UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS

INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS

SISTEMAS DE NUMERAÇÃO: JOGOS E APLICAÇÕES

VERA LUCIA FERNANDES DE SOUZA

BELO HORIZONTE

JUNHO 2013

VERA LUCIA FERNANDES DE SOUZA

SISTEMAS DE NUMERAÇÃO: JOGOS E APLICAÇÕES

Monografia apresentada ao Programa de Pós-graduação em Matemática do Departamento de Matemática da UFMG, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Especialista em Matemática para Professores do Ensino Básico.

Professor Orientador: Alberto Berly Sarmiento Vera

BELO HORIZONTE

UFMG

JUNHO 2013

SUMÁRIO

RESUMO

O presente trabalho apresenta uma relação entre os sistemas de numeração posicionais decimais e aqueles sistemas de bases não decimais. Essa relação se constitui a partir das referências sobre a escrita dos numerais e ao modo de realizar as operações básicas, apontando as comparações que permitem visualizar que os princípios de construção desses sistemas numéricos possuem semelhanças entre si. Para isto, primeiramente, fizemos um apanhado histórico a respeito da construção dos sistemas de numeração em várias civilizações para que pudéssemos entender a origem destes sistemas e perceber o porquê da prevalência do nosso sistema de numeração decimal. Fizemos um estudo comparativo entre os sistemas de numeração posicionais de bases quaisquer e o decimal. Com o objetivo de explorar este conhecimento em sala e para facilitar a compreensão dos sistemas numéricos pelos alunos, incluímos jogos, atividades e desafios que podem ser solucionadas aplicando conhecimentos sobre os sistemas de numeração e possibilitando aos discentes um aprendizado mais efetivo.

SUMMARY

This paper presents a relation between the decimal positional numbering systems and those not decimal bases systems. This relation is based on the references on the numerals writing and the way to perform basic operations, pointing out the comparisons that permit you see that the principles of construction of these numerical systems have similarities with each other. For this, firstly, we made a historical overview about the construction of the numbering systems in various civilizations for us to understand the origin of these systems and realize why the prevalence of our decimal system. We made a comparative study of the positional number systems of any bases and decimal. In order to explore this knowledge in the classroom and to facilitate understanding of the number system by students, we included games, activities and challenges that can be solved by applying knowledge of the numbering systems and enabling students to effective learning.

INTRODUÇÃO

Quando nos deparamos com atividades ou problemas que envolvem o conhecimento sobre sistemas de numeração que não seja o decimal, é que percebemos o quanto precisamos aprofundar neste conhecimento. Foi a busca por esta necessidade de entender melhor sobre a construção de sistemas de numeração que não fossem decimais e, principalmente, as semelhanças que existem ou não, entre esses e o sistema decimal, que nos impulsionou a pesquisar e escrever sobre o tema. O interesse despertado ao encontrar livros, textos ou atividades e problemas nos quais se discutem o significado teórico e prático dos sistemas de numeração, permitiu a oportunidade de estudar e conhecer como foram construídos, historicamente e, mais especificamente, na matemática, os sistemas de numeração. A partir daí, perceber como eles influenciaram o processo de organização dos registros das quantidades. Foram esses processos criados para organizar o registro das contagens e, ao mesmo tempo, a sistematização dos cálculos aritméticos que permitiram o desenvolvimento das ciências exatas. Ao aprofundar nosso estudo nesse conteúdo, percebemos como ele pode levar a uma compreensão mais efetiva dos algoritmos operacionais utilizados nos sistemas numéricos em qualquer base, que o torna extremamente enriquecedor para o aprendizado e o desenvolvimento do raciocínio matemático.

Iniciamos com um breve histórico da invenção dos numerais – símbolos para representar números – em algumas das civilizações antigas mais importantes. Em seguida, retomaremos o estudo sobre o sistema numérico decimal – que se tornou predominante em quases todas as culturas atuais. Comparativamente, aproveitaremos a temática para estudar e compreender melhor os sistemas numéricos que não são de base decimal. Mostraremos como construir os padrões de representação numérica de acordo com a base considerada para obter um sistema numérico. Apresentaremos como realizar as operações aritméticas básicas: adição, subtração, multiplicação e divisão. Descreveremos como fazer a conversão de numerais de uma base para outra. Ainda, proporemos jogos que tenham como princípio estes sistemas numéricos e que ajudem na sua compreensão e na sua aprendizagem, permitindo o desenvolvimento do gosto pela investigação das relações numéricas em jogos ou desafios envolvendo essa temática.

Os sistemas numéricos são introduzidos de forma restrita na Escola, ou seja, focado no sistema decimal e, somente nas séries iniciais e, quando é retomado continua com a restrição citada anteriormente. Os professores, durante a formação e mesmo no desenrolar do seu dia a dia na sala de aula, não têm oportunidade de aprofundar o estudo sobre os sistemas numéricos de bases não decimais e a relação entre estes e o sistema numérico decimal e, muitas vezes não vislumbram como este conteúdo pode ser extremamente rico e importante na compreensão do próprio sistema decimal e na resolução das operações básicas e como ele pode ser trabalhado com outras apresentações, inclusive de forma lúdica, e serem utilizados para planejar atividades para a sala de aula. O aprofundamento ou um estudo mais detalhado deste tópico permite ampliar as possibilidades de desenvolver atividades como as que proporemos neste trabalho. Isto mais uma vez contribui para a diversificação de metodologias e das práticas de aprendizagem da matemática.

Capítulo 1

Historia dos Sistemas de Numeração

Neste capítulo, na primeira seção, vamos esboçar parte da história da invenção dos numerais, isto é, símbolos usados para representar números e da criação dos sistemas de numeração de algumas antigas civilizações. Na segunda seção, faremos um estudo mais detalhado do nosso sistema de numeração decimal.

1.1 – Introdução

A necessidade de contar objetos e coisas, de representar quantidades e ou números sempre esteve presente. Nos primórdios, a contagem era realizada através de marcas em ossos ou pedaços de madeira e de pedras ou utilizando-se dos dedos das mãos e dos pés. Foi contando objetos com outros objetos que a humanidade começou a construir o conceito de número.

A partir do momento em que o homem começou a se organizar socialmente e começaram a surgir as primeiras cidades, era necessário, além de registrar quantidades, resolver problemas do dia a dia e efetuar cálculos, a partir do desenvolvimento das relações comerciais, de forma rápida e precisa. Surgiram, então, os símbolos – desenhos que representam quantidades de objetos – e que atendiam a estas necessidades daqueles primeiros povoados. Dados históricos revelam que há 5.000 anos antes da era cristã, quando começaram a ocorrer a apropriação de sinais para a escrita, já existiam modelos de registros nas comunidades locais que esboçavam a escrita dos numerais – símbolos que representam números. Os primeiros povos de que se tem notícia, que foram os egípcios e sumérios, já faziam seus registros em pedras, blocos de argila, madeira, papel. Com o desenvolvimento da capacidade de se estabelecer relações comerciais entre si e entre outros povos, de estudar os fenômenos naturais, de observar movimentos dos planetas e estrelas, de plantar e armazenar alimentos pela agricultura, de construir monumentos como as pirâmides egípcias, eram notórias a sistematização destes registros e a criação de símbolos que pudessem facilitar a comunicação dos dados numéricos.

Desta maneira, apresentaremos, historicamente, como surgiram alguns dos diversos sistemas de numeração e o motivo pelo qual prevalece o sistema atualmente adotado quase que no mundo todo.

1.1.1 - Numerais Egípcios:

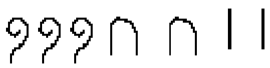
Os egípcios foram um dos primeiros povos cujos registros encontrados em papiros – o mais famoso é o papiro do Ahmes – revelam a criação de símbolos para representar os números. As atividades relacionadas à agricultura, a construção das pirâmides impulsionaram a criação de sistema de contagem, por volta de 4.000 anos atrás.

Sete símbolos eram empregados e eram escritos de maneira simples, como veremos a seguir:

Símbolo egípcio	descrição	nosso número
	bastão	1
	calcanhar	10
	rolo de corda	100
	flor de lótus	1000
	dedo apontando	10000
	peixe	100000
	homem	1000000

Figura 1

Observe como eles escreviam o número 322:

 ou seja, 100 + 100 + 100 + 10 + 10 + 1 + 1

A cada agrupamento de 10 símbolos era criado um novo símbolo para representar as quantidades utilizando este sistema de numeração, como mostra a Figura 2.

Mas é evidente notar que este sistema se baseava em sete símbolos básicos como mostra a Figura 1 acima.

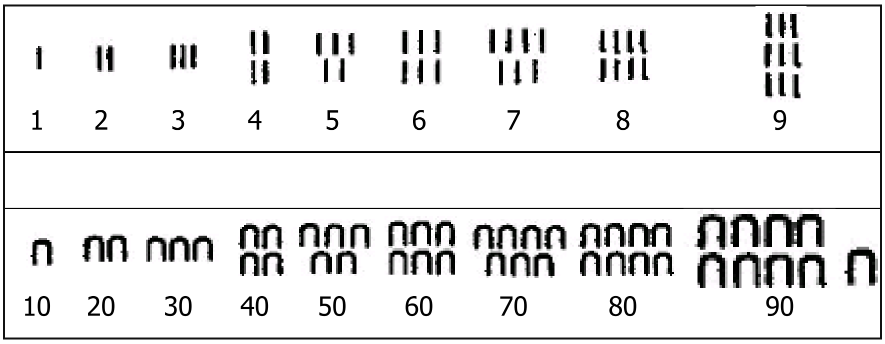


Figura 2

Assim, temos aqui mais um exemplo de escrita do número 3577 utilizando o sistema egípcio:

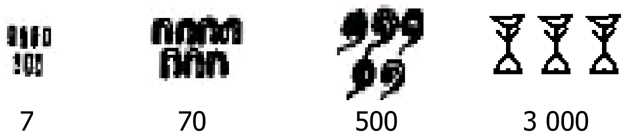


Figura 3

Entretanto, não havia ordem a ser seguida para escrever os símbolos. O sistema egípcio era baseado em agrupamentos de 10, não tinha símbolo para o zero, não se utilizava do valor de posição, como nosso sistema decimal e era difícil de ser usado para representar números grandes ou números como 999. Os egípcios conseguiam efetuar cálculos, já representavam frações, mas pela quantidade de símbolos algumas operações matemáticas se tornavam impraticáveis.

1.1.2 - Numerais Sumérios e Babilônicos:

Os sumérios, que viviam numa região chamada Babilônia, que pertence hoje ao Oriente Médio, contemporaneamente aos egípcios, desenvolveram uma civilização próspera, baseada na agricultura e no desenvolvimento da astronomia. Foram precursores da escrita cuneiforme, em forma de cunha, que era registrada em blocos de argila cozidos ou secos ao sol.

O sistema de numeração dos babilônios utilizava a ideia de valor de posição, mas não tinha nenhum símbolo para o zero e a contagem se baseava em 60, que é a combinação de dois sistemas de contagem manuais utilizados por estes povos: o de base 5 (dedos das mãos) e o de base 12 (falanges dos dedos). O símbolo de cunha vertical podia representar 1, 60 ou 60^2, o que dificultava o entendimento do valor representado. Somente muito mais tarde, eles criaram um símbolo para representar a quantidade 10, já que quantidades menores que 60 precisavam ser representadas e, também para o zero. Nas figuras 4 e 5 podemos ver exemplos de numerais escritos pelos babilônios.

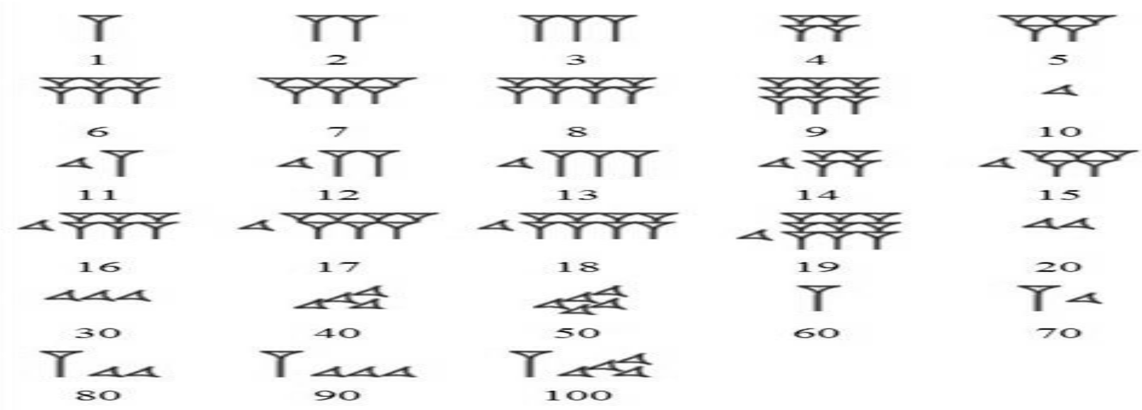


Figura 4

Vejam como representavam o número 800 na escrita cuneiforme:

	30 8	60 50 7	180 40 1	240 40 1	120 10 9
4	38	117	221	281	139

Figura 5

1.1.3 - Numerais Romanos

O império romano, cujo ápice se deu em 100 d. C., necessitava de pessoas hábeis em cálculos. Os romanos possuíam um sistema de numeração, ainda hoje conhecido por nós, mas que não facilitava os cálculos. São sete símbolos utilizados conforme Figura 7.

Inicialmente a numeração romana foi baseada no princípio da adição, como mostra o exemplo:

MMMDCCCCXXXXVIIII = 3 949

Numa fase posterior, de forma a simplificar a escrita de numerais, foi introduzida uma notação seguindo o princípio subtrativo, no qual o símbolo de valor menor se coloca à esquerda do símbolo de valor maior. Neste caso, o valor representado é dado pela subtração dos seus valores. Assim sendo, a representação do número anterior passou a ser: MMMCMXLIX.

I	V	X	L	C	D	M
1	5	10	50	100	500	1000

Figura 7

Para números maiores, os romanos adotaram a representação de colocar um traço horizontal sobre as letras que representam esses números. Um traço multiplicava o número representado abaixo dele por 1.000. Dois traços sobre a letra multiplicava seu valor por um milhão. Observe os exemplos na figura 8:

$$\overline{X} = 10*1.000 = 10.000$$
$$\overline{LXX} = 70*1.000 = 70.000$$
$$\overline{\overline{XX}} = 20*1.000.000 = 20.000.000$$

Figura 8

Para realizar os cálculos, os romanos utilizavam o ábaco e escreviam os resultados com os números romanos.

O sistema de numeração romano era baseado no agrupamento de 10 em 10, já que os símbolos para números grandes são múltiplos de 10, isto é, L = 5 x 10, mas não utiliza a ideia de valor de posição para os símbolos. Originalmente, o numeral romano para 5 era o esboço da mão que foi simplificado para um V. As operações de adição e subtração são fáceis de resolver com numerais romanos, mas multiplicação e divisão não. Curiosamente, estes números foram utilizados na Europa até o início do século XV.

1.1.4 - Numerais Indo arábicos

Por volta de 300 a. C., os hindus, povos que viviam no norte da Índia, possuíam um conjunto de 9 numerais, sem o símbolo para o zero, faziam pouco uso do valor posicional mas a base da contagem era 10. Apenas no final do século VI, é que foi introduzida a ideia de criar um símbolo para uma posição vazia - o símbolo para zero - pelo matemático chamado Bhaskara. A partir desta época, podemos considerar que os hindus construíram um sistema de numeração de 10 símbolos em que usavam o valor posicional com o algarismo das unidades ainda representado à esquerda, o que logo em seguida foi modificado.

Os hindus passaram a representar os números de acordo com a ordem em que ocupavam e faziam os cálculos de maneira bem semelhante ao que é hoje utilizado.

Por volta de 660 d. C., os árabes conquistaram tudo, desde a Arábia até a África do Norte e Espanha e não destruíram as culturas locais. Bagdá se tornou centro da cultura árabe, onde se estudava astronomia hindu e ciência grega. Por volta de 700 d. C., Al Khowarizmi, um matemático que estudou os livros de matemática da Índia, traduziu para a linguagem árabe e apresentou, num livro escrito por ele, o cálculo hindu e o sistema de numeração criado por eles.

Podemos dizer que herdamos os numerais dos hindus, pois em seu livro: ”Sobre a arte de calcular”, Al Khowarizmi detalha como, a partir dos 10 símbolos que incluíam o zero, se organizava o sistema de numeração hindu. Apresenta a ideia de ordem na representação numérica e a mudança de valor pela troca da posição do símbolo, a representação das quantidades maior que 10 e o agrupamento em classes na leitura dos números. O termo algarismo se originou do nome do Matemático Al Khowarizmi e os símbolos apresentados são hoje denominados algarismos indo arábicos, já que os árabes absorveram, refinaram e aumentaram a matemática e a astronomia hindu antes de as transmitirem à Europa.

Na figura 6, temos representados os primeiros registros numéricos dos indianos e como os algarismos indianos foram se modificando pelos árabes.

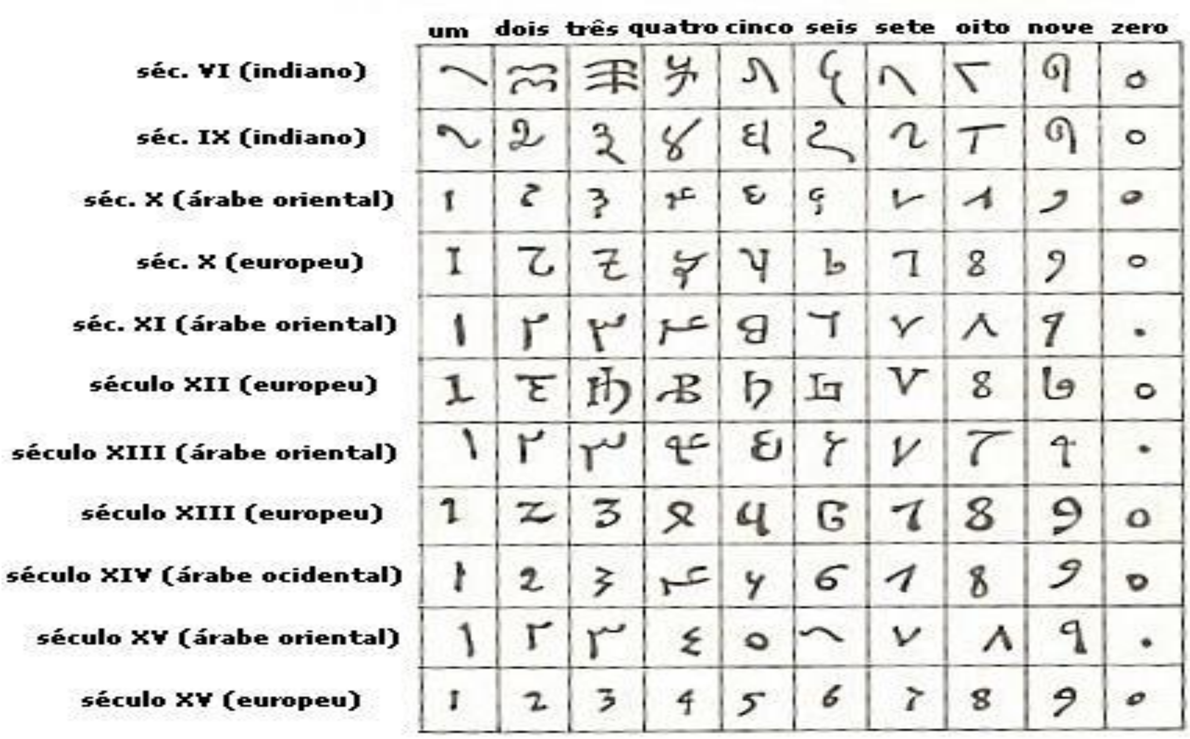


Figura 6

A obra de Al Khowarizmi foi traduzida para o latim pelo monge inglês Adelard, no século XII. Foi essa tradução latina que trouxe os numerais indos-arábicos para a Europa. Mas somente a partir de 1600, os numerais indos arábicos passaram a fazer parte da civilização europeia que até então se utilizava do sistema de numeração romana. O sistema de numeração decimal tornou-se predominante e adotado em grande parte da civilização mundial.

1.2 - Sistema de Numeração Decimal

Uma diferença básica que categoriza os diversos sistemas criados pela humanidade é o fato de existirem sistemas posicionais e não posicionais. Nos sistemas posicionais o valor ou o peso de cada algarismo depende do lugar que ele ocupa na escrita numérica. Já os sistemas não posicionais indicam aquelas representações nos quais a posição recíproca dos constituintes não é relevante. Por exemplo, temos o sistema romano: o número LXXXVIII representa o número 88, o valor do V = 5 ou do X = 10 não depende da posição em que se encontram nesta escrita. Os numerais romanos ainda encontrados nos mostradores de relógios ou para enumerar os séculos, não são utilizados em Matemática, pois não asseguram uma economia de símbolos utilizados na representação e não facilitam as operações.

Os sistemas posicionais permitem que com um número de símbolos definidos possamos representar qualquer quantidade numérica. Por exemplo, no número decimal 222, o algarismo 2 representa quantidades diferentes dependendo da posição em que se encontra de modo que na primeira posição, o 2 (contando da direita para a esquerda) representa duas unidades, na segunda posição duas dezenas ou vinte unidades e na terceira posição duas centenas ou 200 unidades. É desta consideração que se aplica o termo posicional aos sistemas desta categoria. A outra grande vantagem é a facilidade de realizar as operações aritméticas entre os números.

Primeiramente, apresentaremos e faremos um estudo detalhado do nosso sistema decimal, para o qual somos apresentados logo no início da aprendizagem de números e operações nas séries iniciais da escola. Foi como vimos um sistema criado pelos hindus e divulgado pelos árabes e representa um grande passo para o desenvolvimento da matemática. Esse sistema numérico associa duas ideias básicas: o valor posicional e a base 10. A razão para a preponderância do sistema decimal extrapola a questão da matemática e pode ser explicada pelo fato que as mãos, como um dos primeiros instrumentos de representação de quantidades, possuem dez dedos.

Neste sistema, como já estudamos, historicamente, a grande contribuição dada ao formato de como representamos a contagem dos objetos é o fato de que, para representar esta contagem, inclusive quando não tínhamos nenhum objeto a representar, cujo símbolo é dado pelo 0 (zero), criamos dez símbolos, que são assim representados na atualidade: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8 e 9.

Ao longo dos últimos milênios, ocorreu uma evolução e uma unificação na escrita dos dez símbolos utilizados nos sistema de numeração decimal ou de base 10 e permitiu a disseminação da ideia central de utilização de apenas dez símbolos para a representação de qualquer quantidade numérica.

O nosso sistema decimal, como o próprio nome diz, utiliza a base 10 ou agrupamentos de 10 em 10 para representar a contagem de objetos. Assim, dada uma coleção de objetos, podemos escrever quantos grupos de 10 podem ser formados. Por exemplo, se temos trinta e oito objetos, como mostra a figura 9, observamos que formamos três grupos de 10 e mais oito unidades.

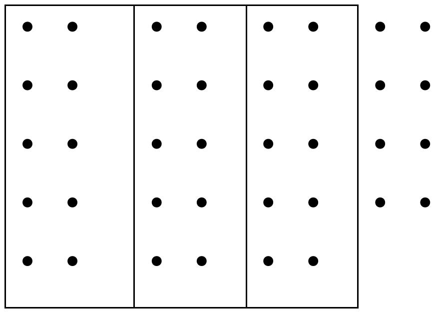


Figura 9

Representamos esta quantidade utilizando o numeral 38, o algarismo 8, da direita para a esquerda, representa 8 unidades e o numero 3, à esquerda, representa três agrupamentos com 10 objetos e cada agrupamento de dez objetos é chamado de dezena.

Quando trabalhamos com quantidades maiores, por exemplo, o número 117, ao formar os grupos de 10, têm-se, então, onze grupos de 10 mais sete unidades. Os onze grupos de 10 podem ser reagrupados, tomando a base 10 novamente como parâmetro para realizar os agrupamentos e, temos dez grupos de 10 e mais um grupo de 10, ou melhor, notamos que formamos um grupo de 10   10, um grupo de 10 e sete unidades. Os grupos de 10   10 ou grupos de dez dezenas são chamados de centenas. Portanto, a representação de 117 possui 1 centena,1 dezena e 7 unidades. Veja a figura 10:

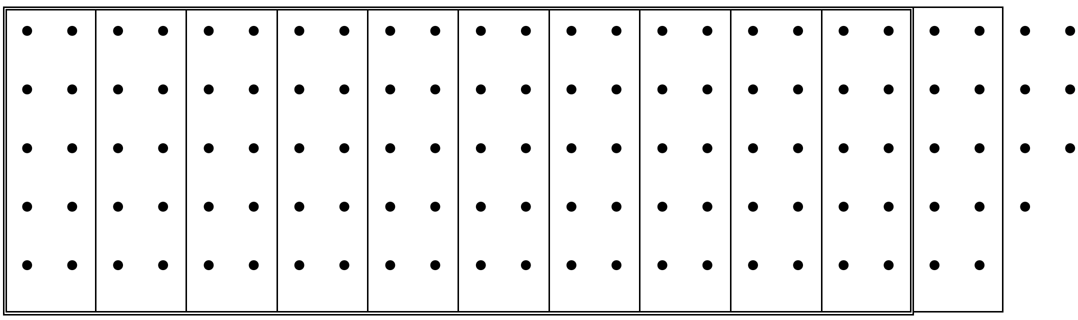


Figura 10.

Quanto maiores as quantidades a ser representada maior a necessidade de criar grupos de 10 dos agrupamentos anteriores de modo que cada posição à esquerda representa um valor 10 vezes maior. Mais a frente, mostraremos no quadro de valor posicional como representamos e nomeamos os grupos que vão sendo formados a partir desta orientação.

Escrevemos toda e qualquer quantidade combinando os dez símbolos de modo que a posição ocupada pelo dígito na representação numérica lhe confere um valor diferente.

Vejamos alguns exemplos:

Observe o valor do símbolo 6 em cada número:

53**6** $\longrightarrow$ vale 6 unidades

2 5**6**2 $\longrightarrow$ vale 60 unidades ou 6 dezenas

2 **6**80 000 $\longrightarrow$ vale 600 000 unidades ou 6 centenas de milhares

A necessidade da criação do valor de posição surgiu quando tínhamos que representar numericamente quantidade com mais de nove objetos. Quando contamos dez objetos, por exemplo, ao agrupá-los na base decimal, formamos 1 grupo de dez. Para representar esta quantidade sem criar nenhum outro símbolo, além daqueles já conhecidos, fazemos a combinação de modo que a representação de dez objetos seja dado por 10 que significa 1 grupo de dez ou 1 dezena e 0 unidades. Quando temos que representar até nove objetos é necessário um dígito ou algarismo também chamado de ordem. A partir de dez objetos repetiremos os símbolos, acrescentando dígitos na representação numérica, à esquerda, segundo uma combinação ordenada destes dígitos, conforme veremos na figura 11.

Notamos nesta figura que, esgotada a contagem com representação de um dígito, que aparecem escritos na forma 01 = 1, 02 = 2, 03 = 3,..., 09 = 9, continuaremos a escrita começando do algarismo 1 combinando-o, na sequência, com 0, igual a 10, com1, igual a 11, ..., com 9, igual a 19, retomamos agora a partir do algarismo 2, 2 com 0 = 20, 2 com 1 = 21, ..., 2 com 9 = 29 e continuamos assim até esgotar todas as representações com dois dígitos que terminam com 99.

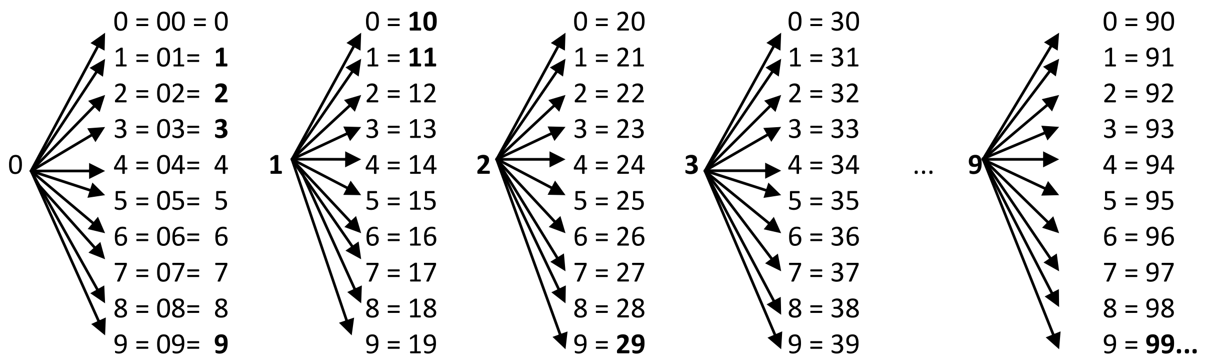


Figura 11

A partir deste ponto, ou seja, terminada as combinações ordenadas de numerais com dois dígitos, combinamos 10 com 0, 100; 10 com 1, 101; ...; até encontrar todas as combinações que possuem três dígitos que tem como última representação o número 999, conforme se apresenta na figura 12.

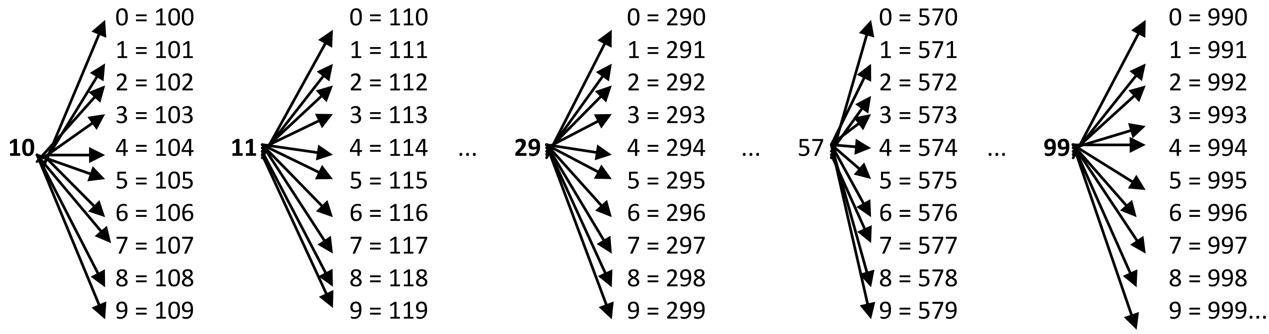


Figura 12

A próxima representação numérica terá 4 dígitos e se inicia com a combinação 100 com 0 = 1000, e assim por diante, de modo que conseguiremos escrever e representar qualquer quantidade utilizando os mesmos símbolos, apenas acrescentando dígitos ou ordens na representação numérica.

No sistema numérico decimal estabelecemos uma organização na representação numérica e nomeamos cada posição ou ordem ocupada pelos algarismos. À medida que temos 3 ordens, este grupo tem a denominação de classe, o que facilita a leitura dos numerais e a nomeação das ordens em números maiores ou com muitos dígitos. No quadro 12, aproveitamos para escrever os nomes das primeiras classes e das ordens e representamos os exemplos de numerais já citados anteriormente: 536, 2.536 e 2.680.000.

... Classe dos milhões		Classe dos milhares			Classe das unidades simples		
...	Grupos de 1.000.000 = 10^6 Unidades de milhão	Grupos de 100.000 = 10^5 Centenas de milhar	Grupos de 10.000 = 10^4 Dezenas de milhar	Grupos de 1.000 = 10^3 Unidades de milhar	Grupos de 100 = 10^2 Centenas simples	Grupos de 10 Dezenas simples	Unidades simples
a)					5	3	6
b)				2	5	6	2
c)	2	6	8	0	0	0	0

Quadro 1

Vejamos:

a) **536** possui 5 grupos de 10 x 10 chamados de centenas, 3 grupos de 10 que são as dezenas e mais 6 unidades representado por 3 dígitos ou 3 ordens na classe das unidades simples. Lê-se: quinhentos e trinta e dois

b) **2.562** têm quatro dígitos ou ordens e, por isto, já possui o algarismo 2 na classe dos milhares, na ordem das unidades de milhar. Lê-se: dois mil quinhentos e sessenta e dois.

c) **2.680.000** têm sete dígitos ou ordens e já ocupa a classe dos milhões. Lê-se: dois milhões seiscentos e oitenta mil.

Tomemos com exemplo o número 2562. Podemos decompor este número levando em conta a posição em que cada algarismo ocupa, observando que cada posição à esquerda representa um valor 10 vezes maior de acordo com a representação abaixo:

2 5 6 2 =

→ 2 unidades = 2 10^0 = 2 unidades simples

→ 60 unidades = 6 10^1 = 6 dezenas simples

→ 500 unidades = 5 10^2 = 5 centenas simples

→ 2000 unidades = 2 10^3 = 2 unidades de milhar

Tomemos o número 1.007.500 como outro exemplo:

1 0 0 7 5 0 0

0 unidades simples = 0 10^0

0 dezenas simples = 0 10^1

500 unidades = 5 centenas simples = 5 10^2

7000 unidades = 7 unidades de milhar = 7 10^3

0 dezenas de milhar = 0 10^4

0 centenas de milhar = 0 10^5

1.000.000 unidades = 1 unidade de milhão = 1 10^6

Observe que o zero é o símbolo chave da representação posicional, pois ele ocupa as posições sem qualquer algarismo naquela posição e nos permite compreender a quantidade representada. Outra observação a fazer aqui é que as classes são separadas por um ponto, a cada conjunto de 3 algarismos escritos da direita para a esquerda.

Observe também que os grupos são os fatores de multiplicação do mesmo valor que é o valor da base, assim o grupo das dezenas são grupos de 10 ou 10^1; o grupo das centenas são grupos de 10 10 = 10^2; o grupo das unidades de milhares são grupos de 10 10 10 = 10^3. Já o grupo das unidades simples é na verdade grupos de 1 e que associando a representação de potência pode ser representado como se segue: 1 = 10^0.

Podemos, também, decompor ou escrever o número utilizando a representação em potências de base 10, onde os coeficientes são valores tomados para fazer os agrupamentos na contagem das quantidades. Desta forma:

a) 536 = 5 10^2 3 10^1 6 10^0
b) 2562= 2 10^3 5 10^2 6 10^1 2 10^0
c) 1007500 = 1 10^6 0 10^5 0 10^4 7 10^3 5 10^2 0 10^1 0 10^0.

Note que basta resolver as operações que se apresentam na expressão numérica formada pelas somas das potências que encontramos a representação numérica original.

Assim, podemos decompor um número decimal $(n_k \ n_{k-1} \ldots n_2 \ n_1 \ n_0)_{10}$ qualquer da seguinte forma:

$(\overline{n_k \ n_{k-1} \ldots n_2 \ n_1 \ n_0})_{10} = n_k . 10^k + n_{k-1} .10^{k-1} + \ldots + n_1 . 10^1 + n_0 .10^0$, de modo que, 0 n_k 9.

1.2.1 – Operações no sistema decimal:

Como já dissemos, estes sistemas posicionais facilitam as operações. A compreensão do valor posição permite o entendimento das operações de adição, subtração, multiplicação e divisão. Assim, nos exemplos que se seguem, utilizando números decimais, podemos comparar os métodos usualmente abreviados de cálculo, à esquerda, com os métodos à direita, que mostram como o valor posição é usado:

a) Adição

a.1)
$$\begin{array}{r} 26 \\ \underline{53} \\ 79 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rr} 20 & 6 \\ \underline{50} & \underline{3} \\ 70 & 9 \end{array}$$

a.2)
$$\begin{array}{r} 346 \\ \underline{529} \\ 875 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rrrl} & 300 & 40 & 6 \\ & \underline{500} & \underline{20} & \underline{9} \\ & 800 & 60 & (10 \quad 5) \\ = & 800 & 70 & 5 = 875 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} {\scriptstyle 1} \\ 3\ 4\ 6 \\ \underline{5\ 2\ 9} \\ 8\ 7\ 5 \end{array}$$

Neste exemplo, podemos ver que o resultado da soma da ordem das unidades: 6 9 = 15, ou seja, 1 dezena e 5 unidades e, pela propriedade associativa da soma, vamos esta 1 dezena às dezenas somadas: 2 4 que resulta 7 dezenas, obtendo o valor correto desta adição. Este fato é sempre explicado com um macete de subir o número 1 para casa anterior àquela que se fez a soma, quando ensinamos a realizar a adição. Entretanto, devemos salientar que esta situação é uma aplicação da propriedade associativa da soma: a (b c) = (a b) c.

b) Subtração

b.1)
$$\begin{array}{r} 728 \\ \underline{413} \\ 315 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rrr} 700 & 20 & 8 \\ \underline{400} & \underline{10} & \underline{3} \\ 300 & 10 & 5 \end{array}$$

b.2)
$$\begin{array}{r} 615 \\ \underline{243} \\ 372 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rrr} 500 & (100 \quad 10) & 5 \\ \underline{(200} & \underline{40} & \underline{3)} \\ 300 & 70 & 2 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rrr} {\scriptstyle 5} & & \\ \cancel{6} & 11 & 5 \\ \underline{2} & \underline{4} & \underline{3} \\ 3 & 7 & 2 \end{array}$$

Neste exemplo, observamos que não é possível tirar 4 dezenas de 1 dezena, então retiramos 1 centena da ordem superior para que possamos subtrair 4 dezena de 11 dezenas, cujo resultado é 7. Ficamos com 5 centenas para subtrairmos 2 centenas e obtemos o resultado correto desta operação. Este fato também é ensinado como macete de tomar emprestado na casa à esquerda sem, muitas vezes, a correta explicação do procedimento.

c) Multiplicação

c.1) $\begin{array}{r} 24 \\ \underline{2} \\ 48 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rr} 20 & 4 \\ \hline & 2 \\ 40\ + & 8 \end{array}$

Aqui utilizamos a propriedade distributiva da multiplicação: a (b c) = a b a c

c.2) $\begin{array}{r} 27 \\ \underline{3} \\ \\ 81 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rr} 20 & 7 \\ \hline & 3 \\ \\ 60 & (20 \quad 1) = 81 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{r} {}^{2} \\ 2\ 7 \\ \underline{3} \\ \\ 8\ 1 \end{array}$

Neste caso, utilizamos a propriedade distributiva da multiplicação e a associativa da adição.

c.3) $\begin{array}{r} 32 \\ \underline{12} \\ 64 \\ \underline{32} \\ 384 \end{array} \quad \Rightarrow \quad \begin{array}{rrr} & 30 & 2 \\ & \underline{10} & \underline{2} \\ & 60 & 4 \\ \underline{300} & \underline{20} & \\ 300 & 80 & 4 \end{array}$

No exemplo acima, vemos que a aplicar a propriedade distributiva da multiplicação ao valor que se encontra na ordem das unidades do segundo fator, 12, escrevemos os resultados a partir da posição das unidades. Já a multiplicação do valor que se encontra na ordem das dezenas, faz com que os resultados sejam escritos a partir da posição das dezenas e assim sucessivamente.

d) Divisão

d.1)

684	2		600	80	4	2		
684	342	⇒	600	80	4	300	4	2
0			0	0	0			

d.2)

38’4	12		300	80’	4	10	2
36	32	⇒	300	60		30	2
24				20	4		
24				20	4		
0					0		

Na divisão começamos a operação com o valor que se encontra na ordem mais à esquerda. Entretanto, se este for menor que o divisor será necessário acrescentar o primeiro dígito à direita para começar a operação. O processo depende também da quantidade de dígitos do divisor, se for dois dígitos devemos começar a divisão por, pelo menos, com os dois primeiros dígitos à esquerda do dividendo ou do número que se quer dividir.

Capítulo 2

Sistemas de numeração em diferentes bases

Vimos no capítulo 1 que a humanidade construiu vários sistemas numéricos se utilizando de diferentes agrupamentos das quantidades. Uma curiosidade que vale acrescentar aqui é a Civilização Maia que possuía um sistema de numeração em que os valores eram escritos com o uso de grupos de 20. Cada um dos sistemas considerados apresentava símbolos, características, regras operacionais próprios. Vimos, detalhadamente, o sistema numérico decimal que é posicional e utiliza a base 10. Neste capítulo, vamos estudar a representação numérica de sistemas posicionais utilizando-se de bases ou agrupamentos das quantidades diferentes de 10.

Para isto, primeiramente, vamos estabelecer que, para facilitar e tomar a representação numérica mais prática, utilizaremos, até onde é possível, os mesmos símbolos da base decimal. Outra consideração a fazer é que para facilitar o nosso estudo vamos apresentar os sistemas de numeração em bases quaisquer através de dois formatos, sendo o primeiro o geométrico e, em seguida o algébrico. No primeiro, que chamaremos de construção geométrica, mostraremos, através de desenhos ou figuras, que é a base considerada no sistema de numeração que formará os agrupamentos para representar numericamente as quantidades nas contagens dos objetos. A ideia de valor posicional aparece quando temos que representar qualquer quantidade sem criar nenhum novo símbolo. O segundo formato apresentado chamaremos de construção algébrica da escrita dos numerais. Nela observamos a repetição combinada e ordenada dos dígitos ou símbolos, sem criar nenhum outro símbolo, que permite representar qualquer quantidade em um sistema de numeração posicional. Iremos observar que a apresentação no formato geométrico permite a compreensão e a significação da construção algébrica e o quadro de valor de posição faz a transição recíproca de um formato para o outro.

Nas seções que se apresentam a seguir, apresentaremos os sistemas de numeração de base 4, de base 7 e de base 12. Estes foram escolhidos de acordo com as referências bibliográficas encontradas, nas quais as diferentes bases apresentadas nos sistemas numéricos não decimais foram estas. Deste modo, facilitou o estudo, a compreensão e a produção deste capítulo. Finalmente, apresentaremos a conversão destes sistemas para o sistema numérico decimal e vice versa.

2.1- Sistema de Numeração em Base 4

Assim como no sistema de base decimal ou base 10 que representa qualquer quantidade por agrupamentos de 10, no sistema numérico de base 4 representaremos as quantidades a partir de agrupamentos na base 4 ou em grupos de 4. No sistema numérico decimal, vimos que para escrever ou representar quantidades na base dez é necessário 10 algarismos ou símbolos. Para representar quantidades na base 4, usaremos apenas 4 símbolos. Poderíamos inventar estes símbolos para esta representação, mas embora possa inicialmente confundir, é mais prático, como já dissemos, usar os símbolos da base decimal. Então, os símbolos ou algarismos da base 4 são: 0, 1, 2 e 3.

Vamos comparar os agrupamentos na base 10 com os agrupamentos na base 4, conforme os exemplos que se seguem.

Consideramos um conjunto de treze pontinhos. Para escrever um numeral que represente o número dos pontos no sistema decimal vamos agrupá-los em grupos de 10. Neste caso, temos um grupo de 10 e três pontos a mais, ou seja, temos 1 dezena e 3 unidades representado por 13, conforme figura 13.

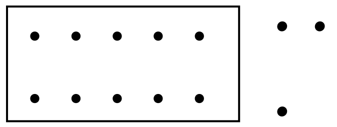


Figura 13

Realizaremos o mesmo procedimento na mesma quantidade de pontos agrupando-os em grupos de 4, conforme figura 14, abaixo.

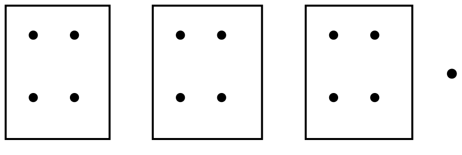


Figura 14

Observe que obtemos 3 grupos de 4 mais uma unidade que escrevemos 31 na base 4, onde 3 representa número de grupos de quatro e 1 representa a quantidade de pontos que não chegam a formar grupos de quatro. A representação deste número na base 4 é 31_4, na qual aparecem dois dígitos ou duas ordens.

Agora, consideremos trinta pontinhos. Se os agruparmos na base 4 ou em grupos de 4, temos sete grupos de 4 mais duas unidades. Como neste sistema, qualquer número deve ser escrito apenas com os dígitos 0, 1, 2, 3, então para representar sete grupos de 4, vamos reagrupá-los em grupos de 4, de modo que temos um grupo (agrupando 4 grupos de 4), mais três grupos de 4 mais duas unidades. Ver figura 15.

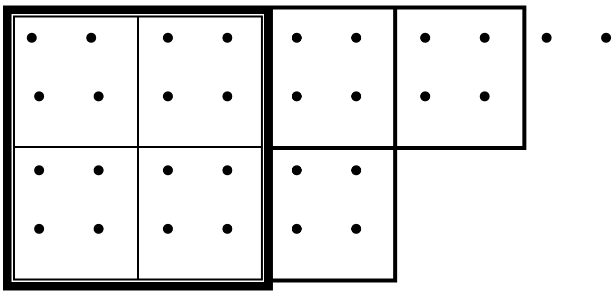


Figura 15

Criamos assim uma nova ordem, pois a representação desta quantidade na base 4 é dada por 132_4. O número obtido possui três ordens: o digito 2 indica as unidades que não formaram grupos de 4, ou seja, os pontinhos que sobraram, o dígito 3 indica que há 3 grupos de 4 e o dígito 1 indica que temos um agrupamento de 4 grupos de 4.

Seguindo o raciocínio anterior, dado um conjunto com certo número de elementos, para representar esta quantidade em base 4, primeiro agrupamos em grupos de 4, podem sobrar um, dois, três ou nenhum elemento não agrupado. Se o número de grupos de 4 for maior que três, reagrupamos estes grupos em grupos de 4 (formamos grupos de 4   4), criando a terceira ordem na representação numérica. Se o número de grupos de 4   4 for maior que três, reagrupamos, novamente, em grupos de 4, criando assim mais uma ordem que possui 4   4   4 elementos ou unidades e assim, sucessivamente.

Por exemplo, tomemos um conjunto com noventa pontinhos. Construiremos os agrupamentos na base 4 de modo que, inicialmente, formamos vinte e dois grupos de 4 mais 2 unidades, em seguida, vinte e dois grupos de quatro formam cinco grupos de 4   4 mais dois grupos de 4 mais as duas unidades. Ainda temos cinco grupos de 4 4 que reagrupados novamente, formam, finalmente, um grupo de 4 4 4, mais um grupo de

4 4 mais dois grupos de 4 e mais duas unidades. Logo, noventa pontinhos podem ser representados na base 4 como 1122_4, um numeral com 4 ordens. A figura 16 ilustra os agrupamentos citados neste exemplo.

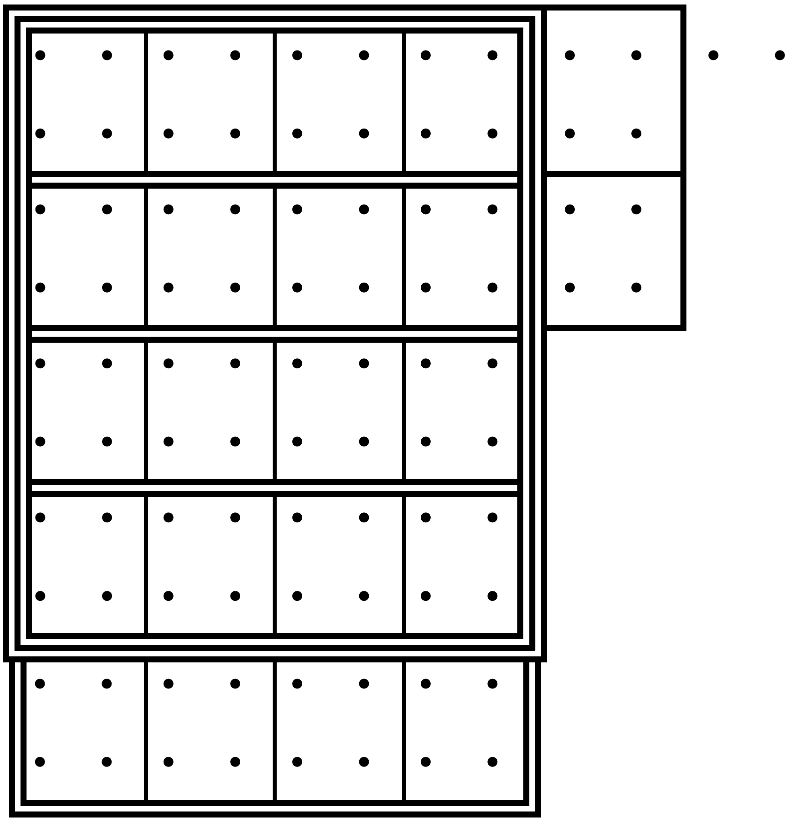


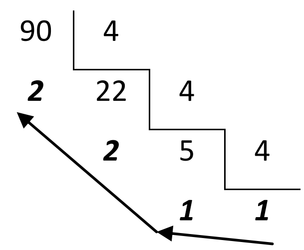
Figura 16

Aproveitamos esse exemplo dado anteriormente para apresentar a conversão do número 90 que está na base 10 para um número na base 4 utilizando o processo de divisões sucessivas pelo divisor 4, como mostraremos a seguir:

$$\begin{array}{r|l} 90 & 4 \\ \cline{2-2} \boldsymbol{2} & 22 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 22 & 4 \\ \cline{2-2} \boldsymbol{2} & 5 \end{array} \qquad \begin{array}{r|l} 5 & 4 \\ \cline{2-2} \boldsymbol{1} & \boldsymbol{1} \end{array}$$

Ao dividirmos 90 unidades por 4, encontramos 22 grupos de 4 e sobram ***2*** unidades. Dividindo novamente, 22 grupos de 4 por 4, temos 5 grupos de 4 4 e sobram ***2*** grupos de 4. Podemos ainda redividir 5 grupos de 4   4 por 4, obtendo ***1*** grupo de 4   4   4 e sobrando ***1*** grupo de 4   4.

Observe que após as divisões sucessivas pelo divisor 4, os valores ou coeficientes que compõem a representação numérica na base 4 é formado, nesta ordem, pelo último quociente obtido, menor que 4, e os restos das divisões, da última até a primeira, nesta ordem. Todos estão assinalados em negrito e itálico. Assim podemos apresentar o algoritmo abaixo que permite a conversão do valor decimal para a representação na base 4.



Assim, $90_{10} = 1122_4$.

2.1.1 – A Escrita dos Numerais e o Quadro de Valor Posicional na base 4

Já podemos perceber que para escrever o número representado em bases não decimais utilizamos uma notação que facilita e diferencia o registro destas quantidades de acordo com a base tomada para realizar o agrupamento. Voltando ao exemplo da figura 10 onde 31 na base 4 é escrito como 31_4, no qual o índice indica a base em que estamos trabalhando e representando a quantidade em questão.

Vejamos a diferença entre a escrita dos numerais abaixo:

No sistema decimal, 31 significa 3 dezenas e 1 unidade e lê-se “trinta e um”.

No sistema de base 4, 31_4 significa 3 grupos de 4 mais 1 unidade e lê-se “três um base 4”.

No sistema decimal, 132 significa 1 centena, 3 dezenas e 2 unidades e lê-se “cento e trinta e dois”.

No sistema de base 4, 132_4 significa 1 grupo de 4 x 4, 3 grupos de 4 e 2 unidades e lê-se “um três dois base 4”, ou simplesmente “cento e trinta e dois em base 4”.

Os números decimais não são escritos com índice que indica a base porque é o sistema convencionalmente adotado.

Para representar numericamente qualquer quantidade em uma contagem cuja base dos agrupamentos é a base 4 e, sendo este, um sistema posicional, utilizaremos a mesma combinação ordenada que estudamos no sistema decimal. Na base 4, possuímos só os dígitos 0, 1, 2 e 3, para representar quantidades maiores que três, basta combinar os símbolos da seguinte forma, como se apresenta na figura abaixo:

0: 0 = 00 =0; 1 = 01= 1; 2 = 02= 2; 3 = 03= 3

1: 0 = **10**; 1 = **11**; 2 = 12; 3 = 13

2: 0 = 20; 1 = 21; 2 = **22**; 3 = 23

3: 0 = 30; 1 = **31**; 2 = 32; 3 = **33**

Figura 17

Notemos que a primeira combinação de dois dígitos, 10_4, representa o valor 4 que é a base considerada neste estudo. Isso também acontece no sistema decimal.

A última representação numérica com dois dígitos é 33_4 que corresponde a 15 unidades, para contar conjuntos com mais de 15 elementos, necessitamos combinar 10 com cada um dos 4 dígitos (0, 1, 2, 3), nesta ordem, em seguida 11 com os dígitos 0, 1, 2, 3, nesta ordem, até obtermos o último número com três dígitos: 333_4. Para representar numerais que necessitam do acréscimo de mais uma ordem faremos então 100 com 0, com 1, e assim por diante. Veja algumas destas representações nas figuras a seguir.

10: 0 = **10**0; 1 = **10**1; 2 = **10**2; 3 = **10**3

11: 0 = **11**0; 1 = **11**1; 2 = **11**2; 3 = **11**3

...

22: 0 = **22**0; 1 = **22**1; 2 = **22**2; 3 = **22**3

...

31: 0 = **31**0; 1 = **31**1; 2 = **31**2; 3 = **31**3

...

33: 0 = **33**0; 1 = 331; 2 = 332; 3 = 333

100: 0 = **100**0; 1 = **100**1; 2 = **100**2; 3 = **100**3

...

223: 0 = 2230; 1 = 2231; 2 = 2232; 3 = 2233

...

333: 0 = 3330; 1 = 3331; 2 = 3332; 3 = 3333

...

Figura 18

Confirmamos que, após a representação de 3 unidades, o número que se segue é 10_4 que representa 4 unidades e que para contar a partir de quatro objetos não precisamos de mais nenhum outro símbolo, pois teremos a repetição dos símbolos utilizados neste sistema. Assim, após 10_4, em seguida, vêm o 11_4, 12_4, 13_4, 20_4, e assim por diante. Interpretando alguns destes números vemos que:

a) 10_4 representa 1 grupo de quatro mais 0 unidades,

b) 11_4 representa 1 grupo de quatro mais 1 unidade,

c) 12_4 representa 1 grupo de quatro mais 2 unidades,

d) 13_4 representa 1 grupo de quatro mais 3 unidades,

e) 20_4 representa 2 grupos de quatro mais 0 unidade, e assim por diante.

E como no sistema decimal o algarismo a direita representa as unidades e o algarismo a esquerda o número de grupos de quatro objetos. À medida que se formam novos agrupamentos de quatro ou para indicar a formação de 4 grupos de quatro (4 x 4) acrescentamos um dígito ou um algarismo à esquerda na escrita do numeral. Assim a cada agrupamento representado acrescentamos uma ordem ou dígito à representação numérica. Vejamos outros exemplos:

a) 300_4 significa 3 grupos de 4   4, nenhum grupo de 4 e nenhuma unidade e possui 3 ordens.
b) 2321_4 significa 2 grupos de 4   4   4, 3 grupos de 4   4, 2 grupos de 4 e 1 unidade e possui 4 ordens.

Observe que grupos de 4 x 4 é o mesmo que grupo de 16, grupos de 4   4   4 é o mesmo que grupo de 64. Assim, podemos reler o número 2321_4 como dois grupos de 64, três grupos de 16, dois grupos de 4 e uma unidade. Este exemplo confirma o que foi citado anteriormente, que cada posição a esquerda representa um valor 4 vezes maior e, como no sistema decimal, é necessário acrescentar mais um dígito na representação numérica correta.

Uma maneira de compreender a representação dos números é através do quadro de valor de posição baseado nos agrupamentos de base 4, como veremos a seguir. É importante acrescentar que, nos sistemas de bases distintas ao de base 10 as ordens não possuem momenclatura próprias e não possuem a formação das classes. Os números que aparecem no quadro 2 são:

a) 2321_4 b) 33_4 c) 32003_4 d) 132_4 e) 300_4

...	**Grupos de 256** **= 4 x 4 x 4 x 4 = 4^4**	**Grupos de 64** **= 4 x 4 x 4 = 4^3**	**Grupos de 16** **= 4 x 4 = 4^2**	**Grupos de 4** **= 4^1**	**Unidades (não formam grupos de 4)**
a)		2	3	2	1
b)				3	3
c)	3	2	0	0	3
d)			1	3	2
e)			3	0	0

Quadro 2

2.1.2 – Representação Polinomial em Potências de base 4

Fica fácil confirmar que também podemos decompor os números de acordo com a posição ocupada nos agrupamentos que se apresentam no quadro de valor posicional e representar os grupos na base 4 como potências de base 4, conforme representação abaixo do exemplo a:

$2321_4 = 2 \quad (4 \quad 4 \quad 4) \quad 3 \quad (4 \quad 4) \quad 2 \quad 4 \quad 1 = 2 \quad 4^3 \quad 3 \quad 4^2 \quad 2 \quad 4^1 \quad 1 \quad 4^0$

Mais exemplos:

b) $33_4 = 3 \quad 4 \quad 3 = 3 \quad 4^1 \quad 3 \quad 4^0$

c) $32003_4 = 3 \quad (4 \quad 4 \quad 4 \quad 4) \quad 2 \quad (4 \quad 4 \quad 4) \quad 0 \quad (4 \quad 4) \quad 0 \quad 4 \quad 3$

$= 3 \quad 4^4 \quad 2 \quad 4^3 \quad 0 \quad 4^2 \quad 0 \quad 4^1 \quad 3 \quad 4^0$

d) $132_4 = 1 \quad (4 \quad 4) \quad 3 \quad 4 \quad 2 = 1 \quad 4^2 \quad 3 \quad 4^1 \quad 2 \quad 4^0$

e) $203_4 = 2 \quad (4 \quad 4) \quad 0 \quad 4 \quad 3 = 2 \quad 4^2 \quad 0 \quad 4^1 \quad 3 \quad 4^0$

f) $10000_4 = 1 \quad (4 \quad 4 \quad 4 \quad 4) \quad 0 \quad (4 \quad 4 \quad 4) \quad 0 \quad (4 \quad 4) \quad 0 \quad 4 \quad 0 =$

$= 1 \quad 4^4 \quad 0 \quad 4^3 \quad 0 \quad 4^2 \quad 0 \quad 4^1 \quad 0 \quad 4^0$

Mostraremos aqui que, ao desenvolver as expressões numéricas resolvendo as potências e a soma destes resultados encontrou a representação numérica no sistema decimal, ou seja, podemos converter a representação numérica na base 4 para a base decimal. Isso é possível por que a base considerada nas potências e os dígitos possuem o mesmo valor do sistema decimal.

A partir dos exemplos acima, teremos que:

a) $\mathbf{2321_4} = 2 \quad (4 \quad 4 \quad 4) \quad 3 \quad (4 \quad 4) \quad 2 \quad 4 \quad 1 = 2 \quad 4^3 \quad 3 \quad 4^2 \quad 2 \quad 4^1 \quad 1 \quad 4^0 =$

$= 128 \quad 48 \quad 8 \quad 1 =$ **185**;

b) $\mathbf{33_4} = 3 \quad 4 \quad 3 = 3 \quad 4^1 \quad 3 \quad 4^0 = 12 \quad 3 =$ **15**;

c) $\mathbf{10000_4} = 1 \quad (4 \quad 4 \quad 4 \quad 4) \quad 0 \quad (4 \quad 4 \quad 4) \quad 0 \quad (4 \quad 4) \quad 0 \quad 4 \quad 0 =$

$= 1 \times 4^4 + 0 \times 4^3 + 0 \times 4^2 + 0 \times 4^1 + 0 \times 4^0 = 256 + 0 + 0 + 0 + 0 =$ **256**.

2.1.3 – Operações no Sistema Numérico de base 4

Na sequência, mostraremos com podemos realizar as operações de adição, multiplicação, subtração e divisão dos números representados na base 4.

Para efetuar os cálculos, uma alternativa é completar as tábuas de adição e multiplicação sempre colocando os resultados na base 4:

+	**0**	**1**	**2**	**3**
0	0	1	2	3
1	1	2	3	10_4
2	2	3	10_4	11_4
3	3	10_4	11_4	12_4

Tabela 1

x	**0**	**1**	**2**	**3**
0	0	0	0	0
1	0	1	2	3
2	0	2	10_4	12_4
3	0	3	12_4	21_4

Tabela 2

A partir destas tabelas de soma e multiplicação, podemos realizar as operações com os números na base 4 e ainda é possível verificar a semelhança com as operações no sistema decimal. Além disto, as tabelas facilitam as operações e a visualização das representações numéricas na base em questão, como veremos nos exemplos abaixo:

A) Adição:

$$\left.\begin{array}{r} 23_4 \\ \underline{12_4} \end{array}\right\} \text{parcelas}$$

$$101_4 \Longrightarrow \text{soma}$$

No exemplo acima, temos o número 23_4 que representa 2 grupos de quatro e 3 unidades somado ao número 12_4 que representa 1 grupo de quatro e 2 unidades. Começamos a somar pela ordem das unidades, ou seja, da direita para a esquerda, como no sistema decimal. Neste caso, $3_4 \quad 2_4 = 11_4$ que representa 1 grupo de quatro e 1 unidade. Deixamos o 1_4 na mesma posição da unidade, como resultado da operação das unidades e adicionamos o 1_4 que representa o grupo de quatro na ordem imediatamente à esquerda. Assim, $1_4 \quad 2_4 \quad 1_4$ é igual a 10_4. Logo o resultado desta adição é 101_4.

Vejamos outros exemplos:

a.1) $\begin{array}{r} 32_4 \\ \underline{11_4} \\ 103_4 \end{array}$	a.2) $\begin{array}{r} 123_4 \\ \underline{101_4} \\ 230_4 \end{array}$	a.3) $\begin{array}{r} 123_4 \\ \underline{321_4} \\ 1110_4 \end{array}$

Analisando o exemplo a.3), vemos que, neste caso, começamos da direita para a esquerda, $3_4 \quad 1_4 = 10_4$. Mantemos o 0_4 na ordem das unidades e adicionamos 1_4 na ordem imediatamente a esquerda (grupos de quatro): $1_4 \quad 2_4 \quad 2_4 = 11_4$. Mantemos 1_4 na ordem em que estamos e adicionamos 1_4 na ordem mais à esquerda (grupos de 4 4): 1_4 $1_4 \quad 3_4 = 11_4$.

Vejamos mais este exemplo: a.4) $\begin{array}{r} 323_4 \\ \underline{303_4} \\ 1232_4 \end{array}$

B) Multiplicação:

$$\begin{array}{rl} \left.\begin{array}{r} 23_4 \\ \underline{3_4} \end{array}\right\} & \text{fatores} \\ 201_4 & \Longrightarrow \text{produto} \end{array}$$

Neste exemplo, multiplicamos 23_4 que representa 2 grupos de quatro e 3 unidades por 3_4 que representa 3 unidades. Começamos também como no sistema decimal pelas unidades. Assim 3_4 3_4 é igual a 21_4 que representa 2 grupos de quatro e 1 unidade. Mantemos o valor da unidade, na primeira posição, à direita, e somamos 2_4 à multiplicação de 3_4 2_4, de modo que 2_4 (3_4 2_4) = 20_4. Logo o resultado da operação é 201_4.

Observamos mais alguns exemplos:

b.1) $\begin{array}{r} 21_4 \\ \underline{10_4} \\ 210_4 \end{array}$

b.2) $\begin{array}{r} 20_4 \\ \underline{20_4} \\ 1000_4 \end{array}$

b.3) $\begin{array}{r} 323_4 \\ \underline{3_4} \\ 2301_4 \end{array}$

b.4) $\begin{array}{r} 213_4 \\ \underline{21_4} \\ 213 \\ \underline{1032} \\ 11133_4 \end{array}$

b.5) $\begin{array}{r} 312_4 \\ \underline{231_4} \\ 312 \\ 2102 \\ \underline{2130} \\ 300332_4 \end{array}$

C) Subtração:

$$\begin{array}{r} 31_4 \\ \underline{2_4} \\ 23_4 \end{array}$$

Neste exemplo, estamos subtraindo 31_4 de 2_4. Fazemos esta operação como no sistema decimal e já observamos que na ordem das unidades, vamos subtrair 2_4 de 1_4. Como isto não é possível, vamos retirar 1 grupo de quatro na ordem à esquerda e ficamos com $11_4 - 2_4 = 3_4$ (para facilitar transformamos os números em quantidades do sistema decimal, ou seja, ficamos com 5 unidades – 2unidades = 3 unidades). Como retiramos 1 grupo de quatro de 3 grupos de quatro ficamos com 2_4, ou seja, $3_4 - 1_4 = 2_4$ e o resultado desta operação é 23_4.

Vejamos mais alguns exemplos:

c.1) $\begin{array}{r} 100_4 \\ \underline{1_4} \\ 33_4 \end{array}$ c.2) $\begin{array}{r} 32_4 \\ \underline{23_4} \\ 3_4 \end{array}$ c.3) $\begin{array}{r} 203_4 \\ \underline{21_4} \\ 122_4 \end{array}$ c.4) $\begin{array}{r} 1.000_4 \\ \underline{232_4} \\ 102_4 \end{array}$

D) Divisão:

Vejamos alguns exemplos:

d.1) $\begin{array}{r|l} 10_4 & \underline{\ 2\ \ } \\ 0 & 2 \end{array}$ d.2) $\begin{array}{r|l} 21_4 & \underline{\ 1\ \ } \\ 0 & 21_4 \end{array}$ d.3) $\begin{array}{r|l} 32_4 & \underline{\ 2\ \ } \\ 12_4 & 13_4 \\ 0 & \end{array}$

No primeiro exemplo, também precisamos transformar as quantidades representadas para o sistema decimal. Desta forma, 10_4 representam quatro unidades no sistema decimal que divididas por 2 dá como resultado 2 unidades. Esta é uma divisão exata. No exemplo c), faremos como no sistema decimal, dividindo da esquerda para a direita, ou seja começando pela ordem superior. Neste caso, 3_4 $2_4 = 1_4$ e sobra 1_4 que é colocado sob a ordem que estamos operando. Descemos o algarismo 2 da ordem imediatamente à direita e formamos o número 12_4 que representa 6 unidades no sistema decimal que divididas por 2 resulta 3 unidades. Esta divisão também é exata. Vejamos mais alguns exemplos:

d.4) $\begin{array}{r|l} 21_4 & \underline{\ 3\ \ } \\ 0 & 3_4 \end{array}$ d.5) $\begin{array}{r|l} 100_4 & \underline{\ 10\ \ } \\ 0 & 10_4 \end{array}$ d.6) $\begin{array}{r|l} 3120_4 & \underline{\ 102_4\ } \\ 00 & \ \ 30_4 \\ 0 & \end{array}$ d.7) $\begin{array}{r|l} 2022_4 & \underline{\ 3\ \ \ \ \ } \\ 22 & 232_4 \\ 12 & \\ 0 & \end{array}$

2.2 – Sistema de Numeração na Base 7

Dando continuidade a proposta deste capítulo, faremos a representação numérica no sistema numérico em base 7. Mostraremos exemplos, nos quais vamos agrupar as quantidades de 7 em 7, ou seja, escreveremos quantidades representando-as na base 7.

Além da representação, mostraremos também como é feito o registro e as operações aritméticas com os numerais na base 7.

Tomemos 37 objetos, vamos agrupá-los em grupos de 7, como na figura 19:

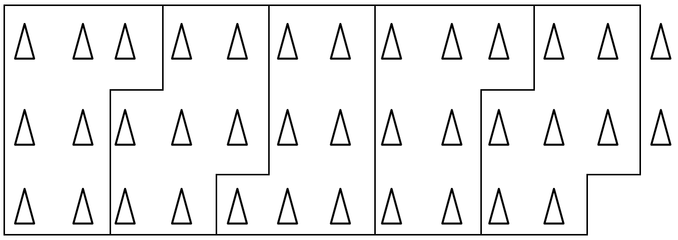


Figura 19

Vemos que formamos 5 grupos de sete e mais 2. Representamos como já vimos, este número da seguinte maneira: 52_7. 52_7 significa 5 grupos de 7 e mais 2 unidades e Lê-se: "cinco dois base sete". Relembramos que o índice 7 significa a base que estamos utilizando para agrupar as quantidades representadas.

Assim com nos sistemas posicionais vistos até o momento, para representar os números em base 7, são necessários 7 símbolos. Continuaremos utilizando os algarismos indo arábicos como os símbolos para a representação numérica nesta base. Assim, os 7 símbolos necessários são: 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6.

Vamos exemplificar representando 68 objetos na base 7. Ao agrupar esta quantidade em grupos de 7, encontramos nove grupos de 7 e 5 elementos que não formam um grupo de 7 e que representa o valor das unidades. Como não temos símbolo para representar os nove grupos, reagruparemos os grupos de 7. Encontramos, então, 1 grupo de 7 grupos de 7, restando 2 grupos de 7 e as 5 unidades. Logo, 68 = 125_7, que possui 3 dígitos ou ordens. Representaremos esta situação na figura 20.

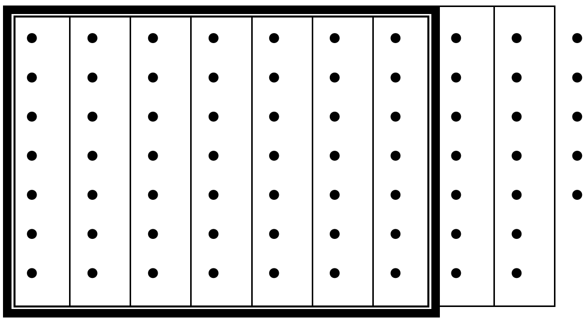


Figura 20

Representaremos, agora, os 85 objetos abaixo em agrupamentos cuja base é o sete:

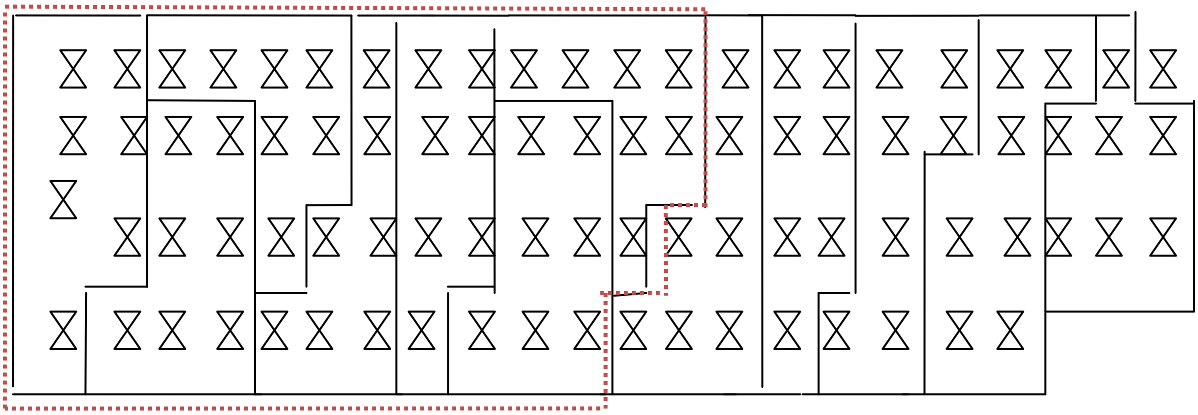


Figura 21

Ao agrupar esta quantidade em grupos de 7, encontramos doze grupos de 7 mais uma unidade. Reagrupamos os grupos de 7 e formamos 1 grupo de 7 agrupamentos de 7, 5 grupos de 7 e mais 1 unidade, assim podemos escrever que 85 = 151_7 com 3 ordens.

Assim, 151_7 significa 1 grupo de 7 7, 5 grupos de 7 e 1 unidade. Lê-se: "um seis um base sete".

Aproveitando este exemplo, reapresentaremos para mostrar o algoritmo que converte numerais na base decimal para os de base 7, através das divisões sucessivas por 7. As divisões são realizadas até encontrarmos um quociente menor que 7, a partir deste valor, inclusive, e os restos obtidos da última até a primeira divisão, nesta ordem, conseguimos escrever o numeral convertido na base 7, como veremos abaixo:

$$\begin{array}{r|l} 85 & 7 \\ \hline \textbf{\textit{1}} & 12 \;|\; 7 \\ & \;\;\textbf{\textit{5}} \;\;\; \textbf{\textit{1}} \end{array}$$

Assim 85 = 151_7

A partir destes exemplos, vemos que para representar as unidades que constituem a quantidade que não forma grupos de 7 precisamos de um algarismo. A partir do momento que formamos grupos de sete, necessitamos de mais um dígito, para representar a ordem imediatamente superior à anterior. No exemplo de 157_7 já conseguimos agrupar os grupos de 7 7 e isto significa o incremento de mais uma ordem ao numeral. Confirmamos que a cada agrupamento de sete formados a partir dos agrupamentos anteriores aumentamos a quantidade de dígitos para registrar aquela quantidade e estas ordens vão se apresentando com valores sete vezes maiores que a anterior. Por exemplo, se temos uma quantidade em que formamos 2 grupos de 7 7 7, 5 grupos de 7 7, 1 grupos de 7 e mais 6, então temos o numeral 2516_7 com 4 ordens. Notamos aqui, mais uma vez, que este fato ocorre em todos os sistemas de numeração posicional decimal ou não decimais, conforme vemos neste capítulo.

A construção algébrica dos numerais na base 7 se faz de modo semelhante aos outros sistemas estudados até o momento. Aqui, também, quando temos 7 objetos podemos formar um grupo de sete, assim 7 unidades é igual a 10_7 que significa 1 grupo de sete e nenhuma unidade. A partir de 7 objetos não precisamos de mais nenhum símbolo para representá-los e se inicia a repetição dos 7 símbolos: 0, 1, 2, 3, 4, 5 e 6, numa sequência de combinações como veremos a seguir, que são semelhantes as já apresentadas nos sistema decimal e em base 4.

	0 = 00 =0		0 = **10**			0 = 60
	1 = 01 = 1		1 = **11**			1 = **61**
	2 = 02 = 2		2 = 12			2 = 62
0	3 = 03 = 3	1	3 = 13	...	6	3 = **63**
	4 = 04 =4		4 = 14			4 = 64
	5 = 05 = 5		5 = 15			5 = 65
	6 = 06 = 6		6 = 16			6 = 66
						...

Figura 22

A figura acima revela que a combinação dos símbolos significativa ocorre a partir do dígito 1, já que o zero, mais a esquerda de qualquer dígito, não altera o valor final. A partir do dígito 1 à esquerda dos dígitos 0, 1, 2, ..., 6, nesta sequência, vamos representando as quantidades maiores que seis unidades. Terminada a combinação com o dígito 1, começamos com o 2 à esquerda de 0, 1, ..., 6, e assim até o dígito 6, que determina a última combinação de dois dígitos possível: 66. A partir daqui, começamos com o primeiro numeral com dois dígitos, 10, combinando-o com a sequência dos dígitos utilizados neste sistema de numeração. Assim continuaremos até encontrar 666, última combinação com três dígitos. Mantendo as combinações como descritas, escreveremos toda e qualquer representação numérica nesta e em qualquer outra base considerada.

Utilizaremos também o Quadro Valor de Posição, no qual representamos alguns números escritos na base 7. Notemos mais uma vez que as ordens não estão nomeadas. Nele representaremos os exemplos que seguem:

a) 2516_7 b) 125_7 c) 151_7 d) 52_7 e) 6_7

...	**Grupos de 343 = 7 x 7 x 7 = 7^3**	**Grupos de 49 = 7 x 7 = 7^2**	**Grupos de 7 = 7^1**	**Unidades (que não formam grupos de 7 completos)**
a)	2	5	1	6
b)		1	2	5
c)		1	5	1
d)			5	2
e)				6

Quadro 3

2.2.1 – Representação Polinomial no Sistema de base 7

Mostraremos a representação polinomial dos numerais na base 7. Fica fácil confirmarmos que também podemos decompor os números de acordo com a posição ocupada nos agrupamentos que se apresentam no quadro de valor posicional e representar os grupos na base 7 como potências de base 7, conforme representação dos exemplos abaixo:

a) 2516_7 = 2 (7 7 7) 5 (7 7) 1 7 6 = 2 7^3 1 7^2 5 7^1 6 7^0

b) 125_7 = 1 7^2 2 7^1 5 7^0

c) 151_7 = 1 (7 7) 5 7 1 = 1 7^2 5 7^1 1 7^0

Assim também com os números abaixo:

d) 52_7 = 5 7^1 2 7^0

e) 6_7 = 6 7^0

Veremos que, quando decompomos os numerais, como mostramos acima, podemos converter o numeral na base 7 para o numeral na base decimal, uma vez que as bases e os algarismos são números decimais. Para isto, basta calcular a expressão numérica que se apresenta na decomposição, calculando as potências e realizando as adições, de modo que:

$\mathbf{2516_7} = 2 \quad (7 \quad 7 \quad 7) \quad 5 \quad (7 \quad 7) \quad 1 \quad 7 \quad 6$

$= 2 \quad 7^3 \quad 1 \quad 7^2 \quad 5 \quad 7^1 \quad 6 \quad 7^0$

$= 2 \quad 243 \quad 1 \quad 49 \quad 5 \quad 7 \quad 6 \quad 1$

$= 686 \quad 49 \quad 35 \quad 6 =$ **776**.

2.2.2 – Operações

O procedimentos para realizar as operações com números nesta base é análoga à base 4. Podemos montar tábuas com as operações de soma e multiplicação que facilitam a compreensão dos resultados obtidos. Mas devemos lembrar que operamos como no sistema decimal e que se os resultados são maiores que 6 unidades, devemos agrupar e adicionar à ordem imediatamente superior.

+	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	0	1	2	3	4	5	6
1	1	2	3	4	5	6	10_7
2	2	3	4	5	6	10_7	11_7
3	3	4	5	6	10_7	11_7	12_7
4	4	5	6	10_7	11_7	12_7	13_7
5	5	6	10_7	11_7	12_7	13_7	14_7
6	6	10_7	11_7	12_7	13_7	14_7	15_7

Tabela 3

x	**0**	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
0	0	0	0	0	0	0	0
1	0	1	2	3	4	5	6
2	0	2	4	6	11_7	13_7	15_7
3	0	3	6	12_7	15_7	21_7	24_7
4	0	4	11_7	15_7	22_7	26_7	33_7
5	0	5	13_7	21_7	26_7	24_7	42_7
6	0	6	15_7	24_7	33_7	42_7	51_7

Tabela 4

Apresentaremos algumas operações básicas com valores na base 7 e vamos selecionar alguns exemplos para explicar os mecanismos utilizados que são bem semelhantes aos empregados no sistema decimal:

A) Adição:

a.1) 54_7 a.2) 106_7 a,3) 610_7

$\underline{35_7}$ $\underline{11_7}$ $\underline{66_7}$

122_7 120_7 1006_7

No exemplo a.1), adicionamos 54_7 que representa 5 grupos de sete mais 4 unidades a 35_7 que representa 3 grupos de sete mais 5 unidades. Começando pela ordem das unidades, temos que $4_7 \quad 5_7 = 12_7$ que representa 1 grupo de sete mais 2 unidades. Mantemos o 2_7 sob a ordem das unidades e somamos 1_7 na ordem dos grupos de sete. Assim, $1_7 \quad 5_7 \quad 3_7 = 12_7$ que representa um grupo de 7   7 mais 2 grupos de 7. O resultado desta adição é 122_7 que representa 1 grupo de 7   7, 2 grupos de 7 mais 2 unidades.

B) Multiplicação:

b.1) 655_7 b.2) 200_7

$\underline{3}$ $\underline{6}$

2631_7 1500_7

Na multiplicação do exemplo b.1) começamos pelas unidades, ou seja, 3 $5_7 = 21_7$. Mantemos 1_7 sob a ordem das unidades e somamos 2_7 à multiplicação 3 5_7 na ordem dos grupos de sete: $2_7 \quad 3 \quad 5_7 = 23_7$. Mantemos 3_7 nesta ordem e somamos 2_7 à ordem mais a esquerda: $2_7 \quad 3 \quad 6_7 = 26_7$. O produto da multiplicação fica assim: 2631_7.

C) Subtração:

c.1) 43_7 c.2) 5413_7

$\underline{26_7}$ $\underline{436_7}$

14_7 4644_7

Ao observarmos a subtração do exemplo c.1) vemos que vamos subtrair, na ordem das unidades, 3_7 de 6_7 o que não é possível, assim é necessário subtrair 1 grupo de 7 da ordem à esquerda, de modo que ficamos com $13_7 \quad 6_7 = 4_7$. Ficamos com 3 grupos de sete que subtraído de 2 grupos de sete é igual a 1_7. O resto ou a diferença é, nesta operação, 14_7.

D) Divisão:

d.1) $\begin{array}{l|l} 503_7 & 4 \\ \cline{2-2} 10 & 116_7 \\ \;\;33 & \\ \;\;\;\;0 & \end{array}$ d.2) $\begin{array}{l|l} 5063_7 & 11_7 \\ \cline{2-2} \;\;36 & 433_7 \\ \;\;\;\;33 & \\ \;\;\;\;\;\;0 & \end{array}$ d.3) $\begin{array}{l|l} 105_7 & 6 \\ \cline{2-2} \;\;15 & 12_7 \\ \;\;\;\;0 & \end{array}$ d.4) $\begin{array}{l|l} 52_7 & 2 \\ \cline{2-2} 12 & 24_7 \\ \;\;1 & \end{array}$

Vamos analisar o exemplo d.2) para explicarmos aqui também o processo da divisão para valores cuja base não é decimal. Começamos pela esquerda e como o divisor possui 2 dígitos, iniciamos a divisão a partir dos dois algarismos à esquerda. Desta forma, 50_7 11_7, que representam na base decimal 35 8 = 4 e resto 3. O algarismo 4 fica na posição do quociente e o resto 3 permanece sob os algarismos divididos. Desce o algarismo 6 à direita do resto 3 e temos então 36_7 11_7 = 3 e resto 3. Desce o algarismo 3 das unidades, novamente à direita do resto 3 e temos mais uma vez 33_7 11_7 = 3 e resto 0. Desta forma, o resultado desta divisão exata é 433_7.

2.3 – Sistema de Numeração na Base 12:

Estudaremos nesta sessão, como se faz a representação dos números quando tomamos a base 12 para realizar os agrupamentos, ou seja, após agrupar uma quantidade qualquer de elementos de 12 em 12. Curiosamente, ainda hoje, verificamos a existência de contagem cujo agrupamento é 12, por exemplo, as dúzias, o ano com 12 meses, o dia com 24 horas (2 12) mas, como já vimos, historicamente, não foi o sistema numérico que prevaleceu.

Na representação numérica em base 12 vamos continuar aplicando os algarismos indo arábicos, mas sabemos que serão necessários 12 símbolos para representar quantidades na base 12 então temos que criar 2 novos símbolos para representar todos os símbolos necessários para a escrita numérica. Estes símbolos poderiam ser qualquer figura ou desenho já que não temos mais que 10 símbolos indo arábicos utilizados no sistema decimal. Optamos, então, pelo α e β para completar o conjunto de símbolos da base 12, que podem ser assim apresentados a seguir: 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7, 8, 9, α, β. Deste modo, α_{12} = 10 unidades e β_{12} = 11 unidades.

Por exemplo, para representar 17 objetos na base 12, temos 1 grupo de 12 e mais 5 unidades. Logo, $17 = 15_{12.}$ Para representar 29 objetos na base 12, temos 2 grupos de 12 e mais 5 unidades. Logo, $29 = 25_{12.}$

Outro exemplo é o número 144 pode ser representado na base 12 se agruparmos esta quantidade em qrupos de 12, encontramos 12 grupos de 12, como não temos um símbolo, neste sistema, para representar 12, vamos reagrupá-los, novamente, e obtemos 1 grupo de 12 12, nenhum grupo de 12 e nenhuma unidade. Logo, $144 = 100_{12.}$

Vamos escrever o numeral decimal 1575 no sistema cuja base é duo decimal ou base 12, utilizando o algoritmo das divisões sucessivas que permite fazer esta conversão. Deste modo,

$$\begin{array}{r|l}
1575 & 12 \\ \cline{2-2}
\mathbf{\mathit{3}} & 131 \;\big|\; 12 \\ \cline{2-2}
 & \mathbf{\mathit{11}} \quad \mathbf{\mathit{10}}
\end{array}$$

Mas, como $\alpha_{12} = 10$ unidades e $\beta_{12} = 11$ unidades, então:

$1575 = \alpha\beta3_{12}$

Neste sistema, a construção numérica se faz, como nos outros sistemas, combinando em sequência os dígitos. A partir do momento que temos que representar 12 unidades, formamos 1 grupo de 12, que é representado pela combinação do 1 com o 0 e forma 10_{12}. Dando sequência temos 11_{12}, 12_{12}, 13_{12}, 14_{12}, ..., $1\alpha_{12}$, $1\beta_{12}$, 20_{12}, 21_{12},

22_{12}, ..., $2\,\alpha_{12}$, $2\,\beta_{12}$, ..., $\alpha0_{12}$, ..., $\alpha\beta_{12}$, $\beta0_{12}$, $\beta2_{12}$, $\beta3_{12}$,..., $\beta\alpha_{12}$, $\beta\beta_{12}$, 100_{12}, ...

É esta regularidade que possibilita saber a quantidade de dígitos a cada agrupamento registrado e que se mantém neste sistema de base duo decimal.

A escrita dos numerais através da representação dos grupos como soma de potências cuja base é o valor dos grupos tomados na contagem, como observado nos outros sistemas anteriores, se observa também neste caso. A conversão dos valores que se apresentam na base 12 para o sistema decimal também é feita da mesma maneira, que se calcula resolvendo a expressão numérica encontrada.

Exemplos:

a) $\mathbf{2186_{12}} = 2 \quad (12 \quad 12 \quad 12) \quad 1 \quad (12 \quad 12) \quad 8 \quad 12 \quad 6 = 2 \quad 12^3 \quad 1 \quad 12^2 \quad 8 \quad 12 \quad 6$

$= 2 \quad 12^3 \quad 1 \quad 12^2 \quad 8 \quad 12^1 \quad 6 \quad 12^0 = 2 \quad 1728 \quad 1 \quad 144 \quad 8 \quad 12 \quad 6 \quad 1$

$= \mathbf{3702}$.

b) $\mathbf{1\alpha\beta_{12}} = 1 \quad 12^2 \quad \alpha \quad 12^1 \quad \beta \quad 12^0 = 1 \quad 144 \quad 10 \quad 12 \quad 11 \quad 1 =$ **275.**

2.3.1 – Operações:

Construindo a tabela de adição para esta base:

+	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	α	β
0	0	1	2	3	4	5	6	7	8	9	α	β
1	1	2	3	4	5	6	7	8	9	α	β	10_{12}
2	2	3	4	5	6	7	8	9	α	β	10_{12}	11_{12}
3	3	4	5	6	7	8	9	α	β	10_{12}	11_{12}	12_{12}
4	4	5	6	7	8	9	α	β	10_{12}	11_{12}	12_{12}	13_{12}
5	5	6	7	8	9	α	β	10_{12}	11_{12}	12_{12}	13_{12}	14_{12}
6	6	7	8	9	α	β	10_{12}	11_{12}	12_{12}	13_{12}	14_{12}	15_{12}
7	7	8	9	α	β	10_{12}	11_{12}	12_{12}	13_{12}	14_{12}	15_{12}	16_{12}
8	8	9	α	β	10_{12}	11_{12}	12_{12}	13_{12}	14_{12}	15_{12}	16_{12}	17_{12}
9	9	α	β	10_{12}	11_{12}	12_{12}	13_{12}	14_{12}	15_{12}	16_{12}	17_{12}	18_{12}
α	α	β	10_{12}	11_{12}	12_{12}	13_{12}	14_{12}	15_{12}	16_{12}	17_{12}	18_{12}	19_{12}
β	β	10_{12}	11_{12}	12_{12}	13_{12}	14_{12}	15_{12}	16_{12}	17_{12}	18_{12}	19_{12}	$1\alpha_{12}$

Tabela 5

Podemos realizar as seguintes operações, como nos exemplos a seguir, verificando que as operações são realizadas da mesma forma que nos sistemas de numeração vistos anteriormente. Apresentaremos exemplos nos quais realizamos as operações de adição, nos dois primeiros e de multiplicação nos últimos exemplos:

1		1	2 1
$\alpha\ 2_{12}$	$1\ 0\ 1_{12}$	$5\ 7_{12}$	$1\alpha\ 6_{12}$
$\underline{2\ \alpha_{12}}$	$\underline{9\ 9_{12}}$	$\underline{2}$	$\underline{3}$
110_{12}	$1\ 9\ \alpha_{12}$	$\beta\ 2_{12}$	$5\ 76_{12}$

Ao finalizar a primeira parte do estudo dos sistemas numéricos de bases não decimais, vemos que as vantagens de utilizar bases pequenas como a base 4 e a base 2, que estudaremos no próximo capítulo, são percebidas quando resolvemos as tábuas de adição e multiplicação, pois estas são menores, o que torna seu aprendizado mais fácil, já que diminui a quantidade de fatos para realizar as operações. Entretanto, as representações em bases pequenas requer uma quantidade enorme de dígitos para escrever um número, como veremos na base 2. O contrário acontece à medida que aumentamos o valor da base dos agrupamentos como, por exemplo, os sistemas de numeração de base 7 ou de base 12, estudados neste capítulo.

2.4 – Sistemas de Numeração na base a

Seja N um número qualquer natural maior que 1 representado num sistema de numeração posicional de base a, onde $a \neq 1$. O número N pode ser apresentado por meio da sequência de coeficientes ou dígitos, n_k, $0 \leq n_k \leq a - 1$, da seguinte forma:

$$(n_k,\ n_{k-1},\ \ldots,\ n_2,\ n_1,\ n_0)_a$$

e decomposto como: $n_k \cdot a^k + n_{k-1} \cdot a^{k-1} + \ldots + n_2 \cdot a^2 + n_1 \cdot a^1 + n_0 \cdot a^0$.

Vamos exemplificar considerando os sistemas numéricos que estudamos neste capítulo. Nos exemplos abaixo, representaremos a decomposição de N_4 no sistema de base 4, de P_7 na base 7, de M_{12} na base 12 e de C na base 10.

Para N_4, os coeficientes n_k estão compreendidos entre 0 e 3. Assim,

$$N_4 = (n_k,\ n_{k-1},\ \ldots,\ n_2,\ n_1,\ n_0)_4 = n_k \cdot 4^k + n_{k-1} \cdot 4^{k-1} + \ldots + n_1 \cdot 4^1 + n_0 \cdot 4^0$$

Para P_7, os coeficientes n_k estão compreendidos entre 0 e 6:

$P_7 = (n_k,\ n_{k-1}, \ldots, n_2, n_1, n_0)_7 \ = \ n_k \,.\, 7^k + n_{k-1} \,.\, 7^{k-1} + \ldots + n_1 \,.\, 7^1 + n_0 \,.\, 7^0$

Para M_{12}, os coeficientes n_k estão compreendidos entre 0 e β:

$M_{12} = \ (n_k,\ n_{k-1}, \ldots, n_2, n_1, n_0)_{12} \ = \ n_k \,.\, 12^k + n_{k-1} \,.12^{k-1} + \ldots + n_1 \,.\, 12^1 + n_0 \,.12^0$

Para C, os coeficientes n_k estão compreendidos entre 0 e 9:

$C = (n_k,\ n_{k-1}, \ldots, n_2, n_1, n_0)_{10} = \ n_k \,.\, 10^k + n_{k-1} \,.10^{k-1} + \ldots + n_1 \,.\, 10^1 + n_0 \,.10^0$

2.4.1 – Conversão de Números em Bases quaisquer para Números Decimais

Já havíamos estudado esta decomposição dos números representados nas bases 4, 7 e 12 e acrescentado, ao longo da apresentação, que é possível converter qualquer número escrito nestas ou em outras bases para a representação decimal. Isto é possível por que tanto os coeficientes quanto a base são números que possuem a mesma representação e o mesmo valor do sistema decimal. Basta resolver as potências e a adição entre elas, ou seja, resolver a expressão numérica obtida para encontrar o numeral na representação decimal. Vamos rever isto com mais alguns exemplos:

a) $\mathbf{2321_4} = \mathit{2} \quad 4^3 \quad \mathit{3} \quad 4^2 \quad \mathit{2} \quad 4^1 \quad \mathit{1} \quad 4^0$

$= 2 \quad 64 \quad 3 \quad 16 \quad 2 \quad 4 \quad 1 \quad 1$

$= 128 \quad 48 \quad 8 \quad 1 = \mathbf{185}$;

b) $\mathbf{23000_4} = \mathit{2} \quad 4^4 \quad \mathit{3} \quad 4^3 \quad \mathit{0} \quad 4^2 \quad \mathit{0} \quad 4^1 \quad \mathit{0} \quad 4^0$

$= 2 \quad 256 \quad 3 \quad 64 \quad 0 \quad 16 \quad 0 \quad 4 \quad 0 \quad 1$

$= 512 \quad 192 \quad 0 \quad 0 \quad 0 = \mathbf{704;}$

c) $\mathbf{1\ 9\ \alpha_{12}} = \mathit{1} \quad 12^2 \quad \mathit{9} \quad 12^1 \quad \alpha \quad 12^0$

$= 144 \quad 108 \quad 10 = \mathbf{362}$.

d) $\mathbf{6440_7} = \mathit{6} \quad 7^3 \quad \mathit{4} \quad 7^2 \quad \mathit{4} \quad 7^1 \quad \mathit{0} \quad 7^0$

$= 6 \quad 343 \quad 4 \quad 49 \quad 4 \quad 7 \quad 0$

= 2058   196   16 = **2270**;

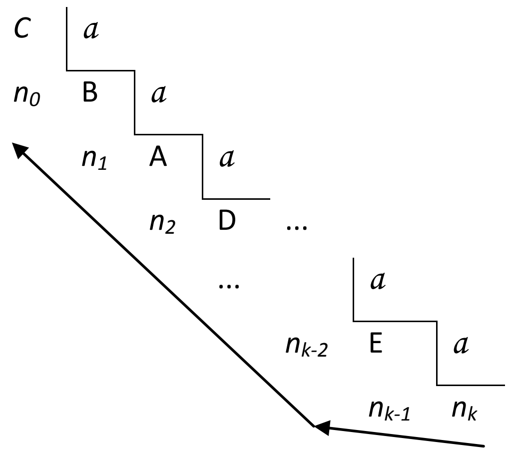
e) **1953** = *1* 10^3 *9* 10^2 *5* 10^1 *3* 10^0

= 1   1000   9   100   5   10   3   1

= 1000   900   50   3 = **1953**.

2.4.2 - Conversão de Números Decimais em Números de Bases não decimais

Para converter um número decimal para base que não seja decimal, devemos proceder a divisões sucessivas do número dado pelo valor da base pela qual queremos escrever esta quantidade até que o último quociente seja um valor menor que o valor do divisor que é a base do sistema na qual se quer converter um determinado número. Assim, seja um número decimal *C* podemos escrevê-lo em um número *N* escrito em uma base a qualquer, desde que a 1, no qual os coeficientes ou dígitos ou algarismos n_k , 0 n_k $a - 1$, realizando sucessivas divisões inexatas pela base a, de modo que o primeiro resto, n_0, será o primeiro algarismo, a partir da direita, na representação de N. O quociente desta divisão, dividido por a, deixa o resto n_1. E assim, dividindo cada quociente da divisão anterior pela base a. obtém-se, consecutivamente, os restos $n_0, n_1, ..., n_k$, que são os coeficientes e, por sua vez, os algarismos que compõem, na ordem inversa, a representação de N na base a. Logo, $C = N_a = (n_k, n_{k-1}, n_{k-2}, ..., n_2, n_1, n_0)_a$



Ilustraremos alguns exemplos onde realizaremos a conversão do número na representação decimal para o número em determinada base indicada em cada exemplo:

a) Vamos representar o valor decimal 66 no valor cuja base da escrita é 12:

$$\begin{array}{l|l} 66 & 12 \\ \hline \boldsymbol{6} & \boldsymbol{5} \end{array}$$

Logo, 66 = $\boldsymbol{56}_{12}$

c) Representaremos 3287 na forma deste mesmo número na base 7:

$$\begin{array}{lllll} 3287 & \lvert\ 7 & & & \\ \boldsymbol{4} & 469 & \lvert\ 7 & & \\ & \boldsymbol{0} & 67 & \lvert\ 7 & \\ & & \boldsymbol{4} & 9 & \lvert\ 7 \\ & & & \boldsymbol{2} & \boldsymbol{1} \end{array}$$

3287 = $\boldsymbol{12404}_7$

d) Vamos mostrar mais dois exemplos, nos quais convertemos 200 em um numeral na base 3 e 15 em um número do sistema de base 4.

$$\begin{array}{lllll} 200 & \lvert\ 3 & & & \\ \boldsymbol{2} & 66 & \lvert\ 3 & & \\ & \boldsymbol{0} & 22 & \lvert\ 3 & \\ & & \boldsymbol{1} & 7 & \lvert\ 3 \\ & & & \boldsymbol{1} & \boldsymbol{2} \end{array}$$

$$\begin{array}{l|l} 15 & 4 \\ \hline \boldsymbol{3} & \boldsymbol{3} \end{array}$$

Vemos que: 200 = $\boldsymbol{21102}_3$ e 15 = $\boldsymbol{33}_4$

Este procedimento se aplica à conversão em qualquer base. O processo das divisões sucessivas se interrompe ao se anular o último quociente, uma vez que o mesmo possui um valor menor que o divisor e, o respectivo resto fornece o algarismo à extrema esquerda da representação numérica. Nos nossos exemplos, interrompemos o processo quando o último quociente obtido é menor que o divisor – base considerada na conversão. Esse quociente já é considerado o primeiro algarismo à esquerda na escrita do numero na base em que se quer representá-lo.

Capítulo 3

Jogos e Aplicações com Sistemas de Numeração de base 2

Apresentamos, inicialmente, o sistema de numeração de base 2 neste capítulo para fazer o estudo desta representação numérica utilizando-se do agrupamentos das quantidades em grupos de dois e, em seguida apresentar algumas jogos nos quais as regras se encontram baseados no conhecimento deste sistema de numeração.

3.1 – Sistema de Numeração de Base 2:

No sistema de numeração de base 2 utilizamos o menor agrupamento possível, isto é, agrupamos as quantidades de dois em dois, necessitando apenas dois símbolos: 0 e 1. Desta maneira representamos as quantidades sempre utilizando os dígitos 0 e 1.

Uma das aplicações mais antigas do sistema em base dois é a mensagem telegráfica. A partir da representação de cada letra do alfabeto e dos espaços em branco, por um número que, ao ser escrito com base dois, será representado apenas pelos símbolos 0 e 1, podemos registrar e codificar mensagens e enviá-las. Pode-se transmitir a um ponto distante qualquer um destes símbolos utilizando fios condutores, nos quais a passagem de corrente representa a unidade e a sua ausência, o zero. Isto exemplifica a facilidade de converter os algarismos binários em sinais elétricos.

Este sistema de numeração mostrou-se de grande utilidade para uso em máquinas como computadores, maquinas de calcular, pois representar quantidades e quaisquer outros sinais por dois símbolos é algo útil para os equipamentos eletroeletrônicos, onde o **0** e o **1** podem ser correspondentes ao liga-desliga, sim-não, aberto-fechado, contato-interrupção, passagem-vedação, uma vez que os circuitos elétricos, eletrônicos ou digitais são constituídos por elementos dotados de dois estados distintos.

O maior inconveniente de base dois é que a representação de cada número ou a chave de decifração de uma escrita envolve muitos algarismos. Por exemplo, cem mil, que na base dez se representa por 6 algarismos, na base dois representa-se por 17 algarismos. Porém, este inconveniente é superado nas maquinas eletrônicas pela velocidade e pela facilidade das regras operacionais possíveis com este sistema.

Vamos representar nos exemplos abaixo conjuntos de elementos agrupando-os na base 2. Vejamos como representamos três elementos na base 2. Ao agrupar estes três elementos, temos 1 grupo de dois e ainda mais um elemento que não chega a formar um grupo de dois que constitui a ordem das unidades. A formação de 1 grupo de dois e 1 elemento que sobra permite que precisemos de duas ordens para representemos os três elementos, ou seja, 1 grupo de dois mais 1 unidade, dada pelo numeral 11_2. Veja figura abaixo:

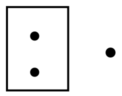


Figura 23

Observe mais esta figura que apresentamos a seguir:

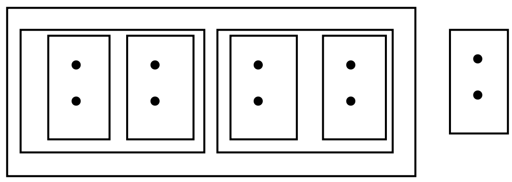


Figura 24

Na figura 24 acima, temos o agrupamento de dez elementos em grupos de dois, formam-se cinco grupos de dois e nenhuma unidade, como não temos um dígito para representar os cinco grupos, reagrupamos os grupos de dois e encontramos dois grupos 2 x 2 e 1 grupo de dois. Novamente, não temos dígito que represente dois neste sistema, pois os algarismos utilizados aqui são 0 e 1, assim reagrupamos os grupos de 2 2 e encontramos 1 grupo de 2 2 2 , nenhum grupo de 2 2, 1 grupo de 2 e nenhuma unidade, ou seja, 1 grupo de 2 2 2, 0 grupo de 2 2, 1 grupo de 2 e 0 unidades. Assim, dez elementos são representados por 1010_2.

Observamos que a cada agrupamento formado, necessitamos de mais uma ordem ou o acréscimo de mais um dígito à esquerda. Como nos sistemas estudados no capítulo anterior, repetimos os dígitos na sequência de representação da contagem e colocando - o imediatamente à esquerda a cada nova ordem que precisamos representar. Vejamos mais alguns exemplos:

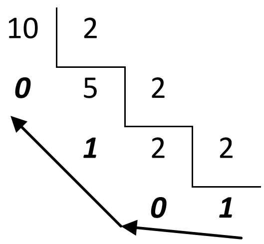
o valor decimal 2 é representado no sistema de base 2 por 10_2 e lê-se “um zero base 2”;

o valor decimal 4 é representado no sistema de base 2 por 100_2 e lê-se “um zero zero base 2”;

o valor decimal 8 é representado no sistema de base 2 por 1000_2 e lê-se “um zero zero zero base 2”;

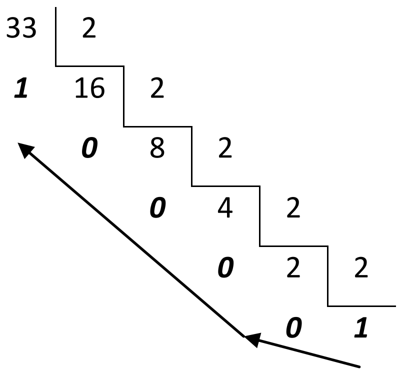
o valor decimal 16 é representado no sistema de base 2 por 10000_2 e lê-se “ um zero zero zero zero base 2”.

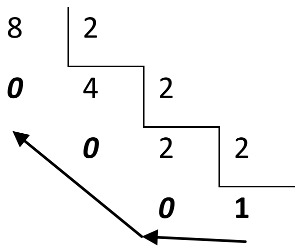
Relembraremos o algoritmo da conversão do número na base decimal para outras bases, utilizando o exemplo da figura 24, no qual escrevemos o valor decimal no valor representando o sistema de base 2. Vejamos a seguir:



Após divisões sucessivas por 2, encontramos no último quociente e nos restos das divisões, do último para o primeiro, os coeficientes que compõem o número na base 2. Assim 10 = 1010_2.

Apresentaremos outros dois exemplos, onde escreveremos os valores decimais 8 e 33 representados no sistema de base 2, verificando que através das divisões sucessivas por 2 encontraremos os coeficientes que compõem cada um dos numerais na base 2:





Assim 33 = 100001_2 e 8 = 1000_2

Os restos de cada divisão e o último quociente, como se encontram representados acima em negrito e itálico, formam o número na base em que se quer converter o valor dado. Este valor é escrito tomando consecutivamente o último quociente e os restos na ordem inversa, ou seja, do último quociente obtido até o primeiro resto encontrado para compor a representação do número que se quer converter na base em que estamos estudando.

3.1.1. – A escrita dos numerais e o Quadro de Valor de Posição

Retomando a escrita dos numerais no sistema de base 2, veremos que a combinação numa sequência em que se repetem os símbolos utilizados neste sistema de numeração, de forma semelhante ao que acontece nos outros sistemas de numeração estudados até aqui, conforme mostraremos abaixo:

0 → 0 = 00 = **0**
  → 1 = 01 = **1**

1 → 0 = **10** → 0 = **100**
         → 1 = **101**
  → 1 = **11** → 0 = **110**
         → 1 = **111**

100 → 0 = 1000 → 1 = 1001   101 → 0 = 1010 → 1 = 1011   110 → 0 = 1100 → 1 = 1101   111 → 0 = 1110 → 1 = 1111

1000 → 0 = 10000 → 1 = 10001   1001 → 0 = 10010 → 1 = 10011   ...   1110 → 0 = 11100 → 1= 11101   1111 → 0 = 11110 → 1 = 11111 ...

Figura 25

Mais uma vez, podemos perceber que após a representação do 0 e do 1, a próxima representação numérica é dada pela combinação do 1 com 0, 10, e, assim sucessivamente. Podemos escrever os numerais com número de ordens necessárias para representar quaisquer conjuntos de elementos agrupando-os de dois em dois.

Vamos utilizar o quadro de valor posicional, neste sistema para visualizar as representações numéricas, a partir dos exemplos já vistos até aqui:

a) 11_2 b)111_2 c)1010_2 d)10000_2 e) 100001_2

...	**Grupos de 32 $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^5$**	**Grupos de 16 $= 2 \times 2 \times 2 \times 2 = 2^4$**	**Grupos de 8 $= 2 \times 2 \times 2 = 2^3$**	**Grupos de 4 $= 2 \times 2 = 2^2$**	**Grupos de 2 $= 2^1$**	**Unidades**
a)					1	1
b)				1	1	1
c)			1	0	1	0
d)		1	0	0	0	0
e)	1	0	0	0	0	1

Quadro 4

3.1.2 – Representação polinomial e as operações no Sistema de base 2:

Mostraremos a representação polinomial dos numerais do sistema numérico de base 2, através da sequência de potências de base 2 e os respectivos coeficientes ou dígitos que o constituem. Vejam os exemplos já estudados anteriormente, representados neste formato:

a) $\mathbf{11_2} = 1 \quad 2 \quad 1 = 1 \quad 2^1 \quad 1 \quad 2^0 = \mathbf{3}$;

b) $\mathbf{111_2} = 1 \quad (2 \quad 2) \quad 1 \quad 2 \quad 1 = 1 \quad 2^2 \quad 1 \quad 2^1 \quad 1 \quad 2^0 = \mathbf{7}$;

c) $\mathbf{1010_2} = 1 \quad (2 \quad 2 \quad 2) \quad 0 \quad (2 \quad 2) \quad 1 \quad 2 \quad 0 = 1 \quad 2^3 \quad 0 \quad 2^2 \quad 1 \quad 2^1 \quad 0 \quad 2^0$
$= \mathbf{10}$;

d) $\mathbf{100001_2} = 1 \quad (2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2) \quad 0 \quad (2 \quad 2 \quad 2 \quad 2) \quad 0 \quad (2 \quad 2 \quad 2) \quad 0 \quad (2 \quad 2) \quad 0 \quad 2$
$1 = 1 \quad 2^5 \quad 0 \quad 2^4 \quad 0 \quad 2^3 \quad 0 \quad 2^2 \quad 0 \quad 2^1 \quad 1 \quad 2^0 = \mathbf{33}$;

Vejamos outros exemplos:

a) $\mathbf{1001_2} = 1 \quad (2 \quad 2 \quad 2) \quad 0 \quad (2 \quad 2) \quad 0 \quad 2 \quad 1 = 1 \quad 2^3 \quad 0 \quad 2^2 \quad 0 \quad 2^1 \quad 1 \quad 2^0$
$= \mathbf{9}$

b) $\mathbf{111001_2} = 1 \quad (2 \quad 2 \quad 2 \quad 2 \quad 2) \quad 1 \quad (2 \quad 2 \quad 2 \quad 2) \quad 1 \quad (2 \quad 2 \quad 2) \quad 0 \quad (2 \quad 2) \quad 0 \quad 2$
$1 = 1 \quad 2^5 \quad 1 \quad 2^4 \quad 1 \quad 2^3 \quad 0 \quad 2^2 \quad 0 \quad 2^1 \quad 1 \quad 2^0 = \mathbf{57}$.

Em todos os exemplos acima, a partir da representação polinomial e resolvendo a expressão numérica que se forma, encontramos os valor decimal correspondente ao numeral escrito na base 2. Como já estudamos anteriormente, toda vez que decompomos o numeral de acordo com os agrupamentos tomados e com os dígitos que o formam, utilizando a representação polinomial podemos converter os numerais escritos em qualquer base para o seu respectivos valor decimal.

Para realizar as operações neste sistema, construir as tabelas de adição e de multiplicação facilita a realização destes procedimentos. A seguir apresentamos as tabelas de adição e multiplicação no sistema de base 2:

+	0	1
0	0	1
1	1	10_2

Tabela 6

x	0	1
0	0	0
1	0	1

Tabela 7

Nos exemplos que se seguem, mostraremos como se realizam estas operações, lembrando que seguimos os mesmos procedimentos adotados nos sistemas de numeração decimal e não decimal:

a) Adição:

a.1) $\begin{array}{r} 11_2 \\ \underline{1_2} \\ 100_2 \end{array}$ a.2) $\begin{array}{r} 10_2 \\ \underline{10_2} \\ 100_2 \end{array}$ a.3) $\begin{array}{r} 101_2 \\ \underline{11_2} \\ 1000_2 \end{array}$

b) Multiplicação:

d) $\begin{array}{r} 11_2 \\ \underline{1_2} \\ 11_2 \end{array}$ e) $\begin{array}{r} 10_2 \\ \underline{0_2} \\ 00_2 \end{array}$ f) $\begin{array}{r} 100_2 \\ \underline{10_2} \\ 000 \\ +\ \underline{100} \\ 1000_2 \end{array}$

Como já observamos as regras para realizar as operações são as mesmas já descritas anteriormente. Neste caso, a multiplicação se mostra mais simplificada, pois os valores obtidos nos produtos são sempre 0 ou 1.

3.2 - Jogos e atividades com o Sistema de numeração de base 2

Apresentaremos aqui alguns jogos e desafios em que trabalhamos com a compreensão do sistema de numeração de base 2. Nosso objetivo é incluir neste trabalho atividades que possam ser utilizadas em sala de aula e que permitam que os alunos tenham melhor compreensão do sistema de numeração de base 2.

3.2.1 - Mágica Matemática

Vamos descobrir o dia do seu aniversário...

Como se realiza esta mágica?

1 – Para descobrir o seu dia de aniversário utilizam-se estes calendários mágicos:

Um sim um não

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

De dois em dois

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

De quatro em quatro

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

De oito em oito

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

Meio mês sim meio não

dom	seg	ter	qua	qui	sex	sab
			1	2	3	4
5	6	7	8	9	10	11
12	13	14	15	16	17	18
19	20	21	22	23	24	25
26	27	28	29	30	31	

Figura 26

2 – Devolva os calendários que indiquem a data de seu nascimento aparece sublinhada.

3 – Em poucos segundos consegue-se dizer o seu dia de aniversário.

Qual é o truque?

Para realizar esta atividade é necessário construir os cinco calendários de acordo com a figura 26. O procedimento para descobrir o dia do aniversário consiste em pedir que, dos cinco calendários, o aluno devolva aqueles em que o seu dia de aniversário esta sublinhado. O truque é somar os primeiros números sublinhados que aparecem nos calendários que a pessoa escolheu e você descobrirá a data de seu aniversário, sem que ela lhe conte. O resultado corresponde à data procurada. Por exemplo, se a pessoa nasceu no dia 7, os calendários em que este número aparece sublinhado têm os números 1, 2 e 4 como os primeiros números sublinhados. A soma deles é 1 2 4 = 7. Depois de realizar o truque algumas vezes o professor pode perguntar: Por que é que funciona?

Este jogo considera os valores decimais entre 1 e 31 escritos na base 2 e, na representação do maior valor considerado, temos que 31 = 11111_2, ou seja, no máximo 5 dígitos. Este fato explica por que montamos 5 calendários que se baseiam nos meses têm, no máximo, 31 dias e, por esta razão contêm todas as possíveis datas de aniversário. Este truque utiliza o fato de todos os números naturais serem uma potência de base 2 ou serem escritos com uma soma de diferentes potências de base 2, uma vez que os coeficientes de cada potência é sempre 1, na decomposição em potências de base 2. Em todos os calendários, os primeiros números sublinhados são potências de base 2: 1, 2, 4, 8, 16. Voltando ao exemplo em a data de nascimento é 7. Vemos que: 7 = 1 2 4 = 2^0 2^1 2^2. E o número decimal 7 = 111_2. Por isso, o número 7 aparece nos cartões cujos primeiros valores sublinhados são o 1, o 2 e o 4.

No calendário que possui o 1 como o primeiro número sublinhado, o restante dos números sublinhados contêm essa potência de 2 ($1 = 2^0$), quando decompostos numa adição dessas potências. Este é o primeiro calendário. Quando convertemos estes números na sua representação numérica de base 2, todos possuem o dígito 1 na primeira posição da direita para esquerda. No segundo calendário, o número 2 é primeiro sublinhado e o restante dos números sublinhados possuem a potência de base 2 correspondente, ou seja, 2^1 e, na representação em base 2, o dígito 1 aparece na segunda posição da direita para a esquerda. E assim até o quinto e último calendário em que os números sublinhados têm o 2^4 na sua decomposição e o dígito 1 na representação em base 2 na quinta posição da direita para a esquerda.

Para facilitar a compreensão vamos escrever, no quadro abaixo, todos os valores decimais de 1 a 31 com sua representação da base 2 e fazer a associação da posição do dígito 1 nesta escrita com as potências de base 2 na sua decomposição.

Posição do dígito 1 / Números decimais	5ª 2^4	4ª 2^3	3ª 2^2	2ª 2^1	1ª 2^0
1					1
2				1	0
3				1	1
4			1	0	0
5			1	0	1
6			1	1	0
7			1	1	1
8		1	0	0	0
9		1	0	0	1
10		1	0	1	0
11		1	0	1	1
12		1	1	0	0
13		1	1	0	1
14		1	1	1	0
15		1	1	1	1
16	1	0	0	0	0
17	1	0	0	0	1
18	1	0	0	1	0
19	1	0	0	1	1
20	1	0	1	0	0
21	1	0	1	0	1
22	1	0	1	1	0
23	1	0	1	1	1
24	1	1	0	0	0
25	1	1	0	0	1
26	1	1	0	1	0
27	1	1	0	1	1
28	1	1	1	0	0
29	1	1	1	0	1
30	1	1	1	1	0
31	1	1	1	1	1

Quadro 6

Para analisarmos este jogo, devemos fazer algumas observações importantes. O número 31 aparece em todos os calendários, pois ele tem o algarismo 1 em todas as cinco posições na sua representação numérica em base 2 e todas as potências de base 2 possíveis, neste caso, na sua decomposição, conforme vemos no quadro acima.

Em cada calendário temos 16 números assinalados. Finalmente, observamos uma regularidade ao sublinhar estes números que se encontram apontada na figura 26, de modo que no primeiro calendário assinalamos um número sim e outro não; no segundo, sublinhamos de dois em dois; no terceiro, de quatro em quatro, no quarto, de oito em oito e, no último, meio mês sim e meio mês não.

3.2.2 - Jogo das tábuas

Vamos adivinhar o número que você pensou...

Como é possível adivinhar?

1 – Para adivinhar o número pensado precisamos destas tábuas com números.

1	3	5	7	9	11	13	15
17	19	21	23	25	27	29	31
33	35	37	39	41	43	45	47
49	51	53	55	57	59	61	63
65	67	69	71	73	75	77	79
81	83	85	87	89	91	93	95
97	99	10	103	105	107	110	111
113	115	117	119	121	123	125	127

1ª tabela

2	3	6	7	10	11	14	15
18	19	22	23	26	27	30	31
34	35	38	39	42	43	46	47
50	51	54	55	58	59	62	63
66	67	70	71	74	75	78	79
82	83	86	87	90	91	94	95
98	99	102	103	106	107	110	111
114	115	118	119	122	123	126	127

2ª tabela

4	5	6	7	12	13	14	15
20	21	22	23	28	29	30	31
36	37	38	39	44	45	46	47
52	53	54	55	60	61	62	63
68	69	70	71	76	77	78	79
84	85	86	87	92	93	94	95
100	101	102	103	108	109	110	111
116	117	118	119	124	125	126	127

3ª tabela

8	9	10	11	12	13	14	15
24	25	26	27	28	29	30	31
40	41	42	43	44	45	46	47
56	57	58	59	60	61	62	63
72	73	74	75	76	77	78	79
88	89	90	91	92	93	94	95
104	105	106	107	108	109	110	111
120	121	122	123	124	125	126	127

4ª tabela

16	17	18	19	20	21	22	23
24	25	26	27	28	29	30	31
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63
80	81	82	83	84	85	86	87
88	89	90	91	92	93	94	95
112	113	114	115	116	117	118	119
120	121	122	123	124	125	126	127

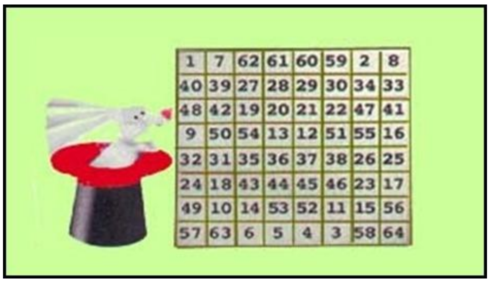
5ª tabela

32	33	34	35	36	37	38	39
40	41	42	43	44	45	46	47
48	49	50	51	52	53	54	55
56	57	58	59	60	61	62	63
96	97	98	99	100	101	102	103
104	105	106	107	108	109	110	111
112	113	114	115	116	117	118	119
120	121	122	123	124	125	126	127

6ª tabela

64	65	66	67	68	69	70	71
72	73	74	75	76	77	78	79
80	81	82	83	84	85	86	87
88	89	90	91	92	93	94	95
96	97	98	99	100	101	102	103
104	105	106	107	108	109	110	111
112	113	114	115	116	117	118	119
120	121	122	123	124	125	126	127

7ª tabela



2 – Indique em quais das tábuas encontram o número pensado. Não pode ser maior que 127.

3 – Logo diremos o número pensado.

Consideram-se 7 tábuas de 64 casas contendo certos números compreendidos entre 1 e 127. Podemos saber onde se encontram qualquer um destes números indicados nas tábuas desde que se saiba em que tábuas estes se encontram. Assim, para adivinhar o número pensado é só pedir ao aluno que indique em quais tábuas aquele número se encontra. Some os todos os números do canto superior esquerdo. O resultado é o número pensado. Depois de realizar várias adivinhações, o professor pode perguntar: Como se faz esta adivinhação?

Mais uma vez a adivinhação é realizada por que podemos escrevemos qualquer número natural como potências de base 2 ou como soma de diferentes potências de base 2, ou seja podemos escrever qualquer número natural como um número do sistema numérico de base 2.

Para construirmos estas tabelas devemos considerar que todos os números escritos na representação de base 2 possuem, no máximo, 7 algarismos, pois o maior valor: $127 = 1111111_2$, ou seja, a representação numérica de 127 em base 2 possui 7 dígitos. Por isso, são sete tabelas. Além disto, 127 pode ser escrito como a soma de todas as potências de base 2 que aparecem nas tábuas, ou seja, $127 = 2^0 \quad 2^1 \quad 2^2 \quad 2^3 \quad 2^4 \quad 2^5 \quad 2^6 = 1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 + 16 \quad 32 \quad 64$, que se encontram na 1ª, 2ª, 3ª, ..., 7ª tabelas, respectivamente.

As tábuas estão ordenadas, em ordem crescente, de acordo com as potencias de base 2 que aparecem no canto superior esquerdo, de modo que a primeira tabela começa com o $1 = 2^0$, a segunda com o $2 = 2^1$, a terceira com o $4 = 2^2$ e assim até a sétima que se inicia com $64 = 2^6$. Em cada tabela, existem aqueles números que, na representação em base dois, apresentam os algarismos um, no sentido da direita para a esquerda, nas posições que correspondem à ordenação das tabelas e, na decomposição em adição de potências de base 2, contêm a potência correspondente ao valor do canto superior esquerdo. Vejamos um exemplo:

$57 = 111001_2 = 2^0 \quad 2^3 \quad 2^4 \quad 2^5 = 1 \quad 8 \quad 16 \quad 32.$

O número 57 encontra-se na primeira, quarta, quinta e sexta tabuas e apenas nestas.

Desta forma, levando em consideração a representação dos valores em base 2, na primeira tabela começamos com o número 1 que possui o dígito 1 na primeira posição e $1 = 2^0$. Todos os outros números que se encontram na primeira tabela, possuem o dígito 1 na primeira posição da sua representação em base 2 e contêm a potência 2^0 na sua decomposição. Na segunda tabela começamos com o número 2 que possui o dígito 1 na segunda posição assim como todos os outros números pois, estes números contêm a potência 2^1 na decomposição. E assim até a 7ª tabela. Verifiquem que este mecanismo também acontece no jogo anterior da Mágica Matemática.

Veremos que há valores que se repetem entre as tabelas, como já vimos no exemplo do número 127 que está em todas as tabuas.

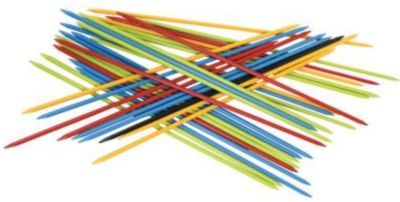
Este jogo tem o mesmo princípio do jogo anterior. A diferença está no formato das tabelas montadas. Neste jogo, não montamos as tabelas com todos os valores de 1 a 127 e não assinalamos os valores eles que estivessem com a posição do dígito 1 de acordo com a tabela em que se encontram. Aqui colocamos apenas os 64 números que atendam à característica definida para cada uma das tabelas montadas.

A exploração desta atividade pode ser estendida como, por exemplo, solicitar a realização do inverso desta operação, que é transformar qualquer valor menor que 127 na representação de base 2. Isso pode ser feito, sem dificuldades, mentalmente. Por exemplo, o número 100 se encontra na sétima, sexta e terceira tabelas que possuem, respectivamente, as potências 2^6 , 2^5 e 2^2. Verificamos que $100 = 64 \quad 32 \quad 4 = 2^6 \quad 2^5 \quad 2^2$, logo a representação de base 2 do número 110 possui o algarismo 1 na 3ª, na 6ª e na 7ª posição, de modo que $100 = 1100100_2$.

Outra questão que se pode colocar aos alunos é responder por que 2^4 não é uma das potências da decomposição do número 35. Se 2^4 fosse uma das potências da decomposição de 35, as restantes teriam que somar 19; como $19 = 2^4 \quad 2^1 \quad 2^0$, a potência 2^4 apareceria repetida na decomposição de 35 e teríamos $35 = 2^4 \quad 2^4 \quad 2^1 \quad 2^0 = 2 \quad 2^4 \quad 2^1 \quad 2^0 = 2^5 \quad 2^1 \quad 2^0$. Podemos realizar esta atividade com os números restantes e pedir aos alunos que expliquem este fato.

Ainda podemos perguntar se é possível montar jogos como estes com outros valores. Como já relatamos, o maior valor é um número cuja representação na base 2 apresenta apenas os dígitos 1. Lembre-se $31 = 11111_2$ e possui 5 dígitos e $127 = 1111111_2$ e possui 7 dígitos. No primeiro caso, construímos 5 tabelas quadradas com 16 dígitos e no segundo, construímos 7 tabelas quadradas com 64 valores. Se buscarmos outros valores em que a representação na base 2 é semelhante, temos, por exemplo, $7 = 111_2$ que possui 3 dígitos, então podemos construir 3 tabelas quadradas com valores entre 1 e 7 com 4 valores cada uma. Outro exemplo é $511 = 111111111_2$ que possui 9 dígitos e então podemos ter 9 tabelas quadradas com valores entre 1 e 511 com 256 valores cada. Os valores 31, 127, 7 ou 511 tem número impar de dígitos na sua representação em base 2. Se optarmos pelo número $15 = 1111_2$, teremos 4 tabelas com 8 dígitos cada. Aqui as tabelas construídas não são quadradas e sim retangulares. Observe que 15 tem um número par, quatro, de dígitos na sua representação de base 2.

3.3.3 - Jogos dos Palitos:



Duas pessoas participam do jogo.

1- Elas começam a partida com 128 palitos cada um.
2- Em cada jogada, elas tiram par ou ímpar; se sai par, o jogador 1, que pediu a opção par, dá a metade de seus palitos para o outro jogador 2 e, se sai impar é o jogador 2 que dá a sua metade para o jogador 1.
3- Eles repetem o procedimento da regra anterior até que um deles fique com um número ímpar de palitos, quando a partida acaba. Ganha quem ficar com o maior número de palitos.

Veja o que acontece em uma partida fictícia:

Jogador 1	Jogador 2
128	128

Par $\Rightarrow$ 1ª jogada

Jogador 1	Jogador 2
64	192

ímpar $\Rightarrow$ 2ª jogada

Jogador 1	Jogador 2
160	96

par $\Rightarrow$ 3ª

Jogador 1	Jogador 2
80	176

ímpar $\Rightarrow$ 4ª

Jogador 1	Jogador 2
168	88

par $\Rightarrow$ 5ª

Jogador 1	Jogador 2
84	172

ímpar $\Rightarrow$ 6ª

Jogador 1	Jogador 2
190	86

par $\Rightarrow$ 7ª

Jogador 1	Jogador 2
85	171

par $\Rightarrow$ 8ª

Jogador 1	Jogador 2

...

Figura 26

Acompanhando esta partida, chamamos jogador 1 de J1 e jogador 2 de J2, de modo que na 1ª jogada saiu a opção par, então J1 dá 64 palitos (metade de 128) para J2, logo J1 fica com 64 e J2 com 128 64 = 192.

Na 2ª jogada saiu opção ímpar, então J2 dá a metade de 192 que é 96 para J1, logo J1 fica com 64 96 = 160 e J2 fica com 96 palitos.

Na 3ª jogada, a opção é par, então J1 fica com 80 e J2 com 176 (96 80) palitos; na 4ª jogada, a opção é impar, então J1 fica com 168 (80 88) e J2 fica com 88; na 5ª jogada, a opção é par, então J1 fica com 84 e J2 fica com 172 palitos; na 6ª jogada, a opção é impar, então J1 fica com 190 e J2 fica com 86 palitos e, finalmente, na 7ª jogada, a opção é par, então J1 fica com 85 e J2 com 171, quando termina a partida. Como J2 ficou com a maior quantidade de palitos ele ganha a partida. A partida acabou na 7ª jogada.

Podemos realizar as seguintes atividades:

a) Pedir aos alunos que joguem algumas partidas e registrem os resultados parciais e finais,
b) Sugerir aos alunos que completem as tabelas de jogos fictícios em vários tipos de situação de jogo,
c) A partir do resultado final de uma partida, informar se saiu par ou ímpar na última jogada ou mesmo a sequência de pares e impares desta partida,
d) Desafiá-los a descobrir o porquê do término do jogo na sétima partida.

Observe que o término da partida na 7ª jogada vai acontecer com qualquer partida que se iniciar com esta quantidade de palitos, pois, $128 = 2^7$. Verificamos também, conforme algoritmo das divisões sucessivas que, são necessárias sete divisões sucessivas por 2 para obter a representação de 127 na base 2 e só um dígito 1 aparece com o último quociente obtido nesta divisões, ou seja, 128 é resultado de uma potência de base 2. Este jogo é possível com valores que possuem esta característica, tais como: 32, 64, 256, etc. Então, podemos propor o jogo com outra quantidade de palitos, por exemplo, 32 ou 64 ou 256 e realizar as mesmas atividades.

3.2.4 - Computador de papel

Vamos confeccionar cartões de cartolina perfurados para trabalhar com números de 0 a 31, utilizando-se a base 2. Esses números podem ser escritos com 5 dígitos, uma vez que $31 = 11111_2$, ou seja, a representação na base 2 de 31 tem, no máximo, 5 dígitos. De acordo com o quadro abaixo, os valores de 0 a 31 se apresentam na base2 com 5 dígitos, por que os cartões confeccionados apresentam 5 marcações entre furos e ou fendas e isto facilita a compreensão do formato que os cartões aparentam.

Base 10	Base 2	Base 10	Base 2	Base 10	Base 2	Base 10	Base 2
0	00000	8	01000	16	10000	24	11000
1	00001	9	01001	17	10001	25	11001
2	00010	10	01010	18	10010	26	11010
3	00011	11	01011	19	10011	27	11011
4	00100	12	01100	20	10100	28	11100
5	00101	13	01101	21	10101	29	11101
6	00110	14	01110	22	10110	30	11110
7	00111	15	01111	23	10111	31	11111

Quadro 7

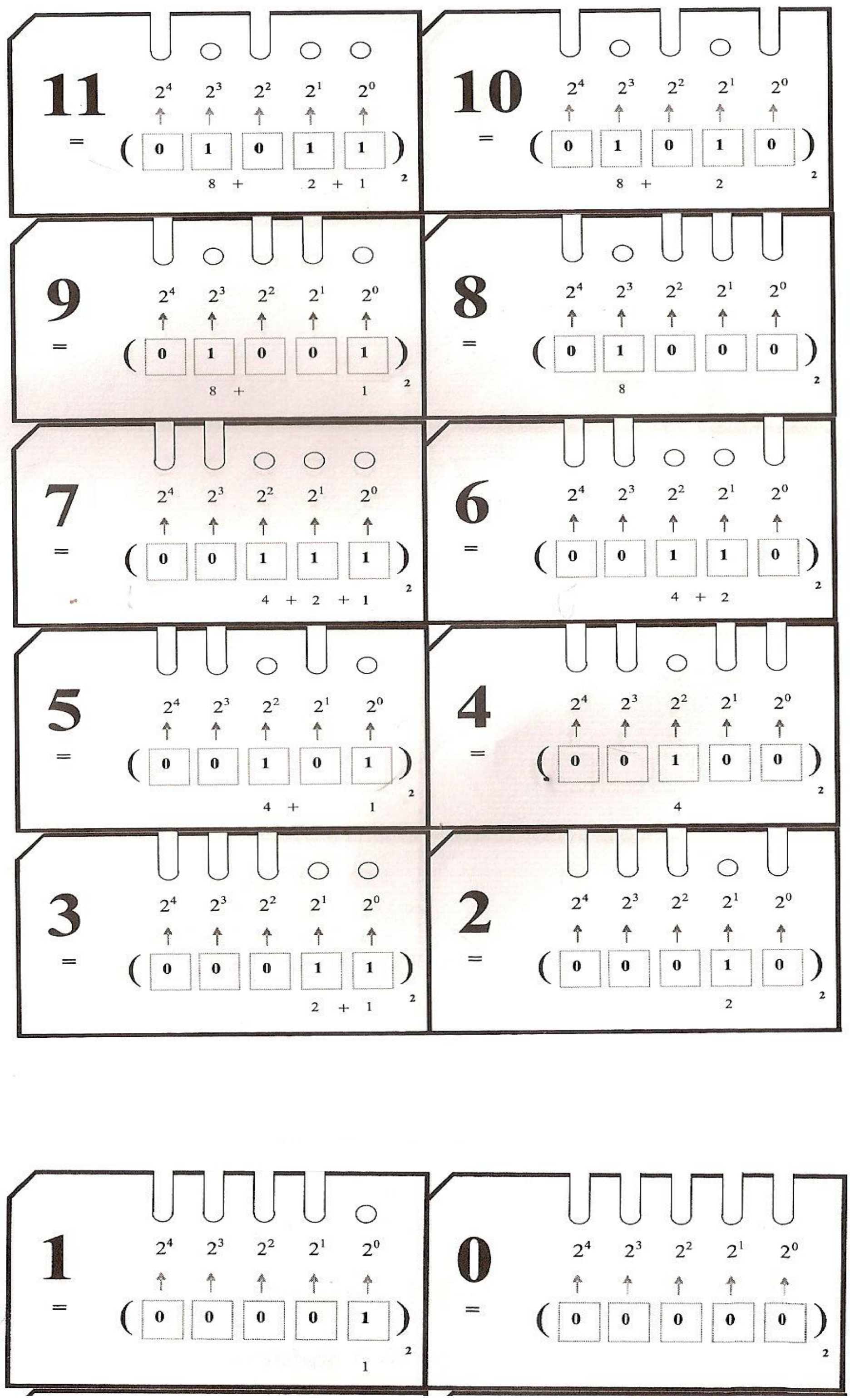
Para confeccionar os cartões, vamos usar os modelos conforme se apresentam nas figuras 27, 28 e 29, recortando-os, perfurando-os e cortando neles as fendas. Os cartões possuem os valores na base decimal e a representação na base 2. Para a representação na base 2, os furos representam o número 1 e as fendas o número 0. Este formato garante que ao fazer um maço com as cartas e colocar um palito ou clipe por alguns dos buracos do maço, e levantá-lo, algumas cartas cairão e outras ficarão presas no palito. Repetindo organizadamente este procedimento poderemos realizar operações com os números na base 2 de 0 a 31, tais como:

a) Separar os pares dos ímpares. Basta colocar o palito no primeiro furo à direita e levantar. Todos os cartões com números pares cairão.
b) Colocar as cartas em ordem crescente. Para isto, embaralhe as cartas. Comece colocando o palito no primeiro buraco da direita (casa das unidades). Levante o maço, deixando as cartas caírem, arrume as cartas que caíram em ordem e na frente do restante e repita o mesmo procedimento para cada um dos furos que se apresentam, sempre arrumando as que caírem em ordem. Quando terminar, todas as cartas estarão em ordem crescente após 5 levantamentos.
c) Localizar qualquer número de 0 a 31 com a colocação do palito e levantamento do maço até 5 vezes. Isto se deve ao fato de que qualquer número natural tem

representação única na base 2. Veja, por exemplo, como localizar a carta 15: coloque o palito na casa das unidades e levante o maço, descarte as que caíram; a seguir coloque no furo 2^1, levante e descarte as que caíram. Coloque na casa 2^2 e 2^3 levante e descarte as cartas que caíram. Coloque o palito na casa 2^4, a carta que caiu é a 15.

d) Sugerir questões sobre quantidade de cartas obtidas com um número maior de furos, por exemplo, 6. Ou ainda sobre quantos furos, no mínimo, serão necessários para representar os números de 0 a 127.

e) Relacionar os cartões perfurados com o Jogo Mágica Matemática e pedir para descrever como usar os cartões perfurados para adivinhar o aniversário de uma pessoa associando com o jogo da Mágica Matemática.



11 = 2^4 2^3 2^2 2^1 2^0 (0 1 0 1 1)2 8 + 2 + 1
10 = 2^4 2^3 2^2 2^1 2^0 (0 1 0 1 0)2 8 + 2
9 = 2^4 2^3 2^2 2^1 2^0 (0 1 0 0 1)2 8 + 1
8 = 2^4 2^3 2^2 2^1 2^0 (0 1 0 0 0)2 8
7 = 2^4 2^3 2^2 2^1 2^0 (0 0 1 1 1)2 4 + 2 + 1
6 = 2^4 2^3 2^2 2^1 2^0 (0 0 1 1 0)2 4 + 2
5 = 2^4 2^3 2^2 2^1 2^0 (0 0 1 0 1)2 4 + 1
4 = 2^4 2^3 2^2 2^1 2^0 (0 0 1 0 0)2 4
3 = 2^4 2^3 2^2 2^1 2^0 (0 0 0 1 1)2 2 + 1
2 = 2^4 2^3 2^2 2^1 2^0 (0 0 0 1 0)2 2
1 = 2^4 2^3 2^2 2^1 2^0 (0 0 0 0 1)2 1
0 = 2^4 2^3 2^2 2^1 2^0 (0 0 0 0 0)2

Figura 27

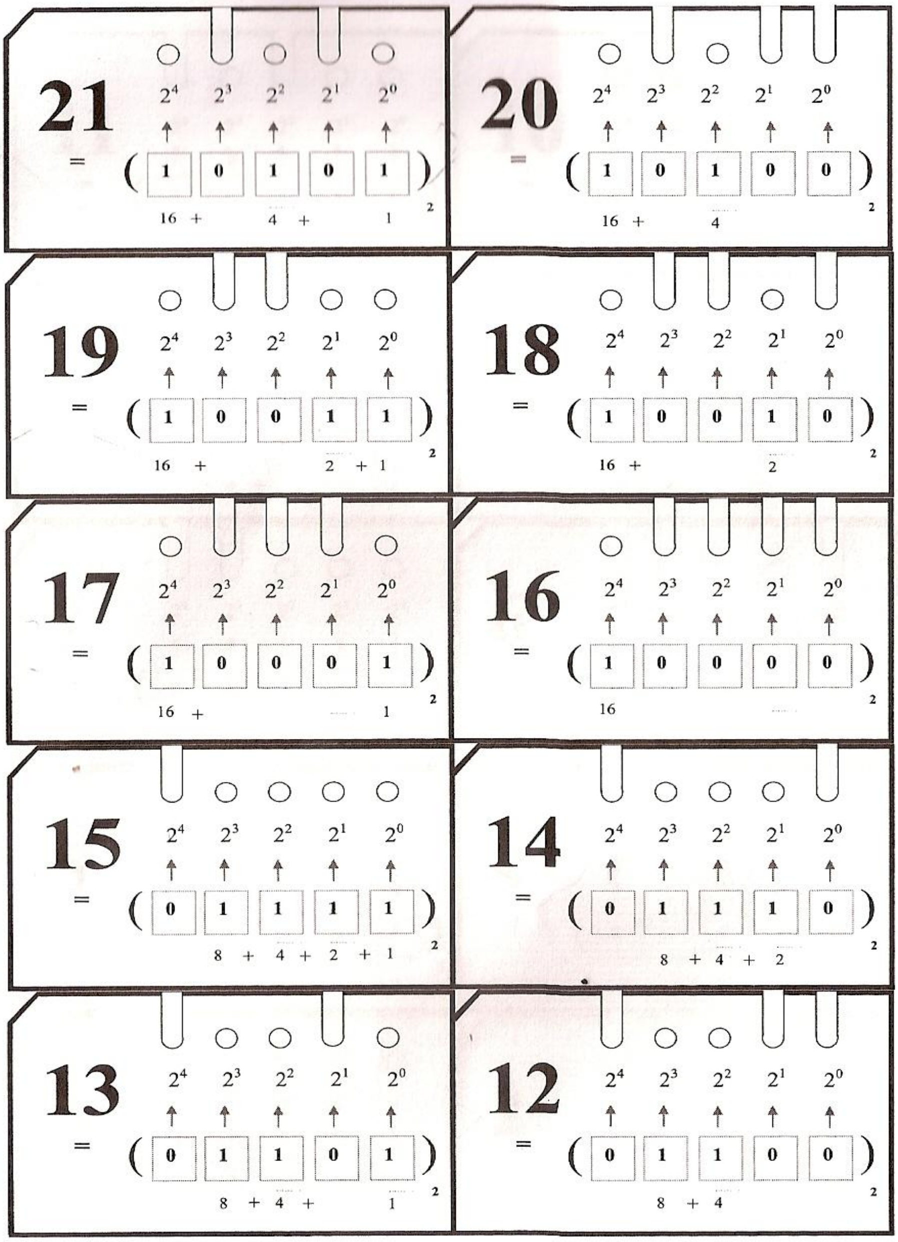


Figura 28

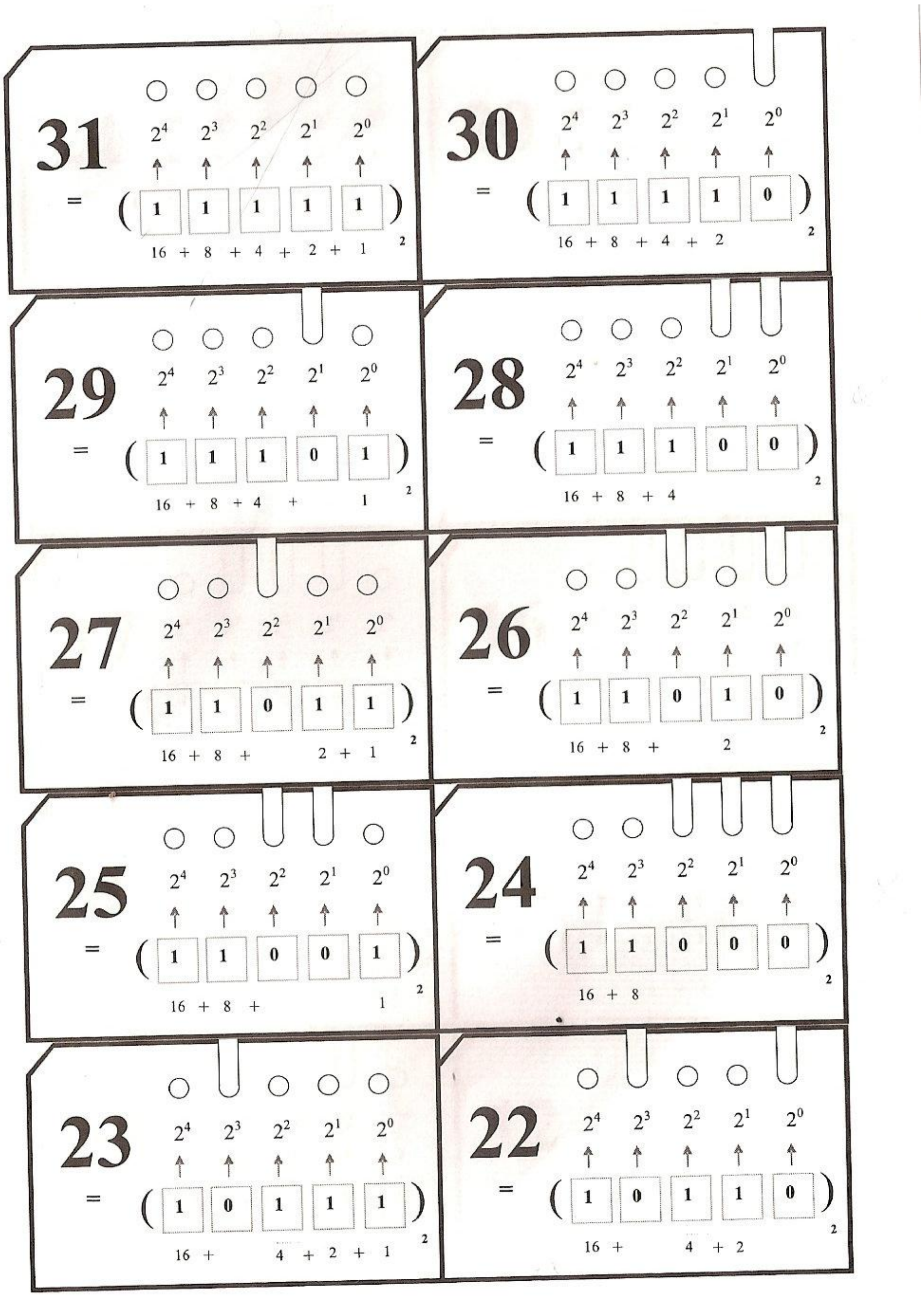


Figura 29

Capítulo 4

Desafios com Sistemas de Numeração

Neste capítulo, vamos apresentar desafios nos quais utilizamos a estratégia de resolução relacionada aos sistemas de numeração de bases decimais e não decimais, como a base 3, a base 2 e a base 100. Faremos a apresentação e a explicação de cada uma das atividades para que sejam bem encaminhadas em sala de aula e visem reforçar e ampliar o uso deste tipo de atividades com nossos alunos.

4.1 - Desafio das 100 moedas

Cem moedas, indistinguíveis pela forma, estão dispostas em 10 pilhas com 10 moedas cada. Noventa dessas moedas pesam 10g cada e dez moedas restantes pesam 9g e estão em uma mesma pilha. Com uma pesagem em uma balança de um prato com marcador, descobrir a pilha falsa.

Devemos lembrar que deve ser feita apenas uma pesagem e que a balança mostra a pesagem com os dígitos no visor. Desta forma, o aluno colocará as moedas sobre o prato e ligará a balança para verificar o peso e isto uma única vez.

Após apresentarmos o problema, devemos aguardar um tempo no qual o aluno busca o entendimento da questão e pensa numa estratégia de solução. Uma maneira de ajudar a encontrar a solução, podemos propor um desafio mais simplificado, porém contendo a ideia que será usada para solucionar o problema principal. Peça aos alunos que considere, inicialmente, duas ou três pilhas de 10 moedas cada. Uma das pilhas tem moedas com 9 g e a(s) outra(s) possuem moedas que pesam 10 g cada, descubra a pilha falsa com apenas uma pesagem. Para facilitar os registros, podemos pedir-lhes que enumerem as pilhas.

Neste caso, novamente, devemos deixar nosso aluno pensar e propor soluções e testar suas soluções e acreditamos ser mais fácil pensar nas possibilidades e entender o raciocínio utilizado para resolver o problema com uma quantidade menor de moedas.

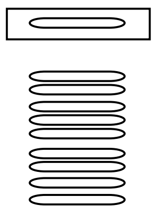
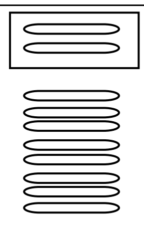
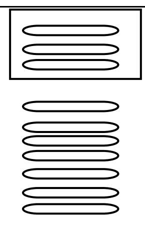
O aluno deverá perceber que se escolhe uma das pilhas, ele pode escolher das 3 ou mesmo das 2, a pilha que está com peso normal e a pilha que possui moedas com peso menor não será escolhida na primeira pesagem. Se ele escolhe a pilha falsa na primeira pesagem deve perceber que o fator “sorte” contribuiu para que ele resolvesse a questão. Além desta, existem outras estratégias que podem dar a impressão de resolução do problema. Mas, neste caso, elas podem estar associadas à probabilidade de encontrar uma solução dentre três possibilidades, mas não permite encontrar a solução certa para qualquer situação apresentada.

Se ele retira uma moeda de cada pilha, ordenadamente ou não, e pesa, ou pesa todas as pilhas em conjunto, não conseguirá distinguir em qual das pilhas se encontram as moedas com peso menor.

Devemos acompanhar as estratégias apresentadas e analisar as tentativas e erros, verificando se encontraram a real solução que permite descobri em qual das pilhas de moedas se encontram aquelas que têm peso menor, na primeira e única pesagem.

A solução é retirar, aleatoriamente, uma, duas e três moedas, respectivamente, de cada pilha, colocar as seis moedas retiradas no prato e ligar a balança. Pelo peso apurado, descobre-se em qual das pilhas se encontram as moedas com pesos menores.

No quadro abaixo, apresentaremos uma solução e analisaremos as possíveis pesagens registradas pela balança. As letras V e F abaixo de cada pilha representam, respectivamente, pilha verdadeira ou falsa.

Pilhas de moedas				Valor da Pesagem
1º caso	F	V	V	59 g
2º caso	V	F	V	58 g
3º caso	V	V	F	57 g

Quadro 8

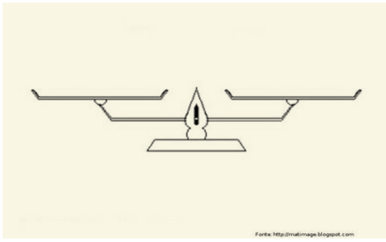
Se todas as moedas fossem verdadeiras, ou melhor, pesassem 10 g cada uma, o valor da pesagem das seis moedas retiradas seria 60 g. No primeiro caso, temos 9 20

30 = 59 g, a diferença é de 1 g pois retiramos uma moeda na pilha falsa. No segundo caso, o valor da pesagem é 58 g (10 18 30), a diferença de 2 g indica que retiramos duas moedas da pilha falsa e, por fim, no terceiro caso, a pesagem registrada é 57 g (10 20 27), a diferença de 3 g indica que da pilha falsa tomamos três moedas.

Após este momento, voltamos ao desafio com as 100 moedas. O segredo está na quantidade crescente de moedas retiradas em cada pilha a partir de uma moeda até a quantidade total da pilha. Sabendo-se a quantidade de moedas retirada em cada pilha, independentemente da ordem, e pelo peso registrado na balança, descobre-se qual das pilhas possuem as moedas com peso menor que as demais.

4.2 - Problemas da Pesagem I e II

Os dois problemas que se seguem utilizam de um dispositivo de pesagem que é a balança de dois pratos. É bem provável que a maioria de nossos alunos, hoje, não conheça uma balança deste tipo. Assim, vamos explicar, basicamente, o mecanismo de funcionamento deste dispositivo.



A balança de dois pratos é um dos instrumentos de medição mais antigos que se conhece. Ela é composta por dois pratos a mesma distância de um eixo central, de modo que podemos comparar o peso de dois objetos, um em cada prato. Se de um lado o objeto for mais pesado, este lado fica mais baixo que o outro. Se os objetos tiverem pesos iguais, a balança ficará em equilíbrio, ou seja, não haverá nenhum movimento dos pratos. Para realizar a pesagem, coloca-se um ou mais objetos de peso conhecido (peso-padrão) e, no outro, o objeto que se deseja pesar. São acrescidos ou retirados pesos-padrão até que se estabeleça o equilíbrio entre os dois pratos e temos o peso relativo do objeto.

4.2.1 – Problema da pesagem I

Um comerciante adquiriu uma balança de dois pratos. Qual é o número mínimo de pesos que ele deverá possuir para pesar qualquer quantidade inteira entre 1 a 100g, colocando os pesos apenas em um dos pratos da balança?

Poderíamos propor, para resolver o problema dado, que o aluno comece encontrando soluções para pesar quantidade de 1 a 5 gramas, lembrando que a resposta deve apresentar o número mínimo de pesos que podemos utilizar para pesar qualquer quantidade inteira proposta. No caso, se esta quantidade fosse de 1 a 5 gramas, poderíamos ter pesos de valores tais como 1, 2, 3, 4 e 5 gramas – 5 pesos no total – ou até mesmo 5 pesos de 1 grama cada. Entretanto queremos saber se é possível ter uma quantidade menor e pesar as mesmas quantidades ou qualquer quantidade de gramas? É possível utilizar outros valores de pesos que somados ou não podem expressar qualquer valor inteiro em gramas utilizando-se um número menor de pesos?

Vamos utilizar potências de base 2, a partir do 1 podemos escrever qualquer número utilizando estas potências e com a particularidade de que sempre utilizamos apenas uma vez cada um destes valores na composição de qualquer quantidade representada na base 2. Lembremos as potências de base 2:

$2^0 = 1$

$2^1 = 2$

$2^2 = 4$

$2^3 = 8$

$2^4 = 16$

$2^5 = 32$

$2^6 = 64$, etc.

Exemplificando, vamos escrever os números de 1 a 10 utilizando as potências de base 2, ou seja, escrever estes números no sistema de base 2, como já vimos anteriormente no estudo do sistema de numeração binário ou base 2.

$1 = 2^0$

$2 = 2^1$

$3 = 2 \quad 1 = 2^1 \quad 2^0$

$4 = 2^2$

$5 = 4 \quad 1 = 2^2 \quad 2^0$

$6 = 4 \quad 2 = 2^2 \quad 2^1$

$7 = 4 \quad 2 \quad 1 = 2^2 \quad 2^1 \quad 2^0$

$8 = 2^3$

$9 = 8 \quad 1 = 2^3 \quad 2^0$

$10 = 8 \quad 2 = 2^3 \quad 2^1$

.

.

Assim para pesar quantidades de 1 a 5 gramas podemos usar pelos dados acima os pesos de 1g, 2g e 4g, ou seja, três pesos são suficientes para pesar estas quantidades. Um número menor de pesos que os citados no início da apresentação deste problema. Utilizamos valores que são resultados das potências de base 2, que nada mais é que escrever as quantidades no sistema de numeração de base 2. Dois pesos são insuficientes, pois, por exemplo, pesos de 1g e 2g permitem no máximo 3 pesagens ou pesar até 3g. Com os três pesos de 1g, 2g e 4g podemos pesar até 7g ou efetuar 7 pesagens.

Continuemos nossa estratégia de resolução pedindo que, a partir de agora, encontremos o número mínimo de pesos para pesar de 1 a 10 gramas de uma determinada substância. Observe que na escrita dos números de 1 a 10 usando as potências de base 2, utilizamos os valores 1, 2, 4 e 8. Podemos então afirmar que para pesar de 1 a 10 gramas serão necessários quatro pesos: 1g, 2g, 4g, e 8g, já que com estes valores conseguimos obter qualquer quantidade inteira entre 1 e 10. Como já vimos anteriormente, com 3 pesos não conseguimos chegar até 10 gramas. Verificamos também que com estes 4 pesos podemos pesar até $1 \quad 2 \quad 4 \quad 8 = 15$ gramas.

A partir destes exercícios podemos então voltar a questão de origem desta atividade que é a pesagem de 1 a 100 gramas de ouro usando um dos pratos da balança e uma quantidade mínima de pesos.

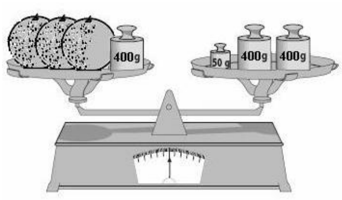
Solicitar aos alunos que continuem a encontrar potências de 2 cuja soma se aproximem de valores acima de 100 gramas. Pela atividade anterior já sabem que 1, 2, 3 e 4 somam 15, pelas potências já calculadas no princípio da atividade vamos propor que eles acrescentem os valores encontrados no cálculo destas potências até chegarem a um valor acima de 100. Nesta atividade eles verão que 1   2   4   8   16   32   64 = 127. Então com 7 pesos com estes valores podemos pesar qualquer quantidade entre 1 e 100 gramas e o valor máximo pesado com eles é 127 gramas.

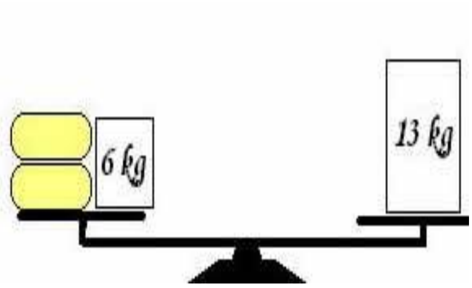
É importante salientar que como todo número é uma composição de valores (todos ou não) obtidos das potências de 2, podemos utilizar somente um dos pratos da balança já que cada peso é colocado ou não no prato da esquerda para realizar quaisquer pesagens que queremos.

4.2.2 - Problema da Pesagem II

Seu João precisa pesar uma pera em uma balança de dois pratos. Ele possui 5 pesos distintos de 1g, 3g, 9g, 27g e 81g. Seu João, equilibrando a pera com os pesos, descobriu que a pera pesa 61g. Quais pesos estavam no mesmo prato que a pera?

a) 1, 9 e 27   b) 3 e 27   c) 9 e 27   d) 1 e 9   e) 3 e 9





Para pensarmos no desafio proposto acima, vamos exemplificar com um problema que apresentaremos a seguir: Em uma balança de dois pratos estão equilibrados, num dos pratos, dois queijos de pesos iguais e 6 quilogramas; no outro prato estão equilibrados 13 quilogramas. Qual é o peso dos dois queijos?

Neste caso, temos uma situação em que, pelo valor determinado de pesos-padrão, temos que descobrir o peso do objeto equilibrando-o com pesos nos dois pratos da balança. Facilmente, descobrimos que os dois queijos pesam 7 kg.

Voltando ao problema inicial, vemos que para resolver essa questão, devemos colocar os 5 pesos disponíveis e a pera nos pratos da balança até que ela se equilibre, ou seja, até que a soma dos pesos em cada lado seja igual. Isso ocorre quando colocamos de um lado os pesos com 1, 9 e 81 gramas (totalizando 91 gramas) e do outro lado a pera, o peso de 27 gramas e o de 3 gramas e do outro (que pelo equilíbrio também totaliza 91 gramas). Assim ele descobre que a pera pesa 61 gramas, pois 27   3 = 30; 30   61 = 91 g. Então: 61   27   3 = 81   9   1. Portanto, os pesos que se encontram no mesmo prato da pera é 3 e 27 gramas e a alternativa correta é a letra b.

Observamos que os pesos são todos potências de base 3, como mostraremos abaixo, fato que nos levou a pensar nas situações problemas cuja pesagem em uma balança de dois pratos utilizando pesos cujos valores são obtidos na base 3. Esta é uma atividade interessante que podemos explorar para exemplificar o uso do sistema de numeração de base 3. Ao ler o problema, temos a seguinte questão: para quais valores será possível equilibrar uma pera, cujo peso em gramas é um número inteiro, utilizando os pesos de 1g, 3g, 9g, 27g e 81g?

Revendo o cálculo de algumas potências de base 3, procuraremos aprofundar nosso estudo para explicar a resolução deste problema.

$3^0 = 1$

$3^1 = 3$

$3^2 = 9$

$3^3 = 27$

$3^4 = 81$

$3^5 = 243$

$3^6 = 729$, etc.

Estes cálculos confirmam que os pesos acima são todos na base 3. Utilizaremos uma propriedade interessante a representação de números naturais na base 3 para conseguirmos explicar a resolução de problemas deste tipo.

Lembraremos, antes, que qualquer número natural a, pode ser escrito em qualquer base b. Já vimos que na base 3, representamos qualquer quantidade utilizando os dígitos 0, 1 e 2. Vejamos alguns exemplos:

No caso da pera que tem 61 gramas:

$$
\begin{array}{r|l}
61 & 3 \\
\hline
\boldsymbol{1} & 20 \;|\; 3 \\
 & \boldsymbol{2} \quad 6 \;|\; 3 \\
 & \quad \boldsymbol{0} \quad \boldsymbol{2}
\end{array}
$$

$$61 = \boldsymbol{2021}_3 = 2 \quad 3^3 \quad 0 \quad 3^2 \quad 2 \quad 3^1 \quad 1 \quad 3^0$$

A propriedade interessante é que podemos representar qualquer quantidade na base 3 como soma das potências cujos coeficientes são -1, 0 e 1 ou pela diferença de números cujas representações em base 3 só contem os algarismos 0 e 1.

Esta propriedade se assemelha à da base 2 na qual podemos compor números utilizando ou não valores obtidos no cálculo das potências uma só vez, so que na base 3 podemos fazer esta composição utilizando ou não valores obtidos das potências de base 3 transformando esta composição numa igualdade dos valores que encontram de cada lado. Aqui está a explicação para colocarmos os pesos em qualquer um dos pratos na pesagem com uma balança de dois pratos.

Assim reescrevemos o valor de peso da pera que é de 61 gramas nesta nova representação:

$$
\begin{array}{cc|cccc}
61 & 3 & & & & \\ \cline{2-2}
1 & 20 & \multicolumn{1}{|c}{3} & & & \\ \cline{3-3}
 & -1 & 7 & \multicolumn{1}{|c}{3} & & \\ \cline{4-4}
 & & 1 & 2 & \multicolumn{1}{|c}{3} & \\ \cline{5-5}
 & & & -1 & 1 &
\end{array}
$$

$61 = 1 \quad 3^4 \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{3^3} \quad 1 \quad 3^2 \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{3^1} \quad 1 \quad 3^0$, logo:

$61 = 81 \quad \mathbf{27} \quad 9 \quad \mathbf{3} \quad 1.$

Então, 61 **27** **3** = 81 9 1 que é a igualdade mostrada no começo do texto para representar a solução do problema 9.

Desta forma é possível efetuar a pesagem de qualquer número inteiro de gramas numa mesma balança com dois pratos utilizando apenas um peso de 1g, um peso de 3 g, um peso de 9 g, um peso de 27 g, etc.

Podemos por exemplo propor o mesmo problema 8 com a ressalva de que os pesos podem ser colocados em qualquer dos pratos da balança. Neste caso, vamos descobrir o número mínimo de pesos para qualquer quantidade inteira de gramas de ouro de 1 a 100 gramas. Para resolver este problema precisamos da propriedade interessante do sistema com base 3, que foi estudada anteriormente, no problema da pera, que é o fato de podermos escrever qualquer número natural como diferença de dois números cujas representações em base 3 só contem algarismos 0 e 1. Vamos exemplificar esta propriedade escrevendo 100 na base 3. Como normalmente fazemos usando os coeficientes 0, 1 e 2, temos que 100 = 10201_3, ou seja, $100 = 1 \quad 3^4 \quad 2 \quad 3^2 \quad 1 \quad 3^0$.

Podemos representar essa decomposição em base 3 escrevendo o coeficiente 2 como (3 – 1), vejamos abaixo como este processo se dá:

$$100 = 1 \quad 3^4 \quad \mathbf{2} \quad \mathbf{3^2} \quad 1 \quad 3^0 = 1 \quad 3^4 \quad \mathbf{(3 \quad 1)} \quad \mathbf{3^2} \quad 1 \quad 3^0 =$$

$$100 = 1 \quad 3^4 \quad \mathbf{3} \quad \mathbf{3^2} \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{3^2} \quad 1 \quad 3^0 = \mathbf{1} \quad 3^4 \quad \mathbf{1} \quad 3^3 \quad \mathbf{1} \quad 3^2 \quad \mathbf{1} \quad 3^0$$

Se usarmos os coeficientes -1, 0 e 1, temos que 100 = $11\text{-}101_3$ e sabemos que ao realizar as operações entre as potências de base 3 e os seus coeficientes, encontraremos:

$$100 = 1 \quad 3^4 \quad 1 \quad 3^3 \quad \mathbf{1} \quad \mathbf{3^2} \quad 0 \quad 3^1 \quad 1 \quad 3^0 = 81 \quad 27 \quad \mathbf{9} \quad 1$$

Logo, $100 \quad \mathbf{9} = 81 \quad 27 \quad 1$.

Desta forma, pesamos um objeto de 100 g que tenha sido colocado no prato esquerdo com pesos de valores na potência de base 3, acrescentando a este mesmo prato um peso de 9 g (cujo coeficiente é -1) e, equilibradamente, no prato direito os pesos 81, 27 e 1 g (cujos coeficientes é 1) e, ainda, não utilizamos o peso cujo coeficiente é 0.

Se quiséssemos pesar 38 gramas, veremos que:

38	3		
-1	13	3	
	1	4	3
		1	1

$$38 = 1 \quad 3^3 \quad 1 \quad 3^2 \quad 1 \quad 3^1 \quad 1 \quad 3^0 = 27 \quad 9 \quad 3 \quad 1$$

$$38 \quad 1 = 27 \quad 9 \quad 3$$

Podemos afirmar que para realizar a pesagem pedida no problema acima, basta ter os pesos de 1, 3, 9 27 e 81 gramas (cinco pesos) e nenhum outro valor maior. Com estes pesos e com esta propriedade que permite pesar através do equilíbrio dos pratos usando pesos cujos valores são potências de base 3, conseguimos pesar qualquer quantidade inteira de gramas. Neste caso, o maior peso que pode ser pesado com os pesos dados é 1 3 9

27 81 = 121 gramas. De fato quanto maior o peso do objeto maior o valor de potências de base 3 será necessário para equilibrar a balança.

Por se mais complexo, esta atividade requer que o aluno tenha entendido bem o problema anterior que, deve ser apresentado antes deste.

4.3 – Problema do Rei:

*A população de uma pequena cidade, inclusive seus governantes, sempre gostou de propor e resolver desafios matemáticos. Certo dia, no julgamento de um prisioneiro, propôs o seguinte desafio: o Rei escreveria três números secretos **a**, **b** e **c**, com dois algarismos cada. O prisioneiro precisaria dizer três números **x**, **y** e **z**. Em seguida, o Rei divulgaria o resultado da operação **ax by cz**. A partir desse resultado, o prisioneiro diria quais são os três números secretos escritos pelo Rei. Caso contrário, ele seria condenado. Ajude o prisioneiro a conquistar sua liberdade.*

Vamos utilizar como estratégia dados semelhantes ao problema, mas cujas grandezas sejam menores para que os alunos consigam refletir sobre a questão e então descobrir a solução. Se o rei escrevesse dois números com 1 algarismo, quais o valores o prisioneiro deveria dizer para que os números que o rei escreveu apareçam no resultado da operação? Como poderemos ajudá-lo a ser salvo da condenação? A operação consiste em multiplicar cada um dos valores do prisioneiro com cada um dos valores secretos do rei e somar tudo ao final.

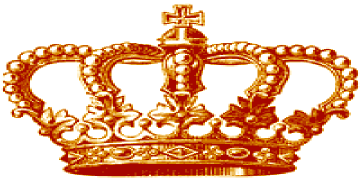
Devemos deixar os alunos fazerem tentativas e erros até descobrir que os valores que o prisioneiro deve dizer é 10 e 1. Por exemplo, se o rei escreveu 2 e 7 e o príncipe disser 10 e 1, temos que 2 10 = 20 e 7 1 = 7 e 20 7 = <u>27</u> ou

7 10 = 70 e 2 1 = 2 ; 70 2 = <u>72</u>. Logo, os números escritos pelo rei são 2 e 7.

Observemos que a ordem em que aparecem os números, neste caso, não interfere, pois só estamos querendo descobrir os números secretos.

Podemos complementar esta atividade propondo que os alunos adivinhem dois números de 1 algarismo que o professorou outro colega pensaram para que eles possam entender o processo de multiplicação e a soma posterior dos resultados parciais e a relação com a base 10 que é a base do nosso sistema de numeração.

Em continuidade, podemos sugerir a mesma atividade para 3 números de 1 algarismo e quais os valores que o outro deve dizer para que no resultado das operações entre eles apareça os valores inicialmente pensados ou escritos secretamente. Neste caso, os alunos descobrirão que é 100, 10 e 1.



Podemos propor em seguida que o prisioneiro descubra dois números de 2 algarismos que o rei escreveu secretamente. Deixar os alunos debaterem entre si e por tentativas e erros descobrir que é o 100 e o 1. Isto porque se o rei escreveu 34 e 21, fazendo 34   100 = 3400 e 21   1 = 21 e somando 3400   21 = 3421, vemos que os números secretos aparecem no resultado da operação. Continuamos esta atividade propondo outras adivinhações com vários valores cujos números possuem 2 algarismos.

Aqui, o interessante é mostrar que no sistema de base decimal os algarismos que conhecemos aparecem em qualquer posição e que para mudar uma posição basta multiplicar por 10 e que é diferente se multiplicarmos por 100, pois neste caso os números mudam 2 posições. Esta atividade reforça bem a relação entre as ordens no sistema decimal e as operações de multiplicação por 10, 100.

Na próxima etapa e última propor o problema do rei original. À medida que eles encontram que os valores que o prisioneiro deve dizer é 1, 100 e 10000, de modo que os números que o rei escreveu apareçam no resultado da operação mostrar que estes valores são resultados de potências de base 100, uma vez que $100^0 = 1$, $100^1 = 100$ e $100^2 = 10000$.

CONCLUSÃO

Atividades bem orientadas utilizando-se dos jogos aqui apresentados e até de materiais concretos durante as aulas de Matemática podem facilitar a aprendizagem de conceitos fundamentais que permitem a aprendizagem do sistema posicional decimal que é o mais empregado no nosso dia a dia e, por sua vez a compreensão das operações básicas: adição, subtração, multiplicação e divisão.

É possível melhorar a compreensão do sistema decimal utilizando-se de sistemas numéricos em outras bases, com o sistema de base 2 e, conseguir a aprendizagem destes conceitos fundamentais básicos e tão importantes para o desenvolvimento do conhecimento matemático. É possível ainda, mostrar a inter-relação entre a matemática e outras áreas do conhecimento. Fazer a associação da utilidade e aplicação do conhecimento matemático dá significado e relevância ao aprendizado em sala de aula.

As atividades apresentadas se destinam ao público que se encontra no Ensino Fundamental e, para isto, é necessário propor atividades que visem desenvolver capacidades, tais como: utilizar diferentes estratégias para quantificar elementos de uma coleção como contagem, estimativa e correspondência de grupos; reconhecer e utilizar a função do número como código na organização de informações; identificar regularidades na escrita numérica, utilizando-as para nomear, ler e escrever números e ler, escrever, comparar e ordenar números naturais para compreensão das características do sistema de numeração decimal. A abordagem destas capacidades se utiliza de estratégias em que retomamos os conhecimentos já consolidados acerca do sistema de numeração decimal posicional e introduzimos com atividades diversificadas como exercícios, jogos ou situações problemas, os sistemas numéricos em outras bases, realizando operações e representações para que os alunos possam compreender sistematizar, formalizar e ampliar os aspectos relacionados às capacidades desenvolvidas nesta proposta. Permite ao educando vivenciar, relacionar e aprofundar as ideias matemáticas estabelecidas neste tópico, respeitando o nível de formalização adequado ao público do Ensino fundamental.

Esse conhecimento e as atividades propostas permitem apontar e verificar suas relações com conceitos matemáticos permite dar suporte e promover uma oportunidade diferenciada de aprendizagem e motivar o alunado neste processo de reconhecer a matemática como um conhecimento importante para a sua formação e articulado com o mundo. Permite ao professor a descoberta de algo novo e ao mesmo tempo inesperado, amplia a demanda pela busca de novos conhecimentos dentro da matemática, novos estudos, novos planejamentos para refletirem sobre a Matemática escolar e lançarem novos olhares sobre ela.

BIBLIOGRAFIA

BARICHELLO, Leonardo. Painel III: Balança e Base 3. **Revista do Professor de Matemática**, São Paulo, n. 79, p. 18-20, Set. 2012.

BELO HORIZONTE. Secretaria Municipal de Educação. **Desafios da Formação Proposições Curriculares Ensino Fundamental Matemática**. Belo Horizonte: SMED, 2010.

BRUMFUL, C. F.; ECHOLZ, R. E.; SHANKS, M. E. **Conceitos Fundamentais da Matemática Elementar**. Rio de Janeiro: Ao Livro Técnico, 1972.

CORREIA, A. I. de A.; LOPES, I. C. da S.; NUNES, M. P. S. **Desafios Constantes na sala de aula**: Uma proposta de Intervenção. In: XXII Encontro Nacional de Professores de Matemática, 2006, Setúbal. ProfMat2006. Porto: Instituto Politécnico do Porto, Escola Superior de Estudos Industriais e de Gestão de Portugal, 2006. p.4-8.

DANTAS, Sérgio Carrazedo. et al. **A Escola é Nossa**: Matemática 3ª Série Ensino Fundamental. São Paulo: Scipione, 2003.

FOMIN, D.; GENKIN, S.; ITENBERG, I. **Círculos Matemáticos A experiência Russa**. Rio de Janeiro: IMPA ,2010.

FOMIN, S. **Iniciação na Matemática**: Sistemas de Numeração. Moscou: Mir Moscou, 1984.

GUELLI, Oscar. **Contando a História da Matemática**: A invenção dos Números. São Paulo: Ática, 2010.

MALAGUTTI, Pedro Luiz. Atividades de Contagem a partir da Criptografia. **Programa de Iniciação Científica OBMEP**, n.10, 79 p., Out. 2009. Disponível em <http:// www.obmep.org.br/prog-ic-2010/apostila2010.html>. Acesso em 16 mai.2012.

MATEUS, A. M. G.; SILVA, P. A. L. da; REBOLA, C. da C. C. **Seis Formas de Pensar os Algarismos.** 2004. Trabalho realizado na Disciplina Seminário Temático, Licenciatura em Ensino da Matemática, Faculdade de Ciências, Universidade de Lisboa, Lisboa, 2004. Disponível em <http://www.educ.fc.ul.pt/docentes/opombo/seminario/algarismos/introdução.htm>. Acesso em: 29 set. 2012.

RAMOS, Luzia Faraco. **O Segredo dos Números**. São Paulo: Ática, 2001.