Universidade Federal de Minas Gerais

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

Sobre uma Classe de Desigualdades Ótimas de Sobolev Vetoriais de Segunda Ordem

Aldo Peres Campos e Lopes

Orientador: Prof. Ezequiel Rodrigues Barbosa
Co-Orientador: Prof. Marcos Montenegro

Belo Horizonte - 5 de julho de 2013

Aos meus pais, Alfreu e Eunice.

Aldo Peres Campos e Lopes

Sobre uma Classe de Desigualdades Ótimas de Sobolev Vetoriais de Segunda Ordem

Tese apresentada ao progama de Pós -Graduação em Matemática da Universidade Federal de Minas Gerais, como requisito parcial para obtenção do título de Doutor em Matemática

Orientador: Ezequiel Rodrigues Barbosa Co-Orientador: Marcos Montenegro

Agradecimentos

Ao meu orientador Ezequiel Rodrigues Barbosa e ao meu co-orientador Marcos Montenegro pelo incentivo e apoio, pelo belo tema proposto e discussões sempre tão esclarecedoras e instrutivas. Sou grato ao meu orientador pela paciência e gentileza em solucionar diversas dúvidas que surgiram, por dispor de seu tempo mesmo em sábados e outros dias não letivos.

Aos membros da banca avaliadora que gentilmente aceitaram participar da conclusão desse trabalho, professores Ezequiel Rodrigues Barbosa, Marcos Montenegro, Emerson Jurandir e João Marcos Bezerra do Ó por ter se disposto a fazer uma viagem mais longa, da Paraíba.

Aos meus pais, Alfreu e Eunice, pelo amplo incentivo ao “domínio do saber”. Mesmo antes de entrar na Universidade, o grande desejo de meu pai era me ver com o título de Doutor, o “Dr. Aldo”, como sempre me dizia.

Aos meus vários colegas de doutorado que me ajudaram de diversas manéiras.

Ao professor Francisco Dutenhefner pela orientação no mestrado pela compreensão e flexibilidade. À Susana C. Fornari pela paciência e dedicação durante a minha iniciação científica e incentivo à pesquisa acadêmica.

À professora Sylvie Marie que, sem saber, ajudou-me a entrar na carreira matemática. Não esqueço de uma frase dela: “Muitos escolhem fazer engenharia porque gostam de matemática. Porque não escolher matemática já que gosta de matemática?”

Aos diversos professores do departamento de matemática da UFMG que ajudaram tirando dúvidas e lecionando cursos que participei como aluno. Neste aspecto, sou grato a professores como: Gastão, Mário Jorge, Rogério Mol, Marcelo T. Cunha, entre diversos outros.

Ao departamento de matemática da UFMG por ter ajudado, na medida do possível, em diversos eventos que participei. Certamente é merecido o conceito 6 pela CAPES.

Aos colegas da UNIFEI que ajudaram na redução de minha carga horário por alguns semestres.

Aos demais colegas, amigos e professores que deveriam constar aqui. No entanto, não faço uma lista com nomes, pois poderia esquecer de mencionar alguém.

Mais uma vez, a todos, os meus mais sinceros agradecimentos. E, pricinpalmente, a Deus, Jeová, o Todo-Poderoso, Grande Cientista e Projetista criador do Universo e da maravilhosa mente humana.

A ciência não pode resolver o mistério final da natureza. E isto porque, em última análise, somos parte do mistério que tentamos resolver.

Max Planck

Resumo

Estudamos sistemas elípticos sob a forma potencial envolvendo um operador do tipo Paneitz-Branson com a presença de não linearidades críticas. Inicialmente apresentamos condições para a existência de soluções regulares de sistemas potenciais em Geometria Riemanniana, deomposição em bolhas diagonais para aplicações de Palais-Smale e aplicações teóricas dessa deomposição. Em seguida, aplicamos a decomposição em bolhas a um resultados de compacidade. E, finalmente, aplicamos a teoria na existência de aplicações extremais em desigualdades vetoriais ótimas de Sobolev em variedades compactas.

Abstract

We approach potential elliptic systems involving Paneitz-Branson operators and critical nonlinearities. First, we present conditions for the existence of regular solutions of potential systems in Riemannian Geometry, a decomposition in diagonal bubbles to applications of Palais-Smale and theoretical applications of this decomposition. Then, we Euclidean space, we present another decomposition in bubbles and apply the decomposition in bubbles o a result of compactness. Finally, we apply all those results in extremal applications for optimal Sobolev inequalities on compact manifolds.

Sumário

Introdução Geral

0.1 Panorama Histórico

Em 1983, Paneitz [27] introduziu o operador de quarta ordem $P_g^4 : C^4(M) \to C^0(M)$, definido por

$$P_g^4 u := \Delta_g^2 u - \mathrm{div_g}\left(\left(\frac{2}{3}R_g g - 2\,\mathrm{Ric_g}\right)(\nabla u)^{\#}\right),$$

para todo $u \in C^4(M)$, em que (M,g) é uma variedade Riemanniana de dimensão $n = 4$, $\mathrm{Ric_g}$ é o tensor de Ricci, R_g é a curvatura escalar, $\mathrm{div_g}$ é o divergente e Δ_g é o operador de Laplace-Beltrami em relação à métrica g. Esse operador P_g^4 possui algumas propriedades de invariância conforme. Precisamente, se $\tilde{g} = e^{2\varphi} g$ é uma métrica conforme à métrica g, $\varphi \in C^\infty(M)$, então

$$P_{\tilde{g}}^4 = e^{-4\varphi} P_g^4 .$$

Associado a esse operador, temos a noção de Q-curvatura, uma curvatura que também possui propriedades conformes. Para esse caso $n = 4$, a Q-curvatura é dada por

$$Q_g^4 = \frac{1}{6}\left(\Delta_g R_g - 3|\,\mathrm{Ric_g}\,|_g^2 + R_g^2\right) .$$

Além dessa invariancia conforme, o operador P_g^4 aparece na seguinte relação entre as curvaturas Q_g^4 e $Q_{\tilde{g}}^4$:

$$P_g^4 \varphi + Q_g^4 = Q_{\tilde{g}}^4 e^{4\varphi} .$$

É interessante notar que a Q-curvatura em dimensão $n = 4$, e para variedades localmente conformemente planas, torna-se o integrando na fórmula de Gauss-Bonnet para característica de Euler, desempenhando assim um papel muito importante no estudo da topologia e geometria das variedades Riemannianas de dimensão 4. A saber, temos a seguinte identidade integral

$$4\pi^2 \chi(M) = \int_M \left(Q_g + \frac{1}{8}|\,\mathrm{Weyl_g}\,|^2\right) dv_g \,, \tag{1}$$

em que $\chi(M)$ é a característica de Euler da variedade M e $\mathrm{Weyl_g}$ denota o tensor de Weyl em relação à métrica g. Como a quantidade $|\mathrm{Weyl_g}|^2\, dv_g$ é um invariante conforme pontual, obtemos que a integral da Q-curvatura $\int Q_g\, dv_g$ é um invariante conforme. Para mais detalhes sobre isso, veja os artigos de Chang [8] e Chang-Yang [7].

A generalização para o caso $n \geq 5$ foi feita por Branson [6] em 1987. Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão $n \geq 5$. Definimos o operador $P_g^n : C^4(M) \to C^0(M)$ por

$$P_g^n u := \Delta_g^2 u - \mathrm{div_g}\left((a_n R_g g + b_n Ric_g)\,(\nabla u)^{\#}\right) + \frac{n-4}{2} Q_g^n u\,,$$

em que

$$a_n = \frac{(n-2)^2+4}{2(n-1)(n-2)}, \quad b_n = -\frac{4}{n-2}\,,$$

e

$$Q_g^n = \frac{1}{2(n-1)}\Delta_g R_g + \frac{n^3-4n^2+16n-16}{8(n-1)^2(n-2)^2}\,R_g - \frac{2}{(n-2)^2}\,|\,\mathrm{Ric_g}\,|_g^2$$

é a Q-curvatura para dimensão $n \geq 5$. Denotaremos P_g^n também por P_g. Esse operador também possui propriedades de invariância conforme. Ou seja, considerando $u \in C^\infty(M)$, $u > 0$, e a métrica $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-4}} g$ que é conforme à métrica g, temos

$$P_{\tilde{g}}^n \varphi = u^{-\frac{n+4}{n-4}} P_g^n(u\varphi), \tag{2}$$

para todo $\varphi \in C^\infty(M)$. Em particular, tomando $\varphi \equiv 1$, chegamos a seguinte equação diferencial elíptica semilinear satisfeita pelo fator conforme u:

$$P_g^n u = \frac{n-4}{2} Q_{\tilde{g}}^n u^{\frac{n+4}{n-4}}\,, \qquad u > 0\,.$$

É interessante comparar essa relação entre o operador de Paneitz-Branson e a Q-curvatura da métrica g com a curvatura escalar R_g. Vejamos o que quero dizer com isso. Primeiramente, temos o seguinte

$$L_g u = R_{\tilde{g}} u^{\frac{n+2}{n-2}}\,,$$

em que $L_g = 4\frac{n-1}{n-2}\Delta_g + R_g$; $\tilde{g} = u^{\frac{4}{n-2}}g$ e $n \geq 3$. Temos também uma identidade equivalente para o caso $n = 2$. O operador L_g é um operador conforme. Um importante resultado em geometria diferencial conforme é a resolução do problema de Yamabe, em que o operador L_g desempenha um papel fundamental. Ou seja, podemos sempre achar uma métrica $\overline{g}$, na classe conforme da métrica g, tal que a curvatura escalar $R_{\overline{g}}$ é constante, considerando a variedade suave, fechada e de dimensão $n \geq 2$.

Devido as similaridades das propriedades, na geometria diferencial conforme, entre os operadores L_g e P_g, é natural se perguntar se a Q-curvatura possui a mesma propriedade, ou seja, como ficaria o problema de Yamabe para a Q-curvatura. Resultados parcais foram estabelecidos respondendo a essa questão para variedades de dimensões ≥ 5 (veja [15], [22], [23], [28]).

Mas esses resultados são limitados pela falta de princípios do máximo para operadores diferenciais de ordens maiores. Devido a esse problema, precisamos de positividade no fator conforme u que é determinado pela equação de Paneitz-Branson e não é claro como garantir que essa condição seja satisfeita em condições gerais. Esse problema pode ser contornado usando a propriedade de covariância conforme do operador de Paneitz-Branson, isto é, de (2). Essa propriedade nos diz que uv é uma solução para a equação de Paneitz-Branson na geometria da métrica $\tilde{g}$ se u é solução na geometria de g. Essa condição tem um importante papel no tipo das funções que podem ser mínimos locais de um funcional que está naturalmente associado ao problema de Yamabe para a Q-curvatura.

Existe um outro problema, um problema analítico, quando consideramos o problema de Yamabe para a Q-curvatura. Como no caso do problema de Yamabe clássico, temos problemas quando tentamos usar métodos variacionais para achar soluções da equação de Paneitz-Branson por causa do expoente da não lineariade, $\frac{n+4}{n-4}$, em que n é a dimensão da variedade, que é o expoente crítico de Sobolev de $W^{2,2}(M)$ menos um, pois a imersão $W^{2,2}(M)$ em $L^{\frac{2n}{n-4}}$ não é compacta.

Uma idéia contida em [10], trabalho de Hebey-Djadli-Ledoux, é que desigualdades de Sobolev de segunda ordem podem ser usadas para lidar com o problema de concentração na aproximação de sequência para a solução, desde que o ínfimo do funcional associado com o problema, o funcional de Paneitz-Branson, seja menor que um valor crítico. Nesse método, não é claro quando o ínfimo é positivo e a constante de Yamabe é menor ou igual à constante de Yamabe da esfera.

Uma solução parcial para esse problema foi feita por de F. Robert e P. Esposito em 2002 no trabalho [15]. Foi mostrado que, se $n \geq 8$ e a variedade é localmente conformemente flat, então existe um minimizador para o

funcional de Paneitz-Branson.
O efeito desse resultado é que a parte de existência do problema de Yamabe para a Q-curvatura é levado a um ponto análogo àquele que Aubin levou no problema de Yamabe para a curvatura escalar. Porém, ainda não é claro quando a função de Green do operador de Paneitz Branson é positiva, no caso do operador ser coercivo. Isso exclui tentar usar os métodos de Schoen para completar o problema.
Foi demonstrado por D. Raske (veja [29]) que existe uma métrica na classe conforme de uma métrica arbitrária em uma variedade Riemanniana fechada, suave de dimensão $n \geq 5$, tal que a Q-curvatura da métrica é constante. Existência de soluções é obtida através da combinação de métodos variacionais, desigualdades de Sobolev de segunda ordem e a teoria de blow-up de $W^{2,2}(M)$. Abaixo apresentaremos o resultado.
Definimos a constante de Paneitz-Branson como

$$\lambda_g(M) := \inf_{w \in C_+^\infty(M)} \frac{\int_M wP_gw\, dv_g}{\|w\|^2_{\frac{2n}{n-4}}},$$

em que P_g é o operador de Paneitz-Branson. Seja $\lambda(S^n)$ a constante de Paneitz-Branson da esfera unitária com a métrica canônica. Temos o seguite resultado (veja [29]):

Teorema 1 (David Raske, 2011). *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão $n \geq 5$. Suponha que pelo menos uma das seguintes condições vale:*

i. *A constante de Paneitz-Branson é menor que $\lambda(S^n)$;*

ii. *A constante de Yamabe de g é maior ou igual ao inverso da constante de Yamabe para a n-esfera;*

iii. *$n \geq 8$ e g não é localmente conformemente flat.*

Então existe um minimizador suave, positivo do funcional de Paneitz-Branson e existe uma métrica h na classe conforme de g tal que $Q_h = \lambda$, em que λ é a constante de Paneitz-Branson de g.

Assim, o estudo sobre os operadores do tipo Paneitz-Branson é de fundamental importância na análise de problemas geométricos como o problema da Q-curvatura prescrita, em que o problema de Yamabe para a Q-curvatura é um caso particular.
Considere agora o sistema de equações

$$-\Delta_g^2 u_i + \mathrm{div_g}\left(A_i(\nabla u_i)^{\#}\right) + \sum_{j=1}^{k} A_{ij}(x)u_j = u_i^{2^{\#}-1}\,, \tag{3}$$

em que $2^{\#} = \frac{2n}{n-4}$, $U = (u_1, \ldots, u_k)$, $A = (A_{ij})$ é uma aplicação contínua de M em $M_k^s(\mathbb{R})$ tal que $A(x)$ é positiva definida para todo $x \in M$, $M_k^s(\mathbb{R})$ é o espaço das matrizes reais simétricas $k \times k$, e os A_i's são campos de tensores simétricos do tipo (2,0). Neste contexto, consideraremos $u_i > 0$ para todo i. Este sistema pode ser visto como uma generalização natural das equações que envolvem os operadores do tipo Paneitz-Branson. Assim, considerando o caso escalar, isto é $k = 1$, e o tensor $A_i = f \cdot g$, em que f é uma função suave, o sistema (3) pode ser reescrito como

$$-\Delta_g^2 u + b_\alpha \Delta_g u + c_\alpha u = u^{2^{\#}-1}\,. \tag{4}$$

Assuma que as constantes b_α e c_α são sequências convergentes de números reais positivos, satisfazendo $c_\alpha \leq \frac{b_\alpha^2}{4}$. De 2000 a 2004, muitos autores estudaram o caso (4) acima, como por exemplo F. Robert, E. Hebey, Z. Djadli e M. Ledoux em [10, 15, 22] e [24]. Hebey-Robert-Wen em [24] discutiram a compacidade de soluções de (4), precisamente quando b_α e c_α convergem respectivamente para b_0 e c_0 e as soluções u_α convergem fracamente em $H^{2,2}(M)$, eles encontraram condições tal que o limite u_α é não trivial.

Os teoremas a seguir foram provados por Hebey-Robert-Wen em 2004 (veja [24]). Seja

$$A_g = \frac{(n-2)^2+4}{2(n-1)(n-2)} R_g\, g - \frac{4}{n-2}\ \mathrm{Ric_g} \tag{5}$$

um campo de $(2,0)$-tensores. Denotamos por $\lambda_i(A_g)_x$, $1, ..., k$, os g-autovalores de $A_g(x)$ e definimos λ_1 o ínfimo sobre i e x dos $\lambda_i(A_g)_x$ e λ_2 como o supremo sobre i e x dos $\lambda_i(A_g)_x$. Denotamos por $\mathcal{S}_c$ o conjunto crítico definido por

$$\mathcal{S}_c = \{\lambda \in \mathbb{R} :\ \lambda_1 \leq\ \lambda\ \leq\ \lambda_2\}\,. \tag{6}$$

Temos os seguintes resultados:

Teorema 2 (Hebey-Robert-Wen, 2004). *Sejam (M, g) uma variedade compacta localmente conformemente flat de dimensão n e $(b_\alpha)_\alpha, (c_\alpha)_\alpha$ sequências convergentes de números* *reais positivos com limites positivos b_∞ e c_∞ e tais que $c_\alpha \leq \frac{b_\alpha^2}{4}$ para todo α. Consideramos equações do tipo*

$$\Delta_g^2 u + b_\alpha \Delta_g u + c_\alpha u = u^{2^\# - 1}\,, \tag{7}$$

e assumimos que $b_\infty \notin \mathcal{S}_c$, em que b_∞ é o limite dos b_α e $\mathcal{S}_c$ é o conjunto crítico dado por (6)*. Então a família* (7) *é pseudo-compacta quando $n \geq 6$ e compacta quando $n \geq 9$.*

Dizemos que a família de equações que são soluções de (7) é pseudo-compacta se, para qualquer sequência (u_α) em $H^{2,2}(M)$ de soluções positivas que converge fracamente em $H^{2,2}(M)$, o limite fraco u^0 dos u_α é diferente de zero. O seguinte teorema é um complemento do teorema acima quando a dimensão é $n = 6, 7$ ou 8 e b_∞ é abaixo do limite inferior λ_1 de $\mathcal{S}_c$.

Teorema 3 (Hebey-Robert-Wen, 2004)**.** *Sejam (M, g) uma variedade compacta localmente conformemente flat de dimensão $n = 6, 7$ ou 8 e $(b_\alpha)_\alpha$, $(c_\alpha)_\alpha$ sequências convergentes de números reais positivos com limites positivoe b_∞ e c_∞ e tais que $c_\alpha \leq \frac{b_\alpha^2}{4}$ para todo α. Consideramos equações do tipo*

$$\Delta_g^2 u + b_\alpha \Delta_g u + c_\alpha u = u^{2^\# - 1}\,,$$

e assumimos que $b_\infty < \lambda_1 = \min \mathcal{S}_c$, em que b_∞ é o limite dos b_α e $\mathcal{S}_c$ é o conjunto crítico dado por (6)*. Então a família* (7) *é compacta.*

Pseudo-compacidade tem um tradicional interesse pois ela busca soluções não triviais da equação limite que obtemos de (7) fazendo $\alpha \to +\infty$. Por outro lado, dizemos que a família de equações (7) é compacta se qualquer sequência $(u_\alpha)_\alpha$ em $H^{2,2}(M)$ de soluções positivas de (7) está limitada em $C^{4,\theta}(M)$, $0 < \theta < 1$ e então converge, a menos de subsequência, em $C^4(M)$ para alguma função u^0. Compacidade é uma noção claramente mais forte que pseudo-compacidade. Pseudo-compacidade para equações elípticas de segunda ordem do tipo Yamabe tem sido bastante estudada. Compacidade para equações de segunda ordem do tipo Yamabe foi estudada por Schoen de 1988 a 1991 (veja os trabalhos dele em [32, 33, 34, 35]). Como aplicação desses resultados de compacidade, podemos estudar também a existência de funções extremais em desigualdades escalares ótimas de Sobolev de segunda ordem. Deixe me falar um pouco mais sobre essas desigualdades de segunda ordem. Da imersão contínua $H^{2,2}(M) \hookrightarrow L^{2^\#}(M)$, segue que existem constantes $A, B > 0$ tais que:

$$\|u\|_{2^\#}^2 \leq A\|\Delta_g u\|_2^2 + B\|u\|_{H^{1,2}(M)}^2\,, \qquad \forall\, u \in H^{2,2}(M). \tag{8}$$

Estamos interessados em constantes ótimas A, B da desigualdade acima. Mais precisamente, a melhor constante A é definida por

$$A_0 = \inf \left\{ \textbf{A: existe B tal que vale a desigualde (8) acima } \forall\, u \in H^{2,2}(M) \right\} . \quad (9)$$

Uma questão natural que surge é se o ínfimo A_0 é atingido. A resposta é sim, o ínfimo A_0 é atingido em (8). Em 2000, Djadli-Hebey-Ledoux [10] provaram o resultado com a restrição de que a métrica g é conformemente flat. Posteriormente, no ano 2003, Emmanuel Hebey provou o resultado para uma variedade Riemanniana qualquer em [25] (veja também [26]).

Segue do teorema de Sobolev que a constante A_0 está bem definida. Essa constante foi calculada por Lieb [25], Lions [26], Edmunds-Fortunato-Jannelli [14] e Swason [37]. Precisamente, temos:

$$\frac{1}{A_0} = \frac{n(n^2-4)(n-4)w_n^{\frac{4}{n}}}{16},$$

em que w_n é o volume da esfera S^n em $\mathbb{R}^{n+1}$.

O ínfimo em (9) é atingido e existe uma constante $B > 0$ tal que:

$$\left(\int_M |u|^{2^\#} dv_g \right)^{\frac{2}{2^\#}} \leq A_0 \int_M (\Delta_g u)^2 \, dv_g + B \int_M \left(|\nabla u|_g^2 + u^2 \right) \, dv_g \,, \quad (10)$$

para todo $u \in H^{2,2}(M)$.

A segunda melhor constante de Sobolev associada à (8) é definida por:

$$B_0 = \inf \{ B \in \mathbb{R};\ (10) \textbf{ é válida } \} . \quad (11)$$

A segunda desigualdade de Sobolev Riemanniana afirma que, para qualquer $u \in H^{2,2}(M)$, temos

$$\left(\int_M |u|^{2^\#} \, dv_g \right)^{\frac{2}{2^\#}} \leq A_0 \int_M (\Delta_g u)^2 \, dv_g + B_0 \int_M \left(|\nabla_g u|^2 + |u|^2 \right) \, dv_g \,. \quad (12)$$

Uma função não nula $u_0 \in H^{2,2}(M)$ é dita *extremal* para a desigualdade (12) se

$$\left(\int_M |u_0|^{2^\#} \, dv_g \right)^{\frac{2}{2^\#}} = A_0 \int_M (\Delta_g u_0)^2 \, dv_g + B_0 \int_M \left(|\nabla_g u_0|^2 + |u_0|^2 \right) \, dv_g \,.$$

Poderá encontrar alguns comentários sobre a segunda melhor constante em [10] (Djadli, Hebey, Ledoux, 2000). Mas para funções extremais para desigualdades ótimas existem estudos apenas para o caso de primeira ordem. Para essa linha, veja [11] e também [5, 4].

Tudo o que foi dito acima está sendo considerado para o caso $k = 1$. O objetivo principal dessa tese é estender alguns desses resultados para o caso $k \geq 2$ e aplicá-los no estudo sobre existência de aplicações extremais em desigualdades vetoriais ótimas de Sobolev de segunda ordem. Falaremos um pouco mais sobre isso na próxima seção.

0.2 Proposta e Relevância

Uma das metas principais dessa tese é estender os resultados sobre compacidade de soluções de equações envolvendo operadores do tipo Paneitz-Branson para sistemas e aplicar esses resultados para obtermos resultados de existência de aplicações extremais para uma classe de desigualdades de Sobolev ótimas de segunda ordem. Esta é uma questão importante, tanto do ponto de vista matemático, por envolver uma estrutura mais ampla e sua compreensão, quanto do ponto de vista de aplicações analíticas, por possibilitar o estudo de diversos sitemas de EDP's elípticas de segunda ordem sobre variedades Riemannianas. Deixe-me ser um pouco mais claro.

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta cujo elemento de volume é dv_g, de dimensão $n \geq 5$. Consideramos aqui funções $U \in H_k^{2,2}(M)$ que são soluções da seguinte equação modelo:

$$-\Delta_g^2 U + \mathrm{div_g}\left(A(\nabla U)^{\#}\right) + \nabla_U G(x, U) = \nabla F(U)\,. \tag{13}$$

Ou seja,

$$-\Delta_g^2 u_i + \mathrm{div_g}\left(A_i(\nabla u_i)^{\#}\right) + \partial_i G(x, U) = \partial_i F(U)\,, \tag{14}$$

para cada $i = 1, ..., k$, em que $2^{\#} = \frac{2n}{n-4}$ é o expoente crítico de Sobolev para imersões de $H^{2,2}(M)$ em espaços $L^p(M)$. Note que o operador $P_g := -\Delta_g^2 + \mathrm{div_g}\left(A_i(\nabla\cdot)^{\#}\right) + \partial_i G(x, \cdot)$ é do tipo Paneitz-Branson. Aqui surgem algumas perguntas, como:

- **Existe uma solução não nula U para (13)?**

- **Caso exista uma solução não nula U, qual a regularidade que podemos obter?**
- **O conjunto das soluções de (13) é compacto em alguma topologia?**

Responderemos essas perguntas nos capítulos que seguem para uma classe de funções homogêneas F e G.
Respondendo as questões acima, podemos partir para o estudo de existência de aplicações extremais em desigualdades de Sobolev ótimas de segunda ordem no caso vetorial. Este estudo, para o caso de segunda ordem, também está motivado no estudo das melhores constantes para desigualdades de primeira ordem no caso vetorial que foi feito por E. Barbosa e M. Montenegro (veja [5]). E. Barbosa e M. Montenegro estudaram desigualdades do tipo:

$$\left(\int_M F(U)\,dv_g\right)^{\frac{p}{p^*}} \leq \mathcal{A}_0(p,F,G,g)\int_M |\nabla_g U|^p\,dv_g + \mathcal{B}_0(p,F,G,g)\int_M G(x,U)\,dv_g\,, \quad (15)$$

em que $\mathcal{A}_0$ e $\mathcal{B}_0$ são as melhores constantes, $1 \leq p < n$, $U = (u_1, \cdots, u_k)$, $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, positiva e p^*-homogênea e $G : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, positiva e p-homogênea na segunda variável. A teoria vetorial de melhores constantes desenvolvida (em [5]) considera uma série de questões envolvendo as constantes $\mathcal{A}_0$ e $\mathcal{B}_0$. Algumas seguem diretamente da teoria escalar, outras são mais complexas, como por exemplo, o comportamento de $\mathcal{B}_0$ em relação a todos os parâmetros envolvidos e o problema de existência e compacidade C^0 de aplicações extremais. Uma aplicação U é uma extremal quando atinge a igualdade em (15). Quando F e G são de classe C^1 uma aplicação extremal é automaticamente solução fraca do sistema de equações:

$$-\mathcal{A}_0(p,F,G,g)\Delta_{p,g}u_i + \frac{1}{p}\mathcal{B}_0(p,F,G,g)\frac{\partial G(x,U)}{\partial t_i} = \frac{1}{p^*}\frac{\partial F(U)}{\partial t_i}, \quad i = 1, \cdots, k\,,$$

em que $\Delta_{p,g}u = \mathrm{div_g}(|\nabla_g u|^{p-2}\nabla_g u)$ denota o operador p-Laplaciano associado à metrica g.
Agora, considere $U_\alpha \in H^{1,p}(M,\mathbb{R}^k)$ soluções fracas do sistema:

$$-\Delta_{p,g}\mathcal{U} + \frac{1}{p}\nabla_{\mathcal{U}} G_\alpha(x,\mathcal{U}) = \frac{1}{p^*}\nabla F_\alpha(\mathcal{U}) \quad \text{em M}\,,$$

em que $F_\alpha : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ são funções de classe C^1, positivas e p^*-homogêneas e $G_\alpha : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ são funções contínuas, de classe C^1 e p-homogêneas na

segunda variável. Considerando a sequência de soluções $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$ limitadas cujo limite é $\mathcal{U} \equiv 0$, a menos de subsequência, temos a seguinte decomposição em bubbles:

$$\mathcal{U}_\alpha = \sum_{j=1}^{l} B_{j,\alpha} + R_\alpha \,,$$

para todo $\alpha > 0$, sendo $(B_{j,\alpha})_\alpha,\ j = 1, \cdots, l$, k-bubbles e $(R_\alpha)_\alpha \subset H^{1,p}(M, \mathbb{R}^k)$ é tal que $R_\alpha \to 0$ em $H^{1,p}(M, \mathbb{R}^k)$ quando $\alpha \to +\infty$. Esse resultado dá condições de adicionair mais propriedades à sequências de soluções limitadas tais que $\mathcal{U}_\alpha \rightharpoonup 0$ em $H^{1,p}(M, \mathbb{R}^k)$. Acrescenta-se estimativas pontuais ou C^0 para $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$ (veja [9]). Os pontos de blow-up ou concentração da sequência $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$ possuem grande parte da informação da sequência, é a propriedade de concentração L^p. Fenômenos de concentração foram estudado por Druet, Hebey e Robert (veja [17] e [12]) e extensões desses trabalhos, foram feitas por G. Souza [9]. Nessa tese, seguimos as mesmas linhas de E. Barbosa e M. Montenegro em [5]. Consideramos as desigualdades ótimas de Sobolev de segunda ordem

$$\begin{aligned} \left(\int_M F(U) dv_g \right)^{\frac{2}{2^\#}} &\leq \mathcal{A}_0 \int_M (\Delta_g U)^2 \, dv_g + \\ &+ \mathcal{B}_0 \int_M \left((A\left((\nabla_g U)^\#, (\nabla_g U)^\# \right) + G(x, U) \right) \, dv_g \,, \end{aligned} \tag{16}$$

em que F é $2^\#$-homogênea e G é 2-homogênea na segunda variável, e também os sistemas de segunda ordem associados a esta desigualdade:

$$-\Delta_g^2 U + \mathrm{div_g} \left(A(\nabla U)^\# \right) + \frac{1}{2} \nabla_U G(x, U) = \frac{1}{2^\#} \nabla F(U) \,. \tag{17}$$

Consideramos a sequência de soluções $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$ limitadas cujo limite é $\mathcal{U} \equiv 0$, a menos de subsequência, obtemos a seguinte decomposição em bubbles:

$$\mathcal{U}_\alpha = \sum_{j=1}^{l} B_{j,\alpha} + R_\alpha \,,$$

para todo $\alpha > 0$, sendo $(B_{j,\alpha})_\alpha,\ j = 1, \cdots, l$, k-bubbles e $(R_\alpha)_\alpha \subset H^{2,2}(M, \mathbb{R}^k)$ é tal que $R_\alpha \to 0$ em $H^{2,2}(M, \mathbb{R}^k)$ quando $\alpha \to +\infty$. A esse resultado, acrescenta-se estimativas pontuais ou C^0 para $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$. Os pontos de blow-up ou concentração da sequência $(\mathcal{U}_\alpha)_\alpha$ possuem grande parte da informação da

sequência gerando as propriedades de concentração L^2. Aplicamos todos esses resultados juntamente para estudarmos a existência de aplicações extremais para as desigualdades (16).

0.3 Organização e Ideias

Esta tese é composta de três capítulos. No Capítulo 1, apresentamos algumas definições e alguns resultados básicos que são usados nos outros capítulos. Em especial, apresentamos os espaços de Sobolev de segunda ordem e fazemos um panorama detalhado da teoria escalar de melhores constantes em desigualdades ótimas de Sobolev de segunda ordem e destacamos alguns problemas em aberto. Além disso, descrevemos alguns problemas de interesse dentro da teoria vetorial de melhores constantes e enunciamos nossas principais contribuições. Incluimos nesse capítulo, alguns resultados básicos sobre desigualdades de Sobolev Euclidianas e Riemannianas vetoriais. Precisamente, mostramos que a melhor constante associada à desigualdade

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} F(U)\, dx\right)^{\frac{2}{2^\#}} \leq \mathcal{A} \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta U)^2\; dx$$

é dada por

$$\mathcal{A}_0(F,n) = M_F^{\frac{2}{2^\#}} \mathcal{A}_0(n)$$

em que $M_F = \max_{\mathcal{S}_2^{k-1}}$ e $\mathcal{S}_2^{k-1} = \left\{t \in \mathbb{R}^k; \sum_{i=1}^k |t_i|^2 = 1\right\}$. Além disso, caracterizamos as aplicações extremais correspondentes como sendo constituidas do tipo $U_0 = u_0 t_0$, em que u_0 é uma função extremal associada à desigualdade de L^p-Sobolev escalar Euclideana e t_0 é um ponto de máximo de F em $\mathcal{S}_2^{k-1}$.

No capítulo 2 contém a maior parte das contribuições feitas. Voltamos a atenção para o seguinte sistema:

$$-\Delta_g^2 U + \mathrm{div_g}\left(A(\nabla U)^\#\right) + \nabla_U G_\alpha(x,U) = \nabla F_\alpha(U) \tag{18}$$

Nesse capítulo, estudamos a decomposição em blow-up das soluções $(U_\alpha)_\alpha$ de (18). Impomos condições para existência de soluções de energia mínima. Em seguida, estudamos o comportamento da sequência $(U_\alpha)_\alpha$, dada pelas soluções dos sistemas (18), em função dos comportamentos de F_α e G_α.

Com a hipótese de que $(U_\alpha)_\alpha$ é limitada, obtemos que essa sequência é de

Palais-Smale para a sequência de funcionais J associados a (18). Ou seja, a sequência U_α é tal que:

$$(J(U_\alpha))_\alpha \quad \text{é limitada} \quad \text{e} \quad DJ(U_\alpha) \to 0 \quad \text{em} \left(H_k^{2,2}(M)\right)' .$$

Da limitação de U_α obtemos a existência de um limite fraco U^0 em $H_k^{2,2}(M)$. Trabalhando o caso em que $U^0 \equiv 0$, as hipóteses sobre F_α e G_α permitem-nos decompor o funcional J em termos de outros funcionais L_k^i de tal modo que as componentes de U_α formam sequências de Palais-Smale para os funcionais L_k^i. Essa decomposição em funcionais L_k^i nos permitem utilizar os resultados obtidos por F. Robert (veja [30]) para a obtenção de decomposição em bubbles para as componentes de U_α, o que finaliza esta parte.

Utilizando a decomposição em bubbles teremos as estimativas pontuais para uma sequência de soluções de (18) que possuem 0 como limite fraco.

Em seguida, temos a concentração L^2, em que estendemos para o caso vetorial alguns resultados existentes. Em alguns destes, assumimos que $G(x,U) = \sum_{i,j=1}^k A_{ij}(x)u_i(x)u_j(x)$. Usamos algumas estimaticas e a fórmula de Bochner-Linerowicz-Weitzenbook ao demonsstrarmos o principal resultado da concentração L^2.

No ponto alto do capítulo 2, demonstramos a compacidade. Para isso, usamos diversos resultados anteriores, como a decomposição em bubbles e concentração L^2. Usamos também uma importante e útil ferramenta que a identidade do tipo Pohozaev. Nossas contribuições, nesse ponto, estendem alguns resultados encontrados em trabalhos de E. Hebey, F. Robert, Z. Djadli, M. Ledoux e V. Felli, feitos no caso escalar (equações de quarta ordem), para o caso vetorial (sistemas de quarta ordem).

No capítulo 3, estudamos a existência de aplicações extremais. A idéia central aqui é a seguinte. Supomos que a desigualdade ótima vetorial de Sobolev de segunda ordem não possui aplicação extremal. Consideramos então uma sequência numérica (α) tal que $0 < \alpha < \mathcal{B}_0$ e $\alpha \to \mathcal{B}_0$. Associado a essa sequência, construímos funções F_α e G_α e também soluções U_α de sistemas do tip que foram estudados no capítulo anterior. A sequência (U_α) converge para uma aplicação U tal que, de acordo com os resultados de compacidade, será uma aplicação extremal.

Capítulo 1

Preliminares

Neste capítulo, introduziremos algumas notações básicas e definições que usaremos em todo o restante do trabalho. Lembramos alguns fatos básicos da geometria Riemanniana. Mas seremos sucintos nessa exposição.
Em seguida, abordamos a teoria dos espaços de Sobolev em variedades Riemannianas. Nessa seção e no restante da tese, assumimos que a variedade é compacta. Mostramos as normas que utilizaremos e algumas propriedades desses espaços de Sobolev.
Algumas definições são mais costumeiras. Mas apresentaremos a seguir as definições que serão úteis no que segue.
Com o passar dos anos, cerca de quarenta anos, muita atenção foi dada às desigualdades ótimas de Sobolev Riemannianas. Existe uma vasta literatura com uma rica teoria das melhores constantes que está conectada com áreas como análise, geometria e topologia. Tais desigualdades possuem um importante papel na análise geométrica, especialmente no estudo da existência e multiplicidade de soluções para o problema de Yamabe (veja [2], [20], [34]), desigualdades isoperimétricas Riemannianas (veja [13]), entre outras aplicações. Particularmente, vários desses resultados mostram uma forte influência exercida pela geometria e topologia nesse campo.
Vários esforços foram feitos no estudo das desigualdades ótimas de Sobolev Riemannianas por algumas décadas. Parte dos desenvolvimentos obtidos é conhecido atualmente na literatura como o programa AB. Desigualdades ótimas (e melhores constantes) de Sobolev de primeira ordem para o caso escalar foram estudadas por Aubin, Druet, Hebey, Vaugon, entre outros (veja [3], [13], [19], [21]). Já o caso de desigualdades ótimas e melhores constantes de Sobolev vetoriais foi estudado por Hebey, E. R. Barbosa e M. S. Montenegro (veja [17], [18] e [5], [4]). Para as desigualdades ótimas de Sobolev de segunda ordem no caso escalar, o trabalho de Djadli-Hebey-Ledoux apresenta uma introdução ao estudar a primeira constante.
Neste capítulo, apresentaremos o programa AB para desigualdades ótimas de

Sobolev, no caso escalar (e em seguida, vetoriais), de segunda ordem. Apresentaremos aqui algumas contribuições, ou seja, responderemos a algumas das perguntas para o programa AB das desigualdades de segunda ordem.

1.1 Curvaturas numa Variedade Riemanniana

Seja (M,g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão n. Seja $x \in M$ e $X, Y, Z \in T_xM$. Definimos o *tensor curvatura* de M por:

$$R(X,Y)(x)Z = \nabla_{\tilde{X}(x)}(\nabla_{\tilde{Y}(x)}\tilde{Z}) - \nabla_{\tilde{Y}(x)}(\nabla_{\tilde{X}(x)}\tilde{Z}) - \nabla_{[\tilde{X},\tilde{Y}](x)}\tilde{Z}\,,$$

em que $\tilde{X}, \tilde{Y}, \tilde{Z}$ são campos vetoriais em M tais que $\tilde{X}(x) = X$, $\tilde{Y}(x) = Y$, $\tilde{Z}(x) = Z$. Essa definição independe da escolha das extensões $\tilde{X}$, $\tilde{Y}$, $\tilde{Z}$. Dados $x \in M$ e X, Y, $Z \in T_xM$ e $\eta \in (T_xM)^*$, definimos o *tensor curvatura* como:

$$R(x)(X,Y,Z,\eta) = \eta(R(Y,Z)(x)\,.X) = \langle R(X,Y)Z, W\rangle\,.$$

A função R é um (3,1)-tensor. As coordenadas de R numa carta são dadas por:

$$R(x)^l_{ijk} = \left(\frac{\partial \Gamma^l_{ki}}{\partial x_j}\right)_x - \left(\frac{\partial \Gamma^l_{ji}}{\partial x_k}\right)_x + \Gamma^l_{j\alpha}(x)\Gamma^\alpha_{ki}(x) - \Gamma^l_{k\alpha}(x)\Gamma^\alpha_{ji}(x)\,, \tag{1.1}$$

em que Γ^k_{ij} são os símbolos de Christoffel.

O tensor de Riemman é um (4,0)-tensor cujas coordenadas numa carta são $R_{ijkl} := g_{i\alpha}R^\alpha_{jkl}$.

O *operador curvatura* $\mathcal{R}$ em $x \in M$, $\mathcal{R} : \Lambda^2_x \to \Lambda^2_x$ é definido pela relação

$$\langle \mathcal{R}(X \wedge Y), W \wedge Z\rangle = \langle R(X,Y)Z, W\rangle\,,$$

em que Λ^2_x é o espaço gerado pelas 2-formas $X \wedge Y$ e

$$(X \wedge Y)(Z,W) = \langle Y,Z\rangle\langle X,W\rangle - \langle X,Z\rangle\langle Y,W\rangle\,.$$

Observe que, se $\{X_i\}_{i=1}^n$ é uma base ortonormal de T_pM, então $\{X_i \wedge Y_i\}_{i<j}$ é

uma base ortonormal de Λ_x^2. Assim, a aplicação bilinear simétrica $\mathcal{R}$ está bem definida.

Sejam agora $\sigma \subset T_pM$ um espaço bidimensional de T_pM e $\{X, Y\}$ uma base de σ. A *curvatura seccional* **de σ em x é dada por:**

$$K(\sigma) = K\,(X, Y) = \frac{R(X, Y, Y, X)}{\|X \wedge Y\|^2}\,,$$

em que $\|X \wedge Y\|^2 = \|X\|^2\|Y\|^2 - \langle X, Y\rangle^2$.

O *tensor de Ricci* **que denotaremos por $\mathrm{Ric_g}$ ou Ric é um (2,0)-tensor simétrico definido como a aplicação bilinear:**

$$\mathrm{Ric} : TM \;\times\; TM \to \mathbb{R}\,,$$

que associa a cada par de campos (X, Y) o traço da aplicação $Z \mapsto R(X, Z)Y$. Temos então:

$$\mathrm{Ric}\,(X, Y) = \sum_{i=1}^{n} \langle R(X_i, X)Y, X_i\rangle\,,$$

em que $\{X_i\}_{i=1}^n$ é uma base ortonormal de T_pM.

A *curvatura de Ricci* **na direção de $X \in\; TM$, com $|X| = 1$, é definida como**

$$\mathrm{Ric}\,(X) = \mathrm{Ric}\,(X, X)\,.$$

Se $X \in\; TM$ é unitário e $X(p) = v$, $p \in M$ e $v \in\; T_pM$, então escrevemos $\mathrm{Ric}_p(v)$ ao invés de $\mathrm{Ric}(X, X)$. Seja $\{e_1, \cdots, e_n\}$ uma base ortonormal com $v = e_i$ para algum i. Então:

$$\begin{aligned}
\mathrm{Ric}_p(v) &= \sum_{j \neq i} \langle R(v, e_i)v, e_i\rangle \\
&= \sum_{j \neq i} K(v, e_i)
\end{aligned}$$

A *curvatura escalar* **que denotaremos por R_g ou $\mathrm{Scal_g}$ é o traço do tensor de Ricci $R_g := g^{ij}R_{ij}$, em que R_{ij} são as componentes de $\mathrm{Ric_g}$ numa carta.**

A *curvatura de Riemann* **$\mathrm{Rm_g}$ é definida por**

$$\mathrm{Rm_g}(x)(X, Y, Z, T) = g(x)\,(X, R(Z, T)Y)\;.$$

As componentes de Rm_g em uma carta são dadas por $R_{ijkl} = g_{i\alpha}R^{\alpha}_{jkl}$ em que R^{α}_{jkl} são as componentes da curvatura R como descrito acima em (1.1)

Seja agora (M, g) uma variedade Riemanniana de dimensão $n \geq 3$. A curvatura de Weyl de g, denotada por $\mathrm{Weyl_g}$, é um campo de tensores de classe C^∞ quatro vezes covariantes sobre M. Tal curvatura é definida por:

$$\mathrm{Weyl_g} = \mathrm{Rm_g} - \frac{1}{n-2}\mathrm{Ric_g} \odot g + \frac{R_g}{2(n-1)(n-2)} g \odot g\,,$$

em que $\odot$ é o produto de Kulkarmi-Nomizu, que definimos abaixo. Para todo $x \in M$ temos:

$$\mathrm{Weyl_g}(x) = \mathrm{Rm_g}(x) - \frac{1}{n-2}\mathrm{Ric_g}(x) \odot g(x) + \frac{R_g(x)}{2(n-1)(n-2)} g(x) \odot g(x)\,.$$

As componentes W_{ijkl} de $\mathrm{Weyl_g}$ numa carta são dadas pela relação:

$$\begin{aligned} W_{ijkl} &= R_{ijkl} - \frac{1}{n-2}\left(R_{ik}g_{jl} + R_{jl}g_{ik} - R_{il}g_{jk} - R_{jk}g_{il}\right) \\ &+ \frac{R_g}{(n-1)(n-2)}\left(g_{ik}g_{jl} - g_{il}g_{jk}\right) \end{aligned}$$

Sejam E um espaço vetorial e h, k dois tensores duas vezes covariantes e simétricos sobre E, ou seja, para todos X e Y em E:

$$h(X, Y) = h(Y, X) \quad \text{e} \quad k(X, Y) = k(Y, X)\,.$$

Definimos o *produto de Kulkarni-Nomizu* de h e k, que denotaremos por $h \odot k$, como o tensor quatro vezes covariante sobre E, definido para todos $X, Y, Z, T \in E$ por

$$h \odot k(X, Y, Z, T) = h(X, Z)k(Y, T) + h(Y, T)k(X, Z) - h(X, T)k(Y, Z) - h(Y, Z)k(X, T)\,.$$

Vemos que o produto de Kulkarmi-Nomizu é simétrico no sentido de que, para todos h e k, temos $h \odot k = k \odot h$. Vemos também que esse produto é distributivo em relação a adição, no sentido que, para todos h, k_1 e k_2 temos $h \odot (k_1 + k_2) = h \odot k_1 + h \odot k_2$.

Uma variedade Riemanniana é *localmente conformemente flat* (ou localmente conformemente plana) se, em cada ponto de M existe uma vizinhança conformemente equivalente a $\mathbb{R}^m$. Ou seja, se $x \in M$, existe uma vizinhança

U de x e uma função u de classe C^∞, isto é, $u : U \to \mathbb{R}$, tal que a métrica (local) $\tilde{g} = e^{2u}g$ é plana em U.

Se a variedade (M, g) tem dimensão $n \geq 4$, então (M, g) é conformemente flat se, e somente se, $\mathrm{Weyl_g} \equiv 0$.

1.2 Isomorfismo Musical e Divergência de Tensores

Seja $x \in M$. $\#$ é o isomorfismo musical entre T_xM e $(T_xM)^*$, definido como:

$$\begin{array}{rcl} \# : T_xM & \longrightarrow & (T_xM)^* \\ X & \longmapsto & \left\{ \begin{array}{rcl} (T_xM) & \longrightarrow & \mathbb{R} \\ Y & \longmapsto & \langle X, Y \rangle_{g(x)} \,, \end{array} \right. \end{array}$$

Esse isomorfismo é a identificação do espaço Euclidiano com seu dual. Denotamos: $X^\#$ a imagem de X por $\#$ e $\eta^\#$ a imagem de $\eta \in (T_xM)^*$ pelo inverso de $\#$. Tal definição se estende naturalmente para campos vetoriais (ou seja, (0,1)-tensores) e para (1,0)-tensores. Se X é um campo vetorial e η é um $(1,0)-$tensor, as coordenadas das imagens em uma carta são:

$$\begin{array}{rcl} X_i & := & (X^\#)_i = g_{ij} X^j \\ \eta^i & := & (\eta^\#)^i = g^{ij} \eta_j \,, \end{array}$$

que é uma expressão que independe da carta. Claramente, temos $(X^\#)^\# = X$ e $(\eta^\#)^\# = \eta$.

No que se segue da tese, A é definido como sendo:

$$A\left((X)^\#, (X)^\#\right) = \sum_{i=1}^{k} A_i \left((X_i)^\#, (X_i)^\#\right) \,, \tag{1.2}$$

em que A_i, $i = 1, ..., k$, são tensores simétricos e positivos, ou seja, A é uma soma de $(2,0)-$tensores simétricos e contínuos. E $X = (X_1, \ldots, X_k)$ é tal que cada X_i, $i = 1, \ldots, k$ é um (1,0)-tensor. No decorrer do trabalho, para simplificar, diremos que A é um (2,0)-tensor simétrico suave ao nos referirmos à soma (1.2) acima. Aqui $A_l(X_l)^\#$ é um $(1,0)$-tensor cujas coordenadas numa carta são

$$\left(A(X_l)^\#\right)_i = A_{ij}\left((X_l)^\#\right)^j = A_{ij} g^{ik} (X_l)_k$$

Como a variedade M é compacta e A é contínuo, existe uma constante $C > 0$ tal que:

$$\left| \int_M A\left((X)^\#, (X)^\#\right)\, dv_g \right| \leq C \int_M |X|_g^2 \, dv_g \,,$$

para todo X, em que

$$\int_M A\left((X)^\#, (X)^\#\right)\, dv_g = \sum_{i=1}^{k} \int_M A_i\left((X_i)^\#, (X_i)^\#\right)\, dv_g \,.$$

Como a variedade M é compacta e A é um $(2,0)-$tensor simétrico e positivo, temos que existem constantes positivas c e C, tais que:

$$c|X|_g^2 \leq A_i\left((X)^\#, (X)^\#\right) \leq C|X|_g^2 \,, \tag{1.3}$$

para X um (1,0)-tensor.

Seja X um campo vetorial suave em M. A *divergência* de X é a função suave em M dada por:

$$\begin{aligned} \operatorname{div_g} X : M &\to \mathbb{R} \\ p &\mapsto (\operatorname{div_g} X)(p) = \operatorname{tr}\left\{v \mapsto (\nabla_v X)(p)\right\} \,, \end{aligned}$$

em que $v \in T_pM$ e tr é o traço do operador linear que está entre chaves. Para definirmos em cartas, considere X um (1,0)-tensor em M. A divergência é definida como

$$\operatorname{div_g}(X) = g^{ij}(\nabla X)_{ij} = g^{ij}\left(\partial_i X_j - \Gamma_{ij}^k X_k\right) \,.$$

Essa expressão independe da carta.

No decorrer do trabalho usaremos algumas vezes o seguinte teorema bem útil.

Teorema 4 (Teorema da Divergência)**.** *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana compacta sem fronteira. Seja η um (1,0)-tensor suave. Então temos:*

$$\int_M \operatorname{div_g}(\eta)\, dv_g = 0 \,.$$

Em particular, dados $u,\, v \in C^\infty(M)$, *temos*

$$\int_M u\Delta_g v\, dv_g = \int_M \langle \nabla u, \nabla v \rangle_g\, dv_g \int_M (\Delta_g u)\, v\, dv_g\,.$$

em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ *é o produto escalar associado com* g *para 1-formas.*

1.3 Funções Homogêneas

Consideramos $G : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função contínua e 2-homogênea na segunda variável e de classe C^1 na segunda variável. Pode ser, por exemplo:

$$G(x,t) = \sum_{i,j=1}^{k} A_{ij}(x) t_i t_j \,,$$

em que $t = (t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k$ e $A = (A_{ij})$ é uma aplicação contínua de M em $M_k^s(\mathbb{R})$, tal que $(A_{ij}(x))$ é positiva definida, para todo $x \in M$, e $M_k^s(\mathbb{R})$ é o espaço das matrizes reais simétricas $k \times k$.

Seja $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função positiva de classe C^1 e $2^{\#}$-homogênea[1], em que $2^{\#} = \frac{2n}{n-4}$. Pode ser, por exemplo:

$$F(t) = \sum_{i=1}^{k} |t_i|^{2^{\#}} \,,$$

em que $t = (t_1, \ldots, t_k)$. Neste caso,

$$\partial_i F(t) = |t_i|^{2^{\#}-2} t_i \,.$$

Seja agora $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função contínua e q-homogênea. Considere a esfera unitária na norma p, ou seja:

$$\partial B_p\,[0,1] = \left\{ t \in \mathbb{R}^k;\ |t|_p = 1 \right\} \,,$$

em que $|t|_p = (|t_1|^p + \cdots + |t_k|^p)^{\frac{1}{p}}$ sendo $t = (t_1, \ldots, t_k)$. Como o conjuto $\partial B_p\,[0,1]$ é compacto, então existem constantes $m_{F,p} > 0$ e $M_{F,p} > 0$ tais que:

$$m_{F,p} \le F(t) \le M_{F,p} \qquad \forall\, t \in \partial B_p\,[0,1] \,.$$

Considere agora $t \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$ qualquer. Então, da q-homogeneidade de F, temos que

$$F\left(\frac{t}{|t|_p}\right) = \frac{1}{|t|_p^q} F(t) \,,$$

[1] $F(\lambda t) = \lambda^{2^{\#}} F(t)$, $\forall\, t \in \mathbb{R}^k$ e $\lambda > 0$

para todo $t \in \mathbb{R}^k \setminus \{0\}$. Logo,

$$m_{F,p}|t|_p^q \leq F(t) \leq M_{F,p}|t|_p^q \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}^k\,. \tag{1.4}$$

Como o espaço $\mathbb{R}^k$ tem dimensão finita, então todas as normas são equivalentes. Portanto, existe uma constante $c > 0$ tal que

$$|t|_p \leq c|t|_q \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}^k\,.$$

Então

$$F(t) \leq M'_{F,p}|t|_q^q \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}^k\,,$$

em que $M'_{F,p} = c^q M_{F,p}$ é uma constante positiva.

No decorrer deste trabalho, na maioria das situações, utilizaremos que F é uma função $2^{\#}$-homogênea. Por isso, simplificaremos a notação nesse caso em que F é uma função $2^{\#}$-homogênea e a norma é a Euclideana: $m_{F,2} = m_F$ e $M_{F,2} = M_F$. Logo

$$m_F|t|_2^{2^{\#}} \leq F(t) \leq M_F|t|_2^{2^{\#}} \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}^k\,.$$

Similarmente, se $G : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ é uma função q-homogênea na segunda variável, temos:

$$m_{G,p}|t|_p^q \leq G(x,t) \leq M_{G,p}|t|_p^q \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}^k\,.$$

Neste trabalho, utilizaremos, salvo menção ao contrário, que G é uma função 2-homogênea na segunda variável. Por isso, simplificamos a notação nesse caso em que G é uma função 2-homogênea na segunda variável e a norma é a Euclideana: $m_{G,2} = m_G$ e $M_{G,2} = M_G$. Desse modo, temos:

$$m_G|t|_2^2 \leq G(x,t) \leq M_G|t|_2^2 \quad \forall\, t \in \mathbb{R}^k\,. \tag{1.5}$$

Seja $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1 e q-homogênea. No decorrer deste trabalho, utilizaremos a seguinte *identidade de Euler*:

$$\sum_{i=1}^{k} \partial_i F(t) t_i = q\, F(t)\,.$$

Parte da teoria vetorial de melhores constantes não segue diretamente da teoria escalar. Uma das diferenças é com relação a natureza de funções vetoriais que satisfazem condições de homogeneidade. No caso vetorial ($k \geq 2$), existem exemplos de funções homogêneas que são apenas contínuas. Observe o seguine exemplo. Sejam

$$F(t) = |t|_\mu^{2^\#} \qquad \text{e} \qquad G(x,t) = \beta(x)|t|_\mu^2\,,$$

em que $|\cdot|_\mu$ é a μ-norma definida por $|t|_\mu = \left(\sum_{i=1}^k |t_i|^\mu\right)^{\frac{1}{\mu}}$ para $1 \leq \mu < \infty$ e $|t|_\infty = \max\{|t|_i;\ i = 1, \ldots, k\}$.

A ausência de regularidade de F e G gera um obstáculo para o estudo de várias questões, pois os argumentos são baseados em equações de Euler satisfeitos por pontos críticos de funcionais. Ou seja, a abordagem no que segue seria mais restrita sem assumir regularidade de F e G.

1.4 Espaços de Sobolev Vetorial de Segunda Ordem

Consideremos (M, g) uma variedade Riemanniana compacta e $dv_g = dv(g)$ a medida Riemanniana associada a g. Dados uma função $u : M \to \mathbb{R}$ de classe $C^\infty(M)$ e k um número inteiro, denotamos $\nabla^k u$ a k-ésima derivada covariante de u e $|\nabla^k u|$ a norma de $\nabla^k u$, definida por

$$|\nabla^k u| = g^{i_1 j_1} \cdots g^{i_k j_k} \left(\nabla^k u\right)_{i_1 \cdots i_k} \left(\nabla^k u\right)_{j_1 \cdots j_k} ,$$

em que $\left(\nabla^k u\right)_{i_1 \cdots i_k}$ denota as componentes de ∇u numa carta. Entretanto tal definição não depende da escolha da carta.

Se (M, g) é uma variedade Riemanniana compacta, o espaço de Sobolev $H^{2,2}(M)$ é, por definição, o completamento de $C^\infty(M)$ em $L^2(M)$ pela norma

$$\|u\|'_{H^{2,2}(M)} = \sum_{j=0}^{2} \left(\int_M |\nabla^j u|_g^2 \, dv_g \right)^{\frac{1}{2}} ,$$

em que $dv_g = dv(g)$ é a medida Riemanniana associada a g.

O espaço $H^{2,2}(M)$ é um espaço de Hilbert, munido da norma:

$$\|u\|^2_{H^{2,2}(M)} \;\; = \;\; \int_M |u|^2 \, dv_g + \int_M |\nabla u|^2 \, dv_g + \int_M \left(\Delta_g u\right)^2 \, dv_g$$

Observe que as normas $\| \cdot \|'_{H^{2,2}(M)}$ e $\| \cdot \|_{H^{2,2}(M)}$ são equivalentes. De fato, pela fórmula de Bochner-Lichnerowitz-Weitzenböck, temos que

$$\int_M \left(\Delta_g u\right)^2 \, dv_g = \int_M |\nabla^2 u|_g^2 \, dv_g + \int_M \mathrm{Ric_g}\left((\nabla u)^\#, (\nabla u)^\#\right) \, dv_g$$

para todo $u \in H^{2,2}(M)$. Então, temos

$$\begin{aligned} & \|\nabla^2 u\|_2^2 + \|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2 \\ = \;\; & \|\Delta_g u\|_2^2 - \int_M \mathrm{Ric_g}\left((\nabla u)^\#, (\nabla u)^\#\right) \, dv_g + \|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2 \\ \leq \;\; & |\Delta_g u|_2^2 + C\|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2 \end{aligned}$$

para todo $u \in H^{2,2}(M)$. Mas, daí temos que existe uma constante positiva C tal que $\| \cdot \|'_{H^{2,2}(M)} \leq C\| \cdot \|_{H^{2,2}(M)}$. Por outro lado, observe que, para toda

função $u \in C^\infty(M)$:

$$(\Delta_g u)^2 \leq |\nabla^2 u|^2$$

Assim, as duas normas de $H^{2,2}(M)$ são equivalentes.

O produto escalar associado é definido por:

$$\begin{aligned}\langle u, v\rangle &= \int_M \langle u, v\rangle_g \, dv_g + \int_M \langle \nabla u, \nabla v\rangle_g \, dv_g + \int_M \langle \nabla^2 u, \nabla^2 v\rangle_g \, dv_g \\ &= \sum_{j=0}^{2} \int_M \langle \nabla^j u, \nabla^j v\rangle_g \, dv_g \,.\end{aligned}$$

Como M é compacta, o espaço $H^{2,2}(M)$ não depende da métrica Riemanniana. Se M é uma variedade compacta munida de duas métricas g e $\tilde{g}$, então existe um número real $C > 1$ tal que, em qualquer ponto de M:

$$\frac{1}{C} g \leq \tilde{g} \leq Cg \,.$$

Estas duas desigualdades são vistas como desigualdades entre formas bilineares.

Um operador linear $T : E \to F$ entre dois espaços de Banach (de um modo geral, usaremos $E = H^{2,2}(M)$ e $F = \mathbb{R}^k$, com $k \in \mathbb{N}$) é compacto se, para qualquer sequência $(u_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ uniformemente limitada na norma de E, então existem $u \in F$ e uma subsequência (u_{n_k}) tal que:

$$\lim_{n\to\infty} T(u_{n_k}) = u \,,$$

fortemente em F.

O espaço $H^{2,2}(M)$ é reflexivo. Logo, toda sequência limitada em $H^{2,2}(M)$ possui subsequência fracamente convergente. E, se $T : H^{2,2}(M) \to \mathbb{R}^k$ é compacto, então T leva sequências limitadas em $H^{2,2}(M)$ em sequências que possuem subsequências convergentes em $\mathbb{R}^k$, para todo $k \in \mathbb{N}$.

O espaço $H^{2,2}(M)$ também é separável. Portanto, toda sequência limitada em $(H^{2,2}(M))^*$ possui subsequência convergente (na topoligia fraca*).

Sejam $(T_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (H^{2,2}(M))^*$ e $T \in H^{2,2}(M)$. Dizemos que (T_n) converge fracamente para T se

$$\lim_{n\to\infty} T_n(u) = T(u) \qquad \textbf{para todo } \; u \in \left(H^{2,2}(M)\right)^* \;,$$

ou

$$T_n \rightharpoonup T \qquad \textbf{em} \qquad \left(H^{2,2}(M)\right)^* \;,$$

quando $n \to \infty$. $(H^{2,2}(M))^*$ é o espaço das formas lineares contínuas de $H^{2,2}(M)$.

Se M é uma variedade Riemanniana de dimensão $n \geq 5$, então a imersão

$$H^{2,2}(M) \hookrightarrow L^q(M)\,,$$

é compacta para $q \in \left(1, \frac{2n}{n-4}\right]$. A imersão

$$H^{2,2}(M) \rightharpoonup L^{\frac{2n}{n-4}}(M)\,,$$

é contínua, mas não é compacta. Ou seja, existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u\|_{L^{\frac{2n}{n-4}}(M)} \;\leq\; C\|u\|_{H^{2,2}(M)}\,.$$

Denotamos por $H_k^{2,2}(M) = H^{2,2}\left(M, \mathbb{R}^k\right)$ o espaço de Sobolev vetorial $H^{2,2}(M) \times \cdots \times H^{2,2}(M)$, ou seja

$$H_k^{2,2}(M) = \left\{\mathcal{U} = (u_1, \cdots, u_k); u_i \in \; H^{2,2}(M) \textbf{ para todo } \; i = 1, \cdots, k\right\}\,.$$

Esse espaço é munido da norma:

$$||\mathcal{U}||_{H_k^{2,2}(M)} = \left(\int_M \left(\Delta_g \mathcal{U}\right)^2 dv_g + \int_M \left(|\nabla_g \mathcal{U}|^2 + |\mathcal{U}|^2\right)\, dv_g\right)^{\frac{1}{2}}\,,$$

em que $\mathcal{U} = (u_1, \ldots, u_k)$ e,

$$\int_M |\mathcal{U}|_2^2 dv_g = \sum_{i=1}^k \int_M |u_i|^2 \, dv_g, \qquad \int_M |\nabla_g \mathcal{U}|_2^2 dv_g = \sum_{i=1}^k \int_M |\nabla_g u_i|^2 dv_g$$

$$\int_M (\Delta_g \mathcal{U})^2 \, dv_g = \sum_{i=1}^k \int_M (\Delta_g u_i)^2 \, dv_g \, .$$

Também:

$$|\mathcal{U}|_p = (|u_1|^p + \cdots + |u_k|^p)^{\frac{1}{p}} \; .$$

Para simplificar, usaremos que:

$$|\mathcal{U}| = |\mathcal{U}|_2 \, .$$

O espaço de Sobolev vetorial $H_k^{2,2}(M)$ possui diversas propriedades devido às propriedades do espaço $H^{2,2}(M)$. O espaço $H_k^{2,2}(M)$ é um espaço de Hilbert que tem o seguinte produto escalar:

$$\langle \mathcal{U}, \mathcal{V} \rangle_{H_k^{2,2}(M)} = \sum_{i=1}^k \langle u_i, v_i \rangle \, ,$$

em que $\langle \cdot, \cdot \rangle$ é o produto escalar usual em $H^{2,2}(M)$ e $\mathcal{U} = (u_1, \cdots, u_k)$ e $\mathcal{V} = (v_1, \cdots, v_k)$.

O espaço $H_k^{2,2}(M)$ é separável e reflexivo. Assim, a bola unitária de $H_k^{2,2}(M)$ é fracamente compacta. Em outras palavras, para qualquer sequência $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}} \in H_k^{2,2}(M)$ tal que

$$\|\mathcal{U}_n\|_{H_k^{2,2}(M)} \leq C \qquad \text{para todo } n \in \mathbb{N} \, ,$$

existe uma subsequência $(\mathcal{U}_{n_i})_{n \in \mathbb{N}} \in H_k^{2,2}(M)$ e existe $\mathcal{U} \in H_k^{2,2}(M)$ tal que

$$U_{n_i} \rightharpoonup U \, , \tag{1.6}$$

fracamente em $H_k^{2,2}(M)$ quando $n \to \infty$.

Voltemos para a mesma sequência limitada $(\mathcal{U}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ em $H_k^{2,2}(M)$. Sejam $T : H_k^{2,2}(M) \to F$ um operador compacto e F um espaço de Banach. Então a

sequência $(T(\mathcal{U}_n))_{n\in\mathbb{N}}$ **converge para** $T(\mathcal{U})$ **(observe a convergência fraca de** (1.6)**). E se, além disso,** $T_n \to T$ **em** $\left(H_k^{2,2}(M)\right)^*$**, então**

$$T_n(\mathcal{U}_n) \to T(\mathcal{U})\,.$$

Definimos os espaços $L_k^q(M) = L^q(M, \mathbb{R}^k)$**, para cada** q **com** $1 \leq q < \infty$**, como o espaço** $L^q(M) \times \cdots \times L^q(M)$**. Ou seja,**

$$L_k^q(M) = \{\mathcal{U} = (u_1, \cdots, u_k);\; u_i \in\; L^q(M),\; i = 1, \cdots, k\}\;,$$

munido da norma

$$\|\mathcal{U}\|_{L_k^q(M)} = \left(\sum_{i=1}^{k} \|u_i\|_q\right)^{\frac{1}{q}}\;,$$

em que $\mathcal{U} = (u_1, \ldots, u_k)$ **e** $\|\cdot\|_p$ **denota a norma de** $L^p(M)$**, definida por**

$$\|u\|_p = \left(\int_M |u|^p\, dv_g\right)^{\frac{1}{p}}\;.$$

Para simplificar, quando não houver ambiguidade, usaremos a notação

$$\|\mathcal{U}\|_p$$

para indicar a norma de $\mathcal{U} = (u_1, \ldots, u_k)$ **em** $L_k^p(M)$
A imersão de Sobolev $H_k^{2,2}(M) \hookrightarrow L_k^q(M)$ **é compacta para** $1 \leq q < \frac{2n}{n-4}$ **e apenas contínua se** $q = \frac{2n}{n-4}$**. Dessa forma dizemos que** $2^* = \frac{2n}{n-4}$ **é o expoente crítico com respeito a imersão** $H_k^{2,2}(M) \hookrightarrow L_k^q(M)$**.**

1.5 Coercividade

Seja $U = (u_1, ..., u_k) \in H_k^{2,2}(M)$. Definimos os funcionais $\Phi : H_k^{2,2}(M) \to \mathbb{R}$ e $\Psi = \Psi_G : H_k^{2,2}(M) \to \mathbb{R}$, respectivamente, por:

$$\Phi(U) = \int_M F(U)\, dv_g \tag{1.7}$$

e

$$\Psi(U) = \Psi_G(U) = \frac{\int_M (\Delta_g U)^2\; dv_g + \int_M A\left((\nabla U)^{\#}, (\nabla U)^{\#}\right)\; dv_g + \int_M G(x,U)\, dv_g}{\left(\int_M F(U)\, dv_g\right)^{\frac{2}{2^{\#}}}},$$

em que A é como definido no início (uma soma de (2,0)-tensores suaves). Definimos também $\hat{\Psi} : H_k^{2,2}(M) \to \mathbb{R}$ por

$$\hat{\Psi}(U) = \int_M (\Delta_g U)^2\; dv_g + \int_M A\left((\nabla U)^{\#}, (\nabla U)^{\#}\right)\; dv_g + \int_M G(x,U)\, dv_g\,.$$

Logo,

$$\Psi(U) = \Psi_G(U) = \frac{\hat{\Psi}(U)}{\left(\int_M F(U)\, dv_g\right)^{\frac{2}{2^{\#}}}}\,. \tag{1.8}$$

Denotamos por $L_k^2(M)$ o espaço de Sobolev $L^2(M) \times L^2(M) \times \cdots \times L^2(M)$ munido da norma:

$$\|U\|^2_{L_k^2(M)} = \int_M |U|^2\, dv_g = \sum_{i=1}^{k} \int_M |u_i|^2\, dv_g\,,$$

em que $U = (u_1, \cdots, u_k)$. Similarmente, definimos o espaço $L_k^{2^{\#}}(M)$. Segue das imersões de Sobolev $H_k^{2,2}(M) \hookrightarrow L_k^2(M)$ e $H_k^{2,2}(M) \hookrightarrow L_k^{2^{\#}}(M)$ que os funcionais Ψ_G e Φ estão bem definidos.

Definição 1 (Coercividade)**.** Dizemos que $\hat{\Psi}$ é **coercivo** se existe $\alpha > 0$ tal que:

$$\int_M \left((\Delta_g U)^2 + A\left((\nabla U)^{\#}, (\nabla U)^{\#}\right) + G(x,U)\right)\; dv_g \geq\; \alpha \int_M |U|^2\, dv_g\,,$$

para todo $U \in H_k^{2,2}(M)$, em que A e $G : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ são como definido anteriormente.

Temos a seguinte proposição que mostra equivalentes definições de coercividade.

Proposição 5. *São equivalentes as afirmações abaixo:*

(i) $\hat{\Psi}$ *é coercivo.*

(ii) Existe $\alpha > 0$ *tal que:*

$$\begin{aligned}\int_M \left((\Delta_g U)^2 + A\left((\nabla U)^\#, (\nabla U)^\#\right) + G(x,U)\right)\, dv_g &\geq \alpha \|U\|_{2^\#}^2 \\ &\geq \alpha\, M_F^{-\frac{2}{2^\#}} \left(\int_M F(U)\, dv_g\right)^{\frac{2}{2^\#}},\end{aligned}$$

para todo $U \in H_k^{2,2}(M)$.

(iii) Existe $\alpha > 0$ *tal que:*

$$\int_M \left((\Delta_g U)^2 + A\left((\nabla U)^\#, (\nabla U)^\#\right) + G(x,U)\right)\, dv_g \geq \alpha \|U\|_{H_k^{2,2}(M)}^2,$$

para todo $U \in H_k^{2,2}(M)$.

Demonstração. $(iii) \Rightarrow (ii)$
Segue da imersão:

$$H_k^{2,2}(M) \hookrightarrow L_k^{2^\#}(M).$$

$(ii) \Rightarrow (i)$
Obtemos da imersão:

$$L_k^{2^\#}(M) \hookrightarrow L_k^2(M).$$

$(i) \Rightarrow (iii)$
De (i) temos:

$$\int_M \left((\Delta_g U)^2 + A\left((\nabla U)^\#, (\nabla U)^\#\right) + G(x,U)\right)\, dv_g \geq \alpha \|U\|_{L_k^2(M)}^2,$$

para algum $\alpha > 0$. Seja $0 < \varepsilon < 1$, tal que $\varepsilon \leq \frac{\alpha}{\alpha+k}$, em que $k > 0$ é uma constante apresentada a seguir. Temos que:

$$L(U) := \int_M \left((\Delta_g U)^2 + A\left((\nabla U)^\#, (\nabla U)^\#\right) + G(x,U)\right)\, dv_g, \tag{1.9}$$

é igual a

$$L(U) = \varepsilon L(U) + (1-\varepsilon)L(U)\,.$$

Daí,

$$L(U) \geq \varepsilon \int_M \left((\Delta_g U)^2 + A\left((\nabla U)^\#, (\nabla U)^\#\right) + G(x,U)\right)\, dv_g + (1-\varepsilon)\alpha \int_M |U|^2\, dv_g\,.$$

Usando a homogeneidade de G (veja (1.5), na pg. 31) e a limitação de A (veja (1.3)), temos:

$$L(U) \geq \varepsilon \int_M \left((\Delta_g U)^2 + c|\nabla U|^2 + m_G|U|^2\right)\, dv_g + (1-\varepsilon)\alpha \int_M |U|^2\, dv_g\,.$$

Seja $\varepsilon_0 = \min\{\varepsilon, \varepsilon c, \varepsilon m_G\}$, isto é, $\varepsilon_0 = r\varepsilon$, em que $r = 1,\ c$, ou m_G. Então

$$L(U) \geq \varepsilon_0 \int_M \left((\Delta_g U)^2 + |\nabla U|^2 + |U|^2\right)\, dv_g + (1-\varepsilon)\alpha \int_M |U|^2\, dv_g\,,$$

basta tomar $(1-\varepsilon)\alpha \geq \varepsilon_0$. Daí:

$$\int_M \left((\Delta_g U)^2 + A\left((\nabla U)^\#, (\nabla U)^\#\right) + G(x,U)\right)\, dv_g \geq\ \varepsilon_0 \|U\|^2_{H_k^{2,2}(M)}\,.$$

$\square$

1.6 Programa AB Escalar

Em $\mathbb{R}^n$, existe uma constante $A > 0$ tal que

$$\|u\|^2_{L^{2^\#}(\mathbb{R}^n)} \leq A \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta_\xi u)^2 \, dx \,, \tag{1.10}$$

para todo $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ (o conjunto das funções suaves com suporte compacto em $\mathbb{R}^n$) e em que ξ é métrica Euclideana de $\mathbb{R}^n$.

Seja $\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0(n)$ a melhor constante na desilgualdade de Sobolev (1.10). Ou seja, $\mathcal{A}_0$ é a menor constante que satisfaz (1.10). Definimos:

$$\frac{1}{\mathcal{A}_0^2} = \inf_{u \in D_2^2(\mathbb{R}^n) \setminus \{0\}} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta_\xi u)^2 \, dx}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2^\#} \, dx\right)^{\frac{2}{2^\#}}} \,, \tag{1.11}$$

em que

$D_2^2(\mathbb{R}^n)$ é o completamento de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com a norma $\|u\|_{D_2^2(\mathbb{R}^n)} := \|\Delta_\xi u\|_2$. Segue do teorema de imersão Sobolev que a constante $\mathcal{A}_0 > 0$ está bem definida. Essa constante foi calculada por Lieb [25], Lions [26], Edmunds-Fortunato-Jannelli [14] e Swason [37]. Temos:

$$\frac{1}{\mathcal{A}_0^2} = \frac{n(n^2-4)(n-4)w_n^{\frac{4}{n}}}{16} \,,$$

em que w_n é o volume da esfera unitária canônica S^n em $\mathbb{R}^{n+1}$. Mais ainda, as extremais da desigualdade ótima, isto é, funções em $D_2^2(\mathbb{R}^n)$ que atingem o ínfimo em (1.11) são conhecidas e são da forma:

$$u_{\lambda,\mu,x_0}(x) = \mu \left(\frac{\lambda}{\lambda^2 + |x - x_0|^2} \right)^{\frac{n-4}{2}} \,,$$

em que $\mu \neq 0$, $\lambda > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ são arbitrários.

A seguinte imersão de Sobolev é contínua, mas não compacta. Se (M,g) é uma variedade Riemanniana de dimensão $n \geq 5$ então $H^{2,2}(M) \hookrightarrow L^{2^\#}(M)$ continuamente, em que $2^\# = \frac{2n}{n-4}$. Ou seja, existe $A > 0$ tal que:

$$\|u\|_{L^{2^\#}(M)} \leq A \|u\|_{H^{2,2}(M)} \,.$$

Ainda, da imersão contínua $H^{2,2}(M) \hookrightarrow L^{2^\#}(M)$, segue que existem constantes $A, B > 0$ tais que:

$$\|u\|_{2^\#}^2 \leq A\|\Delta_g u\|_2^2 + B\|u\|_{H^{1,2}(M)}^2 \ , \qquad \forall\, u \in\ H^{2,2}(M)\,, \tag{1.12}$$

em que

$$\|u\|_{H^{1,2}(M)}^2 = \|\nabla u\|_2^2 + \|u\|_2^2\,.$$

Estamos interessados nas constantes ótimas A, B da desigualdade acima. Mais precisamente, estamos interessados em tomar A o menor possível. Vemos facilmente que $A \geq \mathcal{A}_0^2$. Por outro lado, vale que, para todo $\varepsilon > 0$ existe $B_\varepsilon > 0$ tal que, para qualquer $u \in\ H^{2,2}(M)$ temos:

$$\left(\int_M |u|^{2^\#}\, dv_g\right)^{\frac{2}{2^\#}} \leq (\mathcal{A}_0^2 + \varepsilon)\left(\int_M (\Delta_g u)^2\ dv_g\right) + B_\varepsilon \int_M \left(|\nabla_g u|^2 + |u|^2\right)\, dv_g\,. \tag{1.13}$$

Em particular, definindo

$$K_n = \inf\left\{A \in \mathbb{R}; \textbf{existe B tal que vale a desigualde (1.12) acima}\ \forall\, u \in\ H^{2,2}(M)\right\}\ , \tag{1.14}$$

então $K_n = \mathcal{A}_0^2$ para toda variedade (M, g). Uma questão natural que surge é a seguinte:

- **O ínfimo K_n é atingido?**

Ou, equivalentemente, podemos tomar $\varepsilon = 0$ em (1.13)? Uma resposta positiva foi dada em 2000 por Djadli-Hebey-Ledoux [10] com a restrição que a métrica g é conformemente flat. Em seguida, no ano 2003, Emmanuel Hebey provou o resultado para uma variedade Riemanniana qualquer em [16]. Precisamente:

Teorema 6 (E. Hebey, 2003)**.** *Seja (M, g) uma variedade compacta de dimensão $n \geq 5$. Então existe $B > 0$, dependendo da variedade e da métrica g, tal que, para todo $u \in H^{2,2}(M)$*

$$\left(\int_M |u|^{2^\#}\, dv_g\right)^{\frac{2}{2^\#}} \leq \mathcal{A}_0^2 \int_M (\Delta_g u)^2\ dv_g + B\int_M \left(|\nabla_g u|^2 + |u|^2\right)\, dv_g\,.$$

Em particular, o ínfimo é atingido em (1.12)*.*

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 5$. Denotamos por $H^{2,2}(M)$ o completamento do espaço $C^\infty(M)$ em relação à norma:

$$\|u\|^2_{H^{2,2}(M)} = \int_M (\Delta_g u)^2 \, dv_g + \int_M \left(|\nabla_g u|^2 + |u|^2\right) \, dv_g \, .$$

Dados $2^\# = \frac{2n}{n-4}$ e duas funções positivas $f \in C^\infty(M)$ e $h \in C^0(M)$, existem duas constantes positivas A, B tais que, para qualquer $u \in H^{2,2}(M)$:

$$\left(\int_M |u|^{2^\#} \, dv_g\right)^{\frac{2}{2^\#}} \leq A \int_M (\Delta_g u)^2 \, dv_g + B \int_M \left(f(x)|\nabla_g u|^2 + h(x)|u|^2\right) \, dv_g \, . \tag{1.15}$$

A primeira melhor constante de Sobolev associada à (1.15) é definida por:

$$\mathcal{A}_0(f, h, g) = \inf \left\{A \in \mathbb{R}; \ \textbf{existe} \ B \in \mathbb{R} \ \textbf{tal que} \ (1.15) \ \textbf{é válida}\right\} .$$

A primeira desigualdade de Sobolev Riemanniana ótima afirma que, para qualquer $u \in H^{2,2}(M)$,

$$\left(\int_M |u|^{2^\#} \, dv_g\right)^{\frac{2}{2^\#}} \leq \mathcal{A}_0(f, h, g) \int_M (\Delta_g u)^2 \, dv_g + B \int_M \left(f(x)|\nabla_g u|^2 + h(x)|u|^2\right) \, dv_g \, , \tag{1.16}$$

para alguma constante $B \in \mathbb{R}$.

A segunda melhor constante de Sobolev associada à (1.15) é definida por:

$$\mathcal{B}_0(f, h, g) = \inf \left\{B \in \mathbb{R}; \ (1.16) \ \textbf{é válida}\right\} .$$

A segunda desigualdade ótima de Sobolev Riemanniana afirma que, para qualquer $u \in H^{2,2}(M)$ temos:

$$\begin{aligned}\left(\int_M |u|^{2^\#} \, dv_g\right)^{\frac{2}{2^\#}} \ \leq \ & \mathcal{A}_0(f, h, g) \int_M (\Delta_g u)^2 \, dv_g + \\ + \ & \mathcal{B}_0(f, h, g) \int_M \left(f(x)|\nabla_g u|^2 + h(x)|u|^2\right) \, dv_g \, . \end{aligned} \tag{1.17}$$

Uma função não nula $u_0 \in H^{2,2}(M)$ é dita *extremal* **para a desigualdade (1.17) se**

$$\left(\int_M |u|^{2^\#}\, dv_g\right)^{\frac{2}{2^\#}} = \mathcal{A}_0(f,h,g)\int_M (\Delta_g u)^2\, dv_g + \mathcal{B}_0(f,h,g)\int_M \left(f(x)|\nabla_g u|^2 + h(x)|u|^2\right) dv_g\,.$$

O programa AB escalar consiste de várias questões de interesse envolvendo as melhores constantes $\mathcal{A}_0(f,h,g)$ e $\mathcal{B}_0(f,h,g)$, e as desigualdades ótimas (1.17) e (1.16). A seguir, dividiremos esse programa nas partes: programa A e programa B.

O programa A é constituido de alguns problemas envolvendo $\mathcal{A}_0(f,h,g)$ e a desigualdade (1.16).

- **Questão 1A: Qual o valor exato (ou estimativas) de $\mathcal{A}_0(f,h,g)$?**
- **Questão 2A: A desigualdade (1.16) é válida?**
- **Questão 3A: A validade de (1.16) implica em alguma obstrução geométrica?**
- **Questão 4A: $\mathcal{A}_0(f,h,g)$ depende continuamente de f e h em alguma topologia?**
- **Questão 5A: $\mathcal{A}_0(f,h,g)$ depende continuamente da métrica g em alguma topologia?**
- **Questão 6A: Qual o papel da geometria sobre essas questões?**

O programa B é composto de algumas questões envolvendo $\mathcal{B}_0(f,h,g)$ e a desigualdade (1.17):

- **Questão 1B: Qual o valor exato (ou estimativas) de $\mathcal{B}_0(f,h,g)$?**
- **Questão 2B: $\mathcal{B}_0(f,h,g)$ depende continuamente de f e h em alguma topologia?**
- **Questão 3B: $\mathcal{B}_0(f,h,g)$ depende continuamente de métrica g em alguma topologia?**
- **Questão 4B: A desigualdade (1.17) possui aplicação extremal?**
- **Questão 5B: O conjunto das aplicações extremais $\mathcal{E}(f,h,g)$ de $L^{2^\#}$-normas é compacto na topologia C^0?**
- **Questão 6B: Qual o papel da geometria sobre essas questões?**

1.6.1 Respostas Parciais

Conforme mostrado no início da seção anterior, temos respostas apenas para as questões 1A e 2A.

As respostas das questões para o caso escalar do programa B não existem. Ou seja, nenhum autor ainda trabalhou nessas questões.

Responderemos algumas das questões do caso vetorial, o que por sua vez dará respostas a perguntas similares do programa escalar.

1.7 Programa AB Vetorial

Sejam $n \geq 5$ e $k \geq 1$ um números inteiros. Denotamos por $\mathcal{D}_k^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ o espaço de Sobolev Euclideano vetorial $\mathcal{D}^{2,2}(\mathbb{R}^n) \times \cdots \times \mathcal{D}^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ munido da norma

$$\|\Delta U\|_{\mathcal{D}_k^{2,2}(\mathbb{R}^n)} = \left(\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta U)^2 \, dx \right)^{\frac{1}{2}} ,$$

em que

$$U = (u_1, \ldots, u_k)$$

e

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta U)^2 \, dx = \sum_{i=1}^{k} \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u_i)^2 \, dx \, .$$

Seja $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva e $2^{\#}$-homogênea. Nesse caso, segue diretamente de (1.10) a existência de uma constante $\mathcal{A} > 0$ tal que

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} F(U) \, dx \right)^{\frac{2}{2^{\#}}} \leq \mathcal{A} \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta U)^2 \, dx \, , \tag{1.18}$$

para todo $U \in \mathcal{D}_k^{2,2}(\mathbb{R}^n)$.

A melhor constante de Sobolev Euclidiana associada à desigualdade (1.18) é:

$$\mathcal{A}_0(F, n) = \inf \left\{ \mathcal{A} \in \mathbb{R}; (1.18) \, \textbf{é válida} \right\} \, .$$

A desigualdade ótima de Sobolev Euclidiana vetorial ótima afirma que:

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} F(U) \, dx \right)^{\frac{2}{2^{\#}}} \leq \mathcal{A}_0(F, n) \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta U)^2 \, dx \, , \tag{1.19}$$

para todo $U \in \mathcal{D}_k^{2,2}(\mathbb{R}^n)$.

Uma aplicação não-nula $U_0 \in \mathcal{D}_k^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ é dita uma extremal de (1.19), se

$$\left(\int_{\mathbb{R}^n} F(U)\,dx\right)^{\frac{2}{2^\#}} = \mathcal{A}_0(F,n)\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta U)^2\,dx\,. \tag{1.20}$$

Duas questões básicas relacionadas à (1.19) são:

(a) Qual o valor exato de $\mathcal{A}_0(F,n)$?

(b) (1.19) possui aplicação extremal?

Essas duas perguntas são respondidas no seguinte resultado.

Proposição 7. *Temos*

$$\mathcal{A}_0(F,n) = M_F^{\frac{2}{2^\#}}\mathcal{A}_0(n)\,,$$

em que $M_F = max_{S_2^{k-1}} F$ *e* $S_2^{k-1} = \left\{t\in\mathbb{R}^k; \sum_{i=1}^k |t_i|^2 = 1\right\}$ *e* $\mathcal{A}_0(n)$ *é dado por* (1.11). *Além disso,* $U_0\in\mathcal{D}_k^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ *é uma aplicação extremal de* (1.19) *se, e somente se,* $U_0 = t_0u_0$ *para algum* $t_0\in\mathcal{S}_2^{k-1}$ *tal que* $M_F = F(t_0)$ *e alguma função extremal* $u_0\in\mathcal{D}^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ *de* (1.10).

Demonstração. Temos, pela $2^\#-$ homogeneidade da F:

$$F(t)\le M_F\left(\sum_{i=1}^k |t_i|^2\right)^{\frac{2^\#}{2}}\,,\qquad \forall\, t\in\mathbb{R}^k\,.$$

Assim, usando a desigualdade de Minkowski e a de Sobolev escalar Euclideana (1.10), temos para qualquer $U\in\mathcal{D}_k^{2,2}(\mathbb{R}^n)$:

$$\begin{aligned}\left(\int_M F(U)\,dx\right)^{\frac{2}{2^\#}} &\le M_F^{\frac{2}{2^\#}}\left(\int_M\left(\sum_{i=1}^k |u_i|^2\right)^{\frac{2^\#}{2}} dv_g\right)^{\frac{2}{2^\#}} \le M_F^{\frac{2}{2^\#}}\sum_{i=1}^k\left(\int_M |u_i|^{2^\#}\,dv_g\right)^{\frac{2}{2^\#}}\\ &\le M_F^{\frac{2}{2^\#}}\mathcal{A}_0(n)\int_{\mathbb{R}^n}\sum_{i=1}^k (\Delta u_i)^2\,dx = M_F^{\frac{2}{2^\#}}\mathcal{A}_0(n)\int_{\mathbb{R}^n}(\Delta U)^2\,dx\,. \end{aligned}\tag{1.21}$$

Daí obtemos que:

$$\mathcal{A}_0(F,n)\le M_F^{\frac{2}{2^\#}}\mathcal{A}_0(n)\,.$$

Agora, escolhendo $U_0 = t_0u_0$ em que $t_0\in\mathcal{S}_2^{k-1}$ é tal que $M_F = F(t_0)$ e $u_0\in\mathcal{D}^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ uma função extremal de (1.10), temos[2]

[2]Observe que, neste caso:

$$(\Delta U_0)^2 = \sum_{i=1}^k\left(\Delta\left(t_0^i u_0\right)\right)^2 = (\Delta u_0)^2$$

$$\begin{aligned}\left(\int_{\mathbb{R}^n} F(U_0)\,dx\right)^{\frac{2}{2^\#}} &= M_F^{\frac{2}{2^\#}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} |u_0|^{2^\#}\,dx\right)^{\frac{2}{2^\#}} = M_F^{\frac{2}{2^\#}} \mathcal{A}_0(n) \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u_0)^2\,dx \\ &= M_F^{\frac{2}{2^\#}} \mathcal{A}_0(n) \int_{\mathbb{R}^n} \left(\sum_{i=1}^k \Delta\left(t_0^i u_0\right)\right)^2 dx \\ &= M_F^{\frac{2}{2^\#}} \mathcal{A}_0(n) \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta U_0)^2\,dx\,. \end{aligned} \tag{1.22}$$

$$\mathcal{A}_0(F,n) \geq M_F^{\frac{2}{2^\#}} \mathcal{A}_0(n)\,.$$

Portanto,

$$\mathcal{A}_0(F,n) = M_F^{\frac{2}{2^\#}} \mathcal{A}_0(n)\,.$$

Concluimos também que aplicações da forma $U_0 = t_0 u_0$, como construidas acima, são aplicações extremais. Afirmamos que toda aplicação extremal de (1.19) tem essa forma. De fato, seja $U \in \mathcal{D}_k^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ uma aplicação extremal de (1.19). Nesse caso, U satisfaz (1.21) com igualdades no lugar das três desigualdades. Mas observe que a segunda igualdade corresponde à desigualdade de Minkowski. Isso implica que existem $t \in \mathbb{R}^k$ em $|t|_2 = 1$ e $u \in \mathcal{D}^{2,2}(\mathbb{R}^n)$ tal que $U = tu$. E, finalizando, da primeira igualdade segue que $F(t) = M_F$ e, da terceira igualdade, que u é uma função extremal de (1.10).

□

Sejam $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva e $2^\#$-homogênea e $G : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função positiva, contínua e 2-homogênea na segunda variável. Segue da imersão contínua $H^{2,2}(M) \hookrightarrow L^{2^\#}(M)$ que existem duas constantes positivas $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ tais que

$$\begin{aligned}\left(\int_M F(U)dv_g\right)^{\frac{2}{2^\#}} &\leq \mathcal{A}\int_M (\Delta_g U)^2\,dv_g + \\ &+ \mathcal{B}\int_M \left(A\left((\nabla_g U)^\#, (\nabla_g U)^\#\right) + G(x,U)\right) dv_g\,. \end{aligned} \tag{1.23}$$

A primeira melhor constante de Sobolev associada à (1.23) é definida como:

$$\mathcal{A}_0 = \mathcal{A}_0(A,F,G,g) = \inf\{\mathcal{A} \in \mathbb{R};\ \textbf{existe } \mathcal{B} \in \mathbb{R} \textbf{ tal que (1.23) vale}\}\,.$$

A primeira desigualdade ótima de Sobolev Riemanniana vetorial afirma que, para qualquer $U \in H_k^{2,2}(M)$, temos:

$$
\begin{aligned}
\left(\int_M F(U)dv_g\right)^{\frac{2}{2^\#}} &\leq \mathcal{A}_0 \int_M (\Delta_g U)^2\, dv_g + \\
&+ \mathcal{B} \int_M \left(A\left((\nabla_g U)^\#, (\nabla_g U)^\#\right) + G(x,U)\right)\, dv_g\,, \qquad (1.24)
\end{aligned}
$$

para alguma constante $\mathcal{B} \in \mathbb{R}$.
A segunda melhor constante de Sobolev associada à (1.24) é definida como:

$$
\mathcal{B}_0 = \mathcal{B}_0(A,F,G,g) = \inf\left\{\mathcal{B} \in \mathbb{R};\ (1.24)\ \textbf{vale}\right\}\,.
$$

A segunda desigualdade ótima de Sobolev Riemanniana vetorial afirma que, para qualquer $U \in H_k^{2,2}(M)$, vale

$$
\begin{aligned}
\left(\int_M F(U)dv_g\right)^{\frac{2}{2^\#}} &\leq \mathcal{A}_0 \int_M (\Delta_g U)^2\, dv_g + \\
&+ \mathcal{B}_0 \int_M \left(\left(A\left((\nabla_g U)^\#, (\nabla_g U)^\#\right) + G(x,U)\right)\, dv_g\,. \qquad (1.25)
\end{aligned}
$$

Esta desigualdade é sharp em relação à primeira e à segunda melhores constantes de Sobolev, no sentido em que nenhuma delas pode ser diminuida. Uma pergunta natural surge: É possível obter a igualdade em (1.25)? Uma aplicação não nula $U_0 \in H_k^{2,2}(M)$ é dita uma *extremal* de (1.25), se

$$
\begin{aligned}
\left(\int_M F(U_0)dv_g\right)^{\frac{2}{2^\#}} &= \mathcal{A}_0 \int_M (\Delta_g U_0)^2\, dv_g + \\
&+ \mathcal{B}_0 \int_M \left(\left(A\left((\nabla_g U_0)^\#, (\nabla_g U)^\#\right) + G(x,U_0)\right)\, dv_g\,.
\end{aligned}
$$

O programa AB vetorial consiste de várias questões de interesse envolvendo as melhores constantes $\mathcal{A}_0(A,F,G,g)$ e $\mathcal{B}_0(A,F,G,g)$ e as desigualdades ótimas (1.24) e (1.25).
Esse programa é separado em duas partes: o progrma A e o programa B. O programa A é composto das seguintes questões envolvendo $\mathcal{A}_0(A,F,G,g)$ e (1.24):

- **Questão 1A: Qual o valor exato (ou estimativas) de $\mathcal{A}_0(A,F,G,g)$?**
- **Questão 2A: A desigualdade (1.24) é válida?**
- **Questão 3A: A validade de (1.24) implica em alguma obstrução geométrica?**

- **Questão 4A:** $\mathcal{A}_0(A,F,G,g)$ **depende continuamente de** F **e** G **em alguma topologia?**

- **Questão 5A:** $\mathcal{A}_0(A,F,G,g)$ **depende continuamente de** g **e de** A **em alguma topologia?**

- **Questão 6A: Qual o papel da geometria sobre essas questões?**

O programa B **consiste das seguintes questões envolvendo** $\mathcal{B}_0(A,F,G,g)$ **e** (1.25)**:**

- **Questão 1B: Qual o valor exato (ou estimativas) de** $\mathcal{B}_0(A,F,G,g)$**?**

- **Questão 2B:** $\mathcal{B}_0(A,F,G,g)$ **depende continuamente de** F **e** G **em alguma topologia?**

- **Questão 3B:** $\mathcal{B}_0(A,F,G,g)$ **depende continuamente da métrica** g **e de** A **em alguma topologia?**

- **Questão 4B: A desigualdade** (1.25) **possui aplicação extremal?**

- **Questão 5B: O conjunto das aplicações extremais** $\mathcal{E}(A,F,G,g)$ **normalizadas por** $\int_M F(U)\,dv_g = 1$ **é compacto na topologia** C^0**?**

- **Questão 6B: Qual o papel da geometria sobre essas questões?**

1.7.1 Respostas Parciais

Algumas questões do programa A foram respondidas por alguns autores apenas para o caso escalar, ou seja, não existem estudos anteriores para o caso vetorial. Um dos objetivos dessa tese é dar uma contribuição para essas questões do caso vetorial. O programa B não tem nenhum resultado anterior, nem mesmo para o caso escalar. Mostraremos adiante respostas a algumas perguntas do caso vetorial para o programa B, o que implicará, conforme já mencionado, nas respostas para o programa B no caso escalar.

Começamos respondendo a pergunta 1A do programa AB.

Proposição 8. *Temos*

$$\mathcal{A}_0(A,F,G,g) = M_F^{\frac{2}{2^\#}} A_0\,,$$

em que $M_F = max_{S_2^{k-1}} F$ *e* $S_2^{k-1} = \left\{ t \in \mathbb{R}^k ; \sum_{i=1}^k |t_i|^2 = 1 \right\}$*. Em particular a desigualdade ótima* (1.24) *é válida.*

Demonstração. Temos, pela $2^\#-$ homogeneidade da F:

$$F(t) \leq \; M_F \left(\sum_{i=1}^k |t_i|^2 \right)^{\frac{2^\#}{2}}, \qquad \forall\, t \in \mathbb{R}^k\,.$$

Assim, usando a desigualdade de Minkowski, temos:

$$\left(\int_M F(U)\,dx\right)^{\frac{2}{2^\#}} \leq\; M_F^{\frac{2}{2^\#}} \left(\int_M \left(\sum_{i=1}^k |u_i|^2\right)^{\frac{2^\#}{2}} dv_g\right)^{\frac{2}{2^\#}} \leq\; M_F^{\frac{2}{2^\#}} \sum_{i=1}^k \left(\int_M |u_i|^{2^\#}\,dv_g\right)^{\frac{2}{2^\#}} .$$

Ou seja,

$$\left(\int_M F(U)\,dx\right)^{\frac{2}{2^\#}} \leq M_F^{\frac{2}{2^\#}} \left(\int_M |U|^{2^\#}\,dv_g\right)^{\frac{2}{2^\#}} . \tag{1.26}$$

Por outro lado, pela definição de A_0, temos

$$\sum_{i=1}^k \left(\int_M |u_i|^{2^\#}\,dv_g\right)^{\frac{2}{2^\#}} \leq\; A_0 \int_M \sum_{i=1}^k (\Delta_g u_i)^2\;dv_g + B\int_M \sum_{i=1}^k \left(|\nabla u_i|^2 + u_i^2\right)\,dv_g\,.$$

Ou seja, temos:

$$\left(\int_M |U|^{2^\#}\,dv_g\right)^{\frac{2}{2^\#}} \leq A_0 \int_M (\Delta_g U)^2\;dv_g + B\int_M \left(|\nabla U|^2 + |U|^2\right)\,dv_g\,. \tag{1.27}$$

Pelas hipóteses de G (lembre-se que $G : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, positiva e 2-homogênea na segunda variável), existe uma constante $m > 0$ tal que:

$$G(x,t) \geq\; m\sum_{i=1}^k |t_i|^2, \qquad \forall\, x \in\; M,\; t \in\; \mathbb{R}^k\,,$$

em que $m = min_{M\times S_2^{k-1}}\,G$. Daí, juntando (1.26) e (1.3) na desigualdade (1.27), obtemos para todo $U \in H_k^{2,2}(M)$:

$$\left(\int_M F(U)\,dv_g\right)^{\frac{2}{2^\#}} \leq M_F^{\frac{2}{2^\#}} A_0 \int_M (\Delta_g U)^2 dv_g + \frac{B M_F^{\frac{2}{2^\#}}}{\max\{c,\; m\}} \int_M \left(A\left((\nabla U)^\#, (\nabla U)^\#\right) + G(x,U)\right) dv_g\,,$$

isso implica que

$$\mathcal{A}_0(A,F,G,g) \leq\; M_F^{\frac{2}{2^\#}} A_0\,. \tag{1.28}$$

Agora considere constantes $\mathcal{A}$ e $\mathcal{B}$ tais que

$$\left(\int_M F(U)\,dv_g\right)^{\frac{2}{2^\#}} \leq\; \mathcal{A}\int_M (\Delta_g U)^2\,dv_g + \mathcal{B}\int_M \left((A\left((\nabla_g U)^\#, (\nabla_g U)^\#\right) + G(x,U)\right)\;dv_g\,,$$

para todo $U \in H_k^{2,2}(M)$. Usamos (1.3) e consideramos agora constantes $\mathcal{A}$ e $\tilde{\mathcal{B}} =$

$\min\{\mathcal{B}C, \mathcal{B}\}$, tais que

$$\left(\int_M F(U)\, dv_g\right)^{\frac{2}{2^\#}} \leq \mathcal{A}_0 \int_M (\Delta_g U)^2\, dv_g + \tilde{\mathcal{B}} \int_M \left(|\nabla U| + G(x,U)\right)\, dv_g\,.$$

Escolhemos $U = ut_0 = \left(ut_0^1,\, ut_0^2, ...,\, ut_0^k\right)$, em que $t_0 = \left(t_0^1, \ldots, t_0^k\right) \in S_2^{k-1}$ é tal que $F(t_0) = M_F$. Usando também que G é 2-homogênea, obtemos:

$$\begin{aligned}
(\Delta U)^2 &= \sum_{i=1}^{k} \left(\Delta u t_0^i\right)^2 = (\Delta u)^2 |t_0|^2 = (\Delta u)^2 \\
|\nabla U|^2 &= \sum_{i=1}^{k} \left|\nabla u t_0^i\right|^2 = \sum_{i=1}^{k} |t_i|^2 |\nabla u|^2 = |t_0|^2 |\nabla u|^2 = |\nabla u|^2 \\
|U|^2 &= \sum_{i=1}^{k} \left(u t_0^i\right)^2 = u^2 |t_0|^2 = u^2 \\
G(x,U) &= G(x, t_0 u) = |u|^2 G(x, t_0) \leq c|u|^2\,.
\end{aligned}$$

em que $u \in H^{2,2}(M)$. Encontramos uma constante $B_1 > 0$ tal que:

$$\left(\int_M |u|^{2^\#}\, dv_g\right)^{\frac{2}{2^\#}} \leq \mathcal{A}_0 M_F^{-\frac{2}{2^\#}} \int_M (\Delta_g u)^2\, dv_g + B_1 \int_M \left(|\nabla u|^2 + u^2\right)\, dv_g\,.$$

Assim, obtemos que

$$\mathcal{A}_0 M_F^{-\frac{2}{2^\#}} \geq A_0\,. \tag{1.29}$$

Daí, de (1.29) e de (1.28), obtemos:

$$\mathcal{A}_0(A, F, G, g) = M_F^{\frac{2}{2^\#}} A_0\,.$$

□

Se $F(U) = \sum_{i=1}^{k} |u_i|^{2^\#}$, então $\mathcal{A}_0 = K_n$, pois $M_F = 1$. Ou seja, nesse caso, a primeira melhor constante $\mathcal{A}_0$ só depende de n.

Note que a primeira melhor constante da teoria vetorial não depende da geometria e nem de G, e depende de n e de F em relação à topologia $C^0_{loc}(M)$.

A primeira melhor constante $\mathcal{A}_0$ depende continuamente de F. Seja $(F_\alpha)_\alpha$ uma família de funções contínuas, $F_\alpha : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ positiva e $2^\#-$homogênea para cada α que converge para $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ na topologia C^0. Assim temos que $\mathcal{A}_0^\alpha = M_{F_\alpha}^{\frac{2}{2^\#}} K_n$ é primeira melhor constante associada a F_α:

$$\left(\int_M F_\alpha(U)\,dv_g\right)^{\frac{2}{2^\#}} \leq \mathcal{A}_0^\alpha \int_M (\Delta_g U)^2\,dv_g + \mathcal{B}\int_M \left((A\left((\nabla_g U)^\#, (\nabla_g U)^\#\right) + G(x,U)\right)\,dv_g\,.$$

Mas observe que temos a seguinte convergência: $\mathcal{A}_0^\alpha \to \mathcal{A}_0$. Ou seja, $\mathcal{A}_0$ depende continuamente de F.

O que foi feito acima responde as questões envolvidas no programa A vetorial. Vamos, agora, nos concentrar no programa B vetorial. Mais precisamente, responderemos a algumas questões do programa B vetorial no capítulo 3.

No capítulo 2 que segue desenvolveremos uma teoria que será utilizada para demonstrar a existência de aplicações extremais, no capítulo 3.

Capítulo 2

Sistemas Elípticos de Quarta Ordem

Neste capítulo, voltaremos a atenção para o seguinte sistema de quarta ordem:

$$-\Delta_g^2 U + \mathrm{div_g}\left(A(\nabla U)^{\#}\right) + \frac{1}{2}\nabla_U G(x,U) = \frac{1}{2^{\#}}\nabla F(U)\,, \tag{2.1}$$

em que $U = (u_1, \ldots, u_k)$. Ou seja,

$$-\Delta_g^2 u_i + \mathrm{div_g}\left(A_i(\nabla u_i)^{\#}\right) + \frac{1}{2}\partial_i G(x,U) = \frac{1}{2^{\#}}\partial_i F(U)\,,$$

para $i = 1, \ldots, k$. Para a maior parte dos resultados deste capítulo, consideramos $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1, positiva e $2^{\#}$-homogênea e $G : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1, positiva e 2-homogênea na segunda variável. Mas, alguns resultados (como a concentração L^2 e compacidade) tomaremos a seguinte função particular: $G(x,t) = \sum_{ij=1}^k A_{ij}t_it_j$, em que $t = (t_1, \ldots, t_k) \in \mathbb{R}^k$, $A_i = b^i g$ ($b^i \in \mathbb{R}$ e g é a métrica da variedade) e $A_{ij} : M \to \mathbb{R}$ são funções tais que a matriz $(A_{ij}(x))$ é positiva definida e simétrica, para todo $x \in M$. Assim, o sistema (2.1) fica sendo:

$$-\Delta_g^2 u_i + b^i \Delta_g u_i + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{k} A_{ij}u_j = \frac{1}{2^{\#}}|u_i|^{2^{\#}-2}u_i\,. \tag{2.2}$$

Na versão escalar de (2.1), um caso particular é o seguinte:

$$\Delta_g^2 u + b_\alpha \Delta_g u + c_\alpha u = u^{2^{\#}-1} \tag{2.3}$$

em que b_α e c_α são funções contínuas e positivas. Esse caso foi estudado por diversos autores (veja por exemplo [10], [15] e [24]). É analisado as soluções e

o funcional energia associado. Uma das questões no trabalho de Hebey-Wen é que se b_α e c_α convergem para b_0 e c_0 respectivamente, ou seja, temos

$$\Delta_g^2 u + b_0 \Delta_g u + c_0 u = u^{2^\# - 1} \tag{2.4}$$

e se as soluções u_α convergem fracamente em $H^{2,2}(M)$, então em que condições o limite fraco é não trivial? Nessa seção dirigimos a mesma questão para soluções de (2.2) e estabelecemos um resultado no mesmo espírito de Hebey-Wen, que é o teorema da compacidade que se encontra no final deste capítulo.

Uma das principais diferenças entre (2.1) e (2.3) é que o segunda equação pode ser escrita, na maioria dos casos, como produto de operadores elípticos de segunda ordem. Isso auxilia a utilizar técnicas de segunda ordem padrões como a iteração de Moser da análise. Mas no nosso caso (2.1) não teremos um produto em geral. Desse modo, não estamos em condições de usar as técnicas de segunda ordem diretamente. Assim utilizamos da técnica da iteração de Moser para operadores de quarta ordem feita por Sandeep (veja [31]).

Considere o operador $P_g := \Delta_g^2 - \mathrm{div}_g\left(A(\nabla\cdot)^\#\right) + a$ (em que $a \in C^\infty(M)$ e A é um (2,0)-tensor simétrico e suave). Esse operador P_g não satisfaz o princípio de comparação pontual, mesmo quando ele é coercivo. Isso é uma importante diferença para operadores de segunda ordem.

Uma questão de importância é a seguinte: o operador P_g satisfaz o princípio do máximo? A resposta é positiva se P_g é produto de dois operadores elípticos, cada um deles coercivo. Assim, $P_g = (\Delta_g + a) \circ (\Delta_g + a')$, em que a e $a' \in C^\infty(M)$. Também, se $4b_0 \leq c_0^2$ em (2.4), obtemos a decomposição de P_g em operadores coercivos elípticos e portanto temos também o princípio do máximo (veja [30]).

Um dos pontos altos desse capítulo é o teorema de decomposição em bubbles, pois usando esse teorema, conseguimos provar os principais resultados e obter nossas contribuições. Demonstramos esse teorema provando inicialmente que a sequência de Palais-Smale converge fracamente e obtemos o limite fraco da sequência. Obtemos uma nova sequência de Palais-Smale para um novo funcional. Daí utilizamos do caso escalar para finalizar o teorema.

Nossa contribuição dá extensão a alguns trabalhos (de E. Hebey, F. Robert, Z. Djadli, M. Ledoux, V. Felli, entre outros) em que foi estudado (2.2) no caso escalar.

Este capítulo começa com a existência de soluções, passando pela regularidade, estimativas pontuais e concentração L^2, terminando com a

compacidade.

2.1 Existência

Seja $q \in \left[2, 2^{\#}\right]$. Definimos:

$$\mu_q = \inf \left\{ I_q(U); U \in H_k^{2,2}(M) \setminus \{0\} \ \text{ e } \ \Phi(U) = 1 \right\} ,$$

em que $\Phi(U) = \displaystyle\int_M F(U)\, dv_g$ (veja (1.7)) e $I_q : H_k^{2,2}(M) \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ é o seguinte funcional:

$$I_q(U) = \frac{\displaystyle\int_M \left((\Delta_g U)^2 + A\left((\nabla U)^{\#}, (\nabla U)^{\#} \right) + G(x,U) \right)\, dv_g}{\left(\displaystyle\int_M F(U)\, dv_g \right)^{\frac{2}{q}}} , \tag{2.5}$$

definido para todo $U \in H_k^{2,2}(M) \setminus \{0\}$, em que $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ é uma função q-homogênea. O funcional I_q está bem definido, pois a imersão de Sobolev $H_k^{2,2}(M) \hookrightarrow L_k^q(M)$ é continua.

Para obtermos soluções de (2.1) no caso crítico, ou seja, quando $q = 2^{\#}$, teremos de utilizar um outro método. Este apresentaremos mais adiante. No resultado a seguir, focamos no caso subcrítico, ou seja, quando $q < 2^{\#}$.

Proposição 9. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 5$. Sejam A um $(2,0)-$tensor simétrico; $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1, positiva e $q-$homogênea e $G : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ é uma função contínua, de classe C^1 e 2-homogênea na segunda variável. Suponha que $q \in \left[2, 2^{\#}\right)$. Então, μ_q é finito e é atingido. Ou seja, $\mu_q \in \mathbb{R}$ e existe $U \in H_k^{2,2}(M) \setminus \{0\}$ tal que $I_q(U) = \mu_q$.*

Demonstração. Inicialmente, provamos que $\mu_q > -\infty$. Seja $U \in H_k^{2,2}(M) \setminus \{0\}$. Como A é suave, então existe $C > 0$ tal que

$$\left| \int_M A\left((\nabla U)^{\#}, (\nabla U)^{\#} \right)\, dv_g \right| \leq C \int_M |\nabla U|_g^2\, dv_g , \tag{2.6}$$

para todo $U \in H_k^{2,2}(M)$. Observamos que existe uma constante $C' > 0$ tal que

$$\left| \int_M A\left((\nabla U)^{\#}, (\nabla U)^{\#} \right)\, dv_g \right| \leq \frac{1}{2} \int_M \left(\Delta_g U \right)^2\, dv_g + C' \|U\|_2^2 , \tag{2.7}$$

para todo $U = (u_1, \ldots, u_k) \in H_k^{2,2}(M)$, em que $\|U\|_2^2 = \sum_{i=1}^k \int_M |u_i|^2\, dv_g$.
Para provar a desigualdade acima, provaremos dois lemas a seguir.

Lema 10. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana compacta. Então, para cada $\varepsilon > 0$, existe $C(\varepsilon) > 0$ tal que*

$$\|\nabla u\|_2 \leq \varepsilon \|\Delta_g u\|_2 + C(\varepsilon)\|u\|_2, \qquad \forall\ u \in\ H^{2,2}(M)\,.$$

Demonstração. Suponha, por contradição, que existe $\varepsilon > 0$ tal que, para cada $\alpha \in \mathbb{N}^*$, existe $u_\alpha \in\ H^{2,2}(M)$ tal que

$$\|\nabla u_\alpha\|_2 > \varepsilon \|\Delta_g u_\alpha\|_2 + \alpha\|u_\alpha\|_2, \quad \text{e} \quad \|\nabla u_\alpha\|_2 = 1\,.$$

Daí,

$$1 > \varepsilon\|\Delta_g u_\alpha\|_2 \qquad \text{e} \qquad 1 > \alpha\|u_\alpha\|_2\,.$$

Ou seja,

$$\|\Delta_g u_\alpha\|_2 < \frac{1}{\varepsilon} \qquad \text{e} \qquad \|u_\alpha\|_2 < \frac{1}{\alpha}\,.$$

Logo,

$$\|\Delta_g u_\alpha\|_2 + \|\nabla u_\alpha\|_2 + \|u_\alpha\|_2 < \frac{1}{\varepsilon} + 1 + \frac{1}{\alpha}\,.$$

Portanto, temos que existe uma constante $C > 0$ tal que

$$\|u_\alpha\|_{H^{2,2}(M)} \leq C\,.$$

Além disso, temos que $\|u_\alpha\|_2 \to 0$. Como a imersão $H^{2,2}(M) \hookrightarrow H^{1,2}(M)$ é compacta, a menos de subsequência, temos que $u_\alpha \rightharpoonup u$ ($u \in\ H^{2,2}(M)$) e $u_\alpha \to u$ em $H^{1,2}(M)$. Portanto, $\|\nabla u\|_2 = 1$ e $\|u\|_2 = 0$, o que é uma contradição.

□

Usaremos este lema 10 para demonstrar o lema a seguir. Para provar (2.7), basta verificarmos o caso escalar. O caso vetorial segue diretamente do lema abaixo.

Lema 11. *Seja A um $(2,0)-$tensor. Existe uma constante $C' > 0$ tal que*

$$\left| \int_M A\left((\nabla u)^\#, (\nabla u)^\#\right)\, dv_g \right| \leq \frac{1}{2}\int_M (\Delta_g u)^2\, dv_g + C'\|u\|_2^2\,.$$

Demonstração. Seja $C > 0$ a constante na desigualdade (2.6). Tomamos $\varepsilon = \frac{1}{\sqrt{4C}}$ no lema 10 acima:

$$\|\nabla u\|_2 \leq \frac{1}{\sqrt{4C}}\|\Delta_g u\|_2 + C(\varepsilon)\|u\|_2\,.$$

Daí,

$$
\begin{aligned}
\|\nabla u\|_2^2 &\leq \left(\frac{\|\Delta_g u\|_2}{\sqrt{4C}} + C(\varepsilon)\|u\|_2 \right)^2 \\
&= \frac{\|\Delta_g u\|_2^2}{4C} + \frac{2C(\varepsilon)}{\sqrt{4C}}\|\Delta_g u\|_2\|u\|_2 + C^2(\varepsilon)\|u\|_2^2 \\
&\leq \frac{\|\Delta_g u\|_2^2}{4C} + \frac{\|\Delta_g u\|_2^2}{4C} + \frac{4C^2(\varepsilon)\|u\|_2^2}{2} + C^2(\varepsilon)\|u\|_2^2 \,.
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
C\int_M |\nabla u|^2 \, dv_g \leq \frac{1}{2}\int_M (\Delta_g u)^2 \, dv_g + C'\|u\|_2^2 \,.
$$

Portanto, de (2.6) obtemos o resultado do lema.

□

Voltemos agora a demonstração da proposição. Como F é q-homogênea e positiva, temos que existe uma constante $M_{F,2} = M'_F > 0$ tal que:

$$
F(U) \leq M'_F |U|_2^q \leq \hat{M}'_F |U|_q^q \,, \qquad \text{para toda } U \in \mathbb{R}^k \;, \tag{2.8}
$$

em que $|U|_2^2 = |u_1|^2 + \cdots + |u_k|^2$ e $U = (u_1, \ldots, u_k)$ (veja seção 1.3, p. 30). E, da homogeneidade de G, obtemos que existe uma constante $m_G > 0$ tal que:

$$
m_G |U|_2^2 \leq G(x, U) \,, \qquad \text{para toda } U \in \mathbb{R}^k \;. \tag{2.9}
$$

Usaremos agora as desigualdades acima (2.9), (2.8), (2.7) e a desigualdade de Hölder (também usamos a idéia do início da demonstração da proposição 8). Observe que, para cada $i = 1, \ldots, k$ temos que

$$
\int_M |u_i|^2 \, dv_g \leq \left(\int_M |u_i|^q \, dv_g \right)^{\frac{2}{q}} \mathrm{vol}(M)^{1-\frac{2}{q}}
$$

e como $\|u_i\|_q^2 \leq \|U\|_q^2$, temos que:

$$
\int_M |U| \, dv_g \leq k \left(\int_M |U|_q^q \, dv_g \right)^{\frac{2}{q}} \mathrm{vol}(M)^{1-\frac{2}{q}}
$$

Então, temos que:

$$
\begin{aligned}
I_q(U) &= \frac{\displaystyle\int_M \left((\Delta_g U)^2 \; + A\left((\nabla U)^{\#}, (\nabla U)^{\#}\right) + G(x,U)\right)\, dv_g}{\left(\displaystyle\int_M F(U)\, dv_g\right)^{\frac{2}{q}}} \\
&\geq \frac{\displaystyle\frac{1}{2}\int_M (\Delta_g U)^2 \; dv_g - (C' - m_G)\|U\|_2^2}{\left(\displaystyle\int_M F(U)\, dv_g\right)^{\frac{2}{q}}} \\
&\geq \frac{\displaystyle\int_M (\Delta_g U)^2 \; dv_g}{2\left(\displaystyle\int_M F(U)\, dv_g\right)^{\frac{2}{q}}} - \frac{(C' - m_G)\,\|U\|_2^2}{Vol_g(M)^{\frac{2}{q}-1}\left(\hat{M}'_F\right)^{\frac{2}{q}} \|U\|_q^2} \\
&= \frac{\displaystyle\int_M (\Delta_g U)^2 \; dv_g}{2\left(\displaystyle\int_M F(U)\, dv_g\right)^{\frac{2}{q}}} - \frac{k\,(C' - m_G)}{Vol_g(M)^{\frac{2}{q}-1}\left(\hat{M}'_F\right)^{\frac{2}{q}}}\,, \qquad (2.10)
\end{aligned}
$$

para todo $U \in H_k^{2,2}(M) \setminus \{0\}$, em que $\|U\|_2^2 = \sum_{i=1}^k \|u_i\|_2^2$. Note que estamos supondo que $(C' - m_G) > 0$. Caso contrário, se $(C' - m_G) < 0$ teríamos:

$$
I_q(U) \geq \frac{\displaystyle\int_M (\Delta_g U)^2 \; dv_g}{2\,(M'_F)^{\frac{2}{q}}\,\|U\|_q^2}
$$

Isso prova, para ambos casos, que $\mu_q > -\infty$ e então $\mu_q \in \mathbb{R}$. Seja, agora, $(U_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}} \in H_k^{2,2}(M) \setminus \{0\}$ uma sequência minimizante para I_q, ou seja:

$$
\lim_{\alpha\to\infty} I_q(U_\alpha) = \mu_q\,. \qquad (2.11)
$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir que

$$
\int_M F(U_\alpha)\, dv_g = 1\,, \qquad (2.12)
$$

para todo $\alpha \in \mathbb{N}$. De (2.10) e (2.11), temos que existe uma constante $C_0 > 0$ tal que:

$$
\int_M (\Delta_g U_\alpha)^2 \; dv_g \leq C_0\,,
$$

para todo $\alpha \in \mathbb{N}$. De (1.4) e de (2.12), obtemos:

$$
\|U_\alpha\|_2^2 = \int_M |U_\alpha|_2^2 \leq C_1, \qquad \text{para uma constante } C_1 > 0\,.
$$

E do lema 10, usando as duas limitações acima, temos:

$$\|\nabla U\|_2^2 \leq C_2 \,,$$

em que $C_2 > 0$. Daí, existe uma constante $C > 0$, tal que:

$$\|U_\alpha\|_{H_k^{2,2}(M)} \leq C \,,$$

para todo $\alpha \in \mathbb{N}$. Como a bola unitária de $H_k^{2,2}(M)$ é fracamente compacta, temos que existe $U \in H_k^{2,2}(M)$ que é o limite fraco de $(U_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$, a menos de subsequência. Ou seja, existe subsequência $(U_{\alpha'}) \subset (U_\alpha)$ tal que

$$U_{\alpha'} \rightharpoonup U \,,$$

convergência fraca em $\left(H_k^{2,2}(M)\right)^*$, quando $\alpha \to \infty$. Sem perda de generalidade, assumiremos que a convergência ocorre para sequência inicial $(U_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$. Como a imersão $H_k^{2,2}(M) \hookrightarrow H_k^{1,2}(M)$ é compacta, temos que

$$\lim_{\alpha\to\infty} U_\alpha = U \qquad \text{em} \qquad H_k^{1,2}(M)\,.$$

Como, para $2 \leq q < 2^\#$, a imersão $H_k^{2,2}(M) \hookrightarrow L_k^q(M)$ é compacta, temos também que

$$\lim_{\alpha\to\infty} U_\alpha = U \qquad \text{em} \qquad L_k^q(M)\,.$$

Também temos que $U_\alpha \to U$ *qtp*. Logo $\int_M F(U)\,dv_g = 1$ e de (1.4) concluimos que $U \neq 0$, em que $U = (u_1, \ldots, u_k)$. Seja $\Theta_\alpha = U_\alpha - U \in H_k^{2,2}(M)$ para $\alpha \in \mathbb{N}$. Temos:

$$\begin{aligned}
&\int_M \left((\Delta_g U_\alpha)^2 + A\left((\nabla U_\alpha)^\#, (\nabla U_\alpha)^\#\right) + G(x, U_\alpha)\right)\, dv_g \\
=&\int_M \left((\Delta_g U)^2 + A\left((\nabla U)^\#, (\nabla U)^\#\right) + G(x, U)\right)\, dv_g + \int_M (\Delta_g \Theta_\alpha)^2 + o(1)\,,
\end{aligned}$$

em que $\lim_{\alpha\to\infty} o(1) = 0$, pois $\Theta_\alpha \rightharpoonup 0$ em $\left(H_k^{2,2}(M)\right)^*$ e $U_\alpha \to U$ em $H_k^{1,2}(M)$ quando $\alpha \to \infty$. Suponha que:

$$\mu_q = \int_M \left((\Delta_g U)^2 + A\left((\nabla U)^\#, (\nabla U)^\#\right) + G(x, U)\right)\, dv_g + \int_M (\Delta_g \Theta_\alpha)^2 + o(1)\,, \tag{2.13}$$

quando $\alpha \to \infty$. Como $U \neq 0$, temos que $I_q(U) \geq \mu_q$. Mas temos também:

$$\mu_q \leq \int_M \left((\Delta_g U)^2 + A\left((\nabla U)^\#, (\nabla U)^\#\right) + G(x, U)\right)\, dv_g + \int_M (\Delta_g \Theta_\alpha)^2\,. \tag{2.14}$$

ou seja $\mu_q \leq I_q(U)$. Juntando (2.13) e (2.14), temos:

$$\mu_q = \int_M \left((\Delta_g U)^2 + A\left((\nabla U)^\#, (\nabla U)^\#\right) + G(x,U)\right)\, dv_g = I_q(U)\,,$$

e

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_M \left(\Delta_g \Theta_\alpha\right)^2\, dv_g = 0\,.$$

Em particular, o ínfimo μ_q é atingido em $U \in H_k^{2,2}(M)$.

$\square$

Agora, considere o conjunto Λ definido por:

$$\Lambda = \left\{U \in H_k^{2,2}(M);\ \Phi(U) = 1\right\}\,,$$

em que $\Phi(U) = \int_M F(U)\, dv_g$ (veja (1.7)). Considere também o número λ dado por:

$$\lambda = \inf_{U\in\Lambda}\ \Psi(U)\,,$$

em que $\Psi(U) = I_{2^\#}(U)$ (veja (1.8) e (2.5)).

Vemos facilmente que, se $(U_\alpha)_\alpha$ é uma sequência minimizante para λ, então $(U_\alpha)_\alpha$ é uma sequência limitada em $H_k^{2,2}(M)$. De fato, tal afirmação decorre do fato que $(U_\alpha)_\alpha \subset \Lambda$ e da existência de uma constante $m_F > 0$ tal que $m_F|U|_2^{2^\#} \leq F(U)$.

Sobre algumas condições, no teorema a seguir, veremos que o sistema (2.1) possui solução de energia mínima.

Teorema 12. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 5$. Sejam $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ função de classe C^1, positiva e $2^\#-$homogênea e $G : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ função contínua de classe C^1 e 2-homogênea na segunda variável. Seja também A um $(2,0)-$tensor simétrico suave e suponha que Ψ seja coercivo. Se $\lambda < \frac{1}{\mathcal{A}_0}$, então (2.1) possui solução fraca $U_0 \in \Lambda$ tal que*

$$\Psi(U_0) = \lambda\,.$$

Demonstração. Como Ψ é coercivo, temos que existe $\alpha > 0$ tal que

$$\hat{\Psi}(U) \geq\ \alpha\|U\|_{2^\#}^2 \geq\ M_{F,2^\#}^{-\frac{2}{2^\#}}\alpha\left(\int_M F(U)\, dv_g\right)^{\frac{2}{2^\#}}\,,$$

(veja a proposição 5). Afirmamos que o ínfimo λ é positivo, ou seja, $\lambda > 0$. Da desigualdade acima obtemos:

$$\Psi(U)=\frac{\displaystyle\int_M\left((\Delta_g U)^2+A\left((\nabla U)^{\#},(\nabla U)^{\#}\right)+G(x,U)\right)\,dv_g}{\left(\displaystyle\int_M F(U)\,dv_g\right)^{\frac{2}{2^{\#}}}}\geq\frac{\alpha}{M_F^{\frac{2}{2^{\#}}}}\,,$$

para todo $U\in H_k^{2,2}(M)$. Logo $\lambda\geq\alpha M_F^{-\frac{2}{2^{\#}}}>0$. O que prova a afirmação.

Seja $(U_\alpha)_\alpha\subset\Lambda$ uma sequência minimizante para λ. Ou seja,

$$\lim_{\alpha\to\infty}\Psi\left(U_\alpha\right)=\lambda\,.$$

Como a sequência é limitada, existe $U_0\in H_k^{2,2}(M)$ tal que, a menos de subsequência, temos:

$$\begin{array}{lllll}U_\alpha & \rightharpoonup & U_0 & \text{fracamente em} & H_k^{2,2}(M)\\ U_\alpha & \to & U_0 & \text{fortemente em} & H_k^{1,2}(M)\ \text{ e em }\ L_k^2(M)\,.\end{array}$$

Consideramos $\Theta_\alpha=U_\alpha-U_0\in H_k^{2,2}(M)$ para todo $\alpha\in\mathbb{N}$. Como na demonstração da proposição anterior (proposição 9), temos que:

$$\lambda=\Psi(U_0)+\int_M\left(\Delta_g\Theta_\alpha\right)^2\,dv_g+o(1)\,,\tag{2.15}$$

em que $\lim_{\alpha\to\infty}o(1)=0$. Sem perda de generalidade, podemos assumir que:

$$\lim_{\alpha\to\infty}\Theta_\alpha(x)=0\qquad\text{q.t.p }\ x\in\ M\,.$$

Pelo Lema de Brézis-Lieb generalizado (veja [1]), temos:

$$\lim_{\alpha\to\infty}\left(\int_M F(U_0+\Theta_\alpha)\,dv_g-\int_M F(U_0)\,dv_g-\int_M F(\Theta_\alpha)\,dv_g\right)=0\,.\tag{2.16}$$

Com a desigualdade (1.24) (também de (1.3) e (1.5)) e a convergência de Θ_α em $H_k^{2,2}(M)$, temos:

$$\begin{aligned}\left(\int_M F(\Theta_\alpha)\,dv_g\right)^{\frac{2}{2^{\#}}} &\leq \mathcal{A}_0\int_M\left(\Delta_g\Theta_\alpha\right)^2\,dv_g+B\int_M\left(|\nabla\Theta_\alpha|^2+G(x,\Theta_\alpha)\right)\,dv_g\\ &\leq \mathcal{A}_0\int_M\left(\Delta_g\Theta_\alpha\right)^2\,dv_g+o(1)\,.\end{aligned}\tag{2.17}$$

Da definição, temos que Ψ é 2-homogênea, ou seja, $\Psi(\alpha U)=\alpha^2\Psi(U)$, para $\alpha\in\mathbb{R}$. Assim:

$$\lambda \leq \Psi\left(\frac{U_0}{\left(\int_M F(U_0)\,dv_g\right)^{\frac{1}{2^\#}}}\right) = \frac{1}{\left(\int_M F(U_0)\,dv_g\right)^{\frac{2}{2^\#}}}\Psi(U_0)$$

Portanto,

$$\Psi(U_0) \geq \lambda \left(\int_M F(U_0)\,dv_g\right)^{\frac{2}{2^\#}}. \tag{2.18}$$

Usando em (2.15) as desigualdades (2.16), (2.17) e (2.18), obtemos:

$$\begin{aligned} \lambda &\geq \lambda \left(\int_M F(U_0)\,dv_g\right)^{\frac{2}{2^\#}} + (\mathcal{A}_0)^{-1}\left(\int_M F(\Theta_\alpha)\,dv_g\right)^{\frac{2}{2^\#}} + o(1) \\ &\geq \lambda \left(\int_M F(U_0)\,dv_g\right)^{\frac{2}{2^\#}} + (\mathcal{A}_0)^{-1}\left(1 - \int_M F(U_0)\,dv_g\right)^{\frac{2}{2^\#}} + o(1)\,. \end{aligned}$$

Fazendo $\alpha \to +\infty$ nesta última desigualdade obtemos:

$$\lambda\mathcal{A}_0\left(1 - \left(\int_M F(U_0)\,dv_g\right)^{\frac{2}{2^\#}}\right) \geq \left(1 - \int_M F(U_0)\,dv_g\right)^{\frac{2}{2^\#}}.$$

Observe que $\frac{2}{2^\#} = 1 - \frac{4}{n} < 1$ e

$$F(U_\alpha) \rightharpoonup F(U_0) \quad \text{em } L^1(M) \quad \Rightarrow \quad \int_M F(U_0)\,dv_g \leq \liminf \int_M F(U_\alpha)\,dv_g = 1\,.$$

Concluimos então:

$$\int_M F(U_0)\,dv_g \leq 1\,. \tag{2.19}$$

Como $1 - X^p \leq (1-X)^p$ para todo $X \in [0,1]$ e para todo $0 \leq p \leq 1$, obtemos[1]:

$$(\lambda\mathcal{A}_0 - 1)\left(1 - \left(\int_M F(U_0)\,dv_g\right)^{\frac{2}{2^\#}}\right) \geq 0\,.$$

Da hipótese $\lambda < \frac{1}{A_0}$, obtemos:

$$\int_M F(U_0)\,dv_g \geq 1\,.$$

Por outro lado, da convergência fraca (veja (2.19)), obtemos que:

[1]Se $(X-1) \geq 0$, então $1 = (1 - X + X)^p \leq (1-X)^p + X^p$, pois $(a+b)^s \leq a^s + b^s$ se $a, b > 0$ e $s \in [0,1]$.

$$\int_M F(U_0)\, dv_g \leq 1\,.$$

Portanto,

$$\int_M F(U_0)\, dv_g = 1\,.$$

Logo, $U_0 \in \Lambda$ e $U_0 \neq 0$ (de (1.4), pois F é $2^\#$-homogênea). Assim como na demonstração da proposição anterior, temos também que $\lim_{\alpha\to\infty} \Theta_\alpha = 0$ em $H_k^{2,2}(M)$ e que $\lim_{\alpha\to\infty} \int_M (\Delta\Theta_\alpha)^2\, dv_g = 0$. Logo, de (2.15), temos que

$$\lambda = \Psi(U_0)\,.$$

Portanto, $U_0 \in H_k^{2,2}(M) \setminus \{0\}$ é um minimizador para Ψ e U_0 é solução para o problema (2.1), ou seja,

$$\Psi'(U_0)V = \lambda\Phi'(U_0)V \qquad \text{para todo } \ V \in H_k^{2,2}(M)\,,$$

pelo teorema dos multiplicadores de Lagrange.

$\square$

2.2 Regularidade

A estratégia de Trudinger para operadores de segunda ordem, como no caso de operadores do tipo Yamabe, não se aplica satisfatoriamente para para o caso de operadores de quarta ordem. Mas podemos observar que Sandeep ([31]) pôde desenvolver o método De Giorgi-Nash-Moser para equações de quarta ordem, que é uma técnica que está bem próxima da técnica de Trudinger.

Algumas técnicas usadas para operadores de quarta ordem foram desenvolvidas por Van der Vorst e, no contexto Riemanniano, por Esposito-Robert (veja [15], [38] e também [10]).

Um importante resultado que obtemos com a coercividade é o seguinte.

Proposição 13. *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta e seja A uma soma de $(2,0)-$tensores suaves, simétricos e positivos. Suponha que $S \in H_k^{r,p}(M)$ e $G : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ de classe C^1 seja uma função 2-homogênea na segunda variável, de classe C^1 e positiva. Então existe $U \in H_k^{4+r,p}(M)$ tal que*

$$-\Delta_g^2 U + \mathrm{div_g}\left(A(\nabla U)^{\#}\right) + \frac{1}{2}\nabla_U G(x, U) = S(x)\,. \tag{2.20}$$

Mais ainda, temos que

$$\|U\|_{H_k^{4+r,p}(M)} \;\le\; C\|S\|_{H_k^{r,p}(M)}\,.$$

para todo $U \in H_k^{2,2}(M)$ onde $C = C(M, g, k) > 0$. E se $G(x, t) = \sum_{i,j=1}^k A_{ij}(x)t_i t_j$, em que $(A_{ij}(x))$ é positiva como forma bilinear e simétrica, então temos unicidade em (2.20).

Demonstração. Sejam A uma soma de $(2, 0)-$tensores simétricos e suaves e G uma função 2-homogênea de classe C^1 na segunda variável. O funcional $\hat{\Psi}$ é coercivo, ou seja, existe $\lambda > 0$ tal que:

$$\hat{\Psi}(U) = \int_M \left((\Delta_g U)^2 + A\left((\nabla U)^{\#}, (\nabla U)^{\#}\right) + G(x, U)\right)\, dv_g \;\ge \lambda \int_M |U|_2^2\, dv_g\,.$$

Nessa demonstração, consideraremos o operador

$$P_g U = -\Delta_g^2 U + \mathrm{div_g}\left(A(\nabla U)^{\#}\right) + \frac{1}{2}\nabla_U G(x, U)\,,$$

ou, considerando as funções coordenadas de $U = (u_1, \ldots, u_k)$, temos (utilizaremos a mesma notação para o operador P_g):

$$P_g u_i = -\Delta_g^2 u_i + \mathrm{div_g}\left(A_i(\nabla u_i)^{\#}\right) + \frac{1}{2}\partial_i G(x, U)\,,$$

para $i = 1, \ldots, k$.

Afirmação 1. *Seja $p > 1$. Afirmamos que existe $C > 0$ tal que*

$$\|U\|_{L^p_k(M)} \leq C\|P_g U\|_{L^p_k(M)} \qquad \forall \; U \in H^{4,p}_k(M)\,.$$

Provemos essa afirmação por contradição. Assumimos que, para todo $\alpha \in \mathbb{N}^*$, existe $U_\alpha = (u^1_\alpha, \ldots, u^k_\alpha) \in H^{4,p}_k(M)$ tal que

$$\|U_\alpha\|_p = 1 \qquad \text{e} \qquad \|P_g U_\alpha\|_p \leq \frac{1}{\alpha}\,. \tag{2.21}$$

Denotaremos $S_\alpha(x) = (S^1_\alpha, \ldots, S^k_\alpha)$. Seja $S^i_\alpha = P_g u^i_\alpha$. Assim,

$$-\Delta^2_g u^i_\alpha + \mathrm{div_g}\left(A_i(\nabla u^i_\alpha)^\#\right) + \frac{1}{2}\partial_i G(x, U_\alpha) = S^i_\alpha(x)\,,$$

para $i = 1, \ldots, k$. Aplicamos a Teoria L^p em

$$-\Delta^2_g u_i + \mathrm{div_g}\left(A_i(\nabla u_i)^\#\right) = S^i_\alpha(x) - \partial_i G(x, U^\alpha)$$

e obtemos

$$\begin{aligned}
\|u^i_\alpha\|_{H^{4,p}_k(M)} &\leq C\left(\|S^i_\alpha - \partial_i G(x, U_\alpha)\|_p + \|u^i_\alpha\|_p\right)\\
&\leq C\left(\|S^i_\alpha\|_p + \|\partial_i G(x, U_\alpha)\|_p + \|u^i_\alpha\|_p\right)\\
&\leq C_0\left(\|S^i_\alpha\|_p + \|u^i_\alpha\|_p + \|u^i_\alpha\|_p\right)\\
&\leq C_0\left(\frac{1}{\alpha} + 2\right)\\
&\leq C'\,,
\end{aligned}$$

em que $C' > 0$ não depende de α. Logo, a sequência (u^i_α) é limitada em $H^{4,p}(M)$. Então, a menos de subsequência, temos:

$$u^i_\alpha \rightharpoonup u^i \qquad \text{em} \qquad H^{4,p}(M)\,,$$

para $i = 1, \ldots, k$. E, a menos de outra subsequência,

$$u^i_\alpha \to u^i \qquad \text{em} \qquad H^{2,p}(M)\,,$$

para $i = 1, \ldots, k$, pois a imersão $H^{4,p}_k(M) \hookrightarrow H^{2,p}_k(M)$ é compacta. Para qualquer $\varphi \in C^\infty(M)$, temos

$$\int_M \left(\Delta_g u^i_\alpha \Delta_g \varphi + A_i\left((\nabla u^i_\alpha)^\#, (\nabla\varphi)^\#\right) + \frac{1}{2}\partial_i G(x, U_\alpha)\varphi\right)\, dv_g = \int_M S^i_\alpha(x)\varphi\, dv_g\,,$$

para $i = 1, \ldots, k$. Ou, escrito de outra maneira:

$$\int_M \varphi P_g u^i_\alpha\, dv_g = \int_M S^i_\alpha(x)\varphi\, dv_g\,.$$

Agora, fazendo $\alpha \to \infty$ e usando (2.21) juntamente com a desigualdade de Hölder, temos que $P_g u_i = 0$ no sentido fraco, para $i = 1, \ldots, k$, ou $P_g U = 0$. Da Teoria de Schauder, temos que $u_i \in C^4(M)$. E, da coercividade, temos:

$$0 = \int_M U P_g U \, dv_g \geq \lambda \int_M |U|^2 \, dv_g \, ,$$

ou seja, $U \equiv 0$. O que é uma contradição, pois:

$$\|U\|_p = \lim_{\alpha \to +\infty} \|U_\alpha\|_p = 1 \, .$$

Com isso, provamos a afirmação.

Afirmação 2. *Seja $\alpha \in (0,1)$. Afirmamos que para quaisquer $S \in C_k^{0,\alpha}$, G e A como na afirmação 1, então existe $U \in H_k^{4,2}(M)$ tal que*

$$P_g U = S \, .$$

Provemos a afirmação. Consideremos o funcional:

$$I(U) = \frac{1}{2} \int_M U P_g U \, dv_g - \int_M S \cdot U \, dv_g \, ,$$

para todo $U \in H_k^{2,2}(M)$, em que $U(x) = (u_1(x), \ldots, u_k(x))$, $S(x) = (S_1(x), \ldots, S_k(x))$ e $S \cdot U = s_1 u_1 + \cdots + u_k s_k$. Pela coercividade e da desigualdade de Hölder, temos que:

$$I(U) \geq \lambda \|U\|_2^2 - \|S\|_2 \|U\|_2 \geq -\frac{\|S\|_2^2}{4\lambda} \, . \tag{2.22}$$

Então, $\mu = \inf \left\{ I(U) \, ; U \in H_k^{2,2}(M) \right\} > -\infty$ está definido. Seja $(U_\alpha)_{\alpha \in \mathbb{N}} \in H_k^{2,2}(M)$ uma sequência minimizante para μ, isto é,

$$\lim_{\alpha \to \infty} I(U_\alpha) = \mu \, . \tag{2.23}$$

Com a primeira desigualdade de (2.22), temos que $\|U_\alpha\|_2 < \alpha$ para todo $\alpha \in \mathbb{N}$. De (2.23) e da coercividade temos que

$$\|U_\alpha\|_{H_k^{2,2}(M)} = O(1) \, ,$$

quando $\alpha \to +\infty$. Como a bola unitária de $H_k^{m,p}(M)$ é fracamente compacta e a sequência (U_α) é limitada em $H_k^{2,2}(M)$, então existe uma subsequência $(U_{\alpha'}) \in H_k^{2,2}(M)$ e existe $U \in H_k^{2,2}(M)$ tal que

$$U_{\alpha'} \rightharpoonup U \qquad \text{fracamente em } \; H_k^{2,2}(M) \, .$$

Como a imersão $H_k^{2,2}(M) \hookrightarrow H_k^{1,2}(M)$ é compacta, a menos de extrair outra subsequência, temos que

$$U_\alpha \to U \qquad \text{fortemente em } H_k^{1,2}(M)\,.$$

em que, sem perda de generalidade, voltamos ao índice da sequência original. Temos então que:

$$I(U_\alpha) = I(U) + \frac{1}{2}\int_M \left(\Delta_g(U_\alpha - U)\right)^2\, dv_g + o(1) = \mu + o(1)\,,$$

quando $\alpha \to +\infty$. Como μ é o ínfimo, temos que $\mu \leq I(U)$ e

$$\lim_{\alpha\to\infty} \int_M \left(\Delta_g(U_{\alpha'} - U)\right)^2\, dv_g = 0\,.$$

Portanto, $\mu = I(U)$. Temos então que $I'(U) = 0$, pois $I \in C^1(H_k^{2,2}(M), \mathbb{R})$. Ou seja, $P_g U = S$ no sentido fraco. De

$$-\Delta_g^2 U + \mathrm{div_g}\left(A(\nabla U)^\#\right) = S(x) - \frac{1}{2}\nabla_U G(x,U)\,.$$

Segue da teoria de Schauder que $U \in H_k^{4,2}(M)$.

Afirmação 3. *Afirmamos que, para qualquer $S \in L_k^p(M)$ e $G(x,t) = \sum_{i,j=1}^k A_{ij}(x) t_i t_j$, em que $(A_{ij}(x))$ é positiva como forma bilinear e simétrica para todo $x \in M$, existe único $U \in H_k^{4,p}(M)$ tal que*

$$-\Delta_g^2 U + \mathrm{div_g}\left(A(\nabla U)^\#\right) = S - \frac{1}{2}\nabla_U G(x,U)\,.$$

Seja $(S_m)_{m\in\mathbb{N}} \in C_k^\infty(M)$ uma sequência tal que:

$$\lim_{m\to\infty} S_m = S$$

fortemente em $L_k^p(M)$. Para cada $m \in \mathbb{N}$, seja $U_m \in C_k^4(M)$ tal que (veja afirmação 2):

$$-\Delta_g^2 U_m + \mathrm{div_g}\left(A(\nabla U_m)^\#\right) = S_m\,.$$

Como $\hat{\Psi}$ é coercivo e da teoria L^p, temos para quaisquer m, $n \in \mathbb{N}$:

$$\begin{aligned} \|U_m - U_n\|_{H_k^{4,p}(M)} &\leq C'\left(\|S_m - S_n\|_{L_k^p(M)} + \|U_m - U_n\|_{L_k^p(M)}\right) \\ &\leq k\|S_m - S_n\|_p \end{aligned}$$

.

Temos então que (U_m) é uma sequência de Cauchy em $H_k^{4,p}(M)$ e então existe $U \in H_k^{4,p}(M)$ tal que $\lim_{m\to\infty} U_m = U$ em $H_k^{4,p}(M)$. Temos então que:

$$-\Delta_g^2 U + \mathrm{div_g}\left(A(\nabla U)^\#\right) = S - \frac{1}{2}\nabla_U G(x,U)\,.$$

Agora assuma que $V \in H_k^{4,p}(M)$ satisfaça:

$$-\Delta_g^2 V + \mathrm{div_g}\left(A(\nabla V)^{\#}\right) = S - \frac{1}{2}\nabla_V G(x,V)\,.$$

Subtraindo as duas últimas igualdades, obtemos que

$$-\Delta_g^2\,(U-V) + \mathrm{div_g}\left(A(\nabla(U-V))^{\#}\right) + \frac{1}{2}\nabla G(x, U-V) = 0\,,$$

lembrando que G é como definido no enunciado da Afirmação 3. Segue da coercividade que $U \equiv V$:

$$0 \geq \hat{\Psi}(U-V) \geq \lambda \int_M |U-V|^2\, dv_g\,,$$

e isso prova a afirmação.
A parte da existência está provada na afirmação 3 acima. A estimativa *a priori* é consequência da afirmação 1 e da teoria L^p:

$$\begin{aligned}\|U\|_{H_k^{4+r,p}(M)} &\leq C\left(\|S\|_{H_k^{r,p}(M)} + \|U\|_{L_k^p(M)}\right)\\ &\leq C'\|U\|_{H_k^{r,p}(M)}\end{aligned}$$

□

Para casos particulares das funções F e G, podemos melhorar a regularidade da solução. Veja a proposição abaixo. Assim, a questão da regularidade fica resolvida.

Proposição 14. *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 5$. Seja A uma soma de $(2,0)-$tensores simétricos e positivos. Sejam $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função positiva de classe C^1 e $2^{\#}$-homogênea e $G : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função 2-homogênea na segunda variável de classe C^1, aplicações dadas por $F(t) = \sum_{i=1}^k |t_i|^{2^{\#}}$ e $G(x,t) = \sum_{i=1}^k A_{ij}(x)t_i t_j$. Em que $(A_{ij}(x))$ é simétrica e positiva definida como forma bilinear, para todo $x \in M$. Suponha que $U = (u_1, \ldots, u_k) \in H_k^{2,2}(M)$ seja uma solução fraca de:*

$$-\Delta_g^2 u_i + \mathrm{div_g}\, A_i((\nabla u_i)^{\#}) + \frac{1}{2}\sum_{j=1}^k A_{ij}u_j = \frac{1}{2^{\#}}|u_i|^{2^{\#}-2}u_i \tag{2.24}$$

$i = 1, \ldots, k$. Então $U \in C_k^4(M)$ e U é uma solução de (2.24) no sentido usual.

Demonstração. Sejam $p \geq 1, R > 0$ (definido posteriormente) e $V = (v^1, \cdots, v^k) \in L_k^p(M)$. Da desigualdade de Hölder, temos que

$$\partial_i F(U)\chi_{|U|\geq R}\, v^i \in L^r(M) \quad \text{em que} \quad \frac{1}{r} = \frac{1}{p} + \frac{4}{n}\,,$$

em que denotamos aqui $|U| = |U|_{2^\#}$ e χ é a função característica. De fato, obtemos:

$$\begin{aligned}
\|\partial_i F(U)\chi_{|U|\geq R}\, v^i\|_r &= \left(\int_M |\partial_i F(U)\mathbf{1}_{|U|\geq R}\, v^i|^r\, dv_g\right)^{\frac{1}{r}} \\
&\leq \left(\left(\int_M |\partial_i F(U)\chi_{|U|\geq R}|^{\frac{n}{4}}\right)^{\frac{4r}{n}} \left(\int_M |v^i|^p\, dv_g\right)^{\frac{r}{p}}\right)^{\frac{1}{r}} \\
&= \|\partial_i F(U)\chi_{|U|\geq R}\|_{\frac{n}{4}} \|v^i\|_p\,.
\end{aligned}$$

Segue da teoria da regularidade (veja resultado anterior) que existe único $W = (w_1, \cdots, w_k) \in H_k^{4,r}(M)$ tal que:

$$P_g w^i = \partial_i F(U)\chi_{|U|\geq R} v^i\,, \tag{2.25}$$

para $i = 1, \ldots, k$. Existe $C = C(p, r, n) > 0$ tal que

$$\|w^i\|_{H^{4,r}(M)} \leq C\|\partial_i F(U)\chi_{|U|\geq R} v^i\|_{L^r(M)}\,. \tag{2.26}$$

Sabemos que $H^{4,r}(M) \hookrightarrow L^q(M)$ continuamente, em que $\frac{1}{q} = \frac{1}{r} - \frac{4}{n} = \frac{1}{p}$. Então $w^i \in L_k^p(M)$ e existe $C = C((M, g), p, r, n) > 0$ tal que

$$\|w^i\|_p \leq\ C\|\nabla\ F(U)\chi_{|U|\geq R}\|_{\frac{n}{4}} \|v^i\|_p\,. \tag{2.27}$$

Definimos o operador $T_{p,R} : L^p(M) \to L^p(M)$ tal que, para cada $v \in L^p(M)$, $T_{p,R}(v) = w$ em que w é como acima. Do que já fizemos acima (2.27), $T_{p,r}$ é uma aplicação contínua. Mas também, observe que essa aplicação é linear. Sejam v_1^i e $v_2^i \in L^p(M)$ tais que:

$$\begin{aligned}
P_g w_1^i &= \partial_i F(U)\chi_{|U|\geq R} v_1^i \\
P_g w_2^i &= \partial_i F(U)\chi_{|U|\geq R} v_2^i
\end{aligned}$$

Então,

$$P_g(w_1^i) + P_g(w_2^i) = P_g(w_1^i + w_2^i) = \partial_i F(U)\chi_{|U|\geq R}(v_1^i + v_2^i)$$

Por outro lado, suponha que $w^i \in L^p(M)$ seja única função tal que:

$$P_g(w^i) = \partial_i F(U)\chi_{|U|\geq R}(v_1^i + v_2^i)$$

Assim, pela unicidade de solução de (2.25), temos que $w^i = w_1^i + w_2^i$. Portanto, o operador $T_{p,R}$ é linear.

$$\|T_{p,R}\|_{L^p\to L^p} \leq\ C(p,r,n)\left(\int_{|U|\geq\ R}|U|^{2^\#}\right)^{\frac{4}{n}}.$$

Logo, como $U\in\ L_k^{2^\#}(M)$ existe $R_0=R((M,g),p,r,n)>0$ tal que

$$\|T_{p,r}\|_{L^p\to L^p}\leq\ \frac{1}{2}\,.$$

Então temos que $Id_{L^p}-T_{p,r}:L_k^p(M)\to\ L_k^p(M)$ é linear e contínua com inversa linear e contínua.

Como $\nabla F(U)\chi_{|U|\leq R}\ \in\ L_k^\infty(M)$ temos, pela regularidade (veja o resultado anterior), que para todo $p\geq\ 2^\#$ existe $\tilde{U}=(\tilde{u}_1,\cdots,\tilde{u}_k)\in\ H_k^{4,p}(M)$ tal que:

$$-\Delta_g^2\tilde{u}_i+\mathrm{div_g}\left(A_i(\nabla\tilde{u}_i)^\#\right)+\partial_iG(x,\tilde{U})=\partial_iF(U)\chi_{|U|\leq R}\,u_i\,,$$

para $i=1,...,k$. Seja $\bar{U}=(Id_{L^p}-T_{p,R})^{-1}\,(\tilde{U})\in\ L_k^p(M)$. Temos

$$-\Delta_g^2u_i+\mathrm{div_g}\left(A_i(\nabla u_i)^\#\right)+\partial_iG(x,U)=\partial_iF(U)\chi_{|U|\geq R}u_i+\partial F(U)\chi_{|U|\leq R}\,u_i$$

e

$$-\Delta_g^2\,(u_i-\tilde{u}_i)+\mathrm{div_g}\left(A_i(u_i-\tilde{u}_i)^\#\right)+\partial_iG(x,U-\tilde{U})=\partial_iF(U)\chi_{|U|\geq R}u^i\,,$$

para $i=1,\ldots,k$. Daí temos que $U-\tilde{U}=T_{2^\#,R}(U)$ e

$$\left(Id_{L^{2^\#}}-T_{2^\#,R}\right)(U)=\tilde{U}=(Id_{L^p}-T_{p,R})\,(\bar{U})=\left(Id_{L^{2^\#}}-T_{2^\#,R}\right)(\bar{U})\,,$$

desde que $p\geq 2^\#$ e $U,\,\tilde{U}\in\ L_k^{2^\#}(M)$.

Como o operador $\left(Id_{L^{2^\#}}-T_{2^\#,R}\right)$ é invertível, temos que $U=\bar{U}\in\ L_k^p(M)$ para todo $p\geq 2^\#$. Da teoria da regularidade (teoria L^p), temos que $U\in\ H_k^{4,p}(M)$ para todo $p\geq 2^\#$. Da imersão de Sobolev $H_k^{r,p}(M)\hookrightarrow\ C_k^{0,\alpha}(M)$ para todo $\alpha\in\ (0,1)$ tal que $\alpha<r-\frac{n}{p}$ temos que $\nabla F(U)\in\ C_k^{0,\alpha}(M)$ e pela teoria da regularidade (teoria de Schauder), temos que $U\in\ C_k^4(M)$.

$\square$

2.3 Decomposição em Bubbles

Considere $U_\alpha = \left(u_\alpha^1, ..., u_\alpha^k\right)$ soluções do sistema (2.1). Observe que (2.1) possui funcional energia dado por:

$$\begin{aligned} J(U) &= \int_M \left((\Delta_g U)^2 + A\left((\nabla U)^\#, (\nabla U)^\#\right)\right) dv_g + \\ &+ \int_M G(x,U)\, dv_g - \int_M F(U)\, dv_g\,. \end{aligned} \tag{2.28}$$

ou,

$$J(U) = \int_M U P_g(U)\, dv_g - \int_M F(U)\, dv_g\,,$$

em que

$$P_g(U) = -\Delta_g^2 U + \mathrm{div_g}\left(A(\nabla U)^\#\right) + \frac{1}{2}\nabla_U G(x,U)\,.$$

Lembramos a seguir a definição de sequência de Palais Smale.

Definição 2. Seja $(U_\alpha)_\alpha \in H_k^{2,2}(M)$. A sequência $(U_\alpha)_\alpha$ é uma sequência de Palais-Smale (ou PS) se:

- $J(U_\alpha)$ é limitada;
- $\lim_{\alpha\to\infty} J'(U_\alpha) = 0 \quad \text{em} \quad \left(H_k^{2,2}(M)\right)^*$.

Seja $(x_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ uma sequência convergente de pontos em M e seja $(\mu_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}} \in \mathbb{R}$ tal que $\mu_\alpha > 0$ para todo α e $\lim_{\alpha\to+\infty} \mu_\alpha = 0$. Seja $\delta \in \left(0, \frac{i_g(M)}{2}\right)$, em que $i_g(M)$ é o raio de injetividade de (M,g). Suponha que $\eta_{\delta,\, x_\alpha} \in C^\infty(M)$ definido por $\eta_{\delta,\, x_\alpha} = \eta_\delta \circ exp_{x_\alpha}^{-1}$, em que consideramos $exp_{x_\alpha} : B_{2\delta}(0) \to B_{2\delta}(x_\alpha)$ a aplicação exponencial em x definida em $B_{2\delta}(0)$ (bola Euclideana de $\mathbb{R}^n$) e que $\eta_\delta \in C^\infty(\mathbb{R}^n)$, $\eta_\delta \equiv 1$ em $B_\delta(0)$, $\eta_\delta \equiv 0$ em $\mathbb{R}^n \setminus B_{2\delta}(0)$. Definimos a seguir uma família de funções, denominada bubbles escalar ou 1-bubbles:

$$B_\alpha(x) = \beta_n \eta_{\delta,\, x_\alpha}(x) \left(\frac{\mu_\alpha}{\mu_\alpha^2 + d_g(x,x_\alpha)^2}\right)^{\frac{n-4}{2}}\,,$$

para todo $x \in M$. Neste caso dizemos que os pontos x_α são os centros e que os números μ_α são pesos de $(B_\alpha)_\alpha$. A constante β_n vale $\beta_n = (n(n-4)(n^2-4))^{\frac{n-4}{8}}$. Uma $k-$bubbles é uma sequência de aplicações $B_{j,\alpha} = (B_{j,\alpha}^1, \cdots, B_{j,\alpha}^k)$ tal que uma das coordenadas é uma bubbles escalar e as demais entradas são nulas.

Note que temos:

$$B_\alpha(x) = \eta_{\delta,\, x_\alpha}(x)\mu_\alpha^{-\frac{n-4}{2}}\, u\left(\frac{exp_{x_\alpha}^{-1}(x)}{\mu_\alpha}\right), \tag{2.29}$$

para todo $x \in\, M$ e

$$u(x) = \beta_n \left(\frac{1}{1+|x|^2}\right)^{\frac{n-4}{2}}, \tag{2.30}$$

para todo $x \in \mathbb{R}^n$. Note que $u \in\, D_2^2(\mathbb{R}^n)$ é uma extremal para:

$$\frac{1}{A_0} = \inf_{u \in\, D_2^2(\mathbb{R}^n)\backslash\{0\}} \frac{\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta_\xi u)^2\ dx}{\left(\displaystyle\int_{\mathbb{R}^n} |u|^{2^\#}\ dx\right)^{\frac{2}{2^\#}}}, \tag{2.31}$$

em que $D_2^2(\mathbb{R}^n)$ é o completamento de $C_c^\infty(\mathbb{R}^n)$ com a norma $\|u\|_{D_2^2(\mathbb{R}^n)} = \|\Delta_\xi u\|_2$.

Note que a função u em (2.30) satisfaz a seguinte equação:

$$\Delta_\xi^2\, u = u^{2^\#-1} \qquad \text{em} \qquad \mathbb{R}^n\,.$$

Os extremais para a desigualdade ótima Euclidiana, isto é, funções em $D_2^2(\mathbb{R}^n)$ que atingem o ínfimo em (2.31), são da seguinte forma:

$$u_{\lambda,\,\mu,\,x_0}(x) = \mu\left(\frac{\lambda}{\lambda^2+|x-x_0|^2}\right)^{\frac{n-4}{2}} \qquad \text{para todo } x \in\, \mathbb{R}^n\,,$$

em que $\mu \neq 0$, $\lambda > 0$ e $x_0 \in \mathbb{R}^n$ são arbitrários.

Para uma maior clareza, estamos considerando $u \geq 0$, em que a decomposição em bubbles com 1-bubbles definido como em (2.29), em que $u \in\, D_2^2(\mathbb{R}^n) \cap C^\infty(\mathbb{R}^n)$ é uma solução de $\Delta_\xi^2 u = |u|^{2^\#-2}u$ em $\mathbb{R}^n$.

A falta da convergência forte de sequências de Palais-Smale para J pode ser descrito pelos 1-bubbles descritos acima. O teorema seguinte mostra quão fundamentais eles são para descrição de sequências de Palais-Smale. Uma descrição de sequências de Palais-Smale para funcionais críticos é feita por Struwe (veja [36]) onde foi fornecido sequências de Palais-Smale para funcionais críticos associados a um operador de segunda ordem elíptico em

um subconjunto de $\mathbb{R}^n$. A ideia inicial para o caso escalar veio dos trabalhos de Hebey e Robert (veja [?]) que é uma extensão do funcional associado ao operador de quarta ordem, em uma variedade Riemanniana.

Teorema 15. *[Decomposição em Bubbles] Sejam (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 5$, F_α, $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ funções de classe C^1, positivas e $2^\#-$homogêneas e G_α, $G : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ são funções 2-homogêneas na segunda variível, contínuas e G_α de classe C^1 tais que*

$$\begin{array}{rclcl} F_\alpha & \to & F & \quad \textit{em} & C^1_{loc}(\mathbb{R}^k) \\ G_\alpha & \to & G & \quad \textit{em} & C^0_{loc}(M \times \mathbb{R}^k)\,. \end{array}$$

Seja $U_\alpha \in H_k^{2,2}(M)$ solução fraca de (2.1). Se a sequência $(U_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ é limitada em $H_k^{2,2}(M)$, então existe $U_0 \in H_k^{2,2}(M)$ limite fraco de U_α e, a menos de subsequência, temos:

$$U_\alpha = U_0 + \sum_{j=1}^{l} B_{j,\alpha} + R_\alpha \tag{2.32}$$

para todo $\alpha > 0$, sendo $(B_{j,\alpha})_{\alpha\in\mathbb{N}}$, $j = 1, ..., l$, k-bubbles e $(R_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}} \subset H_k^{2,2}(M)$ é tal que

$$\lim_{\alpha\to\infty} R_\alpha = 0 \qquad \textit{em} \quad H_k^{2,2}(M)$$

Demonstração. Sem perda de generalidade, estamos supondo que o limite $U_0 \in H_k^{2,2}(M)$ é trivial, ou seja, $U_0 \equiv 0$.
Da limitação de U_α, a menos de subsequência, existe $U_0 \in H_k^{2,2}(M)$ tal que:

$$U_\alpha \rightharpoonup U_0 \quad \text{em} \;\; H_k^{2,2}(M)\,.$$

Observe que, da convergência acima, temos que:

$$\int_M \Delta_g U_\alpha \Delta_g \Theta \, dv_g + \int_M A((\nabla U_\alpha)^\#, (\nabla\Theta)^\#) = o(1), \;\; \forall \; \Theta \in H_k^{2,2}(M)\,.$$

Da convergência dominada, temos:

$$\sum_{i=1}^{k} \int_M \partial_i F_\alpha(U_\alpha)\Theta^i \, dv_g = \sum_{i=1}^{k} \int_M \partial_i F(U)\Theta^i \, dv_g + o(1)\,,$$

e

$$\int_M G_\alpha(x, U_\alpha) \, dv_g = o(1)\,. \tag{2.33}$$

Como $U_0 \equiv 0$, temos que $u^i_\alpha \rightharpoonup 0$ em $H_k^{2,2}(M)$.

Logo, usando o funcional energia J definido em (2.28):

$$\begin{aligned} J(U_\alpha) &= \int_M \left((\Delta_g U_\alpha)^2 + A\left((\nabla U_\alpha)^\#, (\nabla U_\alpha)^\#\right)\right) dv_g - \int_M F(U_\alpha)\, dv_g + o(1) \\ &= L_k(U_\alpha) + o(1)\,, \end{aligned}$$

sendo

$$L_k(U_\alpha) = \int_M \left((\Delta_g U_\alpha)^2 + A\left((\nabla U_\alpha)^\#, (\nabla U_\alpha)^\#\right)\right) dv_g - \int_M F(U_\alpha)\, dv_g\,.$$

Por outro lado, temos que:

$$\begin{aligned} DJ(U_\alpha)\Theta &= \int_M \left(\Delta_g U_\alpha \Delta_g \Theta + A\left((\nabla U_\alpha)^\#, (\nabla \Theta)^\#\right)\right) dv_g \\ &+ \sum_{i=1}^k \int_M \partial_i G_\alpha(x, U_\alpha)\Theta^i\, dv_g - \sum_{i=1}^k \int_M \partial_i F_\alpha(U_\alpha)\Theta^i\, dv_g\,. \end{aligned}$$

Temos também que

$$DL_k(U_\alpha)\Theta = DJ(U_\alpha)\Theta - \sum_{i=1}^k \int_M \partial_i G_\alpha(x, U_\alpha)\Theta^i\, dv_g$$

ou,

$$DL_k(U_\alpha)\Theta = \int_M (\Delta_g U_\alpha \Delta_g \Theta) + A\left((\nabla U_\alpha)^\#, (\nabla \Theta)^\#\right) dv_g - \sum_{i=1}^k \int_M \partial_i F(U_\alpha)\Theta^i\, dv_g\,.$$

Assim, usando (2.33), temos:

$$\begin{aligned} DJ(U_\alpha)\Theta &= \int_M \left(\Delta_g U_\alpha \Delta_g \Theta + A\left((\nabla U_\alpha)^\#, (\nabla \Theta)^\#\right)\right) dv_g - \\ &- \sum_{i=1}^k \int_M \partial_i F_\alpha(U_\alpha)\Theta^i\, dv_g + o(1) \\ &= DL_k(U_\alpha)\Theta + o(1)\,. \end{aligned}$$

Portanto, se $(U_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Palais-Smale para o funcional J, então $(U_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ é também uma sequencia de Palais-Smale para L_k. Como

$$\sum_{i=1}^{k}\int_M \partial_i F(U_\alpha)\Theta^i\, dv_g = o(1)\,,$$

e,

$$\int_M |u_\alpha^i|^{2^\#-2}u_\alpha^i\Theta^i\, dv_g = o(1)\,,$$

obtemos que, se $(U_\alpha)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Palais-Smale para J, então tal sequência também é de Palais-Smale para L_k. Temos então que $(u_\alpha^i)_{\alpha\in\mathbb{N}}$ também é uma sequência de Palais-Smale para L_k^i, com $i = 1, ..., k$, em que

$$L_k^i(u_\alpha^i) = \int_M \left(\left(\Delta_g u_\alpha^i\right)^2 + A_i\left((\nabla u_\alpha^i)^\#, (\nabla u_\alpha^i)^\#\right)\right)\, dv_g - \frac{1}{2^\#}\int_M |u_\alpha^i|^{2^\#}\, dv_g\,.$$

Então:

$$DL_k^i(u_\alpha^i)\Theta^i = \int_M \left(\Delta_g u_\alpha^i\Delta_g\Theta^i + A_i\left((\nabla u_\alpha^i)^\#, (\nabla\Theta^i)^\#\right)\right)\, dv_g - \int_M |u_\alpha^i|^{2^\#-2}u_\alpha^i\Theta^i\, dv_g\,.$$

Desta forma, para cada i existe um k_i e uma bubbles escalar $\left(B_{j,\alpha}^i\right)_\alpha$, em que $j = 1, ..., k_i$, tal que, a menos de subsequência

$$u_\alpha^i = u_0^1 + \sum_{j=1}^{k_i} B_{j,\alpha}^i + R_\alpha^i\,,$$

e,

$$L_\alpha^i(u_\alpha^i) = \sum_{i=1}^{k_i} E(u_\alpha^i) + o(1)\,,$$

sendo $u_\alpha^i \in\ D_2^2(\mathbb{R}^n)$ solução não trivial de

$$-\Delta_\xi^2\, u = |u|^{2^\#-2}u \qquad \text{em} \qquad \mathbb{R}^n\,,$$

$\left(B_{j,\alpha}^i\right)_\alpha$ é uma bubbles escalar e

$$E(u_\alpha^i) = \frac{1}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\Delta_g u_\alpha^i\right)^2\, dx - \frac{1}{2^\#}\int_{\mathbb{R}^n}|u_\alpha^i|^{2^\#}\, dx\,.$$

Finalizamos colocando $l = \sum_{i=1}^k k_i$, pois, para cada função coordenada da sequência $(U_\alpha)_\alpha \in H_k^{2,2}(M)$ temos uma decomposição em bubbles. Assim, se $U_\alpha = (u_\alpha^1, \ldots, u_\alpha^k)$, temos:

$$U_\alpha = \sum_{j=1}^{l} B_{j,\alpha} + R_\alpha$$

em que $B_{j,\alpha} = \left(B^1_{j,\alpha}, \cdots, B^{k_i}_{j,\alpha}\right)$ é uma k-bubbles e $R_\alpha = \left(R^1_\alpha, \cdots, R^k_\alpha\right)$ é tal que

$$R_\alpha \to 0 \quad \text{em } H^{2,2}_k(M)$$

□

2.4 Estimativas Pontuais

A decomposição em bubbles nos dá condições de adicionar propriedades às sequências de soluções limitadas em $H^{2,2}_k(M)$. Com esse resultado, acrescentamos as estimativas pontuais para $(U_\alpha)_\alpha$.

Teorema 16 (Estimativas Pontuais)**.** *Sejam (M,g), G_α, F_α como no teorema da decomposição em bubbles (teorema 15). Seja U_α uma sequência limitada de soluções de*

$$-\Delta^2_g U + \mathrm{div_g}\left(A(\nabla U)^\#\right) + \nabla_U G_\alpha(x,U) = \nabla F_\alpha(U) \qquad em \qquad M\,, \tag{2.34}$$

convergindo a 0 em $H^{2,2}_k(M)$. Considerando a decomposição em bubbles do teorema 15, então existe, a menos de subsequência, uma constante $C>0$, independente de α tal que

$$\left(\min_{i,j}\ d_g\left(x^i_{j,\alpha}, x\right)\right)^{\frac{n-4}{2}} \sqrt{\sum_{i=1}^k (u^i_\alpha)^2} \leq\ C\,,$$

para todo α e para todo x, em que $x^i_{j,\alpha}$ são os centros dos bubbles $B_{j,\alpha}$. E particular os $|U_\alpha|$ são uniformemente limitados em qualquer subconjunto compacto de $M \setminus \{x_{j,0}\}^l_{j=1}$ e $u^i_\alpha \to 0$ em $C^0_{loc}(M \setminus \{x_{j,0}\}^l_{j=1})$ em que $x_{j,0}$ é o limite de $x^i_{j,\alpha}$.

Demonstração. Definimos

$$\Phi_\alpha(x) =\ d_g\left(x^i_{j,\alpha}, x\right) \qquad \text{e} \qquad \Psi_\alpha(x) = \Phi_\alpha(x)^{\frac{n-4}{2}} \left(\sum_{i=1}^k \left(u^i_\alpha(x)\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}\,,$$

em que os $x^i_{j,\alpha}$ são os centros dos bubbles $B_{j,\alpha}$.
Faremos a demonstração por absurdo. Inicialmente, considere a sequência $(y_\alpha)_\alpha$ formada por pontos de máximos dos Ψ_α e tal que:

$$\Psi_\alpha(y_\alpha) = \max_M\ \Psi_\alpha(x) \qquad \text{e} \qquad \lim_{\alpha\to+\infty} \Psi_\alpha(y_\alpha) = +\infty\,.$$

A menos de subsequência podemos supor que:

$$|u^{i_0}_\alpha(y_\alpha)| \geq |u^i_\alpha(y_\alpha)|\,,$$

para algum $i_0 = 1, ..., k$ e para todo i. Seja

$$\mu_\alpha = |u_\alpha^{i_0}(y_\alpha)|^{-\frac{2}{n-4}} \ ,$$

então $\mu_\alpha \to 0$ quando $\alpha \to +\infty$. Então, pela definição de y_α

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \frac{d_g\left(x_{j,\alpha}^i, y_\alpha\right)}{\mu_\alpha} = +\infty \, . \tag{2.35}$$

De fato, para demonstrar (2.35), desenvolvemos a expressão de Ψ_α:

$$\begin{aligned}
\Psi_\alpha(y_\alpha) &= \left(\sum_{i=1}^{k} |u_\alpha^i(y_\alpha)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \Phi_\alpha\left(y_\alpha\right)^{\frac{n-4}{2}} \\
&\leq \left(k|u_\alpha^{i_0}(y_\alpha)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \ d_g\left(x_{j,\alpha}^i, y_\alpha\right)^{\frac{n-4}{2}} \\
&= \sqrt{k}|u_\alpha^{i_0}(y_\alpha)| d_g\left(x_{j,\alpha}^i, y_\alpha\right)^{\frac{n-4}{2}} \\
&= \sqrt{k}\left(\frac{d_g\left(x_{j,\alpha}^i, y_\alpha\right)}{\mu_\alpha}\right)^{\frac{n-4}{2}} .
\end{aligned}$$

Como $\Psi_\alpha(y_\alpha) \to \infty$ quando $\alpha \to +\infty$, obtemos (2.35).

Seja $0 < \delta < i_g(M)$, em que i_g é o raio de injetividade de (M, g). Para $i = 1, ..., k$ na bola Euclideana $B_0\left(\delta\mu_\alpha^{-1}\right)$ de centro 0 e raio $\delta\mu_\alpha^{-1}$, definimos a função:

$$w_\alpha^i(x) = \mu_\alpha^{\frac{n-4}{2}} u_\alpha^i\left(\exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x)\right) \ , \tag{2.36}$$

em que $\exp_{y_\alpha}$ é a aplicação exponencial em y_α. Dado $R > 0$ e $x \in B_0(R)$ a bola euclideana centrada em 0 e raio R. De (2.35) e (2.36) temos:

$$\begin{aligned}
|w_\alpha^i(x)| &\leq \mu_\alpha^{\frac{n-4}{2}} \left(\sum_{j=1}^{k} |u_\alpha^j\left(\exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x)\right)|^2\right)^{\frac{1}{2}} \\
&\leq \mu_\alpha^{\frac{n-4}{2}} \frac{\Psi_\alpha\left(\exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x)\right)}{\Phi_\alpha\left(\exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x)\right)^{\frac{n-4}{2}}} .
\end{aligned}$$

Logo,

$$|w_\alpha^i(x)| \leq \mu_\alpha^{\frac{n-4}{2}} \frac{\Psi_\alpha\left(\exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x)\right)}{\Phi_\alpha\left(\exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x)\right)^{\frac{n-4}{2}}} \, , \tag{2.37}$$

para todo i e todo α suficientemente grande. Para todos i, j e x na bola Euclideana $B_0(R)$ de centro 0 e raio $R > 0$, obtemos as desigualdades:

$$
\begin{aligned}
d_g\left(x^i_{j,\alpha},\, \exp_{y_\alpha(\mu_\alpha x)}\right) &\geq d_g\left(x^i_{j,\alpha},\, y_\alpha\right) - d_g\left(y_\alpha,\, \exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x)\right)\\
&\geq d_g\left(x^i_{j,\alpha},\, y_\alpha\right) - R\mu_\alpha\\
&= \left(\frac{d_g\left(x^i_{j,\alpha},\, y_\alpha\right)}{\Phi_\alpha(y_\alpha)} - \frac{R\mu_\alpha}{\Phi_\alpha(y_\alpha)}\right)\Phi_\alpha(y_\alpha)\\
&\geq \left(1 - \frac{R\mu_\alpha}{\Phi_\alpha(y_\alpha)}\right)\Phi_\alpha(y_\alpha)\,.
\end{aligned}
$$

Da desigualdade acima, de (2.37) e das definições de y_α e de Ψ_α, obtemos:

$$
\begin{aligned}
|w^i_\alpha(x)| &\leq \mu_\alpha^{\frac{n-4}{2}} \frac{\Psi_\alpha\left(\exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x)\right)}{\Phi_\alpha\left(\exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x)\right)^{\frac{n-4}{2}}}\\
&\leq \mu_\alpha^{\frac{n-4}{2}} \frac{\Psi_\alpha(y_\alpha)}{\Phi_\alpha\left(\exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x)\right)^{\frac{n-4}{2}}}\\
&\leq \mu_\alpha^{\frac{n-4}{2}} k^{\frac{1}{2}} |u^{i_0}_\alpha(y_\alpha)| \frac{\Phi_\alpha(y_\alpha)^{\frac{n-4}{2}}}{\Phi_\alpha\left(\exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x)\right)^{\frac{n-4}{2}}}\\
&\leq k^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{R\mu_\alpha}{\Phi_\alpha(y_\alpha)}\right)^{-\frac{n-4}{2}}.
\end{aligned}
$$

Portanto,

$$
|w^i_\alpha(x)| \leq k^{\frac{1}{2}} \left(1 - \frac{R\mu_\alpha}{\Phi_\alpha(y_\alpha)}\right)^{-\frac{n-4}{2}}, \tag{2.38}
$$

para todo $x \in\ B_0(R)$ e para qualquer $i = 1, \ldots, k$ quando α é suficientemente grande. Em particular, de (2.35) e (2.38), a menos de subsequência, obtemos a limitação uniforme dos w^i_α em qualquer subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$ para todo i.
Seja $W_\alpha = \left(w^1_\alpha, ..., w^k_\alpha\right)$. Os W_α são soluções de

$$
-\Delta^2_{g_\alpha} W_\alpha + \mu^2_\alpha \operatorname{div_g}\left(A(\nabla W_\alpha)^\#\right) + \frac{1}{2}\mu^4_\alpha \nabla_{g_\alpha, U}\widetilde{G}(x, W_\alpha) = \frac{1}{2^\#}\nabla_{g_\alpha} F(W_\alpha)\,, \tag{2.39}
$$

em que

$$
\widetilde{G}(x, U) = G\left(\exp_{y_\alpha}(\mu_\alpha x), U\right) \quad e \quad g_\alpha = \left(\exp^*_{y_\alpha} g\right)(\mu_\alpha x)\ ,
$$

g_α é o pull-back de g. Seja ξ a métrica Euclideana. Para cada compacto $K \subset \mathbb{R}^n$, como $\mu_\alpha \to 0$, segue que $g_\alpha \to \xi$ e, $C^2(K)$ quando $\alpha \to +\infty$.
Então, da Teoria Elíptica, segue de (2.38) que os w^i_α são uniformemente limitados em $C^{2,\theta}_{loc}(\mathbb{R}^n)$, $0 < \theta < 1$, para todo i. Em particular, a menos de subsequência, podemos

assumir que $w_\alpha^i \to w_i$ em $C^2_{loc}(\mathbb{R}^n)$ quando $\alpha \to +\infty$. Segue que os w_i são limitados em $\mathbb{R}^n$ por (2.37) e são tais que $|w^{i_0}(0)| = 1$ por construção. Mais ainda, podemos considerar os w_i pertencentes ao espaço $D_2^2(\mathbb{R}^n)$ e $w_i \in L^{2^\#}(\mathbb{R}^n)$. Seja $W = (w_1, ..., w_k) \neq 0$. Para todo i e $R > 0$, temos:

$$\int_{B_{y_\alpha}(R\mu_\alpha)} |u_\alpha^i|^{2^\#}\, dv_g = \int_{B_0(R)} |w_\alpha^i|^{2^\#}\, dv_{g_\alpha}\,.$$

Segue da convergência dominada que, para todo $R > 0$:

$$\int_{B_{y_\alpha}(R\mu_\alpha)} |u_\alpha^i|^{2^\#}\, dv_g = \int_{\mathbb{R}^n} |w^i|^{2^\#}\, dx + \varepsilon_R(\alpha)\,, \tag{2.40}$$

em que $\varepsilon_R(\alpha)$ é tal que:

$$\lim_{R\to+\infty} \lim_{\alpha\to+\infty} \varepsilon_R(\alpha) = 0\,. \tag{2.41}$$

Da decomposição em bubbles, temos que

$$\begin{aligned}\int_{B_{y_\alpha}(R\mu_\alpha)} |u_\alpha^i|^{2^\#}\, dv_g &= \int_{B_{y_\alpha}(R\mu_\alpha)} \left| u_0^i + \sum_{i=1}^{m_i} B_{j,\alpha}^i + R_\alpha \right|^{2^\#} dv_g \\ &\leq 2^{2(2^\#-1)} \sum_{i=1}^{m_i} \int_{B_{y_\alpha}(R\mu_\alpha)} |B_{j,\alpha}^i|^{2^\#}\, dv_g + o(1)\,.\end{aligned}$$

Portanto,

$$\int_{B_{y_\alpha}(R\mu_\alpha)} |u_\alpha^i|^{2^\#}\, dv_g \leq c \sum_{i=1}^{m_i} \int_{B_{y_\alpha}(R\mu_\alpha)} |B_{j,\alpha}^i|^{2^\#}\, dv_g + o(1)\,, \tag{2.42}$$

em que $o(1) \to 0$ quando $\alpha \to +\infty$ e $c > 0$ é independente de α e de R.
Relembremos que k-bubbles são funções vetoriais em que uma das funções coordenadas é uma bubbles escalar e as demais são nulas. Temos, de (2.35) , que

$$\lim_{\alpha\to+\infty} \int_{B_{y_\alpha}(R\mu_\alpha)} |B_{j,\alpha}^i|^{2^\#}\, dv_g = 0\,,$$

para todo $R > 0$ e $i = 1, ..., k$. De (2.40) e de (2.42) temos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} |w^i|^{2^\#}\, dx = \varepsilon_R(\alpha)\,.$$

Usando (2.41) e fazendo $\alpha \to +\infty$ e $R \to +\infty$, temos:

$$\int_{\mathbb{R}^n} |w^i|^{2^\#}\, dx = 0\,,$$

para todo $i = 1, \ldots, k$. Isso leva a uma contradição, pois $W \neq 0$.

$\square$

2.5 Concentração L^2

No que segue desta seção, consideraremos $(U_\alpha)_\alpha$ uma sequência de soluções de

$$\Delta_g^2 u_\alpha^i - \mathrm{div_g}(A_i(\nabla u_\alpha^i)^\#) + \frac{1}{2}\partial_i G(x, U_\alpha) = \frac{1}{2^\#}\partial_i F(U_\alpha)\,. \tag{2.43}$$

em que $G : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ é uma função de classe C^1, positiva e 2-homogênea e $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ é uma função positiva, de classe C^1 e $2^\#$-homogênea. Para alguns dos resultados que seguem, devido a particularidades técnicas, utilizaremos casos particulares de (2.43), que comentaremos mais adiante.

Os pontos de *blow up*, ou de concentração da sequência $(U_\alpha)_\alpha$ retêm grande parte da informação da sequência. Essa propriedade é denominada concentração L^2.

Observação. Consideramos $\mathcal{S}$ o conjunto dos pontos de blow-up geométricos, definido como

$$\mathcal{S} = \left\{ \lim_{\alpha\to+\infty} x_{j,\alpha}^i;\ i = 1, \ldots, l \right\}. \tag{2.44}$$

em que l é como no teorema da decomposição em bubbles.

Antes de discutir a concentração L^2, provaremos algumas desigualdades. Seja A uma soma de (2,0)-tensores. Seja também $U = (u_1, ..., u_k)$ uma k-aplicação em $H_k^{2,2}(M)$. Dizemos que U satisfaz

$$-\Delta_g^2 u_i + \mathrm{div_g}(A_i(\nabla u_i)^\#) + \partial_i G(x, U) \le \partial_i F(U) \tag{2.45}$$

no sentido de distribuições para todo $i = 1, ..., k$ e $\Phi = (\varphi_1, ..., \varphi_k)$ em $H_k^{2,2}(M)$

$$\int_M (\Delta_g u_i, \Delta_g \varphi_i)\ dv_g + \int_M A_i\left((\nabla u_i)^\#, (\nabla\varphi_i)^\#\right)\ dv_g + \int_M \partial_i G(x,U)\varphi_i \le \int_M \partial_i F(U)\varphi_i\, dv_g$$

em que $(\Delta_g u_i, \Delta_g \varphi_i)$ é o produto escalar pontual de ∇u_i e $\nabla \varphi_i$.

Para o lema abaixo, consideraremos a coercividade do operador $\hat{\psi}$ (veja seção 1.5).

Lema 17. *Considere* $U_\alpha = \left(u_\alpha^1, ..., u_\alpha^k\right)$ *solução do* (2.43), *e seja* $G(x,U) = \sum_{i,j=1}^k A_{ij}(x)u_i(x)u_j(x)$, *em que* $(A_{ij}(x))$ *é positiva como forma bilinear e simétrica e seja* $\hat{\psi}$ *coercivo. Existe, então,* $C > 0$ *tal que, a menos de subsequência,*

$$\int_M |U_\alpha|\, dv_g \leq\, C \int_M |U_\alpha|^{2^\#-1}\, dv_g\,,$$

para todo α, *em que* $|U_\alpha| = \sum_{i=1}^k |u_\alpha^i|$ *e* $|U_\alpha|^{2^\#-1} = \sum_{i=1}^k |u_\alpha^i|^{2^\#-1}$.

Demonstração. Seja $f_\alpha^i = sign(u_\alpha^i)$ uma função dada por:

$$f_\alpha^i = \chi_{\{u_\alpha^i>0\}} - \chi_{\{u_\alpha^i<0\}}\,, \tag{2.46}$$

em que χ_A é a função característica de A. Então,

$$f_\alpha^i u_\alpha^i = |u_\alpha^i|\,,$$

para todo α e para todo i. Observe que temos $|f_\alpha^i| \leq 1$ para todo α e para todo i.
Da coercividade (veja seção 1.5, p. 38), temos:

$$\hat{\psi}(U_\alpha) \geq C\|U_\alpha\|^2_{H_k^{2,2}(M)}\,, \tag{2.47}$$

em que,

$$\hat{\psi}(U) = \int_M (\Delta_g U)^2\, dv_g + \int_M A\left((\nabla U)^\#, (\nabla U)^\#\right)\, dv_g + \int_M G(x,U)\, dv_g\,. \tag{2.48}$$

Por (2.47), existe uma solução U'_α para o problema de minimização consistindo em achar um mínimo para $\hat{\psi}(U)$ sob a restrição $\int_M (f_\alpha, U)\, dv_g = 1$ em que $(f_\alpha, U) = \sum_{i=1}^k f_\alpha^i u_i$ e $U = (u_1, ..., u_k)$, isto é, os u_i são componentes de U e $f_\alpha = (f_\alpha^1, \ldots, f_\alpha^k)$. Se λ_α é o mínimo de $\hat{\psi}(U)$ em que $U \in H_k^{2,2}(M)$ satisfaz a restrição $\int_M (f_\alpha, U)\, dv_g = 1$, segue de (2.47), que $\lambda_\alpha > 0$. Seja $\hat{U}_\alpha = \lambda_\alpha^{-1} U'_\alpha$. Então, $\hat{U}_\alpha$ é solução do sistema:

$$-\Delta_g^2 \hat{u}_\alpha^i + \mathrm{div_g}\left(A_i(\nabla \hat{u}_\alpha^i)^\#\right) + \sum_{j=1}^k A_{ij} u_\alpha^j = f_\alpha^i\,, \tag{2.49}$$

para todo i e para todo α, em que os $\hat{u}_\alpha^i$ são componentes de $\hat{U}_\alpha$ e f_α^i são como em (2.46). Multiplicando (2.49) por $\hat{u}_\alpha^i$, integrando sobre M e somando em i, obtemos, juntamente com (2.47), que o quadrado da norma $H_k^{2,2}(M)$ de $\hat{U}_\alpha$ é uniformemente controlado pela norma L^1 dos $|\hat{U}_\alpha|$. Ou seja, temos

$$\|\hat{U}_\alpha\|_2^2 \leq \|U_\alpha\|^2_{H_k^{2,2}(M)} \leq \|U_\alpha\|_1$$

Em particular, os $\hat{u}_\alpha^i$ são uniformemente limitados em L^2. Pela teoria elíptica padrão, os $\hat{u}_\alpha^i$ estão nos espaços de Sobolev $H_2^q(M)$ para todo q. Daí, os $\hat{u}_\alpha^i$ são contínuos.
Observe que, se $G(x,U) = \sum_{i,j=1}^k A_{ij} u_i(x) u_j(x)$, então $\partial_i G(x,U) = \sum_{j=1}^k A_{ij} u_j(x)$.
Pela discussão acima e da teoria elíptica, temos que existe uma constante $C_0 > 0$ tal que $|\hat{u}_\alpha^i| \leq C_0$ em M para todo α e para todo i. E, como F é $2^\#$-homogênea, $\partial_i F$ é $2^\# - 1$ homogênea. De (2.49) e de (2.1):

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k}\int_M |u_\alpha^i|\, dv_g &= \sum_{i=1}^{k}\int_M u_\alpha^i f_\alpha^i\, dv_g \\
&= \sum_{i=1}^{k}\int_M \left(-\Delta_g^2 \hat{u}_\alpha^i + \mathrm{div_g}\left(A_i(\nabla \hat{u}_\alpha^i)^{\#}\right) + \sum_{j=1}^{k} A_{ij}\hat{u}_\alpha^j(x)\right) u_\alpha^i\, dv_g \\
&= \sum_{i=1}^{k}\int_M \left(-\Delta_g^2 u_\alpha^i + \mathrm{div_g}\left(A_i(\nabla u_\alpha^i)^{\#}\right) + \sum_{j=1}^{k} A_{ij}u_\alpha^j(x)\right) \hat{u}_\alpha^i\, dv_g \\
&\leq \sum_{i=1}^{k}\int_M \partial_i F(U_\alpha)|\hat{u}_\alpha^i|\, dv_g \\
&\leq C_0\sum_{i=1}^{k}\int_M \partial_i F(U_\alpha)\, dv_g \\
&\leq C\sum_{i=1}^{k}\int_M |u_\alpha^i|^{2^{\#}-1}\, dv_g
\end{aligned}
$$

para todo α. Logo,

$$\int_M |U_\alpha|\, dv_g \leq C\int_M |U_\alpha|^{2^{\#}-1}\, dv_g\,,$$

para todo α, em que $C > 0$ não depende de α. Isso finaliza a demonstração. □

Consideremos agora $U_\alpha \in H_k^{2,2}(M)$ solução fraca de (2.1). Suponhamos que a sequência $(U_\alpha)_\alpha$ seja limitada em $H_k^{2,2}(M)$.

Antes de provarmos a concentração L^2, precisaremos do seguinte lema abaixo. Em dimensões maiores ou iguais a 9 esse lema é consequência da desigualdade de Hölder e do fato que $\|U_\alpha\|_2 \to 0$. Em dimensão 8 usaremos a decomposição em bubbles do teorema 15.

Lema 18. *Seja $n \geq 8$, então*

$$\int_M |U_\alpha|^{2^{\#}-1} = o(1)\left(\int_M |U_\alpha|^2\right)^{\frac{1}{2}}\,,$$

em que $o(1) \to 0$ quando $\alpha \to \infty$.

No que segue, consideramos B_δ como a união das bolas $B_{x_i}(\delta)$, $x_i \in \mathcal{S}$, conjunto definido em (2.44), em que $i = 1, \ldots, l$ e l é como no teorema da decomposição em bubbles.

Demonstração. Dividiremos a demonstração em duas partes. Primeiro provaremos o resultado quando n=8. Em seguida, demonstraremos o caso $n > 8$.
Seja $n = 8$ e considere:

$$
\begin{aligned}
\frac{\displaystyle\int_M |U_\alpha|^{2^\#-1}\, dv_g}{\sqrt{\displaystyle\int_M |U_\alpha|^2\, dv_g}} &= \sum_{i=1}^{k} \frac{\displaystyle\int_M |u_\alpha^i|^{2^\#-1}\, dv_g}{\sqrt{\displaystyle\int_M |U_\alpha|^2\, dv_g}}\,, \\
&\leq \sum_{i=1}^{k} \frac{\displaystyle\int_M |u_\alpha^i|^{2^\#-1}\, dv_g}{\sqrt{\displaystyle\int_M |u_\alpha^i|^2\, dv_g}}\,. \qquad (2.50)
\end{aligned}
$$

Voltemos à decomposição em bubbles dos U_α em $H_k^{2,2}(M)$, dado pelo teorema 15. Sejam $x_{j,\alpha}^i$ e $\mu_{j,\alpha}^i$ os centros e os pesos dos 1-bubbles $(B_{j,\alpha}^i)_\alpha$ envolvidos nessa decomposição de cada k-bubbles $(B_\alpha)_\alpha$ dado por (2.32). Sejam $R > 0$ e l como no teorema da decomposição em bubbles. Definimos $\Omega_{i,\alpha}(R)$ como a união de $i = 1$ a $i = l$ das bolas geodésicas centradas em $x_{j,\alpha}^i$ e de raio $R\mu_{j,\alpha}^i$:

$$\Omega_{i,\alpha}(R) = \cup_{j=1}^{l} B_{x_{j,\alpha}^i}(R\mu_{j,\alpha}^i)$$

Fixamos $i = 1, ..., k$. Como $2^\# = 4$ quando $n = 8$, obtemos, pela desigualdade de Hölder:

$$\int_M \left(u_\alpha^i\right)^{2^\#-1}\, dv_g \leq \int_{\Omega_{i,\alpha}(R)} \left(u_\alpha^i\right)^{2^\#-1}\, dv_g + \sqrt{\int_{M\setminus\Omega_{i,\alpha}(R)} \left(u_\alpha^i\right)^{2^\#}\, dv_g}\sqrt{\int_M \left(u_\alpha^i\right)^2\, dv_g}\,.$$

Logo,

$$\frac{\displaystyle\int_M (u_\alpha^i)^{2^\#-1}\, dv_g}{\left(\displaystyle\int_M (u_\alpha^i)^2\, dv_g\right)^{\frac{1}{2}}} \leq \frac{\displaystyle\int_{\Omega_{i,\alpha}(R)} \left(u_\alpha^i\right)^{2^\#-1}\, dv_g}{\sqrt{\displaystyle\int_M \left(u_\alpha^i\right)^2\, dv_g}} + \sqrt{\int_{M\setminus\Omega_{i,\alpha}(R)} \left(u_\alpha^i\right)^{2^\#}\, dv_g}\,, \qquad (2.51)$$

Seja $\varphi \in C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$, em que $C_0^\infty(\mathbb{R}^n)$ é o conjunto das funções suaves com suporte compacto em $\mathbb{R}^n$. Consideremos $\varphi_{j,\alpha}^i$ uma função definida pela equação:

$$\varphi_{j,\alpha}^i(x) = \left(\mu_{j,\alpha}^i\right)^{-\frac{n-4}{2}} \varphi((\mu_{j,\alpha}^i)^{-1} \exp_{x_{j,\alpha}^i}(x)) \qquad (2.52)$$

Da decomposição em bubbles em $H_k^{2,2}(M)$, obtemos por um cálculo direto, para qualquer $R > 0$:

$$(i) \quad \int_{M\setminus\Omega^i_{j,\alpha}(R)} \left(B^i_{j,\alpha}\right)^{2^\#} dv_g = \epsilon_R(\alpha) \tag{2.53}$$

$$(ii) \quad \int_{\Omega^i_{j,\alpha}(R)} \left(B^i_{j,\alpha}\right)^{2^\#-1} \varphi^i_{j,\alpha}\, dv_g = \int_{B_0(R)} (u)^{2^\#-1} \varphi\, dx + o(1) \tag{2.54}$$

$$(iii) \quad \int_{\Omega^i_{j,\alpha}(R)} \left(B^i_{j,\alpha}\right)^2 (\varphi^i_{j,\alpha})^{2^\#-2}\, dv_g = \int_{B_0(R)} (u)^2 \varphi^{2^\#-2}\, dv_x + o(1)\,,$$

em que u é como em (2.30), $\Omega^i_{j,\alpha}(R) = B_{x^i_{j,\alpha}}(R\mu^i_{j,\alpha})$, $o(1) \to 0$ quando $\alpha \to +\infty$ e em que

$$\lim_{R\to+\infty} \lim_{\alpha\to+\infty} \epsilon_R(\alpha) = 0\,, \tag{2.55}$$

De (i), obtemos:

$$\int_{M\setminus\Omega_{i,\alpha}(R)} \left(u^i_\alpha\right)^{2^\#} dv_g = \epsilon_R(\alpha) \tag{2.56}$$

Em que $\Omega_{i,\alpha}$ é como definido anteriormente e $\epsilon_R(\alpha)$ é tal que (2.55) vale. De agora em diante, seja φ em (2.52) tal que $\varphi = 1$ na $B_0(R)$. Assim,

$$\int_{\Omega_{i,\alpha}(R)} \left(u^i_\alpha\right)^{2^\#-1} dv_g \leq \sum_{j=1}^{l} \left(\mu^i_{j,\alpha}\right)^{\frac{n-4}{2}} \int_{\Omega^i_{j,\alpha}(R)} \left(u^i_\alpha\right)^{2^\#-1} \varphi^i_{j,\alpha}\, dv_g$$

Da decomposição em bubbles e de (ii):

$$\begin{aligned} \int_{\Omega^i_{j,\alpha}(R)} \left(u^i_\alpha\right)^{2^\#-1} \varphi^i_{j,\alpha}\, dv_g &\leq C \int_{\Omega^i_{j,\alpha}} \left(B^i_{j,\alpha}\right)^{2^\#-1} \varphi^i_{j,\alpha}\, dv_g + o(1) \\ &\leq C \int_{B_0(R)} u^{2^\#-1}\, dx + o(1) \end{aligned}$$

em que $o(1) \to 0$ quando $\alpha \to +\infty$ e $C > 0$ não depende de α ou R. Em particular, temos:

$$\int_{\Omega_{i,\alpha}(R)} \left(u^i_\alpha\right)^{2^\#-1} dv_g \leq \left(C \int_{B_0(R)} u^{2^\#-1}\, dx + o(1)\right) \sum_{j=1}^{l} \left(\mu^i_{j,\alpha}\right)^{\frac{n-4}{2}} \tag{2.57}$$

em que $o(1) \to 0$ quando $\alpha \to +\infty$. Independente também temos:

$$\begin{aligned} \int_M (u^i_\alpha)^2\, dv_g &\geq \int_{\Omega^i_{j,\alpha}(R)} (u^i_\alpha)^2\, dv_g \\ &\geq \left(\mu^i_{j,\alpha}\right)^{n-4} \int_{\Omega^i_{j,\alpha}(R)} (u^i_\alpha)^2 \left(\varphi^i_{j,\alpha}\right)^{2^\#-2} dv_g \end{aligned}$$

Aqui, $2^\# - 2 = 2$, pois $n = 8$. Juntamente com a decomposição em bubbles, temos

$$\begin{aligned}\int_{\Omega^i_{j,\alpha}(R)} (u^i_\alpha)^2 \left(\varphi^i_{j,\alpha}\right)^{2^\#-2} dv_g &= \int_{\Omega^i_{j,\alpha}(R)} \left(\sum_{m=1}^{l} B^i_{m,\alpha}\right)^2 \left(\varphi^i_{j,\alpha}\right)^{2^\#-2} dv_g + o(1) \\ &\geq \int_{\Omega^i_{j,\alpha}(R)} \left(B^i_{j,\alpha}\right)^2 \left(\varphi^i_{j,\alpha}\right)^{2^\#-2} dv_g\,,\end{aligned}$$

De (iii) obtemos que,

$$\int_{\Omega^i_{j,\alpha}(R)} (u^i_\alpha)^2 \left(\varphi^i_{j,\alpha}\right)^{2^\#-2} dv_g \geq \int_{B_0(R)} u^2\, dx + o(1)\,.$$

Daí, para qualquer j, temos:

$$\int_M (u^i_\alpha)^2\, dv_g \geq \left(\mu^i_{j,\alpha}\right)^{n-4} \left(\int_{B_0(R)} u^2\, dx + o(1)\right).$$

E podemos concluir que:

$$\int_M \left(u^i_\alpha\right)^2 dv_g \geq \left(\max_{j=1,\ldots,l} \mu^i_{j,\alpha}\right)^{n-4} \left(\int_{B_0(R)} u^2\, dx + o(1)\right)\,, \tag{2.58}$$

em que $o(1) \to 0$ quando $\alpha \to +\infty$. Denotamos:

$$R(\alpha) = \frac{\displaystyle\int_M |u^i_\alpha|^{2^\#-1}\, dv_g}{\displaystyle\int_M |u^i_\alpha|\, dv_g}\,.$$

Então, de (2.51), (2.50), (2.56), (2.57), (2.58), obtemos:

$$\limsup_{\alpha\to+\infty} R(\alpha) \leq \epsilon_R + C\frac{\displaystyle\int_{B_0(R)} u^{2^\#-1}\, dx}{\sqrt{\displaystyle\int_{B_0(R)} u^2\, dx}}\,. \tag{2.59}$$

em que $\epsilon_R \to 0$ quando $R \to +\infty$ e $C > 0$ não depende de R. Observe que temos:

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{B_0(R)} u^{2^\#-1}\, dx = \int_{\mathbb{R}^n} u^{2^\#-1}\, dx < +\infty\,.$$

Por outro lado, quando $n = 8$,

$$\lim_{R\to+\infty} \int_{B_0(R)} u^{2^\#-1}\, dx = +\infty\,.$$

Da equação (2.59), obtemos então que $R(\alpha) \to 0$ quando $\alpha \to +\infty$. Assim obtemos o resultado para $n = 8$.

Por conveniência, seja $\tilde{U}_\alpha = \|U_\alpha\|_{2^\#}^{-1} U_\alpha$, de modo que $\displaystyle\int_M |\tilde{U}_\alpha|^{2^\#}\, dv_g = 1$.
Provaremos o resultado agora para $n > 8$. Faremos a demonstração em dois passos: $n \geq 12$ e $9 \leq n < 12$.
Seja $n \geq 12$. Observe que $2^\# - 1 = \frac{n+4}{n-4} = 1 + \frac{8}{n-4}$. Então $1 < 2^\# - 1 \leq 2$. Segue da desigualdade de Hölder:

$$\int_M |\tilde{U}_\alpha|^{2^\#-1}\, dv_g \leq C \left(\int_M |\tilde{U}_\alpha|^2\, dv_g \right)^{\frac{2^\#-1}{2}}, \tag{2.60}$$

em que $C > 0$ é independente de α. Assim,

$$\frac{\displaystyle\int_M |\tilde{U}_\alpha|^{2^\#-1}\, dv_g}{\left(\displaystyle\int_M |\tilde{U}_\alpha|^2\, dv_g \right)^{\frac{1}{2}}} \leq C \left(\int_M |\tilde{U}_\alpha|^2\, dv_g \right)^{\frac{2^\#-2}{2}} = o(1)\,. \tag{2.61}$$

Se $9 \leq n < 12$, então $2 < 2^\# - 1 < 2^\#$. Da desigualdade de Hölder obtemos:

$$\begin{aligned} \int_M |\tilde{U}_\alpha|^{2^\#-1}\, dv_g &\leq \left(\int_M |\tilde{U}_\alpha|^2\, dv_g \right)^{\frac{n-4}{8}} \left(\int_M |\tilde{U}_\alpha|^{2^\#}\, dv_g \right)^{\frac{12-n}{8}} \\ &\leq \left(\int_M |\tilde{U}_\alpha|^2\, dv_g \right)^{\frac{n-4}{8}}, \end{aligned} \tag{2.62}$$

pois $\|\tilde{U}_\alpha\|_{2^\#} = 1$. Temos então que:

$$\frac{\displaystyle\int_M |\tilde{U}_\alpha|^{2^\#-1}\, dv_g}{\left(\displaystyle\int_M |\tilde{U}_\alpha|^2\, dv_g \right)^{\frac{1}{2}}} \leq \left(\int_M |\tilde{U}_\alpha|^2\, dv_g \right)^{\frac{n-8}{8}} = o(1)\,. \tag{2.63}$$

Como temos $\tilde{U}_\alpha \to 0$ em $L^2(M)$ quando $\alpha \to +\infty$, de (2.61) e (2.63) segue o resultado, isto é, $o(1) \to 0$, quando $\alpha \to +\infty$.

$\square$

No resultado a seguir consideramos um caso particular de (2.43). Consideramos $G : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função de classe C^1, 2-homogênea e positiva, dada por:

$$G(x,t) = \sum_{ij}^{k} A_{ij} t_i t_j$$

em que (A_{ij}) é simétrica e positiva como forma bilinear. Também consideramos que $A_i = b_i g$, em que g é a métrica e $b_i \in \mathbb{R}$ (A_i é um

(2,0)-tensor como na seção 1.2). Assim, no lema a seguir, consideramos o seguinte sistema:

$$-\Delta_g^2 u^i + b_i \Delta_g u^i + \sum_{j=1}^{k} A_{ij} u_j = \partial_i F(U) \tag{2.64}$$

para $i = 1, \ldots, k$ e $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ é uma função positiva, de classe C^1 e $2^{\#}$-homogênea.

Do lema a seguir conseguremos uma útil estimativa que utilizaremos para a concentração L^2.

Lema 19. *Sejam U_α e U_0 como na decomposição em bubbles (teorema 15). Suponha que, para cada $i = 1, \ldots, k$, $A_i = b_i g$, em que g é a métrica e $b_i \in \mathbb{R}$. Para todo $\delta > 0$ existe $C > 0$ tal que, a menos de subsequência,*

$$\max_{M \backslash B_\delta} |U_\alpha| \leq C \int_M \left(1 + |U_\alpha|^{2^{\#}-2}\right) |U_\alpha| \, dv_g \,,$$

para todo α, em que $B_\delta = B_{x_0}(\delta)$ é a bola de centro x_0 e raio δ. $|U_\alpha| = \sum_{i=1}^k |u_\alpha^i|$ e $|U_\alpha|^{2^{\#}-2} = \sum_{i=1}^k |u_\alpha^i|^{2^{\#}-2}$ e x_0 é o limite dos centros dos 1-bubbles dos quais os k-bubbles são formados.

Demonstração. Seja $B = B_x(r)$ tal que $B_x(2r) \subset M \backslash \{x_0\}$ e seja $(U_\alpha)_\alpha$, $U_\alpha = (u_\alpha^1, \ldots, u_\alpha^k)$, solução de:

$$-\Delta_g^2 u_\alpha^i + b_i \Delta_g u_\alpha^i + \sum_{j=1}^{k} A_{ij} u_j = \partial_i F(U_\alpha) \,. \tag{2.65}$$

para $i = 1, \ldots, k$. Logo, do teorema 16 e de (2.64), obtemos:

$$| - \Delta_g^2 u_\alpha^i + b_i \Delta_g u_\alpha^i| \leq C |U_\alpha| \,.$$

E também obtemos que, considerando $a \leq \frac{b_i^2}{4}$:

$$| - \Delta_g^2 u_\alpha^i + b_i \Delta_g u_\alpha^i + a u_\alpha^i| \leq C' |U_\alpha| \,, \tag{2.66}$$

para todo α e para todo i e C não depende de α ou i. Seja $\hat{U}_\alpha$ solução de:

$$-\Delta_g^2 \hat{u}_\alpha^i + b_i \Delta_g \hat{u}_\alpha^i + a \hat{u}_\alpha^i = \left| -\Delta_g^2 u_\alpha^i + b_i \Delta_g u_\alpha^i + a u_\alpha^i \right| \,, \tag{2.67}$$

para todo α e todo i. Como

$$-\Delta_g^2 (\hat{u}_\alpha^i \pm u_\alpha^i) + b_i \Delta_g (\hat{u}_\alpha^i \pm u_\alpha^i) + a(\hat{u}_\alpha^i \pm u_\alpha^i) \geq 0 \,,$$

segue do princípio do máximo (veja [30]) que $\hat{u}_\alpha^i \geq |u_\alpha^i|$ em M e para todo α e todo i. Em particular, cada $\hat{u}_\alpha^i$ é não negativo. Observe que temos:

$$-\Delta_g^2|\hat{U}_\alpha| + b_0\Delta_g|\hat{U}_\alpha| + a|\hat{U}_\alpha| \leq C|\hat{U}_\alpha|\,,$$

na bola B para todo α e $b_0 = k\min_i b_i$. Na desigualdade acima, $\hat{U}_\alpha = (\hat{u}_\alpha^1, \dots, \hat{u}_\alpha^k)$ e $|\hat{U}_\alpha| = \sum_{i=1}^k \hat{u}_\alpha^i$. A constante $C > 0$ é independente de α e cada $\hat{u}_\alpha^i$ é não-negativo.
Segue da decomposição em bubbles e de (2.66), (2.67) que os $(\hat{U}_\alpha)_\alpha$ são uniformemente limitados em $L^\infty(B)$. Podemos então aplicar o De Giorgi-Nash-Moser para as funções $\hat{U}_\alpha$. Em particular temos,

$$\max_{B_x\left(\frac{r}{4}\right)} |\hat{U}_\alpha| \leq C\int_{B_x\left(\frac{r}{2}\right)} |\hat{U}_\alpha|\,dv_g\,. \tag{2.68}$$

em que $C > 0$ não depende de α. Desde que B é basicamente qualquer bola em $M\setminus\{x_0\}$, de (2.68) temos:

$$\max_{M\setminus B_\delta} |\hat{U}_\alpha| \leq \int_M |\hat{U}_\alpha|\,dv_g\,.$$

De (2.65), temos:

$$|-\Delta_g^2 u_\alpha^i + b_i\Delta_g u_\alpha^i + au_\alpha^i| \leq C\left(1 + |U_\alpha|^{2^\# - 2}\right)|U_\alpha|\,. \tag{2.69}$$

E de (2.66) e (2.67) obtemos que:

$$\int_M |\hat{U}_\alpha|\,dv_g \leq C\int_M |U_\alpha|\,dv_g\,.$$

Assim,

$$\max_{M\setminus B_\delta} |U_\alpha| \leq \max_{M\setminus B_\delta} |\hat{U}_\alpha| \leq \int_M |\hat{U}_\alpha|\,dv_g \leq \int_M |U_\alpha|\,dv_g\,.$$

Portanto, temos de (2.69):

$$\max_{M\setminus B_\delta} |U_\alpha| \leq C\int_M \left(1 + |U_\alpha|^{2^\# - 2}\right)|U_\alpha|\,dv_g\,.$$

□

Observe que, do lema acima, obtemos que:

$$\max_{M\setminus B_\delta} |U_\alpha| \leq C\|U_\alpha\|_2\,.$$

Considere $\tilde{U}_\alpha = \|U_\alpha\|_2^{-1}U_\alpha$ e $B(\delta) = \{x \in M;\, dist(x, S) < \delta\}$. Assim temos que $\|\tilde{U}_\alpha\|_2 = 1$.

Na prova da concentração L^2 a seguir usaremos o lema (18). Assumiremos também que U_α é solução de (2.64).

Teorema 20. *Seja U_α solução de* (2.43)*, em que $A_{ij}(x)$ é positiva como forma bilinear e simétrica. Então*

$$\tilde{U}_\alpha \to 0\,,$$

em $H_k^{2,2}(M \setminus B_\delta)$ para todo $\delta > 0$.

Demonstração. Inicialmente mostraremos que $\|\tilde{U}_\alpha\|_{L_k^2(M\setminus B_\delta)} \to 0$.
Suponha (U_α) solução de (2.43). Do lema 17, obtemos:

$$\int_M |U_\alpha|\, dv_g \;\leq\; C \int_M |U_\alpha|^{2^\#-1}\, dv_g\,. \tag{2.70}$$

Da desigualdade acima, juntamente com os lemas anteriores, temos:

$$\int_{M\setminus B_\delta} (U_\alpha)^2\, dv_g \leq \left(max_{M\setminus B_\delta}|U_\alpha|\right) \int_{M\setminus B_\delta} |U_\alpha|\, dv_g \leq \left(\int_{M\setminus B_{\frac{\delta}{2}}} |U_\alpha|^2\, dv_g\right)^{\frac{1}{2}} \int_M |U_\alpha|^{2^\#-1}\, dv_g\,.$$

Daí, do lema 18, temos que $\|\tilde{U}_\alpha\|_{L_k^2(M\setminus B_\delta)} = o(1)$.
Da demonstração do De Giorgi-Nash-Moser (veja [31]), temos que

$$\int_{M\setminus B_\delta} |\nabla u_\alpha^i|^2\, dv_g \;\leq\; C \int_{M\setminus B_{\frac{\delta}{2}}} (u_\alpha^i)^2\, dv_g\,,$$

para alguma constante C independente de α, mas que depende de δ. Daí

$$\int_{M\setminus B_\delta} |\nabla \tilde{U}_\alpha|^2\, dv_g \leq C \int_{M\setminus B_{\frac{\delta}{2}}} (\tilde{U}_\alpha)^2\, dv_g \longrightarrow 0\,,$$

pelo passo anterior.
Para provar a última parte, seja ϕ uma função corte tal que $0 \leq \phi \leq 1$, $\phi = 0$ na bola $B_{\frac{\delta}{2}}$ e $\phi = 1$ em $M \setminus B_\delta$. Multiplicando (2.64) por $\phi^2 u_\alpha^i$ e integrando sobre M, temos:

$$\begin{aligned}\int_M \Delta_g u_\alpha^i \left(\Delta_g \phi^2 u_\alpha^i\right)\, dv_g \;&+\; \int_M A_i\left(\nabla u_\alpha^i, \nabla(\phi^2 u_\alpha^i)\right)\, dv_g + \frac{1}{2}\int_M \partial_i G(x, U_\alpha)\phi^2 u_\alpha^i\, dv_g = \\ &= \frac{1}{2^\#}\int_M \partial_i F(U_\alpha)\phi^2 u_\alpha^i\, dv_g\,,\end{aligned} \tag{2.71}$$

para $i = 1, ..., k$, ou

$$
\begin{aligned}
\int_M \Delta_g U_\alpha \left(\Delta_g \phi^2 U_\alpha\right) \, dv_g \quad &+ \quad \int_M A\left(\nabla_g U_\alpha, \nabla_g(\phi^2 U_\alpha)\right) \, dv_g + \int_M G(x,U)\phi^2 \, dv_g = \\
&= \quad \int_M F(x,U_\alpha)\phi^2 \, dv_g \, .
\end{aligned}
$$

Por um cálculo direto, o primeiro termo pode ser escrito como:

$$
\int_M \Delta_g U_\alpha \left(\Delta_g \phi^2 U_\alpha\right) \, dv_g = \int_M \left(\Delta_g(\phi U_\alpha)\right)^2 \, dv_g + O\left(\|U_\alpha\|_{H_k^{1,2}\left(M\backslash B_{\frac{\delta}{2}}\right)} \right) ,
$$

em que

$$
\|U_\alpha\|^2_{H_k^{1,2}(\Omega)} = \int_\Omega \left(|U_\alpha|^2 + |\nabla U_\alpha|^2\right) \, dv_g \, .
$$

Os outros termos restantes em (2.71) podem ser estimados por $O\left(\|U_\alpha\|^2_{H_k^{1,2}\left(M\backslash B_{\frac{\delta}{2}}\right)} \right)$. Assim, reescrevemos (2.71) como:

$$
\int_M \left(\Delta_g(\phi U_\alpha)\right)^2 \, dv_g = O\left(\|U_\alpha\|^2_{H_k^{1,2}\left(M\backslash B_{\frac{\delta}{2}}\right)} \right) ,
$$

e da fórmula de Bochner-Lichnerowicz-Weitzenbook

$$
\begin{aligned}
\int_M |\nabla^2(\phi u^i_\alpha)|^2 \, dv_g \quad &= \quad \int_M \left(\Delta_g(\phi u^i_\alpha)\right)^2 \, dv_g - \int_M Ric_g\left(\nabla(\phi u^i_\alpha), \nabla(\phi u^i_\alpha)\right) \, dv_g \\
&\leq \quad \int_M |\Delta_g(\phi u^i_\alpha)^2|^2 \, dv_g + k\int_M |\nabla(\varphi u^i_\alpha)|^2 \, dv_g \\
&= \quad O\left(\|u^i_\alpha\|_{H^{1,2}\left(M\backslash B_{\frac{\delta}{2}}\right)} \right) .
\end{aligned}
$$

Logo,

$$
\int_{M\backslash B_\delta} |\nabla^2 U_\alpha|^2 \, dv_g = O\left(\|U_\alpha\|_{H^{1,2}\left(M\backslash B_{\frac{\delta}{2}}\right)} \right) .
$$

Portanto,

$$
\int_{M\backslash B_\delta} |\nabla^2 U_\alpha|^2 \, dv_g \leq \; C\left(\int_{M\backslash B_{\frac{\delta}{2}}} \left(|U_\alpha|^2 + |\nabla U_\alpha|^2\right) \, dv_g \right) ,
$$

para cada $i = 1, \ldots, k$. Assim,

$$\int_{M\setminus B_\delta} |\nabla^2 \tilde{U}_\alpha|^2\, dv_g \leq \; C \left(\int_{M\setminus B_{\frac{\delta}{2}}} \left(|\tilde{U}_\alpha|^2 + |\nabla \tilde{U}_\alpha|^2 \right) \, dv_g \right) \, ,$$

e essa última desigualdade converge para zero graças ao passo anterior. Isso termina a prova do lema. □

Temos a seguir uma estimativa global.

Lema 21. *U_α satisfaz $\|U_\alpha\|_2 = o(1)\|\nabla U_\alpha\|_2$, em que $o(1) \to 0$ quando $\alpha \to \infty$.*

Demonstração. Da desigualdade de Hölder temos:

$$\int_{B_\delta} |U_\alpha|^2\, dv_g \leq \; vol\,(B_\delta)^{\frac{2^*-2}{2^*}} \, \|U_\alpha\|^2_{2^*} \, ,$$

em que $2^* = \frac{2n}{n-2}$ e $Vol(B_\delta)$ é o volume de B_δ. Agora, da imersão de Sobolev $H^{1,2}(M) \hookrightarrow L^{2^*}(M)$, temos

$$\|U_\alpha\|^2_{2^*} \leq \; A \left(\|\nabla U_\alpha\|_2^2 + \|U_\alpha\|_2^2 \right) \, ,$$

em que $A > 0$ é independente de α. Separando a integral:

$$\int_M |U_\alpha|^2\, dv_g = \int_{B_\delta} |U_\alpha|^2\, dv_g + \int_{M\setminus B_\delta} |U_\alpha|^2\, dv_g \, ,$$

e usando as duas desigualdades acima, obtemos:

$$\int_M |U_\alpha|^2\, dv_g \leq C_1 \int_{M\setminus B_\delta} |U_\alpha|^2\, dv_g + C_2 Vol(B_\delta)^{\frac{2^*-2}{2^*}} \int_M |\nabla U_\alpha|^2\, dv_g \, ,$$

para todo $\delta > 0$ pequeno o suficiente em que C_1 e C_2 são constanstes positivas independentes de α e de δ. Como

$$\int_{M\setminus B_\delta} |\tilde{U}_\alpha|^2\, dv_g \longrightarrow 0 \, ,$$

da demonstração do resultado anterior, temos:

$$1 \leq \; C_2 Vol(B_\delta)^{\frac{2^*-2}{2^*}} \liminf_{\alpha\to\infty} \left(\left(\int_M |U_\alpha|^2\, dv_g \right)^{-1} \int_M |\nabla U_\alpha|\, dv_g \right) \, ,$$

para δ pequeno o suficiente, donde segue o resultado. □

Como consequência imediata dos dois resultados acima (teorema 20 e lema 21), temos o seguinte.

Lema 22. *Seja $\hat{U}_\alpha = \|\nabla U_\alpha\|_2^{-1} U_\alpha$, então*

$$\hat{U}_\alpha \longrightarrow 0 \qquad \text{em } H_k^{2,2}(M \setminus B_\delta) \, ,$$

para todo $\delta > 0$.

Demonstração. Observe que do teorema 20 temos:

$$\|\tilde{U}_\alpha\|_{H_k^{2,2}(M\backslash B_\delta)} = \|U_\alpha\|_2^{-2}\left(\int_{M\backslash B_\delta}\left((\Delta U_\alpha)^2 + |\nabla U_\alpha|^2 + |U_\alpha|^2\right)\, dv_g\right) = \, o(1)$$

E do lema 21:

$$\frac{\|U_\alpha\|_2}{\|\nabla U_\alpha\|_2} = o(1)$$

Portanto,

$$\|\hat{U}_\alpha\|^2_{H_k^{2,2}(M\backslash B_\delta)} = \|\nabla U_\alpha\|_2^{-2}\frac{\|U_\alpha\|_2^{-2}}{\|U_\alpha\|_2^{-2}}\left(\int_M \left((\Delta U_\alpha)^2 + |\nabla U_\alpha|^2 + |U_\alpha|^2\right)\, dv_g\right) = \, o(1)$$

□

2.6 Compacidade

No capítulo anterior, estudamos existência de soluções para o seguinte sistema

$$\Delta_g^2 u_i - \mathrm{div_g}(A^i(\nabla u_i)^\#) + \partial_i G(x,U) = \partial_i F(U)\,, \tag{2.72}$$

em que $i = 1,\ldots,k$ e $U = (u_1,\ldots,u_k)$. Também estudamos a decomposição em bubbles para U_α solução de (2.72). $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ é uma função positiva e $2^\#-$homogênea de classe C^1 e $G : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ é uma função positiva e 2-homogênea na segunda variável de classe C^1. A_i é um (2,0)-tensor simétrico suave.

Em toda esta seção utilizaremos o caso em que $G_\alpha(x,U) = \sum_{ij=1}^k A_{ij}^\alpha(x)u_i(x)u_j(x)$ e $A_\alpha^i = b^i g$ para cada $i = 1,\ldots,k$. $(A(\alpha))_\alpha$, $\alpha \in \mathbb{N}$ é uma sequência de aplicações suaves, $A(\alpha) : M \to M_k^s(\mathbb{R})$, em que $A(\alpha) = (A_{ij}^\alpha)$. Lembramos que $M_k^s(\mathbb{R})$ é o espaço vetorial das matrizes simétricas reais de ordem $k \times k$. Consideraremos o seguinte sistema

$$\Delta_g^2 u^i - b_\alpha^i \Delta_g u^i + \sum_{j=1}^k A_{ij}^\alpha(x)u^j(x) = \partial_i F(U)\,, \tag{2.73}$$

para $i = 1,\ldots,k$. No que segue consideraremos $U_\alpha = (u_\alpha^1,\cdots,u_\alpha^k)$ solução de (2.73) e $(U_\alpha)_\alpha$ uma sequência limitada em $H_k^{2,2}(M)$. Assumimos que $A(\alpha)$ satisfaz que existe uma aplicação C^1, $A : M \to M_k^s(\mathbb{R})$, $A = (A_{ij})$ tal que

$$A_{ij}^\alpha \mapsto A_{ij} \qquad \text{em } C^1(M) \tag{2.74}$$

quando $\alpha \to +\infty$, para todos i e j. Também consideramos que $A_\alpha^i = b_\alpha^i g$ (em (2.72)) converge para $A^i = b^i g$. O sistema limite, combinando (2.73) e (2.74) é:

$$\Delta_g^2 u^i - b^i \Delta_g u^i + \sum_{j=1}^k A_{ij}(x)u^j(x) = \partial_i F(U)\,,$$

Usaremos nesta seção alguns dos resultados já demonstrados anteriormente como a decomposição em bubbles e a concentração L^2 da seção anterior. Seja η uma função corte em $\mathbb{R}^n$ com $\eta = 1$ na bola $B_0(\delta)$ e $\eta = 0$ fora da bola $B_0(2\delta)$, em que $B_0(r)$ é a bola Euclideana com centro 0 e raio r. Consideramos ηu_α^i como uma função definida em $\mathbb{R}^n$ e com suporte em $B_0(2\delta)$.

A seguir, no lema abaixo, usaremos a identidade tipo Pohozaev:

$$\int_{\mathbb{R}^n} x_k \partial_k(\eta u_\alpha^i) \Delta^2(\eta u_\alpha^i)\, dx + \frac{n-4}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \left(\Delta\left(\eta u_\alpha^i\right)\right)^2 dx = 0\,. \tag{2.75}$$

em que x_k é a k-ésima coordenada de $x \in \mathbb{R}^k$. Observe que, dos lemas 21 e 22, para $j = 0, 1, 2$, temos:

$$\int_{B_0(2\delta)\setminus B_0(\delta)} |\nabla^j U_\alpha|^2\, dx = o(\varepsilon_\alpha) = \int_{B_0(2\delta)} |U_\alpha|^2\, dx\,,$$

em que $\varepsilon_\alpha^{-1} o(\varepsilon_\alpha) \to 0$ quando $\alpha \to \infty$ e

$$\varepsilon_\alpha = \int_M |\nabla U_\alpha|^2\, dv_g\,.$$

Usando estas estimativas acima em (2.75), obtemos:

Lema 23. *Seja $U_\alpha = (u_\alpha^1, \cdots, u_\alpha^k)$ uma sequência limitada em $H_k^{2,2}(M)$. Então temos a seguinte estimativa:*

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta^2 \left(\Delta^2 u_\alpha^i\right) x^k \partial_k u_\alpha^i\, dx + \frac{n-4}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \eta^2 u_\alpha^i \Delta^2 u_\alpha^i\, dx = o(\varepsilon_\alpha)\,. \tag{2.76}$$

em que $\frac{o(\varepsilon_\alpha)}{\varepsilon_\alpha} \to 0$ quando $\alpha \to 0$.

Demonstração. Começaremos com o segundo termo de (2.75). Para simplificar, faremos $u_\alpha^i \equiv u$. Expandindo o termo $(\Delta(\eta u))^2$ obtemos facilmente que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta(\eta u))^2\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \eta^2 (\Delta u)^2\, dx + \int_{\mathbb{R}^n} u^2 (\Delta \eta)^2\, dx \\
&- 4\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla\eta, \nabla u\rangle (\Delta\eta)\, u\, dx - 4\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla\eta, \nabla u\rangle (\Delta u)\, \eta\, dx \\
&+ 2\int_{\mathbb{R}^n} \eta (\Delta\eta)\, u\, (\Delta u)\, dx + 4\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla\eta, \nabla u\rangle^2\, dx\,.
\end{aligned}$$

em que para duas funções φ e ψ, $\langle \nabla\varphi, \nabla\psi\rangle$ é o produto escalar de $\nabla\varphi$ e $\nabla\psi$. Integrando por partes temos:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} \eta^2 (\Delta u)^2\, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \eta^2 u \Delta^2 u\, dx - \int_{\mathbb{R}^n} \left(\Delta \eta^2\right) u\, (\Delta u)\, dx \\
&+ 4\int_{\mathbb{R}^n} \eta \langle \nabla\eta, \nabla u\rangle (\Delta u)\, \eta\, dx\,.
\end{aligned}$$

Da desigualdade de Hölder, para $p = 1, 2$, temos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta\eta^p)^2\, u^2\, dx \leq \left(\int_{A_\delta} |\Delta\eta^p|^{\frac{n}{2}}\, dx\right)^{\frac{4}{n}} \left(\int_{A_\delta} u^{2^\#}\, dx\right)^{\frac{(n-4)}{n}},$$

em que $A_\delta = B_0(2\delta) \setminus B_0(\delta)$. Note que $|\Delta^p\eta| \leq C$ em que $C > 0$ e $u \in L^{2^\#}(\mathbb{R}^n)$. Assim temos que,

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta\eta^p)^2\, u^2\, dx = o(\epsilon_\alpha)\,.$$

Temos então:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} |\Delta\eta^2| u|\Delta u|\, dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta\eta^2)^2\, u^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u)^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \\
\int_{\mathbb{R}^n} \eta|\Delta\eta| u|\Delta u|\, dx &\leq \left(\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta\eta)^2\, u^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}} \left(\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u)^2\, dx\right)^{\frac{1}{2}},
\end{aligned}$$

e como $\Delta u \in L^2(\mathbb{R}^n)$, obtemos então que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta\eta^2) u(\Delta u)\, dx = o(\epsilon_\alpha) \quad \text{e} \quad \int_{\mathbb{R}^n} \eta(\Delta\eta) u(\Delta u)\, dx = o(\epsilon_\alpha)$$

em que $o(\epsilon_\alpha)$ é como definido acima. Graças a desigualdade de Hölder, escrevemos:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle\nabla\eta, \nabla u\rangle^2\, dx \leq \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\eta|^2 |\nabla u|^2\, dx \leq \left(\int_{A_\delta} |\nabla\eta|^n\, dx\right)^{\frac{2}{n}} \left(\int_{A_\delta} |\nabla u|^{2^*}\, dx\right)^{\frac{(n-2)}{n}}$$

em que $2^* = \frac{2n}{n-2}$. Note que $|\nabla\eta| \leq C$ e que $|\nabla u| \in L^{2^*}(\mathbb{R}^n)$. Assim obtemos:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle\nabla\eta, \nabla u\rangle^2\, dx = o(\epsilon_\alpha)\,.$$

Escrevemos que,

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^n} \langle\nabla\eta, \nabla u\rangle\, u\Delta\eta\, dx\right| &\leq \int_{\mathbb{R}^n} |\langle\nabla\eta, \nabla u\rangle|\, u|\Delta\eta|\, dx \\
&\leq \sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} \langle\nabla\eta, \nabla u\rangle^2\, dx}\sqrt{\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta\eta)^2\, u^2\, dx}\,,
\end{aligned}$$

obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle\nabla\eta, \nabla u\rangle\, u\Delta\eta\, dx = o(\varepsilon_\alpha)\,.$$

Assim, das estimativas acima, obtemos que:

$$\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta(\eta u))^2 \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \eta^2 u \Delta^2 u \, dx + o(\epsilon_\alpha) \,. \tag{2.77}$$

Agora calcularemos o primeiro termo de (2.75). Observe que temos:

$$\Delta^2(\eta u) = \eta\Delta^2 u + \Delta\eta\Delta u - 2\langle\nabla\eta, \nabla\Delta u\rangle +$$
$$+ u\Delta^2\eta + \Delta u\Delta\eta - 2\langle\nabla u, \nabla\Delta\eta\rangle - 2\Delta\langle\nabla\eta, \nabla u\rangle \,.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^n} \Delta^2(\eta u) x^k \partial_k(\eta u) \, dx \\
= & \int_{\mathbb{R}^n} \eta^2(\Delta^2 u) x^k \partial_k u \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} \eta u(\Delta^2\eta) x^k \partial_k u \, dx \\
+ & \ 2\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta\eta)(\Delta u)\eta x^k \partial_k u \, dx - 2\int_{\mathbb{R}^n} \eta\Delta\langle\nabla\eta, \nabla u\rangle x^k \partial_k u \, dx \\
- & \ 2\int_{\mathbb{R}^n} \eta\langle\nabla u, \nabla\Delta\eta\rangle x^k \partial_k u \, dx - 2\int_{\mathbb{R}^n} \eta\langle\nabla\eta, \nabla\Delta u\rangle x^k \partial_k u \, dx \\
+ & \int_{\mathbb{R}^n} \eta u(\Delta^2 u) x^k \partial_k \eta \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} u^2 \Delta^2\eta x^k \partial_k \eta \, dx \\
+ & \int_{\mathbb{R}^n} u\Delta\eta\Delta u x^k \partial_k \eta \, dx - 2\int_{\mathbb{R}^n} u(\Delta(\langle\nabla\eta, \nabla u\rangle)) x^k \partial_k \eta \, dx \\
- & \ 2\int_{\mathbb{R}^n} u\langle\nabla\eta, \nabla\Delta u\rangle x^k \partial_k \eta \, dx - 2\int_{\mathbb{R}^n} u\langle\nabla u, \nabla\Delta\eta\rangle x^k \partial_k \eta \, dx \,.
\end{aligned} \tag{2.78}$$

Observe que $|\Delta^2\eta| \leq C$ e que $|x| \leq 2\delta$ em $A_\delta = B_0(2\delta) \setminus B_0(\delta)$. Da desigualdade de Hölder obtemos:

$$\int_{A_\delta} u|\nabla u| \, dx \leq \sqrt{\int_{A_\delta} |\nabla u|^2 \, dx} \sqrt{\int_{A_\delta} u^2 \, dx} \,,$$

e também

$$\begin{aligned}
\int_{A_\delta} |\nabla u|^2 \, dx &\leq |A_\delta|^{\frac{2}{n}} \left(\int_{A_\delta} |\nabla u|^{2^*} \, dx \right)^{\frac{2}{2^*}} \\
\int_{A_\delta} u^2 \, dx &\leq |A_\delta|^{\frac{4}{n}} \left(\int_{A_\delta} |u|^{2^\#} \, dx \right)^{\frac{2}{2^\#}} \,.
\end{aligned}$$

Então da desigualdade

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} u\eta(\Delta^2\eta)x^k\partial_k u\,dx\right| \leq C\int_{A_\delta} u|\nabla u|\,dx\,,$$

como $|A_\delta| \leq C$, $u \in L^{2^\#}(\mathbb{R}^n)$ e $|\nabla u| \in L^{2^*}(\mathbb{R}^n)$, obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} u\eta(\Delta^2\eta)x^k\partial_k u\,dx = o(\epsilon_\alpha)\,.$$

Similarmente, temos que

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^n} \eta(\Delta u)(\Delta\eta)x^k\partial_k u\,dx\right| &\leq C\int_{A_\delta} |\nabla u||\Delta u|\,dx \\ &\leq C\sqrt{\int_{A_\delta}(\Delta u)^2\,dx}\sqrt{\int_{A_\delta}|\nabla u|^2\,dx}\end{aligned}$$

Daí

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta(\Delta u)(\Delta\eta)x^k\partial_k u\,dx = o(\epsilon_\alpha) \tag{2.79}$$

Observe que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} \eta\,\langle\nabla u, \nabla\Delta\eta\rangle\,x^k\partial_k u\,dx\right| \leq C\int_{A_\delta}|\nabla u|^2\,dx\,.$$

Logo obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta\,\langle\nabla u, \nabla\Delta\eta\rangle\,x^k\partial_k u\,dx = o(\epsilon_\alpha)\,.$$

Note que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} u^2(\Delta^2\eta)x^k\partial_k\eta\,dx\right| \leq C\int_{A_\delta} u^2\,dx\,.$$

Assim obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^n} u^2(\Delta^2\eta)x^k\partial_k\eta\,dx = o(\epsilon_\alpha)\,.$$

De maneira similar, escrevemos que,

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^n} u(\Delta\eta)(\Delta u)x^k\partial_k\eta\,dx\right| &\leq C\int_{A_\delta} u\,(\Delta u) \\ &\leq \left(\int_{A_\delta}(\Delta u)^2,\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_{A_\delta} u^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.\end{aligned}$$

Conforme anteriormente, temos

$$\int_{\mathbb{R}^n} u(\Delta\eta)(\Delta u)x^k\partial_k\eta \; dx = o(\epsilon_\alpha)\,. \tag{2.80}$$

Observando que

$$\left|\int_{\mathbb{R}^n} u \left\langle \nabla u, \nabla\Delta\eta\right\rangle x^k\partial_k\eta \; dx\right| \leq C\int_{A_\delta} u|\nabla u|\, dx\,,$$

também obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} u \left\langle \nabla u, \nabla\Delta\eta\right\rangle x^k\partial_k\eta \, dx = o(\epsilon_\alpha)\,.$$

Observe que da identidade

$$\int_M \left\langle \nabla u, \nabla v\right\rangle \; dv_g = -\int_M u\Delta v \, dv_g\,,$$

fazendo $u = u_1u_2$, obtemos que

$$\int_M \left(u_1 \left\langle \nabla u_2, \nabla v\right\rangle + u_2 \left\langle \nabla u_1, \nabla v\right\rangle \; dv_g\right) = -\int_M u_1u_2\Delta v \, dv_g\,.$$

Independentemente, integrando por partes (fazendo $v = \eta$, $u_1 = \left(x^k\partial_k u\right)\eta$ e $u_2 = \Delta u$ na igualdade acima e depois desenvolvemos o termo $\nabla(\eta x^k\partial_k u)$), temos que

$$\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^n} \eta \left\langle \nabla\eta, \nabla\Delta u\right\rangle \; x^k\partial_k u \, dx = \\
= \; & \int_{\mathbb{R}^n} \eta\,(\Delta\eta)\,(\Delta u) \; x^k\partial_k u \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u) \left\langle \nabla\eta, \nabla\left(\eta\, x^k\partial_k u\right)\right\rangle \; dx \\
= \; & \int_{\mathbb{R}^n} \eta\,(\Delta\eta)\,(\Delta u) \; x^k\partial_k u \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\eta|^2\,(\Delta u) \; x^k\partial_k u \, dx \\
- \; & \int_{\mathbb{R}^n} \eta\,(\Delta u) \left\langle \nabla\eta, \nabla u\right\rangle \; dx - \int_{\mathbb{R}^n} \eta\,(\Delta u) \left\langle x, \nabla\eta\right\rangle \nabla^2 u \, dx\,.
\end{aligned}$$

Mas observe que

$$\begin{aligned}
\left|\int_{\mathbb{R}^n} |\nabla\eta|^2\,(\Delta u) \; x^k\partial_k u \, dx\right| \; & \leq \; C\int_{A_\delta} |\nabla u||\Delta u|\, dx \\
\left|\int_{\mathbb{R}^n} \eta\,(\Delta u) \left\langle \nabla\eta, \nabla u\right\rangle \; dx\right| \; & \leq \; C\int_{A_\delta} |\nabla u||\Delta u|\,.
\end{aligned}$$

Então, de (2.79) obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta \left\langle \nabla\eta, \nabla\Delta u\right\rangle \; x^k\partial_k u \; dx = o(\epsilon_\alpha) - \int_{\mathbb{R}^n} \eta\,(\Delta u) \left\langle x, \nabla\eta\right\rangle \nabla^2 u \; dx\,.$$

Observando que $|\Delta u| \leq \sqrt{n}|\nabla^2 u|$, temos que

$$\left| \int_{\mathbb{R}^n} \eta\, (\Delta u)\, \langle x, \nabla \eta \rangle\, \nabla^2 u \, dx \right| \leq C \int_{A_\delta} |\nabla^2 u|^2 \, dx \,.$$

Usando a fórmula de Bochner-Lichnerowicz-Weitzenböck, temos

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \eta |\nabla^2 u|^2 \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \eta |\Delta u|^2 \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} \eta\, Ric\, \langle \nabla u, \nabla u \rangle \, dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^n} \eta |\Delta u|^2 \, dx + k \int_{\mathbb{R}^n} \eta |\nabla u|^2 \, dx \,. \end{aligned}$$

Daí obtemos que $|\nabla^2 u|^2 \in L^2(\mathbb{R}^n)$ e

$$\int_{A_\delta} |\nabla^2 u|^2 \, dx = o(\epsilon_\alpha) \,.$$

Assim obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta \, \langle \nabla \eta, \nabla \Delta u \rangle \; x^k \, \partial_k u \, dx = o(\epsilon_\alpha) \,. \tag{2.81}$$

De forma similar,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \eta\, (\Delta \langle \nabla \eta, \nabla u \rangle)\; x^k\, \partial_k u \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla \Delta \eta, \nabla u \rangle \, \eta\, x^k\, \partial_k u \, dx \\ + \quad \int_{\mathbb{R}^n} \eta \, \langle \nabla \eta, \nabla \Delta u \rangle \; x^k\, \partial_k u \, dx &- 2 \int_{\mathbb{R}^n} \left\langle \nabla^2 u, \nabla^2 \eta \right\rangle \eta\, x^k\, \partial_k u \, dx \,. \end{aligned}$$

Observando que

$$\int_{\mathbb{R}^n} | \, \langle \nabla \Delta \eta, \nabla u \rangle \, \eta\, x^k\, \partial_k u \, dx | \leq C \int_{A_\delta} |\nabla u|^2 \, dx \,,$$

e que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \left\langle \nabla^2 u, \nabla^2 \eta \right\rangle \eta\, x^k\, \partial_k u \, dx \right| &\leq C \int_{A_\delta} |\nabla u| |\nabla^2 u| \, dx \\ &\leq C \sqrt{\int_{A_\delta} |\nabla^2 u|^2 \, dx} \sqrt{\int_{A_\delta} |\nabla u|^2 \, dx} \,. \end{aligned}$$

Usando (2.81) obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta\, (\Delta \langle \nabla \eta, \nabla u \rangle)\; x^k\, \partial_k u \, dx = o(\epsilon_\alpha) \,.$$

Fazendo cálculos similares, obtemos que

$$
\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta \langle \nabla\eta, \nabla u\rangle)\, u\, x^k \partial_k \eta \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla \Delta \eta, \nabla u\rangle\, u\, x^k \partial_k \eta \, dx \\
+ \quad \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla\eta, \nabla \Delta u\rangle\, u\, x^k \partial_k \eta \, dx &- 2 \int_{\mathbb{R}^n} \left\langle \nabla^2\eta, \nabla^2 u\right\rangle u\, x^k \partial_k \eta \, dx\,.
\end{aligned}
$$

Mas observe que temos

$$
\left| \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla \Delta \eta, \nabla u\rangle\, u\, x^k \partial_k \eta \, dx \right| \leq C \int_{A_\delta} u |\nabla u| \, dx = o(\epsilon_\alpha)\,,
$$

e também

$$
\begin{aligned}
\left| \int_{\mathbb{R}^n} \left\langle \nabla^2\eta, \nabla^2 u\right\rangle u\, x^k \partial_k \eta \, dx \right| &\leq C \int_{A_\delta} u |\nabla^2 u| \, dx \\
&\leq C \sqrt{\int_{A_\delta} |\nabla^2 u|^2 \, dx} \sqrt{\int_{A_\delta} u^2 \, dx} = o(\epsilon_\alpha)\,.
\end{aligned}
$$

Integrando por partes,

$$
\begin{aligned}
& \int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla\eta, \nabla \Delta u\rangle\, u\, x^k \partial_k \eta \, dx \\
= & \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta\eta)\, (\Delta u)\, u\, x^k \partial_k \eta \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u) \left\langle \nabla \eta, \nabla \left(u\, x^k \partial_k \eta\right)\right\rangle \, dx \\
= & \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta\eta)\, (\Delta u)\, u\, x^k \partial_k \eta \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u) \langle \nabla \eta, \nabla u\rangle \; x^k \partial_k \eta \, dx \\
- & \int_{\mathbb{R}^n} u\, (\Delta u)\, |\nabla \eta|^2 \, dx - \int_{\mathbb{R}^n} u\, (\Delta u) \; \nabla^2 \eta \, \langle x, \nabla \eta \rangle \; dx\,. \qquad (2.82)
\end{aligned}
$$

Observe que temos,

$$
\left| \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u) \langle \nabla \eta, \nabla u\rangle \; x^k \partial_k \eta \; dx \right| \leq C \int_{A_\delta} |\nabla u| |\Delta u| \, dx = o(\epsilon_\alpha)\,, \qquad (2.83)
$$

e que

$$
\left| \int_{\mathbb{R}^n} u\, (\Delta u)\, |\nabla \eta|^2 \, dx \right| + \left| \int_{\mathbb{R}^n} u\, (\Delta u)\, \nabla^2 \eta \, \langle x, \nabla \eta \rangle \; dx \right| \leq C \int_{A_\delta} u |\nabla u| \, dx\,. \qquad (2.84)
$$

Utilizando as estimativas (2.83) e (2.84) acima na igualdade (2.82) e usando (2.80), obtemos que

$$
\int_{\mathbb{R}^n} (\Delta \langle \nabla\eta, \nabla u\rangle)\, u\, x^k \partial_k \eta \, dx = o(\epsilon_\alpha)\,,
$$

e que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \langle \nabla\eta, \nabla\Delta u\rangle \, u \, x^k \partial_k \eta \, dx = o(\epsilon_\alpha) \, .$$

Por último, observe que temos,

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} \eta \, u \left(\Delta^2 u\right) \, x^k \partial_k \eta \, dx &= \int_{\mathbb{R}^n} (\Delta u) \, \Delta \left(u\eta \, x^k \partial_k \eta\right) \, dx \\ = \; & \int_{\mathbb{R}^n} \eta \left(x^k \partial_k \eta\right) (\Delta u)^2 \, dx + \int_{\mathbb{R}^n} u \, (\Delta u) \, \Delta \left(\eta \, x^k \partial_k \eta\right) \, dx \\ - \; & 2 \int_{\mathbb{R}^n} \left\langle \nabla \left(\eta \, x^k \partial_k \eta\right), \nabla u \right\rangle (\Delta u) \, dx \, . \end{aligned}$$

Observe que temos

$$|\Delta \left(\eta x^k \partial_k \eta\right)| \leq C \quad \text{ e } \quad |\nabla \left(\eta x^k \partial_k \eta\right)| \leq C \, .$$

Daí temos que

$$\begin{aligned} \left| \int_{\mathbb{R}^n} \eta u \left(\Delta^2 u\right) \, x^k \partial_k \eta \, dx \right| \; &\leq \; C_1 \int_{A_\delta} (\Delta u)^2 \, dx \\ &+ \; C_2 \int_{A_\delta} u |\Delta u| \, dx + C_3 \int_{A_\delta} |\nabla u| |\Delta u| \, dx \, . \end{aligned}$$

Assim obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta u \left(\Delta^2 u\right) \, x^k \partial_k \eta \, dx = o(\epsilon_\alpha) \, .$$

Usando essas estimativas acima em (2.78), obtemos que

$$\int_{\mathbb{R}^n} \Delta^2 (\eta u) \, x^k \partial_k (\eta u) \, dx = \int_{\mathbb{R}^n} \eta^2 \left(\Delta^2 u\right) \, x^k \partial_k u \, dx + o(\epsilon_\alpha) \, . \tag{2.85}$$

Portanto, de (2.77) e de (2.85) a identidade de Pohozaeh (2.75) fica sendo

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta^2 \left(\Delta^2 u\right) \, x^k \partial_k u \, dx + \frac{n-4}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \eta^2 u \Delta^2 u \, dx = o(\epsilon_\alpha) \, . \tag{2.86}$$

□

A estimativa (2.86) **acima utilizaremos no seguinte teorema.**

Teorema 24. *Seja (M, g) uma variedade compacta localmente conformemente flat de dimensão $n \geq 8$. Assuma que o tensor $A^i_\alpha = b^i_\alpha g$ converge, para todo $i = 1, ..., k$, para o tensor suave simétrico $A^i = b^i g$.*
Considere o sistema em (2.73) em que $\left(A(\alpha)\right)_\alpha$ é uma sequência de aplicações suaves $A(\alpha) : M \to M^s_k(\mathbb{R})$, satisfazendo (2.74). Seja U_α uma solução de (2.73) que converege

fracamente para U_0 em $H_k^{2,2}(M)$. Então U_0 é não trivial se $b^i g - A_g$ é positiva ou negativa definida, para algum i.

Demonstração. Queremos mostrar, sob as condições do teorema, que o limite fraco U_0 é não trivial. Vamos assumir que $U_0 = 0$ e chegaremos a uma contradição.
Os U_α formam uma sequência de Palais-Smale para o seguinte funcional energia (veja a demonstração do teorema da decomposição em bubles, teorema 15):

$$J(U) = \frac{1}{2}\int_M \left((\Delta_g U)^2 + G(x,U)\right)\, dv_g - \int_M F(U)\, dv_g\,.$$

que está definido em $H_k^{2,2}(M)$. Como já visto, a menos de subsequência, os U_α possuem uma decomposição em bubbles.
Seja $x \in \mathcal{S}$, em que $\mathcal{S}$ é o conjunto dos pontos de blow-up. Como (M,g) é localmente conformemente *flat*, podemos escolher $\delta > 0$ de forma que g é conforme a métrica *flat* $\hat{g} = \phi^{-\frac{4}{n-4}} g$, em que ϕ é suave e positiva. Mais ainda, podemos escolher δ pequeno o suficiente tal que $\mathcal{S} \cap B(x, 4\delta) = \{x\}$. Observe que na métrica Euclideana $\hat{g} = \xi$, temos que $|\nabla u|_{\hat{g}}^2 = \phi^{\frac{4}{n-4}} |\nabla u|_g^2$.
Seja $\hat{U}_\alpha = \phi U_\alpha$, isto é, $\hat{u}_\alpha^i = \phi u_\alpha^i$, para $i = 1, \ldots, k$. Usamos a propriedade conforme do operador de Paneitz-Branson PB_g

$$PB_{\hat{g}}(\varphi u) = \varphi^{2^\# - 1} PB_g(u)\,,$$

para qualquer função suave u e $\hat{g} = \phi^{-\frac{4}{n-4}} g$ e $n \geq 5$. O operador geométrico de Paneitz-Branson PB_g é definido por

$$PB_g u = \Delta_g^2 u - \mathrm{div_g}(A_g\, du) + \left(\frac{n-4}{2}\right) Q_g u\,,$$

em que A_g é o seguinte (2,0)-tensor simétrico suave

$$A_g = \frac{(n-2)^2 + 4}{2(n-1)(n-2)} R_g g - \frac{4}{n-2} \mathrm{Ric_g}\,,$$

R_g e $\mathrm{Ric_g}$ denotam as curvaturas escalar e de Ricci respectivamente e Q_g é a Q-curvatura

$$Q_g = \frac{1}{2(n-1)} \Delta_g R_g + \frac{n^3 - 4n^2 + 16n - 16}{8(n-1)^2(n-2)^2} R_g^2 - \frac{2}{n-2} |\mathrm{Ric_g}|^2\,.$$

Então, por um cálculo direto temos

$$\begin{aligned}\Delta^2 \hat{u}_\alpha^i \; &- \; \phi^{\frac{8}{n-4}} \mathrm{div_g}\left((b_\alpha^i g - A_g) d\hat{u}_\alpha^i\right) + 2\phi^{\frac{12-n}{n-4}} (b_\alpha^i g - A_g)(\nabla \hat{u}_\alpha^i, \nabla\phi) + \\ &+ \; h_\alpha^i \hat{u}_\alpha^i + \phi^{\frac{8}{n-4}} \sum_{j=2}^{k} A_{ij}^\alpha(x) \hat{u}_\alpha^i(x) = \partial_i F(\hat{U}_\alpha)\,, \end{aligned} \tag{2.87}$$

em que

$$h^i_\alpha = -\left(\frac{n-4}{2}\right)\phi^{\frac{8}{n-4}} Q^n_g - \phi^{\frac{n+4}{n-4}} \operatorname{div}_g\left(\left(b^i_\alpha g - A_g\right) d\phi^{-1}\right) .$$

Seja η uma função corte em $\mathbb{R}^n$ com $\eta = 1$ na bola $B_0(\delta)$ e $\eta = 0$ fora da bola $B_0(2\delta)$, em que $B_0(r)$ é a bola Euclideana com centro 0 e raio r. Consideramos $\eta\hat{u}^i_\alpha$ como uma função definida em $\mathbb{R}^n$ e com suporte em $B_0(2\delta)$. Usaremos a identidade tipo Pohozaev:

$$\int_{\mathbb{R}^n} x \cdot \nabla(\eta\hat{u}^i_\alpha)\Delta^2(\eta\hat{u}^i_\alpha)\, dx + \frac{n-4}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\left(\Delta(\eta\hat{u}^i_\alpha)\right)^2\, dx = 0\,. \tag{2.88}$$

Provamos o teorema por um cálculo dos termos envolvendo a identidade acima. Calculamos as parcelas em termos de ε_α, em que:

$$\varepsilon_\alpha = \int_M |\nabla U_\alpha|^2\, dv_g\,. \tag{2.89}$$

Observe que, dos lemas 21 e 22, para $j = 0, 1, 2$, temos:

$$\int_{B_0(2\delta)\setminus B_0(\delta)} |\nabla^j \hat{U}_\alpha|^2\, dx = o(\varepsilon_\alpha) = \int_{B_0(2\delta)} |\hat{U}_\alpha|^2\, dx\,, \tag{2.90}$$

em que $\varepsilon_\alpha^{-1} o(\varepsilon_\alpha) \to 0$ quando $\alpha \to \infty$. Usando esta estimativa em (2.88) (conforme fizemos anteriormente no início da seção, no lema 23), temos:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta^2\left(x\cdot\nabla\hat{u}^i_\alpha\right)\hat{u}^i_\alpha\Delta^2\hat{u}^i_\alpha\, dx + \frac{n-4}{2}\int_{\mathbb{R}^n}\eta^2\hat{u}^i_\alpha\Delta^2\hat{u}^i_\alpha\, dx = o(\varepsilon_\alpha)\,. \tag{2.91}$$

Agora, multiplicamos a equação (2.87) por $\eta^2\hat{u}^i_\alpha$, integramos sobre $\mathbb{R}^n$ e somamos sobre $i = 1, \ldots, k$:

$$\begin{aligned}
&\sum_{i=1}^k \int_{\mathbb{R}^n} \eta^2\hat{u}^i_\alpha\Delta^2\hat{u}^i_\alpha\, dx - \sum_{i=1}^k\int_{\mathbb{R}^n}\phi^{\frac{8}{n-4}}\eta^2\hat{u}^i_\alpha \operatorname{div}_g\left(\left(A^i_\alpha - A_g\right) d\hat{u}^i_\alpha\right)\, dx \\
+\;& 2\sum_{i=1}^k\int_{\mathbb{R}^n}\phi^{\frac{12-n}{n-4}}\eta^2 u^i_\alpha\left(A^i_\alpha - A_g\right)(\nabla\hat{u}^i_\alpha, \nabla\phi)\, dx + \sum_{i=1}^k\int_{\mathbb{R}^n} h^i_\alpha\left(\eta\hat{u}^i_\alpha\right)^2\, dx + \\
+\;& \sum_{i,j=1}^k\int_{\mathbb{R}^n}\eta^2\phi^{\frac{8}{n-4}}A^\alpha_{ij}\left(\hat{u}^i_\alpha\right)^2 = 2^\#\int_{\mathbb{R}_n}\eta^2 F(\hat{U}_\alpha)\, dx\,.
\end{aligned} \tag{2.92}$$

Escrevendo $\phi^{\frac{8}{n-4}}\eta^2 \operatorname{div}_g\left(\left(A^i_\alpha - A_g\right) d\hat{u}^i_\alpha\right)$ como $a^{ij}\partial_{ij}\hat{u}_\alpha + b^k\partial_k\hat{u}_\alpha$, em que a^{ij} e b^k são funções suaves com suporte em $B_0(2\delta)$. Integrando por partes temos:

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^n} &\phi^{\frac{8}{n-4}} \quad \eta^2\hat{u}^i_\alpha \operatorname{div}_g\left(\left(b^i_\alpha g - A_g\right) d\hat{u}^i_\alpha\right)\, dx \\
&= \quad -\int_{\mathbb{R}^n}\phi^{\frac{8}{n-4}}\eta^2\left(b^i_\alpha g - A_g\right)\left(\nabla\hat{u}^i_\alpha, \nabla\hat{u}^i_\alpha\right)\, dx + o(\varepsilon_\alpha)\,.
\end{aligned} \tag{2.93}$$

Também, por Hölder, observe que:

$$\begin{aligned}\left|\int_{\mathbb{R}^n} h^i_\alpha \left(\eta \hat{u}^i_\alpha\right)^2\, dx\right| &\leq C\int_{B_0(2\delta)} \hat{u}^i_\alpha |\nabla \hat{u}^i_\alpha|\, dx \\ &\leq \frac{C}{2}\int_{B_0(2\delta)} \left(|\nabla \hat{u}^i_\alpha|^2 + \hat{u}^i_\alpha\right)\, dx\end{aligned}$$

Usando (2.90):

$$\begin{aligned}\int_{\mathbb{R}^n} h^i_\alpha \left(\eta \hat{u}^i_\alpha\right)^2\, dx = o(\varepsilon_\alpha) &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi^{\frac{12-n}{n-4}} \eta^2 \hat{u}^i_\alpha \left(b^i_\alpha g - A_g\right)\left(\nabla \hat{u}^i_\alpha, \nabla\phi\right)\, dx \\ &= \int_{\mathbb{R}^n} \phi^{\frac{8}{n-4}} \eta^2 \sum_{j=1}^{k} A^\alpha_{ij}(x)\left(\hat{u}^i_\alpha\right)^2\, dx\,. \qquad (2.94)\end{aligned}$$

Substituindo (2.93) e (2.94) em (2.92), obtemos:

$$\begin{aligned}\sum_{i=1}^{k}\int_{\mathbb{R}^n} \eta^2 \hat{u}^i_\alpha \Delta^2 \hat{u}^i_\alpha\, dx &+ \sum_{i=1}^{k}\int_{\mathbb{R}^n} \phi^{\frac{8}{n-4}} \eta^2 \left(b^i_\alpha g - A_g\right)\left(\nabla \hat{u}^i_\alpha, \nabla \hat{u}^i_\alpha\right)\, dx \\ &= 2^{\#}\int_{\mathbb{R}^n} \eta^2 F(\hat{U}_\alpha)\, dx + o(\varepsilon_\alpha)\,. \qquad (2.95)\end{aligned}$$

Tendo em vista o primeiro termo em (2.91), multiplicamos (2.87) por $\eta^2\left(\nabla \hat{u}^i_\alpha \cdot x\right)$, integramos em $\mathbb{R}^n$ e somamos sobre $i = 1, \ldots, k$:

$$\begin{aligned}&\sum_{i=1}^{k}\int_{\mathbb{R}^n} \eta^2\left(x\cdot\nabla \hat{u}^i_\alpha\right)\Delta^2 \hat{u}^i_\alpha\, dx - \sum_{i=1}^{k}\int_{\mathbb{R}^n} \phi^{\frac{8}{n-4}}\eta^2\left(x\cdot\nabla \hat{u}^i_\alpha\right)\mathrm{div_g}\left(\left(b^i_\alpha g - A_g\right)d\hat{u}^i_\alpha\right)\, dx \\ +\ & 2\sum_{i=1}^{k}\int_{\mathbb{R}^n} \phi^{\frac{12-n}{n-4}}\eta^2\left(\nabla \hat{u}^i_\alpha\cdot x\right)\left(A^i_\alpha - A_g\right)\left(\nabla \hat{u}^i_\alpha, \nabla\phi\right)\, dx + \sum_{i=1}^{k}\int_{\mathbb{R}^n} h^i_\alpha \eta^2\left(x\cdot\nabla \hat{u}^i_\alpha\right)\hat{u}^i_\alpha\, dx + \\ +\ & \sum_{i,j=1}^{k}\int_{\mathbb{R}^n} \phi^{\frac{8}{n-4}}\eta^2\left(x\cdot\nabla \hat{u}^i_\alpha\right)A^\alpha_{ij}(x)\hat{u}^i_\alpha\, dx = \sum_{i=1}^{k}\int_{\mathbb{R}^n} \eta^2\left(x\cdot\nabla \hat{u}^i_\alpha\right)\partial_i F(\hat{U}_\alpha)\, dx\,. \qquad (2.96)\end{aligned}$$

Observe que, integrando por partes e usando (2.90), temos:

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta^2\left(x\cdot\nabla \hat{u}^i_\alpha\right)(\hat{u}^i_\alpha)^{2^{\#}-1}\, dx = -\frac{n}{2^{\#}}\int_{\mathbb{R}^n} \eta^2 (\hat{u}^i_\alpha)^{2^{\#}}\, dx + o(\varepsilon_\alpha)$$

Assim,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \eta^2\left(x\cdot\nabla \hat{u}^i_\alpha\right)\partial_i F(\hat{U}_\alpha)\, dx = -\frac{nk}{2^{\#}}\int_{\mathbb{R}^n} \eta^2\left(\hat{u}^i_\alpha\right)^{2^{\#}}\, dx + o(\varepsilon_\alpha)\,. \qquad (2.97)$$

Novamente por (2.90) temos:

$$\int_{\mathbb{R}^n} h_\alpha^i \eta^2 \left(x \cdot \nabla \hat{u}_\alpha^i\right) \hat{u}_\alpha^i dx = o(\varepsilon_\alpha)\,.$$

Também,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi^{\frac{8}{n-4}} \eta^2 \left(x \cdot \nabla \hat{u}_\alpha^i\right) \sum_{j=1}^{k} A_{ij}^\alpha(x) \hat{u}_\alpha^i dx = o(\varepsilon_\alpha)\,.$$

E,

$$\int_{\mathbb{R}^n} \phi^{\frac{12-n}{n-4}} \eta^2 \left(x \cdot \nabla \hat{u}_\alpha^i\right) \left(b_\alpha^i g - A_g\right) \left(\nabla \hat{u}_\alpha^i, \nabla \phi\right)\, dx = \delta O(\varepsilon_\alpha)\,,$$

quando $|x| \leq 2\delta$ no suporte do integrando e $|\varepsilon_\alpha^{-1} O(\varepsilon_\alpha)| \leq C$, independente de α e δ. Procedendo como no caso (2.93) e usando o fato que $a^{ij} = a^{ji}$:

$$\begin{aligned} \int_{\mathbb{R}^n} & \phi^{\frac{8}{n-4}} \quad \eta^2 \left(\left(b_\alpha^i g - A_g\right) d\hat{u}_\alpha^i\right)\, dx \\ = & \quad \frac{n-2}{2} \int_{\mathbb{R}^n} \phi^{\frac{8}{n-4}} \eta^2 \left(b_\alpha^i g - A_g\right) \left(\nabla \hat{u}_\alpha^i, \nabla \hat{u}_\alpha^i\right)\, dx + \delta O(\varepsilon_\alpha)\,. \end{aligned} \tag{2.98}$$

Substituindo (2.97) e (2.98) em (2.96), obtemos:

$$\begin{aligned} \sum_{i=1}^{k} \int_{\mathbb{R}^n} & \eta^2 \quad \left(x \cdot \nabla \hat{u}_\alpha^i\right) \Delta^2 \hat{u}_\alpha^i\, dx - \frac{n-2}{2} \sum_{i=1}^{k} \int_{\mathbb{R}^n} \phi^{\frac{8}{n-4}}\, \eta^2 \left(b_\alpha^i g - A_g\right) \left(\nabla \hat{u}_\alpha^i, \nabla \hat{u}_\alpha^i\right)\, dx \\ = & \quad -nk \int_{\mathbb{R}^n} \eta^2 F(\hat{U}_\alpha)\, dx + o(\varepsilon_\alpha) + \delta O(\varepsilon_\alpha)\,. \end{aligned} \tag{2.99}$$

Substituindo (2.99) e (2.95) em (2.91), obtemos:

$$\sum_{i=1}^{k} \int_{\mathbb{R}^n} \phi^{\frac{8}{n-4}} \eta^2 \left(b_\alpha^i g - A_g\right) \left(\nabla u_\alpha^i, \nabla u_\alpha^i\right)\, d\nu_g = o(\varepsilon_\alpha) + \delta O(\varepsilon_\alpha)\,. \tag{2.100}$$

Voltando a variedade, consideramos η definida em M. Temos:

$$\int_M \phi^{\frac{8}{n-4}} \eta^2 \left(b_\alpha g - A_g\right) \left(\nabla U_\alpha, \nabla U_\alpha\right)\, d\nu_g = o(\varepsilon_\alpha) + \delta O(\varepsilon_\alpha)\,.$$

Como $b^i g - A_g$ tem sinal para algum i, $b_\alpha^i g - A_g$ tem sinal para α suficientemente grande. Logo existe $t > 0$ tal que:

$$\int_{B_x(tx)} |\nabla U_\alpha|^2\, d\nu_g = o(\varepsilon_\alpha) + \delta O(\varepsilon_\alpha)\,, \tag{2.101}$$

para $\delta > 0$ suficientemente pequeno e para α grande o suficiente. Agora somamos (2.101) sobre todos $x \in S$ e, usando o Lema 22, obtemos:

$$\varepsilon_\alpha = o(\varepsilon_\alpha) + \delta O(\varepsilon_\alpha)\,.$$

Dividindo por ε_α e tomando o limite quando $\alpha \to \infty$, obtemos $1 \leq C\delta$, em que C é independente de δ. Isso é uma contradição quando δ é pequeno o suficiente.

$\square$

Capítulo 3

Desigualdade Vetorial Ótima de Sobolev de Segunda Ordem

3.1 Funções Extremais

A segunda desigualdade de L^2-Sobolev Riemanniana vetorial afirma que, para qualquer $U \in H_k^{2,2}(M)$:

$$\begin{aligned}\left(\int_M F(U)dv_g\right)^{\frac{2}{2^\#}} &\leq \mathcal{A}_0 \int_M (\Delta_g U)^2\, dv_g + \\ &+ \mathcal{B}_0 \int_M \left(\left(A\left((\nabla_g U)^\#, (\nabla_g U)^\# \right) + G(x,U) \right) dv_g \,. \right. \end{aligned} \quad (3.1)$$

é ótima em relação à primeira e à segunda melhores constantes de Sobolev, no sentido em que nenhuma delas pode ser diminuida.

Como no final do capítulo anterior, supomos neste capítulo que $G : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ é uma função dada por $\sum_{i,j=1}^k A_{ij}u_iu_j$, em que (A_{ij}) é positiva como forma linear e simétrica. Também supomos que $A^i = b_i g$, $b_i \in \mathbb{R}$, para $i = 1, \ldots, k$.

Seja $\mathcal{E}(A, F, G, g)$ o conjunto das aplições extremais normalizadas por $\int_M F(U)\, dv_g = 1$ associadas à (3.1). Enunciaremos a seguir os resultados sobre compacidade de aplicações extremais para uma métrica fixada.

Teorema 25 (Existência e Compacidade de Aplicações Extremais). *Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta e localmente conformemente flat. Suponha que $n \geq 8$ e que, para algum $i = 1, \ldots, k$,*

$$b_i g - A_g > 0 \qquad ou \qquad b_i g - A_g < 0\,,$$

em que $A_g = \frac{(n-2)^2+4}{2(n-1)(n-2)} R_g\, g - \frac{4}{n-2}\mathrm{Ric_g}$. Então, a desigualdade (3.1) possui aplicação extremal. Além disso, o conjunto $\mathcal{E}(A, F, G, g)$ é compacto na topologia C^0.

Demonstração. Lembramos que estamos supondo que $G(x,U)=\sum_{i,j=1}^{k}A_{ij}u_iu_j$ para podermos utilizar do resultado da compacidade e o $(2,0)$-tensor A^i é dado por b_ig, $b_i\in\mathbb{R}$. No entanto, note que a demonstração que se segue é válida para A sendo uma soma de $(2,0)$-tensores A^i e $G: M\times\mathbb{R}^k\to\mathbb{R}$ uma função positiva, de classe C^1 e 2-homogênea. Seja $U\in H_k^{2,2}(M)$, então:

$$\left(\int_M F(U)\,dv_g\right)^{\frac{2}{2^\#}} \le \mathcal{A}_o\int_M (\Delta_g U)^2\,dv_g + \mathcal{B}_0\int_M \left(A\left((\nabla U)^\#,(\nabla U)^\#\right)+G(x,U)\right)\,dv_g\,.$$

Seja (α) uma sequência tal que $0<\alpha<\mathcal{B}_0$ e $\alpha\to\mathcal{B}_0$.
Considere agora o seguinte funcional definido em Λ:

$$J_\alpha(U)=\int_M (\Delta_g U)^2\,dv_g+\alpha\mathcal{A}_0^{-1}\int_M \left(A\left((\nabla U)^\#,(\nabla U)^\#\right)+G(x,U)\right)\,dv_g\,,$$

em que

$$\Lambda=\left\{U\in H_k^{2,2}(M):\ \int_M F(U)\,dv_g=1\right\}\,.$$

Seja

$$\lambda_\alpha=\inf_{U\in\Lambda}J_\alpha(U)\,.$$

Temos que $\lambda_\alpha<\frac{1}{\mathcal{A}_0}$. Caso contrário teríamos:

$$J_\alpha(U)\ge\lambda_\alpha\ge\frac{1}{\mathcal{A}_0}\,, \tag{3.2}$$

em que $U\in H_k^{2,2}(M)$. Se $F(U)\neq 1$, basta normalizá-lo, tomando $\frac{1}{\left(\int_M F(U)\,dv_g\right)^{\frac{1}{2^\#}}}U$. De (3.2) temos:

$$\mathcal{A}_0\int_M (\Delta_g U)^2\,dv_g+\alpha\int_M\left(A\left((\nabla U)^\#,(\nabla U)^\#\right)+G(x,U)\right)\,dv_g\ge\left(\int_M F(U)\,dv_g\right)^{\frac{2}{2^\#}}\quad,$$

o que é uma contradição, pois $0<\alpha<\mathcal{B}_0$. Logo, temos que

$$\lambda_\alpha<\frac{1}{\mathcal{A}_0}\,.$$

Definimos agora

$$A^\alpha=\alpha\mathcal{A}_0^{-1}A_\alpha^i\qquad\text{e}\qquad G_\alpha=\alpha\mathcal{A}_0^{-1}G\,.$$

Logo

$$A^{\alpha} \to \mathcal{B}_o \mathcal{A}_0^{-1} A^i \qquad \text{e} \qquad G_{\alpha} \to \mathcal{B}_o \mathcal{A}_0^{-1} G\,.$$

Observe que na hipóteses do teorema, $A^i_{\alpha} = b^i_{\alpha} g$ converge para $A^i = b^i g$. A condição $\lambda_{\alpha} < \mathcal{A}_0^{-1}$ implica que existe um minimizador $U_{\alpha} \in \Lambda_{\alpha}$ para λ. Além disso, U_{α} satisfaz o sistema

$$\Delta^2 u^i_{\alpha} + \alpha \mathcal{A}_0^{-1} \operatorname{div_g}\left(A^i_{\alpha} (\nabla u^i_{\alpha})^{\#}\right) + \frac{1}{2} \alpha \mathcal{A}_0^{-1} \partial_i G_{\alpha}(x, U_{\alpha}) = \frac{\lambda_{\alpha}}{2^{\#}} \partial_i F(U_{\alpha})\,.$$

Então temos que $U_{\alpha} \rightharpoonup U_0$ em $H^{2,2}_k(M)$, em que $U_0 = (u^1_0, \ldots, u^k_0)$. Portanto

$$\Delta^2 u^i_0 + \frac{1}{2} \mathcal{B}_0 \mathcal{A}_0^{-1} \operatorname{div_g}\left(A^i (u^i_0)^{\#}\right) + \mathcal{B}_0 \mathcal{A}_0^{-1} \partial_i G_{\alpha}(x, U_0) = \frac{\lambda}{2^{\#}} \partial_i F(U_0)\,. \tag{3.3}$$

Observe que $\lambda_{\alpha} \to \lambda = \mathcal{A}_0^{-1}$. Usando que $U_{\alpha} \in \Lambda_{\alpha}$ obtemos

$$\lim_{\alpha \to +\infty} \int_M F(U_{\alpha})\, dv_g = 1\,.$$

Na desigualdade

$$\left(\int_M F(U_{\alpha})\, dv_g \right)^{\frac{2}{2^{\#}}} \leq \mathcal{A}_o \int_M (\Delta_g U_{\alpha})^2\, dv_g + \mathcal{B}_0 \int_M \left(A\left((\nabla U_{\alpha})^{\#}, (\nabla U_{\alpha})^{\#} \right) + G(x, U_{\alpha}) \right) dv_g\,.$$

tomamos o limite quando $\alpha \to +\infty$. Assim

$$\liminf_{\alpha \to +\infty} \int_M (\Delta_g U_{\alpha})^2\, dv_g \geq \mathcal{A}_0^{-1}\,.$$

Então a afirmação segue de

$$\limsup_{\alpha \to +\infty} \int_M (\Delta_g U_{\alpha})^2\, dv_g \leq \limsup_{\alpha \to +\infty} \lambda_{\alpha} \leq \mathcal{A}_0^{-1}\,.$$

Agora multiplicamos a equação (3.3) acima por u^i_0 e somamos de $i = 1$ a $i = k$ e, em seguida, integramos. Do teorema 24 observe que U_0 é uma extremal não trivial e vale a igualdade em (3.1) para U_0

$$\left(\int_M F(U_0)\, dv_g \right)^{\frac{2}{2^{\#}}} = \mathcal{A}_0 \int_M (\Delta_g U_0)^2\, dv_g + \mathcal{B}_0 \int_M \left(A\left((\nabla U_0)^{\#}, (\nabla U_0) \right)^{\#} + G(x, U_0) \right) dv_g\,.$$

Pelo acima, observe que o conjunto $\mathcal{E}(A, F, G, g)$ das extremais com norma 1 é compacto. $\square$

Como uma direta consequência do teorema anterior, temos os seguinte resultados.

Corolário 26. *Seja* (M, g) *uma variedade Riemanniana compacta e localmente conformemente flat. Suponha que* $n \geq 8$ *e que acontece uma das afirmações para algum* $i = 1, \ldots, k$,

i. $b_i > \frac{(n-2)^2+4}{2(n-1)(n-2)} R_g$ *e* $\mathrm{Ric_g} > 0$ *em* (2.73).

ii. $b_i < \frac{(n-2)^2+4}{2(n-1)(n-2)} R_g$ *e* $\mathrm{Ric_g} < 0$ *em* (2.73).

logo (3.1) *possui aplicação extremal.*

Uma outra consequência do teorema acima é o seguinte.

Corolário 27. *Seja* (M, g) *uma variedade Riemanniana compacta de Einstein localmente conformemente flat e, para algum* i, $b_i < \frac{(n-2)^2+4}{2(n-1)(n-2)}$. *Então* (3.1) *possui aplicação extremal.*

Capítulo

4

Considerações Finais

Faremos uma estimativa para segunda melhor constante da teoria vetorial $\mathcal{B}_0(A,F,G,g)$ em função da correspondente da teoria escalar $B_0(g)$. No que segue, as funções F e G são assumidas apenas contínuas, homogêneas e positivas.

Nestas considerações finais estamos supondo aqui que existe uma variedade Riemanniana (M,g) que não possui extremal para a desigualdade escalar ótima de Sobolev

$$\left(\int_M |u|^{2^\#}\, dv_g\right)^{\frac{2}{2^\#}} \leq \mathcal{A}_0(g)\int_M (\Delta_g u)^2\, dv_g + \mathcal{B}_0(g)\int_M \left(|\nabla u|_g^2 + u^2\right)\, dv_g \tag{4.1}$$

em que $\mathcal{A}_0(g)$ é a constante A_0 definida em (9) e $\mathcal{B}_0$ está definida em (11). Estamos adimitindo então que existe uma função $u_0 \in H^{2,2}(M)$ não nula tal que

$$\left(\int_M |u_0|^{2^\#}\, dv_g\right)^{\frac{2}{2^\#}} = \mathcal{A}_0(g)\int_M (\Delta_g u_0)^2\, dv_g + \mathcal{B}_0(g)\int_M \left(|\nabla u_0|_g^2 + u^2\right)\, dv_g$$

Começamos esta seção com uma proposiçãoo sobre estimativas para a segunda melhor constante da teoria vetorial $\mathcal{B}_0(A,F,G,g)$ em função da correspondente da teoria escalar $\mathcal{B}_0(g)$. Nossos exemplos e contra-exemplos serão motivados por essas estimativas.

Proposição 28. *Sejm (M,g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 5$. Para cada $t_0 \in S_2^{k-1}$ tal que $F(t_0) = M_F$, temos*

$$\frac{M_F^{\frac{2}{2^\#}} B_0(g)}{\min\left\{\max_{x\in M} G(x,t_0), C_A\right\}} \leq \mathcal{B}_0(A,F,G,g) \leq \frac{M_F^{\frac{2}{2^\#}} B_0(g)}{\max\left\{c_A, m_G\right\}}$$

onde $m_G = \min_{M\times S_2^{k-1}} G$ e

$$c_A|\nabla_g u|^2 \leq A_i\left((\nabla_g u)^{\#},(\nabla_g u)^{\#}\right) \leq C_A|\nabla_g u|^2 \,. \tag{4.2}$$

Em particular, se existe $t_0 \in S_2^{k-1}$ *tal que* $F(t_0) = M_F$ *e* $M_G = \max_{x\in M} G(x,t_0)$ *e que a condição* (4.4) *abaixo seja satisfeita, então,*

$$\mathcal{B}_0(A,F,G,g) = \frac{M_F^{\frac{2}{2^{\#}}} B_0(g)}{m_G}$$

e, além disso, se

$$\left(\int_M |u|^{2^{\#}}\, dv_g\right)^{\frac{2}{2^{\#}}} \leq A_0(f,h,g)\int_M (\Delta_g u)^2\ dv_g + B_0(f,h,g)\int_M f(x)|\nabla_g u|^2 + h(x)|u|^2\, dv_g \tag{4.3}$$

possui extremal, então (1.25) *possui extremal (com* $B_0(f,h,g) = B_0(1,1,g) = B_0(g)$*).*
A condição (4.4) *é a seguinte:*

$$M_G = \max_{x\in M} G(x,t_0) \leq C_A \qquad e \qquad c_A \leq m_G \tag{4.4}$$

Demonstração. Seja $U \in H_k^{2,2}(M)$, temos

$$\begin{aligned}\left(\int_M F(U)\, dv_g\right)^{\frac{2}{2^{\#}}} &\leq M_F^{\frac{2}{2^{\#}}} A_0 \int_M (\Delta_g U)^2\ dv_g + \\ &+ \mathcal{B}_0(A,F,G,g)\int_M \left(A\left((\nabla_g U)^{\#},(\nabla_g U)^{\#}\right) + G(x,U)\right)\, dv_g\end{aligned}$$

Assim, tomando $U = ut_0$, com $u \in H^{2,2}(M)$, obtemos:

$$\begin{aligned}\left(\int_M |u|^{2^{\#}}\, dv_g\right)^{\frac{2}{2^{\#}}} &\leq A_0\int_M (\Delta_g u)^2\ dv_g + M_F^{-\frac{2}{2^{\#}}}\mathcal{B}_0(A,F,G,g)\max_{x\in M} G(x,t_0)\int_M |u|^2\, dv_g \\ &+ \mathcal{B}_0(A,F,G,g) M_F^{-\frac{2}{2^{\#}}} C_A \int_M |\nabla_g u|^2\, dv_g \\ &\leq A_0\int_M (\Delta_g u)^2\ dv_g + \\ &+ \mathcal{B}_0(A,F,G,g) M_F^{-\frac{2}{2^{\#}}} \min\left\{\max_{x\in M} G(x,t_0), C_A\right\}\int_M \left(|\nabla_g u|^2 + |u|^2\right)\, dv_g\end{aligned}$$

Pela definição de $B_0(g)$, encontramos então:

$$\mathcal{B}_0(A,F,G,g) \geq \frac{M_F^{\frac{2}{2^{\#}}} B_0(g)}{\min\left\{\max_{x\in M} G(x,t_0), C_A\right\}}$$

Por outro lado, temos da demonstração da proposição 8:

$$\begin{aligned}
\left(\int_M F(U)\,dv_g\right)^{\frac{2}{2^\#}} &\le M_F^{\frac{2}{2^\#}} A_0 \int_M (\Delta_g U)^2\,dv_g + \frac{B_0(g) M_F^{\frac{2}{2^\#}}}{m_G}\int_M G(x,U)\,dv_g \\
&+ \frac{B_0(g) M_F^{\frac{2}{2^\#}}}{C_A}\int_M A\left((\nabla_g U)^\#, (\nabla_g U)^\#\right)\,dv_g \\
&\le M_F^{\frac{2}{2^\#}} A_0 \int_M (\Delta_g U)^2\,dv_g + \\
&+ \frac{B_0(g) M_F^{\frac{2}{2^\#}}}{\max\{m_G, C_A\}}\int_M \left(A\left((\nabla_g U)^\#, (\nabla_g U)^\#\right) + G(x,U)\right)\,dv_g
\end{aligned}$$

para todo $U \in H_k^{2,2}(M)$. Então, pela definição de $\mathcal{B}_0(A,F,G,g)$, temos:

$$\mathcal{B}_0 \le \frac{M_F^{\frac{2}{2^\#}} B_0(g)}{\max\{c_A, m_G\}}$$

□

Exemplo 1. Seja (M,g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \ge 8$ tal que

$$\mathcal{B}_0 = \frac{n^2-2n-4}{2n(n-1)} A_0\, R_g(x)$$

e (4.3) possui extremal.

Seja $G : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $G(x,t) = \sum_{i,j=1}^k A_{ij}(x)|t_i||t_j|$ onde A_{ij} são funções contínuas não-negativas tal que $A_{i_0 i_0} > 0$ não depende de x e $A_{ii} \ge A_{i_0 i_0}$ para algum i_0. Temos:

$$A_{i_0 i_0}|t|^2 \le \sum_{i=1}^k A_{ii}(x)|t_i|^2 \le \sum_{i,j} A_{ij}(x)|t_i||t_j|$$

Assim, $m_G = A_{i_0 i_0}$.

Seja $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ uma função contínua, positiva e $2^\#$-homogênea tal que $F(e_{i_0}) = M_F$ onde e_{i_0} é o i_0-ésimo elemento da base canônicca de $\mathbb{R}^k$. Então, pela proposição 28:

$$\mathcal{B}_0(A,F,G,g) = \frac{M_F^{\frac{2}{2^\#}} B_0(g)}{A_{i_0 i_0}}$$

Seja $u_0 \in H^{2,2}(M)$ uma função extremal de (4.3). Então $U = u_0 e_{i_0}$ é uma

extremal de (1.25)**. Note que a regularidade de** F **não foi necessária.**

Exemplo 2. Seja (M,g) **uma variedade Riemanniana compacta de dimensão** $n \geq 8$ **tal que**

$$B_0(g) = \frac{n^2 - 2n - 4}{2n(n-1)} A_0\, R_g(x)$$

e (4.3) **não possui extremal.**

Seja $G : M \times \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$, $G(x,t) = \sum_{i,j=1}^{k} A_{ij}(x)|t_i||t_j|$ **onde** A_{ij} **são funções contínuas não-negativas tal que** $A_{i_0 i_0} > 0$ **não depende de** x **e** $A_{ii} \geq A_{i_0 i_0}$ **para algum** i_0**. Temos:**

$$A_{i_0 i_0}|t|^2 \leq \sum_{i=1}^{k} A_{ii}(x)|t_i|^2 \leq \sum_{i,j} A_{ij}(x)|t_i||t_j|$$

Assim, $m_G = A_{i_0 i_0}$**.**

Seja $F : \mathbb{R}^k \to \mathbb{R}$ **uma função contínua, positiva e** $2^{\#}$**-homogênea tal que** $F(e_{i_0}) = M_F$ **onde** e_{i_0} **é o** i_0**-ésimo elemento da base canônicca de** $\mathbb{R}^k$**. Então, pela proposição 28:**

$$\mathcal{B}_0(A,F,G,g) = \frac{M_F^{\frac{2}{2^{\#}}} B_0(g)}{A_{i_0 i_0}}$$

Suponha, por contradição, que existe uma aplicação extremal de U_0 **de** (1.25)**. O** $(2,0)$**-tensor** A^i **satisfaz eqrefcCA. Então**

$$
\begin{aligned}
& \mathcal{B}_0(A,F,G,g)\int_M\left(A\left((\nabla_g U_0)^{\#},(\nabla_g U_0)^{\#}\right)+\sum_{i,j=1}^{k}A_{i,j}|u_o^i||u_0^j|\right)\,dv_g = \\
= & \left(\int_M F(U_0)\,dv_g\right)^{\frac{2}{2^{\#}}} - M_F^{\frac{2}{2^{\#}}}A_0\int_M\left(\Delta_g U_0\right)^2\,dv_g \\
\leq & M_F^{\frac{2}{2^{\#}}}\sum_{i=1}^{k}\left(\int_M |u_o^i|^2\,dv_g\right)^{\frac{2}{2^{\#}}} - M_F^{\frac{2}{2^{\#}}}A_0\int_M\left(\Delta_g U_0\right)^2\,dv_g \\
\leq & M_F^{\frac{2}{2^{\#}}}A_0(g)\sum_{i=1}^{k}\int_M\left(\Delta_g u_o^i\right)\,dv_g + M_F^{\frac{2}{2^{\#}}}B_0(g)\sum_{i=1}^{k}\int_M\left(|\nabla_g u_0^i|^2+|u_0^i|^2\right)^2\,dv_g \\
- & M_F^{\frac{2}{2^{\#}}}A_0\int_M\left(\Delta_g U_0\right)\,dv_g \\
\leq & M_F^{\frac{2}{2^{\#}}}B_0(g)\sum_{i=1}^{k}\int_M\left(|\nabla_g u_0^i|^2+|u_0^i|^2\right)^2\,dv_g \\
\leq & \frac{M_F^{\frac{2}{2^{\#}}}B_0(g)}{A_{i_0i_0}}\int_M\sum_{i,j=1}^{k}A_{i,j}|u_0^i||u_0^j|\,dv_g + \frac{M_F^{\frac{2}{2^{\#}}}B_0(g)}{c_A}\sum_{i=1}^{k}\int_M\sum_{i=1}^{k}A^i\left((\nabla_g u_0^i)^{\#},(\nabla_g u_0^i)^{\#}\right)\,dv_g \\
\leq & \frac{M_F^{\frac{2}{2^{\#}}}B_0(g)}{\max\left\{A_{i_0i_0},c_A\right\}}\int_M\left(\sum_{i,j=1}^{k}A_{ij}|u_0^i||u_0^j|+\sum_{i=1}^{k}A^i\left((\nabla_g u_0^i)^{\#},(\nabla_g u_0^i)^{\#}\right)\right)\,dv_g
\end{aligned}
$$

Isto implica que

$$
\begin{aligned}
\sum_{i=1}^{k}\left(\int_M |u_0^i|^{2^{\#}}\,dv_g\right)^{\frac{2}{2^{\#}}} &= A_0(g)\sum_{i=1}^{k}\int_M\left(\Delta_g u_0^i\right)^2\,dv_g + \\
&+ B_0(g)\int_M\left(\sum_{i=1}^{k}|\nabla_g u_o^i|^2+\sum_{i=1}^{k}|u_o^i|^2\right)\,dv_g \qquad (4.5)
\end{aligned}
$$

Independentemente, segue da desigualdade de Sobolev ótima escalar clássica, (4.1)**, que**

$$
\left(\int_M |u_0^i|^2\,dv_g\right)^{\frac{2}{2^{\#}}} \leq A_0(g)\int_M\left(\Delta_g u_0^i\right)^2\,dv_g + B_0(g)\int_M\left(|\nabla_g u_0^i|^2+|u_0^i|^2\right)\,dv_g \qquad (4.6)
$$

para cada $i=1,...,k$**. Logo, de** (4.6) **e** (4.5)**, existe** $j\in\{1,...,k\}$ **tal que** $u_0^j\neq 0$ **e,**

$$
\left(\int_M |u_0^j|^2\,dv_g\right)^{\frac{2}{2^{\#}}} = A_0(g)\int_M\left(\Delta_g u_0^j\right)^2\,dv_g + B_0(g)\int_M\left(|\nabla_g u_0^j|^2+|u_0^j|^2\right)\,dv_g
$$

o que contradiz a hipótese inicial de que (4.4) **não possui extremal.**

4.1 Considerações Finais

Vários trabalhos têm sido dedicados ao estudo de desigualdades de Sobolev ótimas ao longo dos últimos 30 anos. Isso se deve principalmente à sua conexão com alguns problemas geométricos e analíticos importantes. De fato, tais desigualdades estão relacionadas, por exemplo, com o problema de Yamabe, desigualdades isoperimétricas e propriedades de não colapsamento do fluxo de Ricci. Uma teoria escalar de melhores constantes associadas à desigualdade de Sobolev clássica foi então desenvolvida em paralelo ao estudo de alguns problemas geométricos. Resultados importantes sobre a validade de desigualdades de Sobolev ótimas, existência ou não-existência de funções extremais, caracterização e compacidade de funções extremais foram obtidos nas últimas décadas. Inicialmente, o foco foi para equações de ordem 2 principalmente por causa do problema de Yamabe. Mas em anos recentes vários autores têm estudado equações de quarta ordem e operadores do tipo Paneitz-Branson.

Toda a teoria escalar de melhores constantes, incluindo nossos resultados compacidade de funções extremais, se coloca naturalmente a um contexto vetorial. Parte dessa tese foi então dedicada à teoria vetorial de melhores constantes. Observamos que alguns fatos conhecidos da teoria escalar são facilmente estendíveis ao caso vetorial. Por outro lado, outros fatos se mostraram mais complexos e exigiram o desenvolvimento de ferramentas disponíveis apenas no contexto escalar. Além de contribuir com essas ferramentas, fornecemos também condições suficientes para a existência de aplicações extremais. Também foram estabelecido um resultado de compacidade de aplicações extremais.

Embora a teoria vetorial de melhores constantes, desenvolvida até aqui, já estende muito do que há na teoria escalar, algumas questões surgem nesse novo contexto. Por exemplo, fornecemos uma condição suficiente para a existência de aplicações extremais, com F e G de classe C^1. A partir dos exemplos e contra-exemplos apresentados na seção anterior, esperamos que alguns resultados sejam válidos para funções F e G apenas contínuas. Acreditamos também em resultados mais gerais de não-existência de aplicações extremais que dependam apenas da geometria e não das funções F e G, como mostrado no exemplo 2 da seção anterior. Para isso, a introdução da noção de aplicações críticas forneça um caminho nesta direção (similarmente ao caso de segunda ordem escalar). Outra questão interessante é a seguinte:

Dadas funções F e G, podemos garantir que (3.1) possui aplicação extremal se, e somente se, existe $t_0 \in S_2^{k-1}$, com $F(t_0) = M_F$, tal que existe função

extremal?

O exemplo 2 da seção anterior mostra que de fato isso ocorre em um caso particular. Entretanto, não está claro que isso ocorra em geral.

Para finalizar, listamos outras questões que surgem a partir dos resultados dessa tese.

(a) **Existe uma variedade Riemanniana tal que não existe extremal para** (1.17)**?**

(b) **Para quaisquer funções** F **e** G**, existe uma métrica** h **conforme a métrica dada** g **tal que** (3.1) **possui aplicação extremal?**

(c) **Como garantir a existência de extremais para uma variedade Riemanniana qualquer?**

Referências Bibliográficas

[1] M. AMSTER, P.; CRISTINA. ***Existence of solutions for elliptic systems with critical Sobolev exponent.*** J. Differential Equations 49, p. 13, 2002.

[2] T. AUBIN. ***Equations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire.*** J. Math. Pure Appl. 55, p. 269-296, 1976.

[3] T. AUBIN. ***Problèmes isopérimétriques et espaces de Sobolev.*** J. Differential Geom. 11 (4), p. 573-598, 1976.

[4] M. BARBOSA, E.; MONTENEGRO. ***Extremal maps in best constants vector theory - Part II: Extended L^p-theory.*** Preprint.

[5] M. BARBOSA, E.; MONTENEGRO. ***Extremal maps in best constants vector theory - Part I: Duality and compactness.*** Journal of Functional Analysis, 2012.

[6] T. P. BRANSON. ***Group representations arising from Lorentz conformal geometry.*** J. Funct. Anal., 74, 199-291, 1987.

[7] P. C. CHANG, S. Y. A.; YANG. ***On fourth order curvature invariant.*** Comp. Math. 237, Spectral Problems in Geometry and Arithmetic, Ed: T. Branson, AMS, p. 9-28, 1999.

[8] S. Y. A. CHANG. ***On Paneitz operator - a fourth order differential operator in conformal geometry, Harmonic Analysis and Partial Differential Equations, Essays in honor of Alberto P. Calderon.*** Eds: M. Christ, C. Kening and Sadorsky, Chicgo Lectures in Mathematics, p. 127-150, 1999.

[9] G. F. DE SOUZA. ***Teoria C^0 Vetorial em Geometria Riemanniana e Decomposição em Bubbles para Aplicações Palais-Smale.*** Tese (Doutorado em Matemática), Departamento de Matemática - Universidade Federal de Minas Gerais, 2010.

[10] E. ; LEDOUX M. DJADLI, Z. ; HEBEY. ***Paneitz-type operators and applications.*** Duke. Math. J. 104, 129-169, 2000.

[11] O. DJADLI, Z. ; DRUET. *Extremal functions for optimal Sobolev inequalities on compact manifolds.* Calc. Var.,12, 59-84, 2001.

[12] E.;ROBERT F. DRUET, O.; HEBEY. *Blow-up Theory for Elliptic PDEs in Riemannian Geometry.* Mathematical Notes,Princeton University, vol. 45, 2004.

[13] O. DRUET. *Isoperimetric inequalities on compact manifolds.* Geometriae Dedicata, 217-236, 2002.

[14] E. EDMUNDS, D. E.; FORTUNATO ; JANNELLI. *Critical exponents, critical dimensions and the biharmonic operator.* Arch. Rational Mech. Anal., 112), 269-289, 1990.

[15] F. ESPOSITO, P.; ROBERT. *Mountain pass critical points for Paneitz-Branson operatos.* Calc. Var. Partial Differential Equations, 15, 493-517, 2002.

[16] E. HEBEY. *Sharp Sobolev inequalities of second order.* J. Geom. Anal., 13, 145-162, 2003.

[17] E. HEBEY. *Critical Elliptic Systems in Potential Form.* Adv. Differential Equations,11, no. 5,p. 511-600, 2006.

[18] E. HEBEY. *Sharp Sobolev inequalities for vector valued maps.* Math. Z. 253, no. 4, 681-708, 2006.

[19] E.; M. VAUGON HEBEY. *Meilleures constantes dans le théorème d?inclusion de Sobolev et multiplicité pour les problèmes de Nirenberg et Yamabe.* Indiana Univ. Math. J. 41, no. 2, 377-407, 1992.

[20] E.; M. VAUGON HEBEY. *The best constant problem in the Sobolev embeding theorem for complete Riemannian manifolds.* Duke Math. J., 79, 235-279, 1995.

[21] E.; M. VAUGON HEBEY. *Meilleures constantes dans le théorème d inclusion de Sobolev.* Ann. Inst. H. Poincaré. 13, 57-93, 1996.

[22] F. HEBEY, E.;ROBERT. *Coercivity and Struwe compactness for Paneitz-type operator with constant coefficients.* Calc. Var. Partial Differential Equations, 13, 491-517, 2001.

[23] F. HEBEY, E.;ROBERT. *Compactness and global estimates for the geometric equation in higher dimensions.* E.R.A./A.M.S, 10, 134-141., 2004.

[24] F. Robert; WEN Y. HEBEY, E. Hebey ; ROBERT. *Compactness and global estimates for a fourth order equation os critical Sobolev growth arising from conformal geometry.* Preprint, 2004.

[25] E. H. LIEB. *Sharp constants in the Hardy-Littlewood-Sobolev and related inequalities.* Ann. of Math, 118, 349-374, 1983.

[26] P. L. LIONS. *The concetration-compactness principle in the calculus of variations. The limit case I, II.* Rev. Mat. Iberoamericana, 1, 206-231, 1998.

[27] S. PANEITZ. *A quadratic conformally covariant differential operator for arbitrarey Riemannian manifolds.* Preprint, 1983.

[28] Raske QING, J.; RASKE. *On positive solutions to semi-linear conformally invariant equations on locally conformally flat manifolds.* Int. Math. Res. Not., Art. ID 94172, 20 pp., 2006.

[29] D. RASKE. *The Yamabe problem for the Q-curvature.* ArXiV, 2011.

[30] F. ROBERT. *Fourth Order Equations With Critical Growth In Riemannian Geometry.* Personal Notes, 2009.

[31] K. SANDEEP. *A Compactness type for Paneitz-Branson Operators with Critical Nonlinearity.* Differential and Integral Equations, 2005.

[32] R. SCHOEN. *Lectures Notes from courses at Stanford.* written by D. Pollack, Preprint, 1988.

[33] R. SCHOEN. *Varitional theory for the total scalar curvature functional for Riemannian metrics and related topics, Topics in Calculus of Variations (Montecatini Terme, 1987).* Lecture Notes in Math., vol. 1365, Springer-Verlag, Berlin, pp. 120-154, 1989.

[34] R. SCHOEN. *On the number of constant scalar curvature metrics in a conformal class, Differential Geometry: A symposium in honor of Manfredo do Carmo, Proc. Int. Conf. (Rio de Janeiro, 1988).* Pitman Monogr. Surveys Pure Appl. Math.,vol 52, Longman Scientific and Thecnical, Harlow, pp. 311-320, 1991.

[35] R. SCHOEN. *A report on some recent progress on nonlinear problems in geometry.* Surveys in Differential Geometry, (Cambridge, Mass, 1990), Suppl. J. Diff. Geom., vol 1, Lehigh University, Pensylvania, pp. 201-241, 1991.

[36] M. STRUWE. ***A Global Compactness Result for Elliptic Boundary Value Problems Involving Limiting Nonlinearities.*** **Math. Z., 187, 511-517, 1984.**

[37] C. A. SWASON. ***The best Sobolev constant.*** **Appl. Anal., 47, n°4,227-239, 1992.**

[38] R.C.A.M. Van der Vorst. ***Best constant for the embedding of the space*** $H^2 \cap H_0^1(\Omega)$ ***into*** $L^{\frac{2N}{N-4}}(\Omega)$. **Differential Integral Equations, 6 , 259-276, 1993.**