Universidade Federal de Minas Gerais – UFMG

Instituto de Ciências Exatas – ICEx

Departamento de Matemática

Monografia de Especialização

Números Combinatórios Interessantes

Aluna: Fabiana Pereira de Oliveira - fabianaperoli@gmail.com

Orientador: Michel Spira – michel@mat.ufmg.br

Índice

OBJETIVO ... *3*
NOTAÇÔES ... *4*
INTRODUÇÂO ... *5*
CAPÍTULO I ... *7*
Números de Stirling de primeiro tipo ... *7*
Seção 1.1 Definição e pequenos valores de números de Stirling de primeiro tipo ... **7**
Seção 1.2 Relação de recorrência para $s(n,k)$ ... **8**
Seção 1.3 Polinômios de Stirling ... **9**
CAPÍTULO II ... *11*
Números de Stirling de segundo tipo ... *11*
Seção 2.1 Definição e pequenos valores de números de Stirling de segundo tipo ... **11**
Seção 2.2 Relação de recorrência para $S(n, k)$ ... **12**
Seção 2.3 Outras relações ... **13**
Seção 2.4 Função geradora dos números de Stirling de segundo tipo ... **14**
Seção 2.5 Relação entre números de Stirling de primeiro e segundo tipo ... **15**
Seção 2.6 Sequência de Stirling ... **17**
CAPITULO III ... *22*
Números de Bell ... *22*
Seção 3.1 Definição e pequenos valores dos números de Bell ... **22**
Seção 3.2 Relação de recorrência e função geradora exponencial dos números de Bell ... **23**
CAPITULO IV ... *24*
Números de Catalan ... *24*
Seção 4.1 Definição e pequenos valores dos números de Catalan ... **24**
Seção 4.2 Relação de recorrência para o número de Catalan ... **26**
Seção 4.3 A função geradora dos números de Catalan ... **26**
REFERÊNCIAS ... *28*

OBJETIVO

A escolha do tema deste trabalho foi devido ao gosto pela forma de contagem desenvolvida na Análise Combinatória.

O propósito deste trabalho é servir como texto para professores de Matemática que queiram aprimorar seus conhecimentos em Análise Combinatória, e como referência para a disciplina de Análise Combinatória dos cursos de Matemática.

Nesse trabalho estudamos os números de *Stirling* de primeiro e segundo tipo, os números de *Bell* e os números de *Catalan*. Neste estudo enfatizamos sua interpretação combinatória e através desta construímos suas relações de recorrências. Calculamos alguns números utilizando a relação de recorrência como forma ilustrativa. Relacionamos os números de *Stirling* de primeiro e segundo tipo e demonstramos suas funções geradoras.

Um dos objetivos do trabalho é encontrar as funções geradoras dos números combinatórios estudados, uma vez que funções geradoras são importantes ferramentas para a solução de problemas de contagem.

Utilizamos o raciocínio combinatório para fazer as demonstrações, pois julgamos que este meio facilita e dá clareza ao entendimento do processo. Além deste utilizamos também o princípio da indução e alguns métodos algébricos para demonstrar os teoremas ao longo do trabalho.

NOTAÇÕES

Nessa seção, recordamos brevemente algumas notações que serão usadas ao longo desse trabalho.

$\binom{n}{k}$ = Combinação de n elementos k a k.

$\binom{n}{n_1, n_2, \cdots, n_k}$ = Número de sequências de n elementos sendo n_1 do 1º tipo, n_2 do 2º tipo, ... onde $n_1 + \cdots + n_k = n$.

$(PC)_n$ = Permutações circulares de n elementos distintos.

$s(n,k)$ = Número de Stirling de primeiro tipo.

$S(n,k)$ = Número de Stirling de segundo tipo.

C_n = Número de Catalan.

B_n = Número de Bell.

$[n]^m$ = Fatorial ascendente.

$[n]_m$ = Fatorial descendente.

$[x]^m$ = Polinômio de Stirling ascendente.

$[x]_m$ = Polinômio de Stirling descendente.

INTRODUÇÂO

Nessa introdução, recordamos brevemente alguns conceitos que serão usados ao longo desse trabalho.

Permutações circulares

Vamos contar o número $(PC)_n$ de maneiras de ordenar *n* objetos distintos em *n* posições em torno de um círculo, considerando idênticas todas as posições. Para isso, sentamos uma pessoa. Com isso, os outros $n-1$ lugares se tornam distintos e podemos sentar as outras pessoas de $(n-1)!$ maneiras e obtemos $(PC)_n = (n-1)!$.

Relações de recorrência

A recorrência é uma estratégia poderosa na resolução de problemas combinatórios. Nesse tipo de abordagem partimos do problema particular, ou seja, calcular o número de determinadas configurações quando dispomos de alguns elementos, para o problema genérico, quando dispomos de *n* elementos. Para resolver esse problema:

i. resolve-se o problema para pequenos valores de *n* elementos;
ii. estuda-se como achar a solução do problema para *n* qualquer em função de valores menores.

Funções geradoras

Funções geradoras são uma das principais ferramentas para a solução de problemas de contagem. Seja $(a_n)_{n\geq 0}$ uma sequência de números reais. A série de potências $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é dita a função geradora ordinária dessa sequência. Em geral, pensamos em um problema de combinatória que admite as soluções $(a_n)_{n\geq 0}$ para cada valor de *n* e dizemos que $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ é a função geradora ordinária desse problema.

Exemplo1

A função $1+x+x^2+\ldots=\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$, é a função geradora da sequência $a_n \equiv 1$.

Exemplo 2

O número de maneiras de retirarmos *r* objetos de um conjunto de n objetos distintos é $\binom{n}{r}$; a função geradora ordinária para este problema é $f(x)=\sum_{r=0}^{\infty}\binom{n}{r}x^r=(1+x)^n$ (lembramos que $\binom{n}{r}=0$ para $r \geq n$).

As operações como funções geradoras são definidas de modo análogo às operações com polinômios, ou seja,

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} (a_n + b_n) x^n$$

e

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n\right) = \sum_{n=0}^{\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}\right) x^n ;$$

e a derivada e a integral, respectivamente, por

$$\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)' = \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

e

$$\int\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n+1} a_n x^{n+1} .$$

Finalmente, seja $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ uma sequência, *f* sua função geradora e $c_n = a_0 + a_1 + a_2 + \ldots + a_n$. Então a função geradora da sequência $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}$ é $\frac{1}{1-x} f$. Para ver isto, basta colocar $b_n = 1$ na expressão para a multiplicação de duas séries de potências.

CAPÍTULO I

Números de Stirling de primeiro tipo

Seção 1.1 Definição e pequenos valores de números de Stirling de primeiro tipo

Definição [números de Stirling de primeiro tipo] *O número de Stirling de primeiro tipo $s(n,k)$ é o número de maneiras de sentar n pessoas em k mesas redondas de modo que nenhuma mesa fique vazia.*

Vamos calcular $s(n,k)$ em alguns casos particulares.

$k=0$: claramente $s(n,0)=0$ para $n>0$; para uso posterior definimos $s(0,0)=1$.

$k=1$: neste caso, todas as pessoas estão sentadas na mesma mesa, e temos o problema equivalente de calcular de quantas maneiras é possível sentar *n* pessoas em torno de uma mesa redonda, donde $s(n,1)=(n-1)!$.

$k=2$: dividimos o problema de acordo com o número *t* de pessoas em uma das mesas. Em cada caso, escolhemos as *t* pessoas que serão colocadas em uma das mesas e depois colocamos as outras $n-t$ pessoas na outra mesa; isto pode ser feito de $\frac{1}{2!}\binom{n}{t}\cdot(t-1)!\cdot(n-t-1)!$ maneiras, onde o fator $\frac{1}{2!}$ corresponde ao fato de que as duas mesas são idênticas. Logo

$$s(n,2)=\frac{1}{2!}\sum_{t=1}^{n-1}\binom{n}{t}(n-t-1)!(t-1)!$$

Casos particulares dessa fórmula são

$$s(3,2)=\frac{1}{2!}\left[\binom{3}{1}1!+\binom{3}{2}1!\right]=3$$

e

$$s(4,2)=\frac{1}{2!}\left[\binom{4}{1}2!+\binom{4}{2}1!+\binom{4}{3}.2!\right]=11.$$

Vamos agora calcular $s(n,k)$ para alguns valores de *n* e *k:*

$k > n$: neste caso temos evidentemente $s(n,k) = 0$.

$k = n$: neste caso, cada pessoa constitui uma mesa isolada e temos $s(n,n) = 1$.

$s(n+1,n)$: aqui teremos n mesas com uma pessoa, uma mesa com duas pessoas; escolhemos as pessoas que ficarão na mesa com duas pessoas, e temos $s(n+1,n) = \binom{n+1}{2}$.

$s(n+2,n)$: aqui temos dois casos distintos (i) uma mesa tem três pessoas e todas as outras uma pessoa e (ii) duas mesas têm duas pessoas e as outras uma pessoa. Logo

$$s(n+2,n) = \binom{n+2}{3} \cdot 2! + \binom{n+2}{4} \cdot \binom{4}{2} \cdot \frac{1}{2!} = \frac{1}{24} n(n+1)(n+2)(3n+5).$$

Seção 1.2 ***Relação de recorrência*** para $s(n,k)$

Agora vamos encontrar uma relação de recorrência para $s(n,k)$, supondo $k \geq 1$. Para isto, vamos considerar $n+1$ pessoas, entre as quais o João, sentadas em *k* mesas.

- Se João está sozinho em uma mesa, as outras pessoas podem estar sentadas de $s(n,k-1)$ maneiras distintas.
- Se João não está sozinho então ele está à direita de alguma das outras *n* pessoas, que estão distribuídas pelas mesas de $s(n,k)$ maneiras distintas; isso pode acontecer de $ns(n,k)$ maneiras distintas.

Logo, para $n \geq 0$ e $k \geq 1$, temos

$$s(n+1,k) = s(n,k-1) + ns(n,k) \tag{I}$$

Com essa relação podemos construir a tabela abaixo:

Números de Stirling de primeiro tipo

n/k	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
0	0										
1	0	1									
2	0	1	1								
3	0	2	3	1							
4	0	6	11	6	1						
5	0	24	50	35	10	1					
6	0	120	274	225	85	15	1				
7	0	720	1764	1624	735	175	21	1			
8	0	5040	13068	13132	6769	1960	322	28	1		
9	0	40320	109584	118124	67284	22449	4536	546	36	1	
10	0	362880	1026576	1172700	723680	269325	63273	9450	870	45	1

Seção 1.3 *Polinômios de Stirling*

Vamos agora dar outra interpretação dos números de Stirling de primeiro tipo.

Definição [fatorial ascendente $[n]^m$ e polinômio de Stirling ascendente]

Para $n, m \in \mathbb{N}$ *definimos o* fatorial ascendente

$$[n]^m = n(n+1)(n+2)\ldots(n+m-1).$$

Trocando n pela indeterminada x, obtemos o polinômio de Stirling ascendente

$$[x]^n = x(x+1)(x+2)\ldots(x+n-1) \ .$$

Em particular, definimos $[x]^0 = 1$.

Para pequenos valores de *n*, esses polinômios são:

$$[x]^1 = x$$

$$[x]^2 = x(x+1) = x^2 + x$$

$$[x]^3 = x(x+1)(x+2) = x^3 + 3x^2 + 2x$$

$$[x]^4 = x(x+1)(x+2)(x+3) = x^4 + 6x^3 + 11x^2 + 6x$$

A relação entre os números de Stirling de primeiro tipo e os polinômios de Stirling ascendentes é dada pelo teorema a seguir.

Teorema 1

$$[x]^n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k \qquad (\textbf{II})$$

Demonstração: Vamos observar o que acontece em um caso particular. Na expansão de $[x]^5 = x(x+1)(x+2)(x+3)(x+4)$ o termo em x^3 é

$$x.x.x.3.4 + x.x.2.x.4 + x.x.2.3.x + x.1.x.x.4 + x.1.x.3.x + x.1.2.x.x\,.$$

Encontrar o coeficiente de x^3 equivale a analisar a situação combinatória em que temos cinco pessoas para sentar em três mesas. Um termo como $x.1.x.x.4$ pode ser interpretado como se segue: os elementos 0, 2 e 3 foram escolhidos para serem os menores elementos das três mesas. Após isso, o 1 pode sentar-se em apenas um lugar e depois o 4 tem 4 escolhas à sua disposição, o que corresponde à contribuição $1\cdot 4$ ao coeficiente de x^3. Da mesma forma os termos $x.x.2.3.x$ podem ser interpretados como se segue: os elementos 0, 1 e 4 foram escolhidos para serem os menores elementos das três mesas. Após isso, o 2 pode se sentar em 2 lugares e depois o 3 tem 3 escolhas à sua disposição, o que corresponde à contribuição 2.3 ao coeficiente de x^3.

Esse argumento é geral e obtemos $[x]^n = \sum_{k=0}^{n} s(n,k)x^k$, como queríamos. ■

CAPÍTULO II

Números de Stirling de segundo tipo

Seção 2.1 Definição e pequenos valores de números de Stirling de segundo tipo

Definição 2.1 Partições de um conjunto de n elementos em k classes são as diferentes formas de agrupar esses elementos em classes não vazias, onde a ordem dos elementos nas classes não importa.

Definição 2.2 [números de Stirling de segundo tipo] *O número de partições de um conjunto de n elementos em k classes, com* $0 \le k \le n$*, é o número de Stirling de segundo tipo* $S(n,k)$.

Vamos calcular $S(n,k)$ para alguns valores de *n* e *k:*

$k=0$ e $n>0$: temos $S(n,0)=0$. Para uso posterior definimos $S(0,0)=1$.

$k=1$: temos somente uma maneira de dividir *n* elementos em uma classe, portanto $S(n,1)=1$.

$k=2$ e $n=3$: temos o problema de dividirmos os elementos do conjunto $\{1,2,3\}$ em duas classes, o que pode ser feito das maneiras a seguir: $\{1\},\{2,3\}$; $\{2\},\{3,1\}$; $\{3\},\{1,2\}$. Logo $S(3,2)=3$.

$k=2$ e $n=4$: temos as partições $\{1\},\{2,3,4\}$; $\{2\},\{1,3,4\}$; $\{3\},\{1,2,4\}$; $\{4\},\{1,2,3\}$; $\{1,2\},\{3,4\}$; $\{1,3\},\{2,4\}$; $\{1,4\},\{2,3\}$, o que nos mostra que $S(4,2)=7$.

$k=3$ e $n=5$: as possíveis partições são:

$\{1\},\{2\},\{3,4,5\}$	$\{2\},\{4\},\{1,3,5\}$	$\{1\},\{2,3\},\{4,5\}$	$\{2\},\{1,5\},\{3,4\}$	$\{4\},\{1,3\},\{2,5\}$
$\{1\},\{3\},\{2,4,5\}$	$\{2\},\{5\},\{1,3,4\}$	$\{1\},\{2,4\},\{3,5\}$	$\{3\},\{1,2\},\{4,5\}$	$\{4\},\{1,5\},\{2,3\}$
$\{1\},\{4\},\{2,3,5\}$	$\{3\},\{4\},\{1,2,5\}$	$\{1\},\{2,5\},\{3,4\}$	$\{3\},\{1,4\},\{2,5\}$	$\{5\},\{1,2\},\{3,4\}$
$\{1\},\{5\},\{2,3,4\}$	$\{3\},\{5\},\{1,2,4\}$	$\{2\},\{1,3\},\{4,5\}$	$\{3\},\{1,5\},\{2,4\}$	$\{5\},\{1,3\},\{2,4\}$
$\{2\},\{3\},\{1,4,5\}$	$\{4\},\{5\},\{1,2,3\}$	$\{2\},\{1,4\},\{3,5\}$	$\{4\},\{1,2\},\{3,5\}$	$\{5\},\{1,4\},\{2,3\}$

e portanto $S(5,3)=25$.

$k=n$: neste caso é evidente que $S(n,n)=1$.

$k=n-1$: neste caso, bastam escolher os dois elementos que ficarão juntos na mesma classe, donde $S(n,n-1)=\binom{n}{2}$.

$k = n - 2$: nesse caso, distinguimos as partições em dois casos:

(i) uma partição tem três elementos. Nesse caso basta escolher estes três elementos, o que pode ser feito de $\binom{n}{3}$ maneiras diferentes.

(ii) duas classes contêm dois elementos cada. Nesse caso basta escolhermos os quatro elementos e dividi-los em duas classes, o que pode ser feito de $\binom{n}{4}\binom{4}{2}\frac{1}{2!}$ maneiras diferentes. Portanto $S(n, n-2) = \binom{n}{3} + \frac{1}{2!}\binom{n}{4}\binom{4}{2}$.

Seção 2.2 Relação de recorrência para $S(n, k)$

Agora buscaremos uma relação de recorrência para $S(n, k)$. Supomos $n \geq 0$ e $k \geq 1$. Considere todas as partições de $n+1$ elementos em k classes. Observamos dois casos distintos:

(i) o elemento t é o único elemento de uma classe: nesse caso, temos $S(n, k-1)$ partições, para o restante dos n elementos.

(ii) o elemento t se encontra em uma classe com outros elementos; nesse caso, t tem k possíveis classes para ficar. Logo, o número dessas partições é $kS(n,k)$. Concluímos então que, para $n \geq 0$ e $k \geq 1$

$$S(n+1, k) = S(n, k-1) + kS(n, k) \qquad \textbf{(III)}$$

Com essa relação podemos construir a tabela abaixo:

Tabela dos primeiros números de Stirling de segundo tipo

n/k	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**	**9**	**10**
0	1										
1	0	1									
2	0	1	1								
3	0	1	3	1							
4	0	1	7	6	1						
5	0	1	15	25	10	1					
6	0	1	31	90	65	15	1				
7	0	1	63	301	350	140	21	1			
8	0	1	127	966	1701	1050	266	28	1		
9	0	1	255	3025	7770	6951	2646	462	36	1	
10	0	1	511	9330	34105	42525	22827	5880	750	45	1

Seção 2.3 Outras relações

É possível dar uma fórmula (não muito útil) para os números de Stirling de segundo tipo, calculando de duas maneiras diferentes o número de funções sobrejetoras $f : A \to B$ onde $|A| = n$ e $|B| = k$. Sabemos, pelo princípio de inclusão - exclusão, que o número dessas funções é $\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n$. Por outro lado, é imediato que cada partição do conjunto A em k classes está associado a $k!$ diferentes funções sobrejetoras. Logo

$$S(n,k) = \frac{1}{k!}\sum_{i=0}^{k}(-1)^i\binom{k}{i}(k-i)^n . \qquad \textbf{(IV)}$$

Podemos obter outra identidade interessante envolvendo os números de Stirling de segundo tipo considerando o conjunto das funções $f : A \to B$, onde $|A| = n$ e $|B| = m$. Sabemos que o número dessas funções é m^n. Por outro lado, podemos particionar este conjunto nos subconjuntos de funções cuja imagem tem exatamente k elementos, para $1 \le k \le m$. O número de funções em cada um desses subconjuntos é evidentemente $\binom{m}{k}(k!S(n,k))$, e obtemos:

$$m^n = \sum_{k=1}^{m}\binom{m}{k}k!S(n,k) . \qquad \textbf{(V)}$$

Vamos agora derivar outra relação de recorrência para os números de Stirling de segundo tipo. Suponhamos $m \geq 1$, $n \geq 0$ e $m \leq n+1$. Por definição $S(n+1,m)$ é o número de partições do conjunto $\{1,2,\cdots,t,\cdots,n,\ n+1\}$ em m classes. Vamos agora dividir estas partições de acordo com o número k de elementos que estão na classe que contém o elemento t (sem contar o t), com $1 \leq k \leq m$. Para k fixo, o número dessas partições é $\binom{n}{k} S(n-k,m-1)$, donde

$$S(n+1,m) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} S(n-k,m-1) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} S(k,m-1).$$

Seção 2.4 Função geradora dos números de Stirling de segundo tipo

Vamos encontrar agora a função geradora para os números de Stirling de segundo tipo.
Para isso, fixamos $k \geq 1$ e usamos a relação (III); temos então

$$\sum_{n=0}^{\infty} S(n+1,k)x^n = \sum_{n=0}^{\infty} S(n,k-1)x^n + k\sum_{n=0}^{\infty} S(n,k)x^n$$
$$= x\sum_{n=1}^{\infty} S(n,k-1)x^{n-1} + kx\sum_{n=1}^{\infty} S(n,k)x^{n-1}$$
$$= x\sum_{n=0}^{\infty} S(n+1,k-1)x^n + kx\sum_{n=0}^{\infty} S(n+1,k)x^n$$

Fazendo $F_k(x) = \sum_{n=0}^{\infty} S(n,k)x^n$, obtemos

$$F_k(x) = xF_{k-1}(x) + kxF_k(x) = \frac{x}{1-kx} F_{k-1}(x)$$
$$= \frac{x^k}{(1-kx)\cdots(1-2x)(1-x)} = x^k \prod_{j=1}^{k} \left(1 + jx + j^2x^2 + j^3x^3 + \cdots\right)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{j_1+\cdots+J_K=n-k} 1^{j_1} 2^{j_2} \cdots k^{j_k} \right)$$

ou seja

$$S(n,k) = \sum_{j_1+\cdots+J_K=n-k} 1^{j_1} 2^{j_2} \cdots k^{j_k}$$

Agora vamos dar uma demonstração combinatória para essa expressão. Fixamos $k=3$ e $n=5$ como exemplo, observando que o argumento é perfeitamente geral. Nesse caso, temos:

$$S(5,3)=\sum_{j_1+j_2+j_3=2} 1^{j_1}2^{j_2}3^{j_3} = 1^0 2^1 3^1 + 1^1 2^0 3^1 + 1^1 2^1 3^0 + 1^2 2^0 3^0 + 1^0 2^2 3^0 + 1^0 2^0 3^2 = 25.$$

Aqui queremos dividir o conjunto formado pelos elementos $1,2,3,4$ *e* 5 em três classes. Para resolver esse problema vamos dividi-lo em casos e identificar cada partição pelos menores elementos das classes. Consideremos as classes $\{1,\cdots\}$, $\{a,\cdots\}$, $\{b,\cdots\}$, onde *a* e *b* são os menores elementos de cada classe, com $a<b$; temos $\binom{4}{2}$ escolhas possíveis para *a* e *b e* portanto $\binom{4}{2}$ parcelas para o somatório . Observemos que os $a-2$ elementos entre 1 e *a* só podem pertencer à classe do 1, portanto têm apenas uma opção. Já os $b-a-1$ elementos entre *a* e *b* podem pertencer à classe do 1 ou do *a*, portanto têm duas escolhas. E os $5-b$ elementos maiores do que *b* poderão ficar nas três classes, tendo assim três escolhas possíveis. Temos então $1^{a-2}2^{b-a-1}3^{5-b}$ possíveis partições do tipo $\{1,\cdots\}$, $\{a,\cdots\}$, $\{b,\cdots\}$. Por exemplo, o número de partições em que $a=2$ e $b=4$ é $1^0 2^1 3^1$, o que gera primeira contribuição ao somatório. Logo $S(5,3)=\sum_{j_1+j_2+j_3=2} 1^{j_1}2^{j_2}3^{j_3}$, como queríamos. ■

Seção 2.5 Relação entre números de Stirling de primeiro e segundo tipo

A definição a seguir vai nos ser útil para relacionarmos os números de Stirling de primeiro e segundo tipo.

Definição [fatorial descendente] *Para* $n,m\in\mathbb{N}$ *definimos o fatorial descendente* $[n]_m = n(n-1)(n-2)\cdots(n-m+1)$. *Trocando n pela indeterminada x, obtemos o* **polinômio de Stirling descendente.**

$$[x]_n = x(x-1)(x-2)\cdots(x-n+1)=\sum_{k=0}^{n} s^*(n,k)x^k \qquad \textbf{(VI)}$$

Em particular, definimos $[x]_0 = 1$.

Por exemplo,

$$[x]_0 = 1$$

$$[x]_1 = x$$

$$[x]_2 = x(x-1) = x^2 - x$$

$$[x]_3 = x(x-1)(x-2) = x^3 - 3x^2 + 2x$$

$$[x]_4 = x(x-1)(x-2)(x-3) = x^4 - 6x^3 + 11x^2 - 6x$$

É imediato que $[x]_n = (-1)^n [-x]^n$ e temos então $s(n,k) = (-1)^n s^*(n,k)$.

O conjunto $\mathcal{B} = \{[x]_0, [x]_1, [x]_2, \ldots, [x]_p\}$ é um conjunto de geradores para o espaço dos polinômios de grau menor ou igual a *p* e tem dimensão $p+1$, logo é uma base desse espaço *p*. Vamos agora encontrar as matrizes de mudança de base entre essa base e a base canônica $\mathcal{C} = \{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^p\}$.

Teorema 2 *Seja x uma indeterminada. Então, para todo* p*, temos:*

$$x^p = \sum_{k=0}^{p} S(p,k)[x]_k \qquad \textbf{(VII)}$$

Demonstração $\displaystyle \sum_{k=0}^{p} S(p,k)[x]_k = \sum_{k=0}^{p} k!\,S(p,k)\frac{[x]_k}{k!} = \sum_{k=0}^{p} \binom{x}{k} k!\,S(p,k)$

Sejam $f(x) = x^p$ e $g(x) = \displaystyle\sum_{k=0}^{p} \binom{x}{k} k!\,S(p,k)$. Por (V) sabemos que $f(m) = g(m)$ para todo $m \in N$. Logo $f(x) = g(x)$, como queríamos. ■

As expressões (**VI**) e (**VII**) mostram que as matrizes

$$P = \begin{bmatrix} S(0,0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ S(1,0) & S(1,1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ S(2,0) & S(2,1) & S(2,2) & 0 & \cdots & 0 \\ S(3,0) & S(3,1) & S(3,2) & S(3,3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ S(p,0) & S(p,1) & S(p,2) & S(p,3) & \cdots & S(p,p) \end{bmatrix}$$

e

$$Q = \begin{bmatrix} s^*(0,0) & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ s^*(1,0) & s^*(1,1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ s^*(2,0) & s^*(2,1) & s^*(2,2) & 0 & \cdots & 0 \\ s^*(3,0) & s^*(3,1) & s^*(3,2) & s^*(3,3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ s^*(p,0) & s^*(p,1) & s^*(p,2) & s^*(p,3) & \cdots & s^*(p,p) \end{bmatrix}$$

são as matrizes de mudança de base da base $\mathcal{B}$ para a base $\mathcal{C}$ e da base $\mathcal{C}$ para a base $\mathcal{B}$, respectivamente.

Das igualdades (**VI**) e (**VII**) obtemos

$$x^p = \sum_{k=0}^{p} S(p,k) \sum_{j=0}^{p} s^*(k,j) x^j = \sum_{j=0}^{p} \left(\sum_{k=0}^{p} S(p,k) s^*(k,j) \right) x^j$$

donde

$$\sum_{k=0}^{p} S(p,k) s^*(k,j) = \begin{cases} 0 & se\ j < p \\ 1 & se\ j = p \end{cases} \quad (\mathbf{VIII})$$

Essa expressão reflete o fato de as matrizes P e Q são inversas uma da outra.

Seção 2.6 Sequência de Stirling

Nosso objetivo nessa seção é encontrar as matrizes de mudança de base da base $\mathcal{D} = \left\{ \binom{x}{0}, \binom{x}{1}, \cdots, \binom{x}{p} \right\}$ para a base canônica $\mathcal{C} = \{1, x, x^2, x^3, \ldots, x^p\}$ do espaço dos polinômios de grau menor ou igual a p.

Definição *Seja* $(h_n) = h_0, h_1, \ldots, h_k, \ldots$ *uma sequência numérica. Definimos o* diferencial $\Delta h_n = h_{n+1} - h_n$. *Definimos também* $\Delta^p h_n = \Delta(\Delta^{p-1} h_n)$ *para* $p \in \mathbb{N}$*; em particular, definimos* $\Delta^0 h_n = h_n$.

Calculemos $\Delta^p h_n$ para alguns valores de *p*.

$p=1$: temos $\Delta h_n = h_{n+1} - h_n$

$p=2$: temos $\Delta^2 h_n = \Delta(\Delta h_n) = h_{n+2} - 2h_{n+1} + h_n$

$p=3$: temos $\Delta^3 h_n = \Delta(\Delta^2 h_n) = h_{n+3} - 3h_{n+2} + 3h_{n+1} - h_n$

p = 4: temos $\Delta^4 h_n = \Delta(\Delta^3 h_n) = h_{n+4} - 4h_{n+3} + 6h_{n+2} - 4h_{n+1} + h_n$

Generalizando, temos

$$\Delta^k h_n = \sum_{i=0}^{k} (-1)^i \binom{k}{i} h_{n+k-i} \qquad \textbf{(IX)}$$

Duas propriedades simples do operador Δ são as seguintes.

(i) Se $h_n = g_n + f_n$ então $\Delta h_n = (g_{n+1} + f_{n+1}) - (g_n + f_n) = \Delta g_n + \Delta f_n$, e mais geralmente $\Delta^p h \ = \Delta^p g_n + \Delta^p f_n$.

(ii) Se *c* e *d* são constantes então $\Delta^p (cg_n + df_n) = c\Delta^p g_n + d\Delta^p f_n$.

Essas propriedades serão usadas constantemente no que se segue sem menção explícita.

Definição *Seja* $h \in \mathbb{C}[x]$ *um polinômio de grau p. A sequência* (h_n) *definida por* $h_n = h(n)$ *para* $n \geq 0$ *é dita uma sequência polinomial de grau p.*

Teorema 3 *Seja* (h_n) *uma sequência polinomial de grau p. Então* $\Delta^{p+1} h_n = 0$ *para todo* $n \geq 0$.

Demonstração Sem perda de generalidade, podemos supor $h_n = n^p$ para $n \geq 0$. Então por (IX) temos

$$\Delta^{p+1} h_n = \sum_{i=0}^{p+1} (-1)^i \binom{p+1}{i} (n+p+1-i)^p .$$

Queremos mostrar que essa expressão tem o valor 0. Para isso, consideremos conjuntos *A* e *B* com $|A| = p$ e $|B| = n+p+1$. O número de funções sobrejetoras $f: A \to B$ é 0, pois o conjunto *B* possui mais elementos do que o conjunto *A*. Por outro lado, o princípio de inclusão-exclusão nos diz que o número dessas funções é a expressão acima, concluindo nossa demonstração. ■

Definição A *tabela diferencial* da sequência polinomial (h_n) de grau *p é a tabela*

$$\begin{array}{ccccccc}
\Delta^0 h_0 & \Delta^0 h_1 & \Delta^0 h_2 & \Delta^0 h_3 & \ldots & \Delta^0 h_n & \cdots \\
\Delta^1 h_0 & \Delta^1 h_1 & \Delta^1 h_2 & \Delta^1 h_3 & \ldots & \Delta^1 h_n & \cdots \\
\Delta^2 h_0 & \Delta^2 h_1 & \Delta^2 h_2 & \Delta^2 h_3 & \ldots & \Delta^2 h_n & \cdots \\
\Delta^3 h_0 & \Delta^3 h_1 & \Delta^3 h_2 & \Delta^3 h_3 & \ldots & \Delta^3 h_n & \cdots \\
\ddots & \ddots & \ddots & \ddots & \cdots & \ddots & \\
\Delta^p h_0 & \Delta^p h_1 & \Delta^p h_2 & \Delta^p h_3 & \ldots & \Delta^p h_n & \cdots \\
0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \cdots
\end{array}$$

Chamaremos de Δh_0 a primeira diagonal da tabela, ou seja, aquela cujos elementos são $\Delta^0 h_0, \Delta^1 h_0, \ldots, \Delta^p h_0, \ldots$.

Exemplo 1: Para a sequência (h_n) com $h_n = n^4 - 2n^3 - 3n + 1$ temos a seguinte tabela:

$$\begin{array}{c}
1 \quad -3 \quad -5 \quad 19 \quad 117 \quad 361 \quad 847 \quad * \\
-4 \quad -2 \quad 24 \quad 98 \quad 244 \quad 486 \quad * \\
2 \quad 26 \quad 74 \quad 146 \quad 242 \quad * \\
24 \quad 48 \quad 72 \quad 96 \quad * \\
24 \quad 24 \quad 24 \quad \cdots \\
0 \quad 0 \quad \cdots
\end{array}$$

e nesse caso Δh_0 é a sequência $1, -4, 2, 24, 24, 0, 0, 0, \ldots$

Se (h_n) é uma sequência polinomial com $\Delta h_0 = 0, \ldots, 0, 1, 0, \ldots$, onde o 1 está na k -ésima posição, podemos facilmente reconstruir a tabela diferencial de (h_n). Por exemplo, se $k = 5$ temos a seguinte tabela:

$$\begin{array}{c}
0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 6 \quad 21 \quad 56 \quad \ldots \\
0 \quad 0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 5 \quad 15 \quad 35 \quad \ldots \\
0 \quad 0 \quad 0 \quad 1 \quad 4 \quad 10 \quad 20 \quad \ldots \\
0 \quad 0 \quad 1 \quad 3 \quad 6 \quad 10 \quad \ldots \\
0 \quad 1 \quad 2 \quad 3 \quad 4 \quad \ldots \\
1 \quad 1 \quad 1 \quad 1 \quad \ldots \\
0 \quad 0 \quad 0 \quad \ldots \\
\ddots \quad \ddots \quad \ddots
\end{array}$$

Como $h_0 = h_1 = h_2 = h_3 = h_4 = 0$ e $\Delta^p h_0 = 0$ para $p \geq 6$ então 0, 1, 2, 3, e 4 são raízes do polinômio $h(n)$ e o grau de h é 5. Logo $h_n = cn(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)$, onde c é uma constante. Como $h_5 = 1$ temos $c = \dfrac{1}{5!}$ e então $h_n = \dbinom{n}{5}$. Em geral, se (h_n) é uma sequência polinomial tal que $\Delta h_0 = \underbrace{0,0,0,\ldots,0}_{p},1,0\ldots$ então $h_n = \dbinom{n}{p}$, e reciprocamente. Isto fornece a demonstração do seguinte teorema.

Teorema 4 *Seja* (h_n) *uma sequência polinomial com* $\Delta h_0 = c_0, c_1, c_2, \cdots, c_p, 0, 0, 0, \ldots$ *e* $c_p \neq 0$. *Então*

$$h(x) = c_0 \binom{x}{0} + c_1 \binom{x}{1} + c_2 \binom{x}{2} + \cdots + c_p \binom{x}{p}.$$

Exemplo 2: Consideremos a tabela diferencial construída no exemplo 1, com $\Delta h_0 = 1, -4, 2, 24, 24, 0 \ldots$. Pelo teorema anterior temos

$$h_n = \binom{n}{0} - 4\binom{n}{1} + 2\binom{n}{2} + 24\binom{n}{3} + 24\binom{n}{4} = n^4 - 2n^3 - 3n + 1.$$

Consideremos agora a expressão

$$x^p = \sum_{k=0}^{p} c_k \binom{x}{k}.$$

Vamos determinar os coeficientes c_k. Como $\dbinom{x}{k} = \dfrac{[x]_k}{k!}$, podemos reescrever a expressão acima como

$$x^p = \sum_{k=0}^{p} c_k \frac{[x]_k}{k!} = \sum_{k=0}^{p} \frac{c_k}{k!} [x]_k$$

e por (VII) segue $c_k = k!S\left(p, k\right)$.

A expressão acima mostra que a matriz

$$R=\begin{bmatrix} 0!S(0,0) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0!S(1,0) & 1!S(1,1) & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ 0!S(2,0) & 1!S(2,1) & 2!S(2,2) & 0 & \cdots & 0 \\ 0!S(3,0) & 1!S(3,1) & 2!S(3,2) & 3!S(3,3) & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0!S(n,0) & 1!S(n,1) & 2!S(n,2) & 3!S(n,3) & \cdots & n!S(n,n) \end{bmatrix}$$

é a matriz mudança de base da base $\mathcal{D}$ para a base canônica $\mathcal{C}$.

Agora queremos encontrar a matriz T de mudança da base canônica $\mathcal{C}$ para a base $\mathcal{D}$. Para isso usaremos a expressão (VI) e $\binom{x}{k}=\frac{[x]_k}{k!}$ .Temos então:

$$\binom{x}{p}=\sum_{k=0}^{p}\frac{s^*(p,k)}{p!}x^k \quad .$$

A expressão acima nos dá a matriz

$$T=\begin{bmatrix} \frac{s^*(0,0)}{0!} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{s^*(1,0)}{1!} & \frac{s^*(1,1)}{1!} & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{s^*(2,0)}{2!} & \frac{s^*(2,1)}{2!} & \frac{s^*(2,2)}{2!} & 0 & \cdots & 0 \\ \frac{s^*(3,0)}{3!} & \frac{s^*(3,1)}{3!} & \frac{s^*(3,2)}{3!} & \frac{s^*(3,3)}{3!} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \frac{s^*(p,0)}{p!} & \frac{s^*(p,1)}{p!} & \frac{s^*(p,2)}{p!} & \frac{s^*(p,3)}{p!} & \cdots & \frac{s^*(p,p)}{p!} \end{bmatrix}$$

que é a matriz mudança de base da base canônica $\mathcal{C}$ para a base $\mathcal{D}$.

CAPITULO III

Números de Bell

Queremos nesse capítulo encontrar o número de maneiras de separar *n* elementos em classes não vazias e a função geradora desses números.

Seção 3.1 Definição e pequenos valores dos números de Bell

Definição *O* número de Bell B_n *é o número de partições de um conjunto de n elementos em classes não vazias. Definimos* $B_0 = 1$

Vamos calcular B_n para alguns valores pequenos de *n.*

$n = 1$: claramente $B_1 = 1$.

$n = 2$: temos as partições $\{1,2\};\{1\},\{2\}$ donde $B_2 = 2$

$n = 3$: temos as partições: $\{1,2,3\}$; $\{1\},\{2\},\{3\}$; $\{1\},\{2,3\}$; $\{2\},\{3,1\}$; $\{3\},\{1,2\}$. Logo $B_3 = 5$.

$n = 4$: temos as partições:

$\{1,2,3,4\}$	$\{1,2\},\{3,4\}$	$\{1\},\{4\},\{2,3\}$
$\{1\},\{2,3,4\}$	$\{1,3\},\{2,4\}$	$\{2\},\{3\},\{1,4\}$
$\{2\},\{1,3,4\}$	$\{1,4\},\{2,3\}$	$\{2\},\{4\},\{1,3\}$
$\{3\},\{1,2,4\}$	$\{1\},\{2\},\{3,4\}$	$\{3\},\{4\},\{1,2\}$
$\{4\},\{1,2,3\}$	$\{1\},\{3\},\{2,4\}$	$\{1\},\{2\},\{3\},\{4\}$

donde $B_4 = 15$.

Usando a definição de números de Stirling de segundo tipo, é imediato que,

$$B_n = \sum_{k=1}^{n} S(n,k) \qquad \textbf{(X)}$$

ou seja, o *n*-ésimo número de Bell é a soma da *n*-ésima linha da tabela dos números de Stirling do segundo tipo.

Seção 3.2 Relação de recorrência e função geradora exponencial dos números de Bell

Teorema 5 *Para todo* $n \in N$ *temos:*

$$B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k \qquad \textbf{(XI)}$$

Demonstração Dividimos $n+1$ elementos em classes não vazias. Seja t um desses elementos. Para cada *k* com $0 \le k \le n$ escolhemos *k* elementos que não ficam na classe do *t*, o que pode ser feito de $\binom{n}{k}$ maneiras diferentes. Depois separamos esses *k* elementos em classes, o que pode ser feito de B_k maneiras diferentes. Logo $B_{n+1} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} B_k$. ■

Com essa relação podemos construir a tabela abaixo:

Tabela dos primeiros números de Bell

n	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
B_n	1	1	2	5	15	52	203	877	4140

Teorema 6 [a função geradora exponencial dos números de Bell] Para $x \in \mathbb{R}$ temos

$$\sum_{0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!} = e^{e^x - 1} \qquad \textbf{(XII)}$$

Demonstração Dadas as funções $f = \sum_{k=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!}$ e $g = \sum_{k=0}^{\infty} b_n \frac{x^n}{n!}$, temos em geral

$$fg = \left(\sum_{r=0}^{\infty} a_r \frac{x^r}{r!} \right) \left(\sum_{s=0}^{\infty} b_s \frac{x^s}{s!} \right) = \sum_{r,s=0}^{\infty} \frac{a_r b_s}{r!s!} x^{r+s} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{r+s=k} \frac{k!}{r!s!} a_r b_s \right) \frac{x^k}{k!} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \binom{k}{r} a_r b_{k-r} \right) \frac{x^k}{k!}.$$

Usando (XI) e considerando $f = \sum_{n=0}^{\infty} B_n \frac{x^n}{n!}$ e $g = e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!}$ obtemos

$$e^x f = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{r=0}^{\infty} \binom{n}{r} B_r \right) \frac{x^n}{n!} = \sum_{n=0}^{\infty} B_{n+1} \frac{x^n}{n!} = f'.$$

Logo $\frac{f'}{f} = e^x$ assim $(\ln f)' = e^x$ o que implica $\ln f = e^x + c$ e obtemos $f = e^{e^x + c}$. Como $B_0 = 1$ temos $e^{1+c} = 1$, que nos dá $c = -1$. Logo $f = e^{e^x - 1}$, como queríamos. ■

CAPITULO IV

Números de Catalan

Seção 4.1 Definição e pequenos valores dos números de Catalan

Definição *O número de sequências que podem ser formadas usando* n símbolos $+1's$ *e* n símbolos $-1's$, *cujas somas parciais satisfazem* $a_1 + a_2 + \cdots + a_k \geq 0$ *com* $k = 1, 2, \ldots, 2n$ *é o número de Catalan* C_n.

Vamos calcular C_n para alguns pequenos valores de n.

$n = 1$: temos somente a sequência $+1, -1$ com a soma parcial não negativa, portanto $C_1 = 1$.

$n = 2$: temos as sequências $\{1, -1, 1, -1\}$ e $\{1, 1, -1, -1\}$ com a soma parcial não negativa, portanto $C_2 = 2$.

$n = 3$: temos as sequências: $\{1, -1, 1, -1, 1, -1\}$; $\{1, -1, 1, 1, -1, -1\}$; $\{1, 1, -1, 1, -1, -1\}$; $\{1, 1, -1, -1, 1, -1\}$ e $\{1, 1, 1, -1, -1, -1\}$ cujas somas parciais são não negativas. Portanto $C_3 = 5$

$n = 4$: temos as sequências:

$\{1,-1,1,-1,1,-1,1,-1\}$	$\{1,1,-1,1,1,-1,-1,-1\}$	$\{1,1,1,-1,-1,1,-1,-1\}$
$\{1,1,-1,-1,1,-1,1,-1\}$	$\{1,-1,1,1,-1,-1,1,-1\}$	$\{1,1,1,-1,1,-1,-1,-1\}$
$\{1,1,-1,1,-1,-1,1,-1\}$	$\{1,-1,1,1,-1,1,-1,-1\}$	$\{1,-1,1,1,1,-1,-1,-1\}$
$\{1,1,-1,-1,1,1,-1,-1\}$	$\{1,-1,1,-1,1,1,-1,-1\}$	$\{1,1,1,1,-1,-1,-1,-1\}$
$\{1,1,-1,1,-1,1,-1,-1\}$	$\{1,1,1,-1,-1,-1,1,-1\}$	

Portanto $C_4 = 14$.

Vamos agora encontrar uma fórmula para os números de Catalan.

Teorema 7 $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$ para $n \geq 0$

Demonstração Iniciamos calculando o número de sequência que podemos formar com n $+1's$ e n $-1's$; para isso escolhemos n lugares para colocarmos os $-1's$, os $+1's$ ficarão nos n lugares restantes. Com isso temos $\dbinom{2n}{n}$ sequências distintas.

Chamaremos de U_n o número de sequências que possuem pelo menos uma soma parcial menor que 0. Temos então $\binom{2n}{n} = C_n + U_n$.

Agora vamos considerar uma sequência pertencente a U_n. Nessa sequência existe o menor k tal que $a_1 + a_2 + \cdots + a_k < 0$; é imediato que $a_k = -1$. E a soma também vale –1. Invertendo o sinal dos a_i para $i = 1, \ldots, k$ e mantendo inalterados os demais termos obtemos $n+1$ $+1's$ e $n-1$ $-1's$. O número dessas sequências é $\binom{2n}{n+1} = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}$.

Revertendo os sinais dos a_i para $i = 1, \ldots, k$ resulta em uma sequência de n $+1's$ e n $-1's$ que possuem pelo menos uma soma parcial < 0.

Para ilustrar o argumento acima, consideremos um exemplo. Observe a sequência $\{1, -1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, -1\}$, em $k = 5$ as somas parciais se torna negativa. Mudaremos os sinais dos $k = 5$ primeiros termos, obtemos a sequência $\{-1, 1, -1, 1, 1, 1, 1, -1, 1, -1\}$, revertendo os sinais dos $k = 5$ primeiros termos retomamos a sequência original $\{1, -1, 1, -1, -1, 1, 1, -1, 1, -1\}$.

Este argumento mostra que $U_n = \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}$. Logo

$$C_n = \binom{2n}{n} - U_n = \binom{2n}{n} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!} = \frac{(2n)!}{n!(2n-n)!} - \frac{(2n)!}{(n+1)!(n-1)!}$$

$$= \frac{1}{n(n+1)} \frac{(2n)!}{n!(n-1)!} = \frac{1}{n+1} \frac{(2n)!}{n!n!} = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$$

Assim

$$C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n} \qquad \textbf{(XII)}$$

como queríamos. ■

Seção 4.2 Relação de recorrência para o número de Catalan

Vamos agora calcular uma relação de recorrência para os números de Catalan. Para isso, usamos (XII) para obter $\dfrac{C_n}{C_{n-1}} = \dfrac{4n-2}{n+1}$, donde

$$C_n = \frac{4n-2}{n+1} C_{n-1}. \qquad \textbf{(XIII)}$$

Com essa relação podemos construir facilmente a tabela abaixo:

Tabela dos primeiros números de Catalan

N	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**	**8**
C_n	**1**	**1**	**2**	**5**	**14**	**42**	**132**	**429**	**1430**

Seção 4.3 A função geradora dos números de Catalan

Vamos nesta seção encontrar a função geradora dos números de Catalan. Para isso demonstraremos o seguinte teorema.

Teorema 8 $(1-4x)^{-1/2} = \sum_{r=0}^{\infty} \binom{2r}{r} x^r$ para $r \geq 0$.

Demonstração Seja $a_n = \binom{2n}{n}$. Então $a_0 = 1$, $a_n = \dfrac{2(2n-1)}{n} a_{n-1}$ portanto $na_n = 4na_{n-1} - 2a_{n-1}$ para $n \geq 1$. Fazendo $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ temos:

$$\sum_{n=1}^{\infty} na_n x^n = 4\sum_{n=1}^{\infty} na_{n-1}x^n - 2\sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1}x^n$$

e então

$$\begin{aligned}
xf' &= 4x\left(xf\right)' + 2xf \\
f' &= 4(xf') + 2f \\
(1-4x)f' &= 2f \\
\frac{f'}{f} &= \frac{2}{1-4x}
\end{aligned}$$

$$(\ln f)' = \frac{2}{1-4x}$$
$$\ln f = -\frac{1}{2}\ln(1-4x) + c$$
$$\ln f = \ln(1-4x)^{1/2} + c$$

Como $f(0)=1$ temos $f=(1-4x)^{-\frac{1}{2}}$ como queríamos. ■

Consideremos agora $C_n = \frac{1}{n+1}\binom{2n}{n}$; usando o teorema anterior temos:

$$f = \sum_{r=0}^{\infty} C_r x^r = \sum_{r=0}^{\infty} \frac{1}{r+1}\binom{2r}{r} x^r = \frac{1}{x}\sum_{r=0}^{\infty}\frac{1}{r+1}\binom{2r}{r}x^{r+1}$$
$$= \frac{1}{x}\int (1-4x)^{-1/2}dx = \frac{-(1-4x)^{1/2}}{2x} + c$$

Como $C_0 = 1$ temos $\frac{-(1-4x)^{1/2}}{2x} + c = 1$, que nos dá $c = 0$. Logo $f = \frac{-(1-4x)^{1/2}}{2x}$ é a função geradora dos números de Catalan ■

Um exemplo da aplicação dos números de Catalan é o seguinte.

Definição R_n *é o número de maneiras de parentetizar corretamente a expressão* $a_1a_2\ldots a_n$ *de modo a calcular o produto final multiplicando apenas dois fatores de cada vez.*

Vamos calcular R_n para alguns valores pequenos de n.

$n=1$: por convenção, $R_n = 1$

$n=2$: a única possibilidade (a_1a_2), ou seja, $R_2 = 1$.

$n=3$: as possibilidades são $(a_1(a_2a_3))$ e $((a_1\ a_2)\ a_3)$, donde $R_3 = 2$.

Em geral, o número de parênteses abertos é sempre maior ou igual ao número de parênteses fechados e serão necessários $n-1$ pares de parênteses. Desta forma, se considerarmos os parênteses abertos como $+1's$ e os parênteses fechados como os $-1's$, vemos que $R_n = C_{n-1}$.

REFERÊNCIAS

SANTOS, J. P. O. Introdução à análise combinatória – 4ª edição - Editora Ciência Moderna.

BRUALDI ,R. Introductory combinatorics - 3a edição- Prentice Hall.

MICHAELS, J. e Rosen, K. - Applications of discrete mathematics - International Edition - McGraw-Hill.

VOLIO, E.P - Combinatoria enumerative – 1ª edição – Editora de La Universidade de Costa Rica.