UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

Instituto de Ciências Exatas – ICEX

Departamento de Matemática

Cônicas, quádricas e suas aplicações

Aluno: Guilherme Freire Franco Sommerfeld

Orientadora: Prof(a). Dra. Jussara de Matos Moreira

Belo Horizonte

2013

Guilherme Freire Franco Sommerfeld

Cônicas, quádricas e suas aplicações

Monografia apresentada ao programa de pós–graduação em Matemática para Professores com Ênfase em Cálculo da Universidade Federal de Minas Gerais UFMG, como requisito parcial à obtenção do título de Especialista em Educação Matemática.

Orientadora: Profª. Dra. Jussara de Matos Moreira

Belo Horizonte

2013

Agradecimentos

Primeiramente quero agradecer a Deus, porque sem ele, não enfrentamos os obstáculos e os desafios que a vida nos proporciona. Em segundo, à minha amada esposa Erika que está sempre ao meu lado, participando e dividindo comigo os momentos de alegria e sucesso na vida.

Quero também agradecer a minha professora, orientadora e doutora Jussara Moreira, pelo incentivo e dedicação nos momentos que eu mais precisei para a realização deste trabalho e à minha família, meus pais e irmãos, que sempre estiveram ao meu lado, torcendo para o meu sucesso.

Agradeço também aos colegas e funcionários desta instituição que, diretamente e indiretamente contribuíram para que esse trabalho se realizasse.

Sumário

Resumo

Este trabalho foi o resultado de um estudo sobre as cônicas e as superfícies quádricas com o objetivo de conceituá-las, descrever algumas de suas aplicações e ainda onde essas aparecem na natureza ou são utilizadas em nossa vida cotidiana. Essa monografia se propõe ser autocontida, podendo ser lida por estudantes de ensino médio ou início de graduação, apresentando, em cada seção, cada cônica ou quádrica, sua definição matemática, equações e aplicações.

1 – Introdução

Esse trabalho surgiu da vontade de estudar a relação entre as cônicas e quádricas com os objetos e situações com que nos deparamos em nosso dia a dia, como os faróis de nossos carros, a reflexão dos sons através das formas das construções de nossos edifícios.

De fato, se repararmos bem, podemos encontrar diversos objetos em nossa volta que possuem formas de cônicas como a parábola, elipse, hipérbole e circunferência. Assim também ocorre em relação às superfícies quádricas: esferas, cilindros, parabolóides, elipsóides e hiperbolóides, que podemos encontrar em nosso meio.

Nos faróis dos carros e nas luminárias por exemplo, temos a forma do parabolóide no qual podemos determinar um ponto chamado foco, onde, se colocada uma lâmpada que emite os raios luminosos, esses ao encontrarem com o parabolóide (alumínio) são refletidos paralelamente.

As curvas cônicas, por serem encontradas na natureza, foram objetos de estudo para diversos matemáticos. A circunferência, por exemplo, foi símbolo da perfeição na Grécia Antiga, podendo ser encontrada nas ondas produzidas por uma pedra na superfície de um lago ou até mesmo na roda. Já a elipse corresponde à geometria das órbitas de alguns planetas e cometas e a hipérbole corresponde à geometria das trajetórias de alguns cometas e de outros corpos celestes. A parábola corresponde à trajetória de um projétil lançado num campo gravitacional, o que se pode verificar com a trajetória de um jacto d' água. A elipse pode ainda ser encontrada na forma da luz de uma lanterna projetada numa superfície plana.

As cônicas na Engenharia e Arquitetura são usadas devido às suas propriedades físicas e até mesmo estéticas como no caso das pontes, pórticos, cúpulas, torres e arcos. Um exemplo é o cabo de suspensão de uma ponte, quando o peso total é uniforme distribuído segundo o eixo horizontal da ponte, toma a forma de uma parábola.

As parábolas, elipses e hipérboles são as chamadas seções cônicas, que são as curvas resultantes da interseção de um cone com um plano.

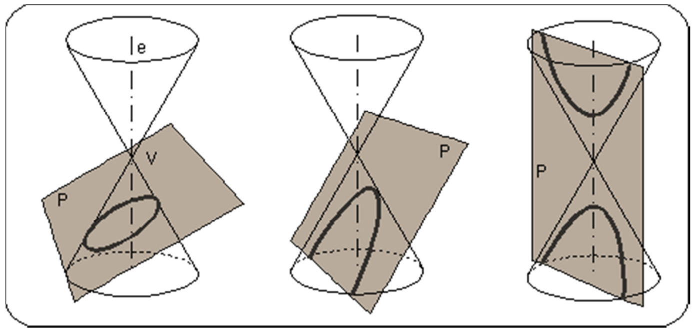

Figura 1: Elipse, Parábola e Hipérbole

http://matfal.22web.net/geometria/curiosidades/curios_geo.htm

Na Figura 1 ilustramos algumas cônicas obtidas. Observe que no primeiro caso seccionamos o cone por um plano P oblíquo ao eixo do cone, formando uma elipse. Se o plano for perpendicular ao eixo, essa curva vira uma circunferência. No segundo e terceiro casos, seccionamos também o cone por um plano P sendo que no segundo, ele é inclinado em relação ao eixo formando uma parábola e no terceiro caso, ele é paralelo ao eixo formando duas curvas originando uma hipérbole. As quatro curvas descritas são as chamadas cônicas não degeneradas.

Se por outro lado cortarmos o cone por planos que passam pelo vértice V então obteremos as chamadas cônicas degeneradas, que podem ser um ponto, uma reta ou duas retas.

- Se um plano passa pelo vértice do cone, a interseção é um ponto (elipse degenerada).

Figura 2

http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm27/conicas.htm

- Se um plano secciona o cone e é paralelo ao eixo e passa pelo vértice, a interseção são duas retas concorrentes (hipérbole degenerada).

Figura 3

http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm27/conicas.htm

- Se um plano secciona o cone e é paralelo apenas a uma geratriz (reta que gera a superfície do cone) passando pelo vértice, a interseção é uma reta (parábola degenerada).

Figura 4

http://www.educ.fc.ul.pt/icm/icm2000/icm27/conicas.htm

Trataremos nesse trabalho especificamente sobre as cônicas não-degeneradas, embora claramente encontremos aplicações óbvias em nosso dia a dia das cônicas degeneradas.

Nesse trabalho estudaremos ainda aplicações das superfícies quádricas. Uma superfície quádrica é o gráfico de uma equação de segundo grau nas três variáveis x, y e z, sendo que a equação mais geral é:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 + Dxy + Exz + Fyz + Gx + Hy + Iz + J=0, \qquad (1)$$

onde A, B, C,..., J são constantes e pelo menos um dos coeficientes dos termos de segunda ordem A, B, C, D, E ou F é diferente de zero. Quando seccionamos uma superfície quádrica por planos paralelos aos planos coordenados, a curva de interseção será uma cônica. Existem superfícies quádricas não-degeneradas de diferentes tipos: parabolóide elíptico, parabolóide hiperbólico, hiperbolóide de uma folha, hiperbolóide de duas folhas, elipsoide, cone, e ainda o cilindro, mas, além dessas superfícies quádricas, a equação (1) acima também pode representar: o conjunto vazio, um ponto, uma reta, um plano, um par de planos paralelos ou um par de planos concorrentes.

2 – Circunferência/Esfera

2.1 – Circunferência

Em nosso dia a dia, nos deparamos o tempo todo com objetos de formatos circulares. De fato, uma das mais importantes invenções da humanidade é também um dos objetos mais importantes no nosso cotidiano: a roda. A partir daí, essa forma geométrica foi aplicada em quase todo o tipo de máquina, como automóveis, aviões, radares, relógios, etc., os quais facilitaram a nossa vida. Temos também como aplicação os paralelos e meridianos utilizados para demarcar o nosso planeta.

Muitas invenções espetaculares surgiram com a ideia de circunferência e sua importância ocorre praticamente em todas as áreas do conhecimento como nas Engenharias, Matemática, Física, Química, Biologia, Arquitetura, Astronomia, Artes, também sendo muito utilizada na indústria e nas residências das pessoas.

Matematicamente definimos a circunferência como o conjunto de todos os pontos P(x,y) do plano que estão a uma certa distância (chamada raio) de um ponto fixo (chamado centro). Fixados o raio $r > 0$ e o centro (a,b), podemos obter através da fórmula da distância entre dois pontos do plano, a equação que caracteriza qualquer ponto P(x,y) da curva chamada circunferência:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r \quad \text{ou} \quad (x-a)^2 + (y-b)^2 = r^2$$

Desenvolvendo os quadrados dos termos à esquerda e lembrando que r, a e b são constantes, podemos escrever a equação da circunferência na forma:

$$x^2 + y^2 + Ax + By + C = 0,$$

sendo A, B e C constantes.

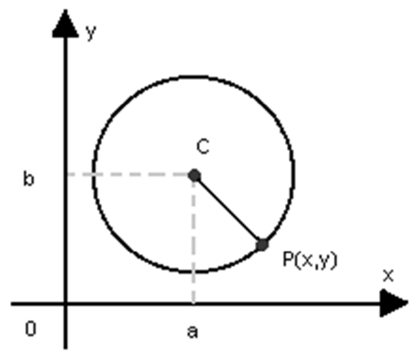

Figura 5: Circunferência de centro C = (a,b).

www.somatematica.com.br

Note que a definição de circunferência deixa claro que estamos considerando somente a curva, isto é, a fronteira do círculo de centro C. Em termos de aplicações no cotidiano, poderíamos pensar na circunferência quando observamos um anel ou uma pulseira (de espessura desprezível), ou quando olhamos os paralelos e meridianos da Terra, conforme a Figura 6:

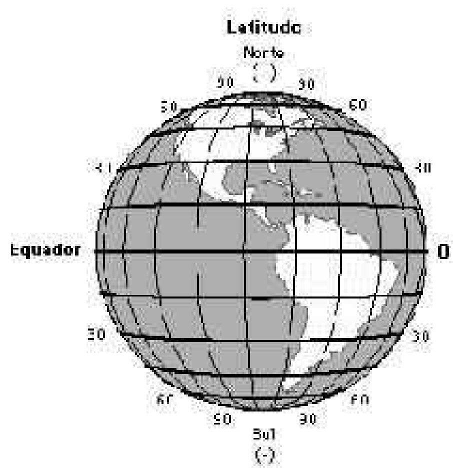

Figura 6: Paralelos e Meridianos da Terra.

http://www.padogeo.com/cont-cartografia.html

Os paralelos são traçados lateralmente ao Equador, tanto para o norte quanto para o sul. A cada um deles é atribuído o número correspondente ao ângulo que forma com a linha do Equador, considerando o centro da Terra o centro da circunferência. Os meridianos são linhas imaginárias que dão a volta na Terra, passando pelos dois pólos. Assim, ao contrário dos paralelos, todos os meridianos têm o mesmo comprimento.

Gostaríamos de enfatizar aqui a diferença entre circunferência e o que chamaremos de círculo. Este último leva em consideração, além da fronteira, todos os pontos interiores de uma circuferência, isto é, passa a ser uma região do plano. Em termos de aplicações, temos por exemplo as moedas (aqui estamos desprezando a altura) ou as calotas de carros. Na Figura 7 abaixo, toda a área interior da borda representa o círculo, enquanto a borda, em preto, representa a circunferência.

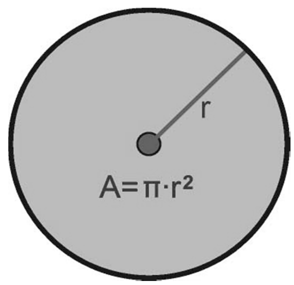

Figura 7

http://mauriciomunhoz.blogspot.com.br/2009/09/bicicleta.html

Matematicamente podemos expressar os pontos do círculo como:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} \leq r \text{ ou } (x-a)^2+(y-b)^2 \leq r^2.$$

Note que na expressão acima consideramos toda a região interna e também a borda (círculo fechado). Se não quisermos incluir a fronteira, então podemos considerar o círculo (aberto) como:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2} < r \text{ ou } (x-a)^2+(y-b)^2 < r^2.$$

Daremos agora um exemplo de obtenção da equação da circunferência, dados dois pontos que determinam seu diâmetro:

Exemplo: Seja o segmento de extremidades P(2,8) e Q(4,0) um diâmetro de uma circunferência. Determine a equação dessa circunferência.

Se um diâmetro da circunferência tem extremidades em P e Q, o ponto médio de PQ representa o centro $C(X_c,Y_c)$ da circunferência. As coordenadas do centro serão portanto obtidas através das médias das coordenadas dos pontos P e Q:

$$X_c = \frac{X_p + X_q}{2} = \frac{2+4}{2} = 3, \quad Y_c = \frac{Y_p + Y_q}{2} = \frac{8+0}{2} = 4.$$

Assim, obtemos que o centro de tal circunferência será o ponto C(3,4). Precisamos ainda do raio da circunferência, mas, para obtê-lo basta notar que o raio é justamente a distância entre um dos pontos P ou Q e o centro. Logo:

$$r = \sqrt{(X_p - X_c)^2 + (Y_p - Y_c)^2} = \sqrt{(2-3)^2 + (8-4)^2}$$

Logo, o raio da circunferência é $r = \sqrt{17}$. Finalmente, com o centro e o raio podemos obter a equação da circunferência:

$$\sqrt{(x-a)^2 + (y-b)^2} = r^2$$

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = (\sqrt{17})^2$$

$$(x-3)^2 + (y-4)^2 = 17.$$

Note ainda que a equação dessa circunferência poderia ter sido dada como

$$x^2 + y^2 - 6x - 8y + 8 = 0.$$

2.2 – Esfera

No nosso cotidiano, podemos citar diversas situações em que nos deparamos com objetos esféricos. Por exemplo, o rolamento que é utilizado nas rodas de automóveis, bicicletas, etc., é formado por esferas que permitem que ocorra o giro de uma roda em um eixo (veja Figura 8). Esses rolamentos são muito utilizados na indústria, facilitando o trabalho de locomoção de certas partes de máquinas.

Figura 8

http://www.schaeffler.com.br/content.schaeffler.com.br/pt/branches/industry/metal_extraction_and_processing/product_range_4/ball_bearings/ball_bearings.jsp

Como exemplos de aplicações da esfera podemos citar ainda as lentes esféricas, que são objetos importantes na construção de óculos e as bolas de jogos de sinuca (Figura 9).

Figura 9

http://docentes.if.ufg.br/~jrsabino/Informatica/Trabalho-HTML/Claudio_Aline/SITE%20-%20CLAUDIO%20E%20ALINNE/conteudo.html

A esfera (ou superfície esférica) é o conjunto de todos os pontos P(x,y,z) do espaço que estão a uma certa distância (chamada raio) de um ponto fixo (chamado centro).

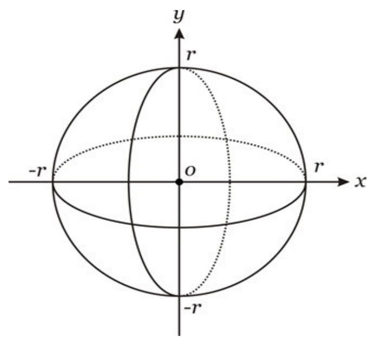

Figura 10: Esfera centrada na origem O = (0,0,0), de raio r.

http://obaricentrodamente.blogspot.com.br

Matematicamente, assim como fizemos no caso da circunferência, fixados o raio r > 0 e o centro (a,b,c), podemos obter através da fórmula da distância entre dois pontos do espaço, a equação que caracteriza qualquer ponto P(x,y,z) na esfera:

$$\sqrt{(x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2} = r \text{ ou } (x-a)^2+(y-b)^2+(z-c)^2 = r^2 .$$

Desenvolvendo os quadrados dos termos à esquerda e lembrando que r, a, b e c são constantes, podemos escrever na forma:

$$x^2+y^2+z^2+Ax+By+Cz+D=0,$$

sendo A, B, C e D constantes.

Note que, novamente, pela definição de esfera, estamos considerando apenas a superfície, isto é, a fronteira da bola, a casca esférica. Assim, chamaremos o sólido todo (fronteira e interior) de bola e sua casca de esfera. Em termos de aplicações, poderíamos então dizer que, de certa forma, uma bola de basquete poderia representar uma esfera, já que é uma casca cheia de ar no interior, ou uma bolha de sabão. Já a bolinha de gude, uma laranja ou o próprio planeta Terra são sólidos e portanto, são exemplos de bolas.

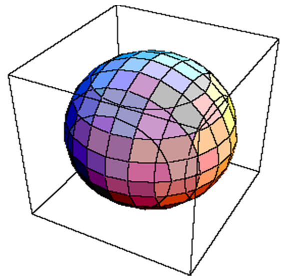

Figura 11: Superfície esférica

http://www.mat.ufmg.br/~syok/cursos/mat039/quadricas/quadricas.htm

Vamos considerar mais detalhadamente um dos exemplos que aparecem frequentemente em nosso cotidiano, que são os espelhos esféricos. O espelho esférico é qualquer porção de uma superfície esférica capaz de exibir, em predominância, o fenômeno da reflexão regular da luz. Como aplicação, temos o espelho externo dos automóveis (retrovisores externos) que fornece imagens reduzidas dos objetos (Figura 12).

Figura 12

http://www.mundoeducacao.com.br/fisica/aumento-linear-transversal.htm

Os espelhos esféricos possuem os seguintes elementos:

- Centro de curvatura **(C)**: é o centro da esfera que deu origem ao espelho.
- Raio de curvatura **(R)**: é o raio da esfera que deu origem ao espelho.
- Vértice **(V)**: é o ponto mais externo da calota.
- Eixo principal: é a reta que passa pelo centro de curvatura e sai perpendicular ao vértice do espelho.
- Eixo secundário: qualquer reta que passe pelo centro de curvatura, menos a que é definida como eixo principal (passa pelo vértice). Existem infinitos eixos secundários na superfície do espelho.
- Ângulo de abertura **(A)**: é o ângulo formado pelas extremidades da calota, delimitada por eixos secundários.

Os espelhos esféricos podem ser:

- **Côncavos** (esquerdo) – a superfície refletora é a interna;
- **Convexos** (direito) – a superfície refletora é a externa.

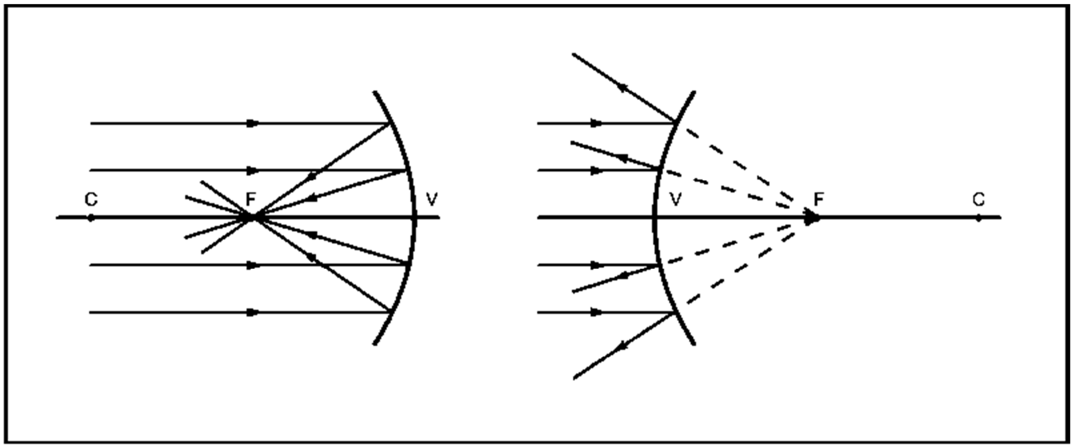

Figura 13: reflexão da luz em espelhos côncavos e convexos

http://osfundamentosdafisica.blogspot.com.br

Em um espelho côncavo (Figura 13: esquerda), a luz paralela incidente é refletida para um foco real em F e num espelho convexo (Figura 13: direita), a luz paralela incidente parece divergir de um foco virtual em F.

A distancia focal é à distância do foco ao vértice (FV) do espelho esférico. Podemos obter uma relação entre a distância focal e o raio do espelho. Sabendo que o foco de um espelho esférico está situado no meio da distância entre o centro de curvatura (C) e o vértice (V) temos que, a distância focal, f, de um espelho esférico é igual à metade do seu raio de curvatura, R, isto é:

$$\mathbf{f = R/2}$$

Assim, se por exemplo o espelho côncavo do farol de um automóvel tem um raio de curvatura R=20cm, a distância entre o filamento da lâmpada e o vértice deste espelho deve ser igual à distância focal, que nesse caso será:

$$f = \frac{R}{2} = \frac{20\ \text{cm}}{2} = 10\text{cm}.$$

3 – Parábola/Parabolóide

As parábolas são utilizadas no nosso cotidiano em diversos equipamentos e sistemas de muita importância para nossa sociedade. As propriedades refletoras da parábola contribuem para a construção de telescópios, antenas, radares, faróis, etc. Fazendo uso da propriedade refletora da parábola, Arquimedes construiu espelhos parabólicos, os quais por refletirem a luz solar para um só ponto, foram usados para incendiar os barcos romanos nas invasões de Siracusa (cidade italiana). A partir da propriedade refletora das parábolas, os engenheiros civis constroem pontes de suspensão parabólica (Figura 14).

Figura 14

http://www.coladaweb.com/matematica/conicas

Podemos observar no alto das casas e edifícios as antenas parabólicas (Figura 15), que captam ondas eletromagnéticas dos satélites em órbita ao redor da terra. Isto somente é possível devido à propriedade da parábola de refletir o conjunto de raios recebidos em um único ponto (o foco da parábola). Neste ponto encontra-se posicionado o receptor de ondas, que enviará o sinal recebido para um conversor que as decodificará e enviará para o receptor de televisão. Os radares operam de forma semelhante às antenas parabólicas, recebendo o eco de pulsos eletromagnéticos.

Figura 15

http://mateematica.blogspot.com.br/2009/08/parabolaspra-que-te-quero.html

Os refletores parabólicos de faróis e lanternas permitem que a luz da lâmpada localizada no foco se propague em raios paralelos ao eixo da parábola formando o facho. Nos telescópios, a maior parte dos espelhos são parabólicos e quase sempre um astrônomo amador imagina que todos os espelhos destes aparelhos são parabólicos.

Um espelho deve ser parabólico quando a sua distância focal é pequena e espelhos com grande razão focal (conhecida como f/d, a razão focal é nada mais que a distância focal da objetiva pelo diâmetro da mesma distância focal) apresentam superfícies esféricas.

Quando a razão focal é pequena, pode ocorrer a chamada "aberração esférica" (Figura 16), em que nem todos os raios luminosos que incidem sobre um espelho são desviados para o foco, sendo que os raios que atingem as bordas do espelho (ou de uma lente) são refletidos (ou desviados) para pontos mais próximos do espelho, produzindo pontos focais diferentes ao longo do eixo óptico e resultando em perda de resolução. No caso de lentes por exemplo de câmeras fotográficas, a aberração esférica pode comprometer a nitidez e clareza da imagem e nesse caso, para minimizar esses problemas, os fabricantes adotam uma variedade de soluções, como o uso de diafragmas para reduzir os limites externos das lentes, métodos especializados de polimento de lentes, novas formulações de vidro e métodos para restringir e controlar o trajeto óptico. No caso de telescópios, placas corretoras são muitas vezes utilizadas, dando um formato parabólico à sua curvatura.

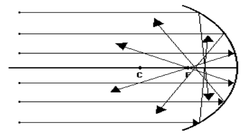

Figura 16: aberração esférica em um espelho

http://fisica.ufpr.br/viana/fisicab/aulas2/aula32.html

3.1 – Parábola

Já comentamos aqui que espelhos parabólicos utilizados por exemplo nos refletores dos faróis dos automóveis possuem a propriedade que uma lâmpada localizada no foco do espelho emite raios refletidos paralelamente. Mostraremos agora esse fato matematicamente e, para isso, introduziremos inicialmente a definição precisa e as equações das parábolas.

Definimos a parábola como o conjunto de pontos em um plano cujas distâncias a um ponto fixo F (foco) e a uma reta fixa (diretriz) são iguais. O ponto na metade do caminho entre o foco e a diretriz que está na parábola é chamada de vértice.

Para obtermos uma equação para essa curva, observemos primeiramente a parábola representada pelo gráfico da Figura 17 (obtida utilizando-se o programa Winplot*).

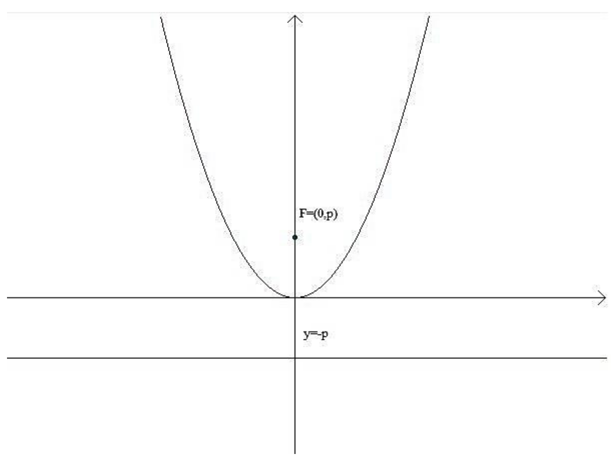

Figura 17: Parábola com Foco F=(0,p) e vértice na origem.

** Winplot é um programa educacional que permite plotar gráficos de funções em uma ou duas dimensões espaciais e pode ser obtido gratuitamente.*

Nesse caso, o foco é o ponto F = (0, p) sendo p um número positivo e a diretriz é a reta y= - p. Assim, para obter a equação da parábola devemos obter o conjunto de pontos cujas distâncias ao foco F e à reta diretriz são iguais, isto é:

$$\sqrt{x^2 + (y - p)^2} = y + p.$$

Assim, $x^2 + y^2 - 2py + p^2 = y^2 + 2py + p^2$, isto é,

$$x^2 = 4py \qquad (1)$$

Se o vértice não estiver na origem (0,0), podemos fazer um raciocínio análogo para obter a equação da parábola. Haverá uma translação e teremos

$$(x - x_0)^2 = 4p(y - y_0).$$

Como exemplo dessa variação, observe a equação $(x - 3)^2 = 2(y - 2)$ cujo gráfico foi construído na Figura 19 também utilizando-se o programa Winplot. Nesse caso o vértice V = (3,2) está fora da origem. Para encontrar a reta diretriz D e o foco F dessa parábola, fazemos D: $y = y_0$ e $F = (3, y_1)$ e consideramos a igualdade:

$$d(P,D) = d(P,F).$$

Assim, temos:

$$y - y_0 = \sqrt{(x - 3)^2 + (y - y_1)^2}$$

$$y^2 - 2y_0 y + y_0^2 = (x - 3)^2 + y^2 - 2y_1 y + y_1^2$$

$$(x - 3)^2 = 2(y_1 - y_0)y + (y_0^2 - y_1^2).$$

Comparando com a equação $(x - 3)^2 = 2(y - 2) = 2y - 4$, obtemos:

$$2(y_1 - y_0) = 2 \rightarrow y_1 = 1 + y_0 \ \text{ e } \ y_0^2 - y_1^2 = -4 \rightarrow y_0^2 - (1 + y_0)^2 = -4.$$

Assim: $y_0^2 - (1 + 2y_0 + y_0^2) = -4$, ou seja:

$$-1 - 2y_0 = -4 \rightarrow 2y_0 = 3 \rightarrow y_0 = \frac{3}{2} \ \text{ e } \ y_1 = 1 + \frac{3}{2} = \frac{5}{2}.$$

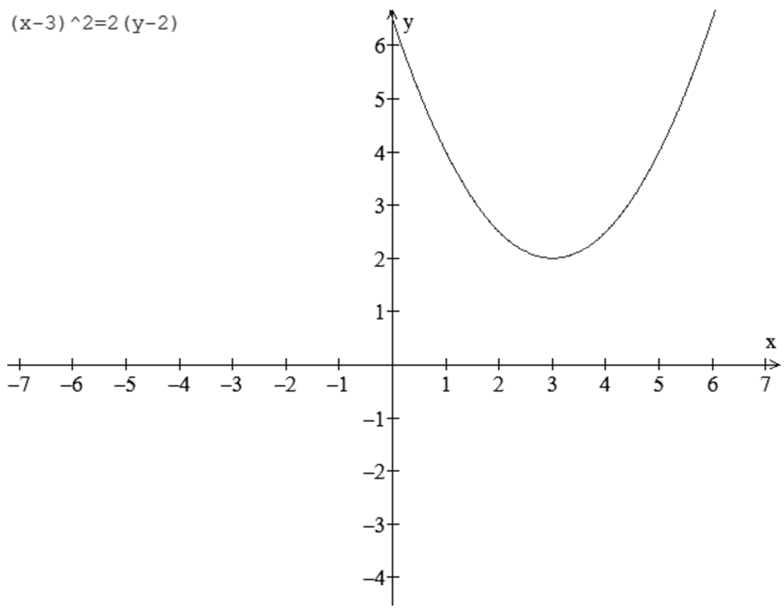

Figura 18: Parábola com Foco F=$\left(3,\frac{5}{2}\right)$ e vértice fora da origem V = (3,2).

http://winplot.softonic.com.br/?ab=3

Podemos obter ainda a equação da parábola quando esta sofre rotações, por exemplo, fazendo uma rotação para a direita, de 90 graus, da parábola da Figura 17, teremos agora a parábola cujo eixo estará no eixo x, ou seja, a parábola com foco F=(p,0), ainda com vértice na origem, mas cuja diretriz será a reta x = - p, descrita na Figura 19.

Neste caso, a distância de um ponto (x,y) até o foco será dada por $\sqrt{(x-p)^2+y^2}$ e a distância de (x,y) até a diretriz será x+p. Igualando essas distâncias, obtemos:

$$\sqrt{(x-p)^2+y^2} = x + p.$$

Assim:

$$x^2 + y^2 - 2px + p^2 = x^2 + 2px + p^2$$

ou

$$y^2 = 4px. \qquad (2)$$

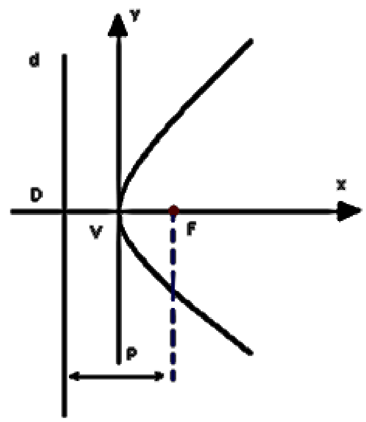

Figura 19: Parábola com Foco F=(p,0)

www.colegioweb.com.br/matemática/parábola.html

Se o vértice V = (x_0, y_0) não estiver na origem (0,0), a equação da parábola se torna

$$(y - y_0)^2 = 4p(x - x_0) \ ,$$

cujo gráfico está representado na Figura 20.

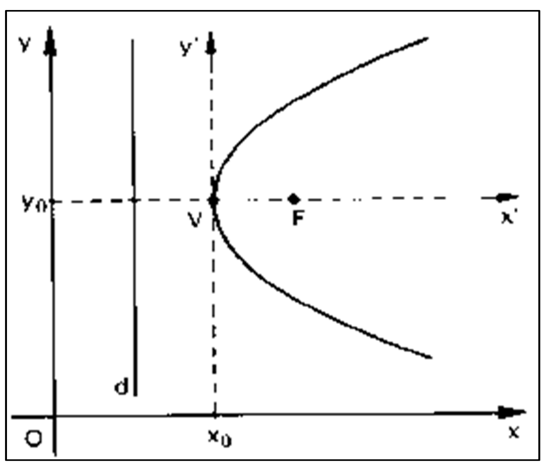

Figura 20: Parábola com vértice fora da origem (0,0)

www.ebah.com.br

Estamos prontos agora para voltar para a nossa aplicação de parábolas, isto é, a secção de um farol de automóvel que tem o formato parabólico (a superfície espelhada é um parabolóide). A lâmpada deve ficar no foco do espelho e, quando acesa, emite raios luminosos que após incidirem sobre a parábola serão refletidos numa mesma direção segundo retas paralelas ao eixo da parábola (veja Figura 21).

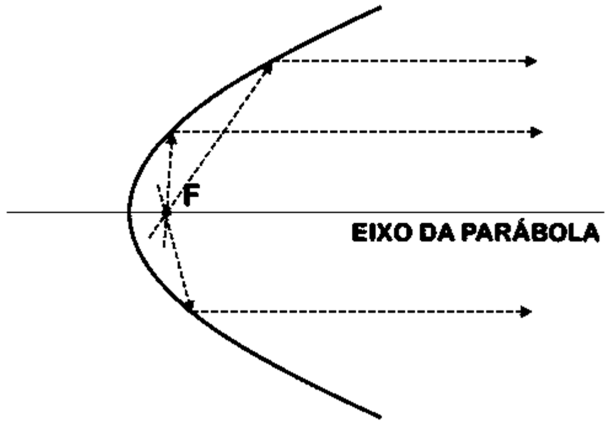

Figura 21

http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=23269

Mostraremos agora que de fato o feixe de luz saindo do foco da parábola será refletido paralelamente. Para isso, considere P(x,y) um ponto sobre a parábola $y^2 = 4px$ com foco F(p,0), α o ângulo entre a parábola e o segmento de reta FP e β o ângulo entre a reta horizontal $y = y_1$ e a parábola, como na Figura 22:

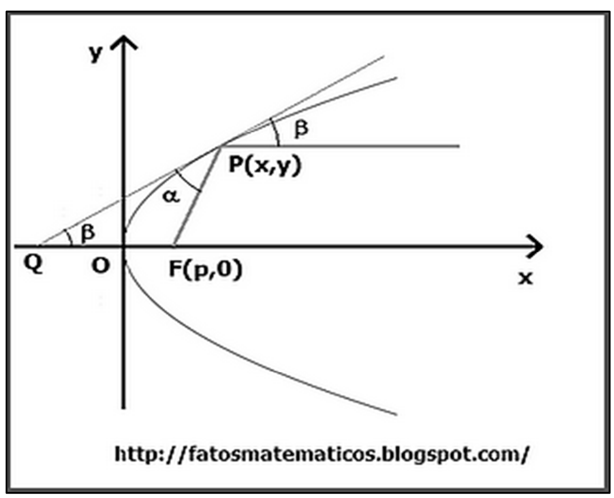

Figura 22

Sabendo que na reta do ponto P, temos $y = y_1$ e a equação da parábola é $y^2 = 4px$. Vamos mostrar que α = β, provando assim que a luz de uma fonte localizada em F será refletida ao longo de uma reta paralela ao eixo x.

Encontraremos inicialmente a inclinação da reta FP, onde consideraremos as coordenadas do ponto P = (x_1, y_1). Dessa forma a inclinação m_r da reta FP será dada por:

$$m_r = \frac{y_1}{x_1 - p} \tag{3}$$

Agora, sabemos ainda que a inclinação da reta tangente a uma curva em um ponto é dada pela derivada da função que descreve a curva. Logo, a inclinação da reta que passa por Q e P, ou seja, da reta tangente à parábola no ponto P será dada pela derivada de y. Como a parábola possui foco F=(p,0) e o ponto P está no primeiro quadrante, isto é, y é positivo, então, de acordo com a equação (2), a equação que descreve a parábola é:

$$y(x) = \sqrt{4px} = 2\sqrt{p}\, x^{\frac{1}{2}}$$

Derivando a função acima, obtemos: $y'(x) = \sqrt{\frac{p}{x}}$.

Logo, a inclinação m_s da reta QP será dada por: $m_s = \sqrt{\frac{p}{x_1}}$.

Fazendo que $\Theta = \alpha + \beta$ e $\operatorname{tg} \Theta = \frac{y_1}{x_1 - p} = m_r$ e substituindo Θ por α + β, temos:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{\operatorname{sen}\alpha\cos\beta + \operatorname{sen}\beta\cos\alpha}{\cos\alpha\cos\beta - \operatorname{sen}\alpha\operatorname{sen}\beta} = \frac{\cos\alpha\cos\beta(\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + \frac{\operatorname{sen}\beta}{\cos\alpha\cos\beta)}}{\cos\alpha\cos\beta(1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta)} =$$

$$= \frac{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = \frac{\operatorname{tg}\beta(1 + \operatorname{tg}\alpha)}{1 - \operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta} = m_r \text{ (inclinação da reta)}$$

Igualando: $\operatorname{tg}(\alpha+\beta) = m_r = \frac{y_1}{x_{1-p}} = \frac{2\sqrt{p}\sqrt{x_1}}{x_{1-p}} = \frac{2\sqrt{\frac{p}{x_1}}}{1 - \frac{p}{x_1}} = \frac{2\operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\beta^2} = \operatorname{tg}(2\beta)$

e como a tangente é uma função injetora no intervalo de 0 a $\frac{\pi}{2}$, temos:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \operatorname{tg}(2\beta) \rightarrow \alpha + \beta = 2\beta \rightarrow \boldsymbol{\alpha = \beta.}$$

3.2 – Parabolóide

Uma onda de rádio encontrando uma antena receptora parabólica, numa direção paralela ao seu eixo, será refletida na direção do foco da parábola que gera a superfície parabólica. Isso justifica a razão das antenas que captam sinais do espaço serem de formato parabólico, pois é necessário captar os sinais e concentrá-los em um único ponto para serem tratados, de acordo com o fim a que se destinam. Um mesmo fenômeno ocorre com um raio de luz que encontra um espelho parabólico numa direção paralela a seu eixo, que será refletido no foco da parábola.

No parabolóide, as parábolas aparecem de forma natural e são as cônicas que mais aparecem como seções planas (paralelas aos planos coordenados).Um parabolóide é denominado elíptico quando suas seções são parábolas ou elipses e é denominado hiperbólico quando suas seções são parábolas e hipérboles. O parabolóide elíptico possui uma forma semelhante a uma taça e pode possuir um ponto de máximo ou mínimo (veja Figura 23). Com este formato, um refletor parabólico é utilizado nos espelhos, antenas e objetos semelhantes e uma fonte de luz posicionada no ponto focal desta superfície produz um raio de luz paralelo. Isto também funciona da maneira inversa: um feixe de luz com raios paralelos incidentes no parabolóide é concentrado no ponto focal e também se aplica a outras ondas, como nas antenas parabólicas. O parabolóide elíptico pode ser obtido como uma superfície de revolução, através da rotação de uma parábola ao redor de seu eixo.

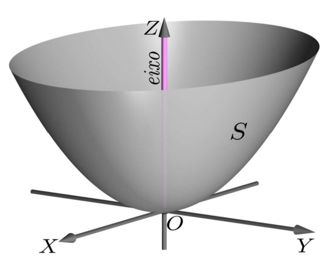

Figura 23: Parabolóide elíptico S e seu eixo sendo o eixo OZ.

www.professores.uff.br/kowada/ga/ead/ga2V1aula17pdf

As equações dos parabolóides com eixo OZ são:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = z \quad \text{(parabolóide elíptico)}$$

e

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = z \ \text{(parabolóide hiperbólico).}$$

O parabolóide hiperbólico possui um formato semelhante a uma sela e pode possuir um ponto crítico chamado de "ponto de sela". Um exemplo do cotidiano de um parabolóide hiperbólico é o formato de uma batata Pringles (Figura 24).

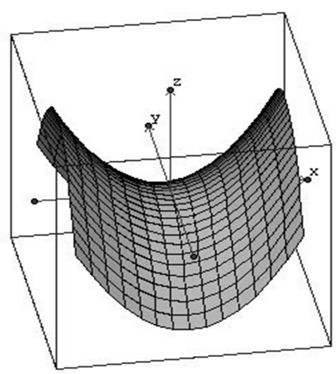

Figura 24: Parabolóide hiperbólico com eixo OZ

http://www.professores.uff.br/hjbortol/arquivo/2007.1/qs/quadric-surfaces_br.html

Podemos transformar uma quádrica em uma cônica realizando cortes em uma equação, ou seja, dando valores para um coeficiente, como por exemplo na equação do parabolóide elíptico:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = z$$

Assim, se interceptarmos o parabolóide dado pela equação acima (cujo gráfico está representado na Figura 24) por um plano paralelo ao plano xy, por exemplo, o plano z=4, obtemos a seguinte equação:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 = 4, \text{ ou seja, } \left(\frac{x}{2a}\right)^2 + \left(\frac{y}{2b}\right)^2 = 1,$$

que é a equação de uma elipse. Logo, concluímos com isso que cortes por planos paralelos ao plano xy (acima do plano xy) no parabolóide elíptico serão elipses. Note que, nesse caso, a interseção do parabolóide com o plano xy é apenas um ponto (a origem) e que a interseção com planos paralelos ao plano xy abaixo deste é o conjunto vazio, pois na equação temos que z é dado por uma soma de quadrados, logo, todo o gráfico se concentra no semi-espaço superior.

Podemos fazer o mesmo para a equação do parabolóide hiperbólico:

$$\left(\frac{x}{a}\right)^2 - \left(\frac{y}{b}\right)^2 = z$$

Igualando ao plano z= 0 : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 0 \rightarrow \frac{x^2}{a^2} = \frac{y^2}{b^2} \rightarrow y^2 = \frac{b^2}{a^2}x^2 \rightarrow y = \pm\frac{b}{a}x$ que resulta em um par de retas.

Igualando ao plano z= 1 : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1$, que resulta em uma hipérbole.

Igualando o plano z= -1 : $\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = -1$, desenvolvendo a equação temos:

$\frac{y^2}{b^2} - \frac{x^2}{a^2} = 1$, que resulta também em uma hipérbole, agora rotacionada.

O corte do parabolóide hiperbólico com os planos coordenados verticais y = 0 e x = 0, são parábolas dadas por:

$$z = \frac{x^2}{a^2} \quad \text{e} \quad z = -\frac{y^2}{b^2},$$

com concavidades para cima e para baixo, respectivante. Note que isso gera a aparência de sela do gráfico da Figura 24. Note ainda que igualando quaisquer duas variáveis na equação do parabolóide hiperbólico a zero, obtemos sempre a origem (0, 0, 0). Assim, a interseção do parabolóide hiperbólico com os eixos coordenados é a origem, chamada ponto de sela do parabolóide.

4 – Elipse/Elipsóide

4.1 – Elipse

A aplicação da elipse é frequentemente usada na Arquitetura, no Design e na Engenharia (Figura 25), podendo ser aplicada também em vários assuntos para estudo da matemática e da física.

Figura 25

http://users.prof2000.pt/forma.tic/internet/cfae-arganil/2003/grupo02/pag03.htm

Uma das aplicações concretas da elipse está no sistema solar, uma vez que a órbita dos planetas ao redor do Sol é elíptica. Algumas órbitas são mais "achatadas" do que as outras, pelo fato das órbitas serem elipses distintas (com excentricidades distintas). A órbita da Terra, por exemplo, é quase circular, enquanto a de Netuno é mais "achatada" (veja Figura 26). O eixo maior apresenta dois pontos: o periélio e o afélio, que correspondem às distâncias mínimas e máximas da Terra ao Sol, respectivamente.

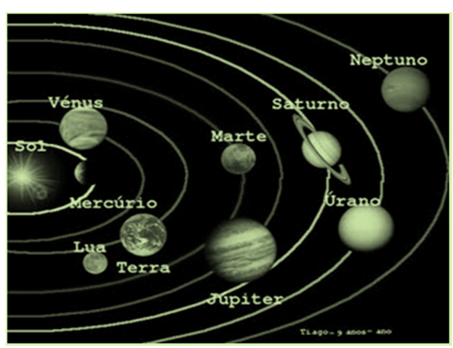

Figura 26

http://portaldoprofessor.mec.gov.br/fichaTecnicaAula.html?aula=13287

Excentricidade e *de uma elipse é a razão entre a distância focal da elipse e seu eixo maior.*

$$e = \frac{d}{a}$$

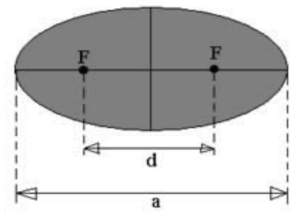

Figura 27

http://educador.brasilescola.com/estrategias-ensino/elipse-excentricidade.htm

Podemos também observar outra aplicação óptica da elipse, que pode ser encontrada no dispositivo de iluminação dos dentistas. Este consiste num espelho com a forma de um arco de elipse e numa lâmpada que se coloca no foco mais próximo. A luz da lâmpada é concentrada através do espelho no outro foco, que é ajustado pelo dentista para estar num ponto dentro da boca de seu paciente.

Como definição, elipse é o conjunto de pontos em um plano cuja soma das distâncias a dois pontos fixos F_1 e F_2 é uma constante. Esses dois pontos são chamados "focos". Podemos pensar na construção da elipse pelo "método do jardineiro", da seguinte forma: o jardineiro ata as pontas de um fio a duas estacas. A distância entre as duas estacas é menor que o comprimento do fio e mantendo o fio esticado, vai rodando e com a ajuda de outra estaca desenha uma elipse no chão (Figura 28).

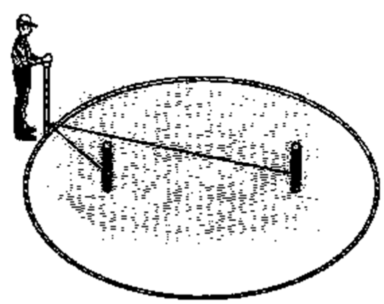

Figura 28

http://www.google.com.br/imgres?q=elipse+aplica%C3%A7%C3%B5es&hl=pt-

Para determinar uma equação para a elipse, considere por exemplo uma elipse com focos F_1=(c,0) e F_2= (-c,0), como mostra a Figura 29:

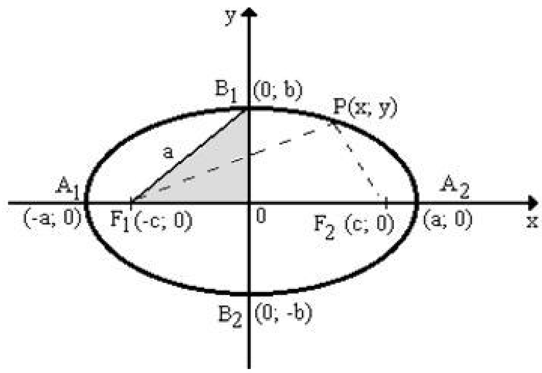

Figura 29

www.algosobre.com.br/matematica/geometria-analitica-elipse.html

Pela definição da elipse, a soma das distâncias a F_1 e F_2 é constante. Logo, fazendo a soma das distâncias de um ponto (x,y) do plano a (c,0) e (-c,0) igual à constante 2a, temos:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + \sqrt{(x+c)^2 + y^2} = 2a$$

que é a equação da curva. Vamos simplificar esta equação, isolando um dos radicais e elevando ao quadrado:

$$(\sqrt{(x+c)^2 + y^2}\,)^2 = (2a - \sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,)^2$$

$$(x+c)^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (-\sqrt{(x-c)^2 + y^2}\,)^2$$

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + (x-c)^2 + y^2$$

$$x^2 + 2xc + c^2 = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2} + x^2 - 2xc + c^2$$

$$4xc = 4a^2 - 4a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}$$

$$xc = a^2 - a\sqrt{(x-c)^2 + y^2}.$$

Isolando o radical, obtemos:

$$\sqrt{(x-c)^2 + y^2} = \frac{-xc + a^2}{a}$$

e elevando os dois lados ao quadrado:

$$(x-c)^2 + y^2 = \frac{a^4 - 2a^2xc + x^2c^2}{a^2}$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = a^2 - 2cx + \left(\frac{c}{a}\right)^2 x^2$$

$$x^2 + y^2 = a^2 - c^2 + \left(\frac{c}{a}\right)^2 x^2$$

Observando o triângulo da elipse (veja triângulo retângulo hachurado na Figura 29) e usando o Teorema de Pitágoras temos:

$$a^2 = b^2 + c^2$$

Substituindo na equação:

$$x^2 + y^2 = b^2 + \frac{(a^2 - b^2)}{a^2} x^2$$

$$x^2 + y^2 = b^2 + x^2 - \frac{b^2}{a^2} x^2$$

$$\frac{b^2}{a^2} x^2 + y^2 = b^2.$$

Dividindo a equação por b^2, obtemos a equação da elipse:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

4.2 – Elipsóide

As superfícies quádricas elipsóides têm propriedades refletoras usadas por exemplo para criar condições acústicas especiais em auditórios, teatros e igrejas (Figura 30).

Figura 30

http://aesimoveis.wordpress.com/2012/01/11/conheca-as-construcoes-mais-inusitadas-do-mundo/

A equação do elipsóide (Figura 31) é dada por

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1 , \quad a, b, c > 0,$$

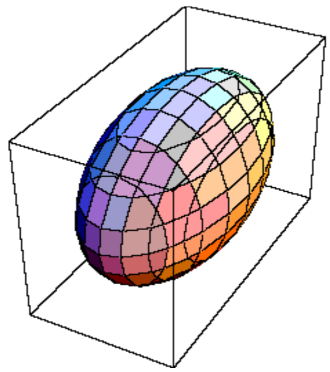

Figura 31

http://www.mat.ufmg.br/~syok/cursos/mat039/quadricas/quadricas.htm

Da equação, vemos que todos os cortes do elipsóide por planos paralelos aos planos coordenados são elipses:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{(interseção com o plano xy (z=0)),}$$

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1, \quad \text{(interseção com o plano xz (y=0)),}$$

$$\frac{z^2}{c^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1, \quad \text{(interseção com o plano yz (z=0)).}$$

Se considerarmos uma elipse específica, por exemplo, $\frac{x^2}{4} + \frac{y^2}{4} + \frac{z^2}{9} = 1$, um corte pelo plano y=1 (paralelo ao plano xz), obtemos uma outra elipse de equação

$$\frac{x^2}{3} + \frac{z^2}{27/4} = 1.$$

O elipsóide tem uma versão com maior simetria, que é uma superfície de revolução: o esferóide, que ocorre quando dois dos três semi-eixos são iguais. Neste caso, os cortes do elipsóide por planos paralelos aos planos coordenados são círculos. Distinguimos três tipos de esferóides (Figura 32):

- - o alongado (ou *prolato*), com a = b < c

-o achatado (ou *oblato*), com a = b > c

- a esfera, com a = b = c.

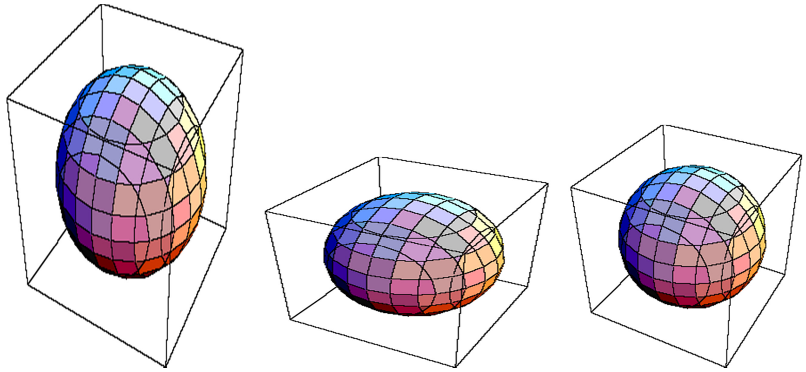

Figura 32: Da esquerda para a direita: prolato, oblato e esfera.

http://www.mat.ufmg.br/~syok/cursos/mat039/quadricas/quadricas.htm

5 – Hipérbole/Hiperbolóide

5.1 – Hipérbole

Podemos observar aplicações da hipérbole em diversas áreas profissionais como na óptica, na mecânica celeste, na mecânica dos fluidos, na engenharia e na arquitetura. Na óptica observamos o chamado telescópio de reflexão que é constituído por dois espelhos, um maior (chamado primário), que é parabólico, e outro menor, que é hiperbólico.

Figura 33: Telescópio de reflexão

http://www.portaldoastronomo.org/tema_pag.php?id=24&pag=4

Na Mecânica Celeste, a trajetória de um cometa, dependendo de sua velocidade, pode descrever uma órbita elíptica, parabólica ou hiperbólica. Um exemplo de utilização da hipérbole em construções pode ser vista em Brasília e no planetário de St. Louis, nos Estados Unidos (Figura 34).

Figura 34: Planetário de St.Louis(USA)

http://www.digistardomes.org/worldlist/indexp2.html

A hipérbole é definida como o conjunto de todos os pontos em um plano cujo módulo da diferença entre dois pontos fixos F_1 e F_2 (os focos) é uma constante.

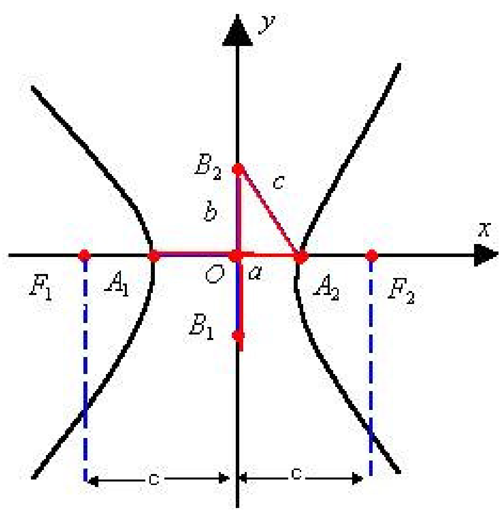

Figura 35

http://1.bp.blogspot.com/_8q-uF6ElHVY/TBz09WQtifI/AAAAAAAAAUw/gkEVxnhC_CM/s320/hiperbole.jpg

Determinamos a equação da hipérbole tomando o eixo x da figura acima ao longo do segmento F_1F_2 e o eixo y como mediatriz desse segmento. Colocando 2c como a distância entre eles, então F_1=(-c,0) e F_2=(c,0) e então:

$$\sqrt{(x+c)^2+y^2}-\sqrt{(x-c)^2+y^2}=\pm 2a$$

Isolando o radical, elevando ao quadrado e simplificando, obtemos:

$$(\sqrt{(x+c)^2+y^2}\,)^2 = (\pm 2a + \sqrt{(x-c)^2+y^2}\,)^2$$

$$(x+c)^2+y^2 = 4a^2 \pm 4a\sqrt{(x-c)^2+\ y^2}\ +\ (\ \sqrt{(x-c)^2+y^2}\,)^2$$

$$x^2 + 2xc + c^2 + y^2 = \ 4a^2 \pm \ 4a\sqrt{(x-c)^2+\ y^2}\ +\ (x-c)^2+y^2$$

$$x^2 + 2xc + c^2 = \ 4a^2 \pm \ 4a\sqrt{(x-c)^2+\ y^2}\ +\ x^2\ -\ 2xc\ +\ c^2$$

$$4xc = 4a^2 \pm \ 4a\sqrt{(x-c)^2+\ y^2}$$

$$xc = a^2 \pm \ a\sqrt{(x-c)^2+\ y^2}\,.$$

Isolando o radical mais uma vez, obtemos:

$$\pm\sqrt{(x-c)^2+\ y^2} = \ \left(\frac{xc-a^2}{a}\right)$$

e elevando os dois lados ao quadrado, temos:

$$(x-c)^2+\ y^2 = \ \pm\left(\frac{a^4-2a^2xc+x^2c^2}{a^2}\right)$$

$$x^2 - 2cx + c^2 + y^2 = \pm\left(\ a^2 - 2cx + \left(\frac{c}{a}\right)^2 x^2\ \right)$$

$$x^2 + y^2 = a^2 - c^2 \ + \left(\frac{c}{a}\right)^2 x^2 \qquad (6)$$

Observando o triângulo retângulo da hipérbole (veja Figura 35) e usando o Teorema de Pitágoras, temos:

$$c^2 = \ a^2 + \ b^2$$

Substituindo na equação (6):

$$x^2 + y^2 = \left(c^2 - \ b^2 - c^2 + \ \frac{(a^2+b^2)}{a^2}\ x^2\right)$$

$$x^2 + y^2 = \ -b^2 + \ x^2 + \frac{b^2}{a^2}\ x^2$$

$$y^2 = b^2 + \frac{b^2}{a^2}\ x^2$$

$$y^2 = \ b^2\left(1 + \ \frac{x^2}{a^2}\right)$$

resultando na equação da hipérbole:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = 1 \qquad (7)$$

5.2 – Hiperbolóide

A superfície quádrica hiperbolóide é também muito aplicada na arquitetura e na engenharia. Por exemplo, as chaminés das usinas nucleares possuem o formato do hiperbolóide na figura abaixo:

Figura 36

http://www.professores.uff.br/hjbortol/disciplinas/2005.2/gma06077/index.html

Outro exemplo atual de aplicação do hiperbolóide aparece na odontologia, estendendo-se à medicina, fonoaudiologia e à fisioterapia, através de uma borracha de silicone com forma hiperbólica (veja Figura 38). Essa borracha é um instrumento de mastigação usado como auxiliar na Terapia Ortopédica Funcional dos Maxilares e é atóxica, insípida e inodora. Portanto, o seu uso se estende à área da salivação, que por consequência ajuda na digestão e nutrição, assim como também auxilia na prevenção da cárie dentária.

Figura 37

http://hiperboloide.wordpress.com/category/hb-e-suas-aplicacoes/

Como aplicação de hiperbolóide, temos ainda a Catedral de Brasília, arquitetada por Oscar Niemeyer, construída em uma área circular de 70 metros de diâmetro, de onde se elevaram 16 colunas de concreto (que pesam 90 toneladas), cada uma com secção parabólica, formando a catedral em formato hiperbolóide (Figura 39).

Figura 38: Catedral de Brasilia

http://2014brasilia.blogspot.com.br/2010/09/catedral.html

Matematicamente, um hiperbolóide é uma superfície quádrica de três dimensões, que pode ser descrita por exemplo pela equação:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1, \tag{7}$$

representando neste caso um hiperbolóide de uma folha (Figura 40), com eixo de simetria sobre o eixo z.

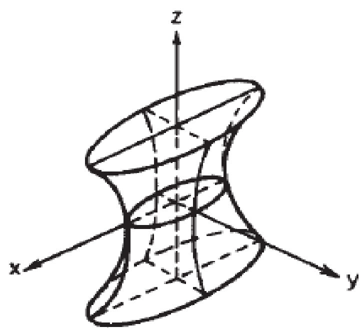

Figura 39

http://fatosmatematicos.blogspot.com.br/2011/12/superficies-quadricas-o-hiperboloide-de.html

ou pela equação:

$$-\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}-\frac{z^2}{c^2}=1 \qquad (8)$$

que representa um hiperbolóide de duas folhas (Figura 41), com eixo de simetria sobre o eixo y.

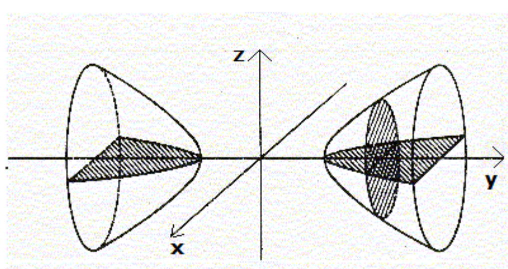

Figura 40

http://fatosmatematicos.blogspot.com.br/2012/03/superficies-quadricas-o-hiperboloide-de.html

Note que se fizermos cortes no hiperbolóide de duas folhas, por exemplo pelo plano z=0, obteremos a hipérbole:

$$\frac{y^2}{b^2}-\frac{x^2}{a^2}=1.$$

Fazendo cortes na equação do hiperbolóide de uma folha, por exemplo, pelos planos y=0 ou x=0, obtemos também hipérboles da forma:

$$\frac{x^2}{a^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1 \quad \text{ou} \quad \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 1,$$

representadas nas cores verde e azul na Figura 41:

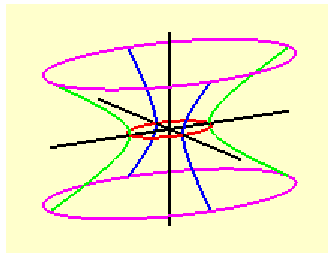

Figura 41

http://www.mat.ufrgs.br/~calculo/quadrica/hiper1.htm

Também, fazendo cortes por dois planos horizontais e igualando z= ± k, formam-se as elipses de equações:

$$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1 + \frac{k^2}{c^2}$$

para qualquer constante k. Na Figura 41, a elipse de cor vermelha representa a interseção com o plano z=0.

5 – Conclusão

O objetivo desse trabalho foi o de relacionar o estudo de cônicas e quádricas, com suas aplicações na prática, ou seja, entender um pouco mais sobre a construção desses elementos matemáticos e, ao mesmo tempo, observar de quais formas eles aparecem em nossa vida cotidiana, como o homem pode utilizá-los, transformando o mundo em que vive, projetando e construindo objetos, máquinas, utensílios, edifícios, etc.

Além disso, este trabalho pretende ser de leitura acessível a alunos tanto do ensino médio quanto do superior, necessitando apenas de um conhecimento básico sobre derivadas. Espera-se que, unindo a teoria com as aplicações, seja possível despertar uma maior atenção dos alunos para o estudo das cônicas e quádricas.

6 – Referências Bibliográficas

[1] ANTON, Howard. *Cálculo: um novo horizonte*. Porto Alegre: Bookman, 2000. 6. ed.

[2] BARBOSA, João Lucas Marques. *Geometria Euclidiana Plana.* Rio de Janeiro: SBM, 2004. 6 ed.

[3] COMBETTE, E. *Cours de Géométrie Élémentaire*. Paris: Félix Alcan, 1893. 4. ed.

[4] EDWARDS JR.; PENNEY, E. David. *Cálculo com Geometria Analítica.* São Paulo: Pretence- Hall do Brasil Ltda,1994.

[5] EVES, Howard. *Introdução à história da Matemática*. Campinas: ed. UNICAMP, 2004. Trad. Hyogino H. Domingues.

[6] LEITHOLD, Louis. *Cálculo com Geometria Analítica*. São Paulo: Habra, 1994. 3 ed. v. 2.

[7] PAVANELLO, Maria Regina. *O abandono do ensino de geometria no Brasil: causas e conseqüências.* Campinas, 1989. (Dissertação do Mestrado).

[8] SANTOS, Reginaldo J. *Matrizes, Vetores e Geometria Analítica.* Belo Horizonte: Imprensa Universitária da UFMG, 2001.

[9] POGORELOV, Aleksei Vasil'evich. *Geometria elemental*. Moscu: Mir, 1974.