente grande, temos

$$\frac{(\lambda_u^j)^{2+1/2}}{|\lambda_u^j - \sigma|^{2+1/2}} = \frac{(\lambda_u^j)^{2+1/2}}{(\lambda_u^j - \sigma)^{2+1/2}} = f(\lambda_u^j) < \lambda_u^j - \sigma = |\lambda_u^j - \sigma|,$$

o que implica a desigualdade

$$\frac{(\lambda_u^j)^{1/2}}{|\lambda_u^j - \sigma|^{3+1/2}} \leq \frac{1}{(\lambda_u^j)^2}, \quad \forall\ j \geq j_0.$$

Concluímos a convergência da série (1.24). □

Agora, para provar a convergência uniforme da sequência de iteração inversa $(\phi_n)_{n\in\mathbb{N}}$, usamos (1.12) e escrevemos

$$\frac{\phi_n}{\|\phi_n\|_\infty} = \frac{|\lambda_u^\sigma - \sigma|^n}{(\lambda_u^\sigma - \sigma)^n}\frac{(e_u^\sigma + \psi_n)}{\|e_u^\sigma + \psi_n\|_\infty} = \pm\frac{e_u^\sigma + \psi_n}{\|e_u^\sigma + \psi_n\|_\infty} \tag{1.25}$$

em que o sinal depende de n e do deslocamento ser tomado antes ou depois do autovalor.

Lema 1.10. *A desigualdade*

$$\|\psi_n\|_\infty \leq K\left|\frac{\lambda_u^\sigma - \sigma}{\lambda_u^\tau - \sigma}\right|^{n-7/2}$$

é valida para todo n suficientemente grande e uma constante positiva $K = K(u, I, |\lambda_u^\sigma - \sigma|)$. Em particular, $\psi_n \to 0$ uniformemente em $\overline{I}$ com taxa exponencial.

Demonstração. De (1.13) e do Lema 1.7 vem que

$$|\psi_n| = \sum_{|\lambda_u^j - \sigma| > |\lambda_u^\sigma - \sigma|}\left|\frac{\lambda_u^\sigma - \sigma}{\lambda_u^j - \sigma}\right|^n |e_u^j| \leq 2^{3/2}|I|^{1/2}\sum_{|\lambda_u^j - \sigma| > |\lambda_u^\sigma - \sigma|}\left|\frac{\lambda_u^\sigma - \sigma}{\lambda_u^j - \sigma}\right|^n\left(\frac{R\lambda_u^j - m}{\alpha r_m}\right)^{1/2}\|u\|_r.$$

Logo, usando (1.15)

$$\sum_{|\lambda_u^j - \sigma| > |\lambda_u^\sigma - \sigma|}\left|\frac{\lambda_u^\sigma - \sigma}{\lambda_u^j - \sigma}\right|^n\left(\frac{R\lambda_u^j - m}{\alpha r_m}\right)^{1/2} = \frac{|\lambda_u^\sigma - \sigma|^{7/2}}{(\alpha r_m)^{1/2}}\sum_{|\lambda_u^j - \sigma| > |\lambda_u^\sigma - \sigma|}\frac{(R\lambda_u^j - m)^{1/2}}{|\lambda_u^j - \sigma|^{7/2}}\left|\frac{\lambda_u^\sigma - \sigma}{\lambda_u^j - \sigma}\right|^{n-7/2}$$

$$\leq \frac{|\lambda_u^\sigma - \sigma|^{7/2}}{(\alpha r_m)^{1/2}}\left|\frac{\lambda_u^\sigma - \sigma}{\lambda_u^\tau - \sigma}\right|^{n-7/2}\sum_{|\lambda_u^j - \sigma| > |\lambda_u^\sigma - \sigma|}\frac{(R\lambda_u^j - m)^{1/2}}{|\lambda_u^j - \sigma|^{7/2}}.$$

De acordo com o Lema 1.9, a última série converge, de modo que temos o desejado com

$$|\psi_n| \leq \left(2^{3/2}|I|^{1/2}\|u\|_r\frac{|\lambda_u^\sigma - \sigma|^{7/2}}{(\alpha r_m)^{1/2}}\sum_{|\lambda_u^j - \sigma| > |\lambda_u^\sigma - \sigma|}\frac{(R\lambda_u^j - m)^{1/2}}{|\lambda_u^j - \sigma|^{7/2}}\right)\left|\frac{\lambda_u^\sigma - \sigma}{\lambda_u^\tau - \sigma}\right|^{n-7/2}$$

isto é, $\psi_n \to 0$ uniformemente em $\overline{I}$. □

Teorema 1.11. *Seja $u \in L_r^2(I)$, então*

(a) *Existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que se $n \geq n_0$*

$$\left\|\frac{e_u^\sigma + \psi_n}{\|e_u^\sigma + \psi_n\|_\infty} - \frac{e_u^\sigma}{\|e_u^\sigma\|_\infty}\right\|_\infty \leq \frac{4}{\|e_u^\sigma\|_\infty}\|\psi_n\|_\infty.$$

Em particular

$$\frac{e_u^\sigma + \psi_n}{\|e_u^\sigma + \psi_n\|_\infty} \to \frac{e_u^\sigma}{\|e_u^\sigma\|_\infty}$$

uniformemente em I com taxa exponencial.

(b)

$$\frac{\| \phi_n \|_\infty}{\| \phi_{n+1} \|_\infty} \to |\lambda_u^\sigma - \sigma|.$$

(c)

$$\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} \to \lambda_u^\sigma - \sigma$$

uniformemente em todo compacto $\mathfrak{K} \subset\subset$ *supp* e_u^σ *com taxa exponencial.*

(d)

$$\left(\int_I u \frac{\phi_n}{\| \phi_n \|_r} r\, dx\right) \frac{\phi_n}{\| \phi_n \|_r} \to e_u^\sigma$$

uniformemente em I.

Demonstração. (a) Como $\psi_n \to 0$ uniformemente, então dado $\epsilon = \frac{1}{2}\|e_u^\sigma\|_\infty > 0$ temos que existe $n_0 \in \mathbb{N}$ tal que

$$\|\psi_n\|_\infty \leq \frac{1}{2}\|e_u^\sigma\|_\infty$$

para todo $n \geq n_0$, o que implica que

$$\frac{1}{2}\|e_u^\sigma\|_\infty = \|e_u^\sigma\|_\infty - \frac{1}{2}\|e_u^\sigma\|_\infty \leq (\|e_u^\sigma + \psi_n\|_\infty + \|\psi_n\|_\infty) - \|\psi_n\|_\infty = \|e_u^\sigma + \psi_n\|_\infty$$

e daí

$$\left\| \frac{e_u^\sigma + \psi_n}{\|e_u^\sigma + \psi_n\|_\infty} - \frac{e_u^\sigma}{\|e_u^\sigma\|_\infty} \right\|_\infty = \left\| \frac{\|e_u^\sigma\|_\infty (e_u^\sigma + \psi_n) - e_u^\sigma \|e_u^\sigma + \psi_n\|_\infty}{\|e_u^\sigma + \psi_n\|_\infty \|e_u^\sigma\|_\infty} \right\|_\infty$$

$$\leq \left\| \frac{e_u^\sigma(\|e_u^\sigma\|_\infty - \|e_u^\sigma + \psi_n\|_\infty) + \|e_u^\sigma\|_\infty \psi_n}{(1/2)\|e_u^\sigma\|_\infty^2} \right\|_\infty \leq 2\frac{\|e_u^\sigma\|_\infty \|\psi_n\|_\infty + \|e_u^\sigma\|_\infty \|\psi_n\|_\infty}{\|e_u^\sigma\|_\infty^2}.$$

Portanto, temos

$$\left\| \frac{e_u^\sigma + \psi_n}{\|e_u^\sigma + \psi_n\|_\infty} - \frac{e_u^\sigma}{\|e_u^\sigma\|_\infty} \right\|_\infty \leq \frac{4}{\|e_u^\sigma\|_\infty}\|\psi_n\|_\infty$$

e a conclusão segue-se do Lema 1.10.

(b) De (1.12) temos que

$$\frac{\|\phi_n\|_\infty}{\|\phi_{n+1}\|_\infty} = |\lambda_u^\sigma - \sigma| \frac{\|e_u^\sigma + \psi_n\|_\infty}{\|e_u^\sigma + \psi_{n+1}\|_\infty}.$$

então decorre do Lema 1.10 que

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\|\phi_n\|_\infty}{\|\phi_{n+1}\|_\infty} = |\lambda_u^\sigma - \sigma|.$$

(c) Seja $\mathfrak{K} \subset\subset$ *supp* e_u^σ um compacto e

$$M = \min_{\mathfrak{K}} |e_u^\sigma| > 0.$$

Dado $\epsilon = M/2 > 0$, temos

$$\|\psi_n\|_\infty < M/2 \quad \text{para todo} \quad n \geq n_0.$$

Desta maneira, se $n \geq n_0$, em $\mathfrak{K}$ vale

$$|e_u^\sigma + \psi_n| \geq |e_u^\sigma| - |\psi_n| \geq M - \|\psi_n\|_\infty > M/2.$$

Assim, temos que $(e_u^\sigma + \psi_n)(x) \neq 0$ para cada $x \in \mathfrak{K}$, o que implica que o quociente

$$\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} = (\lambda_u^\sigma - \sigma)\frac{e_u^\sigma + \psi_n}{e_u^\sigma + \psi_{n+1}}$$

está bem definido em $\mathfrak{K}$ para todo n suficientemente grande e vale

$$\begin{aligned}
\left|\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} - (\lambda_u^\sigma - \sigma)\right| &= |\lambda_u^\sigma - \sigma|\left|\frac{e_u^\sigma + \psi_n}{e_u^\sigma + \psi_{n+1}} - 1\right| \\
&= |\lambda_u^\sigma - \sigma|\left|\frac{\psi_n - \psi_{n-1}}{e_u^\sigma + \psi_{n+1}}\right| \leq 2\frac{|\lambda_u^\sigma - \sigma|}{M}|\psi_n - \psi_{n+1}| \quad \text{em } \mathfrak{K}.
\end{aligned}$$

Decorre do Lema 1.10 a conclusão:

$$\left\|\frac{\phi_n}{\phi_{n+1}} - (\lambda_u^\sigma - \sigma)\right\|_\infty \leq 2\frac{|\lambda_u^\sigma - \sigma|}{M}\|\psi_n - \psi_{n+1}\|_\infty \to 0.$$

(d) Escrevemos

$$\frac{\phi_n}{\|\phi_n\|_r}\int_I u\frac{\phi_n}{\|\phi_n\|_r} r\,dx = \left(\frac{\|\phi_n\|_\infty}{\|\phi_n\|_r}\right)^2 \frac{\phi_n}{\|\phi_n\|_\infty}\int_I u\frac{\phi_n}{\|\phi_n\|_\infty}\,dx.$$

Como

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|\phi_n\|_\infty}{\|\phi_n\|_r} = \lim_{n\to\infty}\frac{\|e_u^\sigma + \psi_n\|_\infty}{\|e_u^\sigma + \psi_n\|_r}$$

e

$$\frac{\|e_u^\sigma\|_\infty - \|\psi_n\|_\infty}{\|e_u^\sigma\|_r + \|\psi_n\|_r} \leq \frac{\|e_u^\sigma + \psi_n\|_\infty}{\|e_u^\sigma + \psi_n\|_r} \leq \frac{\|e_u^\sigma\|_\infty + \|\psi_n\|_\infty}{\|e_u^\sigma\|_r - \|\psi_n\|_r}$$

então decorre de (1.25)

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\|\phi_n\|_\infty}{\|\phi_n\|_r} = \frac{\|e_u^\sigma\|_\infty}{\|e_u^\sigma\|_r}.$$

Aplicando (a), vem

$$\frac{\phi_n}{\|\phi_n\|_\infty}\int_I u\frac{\phi_n}{\|\phi_n\|_\infty} r\,dx = \frac{e_u^\sigma + \psi_n}{\|e_u^\sigma + \psi_n\|_\infty}\int_I u\frac{e_u^\sigma + \psi_n}{\|e_u^\sigma + \psi_n\|_\infty} r\,dx \to \frac{e_u^\sigma}{\|e_u^\sigma\|_\infty}\int_I u\frac{e_u^\sigma}{\|e_u^\sigma\|_\infty} r\,dx$$

uniformemente em I, o que implica que a expressão

$$\frac{\phi_n}{\|\phi_n\|_r}\int_I u\frac{\phi_n}{\|\phi_n\|_r} r\,dx$$

converge a

$$\left(\frac{\|e_u^\sigma\|_\infty}{\|e_u^\sigma\|_r}\right)^2 \frac{e_u^\sigma}{\|e_u^\sigma\|_\infty}\int_I u\frac{e_u^\sigma}{\|e_u^\sigma\|_\infty} r\,dx = \frac{e_u^\sigma}{\|e_u^\sigma\|_r^2}\int_I u e_u^\sigma r\,dx = e_u^\sigma. \qquad \square$$

APÊNDICE A

Conceitos Básicos

Neste apêndice veremos algumas noções básicas da teoria de Sturm-Liouville, utilizadas em nosso trabalho.

A.1 Problema de Sturm-Liouville

Consideremos a equação diferencial

$$-(p(x)u')' + [q(x) - \lambda r(x)]u = f(x) \tag{A.1}$$

no intervalo $[a, b]$, onde $p \in C^1([a, b], \mathbb{R}^+)$, $r \in C([a, b], \mathbb{R}^+)$ e $q \in C[a, b]$, com condições de fronteira

$$\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0, \qquad \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0, \tag{A.2}$$

em que $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ e β_2 são reais tais que

$$\alpha_1^2 + \alpha_2^2 > 0 \qquad \text{e} \qquad \beta_1^2 + \beta_2^2 > 0.$$

Definição A.1. *O* ***problema de Sturm-Liouville não homogêneo*** *consiste em encontrar uma função $u : [a, b] \to \mathbb{R}$ de classe C^2 que satisfaz* (A.1) *e* (A.2).

A esse problema está naturalmente associado o **problema de Sturm-Liouville homogêneo** (ou problema do autovalor)

$$-(p(x)u')' + [q(x) - \lambda r(x)]u = 0 \quad \text{com condições de fronteira} \quad (A.2), \tag{A.3}$$

e também o problema

$$-(p(x)u')' + q(x)u = f(x) \quad \text{com condições de fronteira} \quad (A.2), \tag{A.4}$$

cujo estudo será muito importante para os nossos propósitos.

A partir de agora, ao mencionarmos o problema de Sturm-Liouville, estaremos nos referindo ao caso *homogêneo*, com exceções sendo especificadas. Para abordar os problemas (A.3) e (A.4), consideraremos o espaço de Hilbert $L^2[a,b]$ munido do produto interno

$$\langle u, v\rangle_r \ = \int_a^b u(t)v(t)r(t)dt.$$

Com esse produto interno obtemos um novo espaço de Hilbert, que será denotado por $L_r^2[a,b]$. Nesse espaço consideramos o operador $L : D(L) \subset L_r^2(a,b) \to L_r^2(a,b)$, definido por

$$Lu = \frac{1}{r}(-(pu')' + qu)$$

cujo dominio $D(L)$ é dado por

$$D(L) = \{u \in C^2[a,b] \ : \ \text{u satisfaz (A.2)}\}.$$

Observe que $D(L)$ é um subespaço vetorial de $C_{L_r^2}[a,b]$, isto é, do subespaço das funções contínuas contidas em $L_r^2[a,b]$. Assim o problema (A.3) escreve-se como $Lu = \lambda u$, justificando a denominação de problema de autovalor:

Definição A.2. *Os* ***autovalores do problema de Sturm-Liouville*** *são os escalares* $\lambda \in \mathbb{R}$ *para os quais existe uma solução não trivial* u *da equação*

$$Lu = \lambda u.$$

Vejamos que os autovalores do problema (A.3) são simples:

Proposição A.3. *Sejam* u_1 *e* u_2 *duas soluções do problema* (A.3)[1] *associadas ao mesmo autovalor* λ*. Se* $W(u_1,u_2)(x)$ *denota o* Wronskiano *das soluções* u_1 *e* u_2

$$W(u_1,u_2)(x) = u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x)$$

então existe uma constante C *tal que*

$$p(x)W(u_1,u_2)(x) = C, \quad \forall\, x \in [a,b]. \tag{A.5}$$

Em particular, o autoespaço associado a cada autovalor do problema de Sturm-Liouville é unidimensional.

Demonstração. Ao derivar a expressão (A.5) obtemos

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)W(u_1,u_2)(x)\right] = \frac{d}{dx}\Big[p(x)\Big(u_1(x)u_2'(x) - u_1'(x)u_2(x)\Big)\Big]$$

[1]Basta que u_1 e u_2 ambas satisfazam (A.2) só no ponto a, ou só no ponto b.

$$\begin{aligned} &= u_1(x)\frac{d}{dx}\left[p(x)u_2'(x)\right] - u_2(x)\frac{d}{dx}\left[p(x)u_1'(x)\right] \\ &= u_1(x)\left[q(x)-\lambda r(x)\right]u_2(x) - u_2(x)\left[q(x)-\lambda r(x)\right]u_1(x) = 0. \end{aligned}$$

Portanto, $p(x)W(u_1,u_2)(x) = C$ para alguma constante C. O valor de C pode ser obtido no ponto $t = a$ de modo que $C = p(a)W(u_1,u_2)(a)$.

Uma vez que u_1 e u_2 satisfazem

$$\alpha_1 u_1(a) + \alpha_2 u_1'(a) = 0 \quad \text{e} \quad \alpha_1 u_2(a) + \alpha_2 u_2'(a) = 0$$

e esse sistema possui solução não trivial $(\alpha_1\,\alpha_2)^t$. Então $W(u_1,u_2)(a) = 0$ e isso implica que $C = 0$, mostrando que $W(u_1,u_2)(x) = 0$ para todo $x \in [a,b]$. Assim, as soluções u_1 e u_2 são linearmente dependentes, provando o afirmado. □

A.2 A função de Green

Nesta seção vamos a obter uma solução do problema (A.4) por meio de uma expressão integral.

Definição A.4. *Suponhamos que $\lambda = 0$ não seja autovalor do problema de Sturm-Liouville. Uma função de Green para o problema* (A.4) *é uma função $G : [a,b]\times(a,b) \to \mathbb{R}$ satisfazendo*

i) *$G(x,\sigma)$ é contínua*

ii) *$\frac{\partial G}{\partial x}(x,\sigma)$ é contínua em cada um dos triângulos $a \le x < \sigma \le b$ e $a \le \sigma < x \le b$ e satisfaz*

$$-\frac{\partial}{\partial x}\left[p(x)\frac{\partial G}{\partial x}(x,\sigma)\right] + q(x)G(x,\sigma) = 0, \quad \text{se} \quad x \in (a,\sigma)\cup(\sigma,b);$$

iii) $\alpha_1 G(a,\sigma) + \alpha_2 \frac{\partial G}{\partial x}(a,\sigma) = 0, \quad \beta_1 G(b,\sigma) + \beta_2 \frac{\partial G}{\partial x}(b,\sigma) = 0 \quad \forall\, \sigma \in (a,b)$

iv) $\frac{\partial G}{\partial x}(\sigma^+,\sigma) - \frac{\partial G}{\partial x}(\sigma^-,\sigma) = -\frac{1}{p(\sigma)}, \quad \forall\, \sigma \in (a,b)$

em que σ^+ e σ^- são os limites laterais à direita e à esquerda do ponto σ, respectivamente.

Notemos que de existir, a função de Green é única, com efeito, se duas funções G_1 e G_2 satisfazem *i*), *ii*), e *iii*) então ambas são soluções do problema homogêneo associado a (A.4) e pelo mesmo argumento usado na proposição A.3, concluímos que G_1 e G_2 são linearmente dependentes, isto é, que existe uma constante k tal que $G_1(x,\sigma) = kG_2(x,\sigma)$, para σ fixo. Logo, como G_1 e G_2 também satisfazem *iv*), temos que $k = 1$, provando assim que $G_1 = G_2$.

Veremos agora um resultado que exibe uma forma explícita para essa função.

Teorema A.5. *Suponhamos que $\lambda = 0$ não seja autovalor do problema de Sturm-Liouville. Sejam u_1 e u_2 funções reais não nulas satisfazendo*

$$-(pu_i')' + qu_i = 0, \quad i = 1, 2$$

$$u_1(a) = \alpha_2, \quad u_1'(a) = -\alpha_1, \qquad u_2(b) = -\beta_2, \quad u_2'(b) = \beta_1.$$

Então a função

$$G(x,\sigma) = \begin{cases} -\dfrac{u_1(x)u_2(\sigma)}{p(\sigma)W(u_1,u_2)(\sigma)}, & se \quad x \in [a,\sigma), \\ -\dfrac{u_1(\sigma)u_2(x)}{p(\sigma)W(u_1,u_2)(\sigma)}, & se \quad x \in (\sigma,b], \end{cases}$$

é a função de Green do problema (A.4). *Além disso, a função de Green é simétrica:*

$$G(x,\sigma) = G(\sigma,x).$$

Demonstração. Vamos a construir a função de Green para o problema não homogêneo (A.4). Para isso notamos que as funçoẽs u_1 e u_2 existem, de acordo com o Teorema de Existência e Unicidade para problemas de valor inicial. Temos que u_1 e u_2 são linearmente independentes: se fosse $u_1 = ku_2$ então u_1 sería uma solução não nula de

$$\begin{gathered} -(pu')' + qu = 0, \\ \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0, \qquad \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0, \end{gathered} \tag{A.6}$$

e assim $\lambda = 0$ seria autovalor do problema de Sturm-Liouville.

No intervalo $[a,\sigma)$ a função G é solução do problema (A.6). Logo para cada $\sigma \in (a,b)$ fixo, $G(x,\sigma)$ é um múltiplo de $u_1(x)$ no intervalo $[a,\sigma)$. Da mesma forma, $G(x,\sigma)$ é um múltiplo de $u_2(x)$ no intervalo $(\sigma,b]$. Logo

$$\begin{cases} G(x,\sigma) = \lambda(\sigma)u_1(x) =: G_1(x,\sigma), & a \le x < \sigma \\ G(x,\sigma) = \mu(\sigma)u_2(x) =: G_2(x,\sigma), & \sigma < x \le b. \end{cases}$$

Uma vez que, por definição, G é contínua, devemos ter $G_1(\sigma^-,\sigma) = G_2(\sigma^+,\sigma)$ ou seja $\lambda(\sigma)u_1(\sigma) = \mu(\sigma)u_2(\sigma)$. Agora por iv) temos que

$$\mu(\sigma)u_2'(\sigma) - \lambda(\sigma)u_1'(\sigma) = -\frac{1}{p(\sigma)}.$$

A forma matricial desse sistema é dado por

$$\begin{pmatrix} u_1 & u_2 \\ u_1' & u_2' \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \lambda \\ -\mu \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ \frac{1}{p(\sigma)} \end{pmatrix}$$

cuja solução pode ser encontrada pela Regra de Cramer, pois $W(u_1, u_2)(x) \neq 0$. Obtemos

$$G(x,\sigma) = \begin{cases} -\dfrac{u_1(x)u_2(\sigma)}{p(\sigma)W(u_1,u_2)(\sigma)} = G_1(x,\sigma), & \text{se} \quad x \in [a,\sigma) \\ -\dfrac{u_1(\sigma)u_2(x)}{p(\sigma)W(u_1,u_2)(\sigma)} = G_2(x,\sigma), & \text{se} \quad x \in (\sigma,b]. \end{cases}$$

De maneira análoga á proposição A.3 temos que a função $p(x)W(u_1, u_2)(x)$ é constante, assim

$$p(x)W(u_1,u_2)(x) = p(\sigma)W(u_1,u_2)(\sigma),$$

portanto a simetria da função de Green é imediata. $\square$

Os próximos resultados mostram a importância da função de Green.

Teorema A.6. *Suponha que $\lambda = 0$ não seja um autovalor do problema de Sturm-Liouville. Seja $G(x, \sigma)$ a função de Green do problema* (A.4). *Então o problema* (A.4) *possui solução única dada por*

$$u(x) = \int_a^b G(x,\sigma)f(\sigma)\,d\sigma = \langle f, G(x,.)\rangle_2. \tag{A.7}$$

Demonstração. Uma vez que

$$u(x) = \int_a^x G_2(x,\sigma)f(\sigma)d\sigma + \int_x^b G_1(x,\sigma)f(\sigma)d\sigma,$$

derivando essa igualdade, a continuidade de G garante que

$$\begin{aligned} u'(x) &= \int_a^x \frac{\partial G_2}{\partial x}(x,\sigma)f(\sigma)d\sigma + G_2(x,x^-)f(x^-) \\ &\quad + \int_x^b \frac{\partial G_1}{\partial x}(x,\sigma)f(\sigma)d\sigma - G_1(x,x^+)f(x^+) \\ &= \int_a^x \frac{\partial G_2}{\partial x}(x,\sigma)f(\sigma)d\sigma + \int_x^b \frac{\partial G_1}{\partial x}(x,\sigma)f(\sigma)d\sigma. \end{aligned}$$

Uma nova diferenciação produz

$$\begin{aligned} u''(x) &= \int_a^x \frac{\partial^2 G_2}{\partial x^2}(x,\sigma)f(\sigma)d\sigma + \frac{\partial G_2}{\partial x}(x,x^-)f(x^-) \\ &\quad + \int_x^b \frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2}(x,\sigma)f(\sigma)d\sigma - \frac{\partial G_1}{\partial x}(x,x^+)f(x^+) \\ &= \int_a^b \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,\sigma)f(\sigma)\,d\sigma + f(x)\left(\frac{\partial G_2}{\partial x}(x,x^-) - \frac{\partial G_1}{\partial x}(x,x^+)\right). \end{aligned} \tag{A.8}$$

Por outro lado, temos

$$\begin{aligned}
\frac{\partial G_2}{\partial x}(x,x^-) - \frac{\partial G_1}{\partial x}(x,x^+) &= \lim_{\sigma\to x^-}\frac{\partial G_2}{\partial x}(x,\sigma) - \lim_{\sigma\to x^+}\frac{\partial G_1}{\partial x}(x,\sigma)\\
&= \lim_{\sigma\to x^-}\left(-\frac{u_2'(x)u_1(\sigma)}{p(\sigma)W(u_1,u_2)(\sigma)}\right) - \lim_{\sigma\to x^+}\left(-\frac{u_1'(x)u_2(\sigma)}{p(\sigma)W(u_1,u_2)(\sigma)}\right).
\end{aligned}$$

Isto é,

$$\frac{\partial G_2}{\partial x}(x,x^-) - \frac{\partial G_1}{\partial x}(x,x^+) = \frac{u_1'(x)u_2(x) - u_2'(x)u_1(x)}{p(x)W(u_1,u_2)(x)} = -\frac{1}{p(x)},$$

substituindo em (A.8) temos,

$$u''(x) = \int_a^b \frac{\partial^2 G}{\partial x^2}(x,\sigma)f(\sigma)\,d\sigma - \frac{f(x)}{p(x)}.$$

Multiplicando as expressões de u, u' e u'' por q, $-p'$ e $-p$, respectivamente, e somando, vem

$$\begin{aligned}
-p(x)u'' - p'(x)u' + q(x)u &= \int_a^b \left(-\frac{\partial}{\partial x}[p(x)\frac{\partial G}{\partial x}(x,\sigma)] + q(x)G(x,\sigma)\right) f(\sigma)\,d\sigma + f(x)\\
&= f(x).
\end{aligned}$$

Obviamente, (A.7) satisfaz as condições de fronteira.

Logo, a hipótese de que $\lambda = 0$ não é autovalor do problema de Sturm-Liouville implica evidentemente que para todo $f \in C[a,b]$ o problema (A.4) tem no máximo uma solução. Assim, da unicidade da solução segue-se que a solução do problema (A.4) é necessáriamente da forma (A.7). □

Uma consequência imediata é dada pelo

Corolário A.7. *Suponha que $\lambda = 0$ não seja um autovalor do problema de Sturm-Liouville. Então o problema*

$$\begin{gathered}
\frac{1}{r}(-(pu')' + qu) = f\\
\alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0 \quad \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0
\end{gathered} \tag{A.9}$$

possui solução única dada por

$$u(x) = \int_a^b G(x,\sigma)f(\sigma)r(\sigma)\,d\sigma = \langle f, G(x,.)\rangle_r. \tag{A.10}$$

Desta maneira, podemos encontrar uma expresão para a inversa do operador de Sturm-Liouville L, que é dada pelo operador $S : D(S) \subset L_r^2 \to L_r^2$ definido por

$$Sy(x) = \int_a^b G(x,\sigma)y(\sigma)r(\sigma)\,d\sigma = \langle y, G(x,.)\rangle_r$$

no dominio $D(S) = \{y \in L^2_r(a,b) : y \in C[a,b]\}$.

Notemos que S é um operador linear e limitado. De fato, sabendo que $G(x,\sigma)$ é contínua, decorre da desigualdade de Cauchy-Schwarz que

$$\begin{aligned}
\|Sy\|_r^2 &= \int_a^b |Sy(x)|^2 r(x)\,dx = \int_a^b \left| \int_a^b (G(x,\sigma)r(\sigma)^{1/2}).(y(\sigma)r(\sigma)^{1/2})\,d\sigma \right|^2 r(x)\,dx \\
&\le \int_a^b \left(\int_a^b |G(x,\sigma)|^2 r(\sigma)\,d\sigma \right) \left(\int_a^b |y(\sigma)|^2 r(\sigma)\,d\sigma \right) r(x)\,dx \\
&\le \|y\|_r^2 \int_a^b \int_a^b |G(x,\sigma)|^2 r(\sigma) r(x)\,d\sigma\,dx,
\end{aligned}$$

provando que S é limitado e

$$\|S\| \le \left(\int_a^b \int_a^b |G(x,\sigma)|^2 r(\sigma) r(x)\,d\sigma\,dx \right)^{1/2}.$$

Além disso, temos que S é um operador compacto.

De fato, considere uma partição de $[a,b]$ com comprimento $(b-a)/n$ e seja I_i um dos intervalos dessa partição. Considere os quadrados $I_i \times I_i$, com $1 \le i,j \le n$. Como $G(x,\sigma) \in C([a,b] \times [a,b])$, então essa função pode ser aproximada (na norma L^2) por funções degrau

$$G_n(x,\sigma) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} \chi_{I_i \times I_i}(x,\sigma).$$

Afirmamos que o operador integral

$$(S_n y)(x) = \int_a^b G_n(x,\sigma) y(\sigma) r(\sigma)\,d\sigma$$

é uma combinação linear de um número finito de funções degrau na variável x.

De fato,

$$(S_n y)(x) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} \int_a^b \chi_{I_i \times I_i}(x,\sigma) y(\sigma) r(\sigma)\,d\sigma$$

com

$$\int_a^b \chi_{I_i \times I_i}(x,\sigma) y(\sigma) r(\sigma)\,d\sigma = \begin{cases} 0, & \text{se} \quad t \in I_i \\ \int_a^b y(\sigma) r(\sigma)\,d\sigma, & \text{se} \quad t \notin I_i \end{cases}$$

assim temos

$$(S_n y)(x) = \sum_{i,j=1}^{n} c_{ij} \left(\int_{I_j} y(\sigma) r(\sigma)\,d\sigma \right) \chi_{I_i}(x)$$

mostrando que S_n assume valores no espaço de combinações lineares das n funções degrau χ_{I_i}. Esse é um espaço de dimensão finita n. Logo, o operador S_n tem posto finito.

Uma vez que

$$\|(S - S_n)y\|_2^2 \le \|y\|_r^2 \left(\int_a^b \int_a^b |(G - G_n)(x,\sigma)|^2 r(\sigma) r(x)\,d\sigma\,dx \right) \to 0$$

quando $n \to \infty$, temos que $S = \lim_{n\to\infty} S_n$ é um operador compacto.

Proposição A.8. *Suponha que* 0 *não seja um autovalor do problema de Sturm-Liouville. Então* λ *é um autovalor de* L *com autofunção associada* u *se, e somente se,* λ^{-1} *for um autovalor de* S *com autofunção associada* u *. Além disso todos os autovalores do problema de Sturm-Liouville são reais.*

Demonstração. De acordo com o Teorema A.6, u é uma solução de $Lu(x) = \lambda u(x)$, isto é, solução de

$$\begin{gathered} -(p(x)u')' + q(x)u = \lambda r(x)u(x), \\ \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0, \qquad \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0 \end{gathered}$$

se, e somente se,

$$u(x) = \lambda \int_a^b G(x,\sigma)u(\sigma)r(\sigma)\, d\sigma = \lambda(Su)(x) \qquad \Rightarrow \qquad Su(x) = \frac{1}{\lambda}u(x).$$

De acordo com o Teorema de Fubini temos

$$\begin{aligned} \langle Su, v\rangle_r &= \int_a^b \left(\int_a^b G(x,\sigma)u(\sigma)r(\sigma)\, d\sigma\right) v(x)r(x)\, dx \\ &= \int_a^b u(\sigma)r(\sigma) \left(\int_a^b G(x,\sigma)v(x)r(x)\, dx\right) d\sigma \\ &= \int_a^b u(\sigma)r(\sigma)(Sv)(\sigma)\, d\sigma = \langle u, Sv\rangle_r, \end{aligned}$$

mostrando que S é simétrico. Portanto, S só tem autovalores reais. $\square$

Corolário A.9. *A função* u *é solução do problema de Sturm-Liouville não homogêneo*

$$\begin{gathered} -(p(x)u')' + [q(x) - \lambda r(x)]u = f(x) \\ \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0 \quad \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0 \end{gathered} \tag{A.11}$$

se, e somente se

$$u(x) = \lambda \int_a^b G(x,\sigma)r(\sigma)u(\sigma)\, d\sigma + \int_a^b G(x,\sigma)f(\sigma)\, d\sigma.$$

Demonstração. O Teorema A.6 nos garante que o problema

$$\begin{gathered} -(p(x)u')' + q(x)u = \lambda r(x)u(x) + f(x), \\ \alpha_1 u(a) + \alpha_2 u'(a) = 0, \quad \beta_1 u(b) + \beta_2 u'(b) = 0 \end{gathered}$$

tem solução dada por

$$u(x) = \int_a^b G(x,\sigma)[\lambda r(\sigma)u(\sigma) + f(\sigma)]\, d\sigma.$$

$\square$

A.3 Autovalores do problema de Sturm-Liouville

Como S é um operador compacto e simétrico, seus autovalores μ_n de S formam uma sequência de números reais tal que $|\mu_n| \to 0$. Desta maneira, pela Proposição A.8, o conjunto dos autovalores λ_n de L satisfaz $|\lambda_n| \to \infty$. Vamos mostrar que o conjunto dos autovalores do problema de Sturm-Liouville é limitado inferiormente.

Lema A.10. *Seja $u \in C^1_{L^2}([a,b],\mathbb{C})$. Para todo $x \in [a,b]$ tem-se*

$$|u(x)|^2 \leq \frac{1}{b-a}\|u\|_2^2 + 2\|u\|_2\|u'\|_2$$

Demonstração. Seja x_m o ponto do máximo da função real contínua $|u(x)|$. Temos então

$$\begin{aligned}
|u(x_m)|^2 - |u(x)|^2 &= u(x_m)\overline{u(x_m)} - u(x)\overline{u(x)} = \int_x^{x_m} \frac{d}{ds}[u(s).\overline{u(s)}]\,ds \\
&= \int_x^{x_m} u'(s)\overline{u(s)} + u(s)\overline{u'(s)}\,ds \\
&\leq 2\|u\|_2\|u'\|_2,
\end{aligned}$$

integrando, obtemos

$$\int_a^b |u(x_m)|^2\,dx - \int_a^b |u(x)|^2\,dx \leq 2\int_a^b \|u\|_2\|u'\|_2\,dx$$

e, daí,

$$|u(x_m)|^2(b-a) \leq 2(b-a)\|u\|_2\|u'\|_2 + \|u\|_2^2,$$

o que nos permite concluir que

$$|u(x)|^2 \leq |u(x_m)|^2 \leq \frac{1}{b-a}\|u\|_2^2 + 2\|u\|_2\|u'\|_2 \quad \forall\, x \in [a,b].$$

□

Teorema A.11. *O operador L é limitado inferiormente, isto é, existe um número real κ tal que*

$$\langle Lu, u\rangle_r \geq \kappa\|u\|_r^2, \quad \forall\, u \in D(L)$$

Em particular, L possui no máximo um número finito de autovalores negativos.

Demonstração. Afirmamos inicialmente que existem constantes $m_1 > 0$, m_2 e m_3 tais que

$$\langle Lu, u\rangle_r \geq m_1\|u'\|_2^2 + m_2\|u\|_2^2 + m_3\|u\|_2\|u'\|_2 \tag{A.12}$$

De fato, integrando por partes temos:

$$\begin{aligned}\langle Lu,u\rangle_r &= \int_a^b [-(p(x)u'(x))' + q(x)u(x)]u(x)\,dx = \int_a^b q(x)u(x)^2\,dx - \int_a^b (p(x)u'(x))'u(x)\,dx \\ &= \int_a^b q(x)u(x)^2\,dx - [p(x)u'(x)u(x)]_a^b + \int_a^b p(x)u'(x)u'(x)\,dx \\ &\geq q_m\|u\|_2^2 + p_m\|u'\|_2^2 - [p(x)u'(x)u(x)]_a^b\end{aligned}$$

em que $p_m > 0$ e q_m são os mínimos de p e q em $[a,b]$ respectivamente.

Vejamos o último termo, se tivermos condições de fronteira do tipo $u(a) = u(b) = 0$, a afirmação esta completa. Caso contrário, consideremos

$$u(a)u'(a) = -\frac{\alpha_1}{\alpha_2}|u(a)|^2,\ \alpha_2 \neq 0 \qquad u(b)u'(b) = -\frac{\beta_1}{\beta_2}|u(b)|^2,\ \beta_2 \neq 0.$$

De acordo com o Lema A.10, temos:

$$\begin{aligned}|p(a)u(a)u'(a)| &\leq p(a)\left|\frac{\alpha_1}{\alpha_2}\right|\left(\frac{\|u\|_2^2}{b-a} + 2\|u\|_2\|u'\|_2\right) \\ |p(b)u(b)u'(b)| &\leq p(b)\left|\frac{\beta_1}{\beta_2}\right|\left(\frac{\|u\|_2^2}{b-a} + 2\|u\|_2\|u'\|_2\right).\end{aligned}$$

Assim existem constantes positivas c_1, c_2, c_3 e c_4 tais que

$$\begin{aligned}p(a)u(a)u'(a) &\geq -c_1\|u\|_2^2 - c_2\|u\|_2\|u'\|_2, \\ -p(b)u(b)u'(b) &\geq -c_3\|u\|_2^2 - c_4\|u\|_2\|u'\|_2,\end{aligned}$$

isso completa a prova de (A.12).

Agora provemos que existe uma constante c tal que

$$m_1\|u'\|_2^2 + m_2\|u\|_2^2 + m_3\|u\|_2\|u'\|_2 \geq c\|u\|_2^2.$$

Para mostrar isso, considere a equação

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 \geq cy^2$$

em que $Ax^2 = m_1\|u'\|_2^2$, $Bxy = m_3\|u'\|_2\,\|u\|_2$ e $Cy^2 = m_2\|u\|_2^2$. Se $y = 0$, o resultado é trivial, caso contrário, dividindo por y^2 obtemos, para cada y fixo, a parábola,

$$\frac{A}{y^2}x^2 + \frac{B}{y}x + C$$

cujo vértice é $(By/2A, -(B^2 - 4AC)/4A)$. Como a parábola tem um ponto de mínimo nesse vértice ($A > 0$), que independe do valor de y, garantimos a existência de c:

$$Ax^2 + Bxy + Cy^2 \geq \frac{-(B^2 - 4AC)}{4A} = c.$$

Mostramos assim que

$$\langle Lu, u\rangle_r \geq c\|u\|_2^2.$$

Como as normas $\|\cdot\|_2$ e $\|\cdot\|_r$ são equivalentes, temos

$$\langle Lu, u\rangle_r \geq \kappa\|u\|_r^2, \quad \text{para} \quad \kappa = c.$$

Daí decorre que L possui, no máximo, um número finito de autovalores negativos. □

Apresentemos agora um resultado sobre as propriedades dos autovalores do operador de Sturm-Liouville e o desenvolvimento em autofunções de uma função dada.

Teorema A.12. *Suponhamos que $\lambda = 0$ não seja um autovalor do problema de Sturm-Liouville. Então*

(a) *Para $n \in \mathbb{N}$, suponhamos que a sequência de autofunções ε_n do problema de Sturm-Liouville com condições de fronteira seja normalizada no espaço $C_{L_r^2}[a,b]$, isto é, se*

$$\int_a^b |\varepsilon_n(x)|^2 r(x)\, dx = 1.$$

Então toda função $u \in D(L)$ (isto é, $u \in C_{L_r^2}[a,b]$ que satisfaz as condições de fronteira (A.2)) *tem desenvolvimento em série de autofunções:*

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \langle u, \varepsilon_n\rangle_r \varepsilon_n(x).$$

A série converge absoluta e uniformemente em $[a,b]$.

(b) *Cada autovalor λ_n é simples, isto é, o autoespaço associado ao autovalor λ_n é unidimensional e a sequência de autovalores pode ser ordenada como*

$$\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots < \lambda_n \to \infty.$$

(c) *O conjunto $\{\varepsilon_n : n \in \mathbb{N}\}$ é uma base ortonormal do espaço de Hilbert $L_r^2(a,b)$ e do espaço com produto interno $C_{L_r^2}[a,b]$.*

(d) *Os autovalores do problema de Sturm-Liouville* (A.3) *formam uma sequência infinita crescente de números reais com*

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty \qquad e \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n^2} < \infty.$$

(e) *Se $\lambda \neq \lambda_n$ para todo n, o problema* (A.11) *possui única solução u dada por*

$$u(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, \varepsilon_n\rangle_2}{\lambda - \lambda_n} \varepsilon_n(x)$$

sendo a série absoluta e uniformemente convergente em $[a,b]$.

(f) *Se $\lambda = \lambda_m$ para algum m, o problema* (A.11) *possui solução se, e somente se*

$$\langle f, \varepsilon_m \rangle_2 = \int_a^b f(x)\varepsilon_m(x)\, dx = 0.$$

Nesse caso a solução é dada por

$$u(x) = \sum_{n \neq m} \frac{\langle f, \varepsilon_n \rangle_2}{\lambda - \lambda_n} \varepsilon_n(x)$$

sendo a série absoluta e uniformemente convergente em $[a, b]$.

Demonstração. (a) Do Corolário A.7 temos que dado $u \in D(L)$ então

$$u(x) = \int_a^b G(x, \sigma) f(\sigma) r(\sigma)\, d\sigma = S(f)(x)$$

e por outro lado, do teorema espectral para operadores simétricos compactos (B.9) temos que existe uma sequência real $(\mu_n)_n$ formada pelos autovalores (que são não nulos) de S e uma sequência ε_n de suas autofunções correspondentes que formam um conjunto ortonormal tal que, para cada $f \in D(S) = C_{L_r^2}[a, b]$, temos

$$Sf = \sum_{n=0} \mu_n \langle f, \varepsilon_n \rangle_r \varepsilon_n$$

sendo que a série converge uniformemente. Então

$$u = \sum_{n=0} \mu_n \langle f, \varepsilon_n \rangle_r \varepsilon_n$$

e como S é simétrica, temos

$$\mu_n \langle f, \varepsilon_n \rangle_r = \langle f, \mu_n \varepsilon_n \rangle_r = \langle Lu, S\varepsilon_n \rangle_r = \langle u, \varepsilon_n \rangle_r.$$

Portanto

$$u = \sum_{n=0} \langle u, \varepsilon_n \rangle_r \varepsilon_n,$$

a série convergindo absoluta e uniformemente em $[a, b]$.

(b) Pela Proposição A.3 cada autovalor λ_n é simples; a Proposição A.8 garante que os autovalores são reais; e, do Teorema A.11, temos que os autovalores são limitados inferiormente. Como S é compacto, temos que seus autovalores μ_n forman uma sequência convergindo a 0. Assim, $\lambda_n = 1/\mu_n \to \infty$, e podemos ordená-los

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots \lambda_n \to \infty.$$

(c) Considere $\mathfrak{F}$ o espaço das combinações lineares finitas dos elementos $\{\varepsilon_n\}_n$, então por (a) e pelo teorema da base ortonormal (B.1), temos que $u \in D(L)$ satisfaz

$$u = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=0}^{m} \langle u, \varepsilon_k \rangle_r \varepsilon_k = \lim_{m \to \infty} \sum_{k=0}^{m} u_k \varepsilon_k = \lim_{m \to \infty} \omega_m, \quad \text{sendo} \quad (\omega_m) \subset \mathfrak{F},$$

mostrando que $\mathfrak{F}$ é denso em $D(L)$ (na norma de L_r^2). Como $D(L)$ é denso tanto em $C_{L_r^2}[a,b]$ como em $L_r^2(a,b)$ (na norma de L_r^2), $\mathfrak{F}$ é também denso nesses espaços. Assim o teorema (B.1) garante que todo elemento u em $C_{L_r^2}[a,b]$ ou $L_r^2(a,b)$ tem uma representação

$$u = \lim_{n\to\infty} \sum_{n=1}^{\infty} u_n \varepsilon_n,$$

provando o afirmado.

(d) Por (b) temos que $\lambda_n \to \infty$. Como $G \in C_{L_r^2}[a,b]$, decorre da desigualdade de Bessel que

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\langle G(x,.), \varepsilon_n\rangle_r|^2 \leq \|G(x,.)\|_r^2.$$

Aplicando o Corolário A.7 obtemos a desigualdade

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|^2 |\varepsilon_n(x)|^2 = \sum_{n=1}^{\infty} |S\varepsilon_n(x)|^2 \leq \int_a^b |G(x,\sigma)|^2 r(\sigma)\, d\sigma.$$

Integrando outra vez e usando o Teorema da Convergência Dominada vem

$$\sum_{n=1}^{\infty} |\mu_n|^2 \int_a^b |\varepsilon_n(x)|^2 r(x)\, dx \leq \int_a^b \int_a^b |G(x,\sigma)|^2 r(\sigma) r(x)\, d\sigma\, dx,$$

o que implica que

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|\frac{1}{\lambda_k}\right|^2 \leq \int_a^b \int_a^b |G(x,\sigma)|^2 r(\sigma) r(x)\, d\sigma\, dx < \infty,$$

já que G é contínua.

(e) De acordo com o Corolário A.9, a resolução do problema (A.11) é equivalente à resolução de

$$u(x) = \lambda (Su)(x) + \langle f, G(x,.)\rangle_2,$$

igualdade que pode ser escrita como

$$(\mu I - S)u = y$$

em que $\mu = 1/\lambda$ e $y(x) = \mu\langle f, G(x,.)\rangle_2 = \mu S(f/r)(x)$. Aplicando o Teorema B.10, temos que

$$u = (\mu I - S)^{-1} y = \frac{1}{\mu} y + \frac{1}{\mu} \sum_n \mu_n \frac{\langle y, \varepsilon_n\rangle_r}{\mu - \mu_n} \varepsilon_n,$$

e do teorema espectral para operadores simétricos compactos (B.9) vem que

$$y = \mu S\left(\frac{f}{r}\right) = \mu \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle \frac{f}{r}, \varepsilon_n\rangle_r \varepsilon_n = \mu \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle f, \varepsilon_n\rangle_2 \varepsilon_n.$$

Como

$$\langle y, \varepsilon_m\rangle_r = \mu \sum_n \mu_n \langle f, \varepsilon_n\rangle_2 \langle \varepsilon_n, \varepsilon_m\rangle_r = \mu\mu_m \langle f, \varepsilon_m\rangle_2,$$

obtemos que

$$u = \frac{1}{\mu}\left(\mu \sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \langle f, \varepsilon_n\rangle_2 \varepsilon_n\right) + \frac{1}{\mu}\sum_{n=1}^{\infty} \mu_n \frac{\mu\mu_n\langle f, \varepsilon_n\rangle_2}{\mu - \mu_n}\varepsilon_n$$

e assim

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}\langle f, \varepsilon_n\rangle_2 \varepsilon_n + \sum_{n=1}^{\infty}\left(\frac{1}{\lambda_n}\right)^2 \frac{\langle f, \varepsilon_n\rangle_2}{\frac{1}{\lambda} - \frac{1}{\lambda_n}}\varepsilon_n.$$

Portanto

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}\langle f, \varepsilon_n\rangle_2 \varepsilon_n + \lambda \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{\lambda_n}\frac{\langle f, \varepsilon_n\rangle_2}{\lambda_n - \lambda}\varepsilon_n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\langle f, \varepsilon_n\rangle_2}{\lambda_n - \lambda}\varepsilon_n,$$

sendo a série convergente absoluta e uniformemente em $[a, b]$.

(f) Seja $\mu u - Su = y$. Como S é simétrica, vemos que

$$\langle y, z\rangle_r = \langle \mu u, z\rangle_r - \langle Su, z\rangle_r = \langle u, \mu z\rangle_r - \langle u, Sz\rangle_r = \langle u, \mu z - Sz\rangle_r$$

e portanto para todo z temos que

$$Sz = \mu z \quad \Leftrightarrow \quad \langle y, z\rangle_r = 0.$$

$\Rightarrow$) Se $\lambda = \lambda_m$, então $\mu = \mu_m$ e por (e) temos

$$0 = \langle y, \varepsilon_m\rangle_r = \mu\mu_m\langle f, \varepsilon_m\rangle_2 \quad \Rightarrow \quad \langle f, \varepsilon_m\rangle_2 = 0.$$

$\Leftarrow$) Se $\langle f, \varepsilon_m\rangle_2 = 0$, então $\langle y, \varepsilon_m\rangle_r = 0$ e assim $S\varepsilon_m = \mu\varepsilon_m$. É imediato que todo elemento u da forma

$$u(x) = \sum_{n \neq m} \frac{\langle f, \varepsilon_n\rangle_2}{\lambda - \lambda_n}\varepsilon_n(x)$$

é uma solução de $(\mu I - S)u = y$. Com isso o teorema está provado. $\square$

APÊNDICE B

Espaços de Hilbert e Operadores Compactos

Neste apêndice incluímos alguns resultados básicos da teoria de espaços de Hilbert, cuja demonstração será omitida.

Teorema B.1 (da Base Ortonormal)**.** *Seja $\mathfrak{S} = \{e_i : i \in N\}$ um sistema ortonormal em um espaço com produto interno $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$. Denotemos por $\mathfrak{F}$ o espaço das combinações lineares dos elementos de $\mathfrak{S}$ e seja u_i o coeficiente de Fourier $\langle u, e_i \rangle$. As seguintes propriedades são equivalentes*

(a) *Para todo $u \in E$, temos*

$$u = \sum_{i=1}^{\infty} u_i e_i.$$

(b) *Para quaisquer $u, v \in E$, vale a identidade de Parseval*

$$\langle u, v \rangle = \sum_{i=1}^{\infty} u_i v_i.$$

(c) *Para todo $u \in E$ temos*

$$\|u\|^2 = \sum_{i=1}^{\infty} |u_i|^2.$$

(d) *Dado $\epsilon > 0$, para todo $u \in E$ existe $n \in \mathbb{N}$ tal que*

$$\left\| u - \sum_{i=1}^{\infty} u_i e_i \right\| < \epsilon.$$

Em particular, $\mathfrak{F}$ é denso em E.

(e) *Todo funcional linear contínuo $f : E \to \mathbb{K}$ que se anula em $\mathfrak{S}$ é identicamente nulo.*

Qualquer uma dessas propriedades implica:

(f) *O sistema $\{e_i : i \in N\}$ é maximal, isto é, não existe elemento $e \neq 0$ em E tal que $e \in S^{\perp}$.*

Se E for espaço de Hilbert, então as propriedades (a)-(f) *são equivalentes.*

Definição B.2. *Seja E um espaço com produto interno. Uma **base ortonormal** em E é um sistema ortonormal $\mathfrak{S}$ satisfazendo qualquer das propriedades equivalentes listadas no Teorema* B.1.

Teorema B.3. *Todo espaço de Hilbert separável H possui uma base ortonormal.*

A demonstração desses fatos pode ser vista em [6].

Teorema B.4 (Representação de Riesz)**.** *Sejam H um espaço de Hilbert e $H^\star$ seu dual. Então dado $\varphi \in H^\star$ existe um único $f \in H$ tal que*

$$\langle \varphi, u \rangle = \langle f, u \rangle \quad \forall\, u \in H.$$

Além disso, vale

$$|f| = ||\varphi||_{H^\star}.$$

A demonstração do Teorema de Representação de Riesz pode ser encontrada em Kreyszig [6].

Definição B.5. *Seja H um espaço de Hilbert. Uma forma bilinear $a : H \times H \to \mathbb{R}$ é*

(i) ***contínua**, se existe uma constante C tal que*

$$|a(u,v)| \leq C\|u\|\|v\|, \quad \forall\, u, v \in H;$$

(ii) ***coerciva**, se existe uma constante $\alpha > 0$ tal que*

$$a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2, \quad \forall\, v \in H.$$

Proposição B.6 (Lax-Milgram)**.** *Suponha que H seja um espaço de Hilbert e $a(u,v)$ uma forma bilinear continua e coerciva sobre H. Então, dado um $f \in H^\star$, existe um único elemento $u \in H$ tal que*

$$a(u,v) = \langle f, v \rangle \quad \forall\, v \in H.$$

Além disso, se a for simétrica, então u é determinada pela propriedade

$$u \in H \quad e \quad \frac{1}{2}a(u,u) - \langle f, u \rangle = \min_{v \in H} \left\{ \frac{1}{2}a(v,v) - \langle f, v \rangle \right\}.$$

Veja [3] para a demonstração desse resultado.

Definição B.7. *Seja T um operador linear sobre um espaço de Banach E. O* ***conjunto resolvente****, denotado por $\rho(T)$, é definido por*

$$\rho(T) = \{\lambda \in \mathbb{R} \,:\, (T - \lambda I) \ \text{ é bijetiva de } E \text{ em } E \text{ e } (T - \lambda I)^{-1} \text{ é contínua}\}.$$

O espectro de T, denotado por $\sigma(T)$, é o complemento do conjunto resolvente, isto é, $\sigma(T) = \mathbb{R} \setminus \rho(T)$.

Um número real λ é um autovalor de T se

$$N(T - \lambda I) = \{x \in E \,:\, (T - \lambda I)x = 0\} \neq \{0\},$$

sendo $N(T - \lambda I)$ o ***autoespaço*** *correspodente ao autovalor λ. O conjunto de todos os autovalores de T é denotado por $EV(T)$.*

Proposição B.8. *Seja T um operador compacto sobre um espaço de Banach E, com $dim(E) = \infty$. Então temos*

- $0 \in \sigma(T)$;
- $\sigma(T) \backslash \{0\} = EV(T)$;
- *um dos seguintes casos ocorre*
  - $\sigma(T) = \{0\}$,
  - $\sigma(T) \backslash \{0\}$ *é um conjunto finito,*
  - $\sigma(T) \backslash \{0\}$ *é uma sequência convergindo a* 0.

Para a prova desse fato veja [3].

Teorema B.9 (Teorema espectral dos operadores simetricos compactos)**.** *Seja $(E, \langle \cdot, \cdot \rangle)$ um espaço com produto interno e $T \neq 0$ um operador simétrico e compacto em E. Então existe uma sequência $\lambda_n \in \mathbb{R}$ de autovalores não nulos de T e uma sequência $\{e_n\}$ de autovetores correspondentes que formam uma base ortonormal para a imagem de T. Assim, para todo elemento $u \in E$ temos*

$$Tu = \sum_n \lambda_n u_n e_n \quad \text{com} \quad u_n = \langle u, e_n \rangle.$$

Se E for um espaço de Hilbert separável, então existe uma base ortonormal formada por autovetores de T.

Teorema B.10. *Sejam $(E, \langle\cdot,\cdot\rangle)$ um espaço produto interno e $T \neq 0$ um operador simétrico e compacto com autovalores não nulos $\{\lambda_n\} \subset \mathbb{R}$ e e_n a sequência de autovetores ortonormais associados. Dado $\lambda \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ tal que $\lambda \neq \lambda_n$, o operador $\lambda I - T$ possui inverso contínuo definido em E, dado por*

$$u = (\lambda I - T)^{-1} v = \frac{1}{\lambda} v + \frac{1}{\lambda} \sum_n \lambda_n \frac{v_n}{\lambda - \lambda_n} e_n, \quad v_n = \langle v, e_n \rangle.$$

A demonstração desses fatos pode ser vista em [5].

APÊNDICE C

Espaços de Sobolev

Enunciaremos alguns resultados básicos da teoria de espaços de Sobolev.

Sejam $I = (a, b)$ um intervalo aberto (estamos admitindo o caso $a = -\infty$ e $b = \infty$) e $p \in \mathbb{R}$, com $1 \leq p \leq \infty$.

Proposição C.1. *Seja $u \in L^1_{loc}(I)$ tal que*

$$\int_I uf\, dx = 0, \quad \forall\ f \in C_0^\infty(I).$$

Então $u = 0$ q.t.p. em I.

A demonstração desse resultado pode ser encontrada em Adams [1].

Definição C.2. *O espaço de Sobolev $W^{1,p}(I)$ é definido por*

$$W^{1,p}(I) = \left\{ u \in L^p(I);\ \exists g \in L^p(I) \quad \text{tal que} \quad \int_I u\varphi'\, dx = -\int_I g\varphi\, dx \quad \forall\, \varphi \in C_0^1(I) \right\}.$$

Também denotamos

$$H^1(I) = W^{1,2}(I).$$

Para $u \in W^{1,p}(I)$ escrevemos $u' = g$.

O espaço $W^{1,p}$ torna-se um espaço normado ao definirmos

$$||u||_{W^{1,p}} = ||u||_{L^p} + ||u'||_{L^p}.$$

No caso em que $1 < p < \infty$, essa norma é equivalente a $(||u||^p_{L^p} + ||u'||^p_{L^p})^{1/p}$. O espaço H^1 torna-se um espaço com produto interno se definirmos

$$\langle u, v \rangle_{H^1} = \langle u, v \rangle_2 + \langle u', v' \rangle_2 = \int_a^b (uv + u'v')dx,$$

cuja norma é dada por

$$||u||_{H^1} = (||u||_2^2 + ||u'||_2^2)^{1/2}.$$

A demonstração do próximo resultado pode ser encontrada em Brezis [3].

Proposição C.3. *O espaço $W^{1,p}$ é um espaço de Banach para $1 \leq p \leq \infty$. Se $1 < p < \infty$, esse espaço é reflexivo; se $1 \leq p < \infty$, esse espaço é separável.*

O espaço H^1 é um espaço de Hilbert separável.

As funções em $W^{1,p}$ são as primitivas das funções em L^p. Note que $||\cdot||_2$ já é uma norma em H^1, mas com essa norma o espaço H^1 não é completo. (Assim, $H^1 \subset L^2$ não é fechado na norma $||.||_2$.)

Teorema C.4. *Seja $u \in W^{1,p}(I)$ com $1 \leq p \leq \infty$. Então existe uma função $\tilde{u} \in C(\overline{I})$ tal que $u = \tilde{u}$ q.t.p. em I e*

$$\tilde{u}(x) - \tilde{u}(y) = \int_y^x u'(t)\, dt \quad \forall\, x, y \in \overline{I}.$$

A prova desse resultado pode ser encontrada em Brezis [3].

Uma vez que cada função $u \in W^{1,p}(I)$ admite uma (e só uma) representação contínua em $\overline{I}$, vamos supor que esse representante contínuo tenha sido escolhido.

Teorema C.5 (Densidade)**.** *Seja $u \in W^{1,p}(I)$ com $1 \leq p < \infty$. Então existe uma sequência (u_n) em $C_0^\infty(\mathbb{R})$ tal que $u_n|_I \to u$ em $W^{1,p}(I)$.*

A prova desse resultado pode ser encontrada em [3]. Em geral, não existe uma sequência $(u_n) \subset C_0^\infty(I)$ tal que $u_n \to u$ em $W^{1,p}(I)$, resultado que é válido em $L^p(I)$, pois $\overline{C_0^\infty(I)} = L^p(I)$.

O próximo resultado apresenta as *imersões de Sobolev.*

Teorema C.6. *Existe uma constante C (dependendo só de $|I| \leq \infty$) tal que*

$$||u||_{L^\infty(I)} \leq C||u||_{W^{1,p}(I)}, \quad \forall\, u \in W^{1,p}(I) \quad \forall\, 1 \leq p \leq \infty.$$

Isto é, $W^{1,p}(I) \subset L^\infty(I)$ de maneira contínua para $1 \leq p \leq \infty$.

Além disso, se I for limitado, então

(a) *a imersão $W^{1,p}(I) \subset C(\overline{I})$ é compacta para todo $1 < p \leq \infty$;*

(b) *a imersão $W^{1,1}(I) \subset L^q(I)$ é compacta para todo $1 \leq q < \infty$.*

Note que a imersão $W^{1,1}(I) \subset C(\overline{I})$ é contínua, mas não é compacta.

Corolário C.7. *Sejam $u, v \in W^{1,p}(I)$, com $1 \leq p \leq \infty$. Então*

$$uv \in W^{1,p}(I) \quad e \quad (uv)' = u'v + uv'.$$

A fórmula de integração por partes permanece válida:

$$\int_y^x u'v\, dx = u(x)v(x) - u(y)v(y) - \int_y^x uv'\, dx \quad \forall\, x, y \in \overline{I}.$$

A demonstração destes fatos pode ser vista em [3].

Percebe-se claramente a diferença desse resultado com propriedades das funções em L^p pois, em geral, se $u, v \in L^p$, então o produto uv não pertence a L^p.

Definição C.8. *Dado um inteiro $m \geq 2$ e um número real $1 \leq p \leq \infty$, definimos por indução o espaço*

$$W^{m,p}(I) = \{u \in W^{m-1,p}(I) : u' \in W^{m-1,p}(I)\}.$$

Denotamos

$$H^m(I) = W^{m,2}(I)$$

O espaço $W^{m,p}(I)$ possui a norma

$$||u||_{W^{m,p}} = ||u||_{L^p} + \sum_{\alpha=1}^{m} ||D^\alpha u||_{L^p}$$

e $H^m(I)$ o produto interno

$$\langle u, v\rangle_{H^m} = \langle u, v\rangle_2 + \sum_{\alpha=1}^{m} \langle D^\alpha u, D^\alpha v\rangle_2$$

Pode-se estender aos espaços $W^{m,p}$ as propriedades mostradas para $W^{1,p}$. Assim, se I for limitado, $W^{m,p} \subset C^{m-1}(\overline{I})$ é uma imersão contínua; e é compacta, se $1 < p \leq \infty$.

Definição C.9. *Dado $1 \leq p < \infty$, denotamos por $W_0^{1,p}(I)$ o fecho de $C_0^1(I)$ em $W^{1,p}(I)$.*

Denotamos

$$H_0^1(I) = W_0^{1,2}(I)$$

O espaço $W_0^{1,p}(I)$ está dotado da norma de $W^{1,p}(I)$, enquanto o espaço $H_0^1(I)$ possui o produto interno de $H^1(I)$.

O espaço $W_0^{1,p}$ é um espaço de Banach separável. Além disso, é reflexivo para $p > 1$; o espaço $H_0^1(I)$ é um espaço de Hilbert separável.

Observação C.1. Quando $I = \mathbb{R}$, sabemos que $C_0^1(\mathbb{R})$ é denso em $W^{1,p}(\mathbb{R})$ (pelo Teorema C.5). Assim, $W_0^{1,p}(\mathbb{R}) = W^{1,p}(\mathbb{R})$.

Teorema C.10 (Caracterização)**.** *Seja $u \in W^{1,p}(I)$. Então $u \in W_0^{1,p}(I)$ se, e somente se, $u = 0$ em ∂I.*

Proposição C.11 (Desigualdade de Poincaré)**.** *Suponha que I seja limitado. Então existe uma constante C (dependente de $|I|$) tal que*

$$\|u\|_{W^{1,p}(I)} \leq C\|u'\|_{L^p(I)}, \quad \forall u \in W_0^{1,p}(I).$$

Assim, $\|u'\|_{L^p(I)}$ é uma norma equivalente à norma de $W^{1,p}$.

A demonstração desses resultados pode ser encontrada em Brezis [3].

Se I for limitado a expressão

$$\langle u', v' \rangle_2 = \int_I u'v' \, dx$$

define um produto interno em $H^1_0(I)$, cuja norma associada $\|u'\|_2$ é equivalente à norma de H^1.

Dado um inteiro $m \geq 2$ e um núero real $1 \leq p < \infty$, o espaço $W^{m,p}_0(I)$ é definido como o fecho de $C^m_0(I)$ em $W^{m,p}(I)$. Pode-se mostrar que

$$W^{m,p}_0(I) = \{u \in W^{m,p}(I) : u = Du = ... = D^{m-1}u = 0 \ \text{ em } \ \partial I\}.$$

Salientamos a diferença entre

$$W^{2,p}_0(I) = \{u \in W^{2,p}(I) : u = Du = 0 \text{ sobre } \ \partial I\}$$

e

$$W^{2,p}(I) \cap W^{1,p}_0(I) = \{u \in W^{2,p}(I) : u = 0 \ \text{ em } \partial I\}.$$

O dual de $W^{1,p}_0(I)$ $(1 \leq p \leq \infty)$ é denotado por $W^{-1,p'}(I)$, enquanto o dual de $H^1_0(I)$ é denotado por $H^{-1}(I)$. Valem as inclusões

$$H^1_0 \subset L^2 \subset H^{-1}.$$

Se I for limitado temos as imersões contínuas

$$W^{1,p}_0 \subset L^2 \subset W^{-1,p'}, \quad 1 \leq p < \infty.$$

A prova do próximo resultado pode ser encontrado em [4].

Proposição C.12. *Seja $I \subset \mathbb{R}$ um intervalo (ou união finita de intervalos). Então*

$$\int_I |u|^2 \, dx \leq \left(\frac{|I|}{2} \right)^2 \int_I |u'|^2 \, dx$$

para todo $u \in H^1_0(I) \backslash \{0\}$.

Referências Bibliográficas

[1] R. Adams - *Sobolev Spaces*, Academic Press, 1978.

[2] R. Biezuner, G. Ercole, E. Martins - *Eigenvalues and eigenfunctions of the Laplacian via inverse iteration with shift*, arXiv:math.SP/10113266 v1 November 16, 2010.

[3] H. Brezis - *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial differential Equations*, Springer, Berlin-New York, 2011.

[4] G. Ercole - *On the resonant Lane-Emden problem for the p-Laplacian*, Communications in Contemporary Mathematics, World Scientific, 2013.

[5] C. Hönig - *Análise Funcional e o Problema de Sturm-Liouville*, Ed. Edgard Blücher - Ed. da USP, São Paulo , 1978.

[6] E. Kreyszig - *Introductory Functional Analysis with Aplications*, John Wiley and Sons, 1978.

[7] P. Lindqvist - *On a nonlinear eigenvalue problem*, in: Fall School in Analysis, 68, Jyväskylä, 1994, pp. 33-54.

[8] M. Renardy, R. Rogers - *An introduction to Partial Differential Equations*, Springer, 1993.