

Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Problemas elípticos com expoente crítico e potencial de Hardy

Daiane Campara Soares

Belo Horizonte
2013

Universidade Federal de Minas Gerais
Instituto de Ciências Exatas
Departamento de Matemática

Problemas elípticos com expoente crítico e potencial de Hardy

Daiane Campara Soares

Dissertação apresentada ao Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção de título de Mestre em Matemática.

Orientador: Prof. Dr. Ronaldo B. Assunção

Belo Horizonte
2013

Soares, Daiane Campara

Problemas elípticos com expoente crítico e potencial de Hardy
xiv + 74 páginas. Dissertação (Mestrado) — Universidade Federal
de Minas Gerais, Instituto de Ciências Exatas, Departamento de Ma-
temática

1. Operador laplaciano.
2. Potenciais de Hardy.
3. Expoente crítico de Sobolev.
4. Problemas de minimização.

I. Universidade Federal de Minas Gerais. Instituto de Ciências Exatas.
Departamento de Matemática.

ATA DA DUCENTÉSIMA DÉCIMA SÉTIMA DEFESA DE DISSERTAÇÃO DA ALUNA DAIANE CAMPARA SOARES, REGULARMENTE MATRICULADA NO PROGRAMA DE PÓS-GRADUAÇÃO EM MATEMÁTICA DO INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS DA UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS, REALIZADA NO DIA 05 DE ABRIL DE 2013.

Aos cinco dias do mês de abril de 2013, às 16h35 horas, na 3060, reuniram-se os professores abaixo relacionados, formando a Comissão Examinadora homologada pelo Colegiado do Programa de Pós-Graduação em Matemática, para julgar a defesa de dissertação da aluna **Daiane Campara Soares**, intitulada: "*Problemas elípticos com expoente crítico e potencial de Hardy*", requisito final para obtenção do Grau de mestre em Matemática. Abrindo a sessão, o Senhor Presidente da Comissão, Prof. Ronaldo Brasileiro Assunção, após dar conhecimento aos presentes o teor das normas regulamentares do trabalho final, passou a palavra à candidata para apresentação de seu trabalho. Seguiu-se a arguição pelos examinadores com a respectiva defesa da candidata. Após a defesa, os membros da banca examinadora reuniram-se sem a presença da candidata e do público, para julgamento e expedição do resultado final. Foi atribuída a seguinte indicação: a candidata foi considerada aprovada, por unanimidade. O resultado final foi comunicado publicamente à candidata pelo Senhor Presidente da Comissão. Nada mais havendo a tratar, o Presidente encerrou a reunião e lavrou a presente Ata, que será assinada por todos os membros participantes da banca examinadora. Belo Horizonte, 05 de abril de 2013.

Ronaldo B. Assunção

PROF. RONALDO BRASILEIRO ASSUNÇÃO
Orientador (UFMG)

Grey Ercole

PROF. GREY ERCOLE
Examinador (UFMG)

H. Prado Bueno

PROF. HAMILTON PRADO BUENO
Examinador (UFMG)

Aos meus pais José Pedro e Leange, com todo amor e carinho.

Agradecimentos

A Deus, por sempre estar ao meu lado e por cuidar de mim em todas as horas.

Aos meus pais, José Pedro e Leange, pela educação, por todo amor, por todo esforço para que eu conquistasse meus objetivos e pelo constante incentivo e apoio.

Aos meus irmãos, Deise, Denise e Daniel, bem como aos meus sobrinhos, Pedro Henrique, Julia, Gabriel, Nataly e Maria pelo encorajamento e incentivo.

Ao Prof. Ronaldo Brasileiro Assunção, pelos ensinamentos matemáticos e por ter me orientado com muita paciência, competência e imensa dedicação.

A Comissão Avaliadora, pela atenção dada ao trabalho e pelas sugestões valiosas.

Ao professor Carrião, pela sua disponibilidade em auxiliar sempre.

Ao meu namorado Guilherme, pelo seu apoio, amor, atenção, sua inesgotável paciência e disposição em me ajudar.

Aos amigos e professores da Universidade Federal de Santa Maria, em especial aos professores Maurício Fronza da Silva, João Batista Peneireiro, Márcio Miotto e Taísa Miotto, pelas oportunidades, por sua enorme atenção e principalmente por acreditarem em meu trabalho e participarem do meu desenvolvimento, mesmo de longe, auxiliando-me sempre.

Aos amigos daqui de Belo Horizonte que em sua maioria conheci durante o mestrado, Flávia, Luciana, Willian, Silvia, Natália, Amanda, Charles, Carlos e José. Obrigada pela companhia nos estudos, pelas brincadeiras descontraídas e especialmente pela amizade. Sucesso a todos!

Ao meu amigo Leonel, agradeço por toda compreensão, por todas as situações que enfrentamos, especialmente pela amizade e ajuda para que esse trabalho pudesse ser realizado.

Aos meus amigos do sul, que mesmo distantes, sempre estiveram presentes me incentivando, em especial Marcela, Rian, Carolina, Aline Armanini, Aline Alves, Aline Machado, Danilo, Leonardo e Itaianan.

A CAPES pelo apoio financeiro.

Resumo

Nesta dissertação estudamos resultados de existência e de não-existência de soluções para a seguinte classe de problemas elípticos não-lineares:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) - \lambda u(x) - \mu \frac{u(x)}{|x|^2} = u(x)^{2^*-1}, & x \in \Omega, \\ u(x) > 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{P})$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ denota um conjunto aberto contendo a origem, limitado ou não, com $N \geq 4$. A equação diferencial envolve o expoente $2^* = 2N/(N-2)$, conhecido como expoente crítico de Sobolev e o termo $\mu u(x)/|x|^2$, que é chamado potencial de Hardy.

Procuramos soluções para o problema (P) no espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ definido como o fecho de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^1(\Omega)$. Para obter resultados de existência de soluções demonstramos uma versão do Lema de Concentração-Compacidade de Lions.

Palavras-chave Operador laplaciano, potenciais de Hardy, expoente crítico de Sobolev, problemas de minimização.

Abstract

In this dissertation we study results of existence and non-existence for the following class of nonlinear elliptic problems:

$$\begin{cases} -\Delta u(x) - \lambda u(x) - \mu \frac{u(x)}{|x|^2} = u(x)^{2^*-1}, & x \in \Omega, \\ u(x) > 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (\text{P})$$

where $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ denotes an open set containing the origin, bounded or not, with $N \geq 4$. The equation involves the exponent $2^* = 2N/(N-2)$, known as critical exponent in the Sobolev inequality, and the term $\mu u(x)/|x|^2$, which is called Hardy potential.

We look for solutions of the problem (P) in the Sobolev space $H_0^1(\Omega)$ which is defined as is the closure of $C_0^\infty(\Omega)$ in $H^1(\Omega)$. To obtain existence results we prove a version of the concentration-compactness lemma by Lions.

Key-words Laplacian operator, Hardy potentials, critical exponent of Sobolev, minimization problems.

Notações

$:=$

\mathbb{R}^+

$x = (x_1, \dots, x_N)$

$|x| = (\sum_{i=1}^N x_i^2)^{1/2}$

$B(x, \rho)$

ω_N

$N\omega_N$

$p' \equiv \frac{p}{p-1}$

$2^* \equiv \frac{2N}{N-2}$

$\nabla u(x) \equiv \left(\frac{\partial u(x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial u(x)}{\partial x_N} \right)$

$\operatorname{div}(u_1(x), \dots, u_N(x))$

$\equiv \frac{\partial u_1(x)}{\partial x_1} + \dots + \frac{\partial u_N(x)}{\partial x_N}$

$\Delta u(x) \equiv \operatorname{div} [\nabla u(x)] = \sum_{i=1}^N \frac{\partial^2 u(x)}{\partial x_i^2}$

X^*

$\mathcal{C}^0(\Omega)$

$\mathcal{C}^k(\Omega)$

$\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$

$L^p(\Omega)$

$\|u\|_{L^p} \equiv \left(\int_{\Omega} |u(x)|^p dx \right)^{1/p}$

$H^1(\Omega) \equiv \{u \in L^2(\Omega) : \nabla u(x) \in (L^2(\Omega))^N\}$

$\|u\| \equiv \left(\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx + \int_{\Omega} |u(x)|^2 dx \right)^{1/2}$

$H_0^1(\Omega)$

$u_n \rightarrow u$ em X

$u_n \rightharpoonup u$ em X

$u_n \rightarrow u$ q.t.p. em X

$H_{0,G}^1(\Omega) \equiv \{u \in H_0^1(\Omega) : u \circ g = u \forall g \in G\}$

$V(\Omega, G) \equiv \{u \in H_{0,G}^1(\Omega) : \int_{\Omega} u^{2^*}(x) dx = 1\}$

$S_\lambda^\mu(\Omega, G) \equiv \inf_{u \in V(\Omega, G)} R(u)$

$R(u) \equiv \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} u^2(x) dx - \mu \int_{\Omega} \frac{u^2(x)}{|x|^2} dx$

igualdade por definição

conjunto dos números reais positivos

elemento de \mathbb{R}^N

norma do elemento $x \in \mathbb{R}^N$

bola aberta de raio ρ e centro em $x \in \mathbb{R}^N$

área da bola $B(x, \rho)$ em \mathbb{R}^N

área da superfície esférica $\partial B(x, \rho)$ em \mathbb{R}^N

expoente conjugado de p

expoente crítico de Sobolev

gradiente da função u

divergente do campo $(u_1(x), \dots, u_N(x))$

operador laplaciano

espaço dual do espaço X

espaço das funções reais contínuas

espaço das funções reais k -vezes continuamente diferenciáveis

espaço das funções infinitamente diferenciáveis e de suporte compacto em \mathbb{R}^N

espaço de Lebesgue

norma no espaço de Lebesgue $L^p(\mathbb{R}^N)$

espaço de Hilbert

norma no espaço de Hilbert $H^1(\Omega)$

espaço de Hilbert com traço nulo

convergência forte (na norma de X)

convergência fraca em X

convergência em quase todo ponto de X

subespaço de $H_0^1(\Omega)$ invariante por G

vínculo no subespaço $H_{0,G}^1(\Omega)$

melhor constante das imersões de Sobolev

Sumário

Resumo	viii
Abstract	viii
Notações	ix
1 Introdução aos métodos variacionais	1
1.1 Formulação fraca de problemas elípticos	1
1.2 Problemas envolvendo o expoente crítico	7
1.3 Problemas críticos envolvendo potenciais de Hardy	11
1.4 Resultados principais	13
2 Existência de soluções de energia mínima	17
2.1 Existência de solução em todo o espaço	17
2.2 Não-existência de soluções em domínios limitados	22
2.3 Existência de solução em domínios limitados	32
3 Existência de soluções em domínios não limitados	35
3.1 Lemas auxiliares	35
3.2 Lema de concentração-compacidade	37
3.3 Existência de soluções em domínios contidos em cilindros	50
4 Existência de soluções em domínios invariantes	55
4.1 Soluções invariantes	55
4.2 O caso $d \geq 2$	55
4.3 O caso $d = 1$	58
A Resultados auxiliares	61
A.1 Espaços de Funções	61
A.2 O grupo ortogonal	62
A.3 Resultados de Análise	62
A.3.1 As notações de Landau	62
A.3.2 Desigualdades	63
A.3.3 Integração em coordenadas polares	63

A.3.4	Simetrização de Schwarz e princípio da criticalidade simétrica	64
A.4	Resultados de Análise Funcional	65
A.4.1	Teorema da Convergência Dominada	65
A.4.2	Teorema de imersão de Rellich-Kondrachov	65
A.4.3	Convergência fraca em medida	65
A.4.4	Lema de Brézis-Lieb	66
A.4.5	O princípio variacional de Ekeland	66
A.4.6	O teorema do passo da montanha	66
A.5	Desigualdade de Hardy	68
Bibliografia		71
Índice Remissivo		72

-1-

Introdução aos métodos variacionais

1.1 Formulação fraca de problemas elípticos

Esta dissertação tem como principal objetivo demonstrar resultados de existência e de não-existência de soluções para uma classe de equações elípticas não-lineares definidas em domínios $\Omega \subset \mathbb{R}^N$, limitados ou não, envolvendo o expoente crítico de Sobolev e o potencial de Hardy. Neste capítulo apresentamos alguns resultados básicos da teoria de minimização de funcionais, cujas referências básicas são o livro de Ambrosetti e Malchiodi [1] e o memorial de Jeanjean [9]. Assim, podemos indicar as maiores dificuldades para demonstrar os teoremas principais da dissertação que se baseiam no artigo de Ruiz e Willem [14].

Começamos considerando $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio limitado com fronteira $\partial\Omega$. Suponhamos que devemos resolver o seguinte problema de Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = |u|^{p-2}u & x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.1)$$

em que $\Delta u(x) := \sum_{i=1}^N \partial^2 u(x) / \partial x_i^2$ denota o operador laplaciano e $p \in (1, 2^*]$, em que $2^* := 2N/(N-2)$ é o expoente crítico de Sobolev. Se a função $u: \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ for tal que $u \in \mathcal{C}^2(\Omega) \cap \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$ verifica o problema (1.1) pontualmente, dizemos que u é uma solução clássica do problema de Dirichlet. Em geral, o problema de garantir a existência de uma solução clássica para o problema (1.1) é bastante difícil. Uma forma de resolver as dificuldades encontradas é enfraquecer as condições impostas sobre a função u . Por exemplo, podemos exigir que a primeira equação em (1.1) seja válida no sentido das distribuições. Para prosseguir nessa linha de investigação suponhamos que u seja uma solução clássica. Dada uma função $\varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, multiplicamos ambos os lados da equação diferencial em (1.1) por φ e, integrando por partes, obtemos a equação

$$\int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} |u|^{p-2} u \varphi \, dx \quad \forall \varphi \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega). \quad (1.2)$$

Dessa forma, uma solução clássica do problema de Dirichlet (1.1) verifica a equação (1.2). Agora podemos substituir a condição de fronteira $u(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$ pela condição de que $u \in H_0^1(\Omega)$; dessa forma, temos o novo problema de determinar uma função u tal que

$$\begin{cases} \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi \, dx = \int_{\Omega} |u|^{p-2} u \varphi \, dx & \forall \varphi \in H_0^1(\Omega), \\ u \in H_0^1(\Omega). \end{cases} \quad (1.3)$$

Observamos que se $u \in H_0^1(\Omega)$, então pela densidade de $C_0^1(\Omega)$ em $H_0^1(\Omega)$, a equação (1.2) vale para toda função $\varphi \in H_0^1(\Omega)$. O problema (1.3) é conhecido como a formulação fraca do problema de Dirichlet (1.1) e suas soluções são denominadas soluções fracas. Se u é uma solução clássica e se $u(x) = 0$ para todo $x \in \partial\Omega$, pontualmente, então $u \in H_0^1(\Omega)$; logo, a função u é uma solução fraca do problema (1.3). Por outro lado, se $u \in C^2(\Omega)$ é uma solução fraca do problema (1.3), então u é uma solução clássica do problema (1.1).

Podemos agora reconhecer que as soluções $u \neq 0$ do problema (1.3) são pontos críticos do funcional $J: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$J(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{p} \int_{\Omega} |u|^p dx. \quad (1.4)$$

De fato, usando resultados conhecidos do cálculo variacional em espaços de Banach, temos que o funcional J , denominado funcional de energia, é diferenciável e que o operador $J': H_0^1(\Omega) \rightarrow (H_0^1(\Omega))^*$ é dado por

$$J'(u)\varphi = \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \varphi dx - \int_{\Omega} |u|^{p-2} u \varphi dx. \quad (1.5)$$

Portanto, a obtenção de soluções clássicas para (1.1) será feita utilizando o seguinte método: primeiro demonstramos a existência de soluções fracas para o problema (1.3), utilizando o funcional $J(u)$; e em seguida usamos resultados de regularidade, que garantem que as soluções fracas de fato possuem a diferenciabilidade requerida para que sejam também soluções clássicas. Nesta dissertação tratamos apenas dos resultados de existência de soluções fracas; para a parte da regularidade das soluções fracas referimos aos trabalhos de Brézis [4, Caps. 8 e 9] e de Evans [7, Cap. 6].

Para ilustrar as principais dificuldades encontradas ao aplicar o programa descrito acima, conhecido como método direto do cálculo das variações, distinguimos três casos bastante distintos e dependentes do parâmetro p , que indica o crescimento da não-linearidade da equação diferencial. Na discussão que se segue, trabalhamos com o espaço $H_0^1(\Omega)$ munido da norma do gradiente, isto é, $\|u\| = (\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx)^{1/2}$. Pela desigualdade de Poincaré, essa norma é equivalente à norma usual de $H_0^1(\Omega)$. Lembramos também que a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ é contínua se $p \in [1, 2^*]$ e é compacta se $p \in [1, 2^*)$.

A seguir analisamos alguns resultados de existência e de não-existência de solução para o problema (1.3) dependendo da potência do termo não linear. Como um comentário geral, analisamos apenas os casos em que $p \in [1, 2^*]$ pois assim podemos garantir, pela continuidade da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, que o funcional de energia J está bem definido em $H_0^1(\Omega)$.

CASO 1: $p \in [1, 2)$. Como a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ é contínua, existe uma constante C , dependente apenas de p , tal que $|u|_p \leq C\|u\|$ para toda função $u \in H_0^1(\Omega)$. Assim temos que

$$J(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{p} |u|_p^p \geq \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{C^p}{p} \|u\|^p \quad (1.6)$$

para $\|u\|$ suficientemente grande. Para $p < 2$ o termo quadrático é dominante e o funcional J é coercivo.

Além disso, temos que

$$-\infty < m := \inf_{u \in H_0^1(\Omega)} J(u) < 0.$$

De fato, argumentando por contradição, suponhamos que exista uma sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ tal que $J(u_n) \rightarrow -\infty$. Como o funcional J é coercivo, segue-se que existe $R \in \mathbb{R}^+$ tal que $\|u_n\| \leq R$. Como o espaço $H_0^1(\Omega)$ é reflexivo, existe uma subsequência, ainda denotada da mesma forma, e existe uma função $u \in H_0^1(\Omega)$, tais que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$.

Além disso, como o funcional J é fracamente semicontínuo inferiormente, isto é, para todo $\alpha \in \mathbb{R}$ o conjunto $\{u \in H_0^1(\Omega) : J(u) > \alpha\}$ é aberto, inferimos que $J(u) \leq \liminf_{n \in \mathbb{N}} J(u_n) = -\infty$, o que é uma contradição. Para verificar que $m < 0$ selecionamos uma função $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ e testamos o funcional J em funções da forma tu , com $t \in \mathbb{R}^+$. Assim, temos

$$J(tu) = \frac{t^2}{2} \|u\|^2 - \frac{t^p}{p} |u|_p^p.$$

Como $p < 2$, a contribuição da parcela negativa de J é dominante quando $t \rightarrow 0$ e isso implica que $m < 0$.

Para garantir que o ínfimo m é atingido, isto é, para demonstrar que existe uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $J(u) = m$, argumentamos da seguinte forma: Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ uma sequência minimizante, isto é, uma sequência tal que $J(u_n) \rightarrow m$ quando $n \rightarrow \infty$. Como J é coercivo, a sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada no espaço reflexivo $H_0^1(\Omega)$. Dessa forma, existe uma subsequência, ainda denotada da mesma forma, e existe uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u \rightharpoonup u$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$. Pela compacidade da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$, novamente passando a uma subsequência obtemos a convergência forte $u_n \rightarrow u$ em $L^p(\Omega)$. Portanto,

$$m \leq J(u) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} J(u_n) = m.$$

Como o mínimo do funcional J é atingido, concluímos que o ponto de mínimo corresponde a uma solução fraca do problema (1.3).

CASO 2: $p = 2$. Nesse caso o problema é linear e se escreve na forma

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = \lambda u & x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.7)$$

em que o número real λ é denominado autovalor do operador laplaciano e a correspondente solução é denominada autofunção. As principais propriedades do problema (1.7) são enunciadas no resultado a seguir. Para a demonstração, referimos ao livro de Weinberger [18, Cap. 7, seção 36] para o caso unidimensional e o livro de Evans [7, Cap. 6, seção 6.5] para um caso mais geral.

1.1 Proposição. 1. O problema (1.7) possui uma sequência de autovalores $(\lambda_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ tal que

$$0 < \lambda_1 < \lambda_2 \leq \lambda_3 \leq \dots \leq \lambda_n \leq \lambda_{n+1} \leq \dots \quad e \quad \lim_{n \rightarrow +\infty} \lambda_n = +\infty.$$

Na desigualdade acima usamos a convenção de que autovalores múltiplos são repetidos de acordo com suas multiplicidades. O primeiro autovalor λ_1 é simples, ou seja, tem multiplicidade igual a um e a correspondente autofunção não muda de sinal no domínio $\omega \subset \mathbb{R}$. Além disso, o autovalor λ_1 é o único autovalor com essa propriedade. É comum denotar a primeira autofunção por ϕ_1 e selecioná-la de modo que $\phi_1(x) > 0$ para todo $x \in \Omega$ e tal que $\|\phi_1\|_{L^2} = 1$. Correspondendo aos demais autovalores λ_k , as correspondentes autofunções são denotadas por ϕ_n e são tais que

$$\int_{\Omega} \phi_n \phi_m \, dx = \begin{cases} 1 & \text{se } n = m \\ 0 & \text{se } n \neq m. \end{cases}$$

2. Vale a igualdade

$$\lambda_1 = \min_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u(x) \neq 0}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx}{\int_{\Omega} |u|^2 \, dx}. \quad (1.8)$$

3. Definindo $W_n = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : \int_{\Omega} \nabla u \cdot \nabla \phi_m \, dx = 0, 1 \leq m \leq n-1 \right\}$, valem as igualdades

$$\lambda_n = \min_{\substack{u \in W_n \\ u(x) \neq 0}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx}{\int_{\Omega} |u|^2 \, dx}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

As relações dos ítems 2 e 3 são denominadas de caracterizações variacionais dos autovalores. Observamos também que do item 2 obtemos a desigualdade

$$\lambda_1 \leq \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx}{\int_{\Omega} |u|^2 \, dx}$$

para toda função $u \in H_0^1(\Omega)$ tal que $u \not\equiv 0$, conhecida como desigualdade de Poincaré.

CASO 3: $p \in (2, 2^*)$. O funcional J não é mais limitado inferiormente nesse caso. De fato, selecionando uma função $u \in H_0^1(\Omega) \setminus \{0\}$ e um número real $t \in \mathbb{R}^+$, temos que

$$J(tu) = \frac{t^2}{2} \|u\|^2 - \frac{t^p}{p} |u|_p^p \rightarrow -\infty \quad (t \rightarrow \infty),$$

pois $p > 2$.

Além disso, J também não é limitado superiormente. Por exemplo, considerando $\Omega = (0, \pi) \subset \mathbb{R}$ e $p = 4$ segue-se que o funcional $J: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ tem a forma

$$J(u) = \frac{1}{2} \int_0^\pi |\nabla u|^2 dx - \frac{1}{4} \int_0^\pi |u|^4 dx.$$

Escolhendo $u_0(x) = \sin(kx)$ em que $k \in \mathbb{N}$, cálculos diretos mostram que $J(tu_0) \rightarrow \infty$ quando $t \rightarrow \infty$. Consequentemente, não existe extremo global para o funcional J e o problema de determinar um ponto crítico é mais complexo.

Uma das abordagens frequentemente usadas é a de determinar outras caracterizações variacionais para os pontos críticos. Para isso, selecionamos uma função $v \in H_0^1(\Omega)$ tal que $J(v) < 0$. Observando que $J(0) = 0$ consideramos o conjunto Γ de todos os caminhos unindo a origem à função v , isto é,

$$\Gamma := \{\gamma: [0, 1] \rightarrow H_0^1(\Omega); \gamma(0) = 0, \gamma(1) = v\}.$$

Também definimos o número

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} J(\gamma(t)),$$

comumente denominado valor de “minimax”. Agora mostramos que

$$c > \max\{J(0), J(v)\} = 0. \quad (1.9)$$

De fato, usando a desigualdade (1.6) obtemos que $J(u) \geq \|u\|^2/4$ para $\|u\|$ suficientemente pequeno. Em particular, existe $\rho \in \mathbb{R}^+$ tal que $\rho < \|v\|$ e $J(u) \geq \rho^2/4$ se $\|u\| = \rho$. Como todos os caminhos de Γ devem cruzar a esfera de raio ρ , isso garante que vale a desigualdade (1.9).

Dizemos que um funcional que verifica a desigualdade (1.9) para alguma função $v \in H_0^1(\Omega)$ e para o nível de minimax c definido acima tem a geometria do passo da montanha; o valor c é denominado nível do passo da montanha. Intuitivamente, procuramos um ponto crítico $u \in H_0^1(\Omega)$ para o funcional J no nível do passo da montanha, mas esse ponto crítico nem sempre existe. Para mais detalhes, veja o Teorema A.17 no Apêndice.

Entretanto, uma consequência da geometria do funcional J é a existência de uma sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ tal que $J(u_n) \rightarrow c$ e $\|J'(u_n)\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Uma sequência com essa propriedade é denominada sequência de Palais-Smale. Se uma sequência de Palais-Smale possui uma subsequência convergente, dizemos que verifica a condição de Palais-Smale no nível c .

Para garantir que existe uma sequência de Palais-Smale, um resultado frequentemente usado é o princípio variacional de Ekeland, enunciado no Apêndice (Proposição A.4.5).

Para prosseguir na argumentação como no CASO 1, devemos verificar que uma sequência de Palais-Smale é limitada. Pela definição do funcional J , a saber, $J(u) = \frac{1}{2} \|u\|^2 - \frac{1}{p} |u|_p^p$, e usando o fato de que $J(u_n) \rightarrow c$ quando $n \rightarrow \infty$, obtemos

$$\|u_n\|^2 - \frac{2}{p} |u_n|_p^p \rightarrow 2c \quad (n \rightarrow \infty). \quad (1.10)$$

Além disso, o limite $\|J'(u_n)\| \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$ pode ser reescrito na forma

$$-\Delta u_n - |u_n|^{p-2}u_n \rightarrow 0 \quad (H_0^1(\Omega))^* \quad (1.11)$$

Multiplicando ambos os lados da última expressão pela função u_n e integrando sobre o domínio Ω obtemos

$$\| \|u_n\|^2 - |u_n|_p^p \leq \varepsilon_n \|u_n\| \quad (1.12)$$

em que $\varepsilon_n \rightarrow 0$ quando $n \rightarrow \infty$. Agora usamos o fato de que $p > 2$ e as diferentes homogeneidades nas expressões em (1.10) e (1.12) para concluir que a sequência das normas $(\|u_n\|)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^+$ é limitada.

Argumentando como no caso precedente, da limitação da sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ podemos supor que existe uma subsequência, sempre denotada da mesma forma, e que existe uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ tais que $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$ e $u_n \rightarrow u$ fortemente em $L^q(\Omega)$ para todo $q \in [2, 2^*)$.

A próxima etapa da argumentação é mostrar que vale o limite $u_n \rightarrow u$ fortemente em $H_0^1(\Omega)$. Como $u_n \rightarrow u$ fortemente em $L^p(\Omega)$, sabemos pela desigualdade (1.12) que $\|u_n\|^2 \rightarrow |u_n|_p^p$ quando $n \rightarrow \infty$. Além disso, pela caracterização dada em (1.11), deduzimos que

$$\int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla u \, dx - \int_{\Omega} |u_n|^{p-2}u_n u \, dx \rightarrow 0 \quad (n \rightarrow \infty). \quad (1.13)$$

Usando a convergência forte em $L^q(\Omega)$ para todo $q \in (2, 2^*)$, a convergência fraca e a desigualdade de Hölder, obtemos

$$\int_{\Omega} |u_n|^{p-2}u_n u \, dx \rightarrow \int_{\Omega} |u|^p \, dx = |u|_p^p \quad (n \rightarrow \infty).$$

Por outro lado, da convergência fraca, para a parcela envolvendo os gradientes temos que

$$\int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla u \, dx \rightarrow \int_{\Omega} |\nabla u|^2 \, dx = \|u\|^2 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Portanto, combinando esses resultados obtemos que $\|u\|^2 = |u|_p^p$; e como já temos a convergência $\|u_n\|^2 \rightarrow |u|_p^p$, segue-se que $\|u_n\|^2 \rightarrow \|u\|^2$. Por fim, usando um resultado conhecido de Análise Funcional (veja [4, Theorem 3.32, pág. 78]), concluímos que $u_n \rightarrow u$ fortemente em $H_0^1(\Omega)$. Além disso, pela continuidade de J e de J' , resulta que u é um ponto crítico do funcional J no nível c do passo da montanha. Finalmente, como $c > 0 = J(0)$, segue-se que o ponto crítico u é diferente de zero e obtemos, assim, uma solução fraca não trivial para o problema (1.3).

Resumimos esses argumentos enunciando uma versão de um resultado conhecido na literatura como teorema do passo da montanha .

1.2 Proposição. *Seja X um espaço de Banach e seja $J: X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional continuamente diferenciável e verificando a condição de Palais-Smale. Sejam $v \in X$, $\rho \in \mathbb{R}^+$ e $c_0 \in \mathbb{R}$ tais que*

1. $\|v\| > \rho$;
2. para todo $u \in X$ tal que $\|u\| = \rho$ vale a desigualdade $\max\{J(0), J(v)\} < c_0 \leq J(u)$.

Então o funcional J possui um valor crítico $c \geq c_0$ definido por

$$c := \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0,1]} J(\gamma(t)).$$

Para a demonstração, referimos ao livro de Ambrosetti e Malchiodi [1, Theorem 8.1] ou de Willem [19, Theorem 1.15].

CASO 4: $p = 2^* = 2N/(N - 2)$. Nesse caso o funcional J ainda possui a geometria do teorema do passo da montanha. Além disso, todas as sequências de Palais-Smale são limitadas; em particular, existe uma sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ tal que $J(u_n) \rightarrow c$, $\|J'(u_n)\| \rightarrow 0$ e $u_n \rightharpoonup u$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$ quando $n \rightarrow \infty$. A diferença em relação ao CASO 3 é que agora a convergência fraca $u_n \rightharpoonup u$ em $H_0^1(\Omega)$ não implica a existência de uma subsequência, ainda denotada da mesma forma, tal que $u_n \rightarrow u$ fortemente em $L^p(\Omega)$. Isso se deve ao fato de que a imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^p(\Omega)$ não é compacta. Essa dificuldade não é simplesmente uma questão técnica. Veremos na próxima seção que, devido à identidade de Pohozaev, o funcional J não possui ponto crítico no nível do passo da montanha quando o domínio Ω for estrelado. Consequentemente, o problema (1.1) não possui solução no caso $p = 2^*$ para esse tipo de domínio.

Em resumo, vimos que no CASO 1 a compacidade é garantida a priori pela escolha do tipo de crescimento da não-linearidade, que é sublinear. No CASO 2, em que temos um problema linear de autovalor, a compacidade é garantida. No CASO 3, em que a não-linearidade ainda é subcrítica, a compacidade é garantida, mas a dificuldade é que o funcional é indefinido, isto é, não é limitado superiormente nem inferiormente. No CASO 4, temos um exemplo de problema sem compacidade, em que a não-linearidade tem crescimento crítico. Outras situações em que a mesma dificuldade aparece são problemas definidos em domínios não limitados. Esse último caso é o ponto de partida para uma grande linha de pesquisa que se iniciou com o trabalho pioneiro de Brézis e Nirenberg [5].

Na próxima seção descrevemos alguns tipos de problemas sem compacidade e as técnicas usadas para resolvê-los.

1.2 Problemas envolvendo o expoente crítico

Começamos esta seção enunciando um resultado devido a Pohozaev.

1.3 Proposição. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto com fronteira $\partial\Omega \in C^1$ e limitado e denotemos por $\nu(x)$ o vetor normal unitário exterior a $\partial\Omega$ no ponto x . Seja $f: \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e seja*

$F(t) := \int_0^t f(s) ds$. Se $u \in C^2(\overline{\Omega})$ for uma solução clássica do problema

$$\begin{cases} -\Delta u(x) = f(u) & x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.14)$$

então

$$\frac{N-2}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - N \int_{\Omega} F(u) dx = -\frac{1}{2} \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u}{\partial \nu} \right)^2 \nu(x) \cdot x d\sigma. \quad (1.15)$$

A demonstração dessa proposição, conhecida como identidade de Pohozaev, pode ser encontrada nos livros de Ambrosetti e Malchiodi [1, Theorem 8.30] ou de Badiale e Serra [2, Theorem 3.4.26].

Como consequência da Proposição 1.3, vemos que a condição de crescimento para a não linearidade nos casos analisados na seção anterior não pode ser eliminada. De fato, para um conjunto estrelado em relação à origem, isto é, um conjunto tal que $\nu(x) \cdot x > 0$ para todo $x \in \partial\Omega$, vale a seguinte desigualdade.

1.4 Corolário. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um domínio estrelado em relação à origem e com fronteira $\partial\Omega \in C^1$. Então toda solução clássica do problema (1.14) verifica a desigualdade*

$$N \int_{\Omega} F(u) dx - \frac{N-2}{2} \int_{\Omega} f(u)u dx > 0.$$

Usando o Corolário 1.4, suponhamos que $u \in H_0^1(\Omega)$ seja uma solução não trivial do problema (1.1). Usando a teoria de regularidade (Consulte Brézis [4, Cap. 7 e 8]), podemos garantir que $u \in \mathcal{C}^2(\overline{\Omega})$ e u é de fato uma solução clássica do problema. Dessa forma, aplicando a Proposição 1.3 no caso em que $f(t) = |t|^{p-2}t$, segue-se que

$$\left(\frac{N}{p} - \frac{N-2}{2} \right) \int_{\Omega} |u|^p dx > 0.$$

Portanto, se $u(x) \not\equiv 0$, então devemos ter $p < 2N/(N-2) = 2^*$ e esse expoente é crítico não apenas do ponto de vista das imersões de Sobolev mas também do ponto de vista da existência de soluções não triviais do problema de Dirichlet (1.1).

O Corolário 1.4 implica que o problema (1.1) não possui solução positiva quando $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio estrelado em relação à origem e $p = 2^*$. Em contraste com esse resultado de não-existência, Brézis e Nirenberg [5] obtiveram um resultado fundamental de existência de solução ao adicionar uma perturbação linear ao problema (1.1). Mais especificamente, seja o problema de valor de fronteira

$$\begin{cases} -\Delta u(x) - \lambda u(x) = u^{2^*-1}(x) & x \in \Omega, \\ u(x) > 0 & x \in \Omega, \\ u \in H_0^1(\Omega) \end{cases} \quad (1.16)$$

em que $N \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto aberto e limitado com fronteira $\partial\Omega$ e o espaço $H_0^1(\Omega)$ é equipado com a norma $\|u\| := (\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx)^{1/2}$. Adaptando as ideias desenvolvidas na seção anterior, as soluções fracas do problema (1.16) são pontos críticos do funcional $J_{\lambda}: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$J_{\lambda}(u) := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u|^2 dx - \frac{1}{2^*} \int_{\Omega} |u|^{2^*} dx.$$

Apresentamos agora alguns comentários sobre o intervalo de variação para o parâmetro λ da perturbação linear. Para isso, usamos a notação e a caracterização do primeiro autovalor λ_1 do operador laplaciano $L[u] := -\Delta u(x)$ em $H_0^1(\Omega)$ dada por (1.8) na Proposição 1.1. É fato conhecido que $\lambda_1 > 0$ e que λ_1 é atingido, isto é, existe solução para o problema $-\Delta u(x) = \lambda_1 u(x)$. Se $\lambda < \lambda_1$, então o funcional J_{λ} verifica a condição 1 da Proposição 1.2. Além disso, selecionando uma função não nula $u \in H_0^1(\Omega)$ temos que $J_{\lambda}(tu) \rightarrow -\infty$ quando $t \rightarrow \infty$, o que garante que o funcional J_{λ} verifica a condição 2 da Proposição 1.2.

Por outro lado, usando novamente a Proposição 1.3, se Ω for um domínio estrelado em relação à origem, então o problema (1.16) não possui solução se $\lambda \leq 0$. Dessa forma, para obtermos resultados de existência de soluções para o problema (1.16) devemos considerar valores positivos para λ .

A falha na utilização da Proposição 1.2 mostra que a condição de Palais-Smale não é verificada. Isso ocorre como consequência da imersão $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ não ser compacta.

O principal resultado que discutimos nesta seção é devido a Brézis e Nirenberg [5].

1.5 Proposição. 1. Se $N \geq 4$, então o problema (1.16) tem uma solução para todo $\lambda \in (0, \lambda_1)$, em que λ_1 é o primeiro autovalor definido em (1.8).

2. Se $N = 3$, então existe $\lambda_0 = \lambda_0(\Omega)$ com $\lambda_0 \in [0, \lambda_1)$ e tal que o problema (1.16) tem solução se, e somente se, $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_1)$. Em particular, no caso em que Ω é a bola unitária, temos $\lambda_0 = \lambda_1/4$ e o problema (1.16) tem solução se, e somente se, $\lambda \in (\lambda_1/4, \lambda_1)$.

Para descrever o roteiro utilizado por Brézis e Nirenberg na demonstração da Proposição 1.5 necessitamos de algumas notações. A melhor constante das imersões de Sobolev $H_0^1(\Omega) \hookrightarrow L^{2^*}(\Omega)$ é denotada por S e é dada por

$$S = S(\Omega) := \inf\{\|u\|^2 : u \in H_0^1(\Omega), |u|_{2^*} = 1\}.$$

As funções que realizam a melhor constante $S(\mathbb{R}^N)$ são os múltiplos de

$$U(x) := \frac{c}{(1 + |x|^2)^{(N-2)/2}}, \quad c := (N(N-2))^{(N-2)/4} \quad (1.17)$$

que verifica a equação diferencial

$$-\Delta U(x) = S U^{2^*-1}(x) \quad x \in \mathbb{R}^N.$$

De forma geral, as soluções dessa equação diferencial formam a família de funções

$$U_{\varepsilon,y}(x) := \varepsilon^{-(N-2)/2} U((x-y)/\varepsilon) \quad (1.18)$$

em que $y \in \mathbb{R}^N$ e $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$. Notamos que essa família de funções é obtida a partir da função U através de translações e dilatações. Além disso, temos que $U_{\varepsilon,y} \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$, $\nabla U_{\varepsilon,y} \in L^2(\mathbb{R}^N)$ e $\|U_{\varepsilon,y}\|^2 = |U_{\varepsilon,y}|_{2^*}^2 = S^{N/2}$.

Pode-se mostrar que S independe do domínio Ω . De fato, para qualquer domínio Ω , estendendo uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ como sendo nula no complementar de Ω , podemos considerar $H_0^1(\Omega)$ como um subconjunto de $H_0^1(\mathbb{R}^N)$. Assim, $S(\Omega) \leq S(\mathbb{R}^N)$. Por outro lado, se $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H_0^1(\mathbb{R}^N)$ for uma sequência minimizante para $S(\mathbb{R}^N)$, usando argumentos de densidade podemos supor que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\mathbb{R}^N)$. Efetuando as translações e homotetias dadas por (1.18), podemos supor que $0 \in \Omega$ e que a nova sequência $(v_n)_{n \in \mathbb{N}}$ dada por $v_n(x) = (u_n)_{\varepsilon_n, y_n}(x)$ é tal que $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset C_0^\infty(\Omega)$. Usando a invariância das normas envolvidas na definição de S pela transformação indicada, segue-se que $S(\Omega) \leq \liminf_{n \rightarrow \infty} \|v_n\|^2 = S(\mathbb{R}^N)$ em que $|v_n|_{2^*} = 1$. Assim, $S(\Omega) = S(\mathbb{R}^N)$.

Além disso, o ínfimo S só é atingido se $\Omega = \mathbb{R}^N$. De fato, se $S(\Omega)$ for atingido por uma função $u \in H_0^1(\Omega)$ em que $\Omega \subsetneq \mathbb{R}^N$, novamente estendendo u como sendo nula no complementar de Ω , segue-se que essa função também realiza o ínfimo $S(\mathbb{R}^N)$. Mas isso é uma contradição pois as únicas funções que realizam $S(\mathbb{R}^N)$ são dadas pelas funções (1.17) que nunca se anulam.

Agora podemos descrever a estratégia para demonstrar a Proposição 1.5. Brézis e Nirenberg demonstraram os seguintes fatos:

1. O funcional J_λ verifica a condição de Palais-Smale para todo nível c do passo da montanha tal que $c < S^{N/2}/N$.
2. Se c_λ denota o nível crítico do passo da montanha, então $c_\lambda < S^{N/2}/N$ desde que $\lambda \in (0, \lambda_1)$ no caso em que $N \geq 4$ e desde que $\lambda \in (\lambda_0, \lambda_1)$ no caso em que $N = 3$.

Para obter a condição de Palais-Smale no passo 1, Brézis e Nirenberg usaram o Lema A.15 de Brézis e Lieb. E para mostrar que o nível do passo da montanha c_λ fica abaixo do valor $S^{N/2}/N$ no passo 2, utilizaram funções cortes apropriadas de $U_{\varepsilon,y}$. Mais especificamente, supondo que $0 \in \Omega$, seja $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ tal que $\varphi(x) = 1$ em uma bola centrada na origem e seja $u_\varepsilon(x) := \varphi(x)U_{\varepsilon,0}(x)$. Fazendo estimativas assintóticas refinadas das normas de u_ε em diversos espaços de funções, Brézis e Nirenberg obtiveram o passo 2. Para os detalhes da demonstração, citamos o artigo original de Brézis e Nirenberg [5] e os livros de Ambrosetti e Malchiodi [1, Theorem 11.6] e de Struwe [15, Cap. 3, Theorem 2.1]. Veja também a demonstração do Teorema 2.2.

1.6 Observação. Usando a notação anterior, vemos que o nível do passo da montanha c_λ é tal que $c_\lambda \leq \max_{t \geq 0} J_\lambda(tu_\varepsilon)$. E como

$$J_\lambda(tu_\varepsilon) = \frac{t^2}{2} (\|u_\varepsilon\|^2 - \lambda |u_\varepsilon|_2^2) - \frac{t^{2^*}}{2^*} |u_\varepsilon|_{2^*}^{2^*},$$

segue-se que $\max_{t \geq 0} J_\lambda(tu_\varepsilon)$ ocorre no ponto τ e vale $J_\lambda(\tau u_\varepsilon)$, dados por

$$\tau = \left(\frac{\|u_\varepsilon\|^2 - \lambda|u_\varepsilon|_2^2}{|u_\varepsilon|_{2^*}^2} \right)^{(N-2)/4} \quad \text{e} \quad J_\lambda(\tau u_\varepsilon) = \frac{1}{N} \left(\frac{\|u_\varepsilon\|^2 - \lambda|u_\varepsilon|_2^2}{|u_\varepsilon|_{2^*}^2} \right)^{N/2}.$$

Assim, usando a desigualdade $\|u_\varepsilon\|^2 - \lambda|u_\varepsilon|_2^2 < S|u_\varepsilon|_{2^*}^2$ (veja [1, Lemma 11.12]), obtemos

$$c_\lambda \leq \max_{t \geq 0} J_\lambda(tu_\varepsilon) = J_\lambda(\tau u_\varepsilon) = \frac{1}{N} \left(\frac{\|u_\varepsilon\|^2 - \lambda|u_\varepsilon|_2^2}{|u_\varepsilon|_{2^*}^2} \right)^{N/2} < \frac{S^{N/2}}{N}.$$

Dessa forma, $c_\lambda < S^{N/2}/N$, a desigualdade apresentada no passo 2, é equivalente à condição $S_\lambda < S$ em que $S_\lambda := \inf\{\|u_\varepsilon\|^2 - \lambda|u_\varepsilon|_2^2 : u \in H_0^1(\Omega), |u_\varepsilon|_{2^*} = 1\}$. Essa equivalência será usada frequentemente nesta dissertação.

Prosseguindo no estudo dessa classe de problemas elípticos, Ramos, Wang e Willem [13] consideraram o problema (1.16) no caso de domínios não limitados e demonstraram um resultado de existência de solução para o problema (1.16). Para enunciá-lo, estabelecemos as seguintes notações. Para $d \in \mathbb{N}$ tal que $1 \leq d \leq N-1$, escrevemos $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{N-d} \times \mathbb{R}^d$, $x = (y, z) \in \mathbb{R}^{N-d} \times \mathbb{R}^d$. Para um dado conjunto $A \subset \mathbb{R}^d$ denotamos $A_\delta = \{y \in \mathbb{R}^d : \text{dist}(y, A) < \delta\}$ e $\hat{A} = \mathbb{R}^{N-d} \times A$. Além disso, para $y \in \mathbb{R}^d$ denotamos $\Omega^y = \{z \in \mathbb{R}^d : (y, z) \in \Omega\}$.

1.7 Proposição. *Seja $N \geq 4$ e seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto satisfazendo as seguintes hipóteses.*

1. *Existem dois conjuntos abertos não vazios e não limitados F e G tais que $F \subset G \subset \mathbb{R}^d$, F é um domínio de Lipschitz e $\hat{F} \subset \Omega \subset \hat{G}$.*
2. *Para cada $\delta > 0$ existe $M > 0$ tal que $\Omega^t \subset \hat{F}_\delta$ para todo $|t| \geq M$.*

Se $\lambda \in (0, \lambda_1(\Omega))$, então o problema (1.16) tem uma solução não nula.

1.3 Problemas críticos envolvendo potenciais de Hardy

Generalizando a classe de problemas considerados na seção anterior, Jannelli [8] considerou uma variante do problema (1.16), ainda em domínios limitados, envolvendo o expoente crítico de Sobolev e com o potencial de Hardy. Mais precisamente, seja o problema

$$\begin{cases} -\Delta u(x) - \lambda u(x) - \mu \frac{u(x)}{|x|^2} = u(x)^{2^*-1}, & x \in \Omega, \\ u(x) > 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.19)$$

em que $N \geq 3$, $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um conjunto aberto, limitado e contendo a origem, $2^* = 2N/(N-2)$ denota o expoente crítico de Sobolev, $\mu \in \mathbb{R}$ e o termo $\mu|u|/|x|^2$, denominado potencial de Hardy.

O problema (1.19) no caso em que $\mu = 0$ corresponde ao problema (1.16). Como nos casos anteriores, procuramos solução para o problema no espaço $H_0^1(\Omega)$ equipado com a norma

$\|u\| := (\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx)^{1/2}$. A equação diferencial do problema (1.19) é a equação de Euler-Lagrange associada ao funcional $J_{\lambda,\mu}: H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$J_{\lambda,\mu} := \frac{1}{2} \int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_{\Omega} |u|^2 dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} \frac{|u|^2}{|x|^2} dx - \frac{1}{2} \int_{\Omega} |u|^{2^*} dx.$$

Como consequência da desigualdade de Hardy (A.7), devemos considerar o parâmetro μ menor do que a melhor constante da desigualdade de Hardy, isto é, $\mu < \bar{\mu} := (N-2)^2/4$.

Assim como no caso do problema (1.16), podemos definir $\lambda_1(\mu)$, o primeiro autovalor do operador elíptico definido por $L[u] := -\Delta u - \mu \frac{u}{|x|^2}$, e que pode ser caracterizado por

$$\lambda_1(\mu) := \inf_{\substack{u \in H_0^1(\Omega) \\ u(x) \neq 0}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx - \mu \int_{\Omega} \frac{|u|^2}{|x|^2} dx}{\int_{\Omega} |u|^2 dx}. \quad (1.20)$$

É possível mostrar que $\lambda_1(\mu) > 0$ é função decrescente do parâmetro μ e, quando $\mu \rightarrow \bar{\mu}$, segue-se que $\lambda_1(\mu)$ tende a uma constante positiva. Além disso, o valor $\lambda_1(\mu)$ é atingido se $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ é um domínio limitado.

Usando uma desigualdade do tipo de Pohozaev, é possível mostrar que se Ω for um domínio estrelado em relação à origem e se $\lambda \leq 0$, então o problema (1.19) não tem solução. Portanto, assim como no caso do problema (1.16), devemos considerar $\lambda \in (0, \lambda_1(\mu))$. Com essas hipóteses, Jannelli [8] demonstrou os seguintes resultados.

1.8 Proposição. *Se $\mu \leq \bar{\mu} - 1$, então o problema (1.19) tem pelo menos uma solução $u \in H_0^1(\Omega)$ quando $\lambda \in (0, \lambda_1(\mu))$.*

1.9 Proposição. *Se $\bar{\mu} - 1 < \mu < \bar{\mu}$, então o problema (1.19) tem pelo menos uma solução $u \in H_0^1(\Omega)$ quando $\lambda_0(\mu) < \lambda < \lambda_1(\mu)$, em que*

$$\lambda_0(\mu) := \min_{\substack{\varphi \in H_0^1(\Omega) \\ \varphi \neq 0}} \frac{\int_{\Omega} \frac{|\nabla \varphi(x)|^2}{|x|^{2\gamma}} dx}{\int_{\Omega} \frac{\varphi^2(x)}{|x|^{2\gamma}} dx}$$

e $\gamma := \sqrt{\bar{\mu}} + \sqrt{\bar{\mu} - \mu}$. Em particular, no caso em que $\Omega = B(0, R)$ é uma bola de raio R centrada na origem, então o problema (1.19) não tem solução se $\lambda \leq \lambda_0(\mu)$.

Para demonstrar esses resultados, Jannelli usou a mesma estratégia usada por Brézis e Nirenberg. Mais precisamente, considerou o problema $L[U] = U^{2^*-1}$ em \mathbb{R}^N , que tem soluções da forma

$$U_{\varepsilon}(x) := \frac{C_{\varepsilon}}{(\varepsilon|x|^{\sigma/\sqrt{\bar{\mu}}} + |x|^{\gamma/\sqrt{\bar{\mu}}})\sqrt{\bar{\mu}}}, \quad (1.21)$$

em que $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$,

$$\sigma := \sqrt{\bar{\mu}} - \sqrt{\bar{\mu} - \mu} \quad \text{e} \quad C_\varepsilon := \left(\frac{4\varepsilon N(\bar{\mu} - \mu)}{N - 2} \right)^{\sqrt{\bar{\mu}}/2}. \quad (1.22)$$

Para mais detalhes, consulte o artigo de Jannelli [8]. Veja também a Observação 1.6 e a demonstração do Teorema 2.2.

1.4 Resultados principais

Nesta seção apresentamos o objetivo principal da dissertação, que é demonstrar resultados de existência e de não-existência de soluções para uma classe de equações elípticas não-lineares envolvendo o expoente crítico de Sobolev e o potencial de Hardy. Mais especificamente, tratamos do problema

$$\begin{cases} -\Delta u(x) - \lambda u(x) - \mu \frac{u(x)}{|x|^2} = u(x)^{2^*-1} & x \in \Omega, \\ u(x) > 0 & x \in \Omega, \\ u(x) = 0 & x \in \partial\Omega, \end{cases} \quad (1.23)$$

em que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ denota um conjunto aberto contendo a origem, limitado ou não, com $N \geq 4$ e $2^* = 2N/(N - 2)$ denota o expoente crítico na desigualdade de Sobolev.

O problema (1.23) que estudamos está relacionado com o problema (1.16) estudado por Brézis e Nirenberg fazendo $\mu = 0$ e é o mesmo problema (1.19) estudado por Jannelli. Porém, consideramos outros tipos de domínios, incluindo domínios não limitados e tratamos outros intervalos para o parâmetro μ . A referência básica para este trabalho é o artigo de Ruiz e Willem [14].

Como nos casos já mencionados, trabalhamos no espaço de Sobolev $H_0^1(\Omega)$ definido como o complemento de $C_0^\infty(\Omega)$ em $H^1(\Omega)$, em que

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega) : \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, N \right\}.$$

Consideramos também o funcional $I : H_0^1(\Omega) \rightarrow \mathbb{R}$ definido por

$$I(u) = \frac{1}{2} \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - \frac{\lambda}{2} \int_\Omega u^2(x) dx - \frac{\mu}{2} \int_\Omega \frac{u^2(x)}{|x|^2} dx - \frac{1}{2^*} \int_\Omega u^{2^*}(x) dx.$$

Observamos que a integral $\int_\Omega \frac{u^2(x)}{|x|^2} dx$ está bem definida devido à desigualdade de Hardy.

Soluções fracas do problema (1.23) são pontos críticos do funcional I e verificam a equação $I'(u)v = 0$ para todo $v \in H_0^1(\Omega)$, ou seja,

$$\int_\Omega \nabla u(x) \nabla v(x) dx - \lambda \int_\Omega u(x)v(x) dx - \mu \int_\Omega \frac{u(x)v(x)}{|x|^2} dx - \int_\Omega u^{2^*-1}(x)v(x) dx = 0.$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

Como o funcional I não é limitado inferiormente, procuramos soluções usando as mesmas estratégias utilizadas por Brézis e Nirenberg e também por Jannelli. Dessa forma, usamos a teoria de multiplicadores de Lagrange e definimos o problema

$$S_\lambda^\mu(\Omega) \equiv \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - \mu \int_\Omega \frac{u^2(x)}{|x|^2} dx - \lambda \int_\Omega u^2(x) dx : u \in V(\Omega) \right\}$$

restrito ao vínculo

$$V(\Omega) = \left\{ u \in H_0^1(\Omega) : \int_\Omega |u(x)|^{2^*} dx = 1 \right\}.$$

Assim, nosso objetivo é demonstrar que o valor $S_\lambda^\mu(\Omega)$ é atingido.

Como nos casos já descritos, também usamos a seguinte hipótese:

$$\mu \leq \bar{\mu} - 1 = \frac{(N-2)^2}{4} - 1 \quad \text{e} \quad \lambda \in (0, \lambda_1(\mu)) \quad (\text{H})$$

em que $\lambda_1(\mu)$ é definido pela fórmula (1.20).

No capítulo 2 estudamos inicialmente o caso $\Omega = \mathbb{R}^N$ e demonstramos um resultado de existência de solução (Teorema 2.1). Em seguida consideramos domínios limitados $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com $\mu < 0$ e demonstramos um resultado de não-existência de solução no caso em que $\lambda = 0$ (Teorema 2.2). Prosseguindo, consideramos $\lambda > 0$ e mostramos que $S_\lambda^\mu(\Omega) < S_0^\mu(\Omega)$; assim, usando a Observação 1.6 segue-se que $S_\lambda^\mu(\Omega)$ é atingido. Para isso consideramos as funções U_ε , soluções radiais do problema (1.23) quando $\lambda = 0$ e usamos funções corte $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ que se anulam fora de uma vizinhança da origem. Dessa forma, as funções $u_\varepsilon(x) := \varphi(x)U_\varepsilon(x)$ são usadas para construir sequências minimizantes para $S_0^\mu(\Omega)$. A condição (H) é fundamental para assegurarmos a desigualdade $S_\lambda^\mu(\Omega) < S_0^\mu(\Omega)$. Contudo, as funções u_ε formam uma sequência minimizante para $S_0^\mu(\Omega)$ somente se $\mu \geq 0$. Assim, quando $\mu < 0$ a demonstração apresentada por Jannelli [8] não é válida e devemos argumentar de outra forma. Para obtermos o resultado, demonstramos que $S_0^\mu(\Omega) = S$ (Teorema 2.2) e também que $S_\lambda^\mu(\Omega) < S_0^\mu(\Omega)$ (Teorema 2.4). Com esses dois resultados podemos finalmente demonstrar a existência de solução para o problema (1.23) (Teorema 2.5).

No capítulo 3 consideramos domínios não limitados $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ e novamente usamos a hipótese (H). O problema (1.23) com $\mu = 0$, isto é, o problema (1.16) em domínios não limitados foi estudado por Lions [12] e por Ramos, Wang e Willem [13]. Demonstramos inicialmente um resultado de existência de solução no caso em que Ω está contido em, e tende assintoticamente para, um cilindro (Teorema 3.5). Em seguida consideramos domínios da forma $\Omega = \Omega_1 \times \mathbb{R}_d$ em que $\Omega_1 \subset \mathbb{R}_{N-d}$ é um domínio limitado com $N > d \geq 1$. Demonstramos que $\mu \geq 0$ é uma condição necessária e suficiente para que o problema (1.23) tenha solução nesse tipo de domínio caso em que Ω é um cilindro (Teorema 3.6). Essa condição representa uma diferença qualitativa em relação ao caso de domínios limitados.

No capítulo 4 lidamos com um tipo invariante de domínio que inclui, como um caso particular, domínios do tipo $\Omega = \Omega_1 \times \mathbb{R}^d$. Nesse caso, estudamos a existência de soluções para o problema (1.23) da forma $u(y, z) = u(y, |z|)$ se $y \in \Omega_1, z \in \mathbb{R}^d$. No caso em que $d \geq 2$ obtemos um resultado de existência de solução (Teorema 4.2). No caso em que $d = 1$ obtemos uma condição suficiente para a existência de solução (Teorema 4.4).

Por fim, no Apêndice A definimos diversos espaços de funções, apresentamos algumas desigualdades, incluindo a desigualdade de Hardy, e selecionamos os resultados de Análise e de Análise Funcional utilizados.

-2-

Existência de soluções de energia mínima

2.1 Existência de solução em todo o espaço

Começamos esta seção estabelecendo algumas notações que serão usadas no restante da dissertação. Denotamos por $O(N)$ o grupo linear das transformações isométricas em \mathbb{R}^N , isto é,

$$O(N) = \{A \in GL_N: A^{-1} = A^T\}.$$

Esse conjunto também é conhecido como grupo ortogonal de matrizes $N \times N$. Veja o Apêndice A.2 para mais detalhes. Se G é um subgrupo de $O(N)$, dizemos que Ω é invariante por G se $g(\Omega) = \Omega$, para todo $g \in G$. Se Ω é invariante por um grupo G , definimos o espaço

$$H_{0,G}^1(\Omega) := \left\{ u \in H_0^1(\Omega): u \circ g = u \quad \forall g \in G \right\}.$$

Também definimos o valor

$$S_\lambda^\mu(\Omega, G) := \inf \left\{ \int_\Omega |\nabla u(x)|^2 dx - \mu \int_\Omega \frac{u^2(x)}{|x|^2} dx - \lambda \int_\Omega u^2(x) dx : u \in V(\Omega, G) \right\}, \quad (2.1)$$

que é positivo pela desigualdade de Hardy, em que o vínculo $V(\Omega)$ é definido por

$$V(\Omega, G) := \left\{ u \in H_{0,G}^1(\Omega): \int_\Omega |u(x)|^{2^*} dx = 1 \right\}.$$

No que se segue, no caso especial em que $G = \{1\}$ contém apenas a aplicação identidade, omitimos a referência ao grupo G . Além disso, $S = S_0^0(\mathbb{R}^N)$ é a melhor constante das imersões de Sobolev.

Pela teoria dos multiplicadores de Lagrange, sabemos que se o ínfimo $S_\lambda^\mu(\Omega)$ é atingido, então existe uma solução fraca u_0 do problema

$$-\Delta u - \lambda u - \mu \frac{u^2}{|x|^2} = S_\lambda^\mu(\Omega) u^{2^*-1},$$

isto é,

$$\int_\Omega \nabla u_0(x) \nabla v(x) dx - \lambda \int_\Omega u_0(x) v(x) - \mu \int_\Omega \frac{u_0(x) v(x)}{|x|^2} dx = S_\lambda^\mu(\Omega) \int_\Omega u_0^{2^*-1}(x) v(x) dx, \quad (2.2)$$

para todo $v \in H_0^1(\Omega)$.

Definindo $w(x) = S_\lambda^\mu(\Omega)^{\frac{1}{2^*-2}} u_0(x)$ temos que w é uma solução fraca do problema (1.23). Para verificar a afirmativa, calculamos

$$\begin{aligned}
& \int_{\Omega} \nabla w(x) \nabla v(x) dx - \lambda \int_{\Omega} w(x) v(x) dx - \mu \int_{\Omega} \frac{w(x) v(x)}{|x|^2} dx \\
&= \int_{\Omega} \nabla (S_\lambda^\mu(\Omega)^{\frac{1}{2^*-2}} u_0(x)) \nabla v(x) dx \\
&\quad - \lambda \int_{\Omega} S_\lambda^\mu(\Omega)^{\frac{1}{2^*-2}} u_0(x) v(x) dx - \mu \int_{\Omega} \frac{S_\lambda^\mu(\Omega)^{\frac{1}{2^*-2}} u_0(x) v(x)}{|x|^2} dx \\
&= S_\lambda^\mu(\Omega)^{\frac{1}{2^*-2}} \left(\int_{\Omega} \nabla u_0(x) \nabla v(x) dx - \lambda \int_{\Omega} u_0(x) v(x) dx - \mu \int_{\Omega} \frac{u_0(x) v(x)}{|x|^2} dx \right) \\
&= S_\lambda^\mu(\Omega)^{\frac{1}{2^*-2}} \left(S_\lambda^\mu(\Omega) \int_{\Omega} u_0^{2^*-1}(x) v(x) dx \right) \\
&= S_\lambda^\mu(\Omega)^{\frac{1}{2^*-2}+1} \int_{\Omega} u_0^{2^*-1}(x) v(x) dx, \tag{2.3}
\end{aligned}$$

em que na penúltima passagem utilizamos a equação (2.2).

Como $u_0(x) = S_\lambda^\mu(\Omega)^{\frac{1}{2^*-2}} w(x)$, temos então que o lado direito da equação (2.3) vale

$$\begin{aligned}
S_\lambda^\mu(\Omega)^{\frac{1}{2^*-2}+1} \int_{\Omega} u_0^{2^*-1}(x) v(x) dx &= S_\lambda^\mu(\Omega)^{\frac{1}{2^*-2}+1} \int_{\Omega} \left(\frac{w(x)}{S_\lambda^\mu(\Omega)^{\frac{1}{2^*-2}}} \right)^{2^*-1} v(x) dx \\
&= S_\lambda^\mu(\Omega)^{\frac{1}{2^*-2}+1} S_\lambda^\mu(\Omega)^{-\frac{2^*-1}{2^*-2}} \int_{\Omega} w^{2^*-1}(x) v(x) dx \\
&= \int_{\Omega} w^{2^*-1}(x) w(x) dx.
\end{aligned}$$

Portanto, $w(x) = u_0(x) S_\lambda^\mu(\Omega)^{\frac{1}{2^*-2}}$ é solução fraca do problema (1.23).

Como vimos no capítulo 1, Brézis e Nirenberg [5] e Jannelli [8] demonstraram que a desigualdade estrita $S_\lambda^\mu(\Omega) < S_0^\mu(\Omega)$ é uma condição suficiente para o ínfimo $S_\lambda^\mu(\Omega)$ ser atingido quando o domínio Ω é limitado. A ideia para verificar essa desigualdade é considerar uma sequência minimizante $(v_\varepsilon) \subset H_0^1(\Omega)$ para $S_0^\mu(\Omega)$ e mostrar que a expressão

$$Q_\lambda(\varepsilon) := \frac{\int_{\Omega} |\nabla v_\varepsilon(x)|^2 dx - \mu \int_{\Omega} \frac{v_\varepsilon^2(x)}{|x|^2} dx - \lambda \int_{\Omega} v_\varepsilon^2(x) dx}{\left(\int_{\Omega} |v_\varepsilon(x)|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}}},$$

atinge valores abaixo de $S_0^\mu(\Omega)$. Para isso, é necessário um estudo em detalhes do ínfimo $S_0^\mu(\Omega)$ e de suas sequências minimizantes. Observamos que, pela invariância das integrais envolvidas na definição de $S_0^\mu(\Omega)$ por homotetias, esse valor não depende do conjunto aberto Ω . Além disso, se definimos o espaço de Sobolev $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ como

$$\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) := \left\{ u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N) \mid \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^N), \quad i = 1, 2, \dots, N \right\}.$$

então podemos definir $S_0^\mu(\mathbb{R}^N)$ como

$$S_0^\mu(\mathbb{R}^N) := \inf \left\{ \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx - \mu \int_{\Omega} \frac{u^2(x)}{|x|^2} dx : u \in W(\mathbb{R}^N) \right\},$$

em que

$$W(\mathbb{R}^N) := \left\{ u \in \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N) : \int_{\Omega} |u(x)|^{2^*} dx = 1 \right\}.$$

Utilizando argumentos de densidade, consideramos o ínfimo $S_0^\mu(\mathbb{R}^N)$ no espaço $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, ao invés de usar o espaço $H^1(\mathbb{R}^N)$.

2.1 Teorema. $S_0^\mu(\mathbb{R}^N, O(N))$ é atingido por uma função em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$.

Demonstração. Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset W(\mathbb{R}^N)$ uma sequência minimizante de funções radiais para $S_0^\mu(\mathbb{R}^N, O(N))$. Definimos as funções de concentração de Levy por

$$K_n(R) = \max \left\{ \int_{B(y,R)} |u_n(x)|^{2^*} dx : y \in \mathbb{R}^N \right\}.$$

Como $\lim_{R \rightarrow 0^+} K_n(R) = 0$ e $\lim_{R \rightarrow \infty} K_n(R) = 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, a continuidade dessas funções implica a existência de $R_n > 0$ tal que $K_n(R_n) = 2/3$. Assim, existe $y_n \in \mathbb{R}^n$ atingindo esse máximo, isto é, $\int_{B(y_n, R_n)} |u_n(x)|^{2^*} dx = 2/3$.

Afirmamos que $\|y_n\| < R_n$. Para verificar essa desigualdade argumentamos por contradição. Assim, supondo que $\|y_n\| \geq R_n$, a simetria de u_n implica que

$$1 = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n(x)|^{2^*} dx \geq \int_{B(y_n, R_n)} |u_n(x)|^{2^*} dx + \int_{B(-y_n, R_n)} |u_n(x)|^{2^*} dx = \frac{2}{3} + \frac{2}{3} = \frac{4}{3}.$$

A contradição implica na validade da afirmativa.

Definimos $\tilde{u}_n(x) = (R_n)^{\frac{N-2}{2}} u_n(R_n x)$ e $\tilde{y}_n = y_n / R_n \in B(0, 1)$. Então a sequência $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset W(\mathbb{R}^N)$ também é uma sequência minimizante para $S_0^\mu(\mathbb{R}^N, O(N))$. Para isso, devemos verificar as duas afirmativas a seguir.

AFIRMATIVA 2.1. $\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \tilde{u}_n(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n(x)|^2 dx$ para todo $R_n > 0$.

De fato, notamos que

$$\frac{\partial \tilde{u}_n}{\partial x_i} = (R_n)^{\frac{N-2}{2}} \frac{\partial}{\partial x_i} u_n(R_n x) R_n.$$

Portanto,

$$\nabla \tilde{u}_n = \left(R_n^{\frac{N-2}{2}} \frac{\partial}{\partial x_1} u_n(R_n x) R_n, \dots, R_n^{\frac{N-2}{2}} \frac{\partial}{\partial x_N} u_n(R_n x) R_n \right).$$

Calculando a norma do vetor gradiente, obtemos

$$\begin{aligned} |\nabla \tilde{u}_n|^2 &= (R_n)^{N-2} \left(\frac{\partial}{\partial x_1} u_n(R_n x) \right)^2 R_n^2 + \cdots + (R_n)^{N-2} \left(\frac{\partial}{\partial x_N} u_n(R_n x) \right)^2 R_n^2 \\ &= R_n^N \left[\left(\frac{\partial}{\partial x_1} u_n(R_n x) \right)^2 + \cdots + \left(\frac{\partial}{\partial x_N} u_n(R_n x) \right)^2 \right] \\ &= R_n^N |\nabla u_n(R_n x)|^2. \end{aligned}$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \tilde{u}_n(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} R_n^N |\nabla u_n(R_n x)|^2 dx. \quad (2.4)$$

Fazendo agora a mudança de variáveis $y = R_n x$ com $dx = R_n^{-N} dy$ e substituindo na igualdade (2.4) resulta que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla \tilde{u}_n(x)|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} R_n^N |\nabla u_n(y)|^2 \frac{dy}{R_n^N} = \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u_n(y)|^2 dy,$$

o que conclui a verificação da afirmativa.

AFIRMATIVA 2.2. $\int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u}_n(x)|^{2^*} dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n(x)|^{2^*} dx$ para todo $R_n > 0$.

De fato, sabemos que

$$|\tilde{u}_n(x)|^{2^*} = |R_n^{\frac{N-2}{2}} u_n(R_n x)|^{\frac{2N}{N-2}} = R_n^N |u_n(R_n x)|^{2^*},$$

e, portanto,

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u}_n(x)|^{2^*} dx = \int_{\mathbb{R}^N} R_n^N |u_n(R_n x)|^{2^*} dx. \quad (2.5)$$

Repetindo a mudança de variáveis anterior e substituindo na igualdade (2.5) resulta que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\tilde{u}_n(x)|^{2^*} dx = \int_{\mathbb{R}^N} R_n^N |u_n(y)|^{2^*} \frac{dy}{R_n^N} = \int_{\mathbb{R}^N} |u_n(y)|^{2^*} dy,$$

o que conclui a verificação da afirmativa.

Pelas Afirmitivas 2.1 e 2.2 temos que $\|\tilde{u}_n\| = \|u_n\|$ e $|\tilde{u}_n|_{2^*} = |u_n|_{2^*}$, o que garante que $(\tilde{u}_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset W(\mathbb{R}^N)$ também é uma sequência minimizante para $S_0^H(\mathbb{R}^N, O(N))$.

Além disso,

$$\frac{2}{3} = \max \left\{ \int_{B(y,1)} |\tilde{u}_n(x)|^{2^*} dx : y \in \mathbb{R}^N \right\} = \int_{B(\tilde{y}_n,1)} |\tilde{u}_n(x)|^{2^*} dx. \quad (2.6)$$

e como a sequência $(\tilde{u}_n) \subset \mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$ é limitada, passando a uma subsequência, sempre denotada da mesma forma, podemos supor que valem as hipóteses do Lema 3.3 de concentração-compacidade. No que se segue adotamos a notação desse lema e também escrevemos $S_0^H = S_0^H(\mathbb{R}^N, O(N))$.

Pela igualdade (3.7), temos

$$\begin{aligned} S_0^\mu &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} |\nabla \tilde{u}_n(x)|^2 dx - \mu \int_{\Omega} \frac{(\tilde{u}_n(x))^2}{|x|^2} dx \right) \\ &= \int_{\Omega} |\nabla u_0(x)|^2 dx - \mu \int_{\Omega} \frac{u_0^2(x)}{|x|^2} dx + \gamma_\infty + \|\gamma\| \end{aligned} \quad (2.7)$$

e pela igualdade (3.8), temos

$$1 = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_n(x)|^{2^*} dx = \int_{\Omega} |u_0(x)|^{2^*} dx + \nu_\infty + \|\nu\|. \quad (2.8)$$

Também valem a desigualdade (3.5), a saber,

$$\|\gamma\| \geq S_0^\mu \|\nu\|^{\frac{2}{2^*}}, \quad (2.9)$$

e a desigualdade (3.6) para o caso em que $\mu' = \mu$, a saber,

$$\gamma_\infty \geq S_0^\mu \nu_\infty^{\frac{2}{2^*}}. \quad (2.10)$$

Por fim, pela definição de S_0^μ , segue-se que

$$\int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx - \mu \int_{\Omega} \frac{u_0^2}{|x|^2} dx \geq S_0^\mu \left(\int_{\Omega} |u_0|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}}. \quad (2.11)$$

Combinando as desigualdades (2.9), (2.10) e (2.11) com os limites (2.7) e (2.8), obtemos

$$\begin{aligned} S_0^\mu &= \int_{\Omega} |\nabla u_0(x)|^2 dx - \mu \int_{\Omega} \frac{u_0^2(x)}{|x|^2} dx + \gamma_\infty + \|\gamma\| \\ &\geq S_0^\mu \left(\left(\int_{\Omega} |u_0|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} + \nu_\infty^{\frac{2}{2^*}} + \|\nu\|^{\frac{2}{2^*}} \right) \\ &\geq S_0^\mu \left(\int_{\Omega} |u_0|^{2^*} dx + \nu_\infty + \|\nu\| \right) \\ &= S_0^\mu \end{aligned} \quad (2.12)$$

em que na penúltima passagem usamos o fato de que $2^* > 2$, e isso implica que $a^{2/2^*} \geq a$ para todo $a \in [0, 1]$, valendo a igualdade se, e somente se, $a = 0$ ou $a = 1$.

Logo, valem as igualdades em todas as passagens e

$$\left(\int_{\Omega} |u_0|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} + \|\nu\|^{\frac{2}{2^*}} + \nu_\infty^{\frac{2}{2^*}} = \left(\int_{\Omega} |u_0|^{2^*} dx + \|\nu\| + \nu_\infty \right)^{\frac{2}{2^*}} = 1.$$

Assim, concluímos que pode ocorrer apenas um dos seguintes casos:

1. $\int_{\Omega} |u_0|^{2^*} dx = \|\nu\| = 0$ e $\nu_\infty = 1$,
2. $\int_{\Omega} |u_0|^{2^*} dx = 0$, $\|\nu\| = 1$ e $\nu_\infty = 0$,
3. $\int_{\Omega} |u_0|^{2^*} dx = 1$ e $\|\nu\| = \nu_\infty = 0$.

Pela igualdade (2.6) sabemos que $\nu_\infty \leq 2/3$; logo $\nu_\infty = 0$ e o caso 1 fica excluído.

Suponhamos que vale o caso 2. Então $u_0 = 0$ e ainda pelo limite (2.7) temos que $S_0^\mu = \|\gamma\| + \gamma_\infty$. Combinando com a desigualdade (3.5), segue-se que

$$1 = \|\nu\| = \|\nu\|^{2/2^*} \leq (S_0^\mu)^{-1} \|\gamma\| = \frac{1}{\|\gamma\| + \gamma_\infty} \|\gamma\| \leq 1.$$

Assim, temos $\|\gamma\|/S_0^\mu(\Omega) = 1 = \|\nu\|^{2/2^*}$, ou seja $\|\nu\|^{2/2^*} = (S_0^\mu)^{-1} \|\gamma\|$. Pelo Lema (3.3) de concentração-compacidade, a medida ν concentra-se em um único ponto z . Logo,

$$\frac{2}{3} = \max \left\{ \int_{B(y,1)} |\tilde{u}_n(x)|^{2^*} : y \in \mathbb{R}^N \right\} \geq \int_{B(z,1)} |\tilde{u}_n(x)|^{2^*} \rightarrow \|\nu\| = 1 \quad (n \rightarrow \infty),$$

que é uma contradição. Logo, o caso 2 também fica excluído.

Dessa forma, vale o caso 3, isto é, $\nu_\infty = \|\nu\| = 0$, $\int_\Omega |u_0(x)|^{2^*} dx = 1$. Além disso,

$$S_0^\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_\Omega |\nabla \tilde{u}_n(x)|^2 dx - \mu \int_\Omega \frac{(\tilde{u}_n(x))^2}{|x|^2} dx \right) = \int_\Omega |\nabla u_0(x)|^2 dx - \mu \int_\Omega \frac{u_0^2(x)}{|x|^2} dx.$$

Portanto, o ínfimo $S_0^\mu = S_0^\mu(\mathbb{R}^N, O(N))$ é atingido por uma função em $\mathcal{D}^{1,2}(\mathbb{R}^N)$. Isso conclui a demonstração do teorema. \square

Observamos que a demonstração anterior ainda é válida se consideramos outros grupos G em vez de $O(N)$; por exemplo, o grupo $G = \{1, -1\}$.

A partir do resultado acima e usando o Princípio da Criticalidade Simétrica (Teorema A.10), concluímos que as funções que atingem o ínfimo $S_0^\mu(\mathbb{R}^N, O(N))$ são soluções do problema

$$\begin{cases} -\Delta u(x) - \lambda u(x) - \mu \frac{u(x)}{|x|^2} = S_\lambda^\mu(\Omega) u(x)^{2^*-1}, & x \in \mathbb{R}^N, \\ u(x) > 0, & x \in \mathbb{R}^N. \end{cases} \quad (2.13)$$

Agora consideramos a mesma classe de funções utilizadas por Jannelli [8], a saber,

$$U_\varepsilon(x) = \frac{1}{(\varepsilon|x|^{\frac{\sigma}{\sqrt{\bar{\mu}}}} + |x|^{\frac{\gamma}{\sqrt{\bar{\mu}}}})\sqrt{\bar{\mu}}},$$

em que $\varepsilon > 0$, $\bar{\mu} = \frac{(N-2)^2}{4}$, $\gamma = \sqrt{\bar{\mu}} + \sqrt{\bar{\mu} - \mu}$ e $\sigma = \sqrt{\bar{\mu}} - \sqrt{\bar{\mu} - \mu}$.

As funções U_ε e seus múltiplos são as únicas soluções radiais do problema (2.13); portanto, essas funções atingem o ínfimo $S_0^\mu(\mathbb{R}^N, O(N))$. Terracini [16, pág. 253] apresenta uma demonstração para esse fato, transformando o problema (2.13) em um problema radial.

2.2 Não-existência de soluções em domínios limitados

O próximo resultado garante que no caso em que $\lambda = 0$, tanto para valores positivos quanto para valores negativos do parâmetro μ o ínfimo $S_0^\mu(\Omega)$ não é atingido. Vale ressaltar ainda usamos a hipótese (H) e que a demonstração do resultado no caso em que $\mu < 0$ não segue diretamente do resultado de Jannelli [8]. Mais precisamente, temos o seguinte resultado.

2.2 Teorema. 1. Se $\mu \geq 0$, então $S_0^\mu(\Omega) = S_0^\mu(\mathbb{R}^N, O(N))$ e é atingido somente se $\Omega = \mathbb{R}^N$.
 2. Se $\mu < 0$ então $S_0^\mu(\Omega) = S$ e não é atingido (para qualquer conjunto aberto Ω).

Demonstração. 1. Dado $u \in H_0^1(\Omega)$ denotamos por u^* o rearranjo esfericamente simétrico de u ; portanto, u^* é uma função radial. Usando a definição de u^* , a Proposição A.6 e as Proposições A.7 e A.8, segue-se que

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^*|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx, \quad (2.14)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u^*|^2}{|x|^2} dx \geq \int_{\mathbb{R}^N} \frac{|u|^2}{|x|^2} dx, \quad (2.15)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u^*|^2 dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^2 dx, \quad (2.16)$$

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u^*|^{2^*} dx = \int_{\mathbb{R}^N} |u|^{2^*} dx. \quad (2.17)$$

Para obtermos a desigualdade (2.14) aplicamos diretamente a Proposição A.8. Para obtermos a desigualdade (2.15) escolhemos, na Proposição A.7, $p = 2$, $q = 2$ e $f(x) = g(x) = |u(x)|/|x|$, notando que f e g pertencem a $L^2(\mathbb{R}^N)$.

Para mostrar a igualdade (2.16) utilizamos a Proposição A.6 com $G(x) = |x|^2$ e $f(x) = u(x)$. Para mostrar a igualdade (2.17) utilizamos a Proposição A.6 com $G(x) = |x|^{2^*}$ e $f(x) = u(x)$.

Dessa forma, $S_0^\mu(\Omega) \geq S_0^\mu(\mathbb{R}^N, O(N))$ pois das desigualdades (2.14) e (2.15) temos que

$$\int_{\Omega} \|\nabla u(x)\|^2 dx - \mu \int_{\Omega} \frac{u^2(x)}{|x|^2} dx \geq \int_{\Omega} \|\nabla u^*(x)\|^2 dx - \mu \int_{\Omega} \frac{u^*(x)}{|x|^2} dx.$$

Por outro lado, como $S_0^\mu(\Omega) = S_0^\mu(\mathbb{R}^N)$ e $S_0^\mu(\mathbb{R}^N) \leq S_0^\mu(\mathbb{R}^N, O(N))$, dessas desigualdades obtemos $S_0^\mu(\Omega) = S_0^\mu(\mathbb{R}^N, O(N))$.

Já mencionamos que quando $\Omega = \mathbb{R}^N$, que as funções U_ε e seus múltiplos são as únicas soluções de energia mínima. Dessa forma, o ínfimo $S_0^\mu(\Omega)$ não pode ser atingido se $\Omega \neq \mathbb{R}^N$, pois tal mínimo seria também minimizante para $S_0^\mu(\mathbb{R}^N)$ e diferente de U_ε e seus múltiplos.

2. A ideia para demonstrar esse caso é compor a sequência minimizante para S_0^μ definida por Brézis e Nirenberg [5] com uma translação conveniente. Recordamos que $0 \in \Omega$, e seja $\zeta \in \Omega$ tal que $B(0, 3\|\zeta\|) \subset \Omega$.

Definimos

$$\omega(x) = \frac{\varphi(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-2/2}} \quad \text{e} \quad v(x) = \omega(2\zeta + x), \quad (2.18)$$

em que $\varphi \in C_0^\infty(\Omega)$ é uma função corte tal que

$$\varphi(x) = 1 \quad \forall x \in B(0, \delta), \quad \varphi(x) = 0 \quad \forall x \notin B(0, 2\delta) \quad \text{e} \quad 2\delta < \|\zeta\|. \quad (2.19)$$

Devemos estimar o quociente

$$Q_0(\varepsilon) = \frac{\int_{\Omega} |\nabla v_\varepsilon(x)|^2 dx - \mu \int_{\Omega} \frac{v_\varepsilon^2(x)}{|x|^2} dx}{\left(\int_{\Omega} |v_\varepsilon(x)|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}}}.$$

Para isso, começamos aplicando a mudança de variáveis $y = 2\zeta + x$ com $dy = dx$ e obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\nabla v_{\varepsilon}(x)|^2 dx &= \int_{\Omega} |\nabla \omega_{\varepsilon}(2\zeta + x)|^2 dx \\
&= \int_{B(0,2\delta)} |\nabla \omega_{\varepsilon}(2\zeta + x)|^2 dx + \int_{\Omega \setminus B(0,2\delta)} |\nabla \omega_{\varepsilon}(2\zeta + x)|^2 dx \\
&= \int_{B(2\zeta,2\delta)} |\nabla \omega_{\varepsilon}(y)|^2 dy + \int_{\Omega \setminus B(2\zeta,2\delta)} |\nabla \omega_{\varepsilon}(y)|^2 dy \\
&= \int_{\Omega} |\nabla \omega_{\varepsilon}(y)|^2 dy.
\end{aligned} \tag{2.20}$$

Utilizando a mesma mudança de variáveis, obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |v_{\varepsilon}(x)|^{2^*} dx &= \int_{\Omega} |\omega_{\varepsilon}(2\zeta + x)|^{2^*} dx \\
&= \int_{B(0,2\delta)} |\omega_{\varepsilon}(2\zeta + x)|^{2^*} dx + \int_{\Omega \setminus B(0,2\delta)} |\omega_{\varepsilon}(2\zeta + x)|^{2^*} dx \\
&= \int_{B(2\zeta,2\delta)} |\omega_{\varepsilon}(y)|^{2^*} dy + \int_{\Omega \setminus B(2\zeta,2\delta)} |\omega_{\varepsilon}(y)|^{2^*} dy \\
&= \int_{\Omega} |\omega_{\varepsilon}(y)|^{2^*} dy.
\end{aligned} \tag{2.21}$$

Além disso, também temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \frac{v_{\varepsilon}(x)^2}{|x|^2} dx &= \int_{\Omega} \frac{\omega_{\varepsilon}^2(2\zeta + x)}{|x|^2} dx \\
&= \int_{B(0,2\delta)} \frac{\omega_{\varepsilon}^2(2\zeta + x)}{|x|^2} dx + \int_{\Omega \setminus B(0,2\delta)} \frac{\omega_{\varepsilon}^2(2\zeta + x)}{|x|^2} dx \\
&= \int_{B(2\zeta,2\delta)} \frac{\omega_{\varepsilon}^2(y)}{|y - 2\zeta|^2} dy + \int_{\Omega \setminus B(2\zeta,2\delta)} \frac{\omega_{\varepsilon}^2(y)}{|y - 2\zeta|^2} dy \\
&= \int_{B(2\zeta,2\delta)} \frac{\omega_{\varepsilon}^2(y)}{|y - 2\zeta|^2} dy,
\end{aligned} \tag{2.22}$$

em que na última igualdade usamos as propriedades (2.19) da função corte, já que $2\delta < \|\zeta\|$. Como o domínio de integração é a bola $B(2\zeta, 2\delta)$, consideramos $|y| < 2\delta < \|\zeta\|$. Logo, o lado direito da igualdade (2.22) é tal que

$$\begin{aligned}
\int_{B(2\zeta,2\delta)} \frac{\omega_{\varepsilon}^2(y)}{|y - 2\zeta|^2} dy &\leq \int_{B(2\zeta,2\delta)} \frac{\omega_{\varepsilon}^2(y)}{\|\zeta\|^2} dy = \frac{1}{\|\zeta\|^2} \int_{B(2\zeta,2\delta)} \omega_{\varepsilon}^2(y) dy \\
&= \frac{1}{\|\zeta\|^2} \left[\int_{B(2\zeta,2\delta)} \omega_{\varepsilon}^2(y) dy + \int_{\Omega \setminus B(2\zeta,2\delta)} \omega_{\varepsilon}^2(y) dy \right].
\end{aligned} \tag{2.23}$$

Combinando a igualdade (2.22) com a desigualdade (2.23), resulta

$$\int_{\Omega} \frac{v_{\varepsilon}(x)^2}{|x|^2} dx \leq \frac{1}{\|\zeta\|^2} \int_{\Omega} \omega_{\varepsilon}^2(y) dy. \tag{2.24}$$

Lembrando que $\mu < 0$, obtemos

$$Q_0(\varepsilon) \leq \frac{\int_{\Omega} |\nabla \omega_{\varepsilon}(x)|^2 dx - \frac{\mu}{\|\zeta\|^2} \int_{\Omega} \omega_{\varepsilon}^2(x) dx}{\left(\int_{\Omega} |\omega_{\varepsilon}(x)|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}}}. \tag{2.25}$$

Agora devemos mostrar que o quociente em (2.25) tende a S quando $\varepsilon \rightarrow 0$. Para isso, vamos estimar as diversas integrais envolvidas.

Começamos com a primeira integral no numerador do quociente em (2.25). A partir da definição de $\omega_\varepsilon(x)$, calculamos

$$\begin{aligned} \frac{\partial \omega_\varepsilon(x)}{\partial x_i} &= \frac{\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} (\varepsilon + |x|^2)^{N-2/2} - \varphi(x) \frac{\partial (\varepsilon + |x|^2)^{N-2/2}}{\partial x_i}}{((\varepsilon + |x|^2)^{N-2/2})^2} \\ &= \frac{\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i} (\varepsilon + |x|^2)^{N-2/2} - \varphi(x) \frac{N-2}{2} (\varepsilon + |x|^2)^{\frac{N-2}{2}-1} 2x_i}{((\varepsilon + |x|^2)^{N-2/2})^2} \\ &= \frac{\frac{\partial \varphi(x)}{\partial x_i}}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-2/2}} - \frac{(N-2)\varphi(x)x_i}{(\varepsilon + |x|^2)^{N/2}}. \end{aligned}$$

Logo,

$$\nabla \omega_\varepsilon(x) = \frac{\nabla \varphi(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-2/2}} - \frac{(N-2)\varphi(x)x}{(\varepsilon + |x|^2)^{N/2}},$$

e, dessa forma,

$$\begin{aligned} \int_{B(0,3\|\xi\|)} |\nabla \omega_\varepsilon(x)|^2 dx &= \int_{B(0,3\|\xi\|)} \frac{|\nabla \varphi(x)|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-2}} dx + (N-2)^2 \int_{B(0,3\|\xi\|)} \frac{\varphi^2(x)|x|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^N} dx \\ &\quad - 2(N-2) \int_{B(0,3\|\xi\|)} \frac{|\nabla \varphi(x)|\varphi(x)|x|}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-1}} dx. \end{aligned} \quad (2.26)$$

Utilizando as propriedades (2.19) da função corte podemos escrever a primeira integral do lado direito de (2.26) como

$$\int_{B(0,3\|\xi\|)} \frac{|\nabla \varphi(x)|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-2}} dx = \int_{B(0,\delta)} \frac{|\nabla \varphi(x)|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-2}} dx + \int_{B(0,2\delta) \setminus B(0,\delta)} \frac{|\nabla \varphi(x)|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-2}} dx \quad (2.27)$$

$$+ \int_{B(0,3\|\xi\|) \setminus B(0,2\delta)} \frac{|\nabla \varphi(x)|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-2}} dx. \quad (2.28)$$

Agora notamos que na bola $B(0,\delta)$ temos $\varphi = 1$ e, portanto, $\nabla \varphi = 0$; em $B(0,3\|\xi\|) \setminus B(0,2\delta)$ temos $\varphi = 0$ e, portanto, $\nabla \varphi = 0$. Além disso, a integral

$$\int_{B(0,2\delta) \setminus B(0,\delta)} \frac{|\nabla \varphi(x)|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-2}} dx$$

é limitada. Calculando o limite em (2.28) quando $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B(0,3\|\xi\|)} \frac{|\nabla \varphi(x)|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-2}} dx \leq c, \quad (2.29)$$

para alguma constante $c \in \mathbb{R}$ independente de ε .

Novamente utilizando as propriedades (2.19) da função corte podemos escrever a terceira integral no lado direito de (2.26) como

$$\begin{aligned} \int_{B(0,3\|\xi\|)} \frac{|\nabla\varphi(x)|\varphi(x)|x|}{(\varepsilon+|x|^2)^{N-1}} dx &= \int_{B(0,\delta)} \frac{|\nabla\varphi(x)|\varphi(x)|x|}{(\varepsilon+|x|^2)^{N-1}} dx + \int_{B(0,2\delta)\setminus B(0,\delta)} \frac{|\nabla\varphi(x)|\varphi(x)|x|}{(\varepsilon+|x|^2)^{N-1}} dx \\ &+ \int_{B(0,3\|\xi\|)\setminus B(0,2\delta)} \frac{|\nabla\varphi(x)|\varphi(x)|x|}{(\varepsilon+|x|^2)^{N-1}} dx. \end{aligned} \quad (2.30)$$

Agora notamos que em $B(0,\delta)$ temos $\varphi = 1$ e, portanto, $\nabla\varphi = 0$; em $B(0,3\|\xi\|)\setminus B(0,2\delta)$ temos $\varphi = 0$ e, portanto, $\nabla\varphi = 0$. Além disso, a integral

$$\int_{B(0,2\delta)\setminus B(0,\delta)} \frac{|\nabla\varphi(x)|\varphi(x)|x|}{(\varepsilon+|x|^2)^{N-1}} dx$$

é limitada. Calculando o limite em (2.30) quando $\varepsilon \rightarrow 0$, obtemos

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_{B(0,3\|\xi\|)} \frac{|\nabla\varphi(x)|\varphi(x)|x|}{(\varepsilon+|x|^2)^{N-1}} dx \leq c', \quad (2.31)$$

para alguma constante $c' \in \mathbb{R}$ independente de ε .

Combinando as desigualdades (2.29) e (2.31) resulta que (2.26) pode ser reescrita como

$$\int_{B(0,3\|\xi\|)} |\nabla\omega_\varepsilon|^2 dx = (N-2)^2 \int_{B(0,3\|\xi\|)} \frac{\varphi^2(x)|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^N} dx + O_\varepsilon(1). \quad (2.32)$$

Prosseguindo em nossa análise, somamos e subtraímos a expressão $\int_{B(0,3\|\xi\|)} \frac{|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^N} dx$ ao lado direito de (2.32) e reagrupando os termos, obtemos

$$\begin{aligned} &(N-2)^2 \int_{B(0,3\|\xi\|)} \frac{\varphi^2(x)|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^N} dx \\ &= (N-2)^2 \left[\int_{B(0,3\|\xi\|)} \left(\frac{|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^N} + \frac{\varphi^2(x)|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^N} - \frac{|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^N} \right) dx \right] + O_\varepsilon(1) \\ &= (N-2)^2 \left[\int_{B(0,3\|\xi\|)} \frac{|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^N} + \int_{B(0,3\|\xi\|)} \frac{(\varphi^2(x)-1)|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^N} dx \right] + O_\varepsilon(1). \\ &= (N-2)^2 \int_{B(0,3\|\xi\|)} \frac{|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^N} dx + O_\varepsilon(1) \\ &= (N-2)^2 \int_{\Omega} \frac{|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^N} dx - (N-2)^2 \int_{\Omega \setminus B(0,3\|\xi\|)} \frac{|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^N} dx + O_\varepsilon(1) \\ &= (N-2)^2 \int_{\Omega} \frac{|x|^2}{(\varepsilon+|x|^2)^N} dx + O_\varepsilon(1) \\ &= (N-2)^2 \int_{\Omega} \frac{|x|^2}{\left[\varepsilon \left(1 + \frac{|x|^2}{\varepsilon} \right) \right]^N} dx + O_\varepsilon(1) \end{aligned} \quad (2.33)$$

em que na terceira passagem usamos o fato de que $\varphi^2 - 1 \equiv 0$ perto da origem, na quarta passagem particionamos o domínio, na quinta passagem usamos o fato de que a integral

$\int_{\Omega \setminus B(0,3\|\xi\|)} \frac{|x|^2}{(\varepsilon + |x|^2)^N} dx$ é limitada, pois $0 \notin B(0,3\|\xi\|)$ e a função é integrável, e na última passagem colocamos ε em evidência.

Usamos agora a mudança de variáveis $y = x/\sqrt{\varepsilon}$ com $dx = \varepsilon^{N/2} dy$ e obtemos

$$(N-2)^2 \int_{\Omega} \frac{\varepsilon |y|^2 \varepsilon^{N/2}}{\varepsilon^N (1 + |y|^2)^N} dy + O_{\varepsilon}(1) = \frac{K_1}{\varepsilon^{(N-2)/2}} + O_{\varepsilon}(1),$$

em que $K_1 := (N-2)^2 \int_{\Omega} \frac{|y|^2}{(1 + |y|^2)^N} dy$.

Resumindo, a primeira integral no numerador em (2.25) é tal que

$$\int_{B(0,3\|\xi\|)} |\nabla \omega_{\varepsilon}(x)|^2 dx = \frac{K_1}{\varepsilon^{(N-2)/2}} + O_{\varepsilon}(1). \quad (2.34)$$

Vamos agora estimar a integral no denominador do quociente em (2.25). Utilizando a definição de $\omega_{\varepsilon}(x)$, somando e subtraindo o termo $\int_{B(0,3\|\xi\|)} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^N}$ à referida integral e reorganizando os termos, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{B(0,3\|\xi\|)} |\omega_{\varepsilon}|^{2^*} dx &= \int_{B(0,3\|\xi\|)} \frac{\varphi^{2^*}(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^N} dx \\ &= \int_{B(0,3\|\xi\|)} \frac{\varphi^{2^*}(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^N} dx - \int_{B(0,3\|\xi\|)} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^N} + \int_{B(0,3\|\xi\|)} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^N} \\ &= \int_{B(0,3\|\xi\|)} \frac{(\varphi^{2^*}(x) - 1)}{(\varepsilon + |x|^2)^N} dx + \int_{B(0,3\|\xi\|)} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^N} \\ &= \int_{B(0,3\|\xi\|)} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^N} + O_{\varepsilon}(1) \\ &= \int_{\Omega} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^N} - \int_{\Omega \setminus B(0,3\|\xi\|)} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^N} + O_{\varepsilon}(1) \\ &= \int_{\Omega} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^N} + O_{\varepsilon}(1) \\ &= \int_{\Omega} \frac{dx}{[\varepsilon(1 + \frac{|x|^2}{\varepsilon})]^N} + O_{\varepsilon}(1), \end{aligned} \quad (2.35)$$

em que na terceira passagem usamos o fato de que $\varphi^{2^*} - 1 \equiv 0$ perto da origem, na quarta passagem particionamos o domínio, na quinta passagem usamos o fato de que a integral $\int_{\Omega \setminus B(0,3\|\xi\|)} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^N}$ é limitada, pois $0 \notin \Omega \setminus B(0,3\|\xi\|)$ e a função é integrável, e na última passagem colocamos ε em evidência.

Usando a mudança de variáveis $y = x/\sqrt{\varepsilon}$, com $dx = \varepsilon^{N/2} dy$, obtemos

$$\int_{\Omega} \frac{\varepsilon^{N/2}}{\varepsilon^N (1 + |x|^2)^N} dy + O_{\varepsilon}(1) = \frac{K'_2}{\varepsilon^{N/2}} + O_{\varepsilon}(1).$$

em que $K'_2 := \int_{\Omega} \frac{dy}{(1 + |y|^2)^N}$.

Definindo $K_2 := (K'_2)^{\frac{2}{2^*}}$ e usando a fórmula de Taylor, obtemos

$$\begin{aligned} \left(\frac{K'_2}{\varepsilon^{N/2}} + O_\varepsilon(1) \right)^{\frac{2}{2^*}} &= \left(\frac{K'_2}{\varepsilon^{N/2}} \right)^{\frac{2}{2^*}} + \frac{2}{2^*} \left(\frac{K'_2}{\varepsilon^{N/2}} \right)^{\frac{2}{2^*}-1} o_\varepsilon(1) + o(O_\varepsilon(1)) \\ &= \left(\frac{K'_2}{\varepsilon^{N/2}} \right)^{\frac{2}{2^*}} + o_\varepsilon(1) \left[\left(\frac{2}{2^*} \right)^{1/\frac{2}{2^*}-1} \left(\frac{K'_2}{\varepsilon^{N/2}} \right) \right]^{\frac{2}{2^*}-1} \\ &= \left(\frac{K'_2}{\varepsilon^{N/2}} \right)^{\frac{2}{2^*}} + O_\varepsilon(1) b_\varepsilon^{\frac{2}{2^*}-1}, \end{aligned}$$

em que $b_\varepsilon = \left(\frac{2}{2^*} \right)^{1/\frac{2}{2^*}-1} \left(\frac{K'_2}{\varepsilon^{N/2}} \right)$. Definindo agora $K''_2 = \left(\frac{2}{2^*} \right)^{1/\frac{2}{2^*}-1} K'_2$, segue-se que

$$\begin{aligned} (b_\varepsilon)^{\frac{2}{2^*}-1} &= \left[\left(\frac{2}{2^*} \right)^{1/\frac{2}{2^*}-1} \left(\frac{K'_2}{\varepsilon^{N/2}} \right) \right]^{\frac{2}{2^*}-1} \\ &= \left(\frac{K''_2}{\varepsilon^{N/2}} \right)^{\frac{2}{2^*}-1} \leq \left[\frac{K''_2}{\varepsilon^{N/2}} + O_\varepsilon(1) \right]^{\frac{2}{2^*}-1} \leq \left[O_\varepsilon \left(\frac{1}{\varepsilon^{N/2}} \right) \right]^{\frac{2}{2^*}-1} = O_\varepsilon(\varepsilon). \end{aligned}$$

Resumindo, a integral no denominador em (2.25) é tal que

$$\left(\int_{\Omega} |\omega_\varepsilon|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} = \frac{K_2}{\varepsilon^{(N-2)/2}} + O_\varepsilon(\varepsilon) \quad (2.36)$$

em que $K_2 := (K'_2)^{\frac{2}{2^*}} = \left(\int_{\Omega} \frac{dy}{(1+|y|^2)^N} \right)^{\frac{2}{2^*}}$.

Agora usamos a função $U(x) = (1+|x|^2)^{-(N-2)/2}$, conhecida na literatura como *instanton*. Dessa forma, temos que $|\nabla U|_2^2 = K_1$ e que $K_2 = |U|_{2^*}^2$; também temos que

$$\frac{K_1}{K_2} = \frac{|\nabla U|_{L^2(\Omega)}^2}{|U|_{L^2(\Omega)}^2} = S. \quad (2.37)$$

Por fim, analisamos a segunda integral do numerador do quociente em (2.25). Assim, temos

$$\begin{aligned} &\int_{B(0,3\|\xi\|)} |\omega_\varepsilon|^2 dx \\ &= \int_{B(0,3\|\xi\|)} \frac{\varphi^2(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-2}} dx \\ &= \int_{B(0,3\|\xi\|)} \frac{\varphi^2(x)}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-2}} dx + \int_{B(0,3\|\xi\|)} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-2}} - \int_{B(0,3\|\xi\|)} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-2}} \\ &= \int_{B(0,3\|\xi\|)} \frac{\varphi^2(x) - 1}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-2}} dx + \int_{B(0,3\|\xi\|)} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-2}} \\ &= \int_{B(0,3\|\xi\|)} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-2}} + O_\varepsilon(1), \end{aligned} \quad (2.38)$$

em que na primeira igualdade utilizando a definição de ω_ε , na segunda somamos e subtraímos o termo $\int_{B(0,3\|\xi\|)} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-2}}$, na terceira igualdade reorganizamos as parcelas e na quarta igualdade utilizamos o fato de que $\varphi^2 - 1 \equiv 0$ perto da origem.

Para prosseguir em nossa análise da integral do lado direito de (2.38), devemos tratar de forma diferente os casos $N = 4$ e $N \geq 5$. De fato, notamos que a integral $\int_{\Omega} \frac{r^{N-1}}{r^{2(N-2)}} dr$ é finita se, e somente se, $N \geq 5$. Nesse caso, a expressão em (2.38) torna-se

$$\int_{B(0,3\|\xi\|)} |\omega_{\varepsilon}|^2 dx = \int_{\Omega} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-2}} - \int_{\Omega \setminus B(0,3\|\xi\|)} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-2}} + O_{\varepsilon}(1). \quad (2.39)$$

A segunda parcela do lado direito de (2.39) é limitada pois $0 \notin \Omega \setminus B(0,3\|\xi\|)$ e $\frac{1}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-2}}$ é integrável. Assim, o lado esquerdo de (2.39) pode ser reescrito como

$$\begin{aligned} \int_{B(0,3\|\xi\|)} |\omega_{\varepsilon}|^2 dx &= \int_{\Omega} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^{N-2}} + O_{\varepsilon}(1) \\ &= \int_{\Omega} \frac{dx}{\left[\varepsilon \left(1 + \frac{|x|^2}{\varepsilon}\right)\right]^{N-2}} + O_{\varepsilon}(1). \end{aligned} \quad (2.40)$$

Usando em (2.40) a mudança de variáveis $y = x/\sqrt{\varepsilon}$ com $dx = \varepsilon^{N/2} dy$, obtemos

$$\int_{B(0,3\|\xi\|)} |\omega_{\varepsilon}|^2 dx = \int_{\Omega} \frac{\varepsilon^{N/2}}{\varepsilon^{N-2}(1 + |y|^2)^{N-2}} + O_{\varepsilon}(1) = \frac{K_3}{\varepsilon^{N-4/2}} + O_{\varepsilon}(1),$$

em que $K_3 = \int_{\Omega} \frac{dy}{(1 + |y|^2)^{N-2}}$.

Quando $N = 4$, usando a fórmula de integração em coordenadas polares (Proposição (A.4)) na expressão (2.38), temos que

$$\int_{B(0,R)} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^2} = \omega_N \int_0^R \frac{r^3}{(\varepsilon + r^2)^2} dr,$$

em que ω_N é a área da esfera S^{N-1} . Multiplicando e dividindo por 4 a primeira parcela, somando e subtraindo a parcela $\int_0^R \frac{r\varepsilon}{(\varepsilon + r^2)^2} dr$ e reorganizando os termos, resulta que

$$\begin{aligned} \omega_N \int_0^R \frac{r^3}{(\varepsilon + r^2)^2} dr &= \omega_N \left(\frac{1}{4} \int_0^R \frac{4r^3}{r^4 + 2r^2\varepsilon + \varepsilon^2} dr + \int_0^R \frac{r\varepsilon}{(\varepsilon + r^2)^2} dr - \int_0^R \frac{r\varepsilon}{(\varepsilon + r^2)^2} dr \right) \\ &= \omega_N \left(\frac{1}{4} \int_0^R \frac{4r^3 + 4r\varepsilon}{r^4 + 2r^2\varepsilon + \varepsilon^2} dr - \int_0^R \frac{r\varepsilon}{(\varepsilon + r^2)^2} dr \right) \\ &= \omega_N \left(\frac{1}{4} \ln(r^4 + 2r^2\varepsilon + \varepsilon^2) \Big|_0^R - \left[\frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{\varepsilon + r^2} \right]_0^R \right) \\ &= \omega_N \left(\frac{1}{4} \ln(R^4 + 2R^2\varepsilon + \varepsilon^2) - \frac{1}{4} \ln(\varepsilon^2) - \frac{1}{2} \frac{\varepsilon}{\varepsilon + R^2} + \frac{1}{2} \right). \end{aligned}$$

Claramente a primeira, a terceira e a última parcelas são limitadas. Logo, tomando $R = 3\|\xi\|$ concluímos que

$$\int_{B(0,3\|\xi\|)} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^2} = \frac{\omega_N}{2} |\ln(\varepsilon)| + O_{\varepsilon}(1).$$

Notamos agora que

$$\int_{\Omega} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^2} = \int_{B(0,3\|\zeta\|)} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^2} + \int_{\Omega \setminus B(0,3\|\zeta\|)} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^2},$$

em que a segunda parcela da soma é limitada pois $0 \notin B(0,3\|\zeta\|)$ e a integral $\int_{\Omega} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^2}$ é finita. Assim,

$$\int_{\Omega} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^2} = \int_{B(0,3\|\zeta\|)} \frac{dx}{(\varepsilon + |x|^2)^2} + O_{\varepsilon}(1) = \frac{\omega_N}{2} |\ln(\varepsilon)| + O_{\varepsilon}(1).$$

Resumindo, existem constantes K_1, K_2, K_3 e ω (que dependem apenas de N) tais que

$$|\nabla \omega_{\varepsilon}|_2^2 = \frac{K_1}{\varepsilon^{(N-2)/2}} + O_{\varepsilon}(1). \quad (2.41)$$

$$|\omega_{\varepsilon}|_{2^*}^2 = \frac{K_2}{\varepsilon^{(N-2)/2}} + O_{\varepsilon}(\varepsilon). \quad (2.42)$$

$$\|\omega_{\varepsilon}\|_2^2 = \begin{cases} \frac{K_3}{\varepsilon^{(N-4)/2}} + O_{\varepsilon}(1) & \text{se } N \geq 5, \\ \frac{\omega_N}{2} |\ln(\varepsilon)| + O_{\varepsilon}(1) & \text{se } N = 4. \end{cases} \quad (2.43)$$

Portanto, quando $N \geq 5$ e para $\alpha = \frac{\mu}{\|\zeta\|^2}$ utilizando as estimativas (2.41), (2.42) e (2.43), podemos escrever

$$\begin{aligned} Q_0(\varepsilon) &\leq \frac{\int_{\Omega} |\nabla \omega_{\varepsilon}(x)|^2 dx - \alpha \int_{\Omega} \omega_{\varepsilon}^2(x) dx}{\left(\int_{\Omega} |\omega_{\varepsilon}(x)|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}}} \\ &= \frac{\|\nabla \omega_{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)}^2 - \alpha \|\omega_{\varepsilon}\|_{L^2(\Omega)}^2}{\|\omega_{\varepsilon}\|_{L^{2^*}(\Omega)}^2} \\ &= \frac{\frac{K_1}{\varepsilon^{N-2/2}} + O_{\varepsilon}(1) - \alpha \left(\frac{K_2}{\varepsilon^{N-4/2}} + O_{\varepsilon}(1) \right)}{\frac{K_2}{\varepsilon^{N-2/2}} + O_{\varepsilon}(\varepsilon)} \\ &= \frac{K_1 - \alpha K_3 \varepsilon + O_{\varepsilon}(\varepsilon^{N-2/2})}{K_2 + O_{\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{N}{2}})} \end{aligned} \quad (2.44)$$

$$= S - \alpha \frac{K_3}{K_2^2} \varepsilon + O_{\varepsilon}(\varepsilon^{N-2/2}). \quad (2.45)$$

Para justificar igualdade (2.44) colocamos o fator $\varepsilon^{-(N-2)/2}$ em evidência no numerador e no denominador, e obtemos

$$\begin{aligned} Q_0(\varepsilon) &\leq \frac{\varepsilon^{-(N-2)/2} \left(K_1 + O_{\varepsilon}(\varepsilon^{(N-2)/2}) - \alpha K_3 \varepsilon + O_{\varepsilon}(\varepsilon^{(N-2)/2}) \right)}{\varepsilon^{-(N-2)/2} \left(K_2 + O_{\varepsilon}(\varepsilon) \varepsilon^{(N-2)/2} \right)} \\ &= \frac{\varepsilon^{-(N-2)/2} \left(K_1 + O_{\varepsilon}(\varepsilon^{(N-2)/2}) - \alpha K_3 \varepsilon \right)}{\varepsilon^{-(N-2)/2} \left(K_2 + O_{\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{N}{2}}) \right)} \\ &= \frac{K_1 - \alpha K_3 \varepsilon + O_{\varepsilon}(\varepsilon^{N-2/2})}{K_2 + O_{\varepsilon}(\varepsilon^{\frac{N}{2}})}. \end{aligned} \quad (2.46)$$

Para justificar igualdade (2.45) usamos a série de Taylor para $1/(K_2 + x)$ em que $x = O_\varepsilon(\varepsilon^{\frac{N}{2}})$. Dessa forma,

$$\begin{aligned} \frac{1}{K_2 + x} &= \frac{1}{K_2} - \frac{1}{K_2^2}x + \frac{1}{K_2^3}x^2 - \frac{1}{K_2^4}x^3 + \frac{1}{K_2^5}x^4 - \dots \\ &= \frac{1}{K_2} + x \left(-\frac{1}{K_2^2} + \frac{1}{K_2^3}x - \frac{1}{K_2^4}x^2 + \frac{1}{K_2^5}x^3 - \dots \right). \end{aligned}$$

Considerando apenas os dois primeiros termos, obtemos

$$\frac{1}{K_2 + O_\varepsilon(\varepsilon^{\frac{N}{2}})} = \frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_2^2}O_\varepsilon(\varepsilon^{\frac{N}{2}}).$$

Prosseguindo em nossa análise da desigualdade (2.46), separamos as diversas parcelas e obtemos

$$\begin{aligned} \frac{K_1}{K_2 + O_\varepsilon(\varepsilon^{\frac{N}{2}})} &= \frac{K_1}{K_2} + \frac{K_1}{K_2^2}O_\varepsilon(\varepsilon^{\frac{N}{2}}), \\ \frac{-\alpha K_3 \varepsilon}{K_2 + O_\varepsilon(\varepsilon^{\frac{N}{2}})} &= -\alpha \frac{K_3}{K_2} \varepsilon + \alpha \frac{K_3}{K_2^2} \varepsilon O_\varepsilon(\varepsilon^{\frac{N}{2}}) = -\alpha \frac{K_3}{K_2} \varepsilon + \alpha \frac{K_3}{K_2^2} O_\varepsilon(\varepsilon^{N+2/2}), \\ \frac{O_\varepsilon(\varepsilon^{N-2/2})}{K_2 + O_\varepsilon(\varepsilon^{\frac{N}{2}})} &= \frac{O_\varepsilon(\varepsilon^{N-2/2})}{K_2} + \frac{O_\varepsilon(\varepsilon^{N-2/2})}{K_2^2} O_\varepsilon(\varepsilon^{\frac{N}{2}}) = \frac{O_\varepsilon(\varepsilon^{N-2/2})}{K_2} + \frac{O_\varepsilon(\varepsilon^{2N-2/2})}{K_2^2}. \end{aligned}$$

Agrupando as parcelas e usando a igualdade (2.37), obtemos a estimativa (2.45).

Agora analisamos o caso em que $N = 4$. Lembrando que $\alpha = \mu/\|\xi\|^2$, com base nas estimativas (2.41), (2.42) e (2.43) escrevemos

$$\begin{aligned} \frac{\frac{K_1}{\varepsilon} + O_\varepsilon(1) - \alpha \left(\frac{\omega}{2} |\ln(\varepsilon)| + O_\varepsilon(1) \right)}{\frac{K_2}{\varepsilon} + O_\varepsilon(\varepsilon)} &= \frac{K_1 + \alpha \frac{\omega}{2} |\ln(\varepsilon)| \varepsilon + O_\varepsilon(\varepsilon)}{K_2 + O_\varepsilon(\varepsilon^2)} \\ &= S + O_\varepsilon(\varepsilon) - \alpha \frac{\omega}{2K_2^2} |\ln(\varepsilon)| \varepsilon. \end{aligned} \quad (2.47)$$

Para justificar a penúltima igualdade, colocamos o fator ε^{-1} em evidência no numerador e no denominador, e obtemos

$$\frac{\varepsilon^{-1} (K_1 + O_\varepsilon(\varepsilon) - \alpha \frac{\omega}{2} |\ln(\varepsilon)| \varepsilon)}{\varepsilon^{-1} (K_2 + O_\varepsilon(\varepsilon))} = \frac{K_1 + O_\varepsilon(\varepsilon) - \alpha \frac{\omega}{2} |\ln(\varepsilon)| \varepsilon}{K_2 + O_\varepsilon(\varepsilon^2)}.$$

Para justificar a última igualdade usamos a mesma série de Taylor com os dois primeiros termos e obtemos

$$\frac{1}{K_2 + O_\varepsilon(\varepsilon^2)} = \frac{1}{K_2} + \frac{1}{K_2^2} O_\varepsilon(\varepsilon^2).$$

Portanto,

$$\begin{aligned} \frac{K_1}{K_2 + O_\varepsilon(\varepsilon^2)} &= \frac{K_1}{K_2} + \frac{K_1}{K_2^2} O_\varepsilon(\varepsilon^2), \\ \frac{\alpha \frac{\omega}{2} |\ln(\varepsilon)| \varepsilon}{K_2 + O_\varepsilon(\varepsilon^2)} &= \frac{\alpha \omega |\ln(\varepsilon)| \varepsilon}{2K_2} + \frac{\alpha \omega |\ln(\varepsilon)| \varepsilon}{2K_2^2} O_\varepsilon(\varepsilon^2) = \frac{\alpha \omega |\ln(\varepsilon)|}{2K_2^2} O_\varepsilon(\varepsilon^3), \\ \frac{O_\varepsilon(\varepsilon)}{K_2 + O_\varepsilon(\varepsilon^2)} &= \frac{O_\varepsilon(\varepsilon)}{K_2} + \frac{O_\varepsilon(\varepsilon)}{K_2^2} O_\varepsilon(\varepsilon^2) = \frac{O_\varepsilon(\varepsilon^3)}{K_2^2}. \end{aligned}$$

Agrupando as parcelas e usando novamente a igualdade (2.37), obtemos a estimativa requerida (2.47).

Resumindo,

$$Q_0(\varepsilon) \leq \begin{cases} S - \alpha \frac{K_3}{K_2^2} \varepsilon + O_\varepsilon(\varepsilon^{N-2/2}) & \text{se } N \geq 5, \\ S + \frac{\alpha \omega |\ln(\varepsilon)| \varepsilon}{2K_2^2} + O_\varepsilon(\varepsilon) & \text{se } N = 4. \end{cases}$$

Assim o quociente (2.25) tende a S quando ε tende a zero. Como $(\omega_\varepsilon) \subset W(\mathbb{R}^N)$ é uma sequência minimizante para $S_0^\mu(\Omega)$, segue-se de (2.25) que $S_0^\mu \leq S$. Por outro lado, $S \leq S_0^\mu$. Assim, $S = S_0^\mu$. Além disso, o ínfimo $S_0^\mu(\Omega)$ não pode ser atingido. De fato, a existência desse mínimo é uma contradição com a desigualdade de Sobolev. \square

2.3 Observação. As funções definidas por $u_\varepsilon(x) = \varphi(x)U_\varepsilon(x)$, em que φ é uma função corte com as propriedades (2.19) e U_ε é definida em (1.21) e (1.22) são usadas por Jannelli [8] para demonstrar a desigualdade $S_\lambda^\mu(\Omega) < S_0^\mu(\Omega)$. Como consequência do teorema anterior, no caso em que $\mu \geq 0$ essas funções de fato formam uma sequência minimizante para $S_0^\mu(\Omega)$; assim, os argumentos apresentados em [8] são válidos. Mas se $\mu < 0$ os argumentos não são mais válidos e uma outra demonstração é necessária.

2.3 Existência de solução em domínios limitados

2.4 Teorema. Se $\mu < 0$, então $S_\lambda^\mu(\Omega) < S_0^\mu(\Omega)$.

Demonstração. Definimos $z_\varepsilon(x) = v_\varepsilon(\rho x)$, em que $\rho > 0$ e v_ε são funções definidas no Teorema 2.2. Utilizamos as funções z_ε como funções testes para o ínfimo $S_\lambda^\mu(\Omega)$. Para isso devemos estimar o quociente

$$Q_\lambda(\varepsilon) = \frac{\int_\Omega |\nabla z_\varepsilon|^2 dx - \mu \int_\Omega \frac{z_\varepsilon^2(x)}{|x|^2} dx - \lambda \int_\Omega z_\varepsilon^2(x) dx}{\left(\int_\Omega |z_\varepsilon(x)|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}}}. \quad (2.48)$$

Calculamos cada termo separadamente, levando em conta novamente a invariância das integrais por translações. Começamos com o termo $\int_\Omega |\nabla z_\varepsilon(x)|^2 dx$. Para isso, observamos que

$$\frac{\partial z_\varepsilon(x)}{\partial x_i} = \frac{\partial v_\varepsilon(\rho x)}{\partial x_i} = \rho \frac{\partial v_\varepsilon(\rho x)}{\partial x_i}.$$

Logo,

$$\nabla z_\varepsilon(x) = \left(\rho \frac{\partial v_\varepsilon(\rho x)}{\partial x_1}, \dots, \rho \frac{\partial v_\varepsilon(\rho x)}{\partial x_N} \right) = \rho \left(\frac{\partial v_\varepsilon(\rho x)}{\partial x_1}, \dots, \frac{\partial v_\varepsilon(\rho x)}{\partial x_N} \right)$$

e

$$|\nabla z_\varepsilon(x)|^2 = \rho^2 \left[\left(\frac{\partial v_\varepsilon(\rho x)}{\partial x_1} \right)^2 + \dots + \left(\frac{\partial v_\varepsilon(\rho x)}{\partial x_N} \right)^2 \right] = \rho^2 |\nabla v_\varepsilon(\rho x)|^2.$$

Dessa forma,

$$\int_{\Omega} |\nabla z_\varepsilon(x)|^2 dx = \rho^2 \int_{\Omega} |\nabla v_\varepsilon(\rho x)|^2 dx.$$

Usando a mudança de variáveis $\rho x = y$ com $dx = \rho^{-N} dy$, obtemos

$$\begin{aligned} \rho^2 \int_{\Omega} |\nabla v_\varepsilon(\rho x)|^2 dx &= \rho^2 \int_{\Omega} \rho^{-N} |\nabla v_\varepsilon(y)|^2 dy \\ &= \rho^{2-N} \int_{\Omega} |\nabla v_\varepsilon(y)|^2 dy \\ &= \rho^{2-N} \int_{\Omega} |\nabla \omega_\varepsilon(y)|^2 dy, \end{aligned} \quad (2.49)$$

em que na última passagem usamos a igualdade (2.20).

Agora vamos calcular o termo $\int_{\Omega} |z_\varepsilon(x)|^2 dx$. Lembrando que $|z_\varepsilon(x)|^2 = |v_\varepsilon(\rho x)|^2$, temos

$$\int_{\Omega} |z_\varepsilon(x)|^2 dx = \int_{\Omega} |v_\varepsilon(\rho x)|^2 dx.$$

Fazendo novamente a mudança de variáveis anterior, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |v_\varepsilon(\rho x)|^2 dx &= \rho^{-N} \int_{\Omega} |v_\varepsilon(y)|^2 dy \\ &= \rho^{-N} \int_{\Omega} |\omega_\varepsilon(y)|^2 dy, \end{aligned} \quad (2.50)$$

a igualdade (2.50) pode ser obtida de uma mudança de variáveis simples utilizando as definições (2.18) de ω e de v .

Para o termo $\left(\int_{\Omega} |z_\varepsilon(x)|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}}$ temos que $|z_\varepsilon(x)|^{2^*} = |v_\varepsilon(\rho x)|^{2^*}$. Logo,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |z_\varepsilon(x)|^{2^*} dx &= \int_{\Omega} |v_\varepsilon(\rho x)|^{2^*} dx \\ &= \rho^{-N} \int_{\Omega} |v_\varepsilon(y)|^{2^*} dy. \end{aligned}$$

Prosseguindo, obtemos

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} |z_\varepsilon(x)|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} &= \left(\rho^{-N} \int_{\Omega} |v_\varepsilon(y)|^{2^*} dy \right)^{\frac{2}{2^*}} \\ &= \rho^{-N+2} \left(\int_{\Omega} |v_\varepsilon(y)|^{2^*} dy \right)^{\frac{2}{2^*}} \\ &= \rho^{-N+2} \left(\int_{\Omega} |\omega_\varepsilon(y)|^{2^*} dy \right)^{\frac{2}{2^*}}, \end{aligned} \quad (2.51)$$

em que usamos novamente a mudança de variáveis anterior e a igualdade (2.21).

Por fim, para estimar o termo $\int_{\Omega} \frac{z_{\varepsilon}^2(x)}{|x|^2} dx$, usamos outra vez a mudança de variáveis anterior e obtemos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} \frac{z_{\varepsilon}^2(x)}{|x|^2} dx &= \int_{\Omega} \frac{v_{\varepsilon}^2(\rho x)}{|x|^2} dx \\
&= \rho^{-N} \int_{\Omega} \frac{v_{\varepsilon}^2(y)}{|y/\rho|^2} dy \\
&= \rho^{-N} \int_{\Omega} \frac{v_{\varepsilon}^2(y)}{\rho^{-2}|y|^2} dy \\
&= \rho^{-N+2} \int_{\omega} \frac{v_{\varepsilon}^2(y)}{|y|^2} dy \\
&\leq \frac{\rho^{-N+2}}{\|\xi\|^2} \int_{\Omega} \omega_{\varepsilon}^2(y) dy,
\end{aligned} \tag{2.52}$$

em que na última passagem usamos a desigualdade (2.22).

Usando as igualdades (2.49), (2.50) e (2.51) bem como a desigualdade (2.52), o quociente a ser estimado torna-se

$$\begin{aligned}
Q_{\lambda}(\varepsilon) &\leq \frac{\rho^{2-N} \int_{\Omega} |\nabla \omega_{\varepsilon}(x)|^2 dx - \left(\frac{\rho^{2-N} \mu}{\|\xi\|^2} + \lambda \rho^{-N} \right) \int_{\Omega} \omega_{\varepsilon}^2(x) dx}{\rho^{2-N} \left(\int_{\Omega} |\omega_{\varepsilon}(x)|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}}} \\
&= \frac{\int_{\Omega} |\nabla \omega_{\varepsilon}(x)|^2 dx - \left(\frac{\mu}{\|\xi\|^2} + \lambda \rho^{-2} \right) \int_{\Omega} \omega_{\varepsilon}^2(x) dx}{\left(\int_{\Omega} |\omega_{\varepsilon}(x)|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}}}.
\end{aligned} \tag{2.53}$$

Para uma escolha conveniente de ρ podemos tomar a constante $\lambda \rho^{-2} + \mu / \|\xi\|^2$ positiva e utilizando argumentos e cálculos análogos aos feitos no item 2 do Teorema 2.2, mostramos que para pequenos valores de ε , o quociente (2.53) é estritamente inferior a S . Como z_{ε} são funções testes para o ínfimo $S_{\lambda}^{\mu}(\Omega)$, temos que $S_{\lambda}^{\mu}(\Omega) < S$. Por outro lado, temos a desigualdade $S, S \leq S_0^{\mu}(\Omega)$. Combinando essas desigualdades obtemos $S_{\lambda}^{\mu}(\Omega) < S_0^{\mu}(\Omega)$. Isso conclui a demonstração do teorema. \square

Finalmente podemos enunciar um resultado de existência de soluções para domínios limitados.

2.5 Teorema. *Suponha que Ω seja um aberto limitado, então o problema (1.23) tem solução.*

Demonstração. No caso em que $\mu \geq 0$, o resultado de Jannelli [8] assegura a desigualdade $S_{\lambda}^{\mu}(\Omega) < S_0^{\mu}(\Omega)$. Esse fato, juntamente com a Observação 1.6 garante que o ínfimo $S_{\lambda}^{\mu}(\Omega)$ é atingido. No caso em que $\mu < 0$, a desigualdade demonstrada no Teorema 2.4 juntamente com a Obsevação 1.6 garantem que o ínfimo $S_{\lambda}^{\mu}(\Omega)$ é atingido. O teorema fica demonstrado. \square

-3-

Existência de soluções em domínios não limitados

3.1 Lemas auxiliares

Neste capítulo vamos considerar $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ como um domínio ilimitado, mas sempre contido em um cilindro de modo a garantir a existência de $\lambda_1(\mu) > 0$. Como podemos esperar, neste caso a falta de compacidade do problema (1.16) é ainda mais grave. Lions [11, 12] estudou o problema (1.16) no caso em que $\mu = 0$ quando Ω é um cilindro, isto é, $\Omega = \Omega_1 \times \mathbb{R}^d$, em que $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{N-d}$ é limitado e $N > d \geq 1$. Posteriormente, Ramos, Wang e Willem [13], ainda no caso em que $\mu = 0$, estenderam a classe de domínios ilimitados Ω para os quais existem soluções para o problema (1.16).

Como no capítulo anterior, a ideia para demonstrar a existência de solução para o problema (1.23) é mostrar que o ínfimo $S_\lambda^\mu(\Omega)$ definido em (2.1) é atingido. Como é natural no método direto do cálculo das variações, partimos de uma sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in V(\Omega)$ tal que

$$\int_{\Omega} |\nabla u_n(x)|^2 dx - \mu \int_{\Omega} \frac{u_n^2(x)}{|x|^2} dx - \lambda \int_{\Omega} u_n^2(x) dx \rightarrow S_\lambda^\mu(\Omega).$$

Em seguida, mostramos que o limite fraco da sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ é de fato um ínfimo para $S_\lambda^\mu(\Omega)$. Mais uma vez, é nesse último passo que as dificuldades da falta de compacidade surgem. A fim de contornar essas dificuldades, usamos dois lemas auxiliares e um lema principal, que é uma variante do lema de concentração-compacidade de Lions.

Denotamos por $M(\Omega)$ o conjunto das medidas finitas sobre Ω . Escrevemos $\gamma_n \rightharpoonup \gamma$ fracamente em $M(\Omega)$ quando $n \rightarrow \infty$ se para todo $f \in C_0(\Omega)$, temos

$$\int_{\Omega} f d\gamma_n \rightarrow \int_{\Omega} f d\gamma, \quad (n \rightarrow \infty).$$

Assim, mostramos que existe uma subsequência que converge fracamente para uma função em $V(\Omega)$.

Começamos demonstrando um lema sobre convergência local.

3.1 Lema. *Sejam $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ e $u_0 \in H_0^1(\Omega)$. Se $u_n \rightharpoonup u_0$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$, então $u_n \rightarrow u_0$ fortemente em $L_{\text{loc}}^2(\Omega)$.*

Demonstração. Dado $R > 0$, temos

$$\int_{B(0,R)} |u_0|^2 dx = \int_{B(0,R)} |x|^2 \frac{1}{|x|^2} |u_0|^2 dx \leq R^2 \int_{B(0,R)} \frac{1}{|x|^2} |u_0|^2 dx. \quad (3.1)$$

Substituindo a desigualdade de Hardy (A.7) em (3.1) obtemos

$$\begin{aligned} \int_{B(0,R)} |u_0|^2 dx &\leq R^2 \int_{B(0,R)} \frac{1}{|x|^2} |u_0|^2 dx \leq R^2 \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^2} |u_0|^2 dx \\ &\leq \frac{R^2}{C} \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx = \frac{R^2}{C} \|u_0\|^2. \end{aligned} \quad (3.2)$$

Suponhamos inicialmente que $u_n \rightharpoonup 0$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$; logo a sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ é limitada e existe uma constante $M > 0$ tal que

$$\|u_n\| = \left(\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}} \leq M,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Assim, dado $\varepsilon > 0$, escolhamos $\rho > 0$ de modo que $\rho^2 < \frac{C}{M^2} \varepsilon$ e obtemos

$$\int_{B(0,\rho)} |u_n|^2 dx \leq \frac{\rho^2}{C} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx \leq \frac{\rho^2}{C} M^2 < \varepsilon.$$

Em outros termos, para todo número real $\varepsilon > 0$ existe um raio $\rho > 0$ suficientemente pequeno tal que vale a desigualdade

$$\int_{B(0,\rho)} |u_n|^2 dx \leq \varepsilon,$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. O teorema de Rellich (Teorema A.12) implica que $u_n \rightarrow 0$ fortemente em $L_{\text{loc}}^2(\Omega \setminus B(0,\rho))$.

No caso geral, em que $u_n \rightharpoonup u_0$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$, consideramos $v_n = u_n - u_0$ e aplicamos o Lema de Brézis-Lieb (Lema A.15) com $f_n = v_n$. Mais especificamente, para cada subconjunto $K \subset \Omega$ aberto, relativamente compacto, não contendo a origem e com fronteira regular, temos as inclusões compactas

$$H_0^1(K) \hookrightarrow L^2(K) \hookrightarrow L^1(K).$$

Isso significa que, se $u_n \rightharpoonup u_0$ fracamente em $H_0^1(K)$, então existe uma subsequência, ainda denotada da mesma forma, tal que $u_n \rightarrow u_0$ fortemente em $L^2(K)$, o que implica que $|u_n|^2 \rightarrow |u_0|^2$ em $L^1(K)$. Isso conclui a demonstração do lema. \square

O próximo resultado garante a convergência das sequências de gradientes e a demonstração é baseada na dissertação de Valeriola [17].

3.2 Lema. *Sejam $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ e $u_0 \in H_0^1(\Omega)$. Se $u_n \rightharpoonup u_0$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$, então*

$$\int_{\Omega} |\nabla(u_n - u_0)|^2 dx = \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx - \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx + o(1).$$

Demonstração. Cálculos diretos mostram que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\nabla(u_n - u_0)|^2 dx &= \int_{\Omega} (\nabla u_n - \nabla u_0) \cdot (\nabla u_n - \nabla u_0) dx \\ &= \int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla u_n dx + \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla u_0 dx - 2 \int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla u_0 dx. \end{aligned}$$

Como $u_n \rightharpoonup u_0$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$, segue-se que $\nabla u_n \rightharpoonup \nabla u_0$ fracamente em $L^2(\Omega)$ quando $n \rightarrow \infty$. Dessa forma, pela continuidade obtemos

$$\int_{\Omega} \nabla u_n \cdot \nabla u_0 dx \rightarrow \int_{\Omega} \nabla u_0 \cdot \nabla u_0 dx,$$

quando $n \rightarrow \infty$. Isso conclui a demonstração do lema. \square

3.2 Lema de concentração-compacidade

Nesta seção enunciamos o resultado crucial para demonstrar os Teoremas 3.5 e 3.6, e que já foi usado na demonstração do Teorema 2.1.

3.3 Lema. *Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$ tal que valem as seguintes convergências*

$$\begin{aligned} u_n &\rightharpoonup u_0 \text{ fracamente em } H_0^1(\Omega), \\ u_n &\rightarrow u_0 \text{ q.t.p. em } \Omega, \\ |\nabla(u_n - u_0)|^2 - \mu \frac{(u_n - u_0)^2}{|x|^2} &\rightharpoonup \gamma \text{ fracamente em } M(\Omega), \\ |u_n - u_0|^{2^*} &\rightharpoonup \nu \text{ fracamente em } M(\Omega). \end{aligned}$$

Seja μ' qualquer número real. Definimos

$$\gamma_{\infty} = \lim_{R \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{|x| > R} |\nabla u_n|^2 dx - \mu' \int_{|x| > R} \frac{(u_n)^2}{|x|^2} dx - \lambda \int_{|x| > R} u_n^2 dx \right], \quad (3.3)$$

$$\nu_{\infty} = \lim_{R \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{|x| > R} |u_n|^{2^*} dx \right]. \quad (3.4)$$

Notamos que γ_{∞} não depende de μ' . Então

$$\|\nu\|_{\frac{2}{2^*}} \leq (S_0^{\mu}(\Omega))^{-1} \|\gamma\|, \quad (3.5)$$

$$\nu_{\infty}^{\frac{2}{2^*}} \leq (S_{\lambda}^{\mu'}(\Omega))^{-1} \gamma_{\infty}, \quad (3.6)$$

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx - \mu \int_{\Omega} \frac{(u_n)^2}{|x|^2} dx - \lambda \int_{\Omega} u_n^2 dx \\ = \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx - \mu \int_{\Omega} \frac{(u_0)^2}{|x|^2} dx - \lambda \int_{\Omega} u_0^2 dx + \gamma_{\infty} + \|\gamma\| \end{aligned} \quad (3.7)$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_n|^{2^*} = \int_{\Omega} |u_0|^{2^*} + \nu_{\infty} + \|\nu\|. \quad (3.8)$$

Além disso, se $u_0(x) \equiv 0$ e se $\|\nu\|_{\frac{2}{2^}} = (S_0^{\mu}(\Omega))^{-1} \|\gamma\|$, então as medidas ν e γ estão concentradas em um único ponto.*

O Lema 3.3 visa classificar as possíveis perdas de compacidade de seqüências minimizantes. Na figura 3.1 apresentamos alguns casos ilustrativos e descrevemos como podemos recuperar a compacidade.

Demonstração. Vamos dividir a demonstração em seis etapas.

Etapa 1. Suponhamos inicialmente que $u_0 \equiv 0$. Para demonstrar a desigualdade (3.5), escolhamos $h \in H_0^1(\Omega)$ e, assim, temos que $(hu_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$. Como consequência da definição de $S_0^\mu(\Omega)$ temos

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} |hu_n|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} &\leq (S_0^\mu(\Omega))^{-1} \left[\int_{\Omega} |\nabla hu_n|^2 dx - \mu \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^2} |hu_n|^2 dx \right] \\ &= (S_0^\mu(\Omega))^{-1} \left[\int_{\Omega} |h \nabla u_n + u_n \nabla h|^2 dx - \mu \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^2} |hu_n|^2 dx \right], \end{aligned}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$. Como $u_n \rightharpoonup u_0$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$ o Lema (3.1) implica que $u_n \rightarrow u_0 \equiv 0$ em $L_{loc}^2(\Omega)$, isto é,

$$\int_{\Omega} |u_n|^2 dx \rightarrow \int_{\Omega} |u_0|^2 dx \equiv 0 \quad (n \rightarrow \infty).$$

Usando a desigualdade 1 do Teorema (A.3) segue-se que, dado $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$|h \nabla u_n + u_n \nabla h|^2 \leq (1 + \varepsilon) |h \nabla u_n|^2 + C_\varepsilon |u_n \nabla h|^2.$$

Sendo assim,

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} |hu_n|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} &\leq (S_0^\mu(\Omega))^{-1} \left[\int_{\Omega} |h \nabla u_n + u_n \nabla h|^2 dx - \mu \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^2} |hu_n|^2 dx \right] \\ &\leq (S_0^\mu(\Omega))^{-1} \left[(1 + \varepsilon) \int_{\Omega} |h \nabla u_n|^2 dx + C_\varepsilon \int_{\Omega} |u_n \nabla h|^2 dx - \mu \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^2} |hu_n|^2 dx \right] \\ &= (S_0^\mu(\Omega))^{-1} \left[\int_{\Omega} |h \nabla u_n|^2 dx - \mu \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^2} |hu_n|^2 dx \right. \\ &\quad \left. + C_\varepsilon \int_{\Omega} |u_n \nabla h|^2 dx + \varepsilon \int_{\Omega} |h \nabla u_n|^2 dx \right]. \end{aligned} \quad (3.9)$$

Pela definição (A.13) de convergência em medida, passando ao limite o lado esquerdo da desigualdade (3.9), obtemos

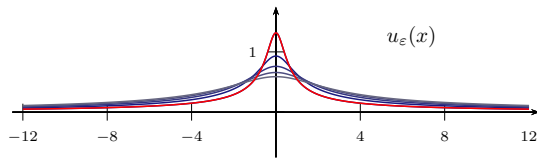
$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{\Omega} |h|^{2^*} |u_n|^{2^*} dx \right]^{\frac{2}{2^*}} = \left[\int_{\Omega} |h|^{2^*} dv \right]^{\frac{2}{2^*}} \quad (3.10)$$

E passando ao limite as duas primeiras integrais do lado direito da desigualdade (3.9), obtemos

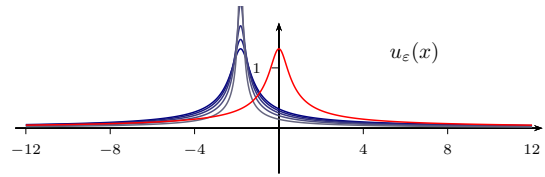
$$\lim_{n \rightarrow \infty} (S_0^\mu(\Omega))^{-1} \left[\int_{\Omega} |h|^2 |\nabla u_n|^2 dx - \mu \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^2} |hu_n|^2 dx \right] = (S_0^\mu(\Omega))^{-1} \left[\int_{\Omega} |h|^2 d\gamma \right]. \quad (3.11)$$

Além disso, pelo Lema (3.1) e pelo Teorema A.11 da Convergência Dominada, segue-se que

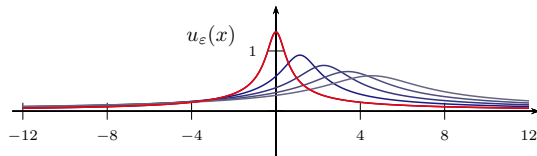
$$\lim_{n \rightarrow \infty} C_\varepsilon (S_0^\mu(\Omega))^{-1} \int_{\Omega} |u_n|^2 |\nabla h|^2 dx = 0. \quad (3.12)$$



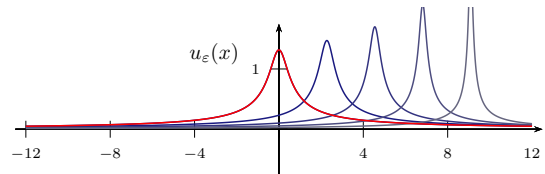
(a) Perda de compacidade por anulamento.



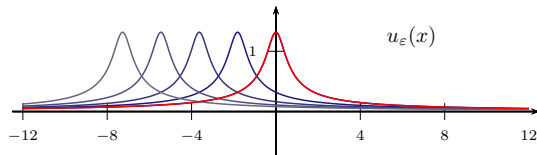
(b) Perda de compacidade por concentração.



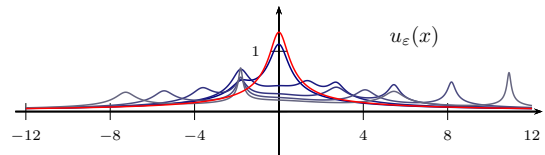
(c) Perda de compacidade por translação e anulamento.



(d) Perda de compacidade por translação e concentração.



(e) Perda de compacidade por translação.



(f) Os diversos casos anteriores ocorrendo simultaneamente.

Figura 3.1: Exemplos de situações que podem ocorrer com uma sequência minimizante e invariante por dilatações. (a) O caso do anulamento: o supremo de u_ϵ tende a zero mas não existe subsequência fortemente convergente. Após realizar as dilatações, recuperamos a compacidade. (b) O caso de concentração: a sequência concentra-se em torno do ponto $x_0 = -2$ mas não existe subsequência fortemente convergente. A compacidade pode ser recuperada realizando dilatações. (c) Nesse caso há perda de compacidade devido ao anulamento combinado com translações. A compacidade pode ser recuperada compondo translações e dilatações. (d) Outro exemplo de perda de compacidade devido à concentração combinada com translações. A compacidade pode ser recuperada do mesmo modo. (e) O caso de translação: a função desloca-se para o infinito com determinada velocidade. Novamente podemos recuperar a compacidade compondo translações e dilatações. (f) Nesse caso, os diversos fenômenos ocorrem simultaneamente, cada um deles com a quinta parte dos itens anteriores. Os casos são os seguintes: o anulamento (pouco visível na figura em decorrência da interferência com as outras parcelas); a concentração em torno do ponto $x_0 = -2$; o anulamento combinado com translações com certa velocidade; a concentração combinada com a translações para a direita com velocidade maior ainda; a translação para a esquerda com velocidade distinta. Nesse caso, não há como recuperar a compacidade pois a distância dos suportes das várias partes tende a infinito.

Resta agora analisar a passagem ao limite no último termo da desigualdade (3.9). Para isso observamos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \varepsilon (S_0^\mu(\Omega))^{-1} \int_{\Omega} |h|^2 |\nabla u_n|^2 dx = \varepsilon k, \quad (3.13)$$

em que $k > 0$ é uma constante. Dessa forma, utilizando os limites (3.10), (3.11), (3.12) e (3.13) em (3.9), obtemos a desigualdade

$$\left(\int_{\Omega} |h|^{2^*} dv \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq (S_0^\mu(\Omega))^{-1} \int_{\Omega} |h|^2 d\gamma + 0 + \varepsilon k. \quad (3.14)$$

Como a função $h \in H_0^1(\Omega)$ é arbitrária e tem medida finita e já que $\varepsilon > 0$ também é arbitrário, a desigualdade (3.14) garante que

$$\|v\|^{\frac{2}{2^*}} \leq (S_0^\mu(\Omega))^{-1} \|\gamma\|.$$

Isso demonstra a desigualdade (3.5) no caso em que $u_0 \equiv 0$.

Etapa 2. Suponhamos ainda que $u_0 \equiv 0$. Para demonstrar a desigualdade (3.6), vamos considerar a função corte $\psi_R \in C^\infty(\Omega)$ definida por $\psi_R(x) \equiv 1$, para $|x| > R + 1$, $\psi_R(x) \equiv 0$, para $|x| < R$ e ainda $0 \leq \psi_R(x) \leq 1$ para todo $x \in \Omega$. Usando novamente a desigualdade 1 do Teorema (A.3), temos

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} |\psi_R u_n|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} &\leq (S_\lambda^{\mu'}(\Omega))^{-1} \left[\int_{\Omega} |\nabla(\psi_R u_n)|^2 dx - \mu' \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^2} |\psi_R u_n|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} |\psi_R u_n|^2 dx \right] \\ &\leq (S_\lambda^{\mu'}(\Omega))^{-1} \left[(1 + \varepsilon) \int_{\Omega} |\psi_R|^2 |\nabla u_n|^2 dx - \mu' \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^2} |\psi_R u_n|^2 dx \right. \\ &\quad \left. - \lambda \int_{\Omega} |\psi_R u_n|^2 dx + C_\varepsilon \int_{\Omega} |u_n|^2 |\nabla \psi_R|^2 dx \right] \\ &\leq (S_\lambda^{\mu'}(\Omega))^{-1} \left[\int_{\Omega} |\psi_R|^2 |\nabla u_n|^2 dx - \mu' \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^2} |\psi_R u_n|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} |\psi_R u_n|^2 dx \right. \\ &\quad \left. + C_\varepsilon \int_{\Omega} |u_n|^2 |\nabla \psi_R|^2 dx + \varepsilon \int_{\Omega} |\psi_R|^2 |\nabla u_n|^2 dx \right]. \quad (3.15) \end{aligned}$$

Segue-se do Lema (3.1) que $u_n \rightarrow u_0 \equiv 0$ em $L_{\text{loc}}^2(\Omega)$ e como a função $\nabla \psi_R$ tem suporte compacto, obtemos

$$\begin{aligned} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} |\psi_R u_n|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} &\leq \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (S_\lambda^{\mu'}(\Omega))^{-1} \left[\int_{\Omega} |\psi_R|^2 |\nabla u_n|^2 dx - \mu' \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^2} |\psi_R u_n|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} |\psi_R u_n|^2 dx \right] \\ &\quad + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} C_\varepsilon (S_\lambda^{\mu'}(\Omega))^{-1} \int_{\Omega} |u_n|^2 |\nabla \psi_R|^2 dx \\ &\quad + \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \varepsilon (S_\lambda^{\mu'}(\Omega))^{-1} \int_{\Omega} |\psi_R|^2 |\nabla u_n|^2 dx. \quad (3.16) \end{aligned}$$

Por outro lado, da definição de ψ_R segue-se que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\psi_R|^2 |\nabla u_n|^2 dx &= \int_{|x|>R+1} |\psi_R|^2 |\nabla u_n|^2 dx + \int_{|x|\leq R+1} |\psi_R|^2 |\nabla u_n|^2 dx \\ &= \int_{|x|>R+1} |\nabla u_n|^2 dx + \int_{|x|\leq R+1} |\psi_R|^2 |\nabla u_n|^2 dx \\ &\geq \int_{|x|>R+1} |\nabla u_n|^2 dx. \end{aligned}$$

Analogamente,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\psi_R|^2 |\nabla u_n|^2 dx &= \int_{|x|>R} |\psi_R|^2 |\nabla u_n|^2 dx + \int_{|x|\leq R} |\psi_R|^2 |\nabla u_n|^2 dx \\ &= \int_{|x|>R} |\psi_R|^2 |\nabla u_n|^2 dx \\ &\leq \int_{|x|>R} |\nabla u_n|^2 dx. \end{aligned}$$

Raciocinando de forma similar, temos que

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^2} |\psi_R|^2 |u_n|^2 dx &= \int_{|x|>R+1} \frac{1}{|x|^2} |\psi_R|^2 |u_n|^2 dx + \int_{|x|\leq R+1} \frac{1}{|x|^2} |\psi_R|^2 |u_n|^2 dx \\ &= \int_{|x|>R+1} \frac{1}{|x|^2} |u_n|^2 dx + \int_{|x|\leq R+1} \frac{1}{|x|^2} |\psi_R|^2 |u_n|^2 dx \\ &\geq \int_{|x|>R+1} \frac{1}{|x|^2} |u_n|^2 dx, \end{aligned}$$

e, analogamente,

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^2} |\psi_R|^2 |u_n|^2 dx &= \int_{|x|>R} \frac{1}{|x|^2} |\psi_R|^2 |u_n|^2 dx + \int_{|x|\leq R} \frac{1}{|x|^2} |\psi_R|^2 |u_n|^2 dx \\ &= \int_{|x|>R} \frac{1}{|x|^2} |\psi_R|^2 |u_n|^2 dx \\ &\leq \int_{|x|>R} \frac{1}{|x|^2} |u_n|^2 dx. \end{aligned}$$

Por fim, também temos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\psi_R|^2 |u_n|^2 dx &= \int_{|x|>R+1} |\psi_R|^2 |u_n|^2 dx + \int_{|x|\leq R+1} |\psi_R|^2 |u_n|^2 dx \\ &= \int_{|x|>R+1} |u_n|^2 dx + \int_{|x|\leq R+1} |\psi_R|^2 |u_n|^2 dx \\ &\geq \int_{|x|>R+1} |u_n|^2 dx, \end{aligned}$$

e também

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} |\psi_R|^2 |u_n|^2 dx &= \int_{|x|>R} |\psi_R|^2 |u_n|^2 dx + \int_{|x|\leq R} |\psi_R|^2 |u_n|^2 dx \\ &= \int_{|x|>R} |\psi_R|^2 |u_n|^2 dx \\ &\leq \int_{|x|>R} |u_n|^2 dx. \end{aligned}$$

Combinando esses diversos resultados, temos as seguintes desigualdades:

$$\int_{|x|>R} |\nabla u_n|^2 dx \geq \int_{\Omega} |\psi_R|^2 |\nabla u_n|^2 dx \geq \int_{|x|>R+1} |\nabla u_n|^2 dx, \quad (3.17)$$

$$\int_{|x|>R} \frac{1}{|x|^2} |u_n|^2 dx \geq \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^2} |\psi_R|^2 |u_n|^2 dx \geq \int_{|x|>R+1} \frac{1}{|x|^2} |u_n|^2 dx, \quad (3.18)$$

$$\int_{|x|>R} |u_n|^2 dx \geq \int_{\Omega} |\psi_R|^2 |u_n|^2 dx \geq \int_{|x|>R+1} |u_n|^2 dx. \quad (3.19)$$

Multiplicando a desigualdade (3.18) por $-\mu'$, em que $\mu' \leq 0$, obtemos

$$-\mu' \int_{|x|>R} |u_n|^2 \frac{1}{|x|^2} dx \geq -\mu' \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^2} |\psi_R|^2 |u_n|^2 dx \geq -\mu' \int_{|x|>R+1} \frac{1}{|u_n|^2} dx. \quad (3.20)$$

Multiplicando a desigualdade (3.19) por $-\lambda$, em que $\lambda \in (0, \lambda_1(\mu))$, obtemos

$$-\lambda \int_{|x|>R+1} |u_n|^2 dx \geq -\lambda \int_{\Omega} |\psi_R|^2 |u_n|^2 dx \geq -\lambda \int_{|x|>R} |u_n|^2 dx. \quad (3.21)$$

Assim, de (3.17), (3.21) e (3.20) obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{|x|>R+1} |\nabla u_n|^2 dx - \lambda \int_{|x|>R} |u_n|^2 dx - \mu' \int_{|x|>R+1} \frac{1}{|x|^2} |u_n|^2 dx \\ & \leq \int_{\Omega} |\psi_R|^2 |\nabla u_n|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} |\psi_R|^2 |u_n|^2 dx - \mu' \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^2} |\psi_R|^2 |u_n|^2 dx \\ & \leq \int_{|x|>R} |\nabla u_n|^2 dx - \lambda \int_{|x|>R+1} |u_n|^2 dx - \mu' \int_{|x|>R} \frac{1}{|x|^2} |\psi_R|^2 |u_n|^2 dx. \end{aligned} \quad (3.22)$$

Usando a definição de γ_{∞} e a desigualdade (3.22) resulta que

$$\begin{aligned} \gamma_{\infty} & := \lim_{R \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{|x|>R+1} |\nabla u_n|^2 dx - \lambda \int_{|x|>R} |u_n|^2 dx - \mu' \int_{|x|>R+1} \frac{1}{|x|^2} |u_n|^2 dx \right] \\ & \leq \lim_{R \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{|x|>R} |\nabla u_n|^2 dx - \lambda \int_{|x|>R+1} |u_n|^2 dx - \mu' \int_{|x|>R} \frac{1}{|x|^2} |\psi_R|^2 |u_n|^2 dx \right] \\ & = \gamma_{\infty}. \end{aligned}$$

Isto significa que valem as igualdades nas expressões anteriores, ou seja,

$$\gamma_{\infty} = \lim_{R \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{\Omega} |\psi_R|^2 |\nabla u_n|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} |\psi_R|^2 |u_n|^2 dx - \mu' \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^2} |\psi_R|^2 |u_n|^2 dx \right]. \quad (3.23)$$

No caso em que $\mu' > 0$, a desigualdade (3.18) torna-se

$$-\mu' \int_{|x|>R+1} |u_n|^2 \frac{1}{|x|^2} dx \geq -\mu' \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^2} |\psi_R|^2 |u_n|^2 dx \geq -\mu' \int_{|x|>R} \frac{1}{|u_n|^2} dx. \quad (3.24)$$

Sendo assim, de (3.17), (3.21) e (3.24) segue o mesmo resultado.

Novamente, pela definição de ψ_R , temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |(\psi_R u_n)(x)|^{2^*} dx &= \int_{\Omega} |\psi_R(x)|^{2^*} |u_n(x)|^{2^*} dx \\
&= \int_{|x|>R+1} |\psi_R(x)|^{2^*} |u_n(x)|^{2^*} dx + \int_{|x|\leq R+1} |\psi_R(x)|^{2^*} |u_n(x)|^{2^*} dx \\
&= \int_{|x|>R+1} |u_n(x)|^{2^*} dx + \int_{|x|\leq R+1} |\psi_R(x)|^{2^*} |u_n(x)|^{2^*} dx \\
&\geq \int_{|x|>R+1} |u_n(x)|^{2^*} dx,
\end{aligned}$$

e também temos

$$\begin{aligned}
\int_{\Omega} |\psi_R(x)|^{2^*} |u_n(x)| dx &= \int_{|x|>R} |\psi_R(x)|^{2^*} |u_n(x)|^{2^*} dx + \int_{|x|\leq R} |\psi_R(x)|^{2^*} |u_n(x)|^{2^*} dx \\
&= \int_{|x|>R} |\psi_R(x)|^{2^*} |u_n(x)|^{2^*} dx \\
&\leq \int_{|x|>R} |u_n(x)|^{2^*} dx.
\end{aligned}$$

Combinando essas desigualdades, temos

$$\int_{|x|>R+1} |u_n(x)|^{2^*} dx \leq \int_{\Omega} |\psi_R(x)|^{2^*} |u_n(x)|^{2^*} dx \leq \int_{|x|>R} |u_n(x)|^{2^*} dx. \quad (3.25)$$

Usando a definição de v_{∞} e a desigualdade (3.25), segue-se que

$$\begin{aligned}
v_{\infty} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{|x|>R+1} |u_n(x)|^{2^*} dx \right) \\
&\leq \lim_{R \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} |\psi_R(x)|^{2^*} |u_n(x)|^{2^*} dx \right) \\
&\leq \lim_{R \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{|x|>R} |u_n(x)|^{2^*} dx \right) \\
&= v_{\infty}.
\end{aligned}$$

Assim, novamente temos que valem as igualdades nas expressões anteriores, ou seja,

$$v_{\infty} = \lim_{R \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |\psi_R(x)|^{2^*} |u_n(x)|^{2^*} dx. \quad (3.26)$$

Sabemos pelo Lema 3.1 juntamente com o Teorema A.11 da Convergência Dominada que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} |\nabla \psi_R|^2 |u_n|^2 dx \right) = 0. \quad (3.27)$$

Da desigualdade (3.16) e das expressões (3.23), (3.26) e (3.27), obtemos

$$\begin{aligned}
v_\infty^{\frac{2}{2^*}} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} |\psi_R(x)|^{2^*} |u_n(x)|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \\
&\leq \lim_{R \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (S_\lambda^{\mu'}(\Omega))^{-1} \left[\int_{\Omega} |\psi_R|^2 |\nabla u_n|^2 dx - \mu' \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^2} |\psi_R|^2 |u_n|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} |\psi_R|^2 |u_n|^2 dx \right] \\
&\quad + \lim_{R \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (S_\lambda^{\mu'}(\Omega))^{-1} C_\varepsilon \int_{\Omega} |\nabla \psi_R|^2 |u_n|^2 dx \\
&\quad + \lim_{R \rightarrow \infty} \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} (S_\lambda^{\mu'}(\Omega))^{-1} \varepsilon \int_{\Omega} |\psi_R|^2 |\nabla u_n|^2 dx \\
&= (S_\lambda^{\mu'}(\Omega))^{-1} \gamma_\infty + \varepsilon k,
\end{aligned}$$

em que $k > 0$ é uma constante, pois o último termo da soma é produto de ε por uma integral limitada. Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, temos $v_\infty^{\frac{2}{2^*}} \leq (S_\lambda^{\mu'}(\Omega))^{-1} \gamma_\infty$ e isso demonstra a desigualdade (3.6) no caso em que $u_0 \equiv 0$.

Etapa 3. Suponhamos ainda que $u_0(x) \equiv 0$ e que, além disso, vale a igualdade em (3.5), isto é, $\|v\|_{\frac{2}{2^*}} = (S_0^\mu(\Omega))^{-1} \|\gamma\|$. Aplicando a desigualdade de Hölder em (3.14), temos que para qualquer $h \in H_0^1(\Omega)$,

$$\begin{aligned}
\left(\int_{\Omega} |h|^{2^*} dv \right)^{\frac{2}{2^*}} &\leq (S_0^\mu(\Omega))^{-1} \int_{\Omega} |h|^2 d\gamma \\
&\leq (S_0^\mu(\Omega))^{-1} \left(\int_{\Omega} |h|^{2^*} d\gamma \right)^{\frac{2}{2^*}} \left(\int_{\Omega} d\gamma \right)^{\frac{(2^*-2)}{2^*}} \\
&= (S_0^\mu(\Omega))^{-1} \left(\int_{\Omega} |h|^{2^*} d\gamma \right)^{\frac{2}{2^*}} \|\gamma\|^{\frac{(2^*-2)}{2^*}},
\end{aligned}$$

em que $q = 2^*/2$ e $q' = 2^*/(2^* - 2)$. Deduzimos da última igualdade que

$$v = (S_0^\mu(\Omega))^{-\frac{2^*}{2}} \|\gamma\|^{\frac{(2^*-2)}{2}} \gamma. \quad (3.28)$$

De fato, suponhamos que não seja válida a igualdade (3.28). Então existe um subconjunto aberto $\Omega' \subset \Omega$ tal que vale a desigualdade estrita

$$v(\Omega') < (S_0^\mu(\Omega))^{-\frac{2^*}{2}} \|\gamma\|^{\frac{(2^*-2)}{2}} \gamma(\Omega').$$

Dessa forma,

$$\begin{aligned}
\|v\| &= \int_{\Omega'} dv + \int_{\Omega \setminus \Omega'} dv \\
&< \int_{\Omega'} (S_0^\mu(\Omega))^{-\frac{2^*}{2}} \|\gamma\|^{\frac{(2^*-2)}{2}} d\gamma + \int_{\Omega \setminus \Omega'} (S_0^\mu(\Omega))^{-\frac{2^*}{2}} \|\gamma\|^{\frac{(2^*-2)}{2}} d\gamma \\
&= \int_{\Omega} (S_0^\mu(\Omega))^{-\frac{2^*}{2}} \|\gamma\|^{\frac{(2^*-2)}{2}} d\gamma \\
&= (S_0^\mu(\Omega))^{-\frac{2^*}{2}} \|\gamma\|^{\frac{2^*}{2}}.
\end{aligned}$$

Consequentemente, vale a desigualdade estrita $\|v\|_{\frac{2}{2^*}}^2 < (S_0^\mu(\Omega))^{-1} \|\gamma\|$, o que é uma contradição com a hipótese. Logo, vale a igualdade (3.28).

Disso resulta que

$$\gamma = (S_0^\mu(\Omega))^{\frac{2^*}{2}} \|\gamma\|^{-\frac{(2^*-2)}{2}} v. \quad (3.29)$$

Substituindo γ em (3.14), segue-se que

$$\begin{aligned} \left(\int_{\Omega} |h|^{2^*} dv \right)^{\frac{2}{2^*}} &\leq (S_0^\mu(\Omega))^{-1} \int_{\Omega} |h|^2 (S_0^\mu(\Omega))^{\frac{2^*}{2}} \|\gamma\|^{-\frac{(2^*-2)}{2}} dv \\ &\leq (S_0^\mu(\Omega))^{\frac{(2^*-2)}{2}} \|\gamma\|^{-\frac{(2^*-2)}{2}} \int_{\Omega} |h|^2 dv. \end{aligned}$$

Em outras palavras,

$$\left(\int_{\Omega} |h|^{2^*} dv \right)^{\frac{2}{2^*}} (S_0^\mu(\Omega))^{-\frac{(2^*-2)}{2}} \|\gamma\|^{\frac{(2^*-2)}{2}} \leq \int_{\Omega} |h|^2 dv. \quad (3.30)$$

Utilizando (3.30) e a hipótese $\|v\|_{\frac{2}{2^*}}^2 = (S_0^\mu(\Omega))^{-1} \|\gamma\|$, temos que

$$\left(\int_{\Omega} |h|^{2^*} dv \right)^{\frac{2}{2^*}} (S_0^\mu(\Omega))^{-\frac{(2^*-2)}{2}} \|\gamma\|^{\frac{(2^*-2)}{2}} = \left(\int_{\Omega} |h|^2 dv \right)^{\frac{2}{2^*}} \|v\|_{\frac{2}{2^*}}^{\frac{(2^*-2)}{2}}. \quad (3.31)$$

Logo, da desigualdade (3.30) e da igualdade (3.31), obtemos

$$\left(\int_{\Omega} |h|^2 dv \right)^{\frac{2}{2^*}} \|v\|_{\frac{2}{2^*}}^{\frac{(2^*-2)}{2}} \leq \int_{\Omega} |h|^2 dv,$$

para toda função $h \in H_0^1(\Omega)$. Mais ainda, para cada conjunto $\Omega' \subset \Omega$ vale a desigualdade

$$[v(\Omega')]^{\frac{2}{2^*}} \|v\|_{\frac{2}{2^*}}^{\frac{(2^*-2)}{2}} \leq v(\Omega').$$

Portanto,

$$[v(\Omega')]^{\frac{2}{2^*}} [v(\Omega)]^{\frac{(2^*-2)}{2}} \leq v(\Omega'). \quad (3.32)$$

Como o subconjunto $\Omega' \subset \Omega$ é arbitrário, a desigualdade (3.32) nos diz que $v(\Omega') = 0$ ou $[v(\Omega')]^{\frac{2}{2^*}} [v(\Omega)]^{\frac{(2^*-2)}{2}} \leq v(\Omega')$ para $v(\Omega') \neq 0$, isto é,

$$[v(\Omega)]^{\frac{2}{2^*}} \leq [v(\Omega')]^{1-\frac{2}{2^*}} = [v(\Omega')]^{\frac{(2-2^*)}{2^*}}.$$

Assim, $v(\Omega) = v(\Omega')$. Em outras palavras, a medida v é zero ou é total e, portanto, está concentrada em um único ponto. Usando a igualdade (3.29), segue-se que a medida γ também concentra-se em um único ponto.

Etapa 4. Nessa etapa vamos considerar o caso geral em que $u_n \rightharpoonup u_0$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$ e escrevemos $v_n = u_n - u_0$. Assim, $v_n \rightharpoonup 0$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$. Devemos mostrar que

$$|\nabla u_n|^2 - \mu \frac{u_n^2}{|x|^2} \rightharpoonup \gamma + |\nabla u_0|^2 + \mu \frac{u_0^2}{|x|^2} \text{ em } M(\Omega).$$

Para isso vamos verificar que para qualquer $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ vale

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f \left(|\nabla u_n|^2 + \mu \frac{u_n^2}{|x|^2} \right) dx = \int_{\Omega} f d\gamma + \int_{\Omega} f \left(|\nabla u_0|^2 + \mu \frac{u_0^2}{|x|^2} \right) dx.$$

Por hipótese, temos que

$$|\nabla(u_n - u_0)|^2 - \mu \frac{(u_n - u_0)^2}{|x|^2} \rightharpoonup \gamma \text{ em } M(\Omega),$$

ou seja, para qualquer $f \in \mathcal{D}(\Omega)$ vale

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f \left(|\nabla(u_n - u_0)|^2 - \mu \frac{(u_n - u_0)^2}{|x|^2} \right) dx \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f |\nabla(u_n - u_0)|^2 dx - \mu \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f \frac{(u_n - u_0)^2}{|x|^2} dx = \int_{\Omega} f d\gamma. \end{aligned}$$

Usando o Lema 3.2, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f |\nabla u_n|^2 dx - \int_{\Omega} f |\nabla u_0|^2 dx - \mu \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f \frac{(u_n - u_0)^2}{|x|^2} dx = \int_{\Omega} f d\gamma. \quad (3.33)$$

Pelo Lema A.15 de Brézis-Lieb, aplicado a $f_n = u_n$, $f = u_0$ e $p = 2$, obtemos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left[\int_{\Omega} f \frac{u_n^2}{|x|^2} dx - \int_{\Omega} f \frac{(u_n - u_0)^2}{|x|^2} dx \right] = \int_{\Omega} f \frac{u_0^2}{|x|^2} dx.$$

Dessa forma,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f \frac{(u_n - u_0)^2}{|x|^2} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f \frac{u_n^2}{|x|^2} dx - \int_{\Omega} f \frac{u_0^2}{|x|^2} dx. \quad (3.34)$$

Substituindo (3.34) em (3.33), concluímos que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f |\nabla u_n|^2 dx - \int_{\Omega} f |\nabla u_0|^2 dx - \mu \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f \frac{u_n^2}{|x|^2} dx - \int_{\Omega} f \frac{u_0^2}{|x|^2} dx \right) = \int_{\Omega} f d\gamma. \quad (3.35)$$

Reescevendo o limite (3.35), resulta que

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} f \left(|\nabla u_n|^2 - \mu \frac{u_n^2}{|x|^2} \right) dx = \int_{\Omega} f d\gamma + \int_{\Omega} f \left(|\nabla u_0|^2 - \mu \frac{u_0^2}{|x|^2} \right) dx,$$

e, pela Definição A.13 de convergência fraca em medida, obtemos

$$|\nabla u_n|^2 - \mu \frac{u_n^2}{|x|^2} \rightharpoonup \gamma + |\nabla u_0|^2 - \mu \frac{u_0^2}{|x|^2} \text{ em } M(\Omega). \quad (3.36)$$

Consideramos agora $h \in \mathcal{D}(\Omega)$ não negativa e seja $f_n = h^{\frac{1}{2^*}} |u_n|$. Sabemos que $f_n \rightharpoonup f$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$ pois $u_n \rightharpoonup u_0$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$. Assim, pelo Teorema de Rellich (Teorema A.12) temos que $f_n \rightarrow f$ fortemente em $L^{2^*}(\Omega)$. Portanto, $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em

$L^{2^*}(\Omega)$. Além disso, como por hipótese $u_n \rightarrow u_0$ q.t.p. em Ω , então $f_n \rightarrow f$ q.t.p. em Ω . Sendo assim, pelo Lema A.15 de Brézis-Lieb, aplicado a $f_n = u_n$, $f = u_0$ e $p = 2^*$, obtemos

$$\begin{aligned} \int_{\Omega} h|u_0|^{2^*} dx &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} h|u_n|^{2^*} dx - \int_{\Omega} h|v_n|^{2^*} dx \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} h|u_n|^{2^*} dx \right) - \int_{\Omega} h dv, \end{aligned}$$

ou seja,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} h|u_n|^{2^*} dx \right) = \int_{\Omega} h dv + \int_{\Omega} h|u_0|^{2^*} dx.$$

Pela Definição A.13 de convergência fraca em medida, obtemos

$$|u_n|^{2^*} \rightharpoonup v + |u_0|^{2^*} \text{ em } M(\Omega). \quad (3.37)$$

Com as convergências fracas (3.36) e (3.37), a desigualdade (3.5) no caso geral segue da correspondente desigualdade para a sequência $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H_0^1(\Omega)$.

Etapa 5. Começamos analisando a expressão

$$\begin{aligned} & \left| \int_{|x|>R} |\nabla v_n|^2 dx - \mu' \int_{|x|>R} \frac{|v_n|^2}{|x|^2} dx - \lambda \int_{|x|>R} |v_n|^2 dx \right. \\ & \quad \left. - \left(\int_{|x|>R} |\nabla u_n|^2 dx - \mu' \int_{|x|>R} \frac{|u_n|^2}{|x|^2} dx - \lambda \int_{|x|>R} |u_n|^2 dx \right) \right| \\ &= \left| \int_{|x|>R} |\nabla(u_n - u_0)|^2 dx - \mu' \int_{|x|>R} \frac{|u_n - u_0|^2}{|x|^2} dx - \lambda \int_{|x|>R} |u_n - u_0|^2 dx \right. \\ & \quad \left. - \left(\int_{|x|>R} |\nabla u_n|^2 dx - \mu' \int_{|x|>R} \frac{|u_n|^2}{|x|^2} dx - \lambda \int_{|x|>R} |u_n|^2 dx \right) \right| \\ &= \left| \int_{|x|>R} (|\nabla(u_n - u_0)|^2 - |\nabla u_n|^2) dx - \mu' \int_{|x|>R} \frac{1}{|x|^2} (|u_n - u_0|^2 - |u_n|^2) dx \right. \\ & \quad \left. - \lambda \int_{|x|>R} |u_n - u_0|^2 - |u_n|^2 dx \right| \\ &= \left| \int_{|x|>R} (|\nabla(u_n - u_0)|^2 - |\nabla u_n|^2) - \frac{\mu'}{|x|^2} (|u_n - u_0|^2 - |u_n|^2) - \lambda (|u_n - u_0|^2 - |u_n|^2) dx \right| \\ &\leq \int_{|x|>R} \left| (|\nabla(u_n - u_0)|^2 - |\nabla u_n|^2) - \frac{\mu'}{|x|^2} (|u_n - u_0|^2 - |u_n|^2) - \lambda (|u_n - u_0|^2 - |u_n|^2) \right| dx \\ &\leq \int_{|x|>R} \left(\left| |\nabla(u_n - u_0)|^2 - |\nabla u_n|^2 \right| + \frac{|\mu'|}{|x|^2} \left| |u_n - u_0|^2 - |u_n|^2 \right| + |\lambda| \left| |u_n - u_0|^2 - |u_n|^2 \right| \right) dx. \end{aligned} \quad (3.38)$$

Usando a desigualdade 2 do Teorema (A.3) com $a = |\nabla u_n|$ e $b = |-\nabla u_0|$, segue-se que, dado $\varepsilon > 0$ existe $C_\varepsilon > 0$ tal que

$$\left| |\nabla u_n - \nabla u_0|^2 - |\nabla u_n|^2 \right| \leq \varepsilon |\nabla u_n|^2 + C_\varepsilon |\nabla u_0|^2. \quad (3.39)$$

Para a segunda e a terceira parcelas da desigualdade (3.38) aplicamos novamente a desigualdade 2 do Teorema (A.3) agora com $a = u_n$ e $b = -u_0$; assim, obtemos

$$||u_n - u_0|^2 - |u_n|^2| \leq \varepsilon |u_n|^2 + C_\varepsilon |u_0|^2. \quad (3.40)$$

Dessa forma, substituindo as desigualdades (3.39) e (3.40) em (3.38), obtemos

$$\begin{aligned} & \int_{|x|>R} \left(||\nabla(u_n - u_0)|^2 - |\nabla u_n|^2| + \frac{|\mu'|}{|x|^2} ||u_n - u_0|^2 + |u_n|^2| + |\lambda| ||u_n - u_0|^2 - |u_n|^2| \right) dx \\ & \leq \int_{|x|>R} (\varepsilon |\nabla u_n|^2 + C_\varepsilon |\nabla u_0|^2) dx + |\mu'| \int_{|x|>R} \frac{(\varepsilon |u_n|^2 + C_\varepsilon |u_0|^2)}{|x|^2} dx \\ & \quad + |\lambda| \int_{|x|>R} (\varepsilon |u_n|^2 + C_\varepsilon |u_0|^2) dx \\ & = \varepsilon \left(\int_{|x|>R} |\nabla u_n|^2 dx + |\mu'| \int_{|x|>R} \frac{|u_n|^2}{|x|^2} dx + |\lambda| \int_{|x|>R} |u_n|^2 dx \right) \\ & \quad + C_\varepsilon \left(\int_{|x|>R} |\nabla u_0|^2 dx + |\mu'| \int_{|x|>R} \frac{|u_0|^2}{|x|^2} dx + |\lambda| \int_{|x|>R} |u_0|^2 dx \right). \end{aligned}$$

Notamos que o primeiro termo é limitado; logo, quando $n \rightarrow \infty$ esse termo tende a um valor k e o segundo termo é integrável e tende a zero quando $R \rightarrow \infty$. Assim,

$$\begin{aligned} & \int_{|x|>R} \left(||\nabla(u_n - u_0)|^2 - |\nabla u_n|^2| + \frac{|\mu'|}{|x|^2} ||u_n - u_0|^2 + |u_n|^2| + |\lambda| ||u_n - u_0|^2 - |u_n|^2| \right) dx \\ & \leq \varepsilon k + C_\varepsilon o(1). \end{aligned} \quad (3.41)$$

Como $\varepsilon > 0$ é arbitrário, vemos que

$$\begin{aligned} & \int_{|x|>R} |\nabla v_n|^2 dx - \mu' \int_{|x|>R} \frac{|v_n|^2}{|x|^2} dx - \lambda \int_{|x|>R} |v_n|^2 dx \\ & = \int_{|x|>R} |\nabla u_n|^2 dx - \mu' \int_{|x|>R} \frac{|u_n|^2}{|x|^2} dx - \lambda \int_{|x|>R} |u_n|^2 dx. \end{aligned}$$

Agora consideramos a sequência $f_n = |u_n|$. Como $u_n \rightharpoonup u_0$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$ segue-se que $f_n \rightharpoonup f$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$. Pelo Lema A.15 de Brézis-Lieb, segue-se que

$$\int_{|x|>R} |u_0|^{2^*} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{|x|>R} |u_n|^{2^*} dx - \int_{|x|>R} |v_n|^{2^*} dx \right),$$

e passando ao limite quando $R \rightarrow \infty$ obtemos

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{|x|>R} |u_0|^{2^*} dx \right) = \lim_{R \rightarrow \infty} \left[\lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{|x|>R} |u_n|^{2^*} dx - \int_{|x|>R} |v_n|^{2^*} dx \right) \right].$$

Como $|u_0|^{2^*}$ é integrável sabemos que $\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{|x|>R} |u_0|^{2^*} dx \right) = 0$. Logo,

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x|>R} |v_n|^{2^*} dx \right) = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{|x|>R} |u_n|^{2^*} dx \right) = v_\infty. \quad (3.42)$$

Finalmente, dos limites (3.41) e (3.42), concluímos que vale a desigualdade (3.6) no caso geral.

Etapa 6. Para todo $R > 1$ temos

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} |\nabla u_n|^2 dx - \mu \int_{\Omega} \frac{1}{|x|^2} |u_n|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} |u_n|^2 dx \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} |\psi_R|^2 |\nabla u_n|^2 dx - \mu \int_{\Omega} |\psi_R|^2 \frac{1}{|x|^2} |u_n|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} |\psi_R|^2 |u_n|^2 dx \right. \\ &\quad \left. + \int_{\Omega} (1 - \psi_R^2) |\nabla u_n|^2 dx - \mu \int_{\Omega} (1 - \psi_R^2) \frac{1}{|x|^2} |u_n|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} (1 - \psi_R^2) |u_n|^2 dx \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} |\psi_R|^2 |\nabla u_n|^2 dx - \mu \int_{\Omega} |\psi_R|^2 \frac{1}{|x|^2} |u_n|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} |\psi_R|^2 |u_n|^2 dx \right) \\ &\quad + \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} (1 - \psi_R^2) |\nabla u_n|^2 dx - \mu \int_{\Omega} (1 - \psi_R^2) \frac{1}{|x|^2} |u_n|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} (1 - \psi_R^2) |u_n|^2 dx \right). \end{aligned}$$

Passando ao limite quando $R \rightarrow \infty$, na primeira parcela obtemos a definição de γ_{∞} . Resta estudar a segunda parcela. Para isso utilizamos a convergência em medida (3.36), a saber

$$|\nabla u_n|^2 - \mu \frac{u_n^2}{|x|^2} \rightharpoonup \gamma + |\nabla u_0|^2 - \mu \frac{u_0^2}{|x|^2} \quad \text{em } M(\Omega).$$

Ressaltamos que no presente caso temos um termo adicional $-\lambda \int_{\Omega} |u_n|^2 dx$. Entretanto, todas as passagens realizadas na *Etapa 4*. continuam válidas com esse termo. Dessa forma,

$$\begin{aligned} & \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} (1 - \psi_R^2) \left(|\nabla u_n|^2 - \mu \frac{1}{|x|^2} |u_n|^2 - \lambda |u_n|^2 \right) dx \right) \\ &= \int_{\Omega} (1 - \psi_R^2) d\gamma + \int_{\Omega} (1 - \psi_R^2) \left(|\nabla u_0|^2 - \frac{\mu}{|x|^2} |u_0|^2 - \lambda |u_0|^2 \right) dx \\ &= \int_{\Omega} d\gamma - \int_{\Omega} \psi_R^2 d\gamma + \int_{\Omega} \left(|\nabla u_0|^2 - \frac{\mu}{|x|^2} |u_0|^2 - \lambda |u_0|^2 \right) dx \\ &\quad - \int_{\Omega} \psi_R^2 \left(|\nabla u_0|^2 - \frac{\mu}{|x|^2} |u_0|^2 - \lambda |u_0|^2 \right) dx. \end{aligned}$$

Fazendo $R \rightarrow \infty$, obtemos

$$\|\gamma\| + \int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx + \mu \int_{\Omega} \frac{|u_0|^2}{|x|^2} dx + \lambda \int_{\Omega} |u_0|^2 dx.$$

Demonstramos assim a igualdade (3.7).

Agora vamos provar a igualdade (3.8). Para $R > 1$, temos

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_n|^{2^*} dx = \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} \psi_R^{2^*} |u_n|^{2^*} dx + \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (1 - \psi_R^{2^*}) |u_n|^{2^*} dx. \quad (3.43)$$

Utilizando a convergência em medida (3.37) encontrada na *Etapa 4*, a saber $|u_n|^{2^*} \rightharpoonup \nu + |u_0|^{2^*}$ em $M(\Omega)$, quando $n \rightarrow \infty$, obtemos

$$\begin{aligned} \lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (1 - \psi_R^{2^*}) |u_n|^{2^*} dx &= \int_{\Omega} (1 - \psi_R^{2^*}) d\nu + \int_{\Omega} (1 - \psi_R^{2^*}) |u_0|^{2^*} dx \\ &= \int_{\Omega} d\nu - \int_{\Omega} \psi_R^{2^*} d\nu + \int_{\Omega} |u_0|^{2^*} dx - \int_{\Omega} \psi_R^{2^*} |u_0|^{2^*} dx. \end{aligned}$$

Passando ao limite quando $R \rightarrow \infty$, resulta que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (1 - \psi_R^{2^*}) |u_n|^{2^*} dx \right) = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} dv + \int_{\Omega} |u_0|^{2^*} dx \right) - \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} \psi_R^{2^*} dv + \int_{\Omega} \psi_R^{2^*} |u_0|^{2^*} dx \right). \quad (3.44)$$

Como $\psi_R \rightarrow 0$ quando $R \rightarrow \infty$, pelo Teorema A.11 da Convergência Dominada temos que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} \psi_R^{2^*} dv \right) = \lim_{R \rightarrow \infty} \left(\int_{\Omega} \psi_R^{2^*} |u_0|^{2^*} dx \right) = 0.$$

Assim, substituindo esse limite na igualdade (3.44), segue-se que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} (1 - \psi_R^{2^*}) |u_n|^{2^*} dx \right) = \|v\| + \int_{\Omega} |u_0|^{2^*} dx. \quad (3.45)$$

Dos limites (3.26) e (3.45) aplicadas a (3.43), segue-se que

$$\lim_{R \rightarrow \infty} \left(\lim_{n \rightarrow \infty} \int_{\Omega} |u_n|^{2^*} dx \right) = v_{\infty} + \|v\| + \int_{\Omega} |u_0|^{2^*} dx,$$

e com isso obtemos a igualdade (3.8).

Isso conclui a demonstração do lema. \square

Observamos que, como μ' é um número arbitrário, a desigualdade $v_{\infty}^{\frac{2}{2^*}} \leq (S_{\lambda}^{\mu'}(\Omega))^{-1} \gamma_{\infty}$ pode ser substituída por $v_{\infty}^{\frac{2}{2^*}} \leq (M)^{-1} \gamma_{\infty}$ em que $M = \sup\{S_{\lambda}^{\mu'}(\Omega) : \mu' \in \mathbb{R}\} = \lim_{\mu' \rightarrow -\infty} S_{\lambda}^{\mu'}(\Omega)$.

3.3 Existência de soluções em domínios contidos em cilindros

Os principais resultados deste capítulo seguem diretamente do próximo lema.

3.4 Lema. *Suponhamos que $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ está contido em um cilindro e que $S_{\lambda}^{\mu'}(\Omega)$ é atingido quando $\mu' < \mu$. Seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \in V(\Omega)$ uma sequência minimizante para $S_{\lambda}^{\mu}(\Omega)$. Então, passando a uma subsequência denotada da mesma forma, existe $u_0 \in V(\Omega)$ tal que $u_n \rightharpoonup u_0$ fracamente em $H_0^1(\Omega)$ e u_0 é um mínimo para $S_{\lambda}^{\mu}(\Omega)$.*

Demonstração. Como $\mu' < \mu$ e já que, por hipótese, $S_{\lambda}^{\mu'}(\Omega)$ é atingido, temos que

$$S_{\lambda}^{\mu'}(\Omega) > S_{\lambda}^{\mu}(\Omega). \quad (3.46)$$

Por outro lado, no Capítulo 3, Teorema 2.4, demonstramos que se $\mu < 0$ então

$$S_{\lambda}^{\mu}(\Omega) < S_0^{\mu}(\Omega). \quad (3.47)$$

Além disso, a mesma desigualdade foi demonstrada por Jannelli [8] no caso em que $\mu \geq 0$. As desigualdades (3.46) e (3.47) são o ponto chave da demonstração.

Como a sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V(\Omega)$ é minimizante para $S_\lambda^\mu(\Omega)$, resulta que $(u_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada em $H_0^1(\Omega)$. Assim, passando a uma subsequência, ainda denotada da mesma forma, podemos supor que são válidas as hipóteses do Lema 3.3 de concentração-compacidade; usaremos a notação desse lema. Sendo assim,

$$S_\lambda^\mu(\Omega) = \int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx - \lambda \int_\Omega |u_0|^2 dx - \mu \int_\Omega \frac{|u_0|^2}{|x|^2} dx + \gamma_\infty + \|\gamma\|. \quad (3.48)$$

Por outro lado, como consequência da definição de $S_\lambda^\mu(\Omega)$ temos que

$$S_\lambda^\mu(\Omega) \left(\int_\Omega |u_0|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \leq \int_\Omega |\nabla u_0|^2 dx - \mu \int_\Omega \frac{|u_0|^2}{|x|^2} dx - \lambda \int_\Omega |u_0|^2 dx. \quad (3.49)$$

Das desigualdades (3.48) e (3.49) resulta que

$$S_\lambda^\mu(\Omega) \geq S_\lambda^\mu(\Omega) \left(\int_\Omega |u_0|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} + \gamma_\infty + \|\gamma\|.$$

Combinando esse resultado com as desigualdades $\|\gamma\| \geq S_\lambda^\mu(\Omega) \|v\|^{\frac{2}{2^*}}$ e $\gamma_\infty \geq S_\lambda^{\mu'}(\Omega) v_\infty^{\frac{2}{2^*}}$ do Lema 3.3 de concentração-compacidade, obtemos

$$\begin{aligned} S_\lambda^\mu(\Omega) &\geq S_\lambda^\mu(\Omega) \left(\int_\Omega |u_0|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} + S_\lambda^\mu(\Omega) \|v\|^{\frac{2}{2^*}} + S_\lambda^{\mu'}(\Omega) v_\infty^{\frac{2}{2^*}} \\ &\geq S_\lambda^\mu(\Omega) \left(\left(\int_\Omega |u_0|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} + \|v\|^{\frac{2}{2^*}} + v_\infty^{\frac{2}{2^*}} \right) \\ &= S_\lambda^\mu(\Omega), \end{aligned} \quad (3.50)$$

em que na última desigualdade utilizamos as desigualdades (3.46) e (3.47) e na última igualdade usamos o fato de que $2^* > 2$, e isso implica que $a^{\frac{2}{2^*}} \geq a$ para todo $a \in [0, 1]$, valendo a igualdade se, e somente se, $a = 0$ ou $a = 1$.

Logo, valem as igualdades em todas as passagens e

$$\left(\int_\Omega |u_0|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} + \|v\|^{\frac{2}{2^*}} + v_\infty^{\frac{2}{2^*}} = \left(\int_\Omega |u_0|^{2^*} dx + \|v\| + v_\infty \right)^{\frac{2}{2^*}} = 1.$$

Assim, concluímos que pode ocorrer apenas um dos seguintes casos:

1. $\int_\Omega |u_0|^{2^*} dx = v_\infty = 0$ e $\|v\| = 1$,
2. $\int_\Omega |u_0|^{2^*} dx = \|v\| = 0$ e $v_\infty = 1$,
3. $\int_\Omega |u_0|^{2^*} dx = 1$ e $\|v\| = v_\infty = 0$.

Suponhamos que vale o caso 1. Substituindo esses valores em (3.50), resulta que $S_\lambda^\mu(\Omega) \geq S_0^\mu(\Omega)$; mas como vale (3.47), a saber $S_\lambda^\mu(\Omega) < S_0^\mu(\Omega)$, o caso 1 fica excluído.

Suponhamos agora que vale o caso 2. Substituindo esses valores em (3.50), resulta que $S_\lambda^\mu(\Omega) \geq S_\lambda^{\mu'}(\Omega)$; mas como vale (3.46), a saber $S_\lambda^\mu(\Omega) < S_\lambda^{\mu'}(\Omega)$, o caso 2 fica excluído.

Dessa forma, vale o caso 3. Assim, da igualdade (3.48) segue-se que

$$\int_{\Omega} |\nabla u_0|^2 dx - \lambda \int_{\Omega} |u_0|^2 dx - \mu \int_{\Omega} \frac{|u_0|^2}{|x|^2} dx = S_{\lambda}^{\mu}(\Omega).$$

Isso conclui a demonstração do lema. \square

Agora vamos aplicar o Lema 3.4 a uma classe de domínios contendo um cilindro C e que tendem assintoticamente para C . Escrevemos $\mathbb{R}^N = \mathbb{R}^{N-d} \times \mathbb{R}^d$, $x = (y, z) \in \mathbb{R}^{N-d} \times \mathbb{R}^d$ e $\Omega^z = \{y \in \mathbb{R}^{N-d} : (y, z) \in \Omega\}$.

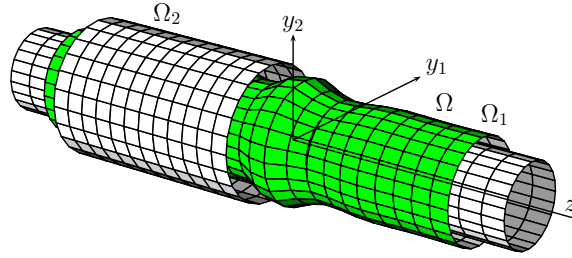


Figura 3.2: Exemplo para o conjunto Ω . Neste caso, Ω_1 e Ω_2 são dois cilindros tais que $\Omega_1 \subset \Omega \subset \Omega_2$, e Ω tende assintoticamente para Ω_1 .

3.5 Teorema. *Sejam $\Omega_1, \Omega_2 \subset \mathbb{R}^{N-d}$ tais que $\Omega_1 \times \mathbb{R}^d \subset \Omega \subset \Omega_2 \times \mathbb{R}^d$ e suponhamos que*

$$\lim_{|z| \rightarrow \infty} \sup \{ \text{dist}(y, \Omega_1) : y \in \Omega^z \} = 0.$$

Se $\mu \geq 0$, então o ínfimo $S_{\lambda}^{\mu}(\Omega)$ é atingido.

Demonstração. O caso em que $\mu = 0$ foi demonstrado por Ramos, Wang e Willem em [13, pág.2, Theorem 1.1]. Sabemos então que S_{λ}^0 é atingido. Para $\mu > 0$, utilizamos o Lema 3.4 com $\mu' = 0$ e o teorema fica demonstrado. \square

O seguinte teorema é também uma consequência do Lema 3.4.

3.6 Teorema. *Suponhamos que $\Omega = \Omega_1 \times \mathbb{R}^d$, com $N > d \geq 1$. Então $S_{\lambda}^{\mu}(\Omega)$ é atingido se, e somente se, $\mu \geq 0$.*

Demonstração. O teorema anterior mostra que $S_{\lambda}^{\mu}(\Omega)$ é atingido quando $\mu \geq 0$. Devemos mostrar agora que $S_{\lambda}^{\mu}(\Omega)$ nunca é atingido se $\mu < 0$.

Argumentando por contradição, suponhamos que $S_{\lambda}^{\mu}(\Omega)$ é atingido para $\mu < 0$. O Lema 3.4 implica que $S_{\lambda}^0(\Omega)$ também é atingido (basta usar $\mu' < \mu = 0$) e toda sequência minimizante sempre tem uma subsequência convergindo fracamente para o mínimo.

Mas no caso em que $\mu = 0$ o problema é invariante por translações por vetores no conjunto $0 \times \mathbb{R}^d$. Assim, dada uma sequência minimizante $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V(\Omega)$ para $S_{\lambda}^0(\Omega)$, efetuamos

translações por vetores do tipo $x_n = (0, z_n)$ com $z_n = n$ de modo a obter uma nova sequência $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V(\Omega)$ que ainda é minimizante em Ω e tem somente a função nula como ponto de acumulação fraco. Podemos usar como exemplo uma sequência minimizante u_n verificando a condição $u_n(x) = 0$ para todo $x \in \Omega$ tal que $|x| < n$.

Como o limite forte existe e é maior do que zero, já que $S_\lambda^0(\Omega) > 0$ devido a desigualdade de Hardy, temos que o limite fraco não coincide com o limite forte. Dessa contradição, segue-se que $S_\lambda^\mu(\Omega)$ nunca é atingido se $\mu < 0$. Isso conclui a demonstração do teorema. \square

3.7 Observação. Usando os mesmos argumentos da demonstração do Teorema 3.6 podemos mostrar que, se $\Omega = \Omega_1 \times \mathbb{R}^d$, então o ínfimo $\lambda_1(\mu)$ é atingido se, e somente se, $\mu \geq 0$. Nesse caso, existe uma solução do problema de autovalor (1.20).

Existência de soluções em domínios invariantes

4.1 Soluções invariantes

Neste capítulo usamos uma hipótese invariante sobre o conjunto aberto Ω (que pode ser não limitado) e procuramos soluções invariantes para o problema (1.23), a saber,

$$\begin{cases} -\Delta u(x) - \lambda u(x) - \mu \frac{u(x)}{|x|^2} = u(x)^{2^*-1}, & x \in \Omega, \\ u(x) > 0, & x \in \Omega, \\ u(x) = 0, & x \in \partial\Omega. \end{cases}$$

No caso particular em que Ω é um cilindro, os resultados deste capítulo permitem aumentar o domínio dos parâmetros λ e μ para os quais existe solução para o problema (1.23).

Novamente usamos a hipótese (H) e definimos $G = \{1\} \times O(d) \subset O(N)$ em que $\{1\}$ representa o subgrupo trivial de $O(N-d)$. Também consideramos o domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ contendo a origem e verificando as seguintes condições:

1. Existe $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{N-d}$ limitado tal que $\Omega \subset \Omega_1 \times \mathbb{R}^d$.
2. O conjunto Ω é invariante por G , isto é, $g(\Omega) = \Omega$ para todo $g \in G$.

Por exemplo, essas condições são verificadas se $\Omega = \Omega_1 \times \mathbb{R}^d$, em que $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{N-d}$ é um conjunto aberto e limitado. Observamos que sob essas condições o problema (1.23) é invariante por G , isto é, se u é uma solução, então $u \circ g$ também é uma solução para todo $g \in G$.

Neste capítulo estamos interessados na existência de soluções invariantes para o problema (1.23). Demonstramos a existência de solução usando as mesmas idéias dos capítulos 2 e 3, isto é, mostramos que o ínfimo $S_\lambda^H(\Omega, G)$ definido em (2.1) é atingido. Para isso, dividimos a análise em dois casos essencialmente distintos: o caso $d \geq 2$ e o caso $d = 1$.

4.2 O caso $d \geq 2$

Começamos com um lema auxiliar, demonstrado por Ramos, Wang e Willem [13].

4.1 Lema. *Seja $r \in \mathbb{R}^+$ um número positivo e seja $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ uma sequência limitada. Se*

$$\limsup_{n \rightarrow \infty} \left\{ \int_{B(x,r)} |u_n|^{2^*} dx : x \in \mathbb{R}^N \right\} = 0,$$

então $u_n \rightarrow 0$ em $L^{2^}(\mathbb{R}^N)$ quando $n \rightarrow \infty$.*

Demonstração. Da desigualdade de Sobolev segue-se que

$$\int_{B(x,r)} |u_n|^{2^*} dx \leq S \left(\int_{B(x,r)} (|\nabla u_n|^2 + u_n^2) dx \right)^{\frac{2}{2^*}}$$

para toda função $u_n \in H_0^1(\mathbb{R}^N)$ e para todo $\lambda > 0$. Assim, temos

$$\int_{B(x,r)} |u_n|^{2^*} dx \leq S^\lambda \left(\int_{B(x,r)} (|\nabla u_n|^2 + u_n^2) dx \right)^{\lambda \frac{2}{2^*}} \left(\int_{B(x,r)} |u_n|^{2^*} dx \right)^{1-\lambda}$$

Escolhendo $\lambda = 2/2^*$ e cobrindo o \mathbb{R}^N com bolas de raio r de modo que cada ponto de \mathbb{R}^N esteja contido em no máximo $N + 1$ bolas, obtemos encontramos

$$\int_{\mathbb{R}^N} |u_n|^{2^*} \leq (N + 1) c^\lambda \int_{\mathbb{R}^N} (|\nabla u_n|^2 + u_n^2) dx \left\{ \sup_{x \in \mathbb{R}^N} \left(\int_{B(x,r)} |u_n|^{2^*} dx \right)^{1-\lambda} \right\},$$

em que a primeira integral é limitada e a segunda integral tende a zero por hipótese. Logo, $u_n \rightarrow 0$ em $L^{2^*}(\mathbb{R}^N)$ quando $n \rightarrow \infty$. \square

Usando o Lema 3.3 de concentração-compacidade e o Lema 4.1 podemos demonstrar o seguinte resultado.

4.2 Teorema. *Se $d \geq 2$, então o ínfimo $S_\lambda^\mu(\Omega, G)$ é atingido.*

Demonstração. Inicialmente verificamos dois resultados auxiliares.

Afirmativa 4.1. $S_0^\mu(\Omega, G) = S_0^\mu(\Omega)$.

De fato, a desigualdade

$$S_0^\mu(\Omega, G) \geq S_0^\mu(\Omega) \tag{4.1}$$

é imediata pelas definições envolvidas e vale tanto para $\mu \geq 0$ quanto para $\mu < 0$.

Se $\mu \geq 0$, consideramos a sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ minimizante para $S_0^\mu(\Omega)$ definida na Observação 2.3. Essas funções podem ser consideradas como funções radiais e, assim, são invariantes pela ação do grupo G . Dessa forma,

$$S_0^\mu(\Omega, G) \leq S_0^\mu(\Omega). \tag{4.2}$$

Combinando (4.1) e (4.2) obtemos o resultado.

Se $\mu < 0$, então pelo Teorema 2.2 temos que $S_0^\mu(\Omega) = S$ e podemos considerar a sequência minimizante $\{v_\varepsilon\}$ definida na demonstração do Teorema 2.2. Se naquela demonstração escolhermos a função φ radial e um vetor ξ da forma $\xi = (\xi_1, 0)$, com $\xi_1 \in \mathbb{R}^{N-d}$, então as funções v_ε também são invariantes pela ação do grupo G . Dessa forma,

$$S_0^\mu(\Omega, G) \leq S = S_0^\mu(\Omega). \tag{4.3}$$

Combinando (4.1) e (4.3) obtemos o resultado.

AFIRMATIVA 4.2. $S_\lambda^\mu(\Omega, G) < S_0^\mu(\Omega)$.

Se $\mu \geq 0$, Jannelli [8] demonstrou que $S_\lambda^\mu(\Omega, G) < S_0^\mu(\Omega, G)$. Usando a Afirmitiva 4.1, resulta que $S_\lambda^\mu(\Omega, G) < S_0^\mu(\Omega)$ e obtemos o resultado.

Se $\mu < 0$, então pelo Teorema 2.4 temos que $S_\lambda^\mu(\Omega) < S_0^\mu(\Omega)$. Usando a Afirmitiva 4.1 e o Teorema 2.2, segue-se que $S_0^\mu(\Omega, G) = S_0^\mu(\Omega) = S$. Logo, $S_\lambda^\mu(\Omega, G) < S_0^\mu(\Omega, G) = S_0^\mu(\Omega) = S$ e obtemos o resultado.

Usando uma sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V(\Omega, G)$ minimizante para $S_\lambda^\mu(\Omega, G)$ e passando a uma subsequência, ainda denotada da mesma forma, podemos supor que valem as hipóteses do Lema 3.3 de concentração-compacidade; usaremos a notação desse lema.

Argumentando como na demonstração do Lema 3.4, obtemos desigualdades similares a (3.50), agora envolvendo o ínfimo $S_\lambda^\mu(\Omega, G)$. Portanto, vale apenas um dos seguintes casos:

1. $\int_\Omega |u_0|^{2^*} dx = \nu_\infty = 0$ e $\|v\| = 1$,
2. $\int_\Omega |u_0|^{2^*} dx = \|v\| = 0$ e $\nu_\infty = 1$,
3. $\int_\Omega |u_0|^{2^*} dx = 1$ e $\|v\| = \nu_\infty = 0$.

Suponhamos que vale o caso 1. Pelos cálculos apresentados no Lema 3.4 temos que $S_0^\mu(\Omega, G) \geq S_\lambda^\mu(\Omega, G)$. Mas pela Afirmitiva 2 vale a desigualdade $S_\lambda^\mu(\Omega, G) < S_0^\mu(\Omega)$ e obtemos uma contradição. Logo, o caso 1 não pode ocorrer.

Suponhamos que vale o caso 2. Como $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset H^1(\mathbb{R}^N)$ é sequência limitada, o Lema 4.1 garante a existência de $\varepsilon > 0$ e de $x_n \in \Omega$ tais que $\int_{B(x_n, 1)} |u_n|^{2^*} dx > \varepsilon$.

Devemos mostrar que $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ é uma sequência limitada. Para isso, argumentamos por contradição. Passando a uma subsequência se necessário, suponhamos que $|x_n| \rightarrow \infty$ quando $n \rightarrow \infty$. Para cada $n \in \mathbb{N}$, definimos

$$m(n) = \{k \in \mathbb{N} : \text{existem } g_1, \dots, g_k \in G, g_i(B(x_n, 1)) \cap g_j(B(x_n, 1)) = \emptyset \text{ se } i \neq j\}.$$

Pela divergência da sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$, pelas propriedades de Ω e pela hipótese $d \geq 2$ sabemos que $m(n) \rightarrow \infty$. Assim, pela invariância de cada u_n , obtemos

$$1 = \int_\Omega |u_n|^{2^*} dx \geq m(n) \int_{B(x_n, 1)} |u_n|^{2^*} dx \geq \varepsilon m(n) \rightarrow \infty.$$

Essa contradição mostra que a sequência $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é limitada.

Seja agora $x_0 \in \Omega$ um ponto de acumulação de $(x_n)_{n \in \mathbb{N}}$; então, quando $n \rightarrow \infty$, temos

$$\int_{B(x_0, 2)} |u_n|^{2^*} dx \geq \varepsilon.$$

Da definição de ν_∞ dada no Lema 3.3, segue-se que $\nu_\infty \leq 1 - \varepsilon$ em que $\varepsilon > 0$ e obtemos uma contradição. Logo, o caso 1 não pode ocorrer.

Portanto, deve ocorrer o caso 3. Finalmente, como no Lema 3.4, a função u_0 deve ser um mínimo para o ínfimo $S_\lambda^\mu(\Omega, G)$. Isso conclui a demonstração do teorema. \square

4.3 Observação. Em muitos casos, podemos escolher um subgrupo conveniente G de $\{1\} \times O(d)$; a ideia é que a sequência $m(n)$ da prova do Teorema 4.2 tende ao infinito quando $(x_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \Omega$ não é limitado.

Esse tipo de subgrupo é chamado de *subgrupo compatível* com Ω . Por exemplo, se $d = 4$, podemos escolher $G = \{1\} \times O(2) \times O(2)$; assim, podemos estender os resultados do Teorema 4.2 para conjuntos Ω invariantes por G , mas não para conjuntos invariantes por $\{1\} \times O(4)$ (por exemplo $\Omega = (0, 1) \times M$), em que M é definido por $M = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : (x^2 + y^2)(z^2 + t^2) < 1\}$.

Observamos a importância da hipótese $d \geq 2$ na demonstração do Teorema 4.2 pois nesse caso temos que $m(n) \rightarrow \infty$ quando x_n diverge. Quando $d = 1$, a situação é completamente diferente e podemos garantir a existência de solução somente se λ é suficientemente pequeno.

4.3 O caso $d = 1$

4.4 Teorema. Seja $G = \{1\} \times O(1)$ e seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto aberto verificando as condições acima com $d = 1$. Suponhamos também que

$$S_\lambda^\mu(\Omega, G) < 2 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{2}{2^*}} S_\lambda^\mu(\Omega). \quad (4.4)$$

Então o problema (1.23) tem pelo menos uma solução invariante.

Demonstração. Escrevemos $x \in \Omega$ como $x = (y, z)$ em que $y \in \mathbb{R}^{N-1}$ e $z \in \mathbb{R}$. Observamos que o grupo G tem somente dois elementos, a aplicação identidade e a aplicação $(y, z) \mapsto (y, -z)$. Como no caso anterior, consideramos uma sequência $(u_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset V(\Omega, G)$ minimizante para $S_\lambda^\mu(\Omega, G)$ e mostramos que o limite fraco u_0 não é zero. Utilizando novamente o Lema 3.3 com $\mu' = \mu$, obtemos os mesmos casos descritos na demonstração do Teorema 4.2.

Pelos mesmos argumentos apresentados no Teorema 4.2, o caso 1 não pode ocorrer.

Suponhamos que vale o caso 2. Pela definição de γ_∞ dada no Lema 3.3 temos que $\gamma_\infty = S_\lambda^\mu(\Omega, G)$. Seja $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ arbitrário e seja $\psi \in C^\infty(\Omega)$ uma função corte radial tal que $\psi(x) = 0$ se $|x| < R$, $\psi(x) = 1$ se $|x| > R + 1$ e $0 \leq \psi \leq 1$ para todo $x \in \Omega$. Escolhemos R suficientemente grande de modo que valem as seguintes propriedades:

1. O suporte da função ψ tem duas componentes conexas ilimitadas; uma dessas componentes é denotada por $\Omega^+ = \{(y, z) \in \Omega : z > 0\}$ e outra por $\Omega^- = \{(y, z) \in \Omega : z < 0\}$. Denotamos $v_n(x) = \psi(x)u_n(x)$. Como ψ é uma função radial e $u_n \in H_{0,G}^1(\Omega)$, segue-se que $v_n \in H_{0,G}^1(\Omega)$;
2. $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega |v_n|^{2^*} dx > 1 - \varepsilon$;
3. $\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx - \mu \int_\Omega \frac{v_n^2}{|x|^2} dx - \lambda \int_\Omega v_n^2 dx < S_\lambda^\mu(\Omega, G) + \varepsilon$.

Podemos escolher R verificando esse último item pois $\gamma_\infty = S_\lambda^\mu(\Omega, G)$. Agora definimos

$$w_n(x) = \begin{cases} v_n(x) & \text{se } x \in \Omega^+, \\ 0 & \text{se } x \notin \Omega^+. \end{cases}$$

Como $(v_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H_{0,G}^1(\Omega)$, temos que $(w_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H_{0,G}^1(\Omega)$. Notamos que $v_n(y, z) = w_n(y, z) + w_n(y, -z)$. Usando essas ideias, obtemos

$$\begin{aligned} S_\lambda^\mu(\Omega, G) + \varepsilon &> \overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega |\nabla v_n|^2 dx - \mu \int_\Omega \frac{v_n^2}{|x|^2} dx - \lambda \int_\Omega v_n^2 dx \\ &= 2 \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega |\nabla w_n|^2 dx - \mu \int_\Omega \frac{w_n^2}{|x|^2} dx - \lambda \int_\Omega w_n^2 dx \right) \\ &\geq 2S_\lambda^\mu(\Omega) \left(\overline{\lim}_{n \rightarrow \infty} \int_\Omega |w_n|^{2^*} dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \\ &> 2S_\lambda^\mu(\Omega) \left(\frac{1 - \varepsilon}{2} \right)^{\frac{2}{2^*}} \end{aligned} \quad (4.5)$$

em que na primeira desigualdade utilizamos o item 3, na segunda passagem utilizamos a invariância da integral devido à definição de $w_n(x)$, na terceira passagem utilizamos a definição de $S_\lambda^\mu(\Omega)$ e na última desigualdade utilizamos o item 2.

Como $\varepsilon \in \mathbb{R}^+$ é arbitrário, da desigualdade (4.5) segue-se que $S_\lambda^\mu(\Omega, G) > 2 \left(\frac{1}{2} \right)^{\frac{2}{2^*}} S_\lambda^\mu(\Omega)$, o que é uma contradição com a hipótese (4.4). Logo, o caso 2 não pode ocorrer.

Portanto, deve ocorrer o caso 3. Finalmente, como no Lema 3.4, a função u_0 deve ser um mínimo para o ínfimo $S_\lambda^\mu(\Omega, G)$. Isso conclui a demonstração do teorema. \square

- 4.5 Observação.**
1. As funções $\lambda \mapsto S_\lambda^\mu(\Omega)$, $\lambda \mapsto S_\lambda^\mu(\Omega, G)$ são contínuas e coincidem quando $\lambda = 0$ (na demonstração do Teorema 4.2 mostramos que $S_0^\mu(\Omega) = S_0^\mu(\Omega, G) > 0$). Assim, a condição (4.4) é verificada se λ é suficientemente pequeno.
 2. Analisando os diferentes resultados obtidos quando Ω é um cilindro, isto é, $\Omega = \Omega_1 \times \mathbb{R}^d$, em que $\Omega_1 \subset \mathbb{R}^{N-d}$ um conjunto aberto limitado, $N > d \geq 1$. No Teorema 4.2 provamos a existência de soluções invariantes se $d \geq 2$. Mas, se $d = 1$, podemos garantir a existência de soluções somente se λ é suficientemente pequeno tanto para $\mu \geq 0$ quanto para $\mu < 0$.

-A-

Resultados auxiliares

A.1 Espaços de Funções

- $\mathcal{C}^k(\Omega)$, para $k = 1, 2, \dots$ é o espaço das funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que são k vezes diferenciáveis em Ω e tais que as k -ésimas derivadas são contínuas em Ω ;
- $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ é o espaço das funções $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ que são infinitamente diferenciáveis em Ω ;
- $\mathcal{C}_0^k(\Omega)$ é o subespaço de $\mathcal{C}^k(\Omega)$ que contém apenas as funções que possuem suporte compacto em Ω , isto é, o fecho (em \mathbb{R}^N) do conjunto $\{x \in \Omega : u(x) \neq 0\}$;
- $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ é o subespaço de $\mathcal{C}^\infty(\Omega)$ das funções que possuem suporte compacto em Ω ;
- $L^p(\Omega)$ é o espaço de Lebesgue das funções mensuráveis $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\int_\Omega |u(x)|^p dx < +\infty$, com a norma $|u|_p = (\int_\Omega |u(x)|^p dx)^{1/p}$; enquanto $L^\infty(\Omega)$ é o espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que $\text{ess sup}_{x \in \Omega} |u(x)| < +\infty$, com a norma $|u|_\infty = \text{ess sup } |u(x)|$;
- $L_{loc}^p(\Omega)$ é o espaço das funções mensuráveis $u : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ tal que para todo conjunto compacto $K \subset \Omega$, temos $|u|_{L^p(K)} < +\infty$;
- $H^1(\Omega)$ é o espaço de Sobolev definido por

$$H^1(\Omega) = \left\{ u \in L^2(\Omega); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\Omega), i = 1, \dots, N \right\}$$

em que as derivadas $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ estão no sentido das distribuições;

- $H_0^1(\Omega)$ é o fecho de $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ em $H^1(\Omega)$ dotado da mesma norma de $H^1(\Omega)$, a saber,

$$\|u\| = \left(\int_\Omega |\nabla u|^2 dx + \int_\Omega u^2 dx \right)^{1/2};$$

- $D^{1,2}(\mathbb{R}^N)$, para $N \geq 4$, é o espaço definido como

$$D^{1,2}(\mathbb{R}^N) = \left\{ u \in L^{2^*}(\mathbb{R}^N); \frac{\partial u}{\partial x_i} \in L^2(\mathbb{R}^N), i = 1, \dots, N \right\},$$

dotado da norma $\|u\| = \left(\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u|^2 dx \right)^{1/2}$, em que as derivadas $\frac{\partial u}{\partial x_i}$ estão no sentido das distribuições;

- $D(\Omega)$ é o espaço das funções teste, isto é, das funções em $\mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$ munido com a noção de convergência uniforme.

A.2 O grupo ortogonal

Denotamos o conjunto das matrizes quadradas de ordem N invertíveis por GL_N .

A.1 Definição. O grupo ortogonal é o conjunto

$$O(N) = \{A \in GL_N : A^{-1} = A^T\}.$$

Esse conjunto também é denominado grupo de transformações lineares isométricas de \mathbb{R}^N .

A.2 Teorema. O conjunto $O(N)$ é um grupo com a operação de multiplicação de matrizes.

Demonstração. Sabemos que $O(N)$ possui I como elemento identidade. Como $A^{-1} = A^T$, todo elemento de $O(N)$ possui um inverso. Também temos que com a multiplicação de matrizes $O(N)$ é associativa. Para mostrar que $O(N)$ é fechado, consideramos dois elementos arbitrários $A, B \in O(N)$ e notamos que

$$(AB)(AB)^T = A(BB^T)A^T = AA^T = I.$$

Assim $(AB)^{-1} = (AB)^T$, ou seja, $AB \in O(N)$. Logo, $O(N)$ é fechado por multiplicação de matrizes. \square

Recordamos que, em geral, $\det(A) = \det(A^T)$ e $\det(AB) = \det(A)\det(B)$. Assim, para $A \in O(N)$ encontramos que

$$\det(A)^2 = \det(A)\det(A^T) = \det(AA^T) = \det(I) = 1$$

Logo, toda matriz ortogonal deve ter um determinante ± 1 .

A.3 Resultados de Análise

A.3.1 As notações de Landau

Nesta dissertação utilizamos o símbolo “ O ” de Landau para indicar “uma grandeza que é, em valor absoluto, no máximo um múltiplo de outra grandeza”. Mais precisamente, se S um conjunto qualquer e se f e φ são funções reais definidas em S , então a fórmula

$$f(s) = O(\varphi(s)) \quad \forall s \in S \tag{A.1}$$

significa que existe um número positivo A , não dependendo de s , tal que

$$|f(s)| \leq A|\varphi(s)| \quad \forall s \in S.$$

Em particular, se $\varphi(s) \neq 0$ para todo $s \in S$, então a notação (A.1) significa simplesmente que $f(s)/\varphi(s)$ é limitada em todo $s \in S$. Por exemplo:

1. $x^2 = O(x)$, $|x| < 2$;
2. $\text{sen}(x) = O(1)$, $x \in \mathbb{R}$;
3. $\text{sen}(x) = O(x)$, $x \in \mathbb{R}$.

A fórmula

$$f(x) = O(\varphi(x)) \quad (x \rightarrow \infty) \quad (\text{A.2})$$

significa que existe um número real $A \in \mathbb{R}$ tal que $f(x) = O(\varphi(x))$ quando $a < x$. Em outras palavras, a fórmula (A.2) significa que existem números $a, A \in \mathbb{R}$ tais que

$$|f(x)| \leq A|\varphi(x)|$$

sempre que $a < x$. Por exemplo:

1. $x^2 = O(x)$, $x \rightarrow 0$;
2. $e^{-x} = O(1)$, $x \rightarrow \infty$;
3. $(\log x)^{-1} = O(1)$, $x \rightarrow \infty$.

A notação “ o ” de Landau é utilizada para indicar “uma grandeza que tende a zero, multiplicado por outra grandeza”. Mais precisamente, a expressão

$$f(x) = o(\varphi(x)) \quad x \rightarrow \infty \quad (\text{A.3})$$

significa que $f(x)/\varphi(x)$ tende a zero quando $x \rightarrow \infty$. Essa afirmativa é mais forte do que a correspondente expressão (A.1). Em outros termos, se vale a fórmula (A.3), então vale a fórmula (A.1), já que a convergência implica na limitação a partir de certo valor da variável. Em geral, se uma grandeza tende a zero, necessitamos conhecer a rapidez com que ocorre a convergência. Por exemplo:

1. $\cos x = 1 + o(x)$, $x \rightarrow 0$;
2. $e^{o(x)} = 1 + o(x)$, $x \rightarrow 0$;
3. $n! = e^{-n}n^n\sqrt{2\pi n}(1 + o(1))$, $n \rightarrow \infty$;
4. $o(f(x)g(x)) = o(f(x))O(g(x))$, $x \rightarrow 0$;
5. $o(f(x)g(x)) = f(x)o(g(x))$, $x \rightarrow 0$.

A.3.2 Desigualdades

A.3 Proposição. *Sejam $a > 0$ e $b > 0$ números reais. Então valem as seguintes desigualdades:*

1. $|a + b|^2 \leq (1 + \varepsilon)|a|^2 + C_\varepsilon|b|^2$
2. $||A + B|^2 - |A|^2| \leq \varepsilon|A|^2 + C_\varepsilon|B|^2$ válida para qualquer $\varepsilon > 0$.

A.3.3 Integração em coordenadas polares

A.4 Proposição. *Seja $f : \mathbb{R}^N \rightarrow \mathbb{R}$ uma função contínua e mensurável. Então*

$$\int_{\mathbb{R}^N} f(x) dx = \int_0^\infty \left(\int_{\partial B(x_0, r)} f(x) d\sigma \right) dr,$$

para cada ponto $x_0 \in \mathbb{R}^N$. Em particular, se f é uma função radial $f(x) = f(|x|)$, então

$$\int_{B(x_0, r)} f(x) dx = \omega_N \int_0^R f(r) r^{N-1} dr.$$

Demonstração. Veja o livro de Evans [7, Theorem 4, pag. 628]. \square

A.3.4 Simetrização de Schwarz e princípio da criticalidade simétrica

A.5 Definição. Sejam A_1, A_2, \dots, A_n conjuntos borelianos de \mathbb{R}^N dois a dois disjuntos e de medida finita e $0 < a_n < a_{n-1} < \dots < a_1$ números reais. Se f é uma função simples tal que $f = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{A_i}$, então definimos

$$f^*(x) = \sum_{i=1}^n a_i \chi_{[r_{i-1} \leq |x| < r_i]}(x),$$

em que $r_0 := 0$ e $r_i \geq r_{i-1}$ é dado pela relação $\mu([r_{i-1} \leq |x| < r_i]) = \mu(A_i)$. A função f^* é radial, decrescente e é denominada rearranjo esfericamente simétrico ou simetrização de Schwarz da função f .

A.6 Proposição. Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^N)$ uma função positiva. Existe uma única função $f^* \in L^p(\mathbb{R}^N)$ tal que $f^* \geq 0$ e para todo $\lambda > 0$, $\mu([f \geq \lambda]) = \mu([f^* \geq \lambda])$ em que todos os conjuntos $[f^* \geq \lambda]$ estão contidos na bola $B(0, r_\lambda)$. Além disso, para qualquer função contínua e crescente $G : \mathbb{R}_+ \rightarrow \mathbb{R}_+$ tal que $G(0) = 0$, vale a igualdade

$$\int_{\mathbb{R}^N} G(f(x)) dx = \int_{\mathbb{R}^N} G(f^*(x)) dx. \quad (\text{A.4})$$

Demonstração. Veja o livro de Kavian [10, Théorème 3.3, pag. 260]. \square

A.7 Proposição. Sejam $1 \leq p, q \leq \infty$ e $f \in L^p(\mathbb{R}^N), g \in L^q(\mathbb{R}^N)$ funções positivas. Se $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$, então $\int_{\mathbb{R}^N} f(x)g(x) dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} f^*(x)g^*(x) dx$.

Demonstração. Veja o livro de Kavian [10, Proposition 3.4, pag. 261]. \square

A.8 Proposição. Seja $u \in H^1(\mathbb{R}^N)$ função positiva. Então a simetrização u^* pertence a $H^1(\mathbb{R}^N)$ e

$$\int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u^*(x)|^2 dx \leq \int_{\mathbb{R}^N} |\nabla u(x)|^2 dx.$$

Demonstração. Veja Kavian [10, Proposition 3.8, pag. 2.64]. \square

A.9 Definição. A ação de um grupo topológico G sobre um espaço normado X é uma aplicação contínua $G \times X \rightarrow X : [g, u] \rightarrow gu$ tal que $1 \cdot u = 1$, $(gh)u = g(hu)$ e $u \mapsto gu$ é linear. As seguintes notações e nomenclaturas são frequentemente usadas.

1. A ação é uma isometria se $\|gu\| = \|u\|$.
2. O espaço de pontos invariantes é definido por $\text{Fix}(G) := \{u \in X : gu = u, \forall g \in G\}$.
3. Um conjunto $A \subset X$ é invariante se $gA = A, \forall g \in G$.
4. A função $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ é invariante se $\varphi \circ g = \varphi, \forall g \in G$.
5. Uma aplicação $f : X \rightarrow X$ é equivalente a $g \circ f = f \circ g \forall g \in G$.

O resultado a seguir, devido a Palais, é conhecido como princípio da criticalidade simétrica.

A.10 Teorema (Princípio da Criticalidade Simétrica). *Suponhamos que a ação do grupo topológico G sobre um espaço de Hilbert X é uma isometria. Se $\varphi : X \rightarrow \mathbb{R}$ é de classe C^1 e invariante e ainda se u é um ponto crítico de φ restrito a $\text{Fix}(G)$ então u é um ponto crítico de φ .*

Demonstração. Veja o livro de Willem [19, Theorem 1.18, pag. 19]. □

A.4 Resultados de Análise Funcional

A.4.1 Teorema da convergência dominada

A.11 Teorema. *Seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^1(\Omega)$ uma sequência de funções integráveis que convergem q.t.p. em Ω para uma função real mensurável f . Se existe uma função integrável g tal que $|f_n| \leq g$ para todo $n \in \mathbb{N}$, então f é integrável e*

$$\int f d\mu = \lim_{n \rightarrow \infty} \int f_n d\mu.$$

Demonstração. Veja o livro de Bartle [3, Theorem 5.6, pag. 44]. □

A.4.2 Teorema de imersão de Rellich-Kondrachov

A.12 Teorema. *Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um conjunto com medida finita. Então a imersão*

$$H_0^1(\Omega) \subset L^p(\Omega)$$

é contínua se $1 \leq p \leq 2^$ e é compacta se $1 \leq p < 2^*$.*

Demonstração. Veja o livro de Brézis [4, Theorem 9.16, pag. 291]. □

A.4.3 Convergência fraca em medida

Denotamos o conjunto de medidas positivas definidas em \mathbb{R}^N por $M(\mathbb{R}^N)$.

A.13 Definição. *Seja $(\mu_k)_{k \in \mathbb{N}}$ uma sequência de medidas definidas em \mathbb{R}^N . Dizemos que essa sequência converge fracamente para uma medida μ , e denotamos por $\mu_k \rightharpoonup \mu$, se*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu_k = \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu$$

para toda $f \in C_0(\mathbb{R}^N)$

A.14 Proposição. As seguintes afirmações são equivalentes:

1. $\lim_{k \rightarrow \infty} \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu_k = \int_{\mathbb{R}^N} f d\mu$ para todo $f \in C_0(\mathbb{R}^N)$.
2. $\limsup_{k \rightarrow \infty} \mu_k(K) \leq \mu(K)$ para cada conjunto compacto $K \subset \mathbb{R}^N$ e $\mu(A) \leq \liminf_{k \rightarrow \infty} \mu_k(A)$ para cada conjunto aberto $A \subset \mathbb{R}^N$.
3. $\lim_{k \rightarrow \infty} \mu_k(B) = \mu(B)$ para cada conjunto de Borel limitado $B \subset \mathbb{R}^N$ com $\mu(\partial B) = 0$.

Demonstração. Veja o livro de Brézis [4, cap.4]. □

A.4.4 Lema de Brézis-Lieb

A.15 Lema. Seja $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ um subconjunto aberto e seja $(f_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset L^p(\Omega)$ em que $1 \leq p < \infty$. Se

1. (f_n) é limitada em $L^p(\Omega)$,
2. $f_n \rightarrow f$ qtp em Ω . Então

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (|f_n|_p^p - |f_n - f|_p^p) = |f|_p^p.$$

Demonstração. Veja o livro de Willem [19, Lemma 1.32, pag. 21]. □

A.4.5 O princípio variacional de Ekeland

Uma forma analítica do princípio variacional de Ekeland é enunciada a seguir.

A.16 Proposição. Seja (X, d) um espaço de Banach e seja $G : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $G \in C^2(X, \mathbb{R})$ e tal que, para todo $v \in V \equiv \{v \in X : G(v) = 1\}$, temos $G'(v) \neq 0$. Seja $F : X \rightarrow \mathbb{R}$ uma função tal que $F \in C^1(X, \mathbb{R})$ limitada inferiormente em V . Além disso, sejam $v \in V$ e $\varepsilon, \delta \in \mathbb{R}^+$. Se

$$F(v) \leq \inf_{v \in V} F(v(x)) + \varepsilon,$$

então existe $u \in V$ tal que valem as seguintes desigualdades.

1. $F(u(x)) \leq \inf_{v \in V} F(v(x)) + 2\varepsilon$,
2. $\min_{\lambda \in \mathbb{R}} \|F'(u) - \lambda G'(u)\| \leq 8\varepsilon/\delta$,
3. $\|u - v\| \leq 2\delta$

Demonstração. Veja o livro de Willem [19, Theorem 8.5, pag. 122]. □

A.4.6 O teorema do passo da montanha

A.17 Teorema (Teorema do passo da montanha). Seja X um espaço de Banach e seja $J : X \rightarrow \mathbb{R}$ um funcional de classe $C^1(X)$ e verificando a condição de Palais-Smale. Suponhamos que $J(0) = 0$ e que sejam válidas as condições abaixo.

1. Existem números $R, a \in \mathbb{R}^+$ tais que sobre a esfera $\|u\| = R$ vale a desigualdade $J(u) \geq a$.
2. Existe $u_0 \in X$ tal que $\|u_0\| > R$ e $J(u_0) < a$.

Então o funcional J possui um valor crítico c tal que $c \geq a$ e caracterizado por

$$c \equiv \inf_{A \in \mathcal{B}} \max_{v \in A} J(v)$$

em que

$$\Gamma \equiv \left\{ \gamma: [0, 1] \rightarrow \mathbb{R} \mid \gamma \in C^1([0, 1], \mathbb{R}), \gamma(0) = 0, \gamma(1) = u_0 \right\}.$$

Demonstração. Veja o livro de Willem [19, Theorem 1.17, pág. 13; Theorem 2.10, pág. 42] ou o livro de Evans [7, Theorem 2, pág. 480]. \square

O teorema acima deriva seu nome da seguinte analogia geométrica. Suponhamos que o funcional J represente a altura de um local acima do nível do mar; seja A um local circundado por uma cadeia de montanhas e seja B um local além dessa cadeia de montanhas. Para viajar do ponto A até o ponto B , devemos cruzar as montanhas e o caminho ideal deveria ser aquele em que nos elevamos à altura mínima para passar através da cadeia de montanhas.

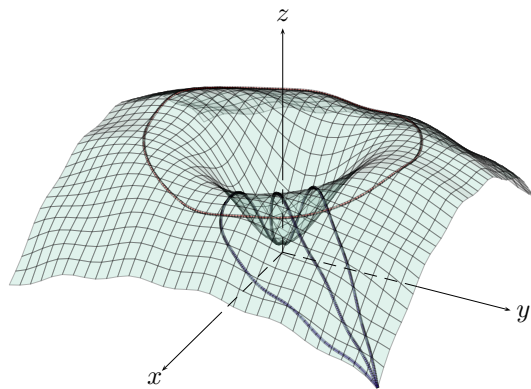


Figura A.1: Exemplo para o teorema do passo da montanha. O ponto A , localizado na origem, é unido ao ponto B , localizado fora da cadeia de montanhas, através de diversos caminhos. O máximo de cada caminho é avaliado e, em seguida, o ínfimo entre esses valores máximos identifica o passo da montanha, que é um valor crítico do funcional.

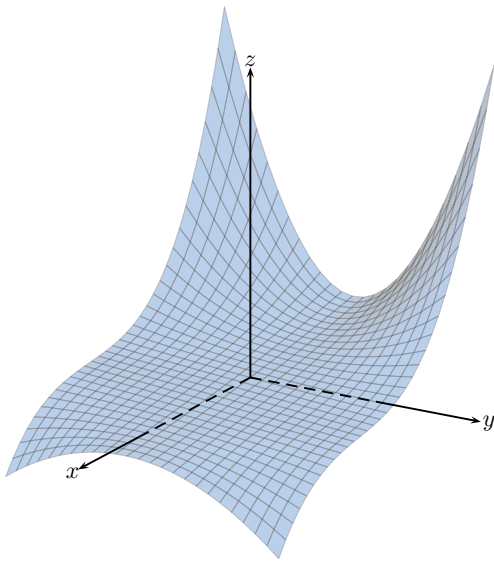
A hipótese sobre a condição de Palais-Smale usada no Teorema A.17 do passo da montanha não pode ser retirada. Isso se deve ao fato de que em geral o nível c de minimax não é um valor crítico. Como ilustração, apresentamos o exemplo clássico de Brézis e Nirenberg.

Seja $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ uma função definida por $h(x, y) \equiv x^2 + (1 - x)^3 y^2$. Essa função verifica a geometria do teorema do passo da montanha. De fato, $h(0, 0) = 0$ e, se $u_0 = (2, 2)$, então $h(u_0) = 0$. Além disso, se $\|(x, y)\| = R = 1/2$, então vale a desigualdade $h(x, y) > a = 1/8$.

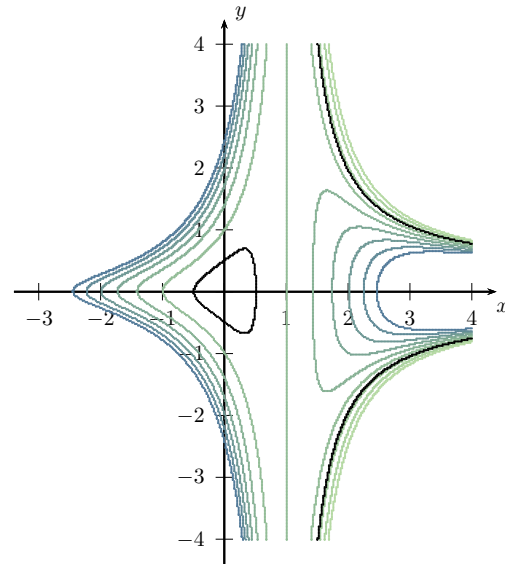
Suponhamos agora que a função h verifica a condição $(PS)_c$ de Palais-Smale para algum número $c \in \mathbb{R}^+$ definido por $c \equiv \inf_{\gamma \in \Gamma} \max_{t \in [0, 1]} h(\gamma(t))$. Obteremos uma contradição. De fato, seja $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ uma sequência tal que

1. $\lim_{n \rightarrow +\infty} h(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} [x_n^2 + (1 - x_n)^3 y_n^2] = c > 0.$
2. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\partial h}{\partial x}(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} [2x_n - 3(1 - x_n)^2 y_n^2] = 0.$
3. $\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\partial h}{\partial y}(x_n, y_n) = \lim_{n \rightarrow +\infty} [2(1 - x_n)^3 y_n] = 0.$

Se a sequência $(x_n, y_n)_{n \in \mathbb{N}} \subset \mathbb{R}^2$ for convergente, isto é, se $\lim_{n \rightarrow +\infty} (x_n, y_n) = (x_0, y_0)$, então passando ao limite no primeiro item e usando os outros dois itens resulta que $(x_0, y_0) = (0, 0)$. Com isso, $0 = h(x_0, y_0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} h(x_n, y_n) = c > 0$, o que é uma contradição. Concluimos que o único ponto crítico da função h é o ponto $O = (0, 0)$, que é um ponto de mínimo local, e que a função h não possui um valor crítico do tipo minimax.



(a) Gráfico da função $h: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ definida por $h(x, y) = x^2 + (1 - x)^2 y^2$. Esta função verifica a geometria do teorema do passo da montanha; porém, não verifica a condição $(PS)_c$ de Palais-Smale em um nível $c \in \mathbb{R}^+$.



(b) Curvas de nível da função h . Nota-se que o ponto $O = (0, 0)$ é um ponto de mínimo local e que não existem pontos críticos do tipo minimax.

Figura A.2: Exemplo de Brézis e Nirenberg de uma função que verifica a geometria do teorema do passo da montanha mas não verifica a condição de Palais-Smale.

A.5 Desigualdade de Hardy

A desigualdade de Hardy garante que para qualquer domínio $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ com $N \geq 3$, vale

$$\bar{\mu} \int_{\Omega} \frac{u^2(x)}{|x|^2} dx \leq \int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx \quad (\text{A.5})$$

para toda função $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega)$, em que $\bar{\mu} = [(N-2)/2]^2$. A constante $\bar{\mu}$ é ótima, no sentido de que

$$\bar{\mu} = \inf_{\substack{u \in \mathcal{C}_0^\infty(\Omega) \\ u \neq 0}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u(x)|^2 dx}{\int_{\Omega} \frac{u^2(x)}{|x|^2} dx}.$$

A igualdade em (A.5) nunca é atingida.

A desigualdade de Caffarelli, Kohn e Nirenberg [6] garante que para $1 \leq p \leq N-1$, $q = q(a, b) \equiv \frac{Np}{N-p(a+1-b)}$, $0 < a < \frac{(N-p)}{p}$ e $a \leq b \leq a+1$ existe uma constante positiva C tal que

$$\left[\int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-bq} |u(x)|^q dx \right]^{\frac{p}{q}} \leq C \int_{\mathbb{R}^N} |x|^{-ap} |\nabla u(x)|^p dx, \quad (\text{A.6})$$

para toda função $u \in \mathcal{C}_0^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Em particular, fazendo $a = 0$, $b = 1$, $p = 2$ e $q = 2$, obtemos a desigualdade de Hardy como um caso particular da desigualdade (A.6), isto é,

$$\| |x|^{-2} u \|_2^2 \leq C \| \nabla u \|_2^2, \quad (\text{A.7})$$

Além disso, fazendo $a = 0$, $b = 0$, $p = 2$ e $q = 2^*$, obtemos a desigualdade de Sobolev como um caso particular da desigualdade (A.6), isto é,

$$\| u \|_{2^*}^2 \leq C \| \nabla u \|_2^2. \quad (\text{A.8})$$

Demonstração. Consulte o artigo de Caffarelli, Kohn e Nirenberg [6]. □

Bibliografia

- [1] A. Ambrosetti, A. Malchiodi, *Nonlinear Analysis and Semilinear Elliptic Problems*, Cambridge University Press, 2007.
- [2] M. Badiale, E. Serra, *Semilinear Elliptic Equations for Beginners, Existence Results via the Variational Approach*, Springer Verlag, London, 2011.
- [3] R. Bartle, *The Elements of Integration and Lebesgue Measure*, John Wiley, 1995.
- [4] H. Brézis, *Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations*, Springer Verlag, London, 2011.
- [5] H. Brézis, L. Nirenberg, *Positive solutions of nonlinear elliptic equations involving critical exponents*, *Comm. Pure Appl. Math.* 36 (1983), n. 4, 437–477.
- [6] L. Caffarelli, R. Kohn, L. Nirenberg, *First order interpolation inequalities with weights*, *Compositio Math.* 53 (1984), 259-275.
- [7] L. C. Evans, *Partial Differential Equations*, American Mathematical Society, Graduate Studies in Mathematics, vol. 19, Providence, 1998.
- [8] E. Jannelli, *The role played by space dimension in elliptic critical problems*, *J. Differential Equations* 156(1999)407–426.
- [9] L. Jeanjean, *Variational methods and applications to some nonlinear problems*, Habilitation Mémoire, Université de Marne-la-vallée, 1999.
- [10] O. Kavian, *Introduction à la Théorie des Points Critiques et Applications aux Problèmes Elliptiques*, *Mathématiques & Applications*, vol. 13, Springer Verlag, Paris, 1993.
- [11] P. L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations, the limit case II*, *Rev. Mat. Iberoamericana* 1 (1985), 145-201.
- [12] P. L. Lions, *The concentration-compactness principle in the calculus of variations, the limit case II*, *Rev. Mat. Iberoamericana* 2 (1985), 45-121.

-
- [13] M. Ramos, Z.-Q. Wang, M. Willem, *Positive solutions for elliptic equations with critical growth in unbounded domains*, Calculus of Variations and Differential Equations, Chapman & Hall/CRC Press, Boca Raton, 2000, pp.192–199.
- [14] D. Ruiz, M. Willem, *Elliptic problems with critical exponents and Hardy potentials*, J. Differential Equations 190 (2003) 524–538.
- [15] M. Struwe, *Variational Methods, Applications to Nonlinear Partial Differential Equations and Hamiltonian Systems*, Second edition, 34, Springer-Verlag, Berlin, 1996.
- [16] S. Terracini, *On positive entire solutions to a class of equations with a singular coefficient and critical exponent* Advances in Differential Equations Volume 1, Number 2, March 1996, pp.241–264.
- [17] S. Valeriola, *Problèmes elliptiques semi-linéaires à croissance critique*, 2006, Université Libre de Bruxelles.
- [18] H. F. Weinberger, *A First Course in Partial Differential Equations, with complex variables and transform methods*, Dover Publications, Inc., New York, 1995.
- [19] M. Willem, *Minimax Theorems*, Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 24, Birkhäuser Boston, Inc., Boston, 1996.

Índice Remissivo

- Ambrosetti e Malchiodi, 1
- Badiale e Serra, 8
- Brézis, 2
- Brézis e Nirenberg, 7, 9
- Brézis-Lieb
 - Lema de, 66
- Cálculo Variacional, 2
- Caffarelli, Kohn e Nirenberg
 - Desigualdade de, 69
- compacidade, 7
 - problemas sem, 7
- concentração-compacidade
 - Lema de, 20, 37
- conjunto estrelado, 8
- convergência fraca em medida, 65
- criticalidade simétrica
 - Princípio da, 22, 65
- Desigualdade
 - de Caffarelli, Kohn e Nirenberg, 69
 - de Hölder, 6
 - de Hardy, 12, 13, 17, 68
 - de Sobolev, 32, 69
- Dirichlet
 - Problema de, 1
- domínios
 - contidos em cilindros, 50
 - estrelados, 8
 - ilimitados, 35
 - invariantes, 55
 - limitados, 1, 32
- Ekeland
 - Princípio variacional de, 5, 66
- equação
 - de Euler-Lagrange, 12
- espaços de funções, 61
- Evans, 2
- expoente
 - crítico de Sobolev, 1, 11
- funções
 - concentração de Levy, 19
 - corte, 14, 23
 - instanton, 28
 - radiais, 19, 23
- funcional
 - coercivo, 3
 - contínuo, 6
 - de energia, 2
 - fracamente semicontínuo inferiormente, 3
 - pontos críticos, 5, 6, 13
- grupo ortogonal, 17, 62
- Hölder
 - Desigualdade de, 6
- Hardy
 - Desigualdade de, 12, 13, 17, 68
 - melhor constante de, 12, 69
 - potencial de, 1, 11
- identidade de Pohozaev, 7
- imersão
 - compacta, 2, 3
 - não compacta, 7, 9

- integração em coordenadas polares, 63
 invariância
 por homotetias, 18

 Jannelli, 11, 12
 Jeanjean, 1

 Lema
 de Brézis-Lieb, 66
 de concentração-compacidade, 20, 37

 melhor constante
 nas imersões de Sobolev, 17
 de Hardy, 12, 69
 nas imersões de Sobolev, 9

 notações de Landau, 62

 Palais-Smale
 condição de, 5, 9
 sequência de, 5
 passo da montanha
 geometria do, 5
 nível do, 5
 Teorema do, 6
 Pohozaev
 identidade de, 7
 Poincaré
 desigualdade de, 4
 potencial
 de Hardy, 1, 11
 primeiro autovalor, 9, 12
 Princípio
 variacional de Ekeland, 5
 da Criticalidade Simétrica, 65
 da criticalidade simétrica, 22
 variacional de Ekeland, 66
 Problema
 de Dirichlet, 1

 regularidade, 2

 Rellich-Kondrachov
 Teorema de imersão de, 65
 Ruiz e Willem, 1, 13

 Schwarz
 simetrização de, 23
 simetrização de, 64
 sequência
 de Palais-Smale, 5
 minimizante, 3, 14, 18, 20
 simetrização
 de Schwarz, 23
 de Schwarz, 64
 Sobolev
 Desigualdade de, 32, 69
 expoente crítico de, 1, 11
 melhor constante nas imersões de, 9, 17
 solução
 clássica, 1, 2, 8
 existência, 1, 2, 8, 17, 32, 50, 55
 fraca, 2, 3, 13, 18
 invariante, 55
 não-existência, 1, 8, 22
 radial, 14, 22

 Teorema
 da convergência dominada, 65
 de imersão de Rellich-Kondrachov, 65
 do passo da montanha, 6, 67

 Willem, 7