

# UFMG

---

Hortênsia Virginia Américo

## Análise Numérica para Busca de Autovalores

Monografia apresentada ao Departamento de Matemática da  
UFMG como parte dos requisitos para a obtenção do  
título de ESPECIALISTA EM MATEMÁTICA.

Orientadora: Denise Burgarelli Duczmal

Belo Horizonte, 10 de Maio de 2013

---

Universidade Federal de Minas Gerais  
Av. Antônio Carlos, 6627 - CEP 31270-901  
Belo Horizonte - MG

## Agradecimentos

A Prof. Denise Burgarelli Duczmal, pelo apoio e orientação, fundamentais para o desenvolvimento deste trabalho. Obrigada, pela dedicação e motivação. Acredito que muito do que consegui se deve à certeza de que era uma pessoa com quem sempre poderia contar. Obrigada pela força nos momentos de maior desespero e empolgação em levar adiante meu trabalho.

Ao Magno Tairone, pelo desenvolvimento das implementações dos algoritmos apresentados neste trabalho e também por todo o apoio.

Aos meus pais e irmão que sempre me apoiaram e me incentivaram. Além disso, por todo amor, carinho e atenção que tiveram comigo.

Obrigada aos Profs. Alberto Sarmiento e Paulo Antônio Machado pelas muitas ajudas ao longo desses anos. Obrigada principalmente pelas conversas agradáveis e pela convivência.

A todos os professores e funcionários que de alguma forma contribuíram para a realização deste trabalho.

Um muitíssimo obrigada a minha amiga Tatiana Arcanjo que esteve sempre presente nessa longa caminhada.

À minha família.

A meus pais.

Ao meu irmão Vinicius Américo.

## Resumo

Este trabalho examina cinco métodos numéricos para buscar os autovalores de matrizes quadradas: Método das Potências, Quociente de Rayleigh, Algoritmo QR, Algoritmo Dividir e Conquistar e Método de Jacobi. As derivações, procedimentos, e vantagens de cada método são discutidas e comparadas.

Discute-se a modelagem do problema de crescimento populacional por faixa etária e ainda a modelagem do problema de frequência natural de um circuito elétrico. Para resolver o primeiro problema, se aplica algoritmos elaborados para o uso em matrizes não-simétricas, já para resolver o segundo se utiliza algoritmos desenvolvidos para o uso em matrizes simétricas.

## Abstract

This work examines five numerical iterative methods for computing the eigenvalues and eigenvectors of matrices: Power Method, Rayleigh Quotient, QR Algorithm, Divide and Conquer and Jacobi Method. The derivations, procedure, and advantages of each method are briefly discussed and compared.

A model for the problem of population growth by age group and also a model for the problem of the natural frequency of an electrical circuit are discussed in this work. To solve the first problem, applies algorithms developed for use in non-symmetric matrices, now for the second problem using algorithms developed for use in symmetric matrices.

# Conteúdo

<b>1</b>	<b>Introdução</b>	<b>1</b>
1.1	Fatos básicos sobre autovalores e autovetores . . . . .	2
1.2	Interpretações geométricas . . . . .	10
1.3	Equivalência entre problemas de autovalores e equações polinomiais . . . . .	13
1.4	Sistema de equações diferenciais . . . . .	15
1.5	Necessidade de Métodos Numéricos . . . . .	25
<b>2</b>	<b>Determinação Numérica de Autovalores</b>	<b>29</b>
2.1	O Método das Potências . . . . .	29
2.2	O Quociente de Rayleigh . . . . .	41
2.3	Algoritmo QR . . . . .	49
2.4	Algoritmo Dividir e Conquistar . . . . .	58
2.5	Método de Jacobi . . . . .	62
<b>3</b>	<b>Aplicações para o problema de busca de autovalores</b>	<b>70</b>

3.1	Crescimento populacional por faixa etária . . . . .	70
3.2	Frequência natural de um circuito elétrico . . . . .	80
<b>4</b>	<b>Conclusão</b>	<b>84</b>
<b>A</b>	<b>Matriz de Rotação e Matriz Ortogonal</b>	<b>87</b>
<b>B</b>	<b>Implementação dos Algoritmos</b>	<b>89</b>
	<b>Bibliografia</b>	<b>101</b>

# Capítulo 1

## Introdução

O problema de encontrar autovalores e autovetores surge em uma variedade de aplicações nas mais diversas áreas como mecânica quântica, processamento de imagens, análise de vibrações, mecânica dos sólidos, estatística, entre outras.

Neste trabalho analisamos cinco métodos numéricos que funcionam por repetidamente obter aproximações para os autovalores, e podem ser encerrados no momento em que as aproximações alcançarem um grau adequado de precisão. Os métodos examinados foram o Método das Potências, o Quociente de Rayleigh, o Algoritmo QR, o Algoritmo Dividir e Conquistar e o Método de Jacobi, os quais apresentamos seus procedimentos e vantagens.

Diversos estudos foram realizados sobre o assunto, e para maiores esclarecimentos citamos em especial o livro do Watkins [Wa 02], o qual foi a fonte básica para o desenvolvimento deste trabalho.

O Capítulo 1 apresenta uma breve revisão de Álgebra Linear necessária para compreender os conceitos que serão discutidos posteriormente. No Capítulo 2, os métodos numéricos são apresentados e estudados em detalhes, assim como seus respectivos algoritmos. Finalmente no Capítulo 3 apresentamos duas aplicações da busca de autovalores: Projeção Populacional e Análise de um circuito LC.

Para os fins deste trabalho, restringimos nossa atenção às matrizes quadradas.

## 1.1 Fatos básicos sobre autovalores e autovetores

Nesta seção analisaremos alguns fatos fundamentais relacionados a Álgebra Linear, mais especificamente à autovalores e autovetores, necessários ao desenvolvimento dos capítulos seguintes. As provas de alguns dos resultados não serão feitas, mas em todo o texto ficará evidente a referência para obter tais justificativas.

É comum distinguir vetores de escalares escrevendo os vetores em negrito, neste trabalho utilizaremos esta notação.

**Definição 1.1** *Consideremos uma matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ . Um vetor  $\mathbf{v} \in \mathbb{C}^n$  é chamado um **autovetor** de  $A$  se  $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$  e  $A\mathbf{v}$  é um múltiplo de  $\mathbf{v}$ , ou seja, existe um  $\lambda \in \mathbb{C}$  tal que*

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}. \quad (1.1)$$

*O escalar  $\lambda$  é chamado um **autovalor** de  $A$  associado ao autovetor  $\mathbf{v}$ .*

Observemos que se  $\lambda$  é um autovalor de  $A$  associado ao autovetor  $\mathbf{v}$ , todos os múltiplos não nulos de  $\mathbf{v}$  são também autovetores associados a  $\lambda$ , entretanto cada autovetor possui um único autovalor associado a ele.

Frequentemente, precisaremos trabalhar com vetores de norma unitária. Isto é sempre possível, uma vez que dado um autovetor  $\mathbf{v}$  de  $A$ , o vetor  $\hat{\mathbf{v}} = \left(\frac{1}{\|\mathbf{v}\|}\right)\mathbf{v}$  é também um autovetor de  $A$  associado ao mesmo autovalor de  $\mathbf{v}$ , e  $\|\hat{\mathbf{v}}\| = 1$ .

**Definição 1.2** *O conjunto dos autovalores de  $A$  é o **espectro** de  $A$  e é denotado por  $\sigma(A)$ .*

**Definição 1.3** *Os autovetores de  $A$  associados a um autovalor  $\lambda$  são os vetores não-nulos que satisfazem  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ . Equivalentemente, os autovetores associados a  $\lambda$  são os vetores não-nulos no espaço-solução de  $(\lambda I - A)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Este espaço é chamado de **auto-espaço** de  $A$  associado a  $\lambda$ .*

**Definição 1.4** *Dada uma matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , se pudermos encontrar uma matriz  $B \in \mathbb{C}^{n \times n}$  tal que*

$$AB = BA = I,$$

então diremos que  $A$  é **invertível** ou **não-singular** e que  $B$  é a inversa de  $A$ . Caso contrário, diremos que  $A$  é **não-invertível** ou **singular**. Usaremos a notação  $B = A^{-1}$ .

**Definição 1.5** Se  $A$  e  $B$  são matrizes quadradas, dizemos que  $B$  é **similar** (ou **semelhante**) a  $A$  se existe uma matriz  $C$  não-singular tal que:

$$B = C^{-1}AC,$$

e dizemos que  $B$  foi obtida de  $A$  por uma **transformação de semelhança**.

**Definição 1.6** Dizemos que uma matriz  $A$  é **diagonalizável**, se ela é similar a uma matriz diagonal.

**Definição 1.7** A transposta de uma matriz  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , denotada por  $A^T$ , é a matriz obtida escrevendo-se as linhas de  $A$ , em ordem, como colunas, isto é,

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{n1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{n2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}.$$

**Definição 1.8** Seja  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ . Definimos a matriz  $\bar{A} = (\bar{a}_{ij})$ , como sendo a **matriz conjugada** de  $A$ .

As operações de transposição e conjugação comutam para qualquer matriz complexa  $A$ , isto é,  $(\bar{A})^T = \overline{(A^T)}$ . Usa-se a notação especial  $A^*$ , para a transposta conjugada de  $A$ . Note que se  $A$  é real, então  $A^* = A^T$ .

**Definição 1.9** Uma matriz quadrada  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  é chamada **simétrica** se  $A^T = A$  e **anti-simétrica** se  $A^T = -A$ .

**Observação 1.1** No caso complexo, matrizes que satisfazem  $A^* = A$  são denominadas **Hermitianas**.

A seguir apresentaremos alguns resultados que nos serão úteis, mais a frente. O teorema a seguir resume alguns fatos básicos da Álgebra Linear.

**Teorema 1.1** *Se  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , então as seguintes afirmações são equivalentes:*

- (a) *Existe  $A^{-1}$ .*
- (b) *Não existe  $\mathbf{y} \neq \mathbf{0}$  tal que  $A\mathbf{y} = \mathbf{0}$ .*
- (c) *As colunas de  $A$  são linearmente independentes.*
- (d) *As linhas de  $A$  são linearmente independentes.*
- (e)  *$\det(A) \neq 0$ .*
- (f) *Dado um vetor qualquer  $\mathbf{b}$ , existe exatamente um vetor  $\mathbf{x}$  tal que  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ .*

Para maiores detalhes ver, por exemplo, [AnRo 01].

**Definição 1.10** *Uma matriz quadrada na qual todas as entradas acima da diagonal principal são zero é chamada **triangular inferior** e uma matriz quadrada na qual todas as entradas abaixo da diagonal principal são zero é chamada **triangular superior**. Uma matriz que é triangular inferior ou triangular superior é chamada **triangular**.*

**Teorema 1.2 (Decomposição QR)** *Se  $A$  é uma matriz  $m \times n$  com vetores-coluna linearmente independentes, então  $A$  pode ser fatorada como*

$$A = QR,$$

*onde  $Q$  é uma matriz  $m \times n$  ortogonal, ( $Q^T Q = I$ ), no caso real, (unitária, ( $Q^* Q = I$ ), no caso complexo) e  $R$  é uma matriz  $n \times n$  triangular superior não-singular.*

Para detalhes sobre a demonstração do Teorema 1.2 ver, por exemplo, [De 97].

**Observação 1.2** Se  $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$  é uma matriz unitária, em particular,  $A^* = A^{-1}$ .

**Teorema 1.3** Dizemos que  $\lambda$  é um autovalor de  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  se, e somente se,

$$\det(\lambda I - A) = 0.$$

**Demonstração:** Sejam

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

A Equação 1.1 pode ser reescrita como  $A\mathbf{v} = \lambda I\mathbf{v}$  ou  $(\lambda I - A)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ . Escrevendo esta equação explicitamente, temos:

$$\begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}$$

Fazendo,

$$B = \begin{bmatrix} \lambda - a_{11} & -a_{12} & \dots & -a_{1n} \\ -a_{21} & \lambda - a_{22} & \dots & -a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ -a_{n1} & -a_{n2} & \dots & \lambda - a_{nn} \end{bmatrix}$$

temos o sistema

$$B\mathbf{v} = \mathbf{0}. \tag{1.2}$$

Assim, se  $\mathbf{v}$  é um autovetor com autovalor  $\lambda$  associado, então  $\mathbf{v}$  é uma solução não nula da Equação 1.2. Portanto pela parte (b) do Teorema 1.1, a matriz  $B$  é não-invertível, ou singular. Logo, pela parte (e) do mesmo Teorema,  $\det B = \det(\lambda I - A) = 0$ . É fácil ver que a recíproca é verdadeira.  $\square$

**Definição 1.11** A equação

$$\det(\lambda I - A) = 0 \tag{1.3}$$

é chamada **equação característica** de  $A$ , os escalares que satisfazem esta equação são os autovalores de  $A$ . Quando expandido, o determinante  $\det(\lambda I - A)$  é um polinômio de grau  $n$ , na variável  $\lambda$  que é chamado **polinômio característico** de  $A$ .

**Corolário 1.1** *Uma matriz quadrada  $A$  é não-singular se, e somente se, 0 não for um autovalor de  $A$ .*

**Demonstração:** Suponhamos que  $A$  seja uma matriz quadrada não-singular. Pelo Teorema 1.1 temos que  $\det(A) \neq 0$ , mas  $\det(A) \neq 0$  é equivalente a  $\det(A - 0I) \neq 0$ , onde  $I$  é a matriz identidade  $n \times n$ . Sendo assim, pelo Teorema 1.3, 0 não é uma raiz do polinômio característico de  $A$  (ou seja, 0 não é um autovalor de  $A$ ).

Reciprocamente, suponhamos que 0 não seja um autovalor de  $A$ . Pelo Teorema 1.3 temos que  $\det(A - 0I) \neq 0$ , ou seja,  $\det(A) \neq 0$ . Então, pelo Teorema 1.1  $A$  é não-singular.  $\square$

Pelo Teorema Fundamental da Álgebra, (ver, por exemplo, [ViAvSoBuFeFa 05]) sabemos que toda equação polinomial de grau  $n$  tem  $n$  raízes complexas, então  $A$  tem  $n$  autovalores, alguns dos quais podem ser repetidos. Se  $A$  é uma matriz real, o polinômio característico tem coeficientes reais. Mas as raízes deste polinômio, não são necessariamente reais, assim uma matriz real pode ter autovalores complexos. É por isso que faz sentido trabalharmos com os números complexos desde o início.

**Teorema 1.4** *Se uma matriz real possui autovalores complexos, então o conjugado desses autovalores também serão autovalores da matriz, ou seja, se  $\lambda = \alpha + \beta i$  ( $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ ) é um autovalor de  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$ , assim também será o complexo do conjugado  $\bar{\lambda} = \alpha - \beta i$ .*

**Teorema 1.5** *Seja  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  tal que seu polinômio característico tenha um par de raízes complexas  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ . Então se  $\mathbf{w} = \mathbf{u} + i\mathbf{v}$  é um autovetor tal que  $A\mathbf{w} = \lambda_1\mathbf{w}$ ,  $\mathbf{u}$  e  $\mathbf{v}$  são vetores de  $\mathbb{R}^n$  linearmente independentes.*

Agora é o momento de destacar um fato importante a respeito das matrizes reais. Seja  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e suponhamos que ela possua um autovalor real  $\lambda$ . No sistema homogêneo  $(\lambda I - A)\mathbf{v} = \mathbf{0}$ , os coeficientes da matriz  $\lambda I - A$  são reais. O fato de  $\lambda I - A$  ser singular implica que o sistema  $(\lambda I - A)\mathbf{v} = \mathbf{0}$  admite solução real e não trivial. Nós concluímos assim que todo autovalor real de uma matriz real possui um autovetor real associado.

Existem alguns tipos de matrizes para os quais os autovalores são óbvios. O teorema a seguir poderá ser muito útil mais tarde.

**Teorema 1.6** *Seja  $T \in \mathbb{C}^{n \times n}$  uma matriz triangular (superior, inferior ou diagonal). Então os autovalores de  $T$  são as entradas na diagonal principal  $t_{11}, t_{22}, \dots, t_{nn}$ .*

**Demonstração:** Como  $T$  é uma matriz triangular,  $\lambda I - T$  também é. Sabendo que o determinante de uma matriz triangular  $T$  é dado por  $t_{11}t_{22}\dots t_{nn}$ , ou seja, o produto das entradas na diagonal principal, temos que o polinômio característico de  $T$  é

$$\det(\lambda I - T) = (\lambda - t_{11})(\lambda - t_{22})\dots(\lambda - t_{nn}) = 0.$$

Onde as raízes são obviamente  $t_{11}, \dots, t_{nn}$ , ou seja, os autovalores de  $T$ . □

A seguinte generalização do Teorema 1.6 também é bastante útil.

**Teorema 1.7** *Seja  $A$  uma matriz triangular em blocos*

$$A = \begin{bmatrix} A_{11} & A_{12} & \dots & A_{1m} \\ & A_{22} & \dots & A_{2m} \\ & & \ddots & \vdots \\ & & & A_{mm} \end{bmatrix}$$

*Então o conjunto de autovalores de  $A$ , contando multiplicidade algébrica, é igual à união dos conjuntos de autovalores de  $A_{11}, A_{22}, \dots, A_{mm}$ .*

**Demonstração:** Como  $\lambda I - A$  é triangular em blocos,

$$\det(\lambda I - A) = \det(\lambda I - A_{11})\det(\lambda I - A_{22})\dots\det(\lambda I - A_{mm}).$$

Assim, o conjunto de raízes do polinômio característico de  $A$  é igual a união das raízes dos polinômios característicos de  $A_{11}, A_{22}, \dots, A_{mm}$ . □

Embora  $A$  tenha sido descrita como uma matriz triangular superior em blocos, o resultado é, obviamente, válido para uma matriz triangular inferior em blocos ou para uma matriz diagonal.

**Teorema 1.8** *Se  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_k$  são autovalores de  $A$  associados aos autovetores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ , e se  $\lambda_i \neq \lambda_j$ , para  $i \neq j$ , então  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$  são linearmente independentes.*

**Demonstração:** Faremos indução no número  $k$  de elementos do conjunto  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$ , tal que  $A(\mathbf{v}_i) = \lambda_i \mathbf{v}_i$ , onde  $\lambda_i \neq \lambda_j$ , para  $i \neq j$  e  $\mathbf{v}_i \neq \mathbf{0}$ . Se  $k = 1$ , o resultado é óbvio, mostraremos que o resultado é válido para  $k = 2$ . Suponhamos, por absurdo, que  $\mathbf{v}_2 = \alpha \mathbf{v}_1$ , então:

$$\lambda_2 \mathbf{v}_2 = A(\mathbf{v}_2) = A(\alpha \mathbf{v}_1) = \alpha A(\mathbf{v}_1) = \alpha \lambda_1 \mathbf{v}_1 = \lambda_1 \mathbf{v}_2 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_2$$

E chegamos a um absurdo, logo  $\mathbf{v}_1$  e  $\mathbf{v}_2$  são linearmente independentes e o resultado é válido para  $k = 2$ . Suponhamos que seja verdadeiro para  $k - 1$  vetores e consideremos o caso de  $k$  vetores. Seja

$$\alpha_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}, \quad (1.4)$$

aplicando  $A$  em (1.4), obtemos:

$$\alpha_1 A\mathbf{v}_1 + \alpha_2 A\mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k A\mathbf{v}_k = \mathbf{0}.$$

Mas  $A\mathbf{v}_i = \lambda_i \mathbf{v}_i$ . Assim,

$$\alpha_1 \lambda_1 \mathbf{v}_1 + \alpha_2 \lambda_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \alpha_k \lambda_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}. \quad (1.5)$$

Por outro lado, multiplicando (1.4) por  $\lambda_k$ , obtemos:

$$\lambda_k \alpha_1 \mathbf{v}_1 + \lambda_k \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + \lambda_k \alpha_k \mathbf{v}_k = \mathbf{0}. \quad (1.6)$$

Subtraindo (1.5 e 1.6), concluímos que

$$(\lambda_1 - \lambda_k) \alpha_1 \mathbf{v}_1 + (\lambda_2 - \lambda_k) \alpha_2 \mathbf{v}_2 + \dots + (\lambda_{k-1} - \lambda_k) \alpha_{k-1} \mathbf{v}_{k-1} = \mathbf{0}$$

Como  $\lambda_i - \lambda_k \neq 0, \forall i = 1, 2, \dots, k - 1$ , a hipótese de indução garante que  $\alpha_i = 0$  para  $i \in 1, 2, \dots, k - 1$ . Substituindo em (1.4), concluímos que  $\alpha_k = 0$  e que  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_k$  são linearmente independentes.  $\square$

**Definição 1.12** Dizemos que uma matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  é **semi-simples** se existe um conjunto de  $n$  autovetores linearmente independentes de  $A$ .

**Corolário 1.2** Se  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  possui  $n$  autovalores distintos, então  $A$  é semi-simples.

**Demonstração:** Sejam  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  autovetores associados aos  $n$  autovalores distintos de  $A$ , então pelo Teorema 1.8,  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  são linearmente independentes. Logo  $A$  é semi-simples.  $\square$

**Definição 1.13** Se  $A$  é uma matriz quadrada, então o **traço de  $A$** , denotado por  $\text{tr}(A)$ , é definido pela soma das entradas da diagonal principal de  $A$ .

**Teorema 1.9** Se  $A$  é uma matriz quadrada, então o traço de  $A$  é a soma dos autovalores de  $A$  e o determinante é o produto dos autovalores de  $A$ .

**Teorema 1.10 (Teorema dos Discos de Gershgorin)** Seja  $A = [a_{rj}]$  onde  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  e

$$R_r = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^n |a_{rj}|.$$

Então, todos os autovalores  $\lambda$  de  $A$  se encontram na união dos discos definidos no plano complexo por

$$|z - a_{rr}| \leq R_r, \quad r = 1, 2, 3, \dots, n,$$

tais discos são chamados **discos de Gershgorin**.

**Demonstração:** Seja  $\lambda$  um autovalor de  $A$ . Então existe um vetor não nulo  $\mathbf{v}$  tal que

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}. \quad (1.7)$$

Suponha que a  $r$ -ésima coordenada de  $\mathbf{v}$  tenha o maior valor absoluto, podemos normalizar  $\mathbf{v}$  de modo que

$$\mathbf{v}^T = (v_1, v_2, \dots, v_{r-1}, 1, v_{r+1}, \dots, v_n) \quad (1.8)$$

onde

$$|v_i| \leq 1 \quad (i \neq r). \quad (1.9)$$

Observemos que a  $r$ -ésima coordenada do vetor (1.7) é  $\lambda v_r$ , então temos:

$$\sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^n a_{rj} v_j = \lambda v_r = \lambda. \quad (1.10)$$

Portanto,

$$|\lambda - a_{rr}| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^n |a_{rj} v_j| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^n |a_{rj}| |v_j| \leq \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq r}}^n |a_{rj}| = R_r, \quad (1.11)$$

ou seja,

$$|\lambda - a_{rr}| \leq R_r.$$

Como não sabemos qual  $r$  é apropriado para cada autovalor, e um mesmo  $r$  pode servir para vários autovalores, tudo o que podemos afirmar é que os autovalores estão na união dos discos de Gershgorin.  $\square$

**Teorema 1.11** *Se uma união de  $k$  discos de Gershgorin forma uma região que é disjunta dos  $n - k$  discos restantes, então existem exatamente  $k$  autovalores de  $A$  nesta região.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada, por exemplo, em [Wi 65].

A união dos discos de Gershgorin é conhecida como a **região de Gershgorin**. Observe que enquanto não podemos em geral afirmar com certeza que cada disco de Gershgorin possui um autovalor, o Teorema 1.11 nos permite fazer tal conclusão desde que os discos de Gershgorin sejam dois a dois disjuntos. Para maiores detalhes ver, por exemplo, [Wi 65].

## 1.2 Interpretações geométricas

Vimos que se  $A$  é uma matriz  $n \times n$ , então um vetor não-nulo  $\mathbf{v}$  em  $\mathbb{R}^n$  é chamado um **autovetor** de  $A$  se  $A\mathbf{v}$  é um múltiplo escalar de  $\mathbf{v}$ , ou seja,

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$$

para algum escalar  $\lambda$ . O escalar  $\lambda$  é chamado de um **autovalor** de  $A$  e dizemos que  $\lambda$  é um autovalor associado a  $\mathbf{v}$ . Mas geometricamente, o que isto significa?

Em  $\mathbb{R}^2$  e  $\mathbb{R}^3$ , a multiplicação por uma matriz  $A$  manda cada autovetor  $\mathbf{v}$  de  $A$  (se houver) sobre a mesma reta pela origem que  $\mathbf{v}$ . Dependendo do sinal e da magnitude do autovalor  $\lambda$  associado a  $\mathbf{v}$ , a transformação linear  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$  comprime ou estica  $\mathbf{v}$  por um fator  $\lambda$ , invertendo o sentido, no caso de  $\lambda$  negativo (Figura 1.1 retirada de [AnRo 01]).

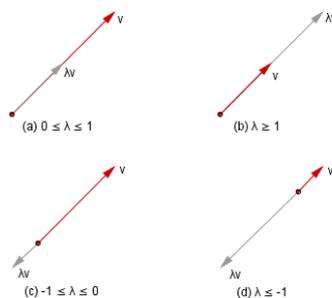


Figura 1.1:  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$

Consideremos agora três casos em que analisaremos o efeito de transformarmos vetores por meio de algumas matrizes.

**Caso 1:** Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Observemos que se  $\mathbf{v}$  é um autovetor de  $A$  correspondente ao autovalor  $\lambda$ , então todo múltiplo não nulo de  $\mathbf{v}$  também o é. Logo, basta considerarmos o efeito de  $A$  sobre os vetores unitários. Temos que  $\mathbf{v}_1 = (1, 0)$  e  $\mathbf{v}_2 = (0, 1)$  são autovetores de  $A$ , cujos autovalores associados são, respectivamente,  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = 1$ . Sabemos que em  $\mathbb{R}^2$ , o conjunto de todos os vetores unitários pode ser identificado com o círculo unitário, cujos vetores são escritos na forma:

$$\mathbf{v} = \cos(t)\mathbf{v}_1 + \sin(t)\mathbf{v}_2$$

A imagem do círculo unitário será:

$$A\mathbf{v} = \cos(t)A\mathbf{v}_1 + \sin(t)A\mathbf{v}_2$$

$$A\mathbf{v} = \cos(t)\lambda_1\mathbf{v}_1 + \sin(t)\lambda_2\mathbf{v}_2$$

uma elipse cujo semi-eixo maior tem o comprimento  $|\lambda_1\mathbf{v}_1| = |\lambda_1| = 2$  e cujo semi-eixo menor tem o comprimento  $|\lambda_2\mathbf{v}_2| = |\lambda_2| = 1$  (Figura 1.2).

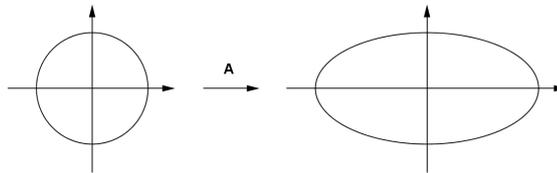


Figura 1.2: Imagem do círculo unitário

**Caso 2:** Seja

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}.$$

Seus autovalores são  $\lambda_1 = i$  e  $\lambda_2 = -i$ . O autovetor  $\mathbf{w}_1$  associado a  $\lambda_1$  é:

$$\mathbf{w}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{w}}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} + i \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Notemos que o autovetor  $\mathbf{w}_2$  associado a  $\lambda_2$  é:

$$\mathbf{w}_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad \hat{\mathbf{w}}_2 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ 0 \end{bmatrix} - i \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Temos dois vetores  $\mathbf{e}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$  e  $\mathbf{e}_2 = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix}$  que são linearmente independentes e constituem a base canônica  $B = (\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2)$  do plano  $\mathbb{R}^2$ . Observemos que

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi}{2} & \sen \frac{\pi}{2} \\ -\sen \frac{\pi}{2} & \cos \frac{\pi}{2} \end{bmatrix},$$

ou seja, a matriz  $A$  é a matriz de rotação de  $\frac{\pi}{2}$  (rotação no sentido horário).

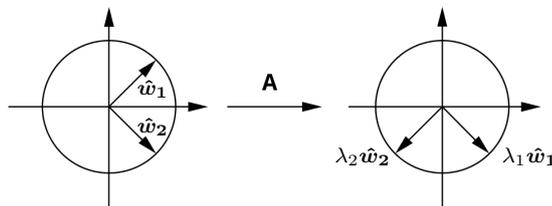


Figura 1.3: Imagem do círculo unitário

**Caso 3:** Seja

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}.$$

A matriz  $A$  tem dois autovalores reais e distintos  $\lambda_1 = 6$  e  $\lambda_2 = -2$ . A eles estão associados, respectivamente, os autovetores ortogonais:

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{v}}_1 = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \hat{\mathbf{v}}_2 = \begin{bmatrix} \frac{-1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} \end{bmatrix}.$$

Geometricamente a aplicação da matriz  $A$  estica os vetores na direção de  $\mathbf{v}_1$  por um fator de 6 e os vetores na direção de  $\mathbf{v}_2$  por um fator de  $-2$ . Como qualquer vetor pode ser decomposto nestas direções temos a descrição geométrica da ação de  $A$  sobre qualquer vetor de  $\mathbb{R}^2$ . Aplicando a matriz  $A$  no círculo unitário, obteremos como imagem uma

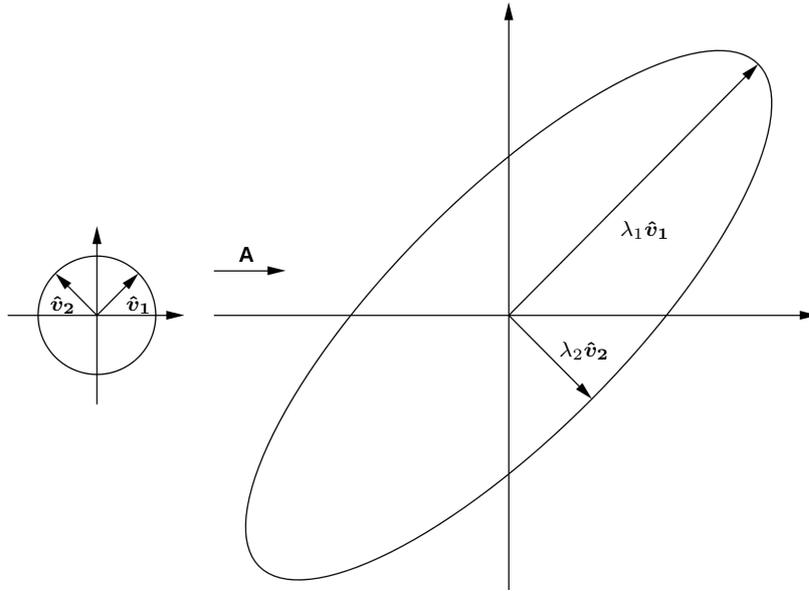


Figura 1.4: Imagem do círculo unitário

elipse conforme indicado pela Figura 1.4.

Vimos então uma interpretação geométrica para os autovalores e autovetores de uma matriz em  $\mathbb{R}^2$ . Analisemos agora a relação existente entre o problema de autovalores e equações polinomiais.

### 1.3 Equivalência entre problemas de autovalores e equações polinomiais

Vimos que encontrar autovalores de  $A$  é equivalente a encontrar as raízes da equação polinomial  $\det(\lambda I - A) = 0$ . Portanto, se temos uma maneira de encontrar as raízes de uma equação polinomial arbitrária, então, em princípio, podemos encontrar autovalores de uma matriz arbitrária. O próximo teorema mostra que o inverso também é verdade: Se temos uma maneira de encontrar os autovalores de uma matriz arbitrária, então, em princípio, podemos encontrar as raízes de um polinômio arbitrário.

Um polinômio arbitrário de grau  $n$  tem a forma  $q(\lambda) = b_0 + b_1\lambda + b_2\lambda^2 + \dots + b_n\lambda^n$ , com

$b_n \neq 0$ . Se dividirmos todos os coeficientes de  $q(\lambda)$  por  $b_n$ , obteremos um novo polinômio  $p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n$  ( $a_k = \frac{b_k}{b_n}$ ) com as mesmas raízes de  $q(\lambda)$  e ainda mônico, ou seja, seu coeficiente líder  $a_n = 1$ . Uma vez que sempre podemos substituir a equação polinomial  $q(\lambda) = 0$  pela equação equivalente  $p(\lambda) = 0$ , é suficiente considerarmos os polinômios mônicos.

**Definição 1.14** *Seja  $p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n$  um polinômio mônico de grau  $n$ . Sua **matriz companheira** é definida como*

$$A = \begin{bmatrix} -a_{n-1} & -a_{n-2} & -a_{n-3} & \dots & -a_1 & -a_0 \\ 1 & & & & & 0 \\ & 1 & & & & 0 \\ & & \ddots & & & \vdots \\ & & & & 1 & 0 \end{bmatrix},$$

uma matriz  $n \times n$  com a primeira linha dada pelos simétricos dos coeficientes de  $p$  (a exceção do coeficiente líder, que é sempre  $= 1$ ), subdiagonal igual a 1 e as outras entradas iguais a zero.

**Teorema 1.12** *Seja  $p(\lambda) = a_0 + a_1\lambda + a_2\lambda^2 + \dots + a_n\lambda^n$  um polinômio mônico de grau  $n$  e  $A$  sua matriz companheira. Então o polinômio característico de  $A$  é  $p$ . Assim, as raízes de  $p(\lambda) = 0$  são autovalores de  $A$ .*

**Demonstração:** Faremos indução no grau  $n$  do polinômio  $p$ . Para  $n = 1$ , tem-se que  $p(\lambda) = \lambda + a_0$  e  $A = -a_0$ . Então,

$$\det(\lambda I_1 - A) = \lambda + a_0 = p(\lambda).$$

Suponhamos que seja verdade para  $n - 1$  e provemos para  $n$ . Seja  $n \geq 2$ , então precisamos calcular  $\det(\lambda I_n - A)$  e para isto o expandimos com relação a última coluna, usando a regra de Laplace.

$$\det(\lambda I_n - A) = \det \begin{bmatrix} \lambda + a_{n-1} & a_{n-2} & a_{n-3} & \dots & a_0 \\ -1 & \lambda & & & \\ & -1 & \lambda & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & \lambda \end{bmatrix}$$

$$= (-1)^2 a_0 \det \begin{bmatrix} -1 & \lambda & & & \\ & -1 & \lambda & & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & \lambda \\ & & & & -1 \end{bmatrix} + (-1)^{n+1} \lambda \det \begin{bmatrix} \lambda + a_{n-1} & a_{n-2} & \dots & a_2 & a_1 \\ & -1 & & \lambda & \\ & & \ddots & \ddots & \\ & & & -1 & \lambda \\ & & & & -1 & \lambda \end{bmatrix}.$$

Usando a hipótese de indução, temos que:

$$\det(\lambda I_n - A) = (-1)^2 a_0 (-1)^{n-1} + (-1)^{n+1} \lambda (a_1 + a_2 \lambda + \dots + a_{n-1} \lambda^{n-2} + \lambda^{n-1})$$

$$\det(\lambda I_n - A) = (-1)^{n+1} (a_0 + a_1 \lambda + a_2 \lambda^2 + \dots + a_n \lambda^n) = (-1)^{n+1} p(\lambda).$$

Então está provado que  $\det(\lambda I - A) = p(\lambda)$ . □

A conclusão deste teorema é muito importante, pois nos fornece uma maneira de encontrar os autovalores de uma matriz arbitrária. E esta é uma necessidade comum, pois os modelos matemáticos de muitos problemas de engenharia, por exemplo, são sistemas de equações diferenciais lineares. E as soluções destas equações são muitas vezes expressas em termos de autovalores e autovetores das matrizes destes sistemas.

## 1.4 Sistema de equações diferenciais

Muitas aplicações de autovalores e autovetores surgem a partir do estudo de sistemas de equações diferenciais lineares. Resolvermos tais sistemas, de  $n$  equações (de primeira ordem) com coeficientes constantes, significa encontrarmos  $n$  funções continuamente diferenciáveis  $x_1, \dots, x_n : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  que satisfaçam o sistema:

$$x'_1 = a_{11}x_1 + \dots + a_{1n}x_n + b_1$$

$$x'_2 = a_{21}x_1 + \dots + a_{2n}x_n + b_2$$

$$\vdots = \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots \quad \quad \quad \vdots$$

$$x'_n = a_{n1}x_1 + \dots + a_{nn}x_n + b_n$$

Definindo a função  $x : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}^n$  por  $\mathbf{x}(t) = (x_1(t) \dots x_n(t))^t$ , verificamos que esse sistema pode ser escrito na forma

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b} \tag{1.12}$$

em que  $\mathbf{x}'(t)$  é o vetor obtido derivando-se cada uma das coordenadas do vetor  $\mathbf{x}(t)$  e  $\mathbf{b} = (b_1 \dots b_n)^t$ . Um passo importante na resolução de sistemas, da forma  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} - \mathbf{b}$ , é resolver o sistema homogêneo associado, ou seja,

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x}. \quad (1.13)$$

Sendo assim, a partir de agora nos concentraremos na solução de tais sistemas. Às vezes, estaremos interessados em encontrar uma solução de (1.13) que satisfaça a condição inicial

$$\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$$

em que  $\mathbf{x}_0$  é um vetor de  $\mathbb{R}^n$ , neste caso estaremos lidando com um problema de valor inicial.

**Teorema 1.13** *O problema de valor inicial*

$$\begin{cases} \mathbf{x}' = A\mathbf{x} \\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \end{cases}$$

*possui, no máximo, uma solução.*

Para demonstração deste Teorema, ver, por exemplo, [Sa 11].

Uma abordagem comum para a resolução de equações diferenciais lineares é começar por procurar soluções que possuam uma forma particularmente simples. Portanto, vamos buscar soluções da forma

$$\mathbf{x}(t) = g(t)\mathbf{v} \quad (1.14)$$

onde  $g(t)$  é uma função arbitrária de  $t$  não nula, e  $\mathbf{v}$  é um vetor constante não nulo. Substituindo (1.14) em (1.13) obtemos:

$$g'(t)\mathbf{v} = g(t)A\mathbf{v}$$

ou

$$\frac{g'(t)}{g(t)}\mathbf{v} = A\mathbf{v}. \quad (1.15)$$

Como  $\mathbf{v}$  e  $A\mathbf{v}$  são vetores constantes, temos que  $\frac{g'(t)}{g(t)}$  deve ser constante. Sendo assim, existe uma constante  $\lambda$  (real ou complexa) tal que:

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = \lambda. \quad (1.16)$$

Logo,

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}.$$

O vetor não nulo  $\mathbf{v}$  para o qual existe  $\lambda$  tal que  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$  é chamado de *autovetor* de  $A$ . E o número  $\lambda$  é chamado de *autovalor* de  $A$  associado a  $\mathbf{v}$ . Até agora, mostramos que, se  $x(t)$  é uma solução de  $x' = Ax$ , então  $\mathbf{v}$  deve ser um autovetor de  $A$  e  $g(t)$  deve satisfazer a equação diferencial (1.16), onde  $\lambda$  é um autovalor de  $A$  associado a  $\mathbf{v}$ . Observemos que ao considerarmos a equação diferencial  $\frac{g'(t)}{g(t)} = \lambda$  com  $g(0) = c$  temos:

$$\lambda = \frac{g'(t)}{g(t)} = [\ln(g(t))]'.$$

Integrando ambos os membros desta equação em relação a  $t$ , obtemos

$$\begin{aligned} \int \lambda dt &= \int [\ln(g(t))]' dt \\ \lambda t + k &= \ln(g(t)) \\ e^{\lambda t + k} &= e^{\ln(g(t))} \\ e^{\lambda t} e^k &= g(t). \end{aligned}$$

Fazendo  $e^k = c$ ,  $g(t) = ce^{\lambda t}$ , o que demonstra a existência de solução. Pelo Teorema 1.13 esta solução é única.

Por outro lado, se  $\mathbf{v}$  é um autovetor de  $A$  com autovalor  $\lambda$  associado, então

$$\mathbf{x}(t) = g(t)\mathbf{v} = ce^{\lambda t}\mathbf{v}$$

é uma solução de  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ , o que pode ser facilmente verificado. Assim, cada autovetor de  $A$  dá origem a uma solução de (1.13). Agora, suponhamos que  $A$  (matriz  $n \times n$ ) tem um conjunto de  $n$  autovetores  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  linearmente independentes com  $n$  autovalores associados  $\lambda_1 \dots \lambda_n$ . Então, para constantes  $c_1, c_2, \dots, c_n$ ,

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \mathbf{v}_n \quad (1.17)$$

é uma solução de  $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}$ , fato este que é verificado utilizando o Princípio da Superposição (para maiores detalhes, ver, por exemplo, [Sa 11]).

**Definição 1.15** *Sejam  $x_1, x_2, \dots, x_n$  soluções do sistema (1.13). Consideremos a matriz  $X(t)$ , cujas colunas são os vetores  $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$ . Definimos o Wronskiano  $W(\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n)(t)$  das soluções  $\mathbf{x}_1, \dots, \mathbf{x}_n$  por*

$$W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)(t) = \det X(t).$$

Dizemos que as soluções  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  são linearmente independentes, se

$$W(\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n)(t) \neq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

Caso contrário, as soluções são linearmente dependentes.

**Teorema 1.14** Se a matriz  $A$  é diagonalizável, então a solução geral do sistema de equações diferenciais lineares de primeira ordem  $\mathbf{x}'(t) = A\mathbf{x}$  é

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \mathbf{v}_n,$$

onde  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  são os  $n$  autovetores linearmente independentes de  $A$  associados aos respectivos autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  (não necessariamente distintos) de  $A$ .

**Demonstração:** Vamos mostrar que dada qualquer solução  $\mathbf{x}(t)$  de (1.13),  $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \mathbf{v}_n$  para valores apropriados de  $c_1, c_2, \dots, c_n$ . Seja  $t = t_0 \in \mathbb{R}$  e seja  $\boldsymbol{\xi} = \mathbf{x}(t_0)$ . Queremos determinar se existe alguma solução da forma  $\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \mathbf{v}_n$  que também satisfaça a condição inicial  $\mathbf{x}(t_0) = \boldsymbol{\xi}$ . Em outras palavras, queremos saber se existem valores  $c_1, c_2, \dots, c_n$  para os quais

$$c_1 e^{\lambda_1 t_0} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t_0} \mathbf{v}_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t_0} \mathbf{v}_n = \boldsymbol{\xi}, \quad (1.18)$$

ou,

$$\begin{aligned} c_1 e^{\lambda_1 t_0} \mathbf{v}_1^{(1)} + \dots + c_n e^{\lambda_n t_0} \mathbf{v}_1^{(n)} &= \boldsymbol{\xi}_1 \\ &\vdots \\ c_1 e^{\lambda_1 t_0} \mathbf{v}_n^{(1)} + \dots + c_n e^{\lambda_n t_0} \mathbf{v}_n^{(n)} &= \boldsymbol{\xi}_n \end{aligned} \quad (1.19)$$

A condição necessária e suficiente para que as equações (1.19) possuam uma única solução  $c_1, c_2, \dots, c_n$  é exatamente que o determinante da matriz dos coeficientes, que é o wronskiano  $W[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n](t)$  ( $\mathbf{x}_i = e^{\lambda_i t} \mathbf{v}_i$ ,  $i = 1, \dots, n$ ) no ponto  $t_0$  seja diferente de zero. Em primeiro lugar, note que a função exponencial nunca se anula. Segundo, como os autovetores  $\mathbf{v}_1, \dots, \mathbf{v}_n$  são linearmente independentes garante-se que  $W[\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n](t)$  não se anula em  $t = t_0$  e, portanto existe uma única solução de (1.13) da forma

$$c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t} \mathbf{v}_n$$

que também satisfaz a condição inicial. □

Após esta discussão sobre sistemas homogêneos de equações diferenciais lineares, nos concentraremos em encontrar a solução do sistema não homogêneo

$$\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}.$$

**Teorema 1.15** *Seja  $\mathbf{z}$  uma solução particular do sistema não homogêneo  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x} + \mathbf{b}$ . Sejam  $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$  soluções do sistema homogêneo correspondente tais que  $\mathbf{x}_1(0), \dots, \mathbf{x}_n(0)$  são L.I. Então a solução geral do sistema não homogêneo é:*

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{z} + c_1\mathbf{x}_1(t) + \dots + c_n\mathbf{x}_n(t).$$

**Demonstração:** Sejam  $\mathbf{x}(t)$  uma solução qualquer e  $\mathbf{z}$  uma solução particular do sistema não homogêneo, então  $\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{z}$  é uma solução particular do sistema homogêneo associado  $\mathbf{x}' = A\mathbf{x}$ , pois

$$\mathbf{y}'(t) = \mathbf{x}'(t) - \mathbf{z}' = A\mathbf{x}(t) + \mathbf{b} - (A\mathbf{z} + \mathbf{b}) = A(\mathbf{x}(t) - \mathbf{z}) = A\mathbf{y}(t).$$

Assim, se  $\mathbf{x}_1(t), \dots, \mathbf{x}_n(t)$  são soluções do sistema homogêneo correspondente tais que  $\mathbf{x}_1(0), \dots, \mathbf{x}_n(0)$  são L.I então pelo Teorema (1.13) existem constantes  $c_1, c_2, \dots, c_n$  tais que

$$\mathbf{y}(t) = \mathbf{x}(t) - \mathbf{z} = c_1\mathbf{x}_1(t) + \dots + c_n\mathbf{x}_n(t)$$

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{z} + c_1\mathbf{x}_1(t) + \dots + c_n\mathbf{x}_n(t).$$

□

Portanto se  $A$  é diagonalizável, a solução geral de um sistema de equações lineares não homogêneo pode ser escrita como

$$\mathbf{x}(t) = \mathbf{z} + c_1e^{\lambda_1 t}\mathbf{v}_1 + c_2e^{\lambda_2 t}\mathbf{v}_2 + \dots + c_n e^{\lambda_n t}\mathbf{v}_n,$$

onde  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  são os  $n$  autovetores linearmente independentes de  $A$  associados aos respectivos autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  (não necessariamente distintos) de  $A$  e  $\mathbf{z}$  uma solução particular do sistema não homogêneo.

### 1.4.1 Circuito RLC

Os circuitos equivalentes às redes elétricas com as quais trabalhamos consistem basicamente em três componentes lineares passivos: resistores, capacitores e indutores. Um exemplo da ocorrência de equações diferenciais lineares com coeficientes constantes é a sua utilização como modelo de fluxo de corrente elétrica em circuitos RLC. O circuito RLC consiste de uma fonte de tensão  $E$  em série com um resistor  $R$ , um indutor  $L$  e um

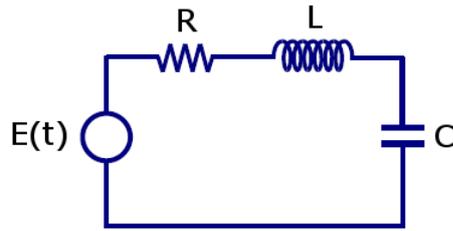


Figura 1.5: Circuito RLC

capacitor  $C$ , de acordo com a Figura 1.5. As análises apresentadas nesta seção poderão ser encontradas em [AlSa 03].

A corrente elétrica  $I$  medida em ampères, é uma função do tempo  $t$ . A resistência  $R$  (em ohms), a capacitância  $C$  (em farads) e a indutância  $L$  (em henrys) são todas constantes positivas que supomos conhecidas. A tensão aplicada  $E$  (em volts) é uma função do tempo dada. Uma outra quantidade física que entra na discussão é a carga total  $Q$  (em coulombs) no capacitor no instante  $t$ . A relação entre a carga  $Q$  e a corrente  $I$  é

$$I = \frac{dQ}{dt}. \quad (1.20)$$

O fluxo de corrente no circuito é governado pela segunda lei de Kirchhoff: *Em um circuito fechado, a tensão aplicada é igual à soma das quedas de tensão no resto do circuito.*

De acordo com as leis elementares da eletricidade sabemos que:

- A queda de tensão no resistor é  $IR$ .
- A queda de tensão no capacitor é  $\frac{Q}{C}$ .
- A queda de tensão no indutor é  $L\frac{dI}{dt}$ .

Portanto, pela lei de Kirchhoff,

$$L\frac{dI}{dt} + RI + v_C = E(t). \quad (1.21)$$

Como a corrente através do capacitor é proporcional à taxa de variação da queda de tensão no capacitor ( $v_C$ ), obtemos:

$$I = C\frac{dv_C}{dt}. \quad (1.22)$$

Assim, o sistema de equações diferenciais de 1ª ordem formado por (1.22) e (1.21) pode ser colocado na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} \frac{dI}{dt} \\ \frac{dv_C}{dt} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\frac{R}{L} & -\frac{1}{L} \\ \frac{1}{C} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I \\ v_C \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \frac{1}{L} \\ 0 \end{bmatrix} E(t). \quad (1.23)$$

Alternativamente, sistema (1.23) de 1ª ordem pode ser colocado como uma equação diferencial de 2ª ordem, bastando para isto substituir (1.22) em (1.21):

$$E(t) = LC \frac{d^2 v_C}{dt^2} + RC \frac{dv_C}{dt} + v_C. \quad (1.24)$$

Agora consideremos o comportamento autônomo do circuito (sem entrada externa), ou seja,  $E(t) = 0$ . Nesse caso, o circuito é excitado pela energia inicialmente armazenada no capacitor e no indutor. Logo, a equação diferencial (1.21) pode ser expressa por:

$$0 = LC \frac{d^2 I}{dt^2} + RC \frac{dI}{dt} + I = \frac{d^2 I}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{dI}{dt} + \frac{1}{LC} I, \quad (1.25)$$

cuja forma geral é dada por:

$$\frac{d^2 I}{dt^2} + 2\alpha \frac{dI}{dt} + \omega^2 I = 0, \quad (1.26)$$

onde:

$\alpha = \frac{R}{2L}$  é o fator de amortecimento do sinal  $i(t)$ , medido em  $s^{-1}$ ,

$\omega = \sqrt{\frac{1}{LC}}$  é a frequência natural sem amortecimento, medida em  $\frac{rad}{s}$ ,

$T = \frac{2\pi}{\omega_0}$  é o período de oscilação, medido em s.

Para resolvermos essa equação diferencial de segunda ordem (1.25), precisamos de duas condições iniciais:

$$\left. \frac{dI}{dt} \right|_{t=0} = -\frac{1}{L}(RI_0 + v_C(0))$$

$$I(0) = I_0.$$

Observemos que é possível transformarmos uma EDO de ordem  $n$  em um sistema EDO de 1ª ordem com  $n$  equações e para isto, primeiramente definimos  $\mathbf{x}(t)$  como variável de estado:

$$\mathbf{x}(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} I(t) \\ \frac{dI(t)}{dt} \end{bmatrix}.$$

Podemos então expressar a EDO (1.26) de 2ª ordem em um sistema de EDO de 1ª ordem:

$$\mathbf{x}'(t) = \begin{bmatrix} x_1'(t) \\ x_2'(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}. \quad (1.27)$$

Vamos escrever

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix}.$$

O polinômio característico de  $A$  é

$$p_A(\lambda) = \lambda^2 + \frac{R}{L}\lambda + \frac{1}{CL}, \quad (1.28)$$

ou

$$p_A = \lambda^2 + 2\alpha\lambda + \omega_0^2, \quad (1.29)$$

sendo que as constantes  $R$ ,  $L$  e  $C$  são positivas. A equação quadrática (1.28) ainda é chamada de *equação característica* da equação diferencial (1.25), pois suas raízes (autovalores) ditam as características de  $I$ . Os dois autovalores de (1.29) são:

$$\lambda_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2} \text{ e } \lambda_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}. \quad (1.30)$$

Assim sendo, a resposta natural de um circuito RLC série é

$$I(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},$$

na qual as constantes  $c_1$  e  $c_2$  são determinadas a partir dos valores iniciais de  $I(0)$  e  $\frac{dI(0)}{dt}$  [Ma 06].

A partir da equação (1.30), podemos inferir a existência de três tipos de solução, as quais identificam o comportamento do circuito do ponto de vista do *amortecimento*, que é a perda gradual de energia inicialmente armazenada, evidenciada pelo decréscimo da amplitude da resposta. O efeito de amortecimento é devido a presença da resistência  $R$ .

**1. Caso superamortecido (autovalores reais).** Se  $\alpha > \omega_0$  teremos  $\Delta > 0$  e haverá dois autovalores reais,  $\lambda_1 = -\alpha + \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$  e  $\lambda_2 = -\alpha - \sqrt{\alpha^2 - \omega_0^2}$ , em que  $\lambda_2 < \lambda_1 < 0$ . Observemos ainda que a matriz  $A$  é diagonalizável, pois

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_1 \end{bmatrix}^{-1}.$$

Logo, pelo Teorema (1.14) a resposta será:

$$I(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} + c_2 e^{\lambda_2 t},$$

a qual decai e se aproxima de zero com o aumento de  $t$ . A Figura 1.6 ([AlSa 03]) ilustra uma típica resposta superamortecida.

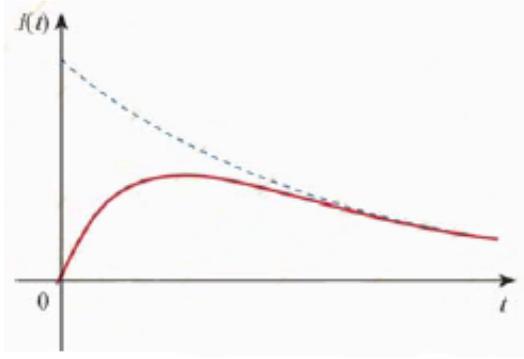


Figura 1.6: Caso superamortecido

**2. Caso limite ou crítico (autovalores iguais).** Se  $\alpha = \omega_0$  teremos  $\Delta = 0$  e o autovalor  $\lambda = -\alpha$  terá multiplicidade 2. Observemos ainda que a matriz  $A$  não é diagonalizável. De fato,

$$A - \lambda I = \begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ -\frac{C}{L} & -\frac{R}{L} - \lambda \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\lambda & 1 \\ \lambda^2 & \lambda \end{bmatrix},$$

tem núcleo de dimensão 1. Portanto, é possível mostrar que a resposta natural de um circuito com amortecimento crítico é a soma de dois termos: uma exponencial negativa e uma exponencial negativa multiplicada por um termo linear, ou seja,

$$I(t) = (c_2 + c_1 t)e^{-\alpha t}.$$

Para maiores detalhes ver, por exemplo [AlSa 03]. Uma típica resposta do amortecimento crítico é mostrada na Figura 1.7 ([AlSa 03]).

**3. Caso subamortecido (autovalores complexos).** Se  $\alpha < \omega_0$  teremos  $\Delta < 0$  e haverá uma par de autovalores complexos conjugados

$$\lambda_1 = -\alpha + \sqrt{-(\omega_0^2 - \alpha^2)} = -\alpha + j\omega_d, \quad (1.31)$$

$$\lambda_2 = -\alpha - \sqrt{-(\omega_0^2 - \alpha^2)} = -\alpha - j\omega_d, \quad (1.32)$$

onde  $j = \sqrt{-1}$  e  $\omega_d = \sqrt{-(\omega_0^2 - \alpha^2)}$ , a qual é chamada *frequência amortecida*. A resposta natural é

$$I(t) = c_1 e^{-\alpha + j\omega_d t} + c_2 e^{-\alpha - j\omega_d t}.$$

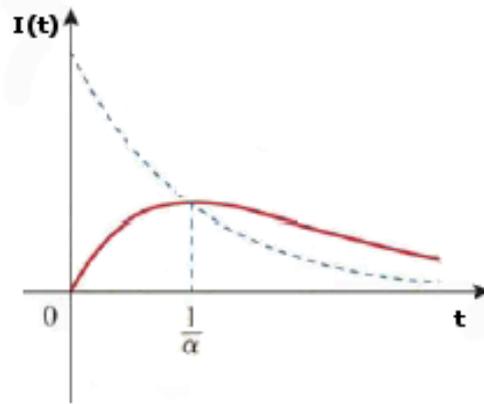


Figura 1.7: Caso crítico

Usando a identidade de Euler

$$e^{j\theta} = \cos\theta + j\text{sen}\theta, \quad e^{-j\theta} = \cos\theta - j\text{sen}\theta,$$

obtemos

$$I(t) = e^{-\alpha t}[(c_1 + c_2)\cos\omega_d t + j(c_1 - c_2)\text{sen}\omega_d t].$$

Substituindo as constantes  $(c_1 + c_2)$  e  $j(c_1 - c_2)$  pelas constantes  $d_1$  e  $d_2$  respectivamente, temos:

$$I(t) = e^{-\alpha t}[(d_1\cos\omega_d t + d_2\text{sen}\omega_d t)].$$

Com a presença das funções seno e cosseno é evidente que a resposta natural para este caso é exponencialmente amortecida e oscilatória, por natureza. A resposta possui uma constante de tempo  $\frac{1}{\alpha}$  e período  $T = \frac{2\pi}{\omega_d}$ . A Figura 1.8 ([AlSa 03]) mostra uma resposta típica subamortecida.

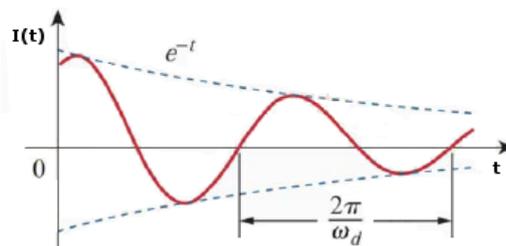


Figura 1.8: Caso subamortecido

Uma vez que a corrente  $I(t)$  do indutor tenha sido determinada no circuito RLC série,

como mostrado, as outras grandezas, como as tensões individuais dos elementos podem ser facilmente determinadas. Sendo assim, dado um circuito RLC série, em que  $R = 40\Omega$ ,  $L = 4H$  e  $C = \frac{1}{4}F$  podemos determinar se a resposta natural é superamortecida, subamortecida ou crítica. Para isto vamos escrever

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{1}{LC} & -\frac{R}{L} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & -10 \end{bmatrix}.$$

Neste caso, facilmente verificamos que os autovalores da matriz  $A \in \mathbb{R}^{2 \times 2}$  são

$$\lambda_1 = -0.1010 \text{ e } \lambda_2 = -9.8990.$$

Logo, concluímos que o sistema é superamortecido.

Observemos que ao contrário do exemplo acima, ao trabalharmos com matrizes de ordem maior, torna-se difícil calcular seus autovalores usando o polinômio característico. Sendo assim, faz-se necessário o uso dos chamados Métodos Numéricos.

## 1.5 Necessidade de Métodos Numéricos

Concluímos pelo Teorema 1.12, que o problema de encontrar autovalores e o de encontrar raízes de uma equação polinomial são equivalentes. Embora os algoritmos que iremos desenvolver não façam uso direto dessa equivalência, ela tem uma importante implicação teórica. Encontrar raízes de uma equação polinomial é um velho problema que tem atraído o interesse de grandes mentes. Em particular, no início do século XIX, Neils Henrik Abel foi capaz de provar que não existe uma fórmula geral para as raízes de uma equação polinomial de grau  $n$  se  $n > 4$ . Segue-se que não há uma fórmula geral para encontrar os autovalores de uma matriz  $n \times n$  se  $n > 4$  (ver, por exemplo, [Ha 78]). Este fato motiva a utilização de métodos numéricos para determinar os autovalores de uma matriz  $n \times n$ .

Métodos numéricos podem ser divididos em duas grandes categorias: diretos e iterativos. Um método direto é aquele que produz o resultado em um número finito de etapas. Todas as versões da eliminação Gauss para resolver  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  são métodos diretos. Por outro lado, um método iterativo é aquele que produz uma sequência de valores aproximados que converge para a solução verdadeira do problema. Cada etapa ou iteração do algoritmo produz um novo valor aproximado. Em princípio, esta sequência é infinita, mas na prática não podemos rodar o algoritmo para sempre. Paramos de rodá-lo uma vez que tenhamos

produzido uma aproximação que seja suficientemente boa e que estamos dispostos a aceitá-la como a solução. O número de iterações que será necessário para chegar a este ponto normalmente não é conhecido antecipadamente, embora muitas vezes possa ser estimado.

O Teorema de Abel mostra que não há métodos diretos para resolver de modo geral o problema de calcular autovalores. Sendo assim, todo método para calcular autovalores de uma matriz  $A$  de ordem maior que 4 é necessariamente um método iterativo.

### 1.5.1 Complexidade dos algoritmos

Nesta seção introduziremos os conceitos básicos relacionados aos algoritmos. Começamos com a definição de um algoritmo, encontrada em [Da 10].

**Definição 1.16** *Um **algoritmo** é um conjunto ordenado de operações, lógicas e aritméticas, que quando aplicadas a um problema computacional definido por um dado conjunto de dados, chamado **input data**, produz uma solução para o problema em um número finito de passos.*

Neste trabalho, por uma questão de conveniência e simplicidade, muitas vezes descreveremos no decorrer do texto os algoritmos por meio de **pseudocódigos**, que é uma forma genérica de escrever um algoritmo, utilizando uma linguagem simples sem necessidade de conhecer a sintaxe de nenhuma linguagem de programação. Entretanto, em anexo apresentaremos a implementação de alguns dos pseudocódigos. Tais implementações foram feitas pelo aluno Magno Tairone de Freitas Severino, do curso de Matemática Computacional da UFMG, para isto utilizou a linguagem C++. A execução desses algoritmos foi feita em um computador com processador Pentium Dual T3400 2.16GHz e 2.98 GB de RAM.

Uma propriedade desejável de um algoritmo é a eficiência, que está relacionada com o tempo gasto para executá-lo. Em geral este tempo depende de dois fatores: a velocidade de processamento e o número de operações que o algoritmo executa. A velocidade dos processadores está aumentando a cada dia, de modo que os avanços tecnológicos naturais ajudam a reduzir o custo de execução dos algoritmos. Contudo o número de operações requeridas não é uma questão de tecnologia, mas sim do próprio algoritmo que estamos utilizando. Assim a escolha do algoritmo correto para resolver um problema pode ter

implicações financeiras importantes.

Na linguagem computacional uma operação aritmética ( $+$ ,  $-$ ,  $\times$ ,  $\div$ ) entre dois números reais é denominada **FLOP** (Floating Point Operations). Isto porque, os computadores armazenam os números reais como aproximações numéricas denominadas **floating-point number** ou **números ponto-flutuantes** (para maiores detalhes ver, por exemplo, [He 02]). O número total de flops necessários para resolver um problema é denominado **custo** da solução. Determinando o menor custo possível para resolver um tipo de problema, temos a medida da dificuldade inerente para resolver tal problema. Quando o custo de um algoritmo é igual ao menor custo possível, o algoritmo é ótimo para a medida de custo considerada. Vale ressaltar que podem existir vários algoritmos para resolver o mesmo problema. Se a mesma medida de custo é aplicada a diferentes algoritmos, então é possível compará-los e escolher o mais eficiente.

Para medir o custo de execução de um algoritmo é comum definir uma função de custo ou **função de complexidade**  $f$ . Pode ser considerada em termos de tempo de execução (complexidade de tempo) ou em termos de espaço de memória utilizado (complexidade de espaço). Em ambos os casos a complexidade é medida de acordo com o tamanho dos dados de entrada ( $n$ ). Entretanto, estamos mais interessados em calcular a complexidade de tempo de um algoritmo. Esta complexidade na realidade não representa diretamente o tempo de execução do algoritmo, mas a relação entre o tamanho da entrada de dados e o número de operações que serão executadas.

Existem três perspectivas para análise de complexidade:

- **Melhor caso:** complexidade de resolver a melhor instância do problema de tamanho  $n$ .
- **Caso médio** (ou caso esperado): complexidade para resolver o problema de tamanho  $n$  na média.
- **Pior caso:** complexidade de resolver a pior instância do problema de tamanho  $n$ .

Neste trabalho nos restringimos a análise do pior caso. Esta opção foi escolhida uma vez que o tempo gasto pelo algoritmo no pior caso é o limite superior do tempo de execução para uma entrada qualquer (para maiores detalhes ver, por exemplo [Zi 10]).

Observemos que o parâmetro  $n$  fornece uma medida da dificuldade para se resolver o problema. Para valores suficientemente pequenos de  $n$ , qualquer algoritmo custa pouco para ser executado, mesmo os ineficientes. A escolha do algoritmo não é um problema crítico para problemas de tamanho pequeno. Logo, a análise de algoritmos é realizada para valores grandes de  $n$ . Estamos assumindo ainda o comportamento assintótico do algoritmo, ou seja, a complexidade expressa uma tendência a um limite à medida que cresce o tamanho dos dados de entrada do problema. Supõe-se que a quantidade de dados a ser processada é suficientemente grande para essa tendência se evidenciar. O comportamento assintótico de  $f(n)$  representa o limite do comportamento do custo quando  $n$  cresce.

**Definição 1.17** *Uma função  $f(n)$  **domina assintoticamente** outra função  $g(n)$  se existem duas constantes positivas  $c$  e  $m$  tais que, para todo  $n \geq m$ , temos  $|g(n)| \leq c|f(n)|$ .*

**Definição 1.18 (Notação de “O grande”)**  $g(n) = O(f(n))$  (lê-se:  $g(n)$  é de ordem  $f(n)$ ) se, e somente se, existem constantes positivas  $c$  e  $m$  tal que  $g(n) \leq cf(n)$  para todo  $n > m$ .

A partir dessa definição, quando dizemos que o tempo de execução  $T(n)$  de um algoritmo é  $O(n^2)$ , significa que existem constantes  $c$  e  $m$  tais que, para valores de  $n \geq m$ ,  $T(n) \leq cn^2$ .

# Capítulo 2

## Determinação Numérica de Autovalores

Aparentemente, determinar os zeros da equação característica (1.3) seria a forma mais fácil de se calcular os autovalores de qualquer matriz. No entanto, esse método depende do cálculo do determinante, o que para matrizes grandes é impraticável. Além do mais, não existem fórmulas para se calcular soluções analíticas de equações polinomiais de grau maior que quatro, como indicado, por exemplo, pelo Teorema 25.1 de [TreBa 97]. Portanto, a maneira que temos é utilizar métodos que calculam valores aproximados, isto é, métodos que produzam bons números que converjam rapidamente na direção dos autovalores e autovetores. E são alguns destes métodos que analisaremos a seguir.

### 2.1 O Método das Potências

O Método das Potências consiste em determinar o autovalor dominante de uma matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , e seu correspondente autovetor, sem a necessidade de determinar o polinômio característico associado. Podem surgir complicações caso a matriz  $A$  não possua autovetores linearmente independentes, sendo assim, para simplificar nossa análise nesta seção assumiremos que  $A$  é semi-simples (ver Definição 1.12).

**Definição 2.1** *Seja  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  uma matriz semi-simples e sejam  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  seus auto-*

valores e  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  seus correspondentes autovetores. Suponhamos que os autovalores são ordenados de forma que  $|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ . Se  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ ,  $\lambda_1$  é chamado de **autovalor dominante** e  $\mathbf{v}_1$  é chamado de **autovetor dominante** de  $A$ .

Se  $A$  tem um autovalor dominante, então podemos encontrá-lo e também o seu correspondente autovetor, sendo que para isto utilizaremos o Método das Potências. A ideia básica deste método consiste em escolher um vetor  $\mathbf{q} \in \mathbb{C}^n$  e formar a seguinte sequência:

$$\mathbf{q}, A\mathbf{q}, A^2\mathbf{q}, A^3\mathbf{q}, \dots \quad (2.1)$$

Para calcular essa sequência não é necessário obtermos explicitamente as potências de  $A$ . Cada vetor da sequência pode ser obtido multiplicando-se o vetor anterior por  $A$ , ou seja,  $A^{j+1}\mathbf{q} = A(A^j\mathbf{q})$ .

**Definição 2.2** Uma sequência  $(x_j)$  tem o limite  $L$  e escrevemos

$$\lim_{j \rightarrow \infty} x_j = L$$

se para cada número  $\epsilon > 0$  existir um correspondente inteiro  $J$  tal que

$$|x_j - L| < \epsilon \quad \text{sempre que } j > J.$$

Se  $\lim_{j \rightarrow \infty} x_j$  existir, dizemos que a sequência **converge** (ou é **convergente**). Caso contrário, dizemos que a sequência **diverge** (ou é **divergente**).

Vamos mostrar que a sequência (2.1) converge, em certo sentido, para o autovetor dominante, para quase todas as escolhas de  $\mathbf{q}$ .

**Definição 2.3** Em geral, diz-se que uma sequência  $x_j$  que converge para  $x$ , **converge linearmente** se, existe um número  $r$ ,  $0 < r < 1$  tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\|x_{j+1} - x\|}{\|x_j - x\|} = r.$$

Isto significa que  $\|x_{j+1} - x\| \approx \|x_j - x\|$  para  $j$  suficientemente grande. O número  $r$  é chamado de **razão de convergência** da sequência.

**Teorema 2.1** *Sejam  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  e  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$  seus autovalores e  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  seus correspondentes autovetores. Suponhamos que  $|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|$ . Consideremos as sequências*

$$\mathbf{q}, A\mathbf{q}, A^2\mathbf{q}, A^3\mathbf{q}, \dots \quad \text{e} \quad \mathbf{q}_j = \frac{A^j\mathbf{q}}{\lambda_1^j}$$

onde  $\mathbf{q} \in \mathbb{C}^n$  e pode ser escrito como:

$$\mathbf{q} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\mathbf{v}_n$$

com  $c_j$  constantes quaisquer e  $c_1 \neq 0$ . Então:

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{A^{j+1}\mathbf{q}}{A^j\mathbf{q}} = \lambda_1.$$

Além disso, quando  $j \rightarrow \infty$ ,  $\mathbf{q}_j$  tende ao autovetor que possui  $\lambda_1$  como autovalor associado.

**Demonstração:** Por hipótese temos

$$\mathbf{q} = c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\mathbf{v}_n.$$

onde  $c_1$  é diferente de zero. O argumento que se segue é válido para todo  $\mathbf{q}$  tal que  $c_1 \neq 0$ . Multiplicando  $\mathbf{q}$  por  $A$ , nós obtemos:

$$A\mathbf{q} = c_1A\mathbf{v}_1 + c_2A\mathbf{v}_2 + \dots + c_nA\mathbf{v}_n$$

$$A\mathbf{q} = c_1\lambda_1\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\lambda_n\mathbf{v}_n.$$

Similarmente:

$$A^2\mathbf{q} = c_1\lambda_1^2\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2^2\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\lambda_n^2\mathbf{v}_n$$

E em geral:

$$A^j\mathbf{q} = c_1\lambda_1^j\mathbf{v}_1 + c_2\lambda_2^j\mathbf{v}_2 + \dots + c_n\lambda_n^j\mathbf{v}_n \quad (2.2)$$

Como  $c_1 \neq 0$ , podemos reescrever (2.2) da seguinte maneira:

$$A^j\mathbf{q} = \lambda_1^j \left( c_1\mathbf{v}_1 + c_2 \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^j \mathbf{v}_2 + \dots + c_n \left( \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^j \mathbf{v}_n \right) \quad (2.3)$$

Como  $\lambda_1$  é o autovalor dominante, as frações  $\frac{\lambda_2}{\lambda_1}, \dots, \frac{\lambda_n}{\lambda_1}$  são todas menores que 1 em módulo e, portanto suas potências vão para zero quando  $j \rightarrow \infty$ . Assim,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{A^{j+1}\mathbf{q}}{A^j\mathbf{q}} = \lambda_1. \quad (2.4)$$

Falta mostrar que  $\mathbf{q}_j$  tende ao autovetor que possui  $\lambda_1$  como autovalor associado, mas para isto observemos que:

$$\begin{aligned}\|\mathbf{q}_j - c_1\mathbf{v}_1\| &= \left\| c_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^j \mathbf{v}_2 + \dots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^j \mathbf{v}_n \right\| \\ &\leq |c_2| \left| \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^j \right| \|\mathbf{v}_2\| + \dots + |c_n| \left| \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^j \right| \|\mathbf{v}_n\| \\ &\leq (|c_2| \|\mathbf{v}_2\| + \dots + |c_n| \|\mathbf{v}_n\|) \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^j\end{aligned}$$

Tomando  $C = (|c_2| \|\mathbf{v}_2\| + \dots + |c_n| \|\mathbf{v}_n\|)$ , nós temos

$$\|\mathbf{q}_j - c_1\mathbf{v}_1\| \leq C \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|^j \quad j = 1, 2, 3, \dots \quad (2.5)$$

Desde que  $|\lambda_1| > |\lambda_2|$ , segue que  $\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right| \rightarrow 0$  se  $j \rightarrow \infty$  e então,  $\|\mathbf{q}_j - c_1\mathbf{v}_1\| \rightarrow 0$ . Portanto, para valores suficientemente grandes de  $j$ ,  $\mathbf{q}_j$  é uma boa aproximação para o autovetor  $c_1\mathbf{v}_1$  associado a  $\lambda_1$ .  $\square$

**Observação 2.1** No Teorema 2.1 foi feita a hipótese que  $c_1 \neq 0$ , ou seja, que o vetor inicial tem componente não-nula na direção de  $\mathbf{v}_1$ . Se  $c_1 = 0$  e  $|\lambda_2| > |\lambda_i|$  para  $i = 3, 4, \dots, n$ , então, teoricamente,  $\mathbf{q}_j$  convergirá para um múltiplo de  $\mathbf{v}_2$  e  $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{A^{j+1}\mathbf{q}}{A^j\mathbf{q}} = \lambda_2$ . Na prática, no entanto, após algumas iterações os erros de arredondamento introduzem uma componente na direção de  $\mathbf{v}_1$  e portanto,  $\mathbf{q}_j \rightarrow c_1\mathbf{v}_1$  e  $\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{A^{j+1}\mathbf{q}}{A^j\mathbf{q}} = \lambda_1$ .

O Método das Potências funciona mesmo quando os autovalores de  $A$  satisfazem

$$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_r \quad \text{e} \quad |\lambda_1| > |\lambda_i|; \quad i = r + 1, \dots, n.$$

Neste caso, teríamos

$$A^j\mathbf{q} = \lambda_1^j \left( c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_r\mathbf{v}_r + c_{r+1} \left(\frac{\lambda_{r+1}}{\lambda_1}\right)^j \mathbf{v}_{r+1} + \dots + c_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^j \mathbf{v}_n \right).$$

Assim,

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{A^{j+1}\mathbf{q}}{A^j\mathbf{q}} = \lambda_1$$

e como  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_r$  são autovetores associados ao mesmo autovalor  $\lambda_1$  ( $\lambda_1 = \dots = \lambda_r$ )

$$\mathbf{q}_j \rightarrow (c_1\mathbf{v}_1 + c_2\mathbf{v}_2 + \dots + c_r\mathbf{v}_r) \quad \text{quando} \quad j \rightarrow \infty,$$

que é ainda um autovetor associado a  $\lambda_1$ . No entanto, se existirem autovalores diferentes mas com o mesmo módulo, o processo iterativo falha, ou seja, as iterações sucessivas oscilam. Consideremos, por exemplo, o caso em que

$$\lambda_2 = -\lambda_1 \text{ e } |\lambda_1| > |\lambda_i|, \text{ } i = 3, \dots, n.$$

Neste caso temos,

$$A^j \mathbf{q} = \lambda_1^j \left( c_1 \mathbf{v}_1 + (-1)^j c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \left( \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right)^j \mathbf{v}_3 + \dots + c_n \left( \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^j \mathbf{v}_n \right) \quad (2.6)$$

$$A^{j+1} \mathbf{q} = \lambda_1^{j+1} \left( c_1 \mathbf{v}_1 - (-1)^j c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \left( \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right)^{j+1} \mathbf{v}_3 + \dots + c_n \left( \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^{j+1} \mathbf{v}_n \right) \quad (2.7)$$

e

$$A^{j+2} \mathbf{q} = \lambda_1^{j+2} \left( c_1 \mathbf{v}_1 + (-1)^j c_2 \mathbf{v}_2 + c_3 \left( \frac{\lambda_3}{\lambda_1} \right)^{j+2} \mathbf{v}_3 + \dots + c_n \left( \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^{j+2} \mathbf{v}_n \right) \quad (2.8)$$

o que mostra que os vetores oscilam.

No caso de existirem dois autovalores dominantes que sejam complexos conjugados,  $\lambda_2 = \overline{\lambda_1}$ , pode-se determinar, no limite, coeficientes  $b$  e  $c$  tais que  $\lambda^2 + b\lambda + c = 0$  tem  $\lambda_1$  e  $\overline{\lambda_1}$  como raízes (veja, por exemplo, [Wi 65]).

A partir de (2.5) percebemos que o número  $\|\mathbf{q}_j - c_1 \mathbf{v}_1\|$  fornece uma medida do erro nesta aproximação e que a magnitude desse erro diminui em um fator  $\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|$  a cada iteração. Portanto a razão  $\left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|$  é um importante indicador da taxa de convergência. Vemos que a velocidade de convergência do Método das Potências pode ser muito lenta se a diferença entre  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  não for muito grande, uma situação frequentemente encontrada na prática. O Método das Potências geralmente exibe uma convergência linear com raio de convergência  $r = \left| \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right|$  (ver, por exemplo, [He 02]). E para obtermos  $\lambda_1$  com uma precisão  $\epsilon$ , em cada passo calculamos aproximações para  $\lambda_1$  usando (2.4). O teste do erro relativo para cada componente de  $\lambda_1$ , isto é:

$$\frac{|\lambda_1^{(k+1)} - \lambda_1^{(k)}|}{|\lambda_1^{(k+1)}|} < \epsilon, \quad (2.9)$$

poderá ser usado como critério de parada.

Na prática, não é possível exibirmos a sequência  $\mathbf{q}_j$ , porque não sabemos  $\lambda_1$  com antecedência. Por outro lado, é impraticável trabalhar com a própria  $A^j \mathbf{q}$ , porque  $\|A^j \mathbf{q}\| \rightarrow \infty$

se  $|\lambda_1| > 1$  e  $\|A^j \mathbf{q}\| \rightarrow 0$  se  $|\lambda_1| < 1$ . A fim de evitarmos esta situação, devemos empregar algum tipo de escala. Assim, deixamos  $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}$  e definimos:

$$\mathbf{q}_{j+1} = \frac{A\mathbf{q}_j}{\sigma_{j+1}} \quad (2.10)$$

onde  $\sigma_{j+1}$  é algum fator de escala conveniente. Uma simples e conveniente estratégia é tomar  $\sigma_{j+1} = \max|(A\mathbf{q}_j)|$ , ou seja, uma componente de  $A\mathbf{q}_j$  cujo módulo é o maior possível. O efeito dessa escolha é que a maior componente de cada  $\mathbf{q}_j$  é 1, e esta sequência converge para um autovetor dominante, cuja maior componente é 1. De fato, observemos que

$$\begin{aligned} \mathbf{q}_1 &= \frac{A\mathbf{q}_0}{\sigma_1} \\ \mathbf{q}_2 &= \frac{A\mathbf{q}_1}{\sigma_2} = \frac{A^2\mathbf{q}_0}{\sigma_1\sigma_2}. \end{aligned}$$

Em geral,

$$\mathbf{q}_j = \frac{A^j\mathbf{q}_0}{\sigma_1 \dots \sigma_j}.$$

Como consideramos  $\mathbf{q}_0 = \mathbf{q}$ , temos que:

$$\mathbf{q}_j = \frac{A^j\mathbf{q}}{\sigma_1 \dots \sigma_j} = \frac{\lambda_1^j}{\sigma_1 \dots \sigma_j} \left( c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^j \mathbf{v}_2 + \dots + c_n \left( \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^j \mathbf{v}_n \right).$$

Pelo fato de

$$\left( c_1 \mathbf{v}_1 + c_2 \left( \frac{\lambda_2}{\lambda_1} \right)^j \mathbf{v}_2 + \dots + c_n \left( \frac{\lambda_n}{\lambda_1} \right)^j \mathbf{v}_n \right) \rightarrow c_1 \mathbf{v}_1$$

quando  $j \rightarrow \infty$  e  $\mathbf{q}_j$  ser uma sequência unitária que possui uma subsequência convergente (ver, por exemplo, [St 04]), concluímos que  $\mathbf{q}_j$  converge para um vetor unitário na direção de  $\mathbf{v}_1$ . Além disso, de (2.10) temos

$$A\mathbf{q}_j = \sigma_{j+1}\mathbf{q}_{j+1}.$$

Tomando o limite em ambos os lados concluímos que

$$A\mathbf{v}_1 = \left( \lim_{j \rightarrow \infty} \sigma_{j+1} \right) \mathbf{v}_1,$$

logo

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \sigma_{j+1} = \lambda_1. \quad (2.11)$$

Sendo assim, na prática para obtermos o autovalor dominante  $\lambda_1$  de uma matriz  $A$  e o correspondente autovetor usando o Método das Potências, usaremos  $\mathbf{q}_{j+1} = \frac{A\mathbf{q}_j}{\sigma_{j+1}}$  onde  $\sigma_{j+1} = \max|(A\mathbf{q}_j)|$ .

**ALGORITMO 2.1 (Método das Potências)** [De 97] (página 154)

Dado  $x_0$  iniciamos as iterações:

$$i = 0$$

**repetir**

$$y_{i+1} = Ax_i$$

$$x_{i+1} = \frac{y_{i+1}}{\|y_{i+1}\|} \quad (\text{autovetor aproximado})$$

$$\tilde{\lambda}_{i+1} = x_{i+1}^T Ax_{i+1} \quad (\text{autovalor aproximado})$$

**Até convergir.**

As iterações do Método das Potências são relativamente baratas. O custo da multiplicação da matriz  $A$ ,  $n \times n$ , por  $\mathbf{q}_j$  é  $2n^2$  flops. A operação de normalização requer um trabalho de somente  $O(n)$  flops, de modo que o custo total de uma iteração do Método das Potências é de cerca de  $2n^2$  flops. Assim,  $m$  iterações custarão  $2n^2m$  flops. Vale ressaltar que esta contagem assume que  $A$  não é esparsa. Se  $A$  é esparsa, o custo de se calcular  $A\mathbf{q}_j$  será consideravelmente menor do que  $2n^2$  (ver, por exemplo, [Wa 02]).

Agora é necessário compreendermos geometricamente o que ocorre em cada iteração. Para isto consideremos

$$A = \begin{bmatrix} 1,8 & 0,4 \\ 0,4 & 1,2 \end{bmatrix} \quad \text{e} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} -0,5 \\ 1 \end{bmatrix}.$$

Para  $j = 0, 1, \dots, 8$  calculemos  $A^j \mathbf{x}$  e tracemos a reta por 0 e  $A^j \mathbf{x}$ , deste modo poderemos observar o que acontece quando  $j$  fica cada vez maior. Ao calcularmos os autovalores de  $A$  obtivemos  $\lambda_1 = 2$  e  $\lambda_2 = 1$ , sendo ainda  $\mathbf{v}_1 = (2, 1)$  um autovetor associado a  $\lambda_1$ . O auto-espaço associado a  $\lambda_1$  é formado por todos os múltiplos escalares de  $\mathbf{v}_1$ , que é a reta que passa por  $\mathbf{v}_1$  e pela origem. Agora calculando explicitamente  $A^j \mathbf{x}$  para  $j = 1, 2, 3$ , obtemos:

$$A\mathbf{x} = \begin{bmatrix} 1,8 & 0,4 \\ 0,4 & 1,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2,2 \\ 1,6 \end{bmatrix}$$

$$A^2\mathbf{x} = A(A\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1,8 & 0,4 \\ 0,4 & 1,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2,2 \\ 1,6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4,6 \\ 2,8 \end{bmatrix}$$

$$A^3\mathbf{x} = A(A^2\mathbf{x}) = \begin{bmatrix} 1,8 & 0,4 \\ 0,4 & 1,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 4,6 \\ 2,8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9,4 \\ 5,2 \end{bmatrix}$$

Cálculos análogos completam a Tabela 2.1.

j	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$A^j \mathbf{x}$	$\begin{bmatrix} 1, 0 \\ 1, 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2, 2 \\ 1, 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 4, 6 \\ 2, 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 9, 4 \\ 5, 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 19, 0 \\ 10, 0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 38, 2 \\ 19, 6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 76, 6 \\ 38, 8 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 153, 4 \\ 77, 2 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 307, 0 \\ 154, 0 \end{bmatrix}$

Tabela 2.1: Vetores  $A^j \mathbf{x}$

Os vetores  $\mathbf{x}$ ,  $A\mathbf{x}$ ,  $A^2\mathbf{x}$  e  $A^3\mathbf{x}$  são mostrados na Figura 2.1, os outros vetores ficam grandes demais para serem apresentados. No entanto, foram traçados raios indicando a direção desses vetores. Na verdade, são as direções que nos interessam, e não os vetores em si. As retas parecem estar se aproximando da reta que representa o auto-espaço gerado por  $\mathbf{v}_1$  a medida que  $j$  aumenta. Mais precisamente, o ângulo determinado por  $A^j \mathbf{x}$  e a reta determinada por  $\mathbf{v}_1$  tende a zero quando  $j \rightarrow \infty$ .

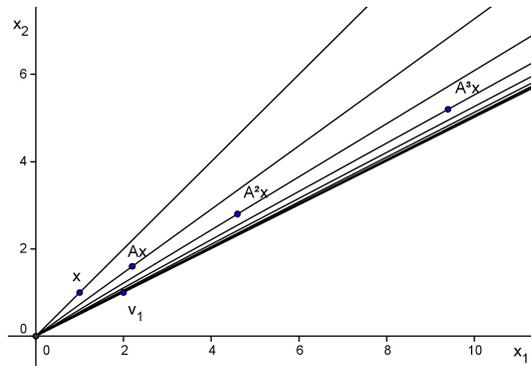


Figura 2.1: Vetores  $\mathbf{x}$ ,  $A\mathbf{x}$ ,  $A^2\mathbf{x}$  e  $A^3\mathbf{x}$  e direções de  $A^4\mathbf{x}$ , ...,  $A^8\mathbf{x}$ .

Neste momento, aplicaremos o Método das Potências à matriz  $A = \begin{bmatrix} 1, 8 & 0, 4 \\ 0, 4 & 1, 2 \end{bmatrix}$ , parando quando  $j = 8$ , obtendo assim uma estimativa do autovalor dominante  $\lambda_1$  e de um autovetor associado  $\mathbf{v}_1$ . Vimos que na prática, como não conhecemos  $\lambda_1$  não poderíamos reescalonar  $A^j \mathbf{x}$  usando  $\mathbf{x}_j = \frac{A^j \mathbf{x}}{\lambda_1^j}$  e assim encontrar  $c_1 \mathbf{v}_1$ . Mas podemos reescalonar cada  $A^j \mathbf{x}$  de modo que sua maior componente seja 1. Utilizando (2.10) a sequência resultante  $(\mathbf{x}_j)$  vai convergir para um múltiplo de  $\mathbf{v}_1$  cuja maior componente é 1. E através de (2.11) encontraremos  $\lambda_1$ .

A evidência numérica da Tabela 2.2 sugere que  $(\sigma_j)$  tende para 2 e  $(\mathbf{x}_j)$  tende para  $(1, 0.5)$ . Se assim for, então  $\lambda_1 = 2$  é o autovalor dominante e  $\mathbf{v}_1 = (1, 0.5)$  é um autovetor correspondente, o que pode ser facilmente verificado. A Figura 2.2 mostra a sequência apresentada na Figura 2.1 de forma reescalada.

$j$	0	1	2	3	4	5	6	7	8
$\mathbf{x}_j$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0,7273 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0,6087 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0,5532 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0,5263 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0,5131 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0,5065 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0,5032 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1 \\ 0,5016 \end{bmatrix}$
$A\mathbf{x}_j$	$\begin{bmatrix} 2,2 \\ 1,6 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2,0909 \\ 1,2728 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2,0435 \\ 1,1304 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2,0213 \\ 1,0638 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2,0105 \\ 1,0316 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2,0052 \\ 1,0157 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2,0026 \\ 1,0078 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2,0012 \\ 1,0038 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 2,0006 \\ 1,0019 \end{bmatrix}$
$\sigma_j$	2,2	2,0909	2,0435	2,0213	2,0105	2,0052	2,0026	2,0012	2,0006

Tabela 2.2: Método das Potências aplicado à matriz  $A$ .

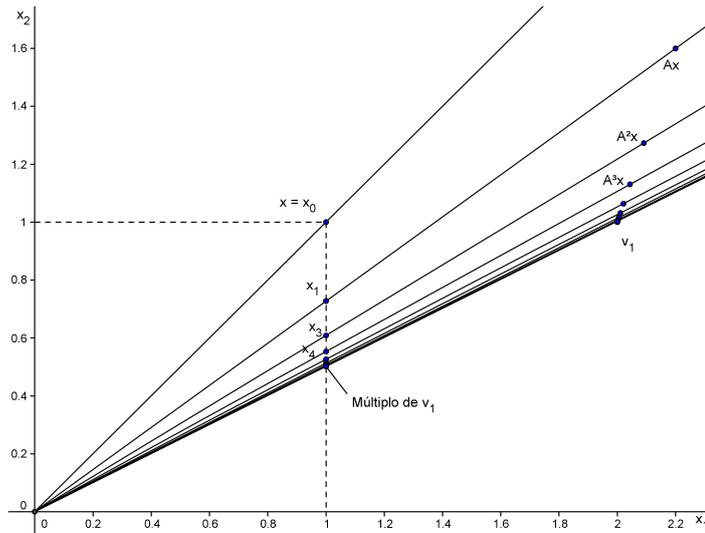


Figura 2.2: Representação geométrica dos dados da Tabela 2.2.

O Método das Potências deve ser aplicado se o objetivo é determinar o autovalor dominante de uma matriz. Se todos os autovalores são procurados devemos aplicar outros métodos que são muito mais eficientes. Em alguns problemas, o mais importante é a determinação do autovalor de menor valor absoluto. Para isso dispomos da estratégia que apresentaremos na seção 2.1.1.

### 2.1.1 Método das Potências Inverso

Continuamos assumindo que  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  é semi-simples com autovetores  $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \dots, \mathbf{v}_n$  linearmente independentes e autovalores associados organizados da seguinte forma:

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots > |\lambda_n|.$$

O Método das Potências permite apenas encontrar o autovalor dominante. Para obter o menor autovalor de  $A$ , se  $A$  for não-singular, podemos aplicar o Método das Potências na matriz inversa  $A^{-1}$ , pois se  $\lambda$  é o menor autovalor de  $A$ ,  $\frac{1}{\lambda}$  será o maior autovalor de  $A^{-1}$ . Este método é chamado **Método das Potências Inverso** ou **Iteração Inversa**. Sendo útil na prática, desde que se tenha interesse em calcular apenas o autovalor de menor módulo, e, que este esteja bem separado dos demais.

**Teorema 2.2** *Seja  $A$  uma matriz não-singular. Se  $\lambda$  é um autovalor de  $A$  associado ao autovetor  $\mathbf{v}$ , então  $\lambda^{-1}$  é um autovalor de  $A^{-1}$  associado ao autovetor  $\mathbf{v}$ .*

**Demonstração:** Temos que  $A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v}$ , multiplicando à esquerda por  $A^{-1}$ :

$$A^{-1}A\mathbf{v} = \lambda A^{-1}\mathbf{v}$$

$$\mathbf{v} = \lambda A^{-1}\mathbf{v}$$

ou

$$A^{-1}\mathbf{v} = \lambda^{-1}\mathbf{v}$$

Essa última equação nos diz que  $\lambda^{-1}$  é autovalor de  $A^{-1}$  associado ao autovetor  $\mathbf{v}$ .  $\square$

Com o Teorema 2.2 percebemos que  $A^{-1}$  possui  $\mathbf{v}_n, \mathbf{v}_{n-1}, \dots, \mathbf{v}_1$  autovetores linearmente independentes cujos autovalores associados são respectivamente  $\lambda_n^{-1}, \lambda_{n-1}^{-1}, \dots, \lambda_1^{-1}$ . Se  $|\lambda_n|^{-1} > |\lambda_{n-1}|^{-1}$  (isto é  $|\lambda_{n-1}| > |\lambda_n|$ ) e nós iniciarmos com o vetor  $\mathbf{q} = c_n\mathbf{v}_n + \dots + c_1\mathbf{v}_1$  para o qual  $c_n \neq 0$ , então o Método das Potências Inverso irá convergir para um múltiplo de  $\mathbf{v}_n$ , um autovetor associado com o menor autovalor de  $A$ . Note que na prática não precisamos calcular  $A^{-1}$ , pois a partir de (2.10) temos:

$$\mathbf{q}_{j+1} = \frac{A^{-1}\mathbf{q}_j}{\sigma_{j+1}}.$$

Assim, podemos resolver o sistema linear

$$(A\hat{\mathbf{q}}_{j+1} = \mathbf{q}_j)$$

através da Eliminação Gaussiana, onde  $\hat{\mathbf{q}}_{j+1} = \mathbf{q}_{j+1}\sigma_{j+1}$ .

A razão de convergência desse método é  $\left| \frac{\lambda_{n-1}^{-1}}{\lambda_n^{-1}} \right| = \left| \frac{\lambda_n}{\lambda_{n-1}} \right|$ , se essa razão for muito próxima de 1, então a convergência será muito lenta, mas se  $|\lambda_{n-1}| \gg |\lambda_n|$  a convergência será mais rápida. No entanto, podemos obter a solução de forma mais rápida se realizarmos uma modificação no Método das Potências.

## 2.1.2 Método das Potências com Deslocamento

Neste caso continuamos com as hipóteses do Método das Potências Inverso.

**Teorema 2.3** *Sejam  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , e  $\rho \in \mathbb{C}$ . Se  $v$  é um autovetor de  $A$  com autovalor  $\lambda$  associado, então  $v$  é um autovetor de  $A - \rho I$  com autovalor  $\lambda - \rho$ .*

**Demonstração:** Temos que  $Av = \lambda v$ , subtraindo à direita por  $\rho v$ :

$$Av - \rho v = \lambda v - \rho v$$

$$Av - \rho Iv = \lambda v - \rho v$$

$$(A - \rho I)v = (\lambda - \rho)v$$

Essa última equação nos diz que  $\lambda - \rho$  é autovalor de  $A - \rho I$  associado ao autovetor  $v$ .  $\square$

Sendo assim, se  $A$  possui autovalores  $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ , então  $A - \rho I$  possui autovalores  $\lambda_1 - \rho, \lambda_2 - \rho, \dots, \lambda_n - \rho$ , onde o escalar  $\rho$  é chamado um **deslocamento**. Portanto, o Teorema 2.1 pode ser aplicado à matriz  $A - \rho I$  e através de (2.10) temos:

$$q_{j+1} = \frac{(A - \rho I)q_j}{\sigma_{j+1}}$$

que converge para o autovetor correspondente àquele que maximiza  $|\lambda_i - \rho|$ . Entretanto observemos que se

$$\begin{aligned} \rho < \frac{\lambda_1 + \lambda_n}{2} & \text{ então } q_{j+1} \rightarrow v_1 \text{ e } \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{(A - \rho I)^{j+1} q}{(A - \rho I)^j q} = \lambda_1 - \rho, \\ \rho > \frac{\lambda_1 + \lambda_n}{2} & \text{ então } q_{j+1} \rightarrow v_n \text{ e } \lim_{j \rightarrow \infty} \frac{(A - \rho I)^{j+1} q}{(A - \rho I)^j q} = \lambda_n - \rho. \end{aligned}$$

Assim, a escolha apropriada de  $\rho$  pode ser usada para determinar os dois autovalores extremos, correspondendo ao autovalor dominante de  $A$  e ao menor autovalor de  $A$  (maiores detalhes em [Be 06]). Deste modo, apesar de deslocamentos poderem ser usados em conjunto com o Método das Potências, eles não são tão eficazes neste contexto. A combinação de deslocamento e a Iteração Inversa funciona melhor, pois encontraremos não apenas estes dois autovalores. Como já observado anteriormente, a convergência do Método das Potências será lenta quando  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  forem muito próximos. Para obter uma rápida convergência, primeiro fazemos um deslocamento e depois aplicamos a Iteração Inversa. Ou seja, aplicamos o Método das Potências à matriz  $(A - \rho I)^{-1}$ , cujos autovalores são  $\frac{1}{\lambda_1 - \rho}, \dots, \frac{1}{\lambda_n - \rho}$ . Observemos que o autovalor dominante de  $(A - \rho I)^{-1}$  é  $\frac{1}{\lambda_i - \rho}$ , onde  $\lambda_i$  é

o autovalor mais próximo de  $\rho$ . Assim, podemos encontrar todos os autovalores de  $A$  variando apenas os deslocamentos. Este método é chamado **Método das Potências com Deslocamento** ou **Iteração com Deslocamento**.

**ALGORITMO 2.2 (Método das Potências com Deslocamento)** [De 97] (página 155)

Dado  $x_0$  iniciamos as iterações:

$i = 0$

**repetir**

$$y_{i+1} = (A - \rho I)^{-1}x_i$$

$$x_{i+1} = \frac{y_{i+1}}{\|y_{i+1}\|} \quad (\text{autovetor aproximado})$$

$$\tilde{\lambda}_{i+1} = x_{i+1}^T A x_{i+1} \quad (\text{autovalor aproximado})$$

**Até convergir.**

No caso do Método das Potências com Deslocamento, se for feita uma escolha cuidadosa do deslocamento  $\rho$ , ou seja, se ele for uma boa aproximação para  $\lambda_n$ , então  $|\lambda_{n-1} - \rho| \gg |\lambda_n - \rho|$ , o que aumentará substancialmente a velocidade de convergência. Na verdade não há nada de especial sobre  $\lambda_n$ , o deslocamento  $\rho$  pode ser escolhido de modo a ser uma boa aproximação para qualquer dos autovalores de  $A$ . Se  $\rho$  é uma aproximação suficientemente boa para  $\lambda_i$ , então  $\lambda_i - \rho$  é muito menor do que qualquer outro autovalor de  $A - \rho I$ . Portanto (para quase qualquer vetor inicial  $\mathbf{q}$ ) o Método das Potências aplicado à  $A - \rho I$  irá convergir para um múltiplo do autovetor  $\mathbf{v}_i$ . A razão de convergência é  $\left| \frac{\lambda_i - \rho}{\lambda_k - \rho} \right|$ , onde  $\lambda_k - \rho$  é o segundo menor autovalor de  $A - \rho I$ . Quanto mais próximo  $\rho$  for de  $\lambda_i$ , mais rápida a convergência será.

Observemos que no Método das Potências as iteradas satisfazem (2.10), similarmente neste caso as iteradas obedecem

$$\mathbf{q}_{j+1} = \frac{(A - \rho I)^{-1} \mathbf{q}_j}{\sigma_{j+1}}.$$

Entretanto é importante observar que assim como na Iteração Inversa não é preciso calcular explicitamente  $A^{-1}$ , na Iteração com Deslocamento, em nenhum momento há necessidade de calcular  $(A - \rho I)^{-1}$  explicitamente, o que consumiria muito tempo e recursos. Em vez disso, pode-se resolver o sistema linear

$$(A - \rho I) \hat{\mathbf{q}}_{j+1} = \mathbf{q}_j,$$

onde definimos  $\mathbf{q}_{j+1} = \frac{\hat{\mathbf{q}}_{j+1}}{\sigma_{j+1}}$  e  $\sigma_{j+1}$  é igual a componente de  $\hat{\mathbf{q}}_{j+1}$  de maior magnitude. Notemos que o sistema pode ser resolvido por Eliminação Gaussiana.

Observemos que o sucesso do Método das Potências com Deslocamento depende de nossa habilidade em obter estimativas precisas para usar no deslocamento. Entretanto, encontrar estes valores apropriados nem sempre é fácil. Por isso, se desejamos calcular todos os autovalores de uma matriz  $A$  devemos usar outros métodos. Finalmente, notemos que se os autovalores de uma matriz já são conhecidos, o método padrão para encontrar os autovetores de  $A$  é o Método das Potências com Deslocamento, já que os deslocamentos podem ser escolhidos arbitrariamente próximos dos autovalores, tornando a convergência muito rápida.

## 2.2 O Quociente de Rayleigh

O Método das Potências com Deslocamento pode ser melhorado se retirarmos a restrição de que o valor do deslocamento permanece constante ao longo das iterações. Isto porque, não existe razão pela qual não se poderia usar um deslocamento diferente em cada etapa. Observemos que se  $\mathbf{q}_j$  é uma aproximação suficientemente boa para um autovetor, deve ser de alguma forma, possível usar  $\mathbf{q}_j$  para obter uma estimativa para o autovalor associado. Esta estimativa pode ser usada através de um deslocamento na próxima iteração. Desta forma, gostaríamos de obter um deslocamento melhor, portanto uma melhor razão de convergência em cada iteração.

Suponhamos que  $\mathbf{q} \in \mathbb{C}^n$  seja uma aproximação para um autovetor de  $A$ . Como podemos usar  $\mathbf{q}$  para estimar o autovalor associado?

**Definição 2.4** *Para métodos iterativos em geral, o chamado **erro residual**  $\mathbf{r}$  é dado por*

$$\mathbf{r} = A\mathbf{q} - \rho\mathbf{q}. \quad (2.12)$$

Nossa abordagem será a de minimizar o residual. Se  $\mathbf{q}$  é um autovetor exato, então existe exatamente um número  $\rho$  para o qual

$$A\mathbf{q} = \rho\mathbf{q} \quad (2.13)$$

este número é o autovalor. Se  $\mathbf{q}$  não é um autovetor, então não existe um valor  $\rho$  que satisfaça a Equação 2.13. Esta equação é de fato, um sistema sobredeterminado de  $n$  equações e incógnita  $\rho$ . Considerando o residual  $\mathbf{r}$ , podemos encontrar o valor de  $\rho$  para o qual  $\|\mathbf{r}\|$  assume o valor mínimo. Neste caso, quando  $\mathbf{q}$  é um autovetor, ao minimizar  $\|\mathbf{r}\|$ ,  $\rho$  será exatamente o autovalor associado.

**Definição 2.5 (Problema dos Mínimos Quadrados)** *Dado um sistema  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  de  $m$  equações em  $n$  incógnitas ( $m \geq n$ ) encontre, se possível, um vetor  $\mathbf{x}$  que minimiza  $\|A\mathbf{x} - \mathbf{b}\|$  em relação ao produto interno de  $\mathbb{C}^m$ . Um tal vetor é chamado uma **solução de mínimos quadrados** de  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ .*

Uma solução de mínimos quadrados de  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  deve satisfazer (ver, por exemplo, [Ha 88])

$$A^*(A\mathbf{x} - \mathbf{b}) = 0$$

ou, equivalentemente,

$$A^*A\mathbf{x} = A^*\mathbf{b}. \quad (2.14)$$

Este sistema é chamado **sistema normal** associado a  $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$  e as equações que o compõem são chamadas **equações normais** associadas.

Portanto, dado um autovetor aproximado  $\mathbf{q}$ , a determinação da melhor estimativa do autovalor associado  $\rho$  pode ser considerada como um problema de mínimos quadrados. De fato, reescrevendo (2.13) como,

$$\mathbf{q}\rho = A\mathbf{q} \quad (2.15)$$

podemos compará-la com (2.14) e percebemos que o papel de  $A$  é desempenhado por  $\mathbf{q}$ , o de  $\mathbf{x}$  por  $\rho$ , e o de  $\mathbf{b}$  é desempenhado por  $A\mathbf{q}$ . Assim o sistema normal associado a (2.15) é

$$(\mathbf{q}^*\mathbf{q})\rho = \mathbf{q}^*A\mathbf{q}.$$

Na verdade, há apenas uma equação normal neste caso, porque existe apenas uma incógnita, ou seja,

$$\rho = \frac{\mathbf{q}^*A\mathbf{q}}{\mathbf{q}^*\mathbf{q}}. \quad (2.16)$$

Este número é chamado de **Quociente de Rayleigh** de  $\mathbf{q}$  com respeito a  $A$ .

**Teorema 2.4** *Sejam  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , e  $\mathbf{q} \in \mathbb{C}^n$ . O único número complexo que minimiza  $\|A\mathbf{q} - \rho\mathbf{q}\|$  é o Quociente de Rayleigh*

$$\rho = \frac{\mathbf{q}^* A \mathbf{q}}{\mathbf{q}^* \mathbf{q}}.$$

**Demonstração:** Primeiramente usaremos Decomposição QR em  $\mathbf{q} \in \mathbb{C}^{n \times 1}$  para provar que o Quociente de Rayleigh minimiza  $\|A\mathbf{q} - \rho\mathbf{q}\|$ , lembrando que o fator  $Q$  satisfaz  $Q^*Q = I$ . Podemos reescrever  $\mathbf{q}\rho - A\mathbf{q}$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned} \mathbf{q}\rho - A\mathbf{q} &= QR\rho - A\mathbf{q} = QR\rho - (QQ^* + I - QQ^*)A\mathbf{q} \\ &= Q(R\rho - Q^*A\mathbf{q}) - (I - QQ^*)A\mathbf{q}. \end{aligned}$$

Observe que os vetores  $Q(R\rho - Q^*A\mathbf{q})$  e  $(I - QQ^*)A\mathbf{q}$  são ortogonais, pois

$$(Q(R\rho - Q^*A\mathbf{q}))^*((I - QQ^*)A\mathbf{q}) = (R\rho - Q^*A\mathbf{q})[Q^*(I - QQ^*)]A\mathbf{q} = (R\rho - Q^*A\mathbf{q})^*[0]A\mathbf{q} = 0.$$

Portanto, pelo Teorema de Pitágoras,

$$\begin{aligned} \|\mathbf{q}\rho - A\mathbf{q}\|^2 &= \|Q(R\rho - Q^*A\mathbf{q})\|^2 + \|(I - QQ^*)A\mathbf{q}\|^2 \\ &= \|R\rho - Q^*A\mathbf{q}\|^2 + \|[Q^*(I - QQ^*)]A\mathbf{q}\|^2. \end{aligned}$$

Esta soma de quadrados é minimizada quando o primeiro termo é zero, isto é,

$$\|R\rho - Q^*A\mathbf{q}\| = 0 \Rightarrow \rho = R^{-1}Q^*A\mathbf{q}.$$

Finalmente, observemos que,

$$\begin{aligned} \rho &= R^{-1}Q^*A\mathbf{q} \\ &= R^{-1}(R^*)^{-1}R^*Q^*A\mathbf{q} \\ &= (R^*R)^{-1}R^*Q^*A\mathbf{q} \\ &= (R^*Q^*QR)^{-1}R^*Q^*A\mathbf{q} \\ &= (\mathbf{q}^*\mathbf{q})^{-1}\mathbf{q}^*A\mathbf{q} \end{aligned}$$

ou seja, o Quociente de Rayleigh,  $\rho = \frac{\mathbf{q}^* A \mathbf{q}}{\mathbf{q}^* \mathbf{q}}$ , minimiza  $\|A\mathbf{q} - \rho\mathbf{q}\|$ . □

Em particular, se  $\mathbf{q}$  é um autovetor de  $A$  com autovalor  $\lambda$  associado então:

$$\rho = \frac{\mathbf{q}^* A \mathbf{q}}{\mathbf{q}^* \mathbf{q}} = \frac{\mathbf{q}^* \lambda \mathbf{q}}{\mathbf{q}^* \mathbf{q}} = \frac{\lambda \mathbf{q}^* \mathbf{q}}{\mathbf{q}^* \mathbf{q}} = \lambda,$$

que é uma consequência direta do Teorema 2.4.

O próximo Teorema mostra que o Quociente de Rayleigh correspondente a  $\mathbf{q}$  realmente se aproxima de um autovalor se  $\mathbf{q}$  se aproxima de um autovetor. Nesse Teorema utilizaremos

vetores normalizados, de modo a terem norma euclidiana igual a 1, pois assim alguns fatos são simplificados. Note que se  $\|\mathbf{q}\| = 1$ , então o Quociente de Rayleigh assume a forma simplificada  $\rho = \mathbf{q}^* A \mathbf{q}$ .

**Teorema 2.5** *Sejam  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$  e  $\mathbf{v}$  um autovetor de  $A$  com autovalor  $\lambda$  associado. Assumir  $\|\mathbf{v}\| = 1$ . Sejam  $\mathbf{q} \in \mathbb{C}^n$  com  $\|\mathbf{q}\| = 1$ , e  $\rho = \mathbf{q}^* A \mathbf{q}$  o Quociente de Rayleigh correspondente a  $\mathbf{q}$ . Então,*

$$|\lambda - \rho| \leq 2\|A\|\|\mathbf{v} - \mathbf{q}\|.$$

**Demonstração:** Uma vez que  $\|\mathbf{v}\| = 1$

$$A\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Rightarrow \mathbf{v}^* A \mathbf{v} = \mathbf{v}^* \lambda \mathbf{v} \Rightarrow \lambda = \mathbf{v}^* A \mathbf{v}.$$

Assim,

$$\lambda - \rho = \mathbf{v}^* A \mathbf{v} - \mathbf{q}^* A \mathbf{q} = \mathbf{v}^* A \mathbf{v} - \mathbf{v}^* A \mathbf{q} + \mathbf{v}^* A \mathbf{q} - \mathbf{q}^* A \mathbf{q} = \mathbf{v}^* A (\mathbf{v} - \mathbf{q}) + (\mathbf{v}^* - \mathbf{q}^*) A \mathbf{q}.$$

Portanto,

$$|\lambda - \rho| \leq \underbrace{|\mathbf{v}^* A (\mathbf{v} - \mathbf{q})|}_{(1)} + \underbrace{|(\mathbf{v} - \mathbf{q})^* A \mathbf{q}|}_{(2)}$$

Agora analisemos separadamente (1) e (2). Pela desigualdade de Cauchy-Schwarz (ver, por exemplo, [Bu 06]), em (1) temos que:

$$|\mathbf{v}^* A (\mathbf{v} - \mathbf{q})| \leq \|\mathbf{v}\| \|A(\mathbf{v} - \mathbf{q})\| = \|A(\mathbf{v} - \mathbf{q})\|.$$

$$\|A(\mathbf{v} - \mathbf{q})\| \leq \|A\| \|\mathbf{v} - \mathbf{q}\|.$$

Assim,

$$|\mathbf{v}^* A (\mathbf{v} - \mathbf{q})| \leq \|A\| \|\mathbf{v} - \mathbf{q}\|.$$

Similarmente a partir de (2) obtemos,

$$|(\mathbf{v} - \mathbf{q})^* A \mathbf{q}| \leq \|A\| \|\mathbf{v} - \mathbf{q}\|.$$

Então,

$$|\lambda - \rho| \leq 2\|A\|\|\mathbf{v} - \mathbf{q}\|.$$

□

## 2.2.1 Representação Geométrica do Quociente de Rayleigh

Seja  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  uma matriz simétrica e  $\mathbf{q} \in \mathbb{R}^n$ . Então o Quociente de Rayleigh é dado por

$$\rho(\mathbf{q}) = \frac{\mathbf{q}^* A \mathbf{q}}{\mathbf{q}^* \mathbf{q}}. \quad (2.17)$$

Segundo Trefethen [TreBa 97], o quociente (2.17) é uma função contínua na esfera unitária  $\|\mathbf{q}\| = 1$  em  $\mathbb{R}^n$ , no qual os autovetores são pontos estacionários da função  $\rho(\mathbf{q})$  e os autovalores são os valores de  $\rho(\mathbf{q})$  desses pontos. Trefethen ilustra esse fato, geometricamente, para  $n = 3$  a partir da Figura 2.3 (encontrada em [TreBa 97]), onde representa três pontos estacionários ortogonais.

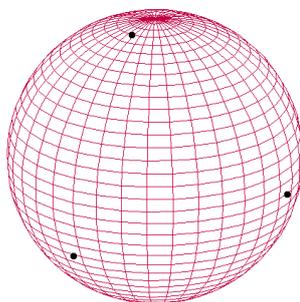


Figura 2.3: Quociente de Rayleigh

## 2.2.2 Iteração do Quociente de Rayleigh

Iteração do Quociente de Rayleigh é uma variação da Iteração com Deslocamento, na qual o Quociente de Rayleigh para cada  $\mathbf{q}_j$  é calculado e usado como deslocamento para a próxima iteração. Assim um passo da Iteração do Quociente de Rayleigh é:

$$\rho_j = \frac{\mathbf{q}_j^* A \mathbf{q}_j}{\mathbf{q}_j^* \mathbf{q}_j}, \quad (A - \rho_j I) \hat{\mathbf{q}}_{j+1} = \mathbf{q}_j, \quad \mathbf{q}_{j+1} = \frac{\hat{\mathbf{q}}_{j+1}}{\sigma_{j+1}}, \quad (2.18)$$

onde  $\sigma_{j+1}$  é um escalar conveniente.

**ALGORITMO 2.3 (Quociente de Rayleigh)** [TreBa 97] (página 207)

$v^{(0)}$  = algum vetor com  $\|v^{(0)}\| = 1$

$\lambda^{(0)}$  =  $(v^{(0)})^T A v^{(0)}$  corresponde ao Quociente de Rayleigh

para  $k = 1, 2, \dots$

$$\text{Resolva } (A - \lambda^{(k-1)}I)w = v^{(k-1)}$$

$$v^{(k)} = \frac{w}{\|w\|}$$

$$\lambda^{(k)} = (v^{(k)})^T A v^{(k)} \quad \text{Quociente de Rayleigh}$$

Utilizando a Iteração do Quociente de Rayleigh vamos determinar o autovalor dominante da matriz  $A = \begin{bmatrix} 1,8 & 0,4 \\ 0,4 & 1,2 \end{bmatrix}$ . Aplicando a Iteração do Quociente de Rayleigh (2.18) à matriz  $A$  e considerando  $\sigma_{j+1} = \max|(\hat{\mathbf{q}}_{j+1})|$ , vemos que a convergência é obtida em duas iterações para duas casas decimais.

$$\rho_0 = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,8 & 0,4 \\ 0,4 & 1,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}}{2} = 1,9$$

$$(A - \rho_0 I)\hat{\mathbf{q}}_1 = \mathbf{q}_0 \Rightarrow \begin{bmatrix} -0,1 & 0,4 \\ 0,4 & -0,7 \end{bmatrix} \hat{\mathbf{q}}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\hat{\mathbf{q}}_1 = \begin{bmatrix} 12,2222 \\ 5,5556 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{q}_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0,4545 \end{bmatrix}$$

$$\rho_1 = \frac{\begin{bmatrix} 1 & 0,4545 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1,8 & 0,4 \\ 0,4 & 1,2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 0,4545 \end{bmatrix}}{1,2066} = 2,0023$$

Podemos verificar facilmente que  $\rho_1 = 2,0023$  é o autovalor dominante da matriz  $A$  com duas casa decimais corretas, e que  $\mathbf{q}_1$  se aproxima do correspondente autovetor.

Notemos que como um deslocamento diferente é usado em cada passo, é difícil analisar as propriedades globais de convergência da Iteração do Quociente de Rayleigh ([Wa 02]). O algoritmo não garante a convergência para um autovetor, mas a experiência sugere que raramente ocorre falha. Quando ele faz convergir, geralmente converge rapidamente.

Vamos fazer uma análise da taxa de convergência da Iteração do Quociente de Rayleigh. Seja  $(\mathbf{q}_j)$  uma sequência de vetores gerados pela Iteração do Quociente de Rayleigh. Faremos uma pequena simplificação nesta análise, por assumir que  $\|\mathbf{q}_j\| = 1 \forall j$ . Suponhamos que  $\mathbf{q}_j \rightarrow \mathbf{v}_i$  quando  $j \rightarrow \infty$ . Então também  $\|\mathbf{v}_i\| = 1$ . Suponhamos ainda que o autovalor

associado  $\lambda_i$  não seja um autovalor múltiplo, e denotemos por  $\lambda_k$  o mais próximo autovalor a  $\lambda_i$ , com  $i \neq k$ . Uma vez que o  $j$ -ésimo passo da Iteração do Quociente de Rayleigh é apenas uma iteração do Método das Potências com matriz  $(A - \rho_j I)^{-1}$ , nós sabemos que

$$\|\mathbf{v}_i - \mathbf{q}_{j+1}\| \approx r_j \|\mathbf{v}_i - \mathbf{q}_j\| \quad (2.19)$$

onde  $r_j$  é a razão entre dois autovalores de  $(A - \rho_j I)^{-1}$  de maior valor absoluto. Pelo Teorema 2.5 o Quociente de Rayleigh  $\rho_j$  converge para  $\lambda_i$ . Uma vez que  $\rho_j$  é próximo o suficiente de  $\lambda_i$ , os dois maiores autovalores de  $(A - \rho_j I)^{-1}$  serão  $(\lambda_i - \rho_j)^{-1}$  e  $(\lambda_k - \rho_j)^{-1}$ . Assim,

$$r_j = \left| \frac{(\lambda_k - \rho_j)^{-1}}{(\lambda_i - \rho_j)^{-1}} \right| = \left| \frac{(\lambda_i - \rho_j)}{(\lambda_k - \rho_j)} \right|.$$

Ainda pelo Teorema 2.5,  $|\lambda_i - \rho_j| \leq 2\|A\|\|\mathbf{v}_i - \mathbf{q}_j\|$ . Além disso, desde que  $\rho_j \approx \lambda_i$ , nós podemos fazer a aproximação  $|\lambda_k - \rho_j| \approx |\lambda_k - \lambda_i|$ . Logo,

$$r_j = \frac{2\|A\|}{|\lambda_k - \lambda_i|} \|\mathbf{v}_i - \mathbf{q}_j\| = C \|\mathbf{v}_i - \mathbf{q}_j\|,$$

onde  $C = \frac{2\|A\|}{|\lambda_k - \lambda_i|}$ . Substituindo esta estimativa de  $r_j$  em (2.19) nós obtemos a estimativa

$$\|\mathbf{v}_i - \mathbf{q}_{j+1}\| \approx C \|\mathbf{v}_i - \mathbf{q}_j\|^2 \quad (2.20)$$

Assim, o erro após  $j + 1$  iterações é proporcional ao quadrado do erro após  $j$  iterações. Outra forma de expressar isto é dizer que, se  $\|\mathbf{v}_i - \mathbf{q}_j\| = O(\epsilon)$ , então  $\|\mathbf{v}_i - \mathbf{q}_{j+1}\| = O(\epsilon^2)$ . Se  $\epsilon$  for pequeno,  $\epsilon^2$  será menor ainda. Uma sequência cuja taxa de convergência satisfaz (2.20) é chamada de **convergência quadrática**. Mais especificamente, nós dizemos que  $\mathbf{q}_j \rightarrow \mathbf{v}$  quadraticamente quando  $j \rightarrow \infty$  se existe uma constante  $C$  não nula tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{v} - \mathbf{q}_{j+1}\|}{\|\mathbf{v} - \mathbf{q}_j\|^2} = C. \quad (2.21)$$

A estimativa que fizemos acima indica que a iteração do Quociente de Rayleigh normalmente converge quadraticamente, quando ocorre convergência. A convergência quadrática significa que o número de dígitos corretos duplica a cada iteração. Isto é verdade se  $C \approx 1$  em (2.20) e (2.21).

É interessante notar que para matrizes simétricas reais, o Quociente de Rayleigh aproxima o autovalor melhor do que o indicado pelo Teorema 2.5. Para matrizes simétricas, se  $\|\mathbf{v} - \mathbf{q}\| = O(\epsilon)$ , então  $|\lambda - \rho| = O(\epsilon^2)$  (maiores detalhes em [Wa 02]). Usando esta estimativa, em vez da do Teorema 2.5 para estimar  $r_j$ , descobrimos que

$$\|\mathbf{v}_i - \mathbf{q}_{j+1}\| \approx C \|\mathbf{v}_i - \mathbf{q}_j\|^3.$$

Isto é chamado de *convergência cúbica*. Mais precisamente,  $\mathbf{q}_j \rightarrow \mathbf{v}$  cubicamente quando  $j \rightarrow \infty$  se existe uma constante  $C$  não nula tal que

$$\lim_{j \rightarrow \infty} \frac{\|\mathbf{v} - \mathbf{q}_{j+1}\|}{\|\mathbf{v} - \mathbf{q}_j\|^3} = C$$

Neste caso, o número de dígitos corretos triplica a cada iteração (para maiores detalhes ver, por exemplo, [Pa 98]).

Muito pode ser dito acerca da Iteração do Quociente de Rayleigh no caso de matrizes simétricas, o que não ocorre para o caso geral. Não só a convergência cúbica ocorre, como também a Iteração do Quociente de Rayleigh converge para quase todas as escolhas de vetor inicial. Infelizmente a caracterização dessa dependência não é simples.

A Iteração do Quociente de Rayleigh pode ser cara. Uma vez que um deslocamento diferente é usado em cada iteração, é necessário resolver um sistema via Eliminação Gaussiana em cada etapa. Isto custa  $O(n^3)$  flops por iteração para uma matriz completa e, portanto, torna o método para uma matriz completa muito caro. No entanto, existem algumas classes de matrizes para os quais a Iteração do Quociente de Rayleigh é econômica. Por exemplo, uma matriz  $A$  é chamada *Superior de Hessenberg* se  $a_{ij} = 0$  sempre que  $i > j + 1$ . Isto significa que a matriz tem aproximadamente a forma triangular.

$$\begin{bmatrix} * & * & * & * & * \\ * & * & * & * & * \\ & * & * & * & * \\ & & * & * & * \\ & & & * & * \end{bmatrix}$$

Podemos aplicar a Iteração do Quociente de Rayleigh em uma matriz superior de Hessenberg a um custo de apenas  $O(n^2)$  flops por iteração, que é relativamente econômico (maiores detalhes em [Wa 02]). Matrizes de Hessenberg desempenham um papel muito importante. O problema de encontrar autovalores de uma matriz arbitrária pode ser reduzido ao de encontrar os autovalores (e autovetores, se desejado) de uma matriz superior de Hessenberg relacionada (ver, por exemplo [Wa 02]). Desta forma, podemos aplicar Iteração do Quociente de Rayleigh a matriz superior de Hessenberg a um custo razoável.

Em [TreBa 97], Trefethen mostra ainda que o custo de se aplicar a Iteração do Quociente de Rayleigh em uma matriz tridiagonal é de  $O(n)$  flops por iteração. No entanto, não nos concentraremos na Iteração do Quociente de Rayleigh. Em vez disso, iremos desenvolver

um algoritmo que nos possibilitará encontrar todos os autovalores de uma matriz  $A$ , o algoritmo de QR, o qual é baseado na Decomposição QR.

## 2.3 Algoritmo QR

Por muitos anos, o algoritmo mais utilizado para o cálculo do espectro de uma matriz tem sido o algoritmo QR. Esta seção é dedicada a uma descrição deste algoritmo.

Considere a matriz  $A \in C^{n \times n}$  não-singular cujos autovalores desejamos calcular. O algoritmo QR pode ser descrito da seguinte forma. Começando com  $A_0 = A$ , definimos uma sequência de matrizes  $(A_j)$  da seguinte maneira:

$$A_{m-1} = Q_m R_m \quad R_m Q_m = A_m \quad (2.22)$$

Isto é,  $A_{m-1}$  é decomposta nos fatores  $Q_m$  e  $R_m$ , onde  $Q_m$  é unitária e  $R_m$  é triangular superior com entradas positivas na diagonal principal. Estes fatores são unicamente determinados (ver, por exemplo, [TreBa 97]). Para produzirmos  $A_m$  basta multiplicar os fatores na ordem inversa.

**Teorema 2.6** *Sejam  $A$  e  $B$  matrizes similares. Então,  $A$  e  $B$  possuem os mesmos autovalores.*

**Demonstração:** Seja  $B = C^{-1}AC$ , e suponhamos que  $\lambda$  seja um autovalor de  $A$  associado ao autovetor  $v$ . Sabemos, que  $\det(A - \lambda I)$  é o polinômio característico de  $A$ , então

$$\begin{aligned} \det(B - \lambda I) &= \det(C^{-1}AC - \lambda I) \\ &= \det(C^{-1}(A - \lambda I)C) \\ &= \det(C^{-1})\det(A - \lambda I)\det(C) \\ &= \det(A - \lambda I)\det(\underbrace{C^{-1}C}_I) = \det(A - \lambda I). \end{aligned}$$

Portanto  $A$  e  $B$  possuem o mesmo polinômio característico. Logo  $\lambda$  é autovalor de  $B$ .  $\square$

A partir de (2.22) podemos facilmente verificar que  $A_m = Q_m^* A_{m-1} Q_m = Q_m^{-1} A_{m-1} Q_m$ , assim  $A_m$  é similar a  $A_{m-1}$ . Uma vez que todas as matrizes da sequência  $A_j$  são similares,

todas elas possuem os mesmos autovalores. Como consequência, pode ser mostrado que a sequência  $QR$  converge, sob condições adequadas, para uma matriz triangular superior na forma

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & * & \dots & * \\ & \lambda_2 & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & * \\ & & & \lambda_n \end{bmatrix},$$

onde os autovalores aparecem em ordem decrescente de magnitude na diagonal principal. A prova formal dessa convergência pode ser encontrada em [Wi 65].

De agora em diante, será importante distinguir entre a decomposição QR e o algoritmo QR. O algoritmo QR é um processo iterativo para encontrar autovalores. Baseia-se na decomposição QR, que é um procedimento diretamente relacionado com o processo de ortogonalização de Gram-Schmidt. Vale ressaltar que quando este processo é implementado no computador pode ocorrer, devido a erros de arredondamento, que o conjunto ortogonal de vetores que se espera encontrar não seja exatamente ortogonal. Em [TreBa 97] vimos que o Algoritmo de Gram-Schmidt Clássico é considerado então instável devido a estes erros. O processo de Gram-Schmidt pode ser estabilizado por uma pequena modificação, esta versão é por vezes conhecida como Gram-Schmidt Modificado (MGS) (maiores detalhes em [TreBa 97]). Existem duas outras formas para fazer a decomposição QR: as Reflexões de Householder e as Rotações de Givens, que são apresentadas de forma detalhada em [De 97]. Para uma matriz arbitrária recorreremos às Reflexões de Householder, um processo de “triangularização ortogonal”, em oposição a “ortogonalização triangular”, que é o processo de Gram-Schmidt (ver, por exemplo, [TreBa 97]).

Uma única iteração do algoritmo QR será chamada passo QR ou iteração QR, sendo que cada passo realiza uma transformação de semelhança. O processo termina quando o elemento de maior valor absoluto da matriz  $A_j$ , (abaixo da diagonal principal), for menor que  $\epsilon$ , onde  $\epsilon$  é uma precisão pré-fixada. Observamos que muitas propriedades da matriz são preservadas em tais transformações, incluindo a propriedade Hermitiana. Assim se  $A$  é Hermitiana, então todas as iteradas  $A_j$  serão Hermitianas, e a sequência  $(A_j)$  irá convergir para a forma diagonal (para maiores detalhes ver, por exemplo, [Wa 02]).

Se  $A_{m-1}$  é real, então  $Q_m, R_m$  e  $A_m$  são todas reais. Assim se  $A$  é real, o algoritmo QR básico (2.22) permanecerá dentro do sistema de números reais.

A suposição de que  $A$  é não-singular garante que cada matriz na sequência  $(A_j)$  é não-singular. Este fato nos permite especificar a decomposição  $A_{m-1} = Q_m R_m$  de maneira única, exigindo que as entradas da diagonal principal de  $R_m$  sejam positivas. Assim, o algoritmo QR, como descrito acima, está bem definido. No entanto, nem sempre é conveniente na prática organizar os cálculos de modo que cada  $R_m$  tenha entradas positivas na diagonal principal. Entretanto, quer este requisito seja forçado quer não, não faz uma diferença significativa no progresso do algoritmo. Portanto, em implementações reais do algoritmo QR não será exigido que as entradas da diagonal principal de cada  $R_m$  sejam positivas.

**ALGORITMO 2.4 (Algoritmo QR)** [TreBa 97] (página 58) Dado uma matriz  $A \in \mathbb{C}^{n \times n}$ , em que  $a_i$  representa a  $i$ -ésima coluna de  $A$  temos:

**para**  $i = 1$  **até**  $n$

$$v_i = a_i$$

**fim para**  $i$

**para**  $i = 1$  **até**  $n$

$$r_{ii} = \|v_i\|$$

$$q_i = \frac{v_i}{r_{ii}}$$

**para**  $j = i + 1$  **até**  $n$

$$r_{ij} = q_i^* v_j$$

$$v_j = v_j - r_{ij} q_i$$

**fim para**  $j$

**fim para**  $i$

Com base nestas considerações vamos utilizar o Algoritmo de QR para determinar os autovalores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix}$$

com precisão de  $10^{-1}$ . Temos que  $A = A_0 = Q_1 R_1$ , sendo assim para determinarmos a matriz  $Q_1$  usaremos o processo de Ortogonalização de Gram-Schmidt. Consideremos  $\mathbf{u}_1 = [8, 2]$  e  $\mathbf{u}_2 = [2, 5]$ .

$$\mathbf{v}_1 = \mathbf{u}_1 = [8 \ 2],$$

$$\mathbf{v}_2 = \mathbf{u}_2 - \frac{\langle \mathbf{u}_2, \mathbf{v}_1 \rangle}{\|\mathbf{v}_1\|^2} \mathbf{v}_1 = \frac{1}{68} [-72 \ 288].$$

Observemos que  $\|\mathbf{v}_1\| = \sqrt{68}$  e  $\|\mathbf{v}_2\| = \frac{36\sqrt{68}}{68}$ , logo:

$$\mathbf{q}_1 = \frac{\mathbf{v}_1}{\|\mathbf{v}_1\|} = \frac{1}{\sqrt{68}}[8 \ 2]$$

$$\mathbf{q}_2 = \frac{\mathbf{v}_2}{\|\mathbf{v}_2\|} = \frac{1}{\sqrt{68}}[-2 \ 8]$$

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{68}} \begin{bmatrix} 8 & -2 \\ 2 & 8 \end{bmatrix}$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{q}_1 \rangle & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_1 \rangle \\ 0 & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_2 \rangle \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{68}} \begin{bmatrix} 68 & 26 \\ 0 & 36 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = R_1 Q_1 = \frac{1}{68} \begin{bmatrix} 596 & 72 \\ 72 & 288 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 8,7647 & 1,0588 \\ 1,0588 & 4,2353 \end{bmatrix}.$$

Como  $A_1 = R_1 Q_1 = Q_2 R_2$ , podemos do mesmo modo obter a próxima matriz da sequência.

$$A_2 = R_2 Q_2 \approx \begin{bmatrix} 8,9518 & 0,4893 \\ 0,4889 & 4,0483 \end{bmatrix}.$$

Similarmente,

$$A_3 = R_3 Q_3 \approx \begin{bmatrix} 8,9903 & 0,2196 \\ 0,2189 & 4,0096 \end{bmatrix}$$

$$A_4 = R_4 Q_4 \approx \begin{bmatrix} 8,9980 & 0,0985 \\ 0,0973 & 4,0019 \end{bmatrix}.$$

Como o maior elemento, em valor absoluto, abaixo da diagonal principal é menor do que  $10^{-1}$ , temos que os valores aproximados dos autovalores de  $A$  são,  $\lambda_1 = 8,9980$  e  $\lambda_2 = 4,0019$ . Facilmente poderíamos verificar que esses autovalores tendem a 9 e 4 respectivamente, os valores exatos dos autovalores de  $A$ .

Há duas razões pelas quais o algoritmo QR básico é muito ineficiente para uso geral. Em primeiro lugar, o custo de cada passo QR é elevado. Cada decomposição QR custa  $\frac{4}{3}n^3$  flops, e cada multiplicação matricial custa  $O(n^3)$  flops. Este é um preço muito alto a pagar, dado que esperamos ter de executar alguns passos. O segundo problema é que a convergência para a forma triangular é geralmente muito lenta, de forma que um número muito grande de iterações é necessária antes que se atinja um limite de tolerância razoável. Assim, precisamos de procedimentos para diminuir os custos das decomposições QR e também acelerar a velocidade de convergência do método.

### 2.3.1 Algoritmo QR com matrizes de Hessenberg

O custo das decomposições QR pode ser drasticamente reduzido por primeiro reduzirmos a matriz para a forma de Hessenberg antes de começar as iterações QR, já que o custo de uma decomposição QR para matrizes de Hessenberg é  $O(n^2)$ ; se além disso a matriz for Hermitiana, o custo é apenas  $O(n)$  ([Wa 02]). Também o custo da multiplicação, de uma matriz de Hessenberg superior por uma matriz triangular, é reduzido para  $O(n^2)$ . Essa redução funciona porque o algoritmo QR preserva a forma de Hessenberg, de modo que todas as matrizes da sequência QR são de Hessenberg assim como os fatores Q.

**Teorema 2.7** *Seja  $A_{m-1}$  uma matriz não-singular superior de Hessenberg, e suponhamos que  $A_m$  seja obtida através de  $A_{m-1}$  por uma iteração QR (2.22). Então  $A_m$  também é superior de Hessenberg.*

**Demonstração:** A equação  $A_{m-1} = Q_m R_m$  pode ser reescrita como  $Q_m = A_{m-1} R_m^{-1}$ , onde  $R_m^{-1}$  é triangular superior. Nós podemos facilmente mostrar que o produto de uma matriz superior de Hessenberg com uma matriz triangular superior, nesta ordem, é uma matriz superior de Hessenberg. Portanto  $Q_m$  é uma matriz superior de Hessenberg. Mas então,  $A_m = R_m Q_m$  também deve ser superior de Hessenberg.  $\square$

No teorema anterior nós assumimos mais uma vez que a matriz é não-singular. Seria bom se esta restrição fosse retirada. Entretanto, o Teorema 2.7 não é estritamente verdadeiro para o caso singular. O problema está no fato de existir uma maior liberdade na construção da decomposição QR, o que torna possível a construção de matrizes  $Q_m$  e  $R_m$  para as quais o resultado  $A_m$  não seja uma matriz triangular superior. Felizmente este não é um problema sério. É possível provar que sempre podemos escolher a decomposição QR de tal forma que o fator Q produzido seja uma matriz superior de Hessenberg, (ver, por exemplo, [Wa 02]).

**Teorema 2.8** *Um passo QR aplicado a uma matriz superior de Hessenberg requer não mais que  $O(n^2)$  flops.*

A demonstração deste teorema pode ser encontrada em [Wa 02].

### 2.3.2 Acelerando a convergência do Algoritmo QR

Considere uma sequência  $(A_j)$  de iteradas do algoritmo QR, onde cada matriz  $A_j$  é de Hessenberg superior. Denote

$$A_m = \begin{bmatrix} a_{11}^{(m)} & a_{12}^{(m)} & \cdots & a_{1, n-1}^{(m)} & a_{1n}^{(m)} \\ a_{21}^{(m)} & a_{22}^{(m)} & \cdots & a_{2, n-1}^{(m)} & a_{2n}^{(m)} \\ & a_{32}^{(m)} & \cdots & a_{3, n-1}^{(m)} & a_{3n}^{(m)} \\ & & \ddots & \vdots & \vdots \\ & & & a_{n, n-1}^{(m)} & a_{nn}^{(m)} \end{bmatrix}.$$

Ordene os autovalores de  $A$  na forma

$$|\lambda_1| \geq |\lambda_2| \geq \dots \geq |\lambda_n|.$$

No algoritmo QR as entradas subdiagonais (ou a maioria delas) convergem para 0 quando  $m \rightarrow \infty$ . Mais precisamente, se

$$|\lambda_i| > |\lambda_{i+1}|$$

então,

$$a_{i+1, i}^{(m)} \rightarrow 0$$

com taxa de convergência  $\left| \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} \right|$ ,  $i = 1, 2, \dots, n-1$ . Portanto, uma maneira de acelerar a convergência do algoritmo é decrescer as razões  $\left| \frac{\lambda_{i+1}}{\lambda_i} \right|$ . Um modo de fazer isso é através do uso de um deslocamento, como no Método das Potências. A matriz deslocada  $A - \rho I$  tem autovalores

$$|\lambda_1 - \rho| \geq |\lambda_2 - \rho| \geq \dots \geq |\lambda_n - \rho|$$

e as taxas de convergência associadas são

$$\left| \frac{(\lambda_{i+1} - \rho)}{(\lambda_i - \rho)} \right|, \quad i = 1, 2, \dots, n-1.$$

Assim, se escolhermos  $\rho$  suficientemente próximo de um autovalor arbitrário que chamaremos  $\lambda_n$  após reordenar os índices (e assumindo  $\lambda_n \neq \lambda_{n-1}$ ), aplicando o algoritmo QR a  $A - \rho I$ , em vez de  $A$ , observaremos que  $a_{n, n-1}^{(m)}$  converge para 0 rapidamente. Uma vez que  $a_{n, n-1}^{(m)}$  seja suficientemente pequeno, esta entrada pode ser considerada 0 para fins práticos e, adicionando  $\rho I$  à iterada  $(A - \rho I)_m$  do algoritmo QR obtemos

$$A_m + \rho I = \left[ \begin{array}{ccc|c} & & & * \\ & \hat{A}_m & & \vdots \\ & & & * \\ \hline 0 & \dots & 0 & a_{nn}^{(m)} \end{array} \right].$$

Pelo Teorema 1.7  $a_{nn}^{(m)}$  é um autovalor de  $A$ , de fato,  $a_{nn}^{(m)} = \lambda_n$ , o autovalor mais próximo de  $\rho$ . Os autovalores restantes de  $A$  são autovalores de  $\hat{A}_m$ , por isso podemos então aplicar o algoritmo QR à matriz  $\hat{A}_m$ , que tem ordem um a menos que a ordem de  $A$ . Se pudermos encontrar um  $\hat{\rho}$  que se aproxima de um autovalor de  $\hat{A}_m$ , então podemos extrair aquele autovalor rapidamente através da realização de iterações em  $\hat{A}_m - \hat{\rho}I$ . Uma vez que o autovalor for encontrado, podemos ir atrás do próximo autovalor, operando em um matriz ainda menor, e assim por diante. Continuando desta forma, usaremos o algoritmo QR em matrizes cada vez menores até obter todos os autovalores de  $A$ . Neste caso, estamos utilizando o processo de deflação, ou seja, processo em que o tamanho da matriz é reduzido cada vez que um autovalor é encontrado.

O problema desse argumento é que precisamos de boas aproximações para os autovalores. Onde podemos obter essas aproximações? Suponha que começamos pela realização de várias iterações QR sem deslocamento. Após um número de iterações as matrizes começarão a se aproximar da forma triangular, e as entradas da diagonal principal também se aproximarão dos autovalores de  $A$ . Em particular  $a_{nn}^{(m)}$  irá aproximar de  $\lambda_n$ , o autovalor de  $A$  de menor módulo. Portanto, é razoável tomar  $\rho = a_{nn}^{(m)}$  em algum ponto e realizar iterações subsequentes sobre a matriz  $A_m - \rho I$ . Na verdade podemos fazer melhor do que isto. A cada passo temos uma aproximação melhor para  $\lambda_n$ . Não há nenhuma razão pela qual não devemos atualizar o deslocamento frequentemente, a fim de melhorar a taxa de convergência. Na verdade, podemos escolher um novo deslocamento a cada passo se quisermos. Isto é exatamente o que é feito no algoritmo QR com deslocamento:

$$A_{m-1} - \rho_{m-1}I = Q_m R_m \quad Q_m R_m + \rho_{m-1}I = A_m,$$

onde a cada passo  $\rho_{m-1}$  é escolhido.

Temos então que  $\rho_{m-1} = a_{nn}^{(m)}$  é uma boa escolha. Isto é chamado de Quociente de Rayleigh com deslocamento, porque  $a_{nn}^{(m-1)}$  pode ser visto como um Quociente de Rayleigh. De fato, as entradas na diagonal principal são Quocientes de Rayleigh, já que

$$a_{nn} = \mathbf{e}_n^* A \mathbf{e}_n = \langle A \mathbf{e}_n; \mathbf{e}_n \rangle,$$

onde  $\mathbf{e}_n$  é um vetor da base canônica do espaço  $\mathbb{C}^n$ . Assim, o deslocamento pode ser modificado em cada iteração, como no método da Iteração do Quociente de Rayleigh. Usando-se

$$\rho_m = a_{nn}^{(m)},$$

temos que

$$\left| \frac{(\lambda_n - \rho_m)}{(\lambda_{n-1} - \rho_m)} \right| \rightarrow 0 \quad \text{quando } m \rightarrow \infty,$$

onde  $\lambda_n \neq \lambda_{n-1}$ . Portanto, obtemos uma taxa de convergência melhor que linear. De fato, como no método da Iteração do Quociente de Rayleigh, este algoritmo QR com deslocamento dado pelo Quociente de Rayleigh possui convergência quadrática em geral e cúbica para matrizes Hermitianas ([Wa 02]).

Na prática, depois de apenas uma iteração QR já é seguro usar  $\lambda_n = a_{nn}^{(1)}$ . O único efeito dessa escolha é que a ordem dos autovalores obtidos no processo não é necessariamente crescente.

Com base nestas considerações, vamos então determinar os autovalores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 2 & 5 \end{bmatrix},$$

pelo algoritmo QR com deslocamento dado pelo Quociente de Rayleigh. Para isto, tomemos  $\rho_0 = 5$  então o primeiro passo da sequência é dado por  $A_0 - \rho_0 I = Q_1 R_1$ .

$$Q_1 = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 2 & -3 \end{bmatrix}$$

$$R_1 = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{u}_1, \mathbf{q}_1 \rangle & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_1 \rangle \\ 0 & \langle \mathbf{u}_2, \mathbf{q}_2 \rangle \end{bmatrix} = \frac{1}{\sqrt{13}} \begin{bmatrix} 13 & 6 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$A_1 = R_1 Q_1 + \rho_0 I = \frac{1}{13} \begin{bmatrix} 51 & 8 \\ 8 & -12 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 3,9231 & 0,6154 \\ 0,6154 & -0,9231 \end{bmatrix}.$$

O deslocamento dado pelo Quociente de Rayleigh para o próximo passo é  $\rho_1 \approx 4,0769$ , logo,

$$A_2 = R_2 Q_2 + \rho_1 I \approx \begin{bmatrix} 8,9998 & 0,0099 \\ 0,0099 & 4,0000 \end{bmatrix}.$$

Neste caso temos  $\rho_2 \approx 4$ , então,

$$A_3 = R_3 Q_3 + \rho_2 I \approx \begin{bmatrix} 9,0000 & 0,0000 \\ 0,0000 & 4,0000 \end{bmatrix}.$$

Vimos que neste caso a convergência ocorreu mais rapidamente do que quando, para esta mesma matriz, não utilizamos o Quociente de Rayleigh como deslocamento. Obtivemos uma melhor precisão com um menor número de passos.

O deslocamento dado pelo Quociente de Rayleigh às vezes pode falhar, por exemplo, quando o deslocamento obtido está a mesma distância de dois autovalores distintos, fazendo com que o método tenha dificuldade de decidir qual autovalor aproximar. Para evitar esta situação, é preferível usar o deslocamento de Wilkinson, que é definido como sendo o autovalor da submatriz  $2 \times 2$ .

$$\begin{bmatrix} a_{n-1, n-1}^{(m-1)} & a_{n-1, n}^{(m-1)} \\ a_{n, n-1}^{(m-1)} & a_{n, n}^{(m-1)} \end{bmatrix}$$

que está mais próximo de  $a_{n, n}^{(m-1)}$ . Ele é fácil de calcular porque é a raiz de um polinômio do segundo grau. É possível provar para matrizes simétricas tridiagonais que o algoritmo QR com deslocamento de Wilkinson sempre converge. Além disso, como estamos usando maior informação para obter o deslocamento, a taxa convergência é no mínimo igual à do algoritmo QR usando o deslocamento dado pelo Quociente de Rayleigh e muitas vezes melhor. Em geral, existem apenas casos muito especiais de matrizes para as quais o deslocamento de Wilkinson falha.

O deslocamento de Wilkinson tem a vantagem inicial de que pode ser usado para aproximar autovalores complexos de matrizes reais, já que ele pode ser um número complexo, enquanto que o quociente de Rayleigh de uma matriz real sempre é um valor real.

Por fim, às vezes ocorre durante as iterações do algoritmo QR que um elemento da sub-diagonal inferior localizado próximo ao meio da matriz é suficientemente próximo de 0. Neste caso a matriz  $A_m$  tem a forma em blocos

$$\begin{bmatrix} B_{11} & B_{12} \\ 0 & B_{22} \end{bmatrix}$$

onde  $B_{11} \in \mathbb{C}^{j \times j}$ ,  $B_{22} \in \mathbb{C}^{k \times k}$ ,  $j + k = n$ . Agora podemos encontrar os autovalores de  $B_{11}$  e  $B_{22}$  separadamente. Isto pode poupar grande quantidade de trabalho se a ruptura for feita próxima do meio da matriz. Como o custo de uma iteração QR de Hessenberg é  $O(n^2)$ , dividindo o tamanho da matriz pela metade implica numa diminuição do custo por um fator de 4. Para maiores detalhes a respeito das considerações feitas nesta seção ver ([Wa 02]).



$$\begin{aligned}
&= \left[ \begin{array}{ccc|ccc} \alpha_1 & \beta_1 & & & & \\ \beta_1 & \ddots & \ddots & & & \\ & \ddots & \alpha_{i-1} & \beta_{i-1} & & \\ & & \beta_{i-1} & (\alpha_i - \beta_i) & & \\ \hline & & & 0 & & \\ & & & (\alpha_{i+1} - \beta_i) & \beta_{i+1} & \\ & & & \beta_{i+1} & \alpha_{i+2} & \ddots \\ & & & & \ddots & \ddots & \beta_{n-1} \\ & & & & & \beta_{n-1} & \alpha_n \end{array} \right] + \beta_i \left[ \begin{array}{c|c} 1 & 1 \\ \hline 1 & 1 \end{array} \right] \\
&= \left[ \begin{array}{c|c} \frac{T_1}{0} & \frac{0}{T_2} \\ \hline 0 & T_2 \end{array} \right] + \beta_i \begin{bmatrix} 0 \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \left[ 0, \dots, 0, 1, 1, 0, \dots, 0 \right] \equiv \left[ \begin{array}{c|c} \frac{T_1}{0} & \frac{0}{T_2} \\ \hline 0 & T_2 \end{array} \right] + \beta_i \mathbf{v}\mathbf{v}^T,
\end{aligned}$$

sendo  $\mathbf{v} = \left[ 0, \dots, 0, 1, 1, 0, \dots, 0 \right]^T$ .

Agora suponhamos que conhecemos a decomposição em autovalores de  $T_1$  e  $T_2$ , ou seja,

$$T_i = Q_i \Lambda_i Q_i^T,$$

onde  $\Lambda_i$  é a matriz diagonal de autovalores e  $Q_i$  uma matriz ortogonal cujas colunas são os autovetores de  $T_i$ . Nós relacionamos os autovalores de  $T$  aos de  $T_1$  e  $T_2$  da seguinte forma:

$$\begin{aligned}
T &= \begin{bmatrix} T_1 & 0 \\ 0 & T_2 \end{bmatrix} + \beta_i \mathbf{v}\mathbf{v}^T \\
&= \begin{bmatrix} Q_1 \Lambda_1 Q_1^T & 0 \\ 0 & Q_2 \Lambda_2 Q_2^T \end{bmatrix} + \beta_i \mathbf{v}\mathbf{v}^T \\
&= \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & Q_2 \end{bmatrix} \left( \begin{bmatrix} \Lambda_1 & \\ & \Lambda_2 \end{bmatrix} + \beta_i \mathbf{u}\mathbf{u}^T \right) \begin{bmatrix} Q_1^T & 0 \\ 0 & Q_2^T \end{bmatrix},
\end{aligned}$$

onde

$$\mathbf{u} = \begin{bmatrix} Q_1^T & 0 \\ 0 & Q_2^T \end{bmatrix} \quad \mathbf{v} = \begin{bmatrix} \text{última coluna de } Q_1^T \\ \text{última coluna de } Q_2^T \end{bmatrix},$$

uma vez que  $\mathbf{v} = \left[ 0, \dots, 0, 1, 1, 0, \dots, 0 \right]^T$ . Portanto, os autovalores de  $T$  são os mesmos que os da matriz semelhante  $D + \rho \mathbf{u} \mathbf{u}^T$ , onde  $D = \begin{bmatrix} \Lambda_1 & 0 \\ 0 & \Lambda_2 \end{bmatrix}$  é diagonal,  $\rho = \beta_i$  é um escalar, e  $\mathbf{u}$  é um vetor.

A partir de agora vamos assumir, sem perda de generalidade, que a diagonal  $d_1, d_2, \dots, d_n$  de  $D$  é da seguinte forma:  $d_n \leq \dots \leq d_1$ . Para encontrarmos os autovalores de  $D + \rho \mathbf{u} \mathbf{u}^T$ , assumiremos primeiro que  $D - \lambda I$  é não singular, e calcularemos o polinômio característico como se segue:

$$\det(D + \rho \mathbf{u} \mathbf{u}^T - \lambda I) = \det((D - \lambda I)(I + \rho(D - \lambda I)^{-1} \mathbf{u} \mathbf{u}^T)).$$

Como  $D - \lambda I$  é não singular, então  $\det(D - \lambda I) \neq 0$ . Logo,

$$\det(I + \rho(D - \lambda I)^{-1} \mathbf{u} \mathbf{u}^T) = 0$$

sempre que  $\lambda$  for um autovalor.

**Lema 2.1** *Se  $\mathbf{x}$  e  $\mathbf{y}$  são vetores,  $\det(I + \mathbf{x} \mathbf{y}^T) = 1 + \mathbf{y}^T \mathbf{x}$ .*

**Demonstração:** Seja  $X = \left[ \frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}, X_2 \right]$  uma matriz ortogonal, onde a primeira coluna é  $\frac{\mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}$ . Então, podemos escrever:

$$\det(I + \mathbf{x} \mathbf{y}^T) = \det(X^T(I + \mathbf{x} \mathbf{y}^T)X) = \det(I + X^T \mathbf{x} \mathbf{y}^T X).$$

Temos que

$$X^T \mathbf{x} = [\|\mathbf{x}\|, 0, 0, \dots, 0]^T \text{ e } \mathbf{y}^T X = \left[ \frac{\mathbf{y}^T \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|}, \mathbf{y}^T X_2 \right]$$

portanto,

$$I + X^T(\mathbf{x} \mathbf{y}^T)X = \begin{bmatrix} 1 + \|\mathbf{x}\| \cdot \frac{\mathbf{y}^T \mathbf{x}}{\|\mathbf{x}\|} & \mathbf{y}^T X_2 \\ 0 & I \end{bmatrix}.$$

Sendo assim,  $I + X^T(\mathbf{x} \mathbf{y}^T)X$  é uma matriz triangular superior cujo determinante é  $1 + \mathbf{y}^T \mathbf{x}$ .  $\square$

Para maiores detalhes sobre o lema anterior ver, por exemplo, [Ru 94].

Portanto, pelo Lema 2.1

$$\begin{aligned} \det(I + \rho(D - \lambda I)^{-1} \mathbf{u} \mathbf{u}^T) &= 1 + \rho \mathbf{u}^T (D - \lambda I)^{-1} \mathbf{u} \\ &= 1 + \rho \sum_{i=1}^n \frac{u_i^2}{d_i - \lambda} \equiv f(\lambda). \end{aligned} \quad (2.23)$$

Logo, os autovalores de  $T$  são as raízes da chamada **Equação Secular**  $f(\lambda) = 0$ . Se todos os  $d_i$  são distintos e  $u_1 \neq 0$  (caso genérico), a função  $f(\lambda)$  tem o gráfico mostrado na Figura 2.4 (para  $n = 4$  e  $\rho > 0$ ).

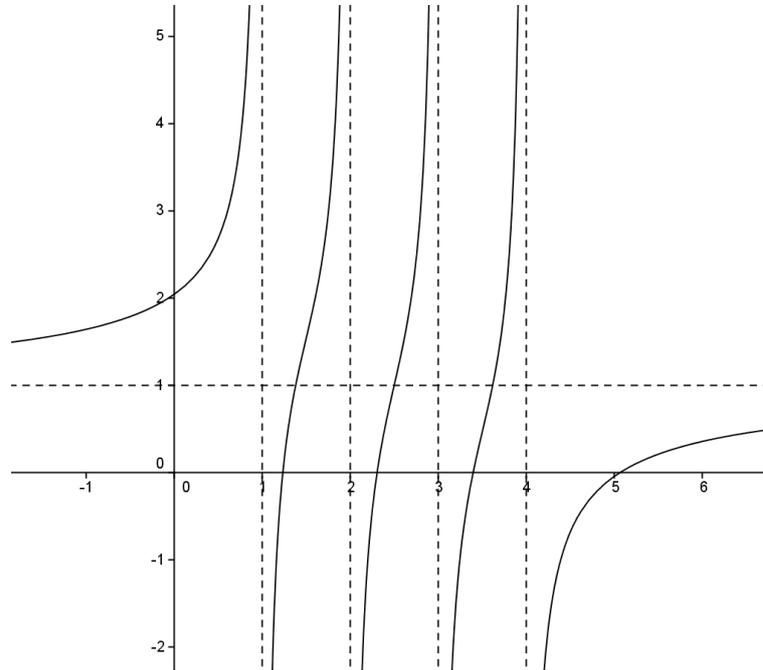


Figura 2.4: Gráfico de  $f(\lambda) = 1 + \frac{.5}{1-\lambda} + \frac{.5}{2-\lambda} + \frac{.5}{3-\lambda} + \frac{.5}{4-\lambda}$ .

**Definição 2.6** Uma função  $f : X \rightarrow \mathbb{R}$  (onde  $X \subset \mathbb{R}$ ) chama-se **crescente** quando  $x, y \in X$ ,  $x < y$  então  $f(x) < f(y)$ . Se  $x < y$  (com  $x, y \in X$ ) implica apenas  $f(x) \leq f(y)$ ,  $f$  chama-se **não-decrescente**. De modo análogo define-se função decrescente e função não-crescente. Uma função de qualquer destes tipos chama-se **monótona**.

Como podemos ver, a reta  $y = 1$  é uma assíntota horizontal, e as retas  $\lambda = d_i$  são assíntotas verticais. Uma vez que

$$f'(\lambda) = \rho \sum_{i=1}^n \frac{u_i^2}{(d_i - \lambda)^2} > 0$$

a função é estritamente crescente, exceto em  $\lambda = d_i$ . Assim, as raízes de  $f(\lambda)$  são entrelaçadas por  $d_i$ , e há mais uma raiz à direita de  $d_1$  ( $d_1 = 4$  na Figura 2.4 [De 97]). (Se  $\rho < 0$ , então  $f(\lambda)$  é decrescente e há mais uma raiz à esquerda de  $d_n$ ). Uma vez que  $f(\lambda)$  é monótona e suave nos intervalos  $(d_i, d_{i+1})$ , é possível encontrar uma versão do Método

de Newton (ver, por exemplo, [Be 06]) em que a convergência seja rápida e monótona para cada raiz, dado um ponto de partida em  $(d_i, d_{i+1})$ . Na prática, usando o Método de Newton a convergência se dá em um número limitado de passos por autovalor. Uma vez que avaliar  $f(\lambda)$  e  $f'(\lambda)$  custa  $O(n)$  flops, encontrar um autovalor custa  $O(n)$  flops, e encontrar todos os  $n$  autovalores de  $D + \rho uu^T$  custa  $O(n^2)$  flops.

Também é fácil obtermos uma expressão para os autovetores de  $D + \rho uu^T$ .

**Lema 2.2** *Se  $\alpha$  é um autovalor de  $D + \rho uu^T$ , então  $(D - \alpha I)^{-1} \mathbf{u}$  é um autovetor.*

**Demonstração:** Observemos que

$$\begin{aligned} (D + \rho uu^T)[(D - \alpha I)^{-1} \mathbf{u}] &= (D - \alpha I + \alpha I + \rho uu^T)(D - \alpha I)^{-1} \\ &= \mathbf{u} + \alpha(D - \alpha I)^{-1} \mathbf{u} + \mathbf{u}[\rho u^T (D - \alpha I)^{-1} \mathbf{u}]. \end{aligned}$$

Uma vez que

$$\rho u^T (D - \alpha I)^{-1} \mathbf{u} + 1 = f(\alpha) = 0,$$

então,

$$\begin{aligned} (D + \rho uu^T)[(D - \alpha I)^{-1} \mathbf{u}] &= \mathbf{u} + \alpha(D - \alpha I)^{-1} \mathbf{u} - \mathbf{u} \\ &= \alpha[(D - \alpha I)^{-1} \mathbf{u}], \end{aligned}$$

como queríamos mostrar. □

Evoluir esta fórmula para todos os  $n$  autovetores custa  $O(n^2)$  flops. Infelizmente, esta fórmula simples para os autovetores não é numericamente estável, porque dois valores de  $\alpha_i$  muito próximos, podem resultar em autovetores,  $u_i$ , não ortogonais (para maiores detalhes ver, por exemplo, [De 97]).

## 2.5 Método de Jacobi

O Método de Jacobi é um dos mais antigos métodos numéricos para o problema de calcular todos os autovalores de uma matriz simétrica (as considerações feitas nesta seção poderão ser analisadas com maiores detalhes em [Be 06]). Sendo usado para determinar

os autovalores e autovetores, de tais matrizes, através de uma série de transformações similares:

$$A_{m+1} = J_m^{-1} A_k J_k, \quad k = 1, 2, \dots \quad (2.24)$$

onde  $A_1 = A$  e  $J_m$  é uma matriz de rotação (ver Apêndice A). Podemos ainda escrever (2.24) como:

$$A_{m+1} = J_m^T A_k J_k.$$

**Lema 2.3** *Seja  $A$  uma matriz de ordem  $n$  com autovalores  $\lambda_i$  e correspondentes autovetores  $\mathbf{v}_i$ , os quais vamos supor sejam linearmente independentes, e seja*

$$D = \begin{pmatrix} \lambda_1 & & & & \\ & \lambda_2 & & & \\ & & \lambda_3 & & \\ & & & \ddots & \\ & & & & \lambda_n \end{pmatrix}.$$

*Então  $D = V^{-1}AV$  se, e somente se a  $i$ -ésima coluna de  $V$  é  $\mathbf{v}_i$ .*

**Demonstração:** Se a  $i$ -ésima coluna de  $V$  é denotada por  $\mathbf{v}_i$  então a  $i$ -ésima coluna de  $AV$  e  $VD$  são,  $A\mathbf{v}_i$  e  $\lambda_i\mathbf{v}_i$ , respectivamente. Portanto os vetores  $\mathbf{v}_i$  são os autovetores de  $A$  se, e somente se,  $AV = VD$ . Esta equação pode ser reorganizada como:  $D = V^{-1}AV$  desde que  $V$  seja não-singular, e este é o caso pois as colunas de  $V$  são linearmente independentes.  $\square$

As matrizes  $A_1, A_2, \dots$  convergem num número infinito de passos para uma matriz diagonal. Os autovalores e autovetores são então determinados em virtude do Lema 2.3 (o qual se aplica tanto para matrizes simétricas como para matrizes não simétricas).

Assim, após  $m$  passos do método de Jacobi, obteremos:

$$A_{m+1} = J_m^T \dots J_2^T J_1^T A_1 J_1 J_2 \dots J_m.$$

Portanto, se  $A_{m+1} \simeq D$  segue que os elementos diagonais de  $A_{m+1}$  são aproximações para os autovalores de  $A$  e as colunas de  $V = J_1 J_2 \dots J_m$  são aproximações para os autovetores.

Alguns conceitos são fundamentais para que possamos descrever o Método de Jacobi, (para matrizes simétricas), e a partir deste momento passaremos a analisá-los.

## 2.5.1 Rotação de Jacobi

Seja  $A$  uma matriz simétrica. Uma rotação  $(p, q)$  de Jacobi é a operação  $J^T A J$  com  $J$  dada por (A.1) (maiores detalhes em [Be 06]). Observemos que para fazermos uma rotação de Jacobi precisamos realizar uma transformação de semelhança na matriz  $A$ .

Para exemplificarmos, consideremos inicialmente, uma rotação  $(2, 4)$  de Jacobi, em uma matriz  $A$  de ordem 4. Efetuando o produto  $J^T A$ , obtemos:

$$\begin{aligned} J^T A &= \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21}c - a_{41}s & a_{22}c - a_{42}s & a_{23}c - a_{43}s & a_{24}c - a_{44}s \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{21}s + a_{41}c & a_{22}s + a_{42}c & a_{23}s + a_{43}c & a_{24}s + a_{44}c \end{bmatrix} \\ &= A' = (a'_{ij}), \end{aligned}$$

onde  $\cos \varphi = c$  e  $\sin \varphi = s$ .

Fazendo agora o produto  $A'J$ , segue que:

$$\begin{aligned} A'J &= \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \\ a'_{31} & a'_{32} & a'_{33} & a'_{34} \\ a'_{41} & a'_{42} & a'_{43} & a'_{44} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \cos \varphi & 0 & -\sin \varphi \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \sin \varphi & 0 & \cos \varphi \end{bmatrix} \\ &= \begin{bmatrix} a'_{11} & a'_{12}c - a'_{14}s & a'_{13} & a'_{12}s + a'_{14}c \\ a'_{21} & a'_{22}c - a'_{24}s & a'_{23} & a'_{22}s + a'_{24}c \\ a'_{31} & a'_{32}c - a'_{34}s & a'_{33} & a'_{32}s + a'_{34}c \\ a'_{41} & a'_{42}c - a'_{44}s & a'_{43} & a'_{42}s + a'_{44}c \end{bmatrix} = A'' = (a''_{ij}). \end{aligned}$$

Assim, de um modo geral, para uma matriz de ordem  $n$  o produto  $J^T A$ , fornece uma matriz  $A'$ , onde:

$$\begin{cases} a'_{pj} = a_{pj} \cos \varphi - a_{qj} \sin \varphi, & 1 \leq j \leq n, \\ a'_{qj} = a_{pj} \sin \varphi + a_{qj} \cos \varphi, & 1 \leq j \leq n, \\ a'_{ij} = a_{ij}, \quad i \neq p, q, & 1 \leq j \leq n. \end{cases} \quad (2.25)$$

e o produto  $A'J$  fornece uma matriz  $A''$ , onde:

$$\begin{cases} a''_{ip} = a'_{ip} \cos \varphi - a'_{iq} \sin \varphi, & 1 \leq i \leq n, \\ a''_{iq} = a'_{ip} \sin \varphi + a'_{iq} \cos \varphi, & 1 \leq i \leq n, \\ a''_{ij} = a'_{ij}, \quad j \neq p, q, & 1 \leq i \leq n. \end{cases} \quad (2.26)$$

Portanto, a matriz  $A''$  tem a seguinte forma:

$$A'' = \begin{bmatrix} \ddots & \vdots & & \vdots & & \\ \dots & \square & \dots & \square & \dots & p \\ & \vdots & \ddots & \vdots & & \\ \dots & \square & \dots & \square & \dots & q \\ & \vdots & & \vdots & \ddots & \\ & p & & q & & \end{bmatrix},$$

isto é, na matriz  $A''$  apenas os elementos das linhas e colunas  $p$  e  $q$  serão alterados, sendo que os elementos  $a_{pp}$ ,  $a_{pq}$ ,  $a_{qp}$ ,  $a_{qq}$  serão transformados duas vezes. Portanto  $A''$  continua simétrica.

Vejamos agora as fórmulas que determinam a passagem de  $A \rightarrow A''$ , denominada Rotação de Jacobi de um ângulo  $\varphi$  para os elementos da interseção. Lembrando que a matriz  $A$  é simétrica, temos utilizando (2.25) e (2.26), que:

$$\begin{aligned} 1. \quad a''_{pp} &= a'_{pp} \cos \varphi - a'_{pq} \sin \varphi \\ &= (a_{pp} \cos \varphi - a_{qp} \sin \varphi) \cos \varphi - \\ &\quad - (a_{pq} \cos \varphi - a_{qq} \sin \varphi) \sin \varphi. \end{aligned}$$

Portanto,

$$a''_{pp} = a_{pp} \cos^2 \varphi - 2a_{pq} \sin \varphi \cos \varphi + a_{qq} \sin^2 \varphi. \quad (2.27)$$

$$\begin{aligned} 2. \quad a''_{qq} &= a'_{qp} \sin \varphi + a'_{qq} \cos \varphi \\ &= (a_{pp} \sin \varphi + a_{qp} \cos \varphi) \sin \varphi + \\ &\quad + (a_{pq} \sin \varphi + a_{qq} \cos \varphi) \cos \varphi. \end{aligned}$$

Logo,

$$a''_{qq} = a_{pp} \sin^2 \varphi + 2a_{pq} \sin \varphi \cos \varphi + a_{qq} \cos^2 \varphi \quad (2.28)$$

$$\begin{aligned} 3. \quad a''_{pq} &= a'_{pp} \sin \varphi + a'_{pq} \cos \varphi \\ &= (a_{pp} \cos \varphi - a_{qp} \sin \varphi) \sin \varphi + \\ &\quad + (a_{pq} \cos \varphi - a_{qq} \sin \varphi) \sin \varphi. \end{aligned}$$

Assim,

$$a''_{pq} = a''_{qp} = (a_{pp} - a_{qq}) \sin \varphi \cos \varphi + a_{pq}(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi). \quad (2.29)$$

Portanto, para fazer uma rotação  $(p, q)$  de Jacobi, usamos as fórmulas (2.27), (2.28), (2.29) e (2.26) com  $j \neq p, q$  e com  $i \neq p, q$ .

## 2.5.2 Método Clássico de Jacobi

O Método Clássico de Jacobi, ou simplesmente Método de Jacobi, é um método numérico que serve para determinar autovalores e autovetores de matrizes simétricas. Dada a matriz  $A$ , efetuamos uma sequência de rotações:

$$A_1 = A; A_2 = J_1^T A_1 J_1 \rightarrow A_3 = J_2^T A_2 J_2 \rightarrow \dots \rightarrow \dots \rightarrow A_{k+1} = J_k^T A_k J_k \simeq D$$

onde  $J_i, i = 1, 2, \dots, k$  são matrizes de rotação, e  $D$  é uma matriz diagonal.

O processo para construção da matriz  $A_2$ , consiste em escolhermos entre os elementos não diagonais de  $A$  o elemento de maior valor absoluto, isto é:

$$a_{pq} = \max_{i \neq j} (a_{ij}).$$

Fazer então, uma rotação com a finalidade de zerar o elemento  $a_{pq}$ . A seguir reaplicamos o processo à matriz resultante tantas vezes quantas forem necessárias, de tal modo a reduzirmos a matriz  $A$  a uma matriz diagonal  $D$ , cujos elementos são os autovalores de  $A$ .

Assim, no primeiro passo devemos zerar o elemento  $a_{pq}$ . Assumimos que  $a_{pq} \neq 0$ , (pois caso contrário nada teríamos a fazer), e assim nosso objetivo é obter  $a''_{pq} = 0$ . De (2.29), temos a expressão para  $a_{pq}$  e impondo que o mesmo seja identicamente nulo, segue que:

$$(a_{pp} - a_{qq}) \underbrace{\cos \varphi \sin \varphi}_{\frac{1}{2} \sin 2\varphi} + a_{pq} \underbrace{(\cos^2 \varphi - \sin^2 \varphi)}_{\cos 2\varphi} = 0$$

Portanto,

$$\begin{aligned} a_{pp} - a_{qq} &= -\frac{a_{pq} \cos 2\varphi}{\frac{1}{2} \sin 2\varphi} = -2a_{pq} \cot 2\varphi \\ \Rightarrow \cot 2\varphi &= \frac{a_{qq} - a_{pp}}{2a_{pq}} = \phi. \end{aligned}$$

Agora,

$$\cot 2\varphi = \frac{1 - \tan^2 \varphi}{2 \tan^2 \varphi}.$$

Seja  $t = \tan \varphi$ , temos então:

$$\phi = \frac{1 - t^2}{2t} \Rightarrow 1 - t^2 = 2t\phi.$$

Portanto,

$$\begin{aligned} t^2 + 2t\phi - 1 &= 0 \Rightarrow \frac{-2\phi \pm \sqrt{4\phi^2 + 4}}{2}. \\ t &= -\phi \pm \sqrt{\phi^2 + 1} \\ t &= \frac{1}{\phi \pm \sqrt{\phi^2 + 1}} \end{aligned}$$

Resolvendo computacionalmente,

$$t = \begin{cases} \frac{1}{\phi + \text{Sinal}(\phi)\sqrt{\phi^2 + 1}}, & \phi \neq 0 \\ 1, & \phi = 0 \end{cases}$$

Observe que escolhemos o sinal positivo ou negativo de  $\phi$  de modo a obter o denominador de maior módulo, pois assim teremos sempre  $|t| \leq 1$ . Logo podemos escrever:

$$\begin{aligned} c = \cos \phi &= \frac{1}{\sqrt{1+t^2}}, \\ s = \sin \phi &= \frac{t}{\sqrt{1+t^2}}. \end{aligned}$$

Ao mesmo tempo que calculamos os autovalores de uma matriz  $A$  pelo Método de Jacobi podemos obter seus autovetores. Veja, por exemplo, [Wi 65].

Apresentaremos a seguir um algoritmo para o Método de Jacobi, entretanto precisaremos da seguinte definição.

**Definição 2.7** *Definimos a “norma” das entradas fora da diagonal de uma matriz  $A$  como sendo:*

$$\text{off}(A) = \sqrt{\sum_{i=1}^n \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^n a_{ij}^2}. \quad (2.30)$$

**ALGORITMO 2.5 (Método Clássico de Jacobi)** [GoVa 96] (página 428): *Dado uma matriz simétrica  $A \in \mathbb{R}^{n \times n}$  e uma tolerância  $\text{tol} > 0$ , este algoritmo reescreve  $A$  como  $V^T A V$ , onde  $V$  é uma matriz ortogonal e  $\text{off}(V^T A V) \leq \text{tol} \|A\|$ .*

$$J = I_n; \quad \text{eps} = \text{tol}\|A\|$$

**enquanto**  $\text{off}(J^T A J) > \text{eps}$

*escolha*  $(p, q)$  de modo que  $|a_{pq}| = \max_{i \neq j} |a_{ij}|$ .

$(c, s) = \text{Decomposição Schur}(A, p, q)$

$$A = J(p, q, \theta)^T A J(p, q, \theta)$$

$$V = V J(p, q, \theta)$$

**fim**

**Observação 2.2** No algoritmo anterior foi utilizado a Decomposição de Schur, para maiores detalhes sobre este assunto ver, por exemplo, [GoVa 96].

O método de Jacobi apresenta vários benefícios, por exemplo, é relativamente simples de programar, capaz de uma precisão muito elevada e ainda conforme apresentado em [Wi 65] sua taxa de convergência é quadrática.

Sendo assim, usando o Método de Jacobi vamos encontrar os autovalores da matriz

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Primeiramente iremos zerar as entrada  $(1, 3)$  e  $(3, 1)$  usando rotações.

$$J_0 = \begin{bmatrix} 0.707 & 0 & -0.707 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.707 & 0 & 0.707 \end{bmatrix}$$

Então obtemos:

$$A_1 = J_0^T A_0 J_0 = \begin{bmatrix} 3 & 0.707 & 0 \\ 0.707 & 2 & 0.707 \\ 0 & 0.707 & -1 \end{bmatrix}.$$

Agora iremos zerar as entradas  $(1, 2)$  e  $(2, 1)$  usando rotações:

$$J_1 = \begin{bmatrix} 0.888 & -0.460 & 0 \\ 0.460 & 0.888 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Logo:

$$A_2 = J_1^T A_1 J_1 = \begin{bmatrix} 3.366 & 0 & 0.325 \\ 0 & 1.634 & 0.628 \\ 0.325 & 0.628 & -1 \end{bmatrix}.$$

Zeraremos as entradas (2, 3) e (3, 2) usando rotações:

$$J_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0.975 & -0.221 \\ 0 & 0.221 & 0.975 \end{bmatrix}$$

Assim:

$$A_3 = J_2^T A_1 J_2 = \begin{bmatrix} 3.366 & 0.072 & 0.317 \\ 0.072 & 1.776 & 0 \\ 0.317 & 0 & -1.142 \end{bmatrix}.$$

Começando a varredura novamente, mais uma vez vamos zerar (1, 3) e (3, 1) usando rotações:

$$J_3 = \begin{bmatrix} 0.998 & 0 & -0.070 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0.070 & 0 & 0.998 \end{bmatrix}.$$

Então obtemos:

$$A_4 = J_3^T A_3 J_3 = \begin{bmatrix} 3.388 & 0.072 & 0 \\ 0.072 & 1.776 & 0.005 \\ 0 & 0.005 & -1.164 \end{bmatrix}.$$

Observe que os elementos não diagonais da sequência  $A_k \rightarrow 0$ , à medida que  $k$  aumenta. Assim os elementos diagonais da sequência  $A_k$  convergem para os autovalores de  $A$  que são:  $\lambda_1 = 3.3914$ ,  $\lambda_2 = 1.7729$  e  $\lambda_3 = -1.1642$ . Uma precisão maior pode ser obtida continuando o processo.

# Capítulo 3

## Aplicações para o problema de busca de autovalores

O capítulo anterior teve como objetivo fornecer uma visão geral de alguns Métodos Numéricos utilizados para encontrar autovalores e autovetores de matrizes. Neste capítulo utilizaremos alguns destes algoritmos para solucionar um problema real de crescimento populacional e ainda um problema relacionado a frequência natural de um circuito elétrico.

### 3.1 Crescimento populacional por faixa etária

#### 3.1.1 Introdução

Um dos modelos de crescimento populacional mais comumente usado por demógrafos é o modelo matricial de Leslie, desenvolvido em 1945. Este modelo descreve o crescimento da parte fêmea de uma população animal ou humana que está dividida em faixas etárias de igual duração. Considera ainda a população fechada à migração, ou seja, apenas os nascimentos e mortes são levados em conta. Com base no modelo matemático utilizado para analisar o crescimento de uma população por faixas etárias podemos investigar o crescimento da população ao longo do tempo, e determinar o limite da distribuição etária e a taxa de crescimento populacional. A análise apresentada nesta seção poderá ser encontrada em [AnRo 01].

### 3.1.2 O Modelo Matemático

Conforme mencionado no modelo de Leslie a população é dividida em grupos baseados em faixas etárias. Suponhamos que  $K$  seja a idade máxima atingida por qualquer fêmea da população analisada. Se dividirmos a população em  $n$  faixas etárias, então cada faixa etária terá  $\frac{K}{n}$  anos de duração. Suponhamos ainda que o número de fêmeas em cada uma das  $n$  faixas seja conhecido no instante  $t_k$  e que exista  $x_1^{(k)}$  fêmeas na primeira faixa,  $x_2^{(k)}$  na segunda faixa e assim sucessivamente, obtendo o seguinte vetor coluna:

$$\mathbf{x}^{(k)} = \begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix}$$

que é chamado de *vetor de distribuição etária instante  $t_k$* .

À medida que o tempo avança, o número de fêmeas dentro de cada uma das  $n$  faixas etárias muda em virtude de três processos biológicos: nascimento, morte e envelhecimento. Descrevendo esses três processos quantitativamente, veremos como projetar o vetor de distribuição etária inicial para o futuro.

Para estudarmos o processo de envelhecimento observaremos a população em intervalos de tempo discretos, ou seja,  $t_0, t_1, \dots, t_k, \dots$ . O Modelo de Leslie exige que a duração entre dois tempos de observação sucessivos seja igual à duração de uma faixa etária. Com essa hipótese, todas as fêmeas na  $(i + 1)$ -ésima faixa etária no instante  $t_{k+1}$  estavam na  $i$ -ésima faixa no instante  $t_k$ , ou seja, os indivíduos que sobreviverem da faixa  $i$  contados no instante  $t_k$  constituirão a faixa  $(i + 1)$  na contagem do instante  $t_{k+1}$ . Os processos de nascimento e morte entre dois tempos de observações sucessivas podem ser descritos por meio dos seguintes parâmetros demográficos:

$a_i (i = 1, 2, \dots, n)$	O número médio de filhas nascidas por fêmea durante o tempo em que ela está na $i$ -ésima faixa etária
$b_i \quad (i = 1, 2, \dots, n - 1)$	A fração de fêmeas na $i$ -ésima faixa etária que se espera que vá sobreviver e passar para a $(i + 1)$ -ésima faixa etária

Pelas definições acima e, em condições normais, temos como consequências:

- (i)  $a_i \geq 0$  para  $i = 1, 2, \dots, n$   
(ii)  $0 < b_i \leq 1$  para  $i = 1, 2, \dots, n - 1$

Observemos que não permitimos  $b_i = 0$ , pois então nenhuma fêmea sobreviveria além da  $i$ -ésima faixa etária. Também vamos supor que pelo menos um dos  $a_i$  é positivo, o que significa que há algum nascimento. Qualquer faixa etária para a qual o correspondente valor de  $a_i$  é positivo é chamada uma *faixa etária fértil*. Deste modo, no instante  $t_k$ , as fêmeas na primeira faixa etária são exatamente as filhas nascidas entre os instantes  $t_{k-1}$  e  $t_k$ . Generalizando,

$$\begin{bmatrix} \text{Número} \\ \text{de fêmeas na} \\ \text{faixa etária 1} \\ \text{no tempo } t_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Número} \\ \text{de filhas nascidas} \\ \text{das fêmeas na faixa} \\ \text{etária 1 entre os} \\ \text{tempos } t_{k-1} \text{ e } t_k \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} \text{Número} \\ \text{de filhas nascidas} \\ \text{das fêmeas na faixa} \\ \text{etária 2 entre os} \\ \text{tempos } t_{k-1} \text{ e } t_k \end{bmatrix} + \dots + \begin{bmatrix} \text{Número} \\ \text{de filhas nascidas} \\ \text{das fêmeas na faixa} \\ \text{etária } n \text{ entre os} \\ \text{tempos } t_{k-1} \text{ e } t_k \end{bmatrix}$$

ou, matematicamente,

$$x_1^{(k)} = a_1 x_1^{(k-1)} + a_2 x_2^{(k-1)} + \dots + a_n x_n^{(k-1)} \quad (3.1)$$

As fêmeas na  $(i + 1)$ -ésima faixa etária ( $i = 1, 2, \dots, n - 1$ ) no instante  $t_k$  são aquelas que estavam na  $i$ -ésima faixa etária no instante  $t_{k-1}$  e que ainda vivem no instante  $t_k$ . Assim,

$$\begin{bmatrix} \text{Número} & \text{de} \\ \text{fêmeas na faixa} \\ \text{etária } i + 1 \text{ no} \\ \text{tempo } t_k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \text{Fração} & \text{de} \\ \text{fêmeas na faixa etária} \\ \text{} i \text{ que sobrevive e passa} \\ \text{para a faixa etária } i + 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \text{Número} & \text{de} \\ \text{fêmeas na faixa} \\ \text{etária } i \text{ no in-} \\ \text{stante } t_{k-1} \end{bmatrix}$$

ou, matematicamente,

$$x_{i+1}^{(k)} = b_i x_i^{(k-1)} \quad i = 1, 2, \dots, n - 1 \quad (3.2)$$

Usando notação matricial, podemos escrever as Equações (3.1) e (3.2) como:

$$\begin{bmatrix} x_1^{(k)} \\ x_2^{(k)} \\ x_3^{(k)} \\ \vdots \\ x_n^{(k)} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1^{(k-1)} \\ x_2^{(k-1)} \\ x_3^{(k-1)} \\ \vdots \\ x_n^{(k-1)} \end{bmatrix}$$

ou, mais compactamente:

$$\mathbf{x}^{(k)} = L\mathbf{x}^{(k-1)}, \quad k = 1, 2, \dots \quad (3.3)$$

onde  $L$  é a *matriz de Leslie*

$$L = \begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \quad (3.4)$$

Utilizando a Equação (3.3) podemos escrever:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}^{(1)} &= L\mathbf{x}^{(0)} \\ \mathbf{x}^{(2)} &= L\mathbf{x}^{(1)} = L^2\mathbf{x}^{(0)} \\ \mathbf{x}^{(3)} &= L\mathbf{x}^{(2)} = L^3\mathbf{x}^{(0)} \\ &\vdots \\ \mathbf{x}^{(k)} &= L\mathbf{x}^{(k-1)} = L^k\mathbf{x}^{(0)} \end{aligned} \quad (3.5)$$

Assim, se conhecemos a distribuição etária inicial  $\mathbf{x}^{(0)}$  e a Matriz de Leslie  $L$ , podemos determinar a distribuição etária das fêmeas em tempos posteriores. Embora a Equação (3.5) dê a distribuição etária da população em qualquer instante, ela não dá automaticamente um idéia geral da dinâmica do processo de crescimento. Mas utilizando autovalores e autovetores da Matriz de Leslie, teremos um estudo mais qualitativo do crescimento populacional de fêmeas, bem como procedimentos para determinar a proporção de fêmeas em cada faixa etária para intervalos longos de tempo. Sendo assim, agora nos concentraremos na investigação dos autovalores e autovetores da matriz de Leslie. Para isso dispomos de alguns teoremas importantes.

**Teorema 3.1 (Existência de um Autovalor Positivo)** *Uma matriz de Leslie  $L$  tem um único autovalor positivo  $\lambda_1$ . Este autovalor tem multiplicidade 1 e um autovetor associado  $v$ , cujas entradas são todas positivas.*

**Demonstração:** Da Álgebra Linear sabemos que o polinômio característico da matriz  $L$  é definido como

$$p(\lambda) = \det(\lambda I - L) = \lambda^n - a_1\lambda^{n-1} - a_2b_1\lambda^{n-2} - a_3b_1b_2\lambda^{n-3} - \dots - a_nb_1\dots b_{n-1} \quad (3.6)$$

e ainda que os autovalores de  $L$  são as raízes deste polinômio. Para analisar as raízes deste polinômio, é conveniente introduzirmos a função:

$$q(\lambda) = 1 + \frac{p(\lambda)}{-\lambda^n}$$

$$q(\lambda) = \frac{a_1}{\lambda} + \frac{a_2 b_1}{\lambda^2} + \frac{a_3 b_1 b_2}{\lambda^3} + \dots + \frac{a_n b_1 \dots b_{n-1}}{\lambda^n} \quad (3.7)$$

Usando esta função, a equação característica  $p(\lambda) = 0$  é equivalente a

$$q(\lambda) = 1 \quad \text{para} \quad \lambda \neq 0. \quad (3.8)$$

Como todos os  $a_i$  e  $b_i$  são não-negativos, vemos que  $q(\lambda)$  é monotonamente decrescente para  $\lambda$  maior do que zero, ou seja, se  $\lambda < \gamma \Rightarrow q(\gamma) < q(\lambda)$ . Além disto,  $q(\lambda)$  tem uma assíntota vertical em  $\lambda = 0$  e tende a 0 quando  $\lambda \rightarrow \infty$ . Conseqüentemente, existe um único  $\lambda$ , digamos  $\lambda = \lambda_1$ , tal que  $q(\lambda_1) = 1$ . Ou seja, a matriz  $L$  possui um único autovalor  $\lambda_1$  real positivo. Além disso, para que uma raiz  $\lambda_1 \in \mathbb{R}$  de  $p(\lambda)$  seja simples, a condição é que a tangente não seja horizontal, ou seja,  $p(\lambda_1) \neq 0$  (para mais detalhes ver, por exemplo, [ViAvSoBuFeFa 05]). Como este fato é confirmado, temos que  $\lambda_1$  possui multiplicidade 1. O próximo passo é calcular um autovetor  $\mathbf{v}$  de  $L$  associado a  $\lambda_1 > 0$ , tal que  $q(\lambda_1) = 1$ . Logo,

$$L\mathbf{v} = \lambda_1 \mathbf{v}$$

$$\begin{bmatrix} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n \\ b_1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & b_2 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & b_{n-1} & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} v_1 \\ v_2 \\ v_3 \\ \vdots \\ v_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 v_1 \\ \lambda_1 v_2 \\ \lambda_1 v_3 \\ \vdots \\ \lambda_1 v_n \end{bmatrix},$$

ou seja,

$$\left\{ \begin{array}{l} a_1 v_1 + a_2 v_2 + a_3 v_3 + \dots + a_{n-1} v_{n-1} + a_n v_n = \lambda_1 v_1 \\ b_1 v_1 = \lambda_1 v_2 \\ \qquad b_2 v_2 = \lambda_1 v_3 \\ \qquad \qquad b_3 v_3 = \lambda_1 v_4 \\ \qquad \qquad \qquad \ddots = \vdots \\ \qquad \qquad \qquad \qquad b_{n-1} v_{n-1} = \lambda_1 v_n \end{array} \right.$$

Resolvendo o sistema, obtemos:

$$\left\{ \begin{array}{l} v_1 = 1 \\ v_2 = \frac{b_1}{\lambda_1} \\ v_3 = \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2} \\ v_4 = \frac{b_1 b_2 b_3}{\lambda_1^3} \\ \vdots = \vdots \\ v_n = \frac{b_1 b_2 \dots b_{n-1}}{\lambda_1^{n-1}} \end{array} \right.$$

ou seja,

$$\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ \frac{b_1}{\lambda_1} \\ \frac{b_1 b_2}{\lambda_1^2} \\ \frac{b_1 b_2 b_3}{\lambda_1^3} \\ \vdots \\ \frac{b_1 b_2 \dots b_{n-1}}{\lambda_1^{n-1}} \end{bmatrix} \quad (3.9)$$

Observamos então, que as coordenadas de  $\mathbf{v}$  são todas positivas. □

O comportamento ao longo do tempo da distribuição etária da população de fêmeas é determinado pelo autovalor positivo  $\lambda_1$  e seu autovetor de coordenadas positivas  $\mathbf{v}$  encontrado acima. Os próximos resultados confirmam esta afirmação.

**Teorema 3.2** *Se  $\lambda_1$  é o único autovalor positivo de uma matriz de Leslie  $L$  e  $\lambda_k$  é qualquer outro autovalor real ou complexo de  $L$ , então  $|\lambda_k| \leq \lambda_1$ .*

Para os nossos propósitos, a conclusão do Teorema 3.2 não é suficientemente forte. Gostaríamos que também valesse  $|\lambda_k| < \lambda_1$  pois, caso contrário, a população de fêmeas nas faixas etárias ficam periódicas. Quando  $|\lambda_k| < \lambda_1$ , dizemos que  $\lambda_1$  é um autovalor dominante de  $L$ . A seguir enunciamos uma condição suficiente para um autovalor de  $L$  ser dominante.

**Teorema 3.3** *Se duas entradas sucessivas  $a_i$  e  $a_i + 1$  da primeira linha de uma matriz de Leslie  $L$  são não-nulas, então o autovalor positivo de  $L$  é dominante.*

Assim, se a população de fêmeas tem duas faixas etárias férteis sucessivas, então a matriz de Leslie tem um autovalor dominante. Isto sempre ocorre com populações reais se a faixa

etária for tomada suficientemente pequena. Em nosso estudo, vamos supor sempre que a condição do Teorema 3.3 está satisfeita.

No que segue, vamos supor que  $L$  é diagonalizável, ou seja, que existe uma matriz  $P$  inversível tal que:

$$L = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} P^{-1}$$

A matriz de Leslie ser diagonalizável não é realmente necessário para o que queremos estudar, mas simplifica bastante a argumentação. Neste caso,  $L$  tem  $n$  autovalores,  $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \dots, \lambda_n$ , não necessariamente distintos, e  $n$  autovetores associados linearmente independentes,  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$ . Consideramos o autovalor dominante  $\lambda_1$  em primeiro lugar e o autovetor  $\mathbf{v} = \mathbf{x}_1$ , associado a  $\lambda_1$ , de coordenadas positivas. Construimos uma matriz  $P$  cujas colunas são os autovetores  $\mathbf{x}_1, \mathbf{x}_2, \dots, \mathbf{x}_n$  de  $L$ :

$$P = \begin{bmatrix} \mathbf{x}_1 & \mathbf{x}_2 & \mathbf{x}_3 & \dots & \mathbf{x}_n \end{bmatrix}$$

Assim,

$$L = P \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n \end{bmatrix} P^{-1}$$

Daí segue que,

$$L^k = P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1}$$

para  $k = 1, 2, \dots$ . Para qualquer vetor de distribuição etária inicial  $\mathbf{x}^{(0)}$  temos, então,

$$L^k \mathbf{x}^{(0)} = P \begin{bmatrix} \lambda_1^k & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \lambda_2^k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_n^k \end{bmatrix} P^{-1} \mathbf{x}^{(0)}$$

para  $k = 1, 2, \dots$ . Dividindo ambos os lados desta equação por  $\lambda_1^k$  e lembrando que

$\mathbf{x}^{(k)} = L^k \mathbf{x}^{(0)}$ , obtemos

$$\frac{1}{\lambda_1^k} \mathbf{x}^{(k)} = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k \end{bmatrix} P^{-1} \mathbf{x}^{(0)} \quad (3.10)$$

Como  $\lambda_1$  é o autovalor dominante, temos que  $|\frac{\lambda_i}{\lambda_1}| < 1$  para  $i = 2, 3, \dots, n$ . Segue então que

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left| \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right|^k = 0 \quad \Rightarrow \quad \lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{\lambda_i}{\lambda_1} \right)^k = 0$$

Logo, tomando o limite de ambos os lados da equação matricial (3.10)

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\lambda_1^k} \mathbf{x}^{(k)} \right) = \lim_{k \rightarrow \infty} P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k \end{bmatrix} P^{-1} \mathbf{x}^{(0)}$$

ou seja,

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\lambda_1^k} \mathbf{x}^{(k)} \right) = P \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} P^{-1} \mathbf{x}^{(0)} \quad (3.11)$$

Denotando a primeira entrada do vetor-coluna  $P^{-1} \mathbf{x}^{(0)}$  pela constante  $c$ , podemos reescrever a equação (3.11), como:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{\lambda_1^k} \mathbf{x}^{(k)} \right) = c \mathbf{x}_1$$

Assim,

$$\mathbf{x}^{(k)} \simeq c \lambda_1^k \mathbf{x}_1 \quad (3.12)$$

para valores grandes de  $k$ . Desta forma, a distribuição etária de fêmeas será proporcional às entradas do 1º autovetor  $\mathbf{x}_1$  associado a  $\lambda_1$ . Analogamente para valores grandes de  $k$  temos

$$\mathbf{x}^{(k-1)} \simeq c \lambda_1^{k-1} \mathbf{x}_1 \quad (3.13)$$

Logo

$$\mathbf{x}_1 \simeq \frac{\mathbf{x}^{(k)}}{c \lambda_1^k} \quad \text{e} \quad \mathbf{x}_1 \simeq \frac{\mathbf{x}^{(k-1)}}{c \lambda_1^{k-1}}$$

ou seja,

$$\frac{\mathbf{x}^{(k)}}{c\lambda_1^k} \simeq \frac{\mathbf{x}^{(k-1)}}{c\lambda_1^{k-1}} \Rightarrow \mathbf{x}^{(k)} \simeq \lambda_1 \mathbf{x}^{(k-1)}.$$

Isto significa que para valores grandes de  $k$  cada vetor de distribuição etária é um múltiplo escalar do vetor de distribuição etária anterior, o escalar sendo o autovalor positivo da matriz de Leslie.

Sendo assim, de acordo com autovalor positivo  $\lambda_1$  temos três casos:

1. A população acaba aumentando se  $\lambda_1 > 1$ .
2. A população acaba diminuindo se  $\lambda_1 < 1$ .
3. A população acaba estabilizando se  $\lambda_1 = 1$ .

O caso  $\lambda_1 = 1$  é particularmente interessante, pois determina uma população com taxa de crescimento populacional nulo. Para qualquer distribuição etária inicial, a população tende a uma distribuição etária limite que é algum múltiplo do autovetor  $\mathbf{v} = \mathbf{x}_1$ .

A partir das Equações (3.7) e (3.8) nós vemos que  $\lambda_1 = 1$  é uma autovalor se, e somente se,

$$a_1 + a_2b_1 + a_3b_1b_2 + \dots + a_nb_1b_2\dots b_{n-1} = 1 \quad (3.14)$$

A expressão

$$R = a_1 + a_2b_1 + a_3b_1b_2 + \dots + a_nb_1b_2\dots b_{n-1} \quad (3.15)$$

é chamada de *taxa líquida de reprodução*. Assim nós podemos dizer que uma população tem crescimento populacional nulo se, e somente se, sua taxa líquida de reprodução é 1.

### 3.1.3 Crescimento da População de Mulheres Venezuelanas por Faixas Etárias

Neste exemplo consideraremos os parâmetros de nascimento e morte do ano de 1985 das mulheres venezuelanas. Como poucas mulheres com mais de 55 anos geram filhos, vamos nos restringir à porção da população de mulheres entre os 0 e os 54 anos de idade. Os dados são para faixas de cinco anos, de modo que há 11 faixas etárias,  $[0, 4], [5, 9], \dots, [45, 49], [50, 54]$ . A Matriz de Leslie abaixo foi retirada do livro [KeFl 90].

Para maiores detalhes sobre como determinar cada uma das entradas de uma matriz de Leslie ver, por exemplo, [Ro 95].

$$L = \begin{bmatrix} 0 & 0.00503 & 0.10265 & 0.31691 & 0.43470 & 0.38033 & 0.26325 & 0.13933 & 0.04992 & 0.01062 & 0.00179 \\ 0.99550 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0.99805 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0.99764 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0.99675 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0.99592 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.99499 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.99335 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.99041 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.99506 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0.99757 & 0 \end{bmatrix}$$

Notemos que existem duas faixas etárias férteis consecutivas, logo  $L$  possui autovalor dominante. Podemos aproximar o autovalor dominante utilizando, por exemplo, o Método das Potências ou o Quociente de Rayleigh. Fizemos isso usando os algoritmos que estão em anexo. Os resultados obtidos utilizando uma precisão de seis casas decimais são apresentados na Tabela 3.1.

Método das Potências				Quociente de Rayleigh			
Autovalor	Autovetor	Tempo	Nº de Iterações	Autovalor	Autovetor	Tempo	Nº de Iterações
$\lambda = 1,098696$	$\begin{bmatrix} 1,000000 \\ 0,906073 \\ 0,823072 \\ 0,747369 \\ 0,678026 \\ 0,614603 \\ 0,556589 \\ 0,503217 \\ 0,453619 \\ 0,410836 \\ 0,373031 \end{bmatrix}$	0,000137	41	$\lambda = 1,098695$	$\begin{bmatrix} 1,000000 \\ 0,906073 \\ 0,823074 \\ 0,747370 \\ 0,678024 \\ 0,614599 \\ 0,556589 \\ 0,503221 \\ 0,453625 \\ 0,410837 \\ 0,373023 \end{bmatrix}$	0,002126	6

Tabela 3.1: Resultados obtidos por cada um dos algoritmos.

Como o Método das Potências requer cerca de  $2n^2$  flops por iteração, enquanto o Quociente de Rayleigh requer  $O(n^3)$  flops por iteração, percebemos que o resultado em relação ao tempo correspondeu ao esperado. O Quociente de Rayleigh demorou mais tempo que o Método das Potências, isto porque além do seu custo ser de  $O(n^3)$  flops por iteração, durante sua execução foi necessário resolver um sistema linear do tipo  $A\mathbf{x} = B$ . Utilizou-se para isto a eliminação de Gauss, cujo custo aproximado para a resolução de um sistema linear de  $n$  equações e  $n$  incógnitas é de  $\frac{2}{3}n^3$  flops.

Verificamos ainda que o Método das Potências realizou mais iterações, isto ocorreu porque a convergência do Método das Potências é linear, enquanto a do Quociente de Rayleigh é quadrática.

Com base na Tabela 3.1 o autovalor dominante encontrado foi aproximadamente  $\lambda = 1.098$ , o que significa que se as mulheres venezuelanas continuarem a se reproduzir e morrer como fizeram em 1985, a longo termo seu número irá aumentar 9.9% a cada cinco anos. Através do autovetor  $\mathbf{v}_1$  podemos observar que, a longo termo, para cada 100000 mulheres entre 0 e 4 anos de idade, haverá 90607 mulheres entre os 5 e 9 anos de idade, 82307 mulheres entre os 10 e 14 anos de idade, e assim por diante.

**Observação 3.1** *A implementação do Método das Potências segue em anexo.*

## 3.2 Frequência natural de um circuito elétrico

Na seção 1.4.1 deste trabalho analisamos o comportamento de um circuito RLC pelo ponto de vista do amortecimento. Vimos que o efeito do amortecimento é devido a presença da resistência R. O fator de amortecimento  $\alpha$  determina a taxa com a qual a resposta é amortecida. Se  $R = 0$ , então  $\alpha = 0$  e nós teremos um circuito LC com uma frequência natural não-amortecida  $\omega_0$  de  $\frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Como  $\alpha < \omega_0$  neste caso, a resposta não é apenas não-amortecida, mas também oscilatória. O circuito é tido como sem perdas, porque o elemento de dissipação ou de amortecimento (R) não está presente. Os circuitos LC comportam-se como ressonadores eletrônicos, sendo um componente chave em muitas aplicações, tais como osciladores, filtros e misturadores de frequência. Analisemos agora um circuito elétrico constituído por cinco malhas (Figura 3.1). A análise apresentada nesta seção poderá ser encontrada em [Da 10].

A segunda lei de Kirchhoff diz que: *A soma algébrica de todas as diferenças de potencial ao percorrer a malha completa de um circuito deve ser nula.* Sendo assim, ao aplicá-la a cada uma das malhas do circuito e lembrando que  $i = \frac{dQ}{dt}$  temos o seguinte:

Malha 1

$$-L_1 \frac{di_1}{dt} - \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^t (i_1 - i_2) dt = 0. \quad (3.16)$$

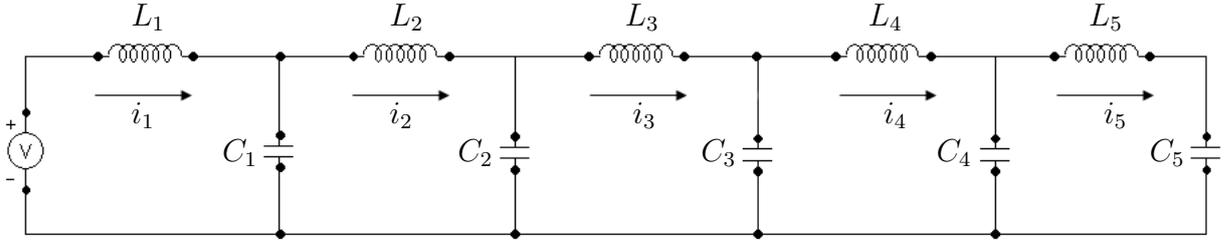


Figura 3.1: Circuito elétrico.

Malha 2

$$-L_2 \frac{di_2}{dt} - \frac{1}{C_2} \int_{-\infty}^t (i_2 - i_3) dt + \frac{1}{C_1} \int_{-\infty}^t (i_1 - i_2) dt = 0. \quad (3.17)$$

Malha 3

$$-L_3 \frac{di_3}{dt} - \frac{1}{C_3} \int_{-\infty}^t (i_3 - i_4) dt + \frac{1}{C_2} \int_{-\infty}^t (i_2 - i_3) dt = 0. \quad (3.18)$$

Malha 4

$$-L_4 \frac{di_4}{dt} - \frac{1}{C_4} \int_{-\infty}^t (i_4 - i_5) dt + \frac{1}{C_3} \int_{-\infty}^t (i_3 - i_4) dt = 0. \quad (3.19)$$

Malha 5

$$-L_5 \frac{di_5}{dt} - \frac{1}{C_5} \int_{-\infty}^t i_5 dt + \frac{1}{C_4} \int_{-\infty}^t (i_4 - i_5) dt = 0. \quad (3.20)$$

O sistema de equações diferenciais ordinárias acima pode ser diferenciado e reorganizado para se obter:

$$L_1 \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{1}{C_1} (i_1 - i_2) = 0. \quad (3.21)$$

$$L_2 \frac{d^2 i_2}{dt^2} + \frac{1}{C_2} (i_2 - i_3) - \frac{1}{C_1} (i_1 - i_2) = 0. \quad (3.22)$$

$$L_3 \frac{d^2 i_3}{dt^2} + \frac{1}{C_3} (i_3 - i_4) - \frac{1}{C_2} (i_2 - i_3) = 0. \quad (3.23)$$

$$L_4 \frac{d^2 i_4}{dt^2} + \frac{1}{C_4} (i_4 - i_5) - \frac{1}{C_3} (i_3 - i_4) = 0. \quad (3.24)$$

$$L_5 \frac{d^2 i_5}{dt^2} + \frac{1}{C_5} i_5 dt - \frac{1}{C_4} (i_4 - i_5) dt = 0. \quad (3.25)$$

Assumindo

$$i_j = A_j \text{sen}(\omega t), \quad j = 1, 2, 3, 4, 5. \quad (3.26)$$

como uma solução [Ma 06], temos a partir de (3.21) que:

$$L_1 A_1 \omega^2 \text{sen}(\omega t) + \frac{1}{C_1} A_1 \text{sen}(\omega t) - \frac{1}{C_1} A_2 \text{sen}(\omega t) = 0$$

ou

$$\left(\frac{1}{C_1} - L_1\omega^2\right) A_1 - \frac{1}{C_1}A_2 = 0. \quad (3.27)$$

Similarmente, para (3.22), (3.23), (3.24) e (3.24) obtemos respectivamente:

$$-\frac{1}{C_1}A_1 + \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2} - L_2\omega^2\right) A_2 - \frac{1}{C_2}A_3 = 0. \quad (3.28)$$

$$-\frac{1}{C_2}A_2 + \left(\frac{1}{C_2} + \frac{1}{C_3} - L_3\omega^2\right) A_3 - \frac{1}{C_3}A_4 = 0. \quad (3.29)$$

$$-\frac{1}{C_3}A_3 + \left(\frac{1}{C_3} + \frac{1}{C_4} - L_4\omega^2\right) A_4 - \frac{1}{C_4}A_5 = 0. \quad (3.30)$$

$$-\frac{1}{C_4}A_4 + \left(\frac{1}{C_4} + \frac{1}{C_5} - L_5\omega^2\right) A_5 = 0. \quad (3.31)$$

Ou ainda podemos escrever na forma matricial:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ \left(-\frac{C_2}{C_1}\right) & \left(\frac{C_2}{C_1} + 1\right) & -1 & 0 & 0 \\ 0 & \left(-\frac{C_3}{C_2}\right) & \left(\frac{C_3}{C_2} + 1\right) & -1 & 0 \\ 0 & 0 & \left(-\frac{C_4}{C_3}\right) & \left(\frac{C_4}{C_3} + 1\right) & -1 \\ 0 & 0 & 0 & \left(-\frac{C_5}{C_4}\right) & \left(\frac{C_5}{C_4} + 1\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{bmatrix} = \omega^2 \begin{bmatrix} L_1C_1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & L_2C_2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & L_3C_3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & L_4C_4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & L_5C_5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \\ A_4 \\ A_5 \end{bmatrix}.$$

A descrição acima é um problema de autovalor. Para ver isto mais claramente, consideremos o caso especial

$$C_1 = C_2 = C_3 = C_4 = C_5 = C \quad L_1 = L_2 = L_3 = L_4 = L_5 = L$$

Assumindo  $\lambda = LC\omega^2$  e observando que  $i_j = A_j \text{sen}(\omega t)$ ,  $j = 1, 2, 3, 4, 5$  [Ma 06], obtemos o seguinte problema de autovalor:

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 2 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} i_1 \\ i_2 \\ i_3 \\ i_4 \\ i_5 \end{bmatrix}.$$

A solução deste problema de autovalor nos dará a frequência natural  $\omega_i^2 = \frac{\lambda_i}{LC}$ . Podemos aproximar os autovalores utilizando, por exemplo, o Algoritmo QR ou Método de Jacobi. Fizemos isso usando os algoritmos que estão em anexo. Os resultados obtidos utilizando uma precisão de quatro casas decimais são apresentados na Tabela 3.2.

Neste problema trabalha-se com uma matriz tridiagonal simétrica, sendo assim, a aplicação de cada um dos algoritmos a esta matriz tem a vantagem de cada iteração necessitar de menos operações do que para o caso de uma matriz cheia. Conforme apresentado

Algoritmo QR			Algoritmo QR com deslocamento		
Autovalores	Tempo	Nº de Iterações	Autovalores	Tempo	Nº de Iterações
$\lambda_1 = 3,682506$ $\lambda_2 = 2,830827$ $\lambda_3 = 1,715369$ $\lambda_4 = 0,690280$ $\lambda_5 = 0,081020$	0,000825	17	$\lambda_1 = 3,682506$ $\lambda_2 = 2,830827$ $\lambda_3 = 1,715369$ $\lambda_4 = 0,690280$ $\lambda_5 = 0,081020$	0,000625	11
Método de Jacobi					
Autovalores	Tempo		Nº de Iterações		
$\lambda_1 = 3,682507$ $\lambda_2 = 2,830830$ $\lambda_3 = 1,715370$ $\lambda_4 = 0,690278$ $\lambda_5 = 0,081014$	0,000433		26		

Tabela 3.2: Resultados obtidos para cada um dos algoritmos.

em [Da 10] o Algoritmo QR para matrizes tridiagonais e simétricas requer  $O(n^2)$  flops, enquanto o Método de Jacobi requer  $O(n^3)$  flops ([Da 10]). Embora as medidas de custo aplicadas aos diferentes algoritmos sejam distintas, observou-se que o Método de Jacobi foi mais eficiente. Isto ocorreu porque o Algoritmo QR, da maneira em que foi implementado, faz a ortogonalização de Gram-Schmidt a cada iteração para calcular as matrizes Q e R. Como estamos trabalhando com uma matriz quadrada, segundo [GoVa 96] o custo da aplicação da ortogonalização de Gram-Schmidt é de  $2n^3$  flops.

Verificamos ainda que o Método de Jacobi realizou mais iterações, isto porque a convergência do Algoritmo QR é cúbica, enquanto a do Método de Jacobi é quadrática.

Através dos autovalores encontrados e escolhendo valores adequados para  $L$  e  $C$  pode-se determinar a frequência natural do circuito elétrico.

# Capítulo 4

## Conclusão

Através deste trabalho é possível perceber que existem aplicações para o uso de autovalores e autovetores em diversas áreas como, por exemplo, demografia e engenharia. Entretanto, em tais aplicações trabalha-se com determinadas matrizes em que torna-se difícil calcular seus autovalores usando o polinômio característico. Desse modo, faz-se necessário o uso de métodos numéricos para solucionar o problema. Este trabalho forneceu uma visão geral de alguns desses métodos, mostrando que há muitas maneiras de refinar cada um dos algoritmos apresentados, a fim de acelerar sua convergência. Por exemplo, antes de se aplicar o algoritmo QR, é comum reduzir a matriz para a forma de Hessemberg a fim de diminuir seu custo.

Entretanto, mesmo aprimorando cada um dos algoritmos, não se pode afirmar que exista um algoritmo para a determinação de autovalores de uma matriz que seja o melhor para todos os casos, é necessário avaliar cada problema separadamente. Ao resolver um problema de autovalor há um número de propriedades que precisam ser consideradas, pois estas podem afetar muito a escolha do algoritmo. Existe uma série de perguntas que um investigador deve considerar na resolução de um problema particular. Por exemplo,

- É a matriz real ou complexa?
- Qual propriedade especial a matriz tem? (simétrica, Hermitiana, unitária...)
- Qual é sua estrutura? (esparsa, densa...)

- Quais autovalores são necessários? (Dominante, menor em módulo, todos, soma de autovalores intermediários...).

Com base em análises como esta, foram utilizados métodos numéricos diferentes em cada uma das aplicações estudadas. Sendo escolhidos aqueles que acreditou-se serem os mais apropriados para cada um dos casos.

Apesar de o Método das Potências ser utilizado para a determinação apenas do autovalor dominante da matriz e do autovetor a que está associado, esta limitação do algoritmo não o torna impraticável. Isto porque, em muitos casos o comportamento a longo prazo de um sistema modelado em termos de matrizes é essencialmente dependente do autovalor dominante da matriz que representa sua dinâmica. O próprio exemplo que se analisou sobre o crescimento populacional por faixa etária dependia apenas deste autovalor específico, utilizando assim o Método das Potências para encontrá-lo.

A principal técnica utilizada na prática para o cálculo de todos os autovalores de uma matriz, é o Algoritmo QR e suas variantes que envolvem deslocamentos (dados pelo Quociente de Rayleigh ou pelo de Wilkinson). No entanto, até agora não existe um algoritmo universal, eficiente para todos os tipos de matrizes. A versão mais eficiente do Algoritmo QR, tanto no caso de matrizes simétricas quanto não simétricas é baseada em deslocamentos implícitos, por possuir convergência quadrática. O Algoritmo QR com o deslocamento de Wilkinson é o mais rápido algoritmo prático para encontrar todos os autovalores de matrizes simétricas cuja ordem seja pequena [Da 10].

O Método de Jacobi embora calcule todos os autovalores e autovetores de uma matriz simétrica sem exigir que a matriz seja tridiagonalizada é, em geral, muito mais lento do que os outros métodos. Isto porque, tal método procede escolhendo a cada iteração uma substituição para o elemento de maior valor absoluto fora da diagonal principal. Isso faz com que o número de iterações seja pequeno, mas o tempo de execução seja muito grande devido ao trabalho adicional de calcular o maior elemento. Ainda assim, o método pode ser útil, pois calcula os autovalores com uma precisão relativamente alta.

O Método Dividir e Conquistar é competitivo com o método tradicional, QR, para cálculo de autovalores e autovetores de matrizes tridiagonais simétricas. Sendo um dos algoritmos mais rápidos, se todos os autovalores e autovetores são desejados [Da 10].

Percebe-se então que cada um dos métodos numéricos aqui analisados pode ser eficaz, dependendo das características dos problemas a que serão aplicados. Entretanto, a complexidade dos problemas da engenharia moderna, por exemplo, requer a modelagem de problemas físicos que envolvem sistemas da ordem de milhões e até dezenas de milhões de equações. Tornam-se necessários, portanto, o desenvolvimento de algoritmos eficientes e o emprego de supercomputadores para viabilizar a solução destes problemas. Sendo assim, seria importante analisar em trabalhos futuros, métodos baseados, por exemplo, no subespaço de Krylov [De 97], que por sua característica iterativa, têm se mostrado como uma excelente opção.

# Apêndice A

## Matriz de Rotação e Matriz Ortogonal

Alguns métodos numéricos são obtidos usando-se matrizes que possuem características especiais. Assim, passamos a descrever tais matrizes.

**Definição A.1** No  $\mathbb{R}^2$  as matrizes

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & \operatorname{sen}\varphi \\ -\operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} \cos\varphi & -\operatorname{sen}\varphi \\ \operatorname{sen}\varphi & \cos\varphi \end{bmatrix},$$

rotacionam cada vetor do  $\mathbb{R}^2$ , no sentido horário e anti-horário, respectivamente, de um ângulo  $\varphi$ , e por isso são chamadas de **Matrizes de Rotação**.

No  $\mathbb{R}^3$  a matriz:

$$\begin{bmatrix} \cos\varphi & 0 & \operatorname{sen}\varphi \\ 0 & 1 & 0 \\ -\operatorname{sen}\varphi & 0 & \cos\varphi \end{bmatrix}$$

é uma matriz de rotação, no sentido horário, de um ângulo  $\varphi$  no plano  $x, z$ .



# Apêndice B

## Implementação dos Algoritmos

As implementações dos algoritmos aqui apresentadas foram desenvolvidas pelo aluno Magno Tairone de Freitas Severino, do curso de Matemática Computacional da UFMG. Para isto utilizou a linguagem C++.

# Bibliografia

- [AlSa 03] ALEXANDER, C. K.; SADIKU, M. N. O.; “Fundamentos de Circuitos Elétricos” (2003).
- [AnRo 01] ANTON, H.; RORRES, C.; “Álgebra Linear com Aplicações” (2001).
- [Be 06] BERTOLDI, N. F.; “Cálculo Numérico” (2006).
- [BiAgu 07] BIASE, A. G.; AGUSTINI, E. “Ajuste de Curvas e Modelagem Populacional Brasileira”; Revista Científica Eletrônica da Faculdade de Matemática (2007).
- [Bi 09] BIEZUNER, R. J.; “Notas de Aula: Algebra Linear Numérica” (2009).
- [Bu 06] BUENO, H. P.; “Álgebra Linear: Um Segundo Curso”; Coleção Textos Universitários (2006).
- [CaNe 08] CAMPONAGARA, E.; NETO, E. B. C.; “Cálculo Numérico para Controle e Automação” (2008).
- [Ce 12] [www.census.gov](http://www.census.gov) Site U.S.Census Bureau
- [Cer 02] CERESOLI, E.; “O método da divisão-e-conquista na solução de auto-sistemas de matrizes simétricas”;  
Dissertação de Mestrado (2002).
- [Da 10] DATTA, B. N.; “Numerical Linear Algebra and Applications” Second Edition SIAM (2010).
- [De 97] DEMMEL, J. W.; “Applied Numerical Linear Algebra” (1997).
- [GoVa 96] GOLUB, G. H.; VAN LOAN, C. F.; “Matrix computations”; Third Edition Johns Hopkins, Baltimore (1996).

- [Ha 78] HADLOCK, C. R.; “Field Theory and Its Classical Problems”; The Carus Mathematical Monographs. Mathematical Association of America (1978).
- [Ha 88] HAGER, W. W.; “Applied Numerical Linear Algebra” (1988).
- [He 02] HEATH, M. T.; “Scientific Computing: An Introductory Survey” Second Edition (2002).
- [KeFl 90] KEYFITZ, N.; FLIEGER, W.; “World Population Growth and Aging: Demographic Trends in the Late Twentieth Century” (1990).
- [Ma 06] MACHADO, K. D.; “Teoria do Eletromagnetismo - Volume III” UEPG (2006).
- [Pa 98] PARLETT, B. N.; “The symmetric eigenvalue problem” SIAM (1998).
- [Ro 95] ROGERS, A.; “Multiregional demography: principles, methods and extensions” (1995).
- [Ru 94] RUTTER, J.; “A Serial Implementation of Cuppen’s Divide and Conquer Algorithm for the Symmetric Eigenvalue Problem” (1994).
- [Sa 11] SANTOS, R. J.; “Introdução às Equações Diferenciais Ordinárias”; Imprensa Universitária da UFMG (2011).
- [St 04] STEWART, J.; “Cálculo - Volume II” (2004);
- [TreBa 97] TREFETHEN, L. N.; BAU, D.; “Numerical Linear Algebra” (1997).
- [ViAvSoBuFeFa 05] VIDIGAL, A.; AVRITZER, D.; SOARES, E.; BUENO, H. P.; FERREIRA, M. C. C.; FARIA, M. C.; “Fundamentos de Álgebra” (2005).
- [Wa 02] WATKINS, D. S.; “Fundamentals of Matrix Computations”; Second Edition (2002).
- [Wi 65] WILKINSON, J. H.; “The algebraic eigenvalue problem”, Oxford Univ. Press, London (1965).
- [Zi 10] ZIVIANI, N.; “Projeto de Algoritmos com Implementações em Pascal e C”, Cengage Learning (2010).