UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA

ESPECIALIZAÇÃO EM MATEMÁTICA

Douglas Danton Nepomuceno

INTEGRAL GENERALIZADA DE HENSTOCK-KURZWEIL E APLICAÇÕES

Orientador: Prof. Alberto Berly Sarmiento Vera

Belo Horizonte

- Julho de 2013 -

Agradecimentos

Aos meus pais Idalina e Domingos por não medirem esforços ao prestarem apoio. Ao meu professor orientador Alberto Sarmiento pelos diversos ensinamentos, gentileza, disponibilidade e paciência. Aos professores Hamilton Prado e Ronaldo Assunção pelas sugestões.

Sumário

Introdução

Este trabalho tem como objetivo principal apresentar as propriedades mais importantes da Integral Generalizada de Henstok-Kurzweil, que como nome sugere foi desenvolvida por Ralph Henstock e Jaroslav Kurzweil por volta do ano de 1960. Existem outras denominações, tais como *Integral de Calibre* ou *Integral* **H-K**. Será estudado apenas o caso de funções reais, definidas em intervalos da reta real. Esta integral contém as integrais de Riemann e de Lebesgue como casos particulares.

A integral de Riemann, desenvolvida em meados do século XIX e estudada em cursos de cálculo e análise não é suficiente para todos os estudos em matemática, pois tem algumas inadequações, como por exemplo o fato de não podermos tirar muitas conclusões a respeito do limite de funções Riemann integráveis. Outro ponto desfavorável é que nem todas as funções que possuem *antiderivadas (ou primitivas)* são integráveis, ou seja, o Teorema do Cálculo e a fórmula $\int_a^b f = F(b) - F(a)$, para $f, F : [a,b] \to \mathbb{R}$ e $F'(x) = f(x) \ \ \forall x \in [a,b]$ podem ser usados para um número reduzido de funções, um exemplo disso é a função $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por:

$$f(x) = \begin{cases} 2x\cos(1/x^2) + (2/x)sen(1/x^2), & \text{se} \quad x \in (0,1], \\ 0, & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

Temos que $F : [0,1] \to \mathbb{R}$, definida por:

$$F(x) = \begin{cases} x^2\cos(1/x^2), & \text{se} \quad x \in (0,1], \\ 0, & \text{se} \quad x = 0. \end{cases}$$

é uma primitiva de f, mas f não é Riemann integrável, pois não é limitada, assim não podemos utilizar a fórmula dada pelo Teorema do Cálculo na versão para funções Riemann integráveis. Também no caso de funções em intervalos infinitos e funções ilimitadas é necessário (quando possível) utilizar a noção de *integral imprópria* para estender a teoria.

No início do século XX Henri Lebesgue desenvolveu uma teoria de integração que aumentou significamente o conjunto das funções integráveis, incluindo aquelas não limitadas, integração sobre conjuntos mais gerais, vários teoremas de convergência, porém não se livrou totalmente dos problemas da teoria de Riemann, como por exemplo a função

$D : [0, \infty] \to \mathbb{R}$, definida por $D(x) = sen(x)/x$ se $x \in (0, \infty]$ e $D(0) = 0$ não é Lebesgue integrável. A integral $\int_0^\infty sen(x)/x$ é chamada de *integral de Dirichlet.*

Por fim, o objeto de estudo aqui, a integral generalizadada de Henstock-Kurzweil veio suprir as inadequações mencionadas anteriormente e com o benefício de ter uma abordagem semelhante àquela utilizada na teoria de Riemann. Ou seja, a integral de Henstock-Kurzweil integra todas as funções que possuem primitivas, inclui todas as Riemann e Lebesgue integráveis, generaliza os teoremas de convergência já conhecidos da teoria de Lebesgue e não precisa utilizar-se da noção de integral imprópria.

As principais referências utilizadas foram os livros *A Modern Theory of Integration* (Bartle) e *Introduction to Real Analysis* (Bartle-Sherbert).

O trabalho está organizado em cápítulos, distribuídos da seguinte maneira: no **capítulo 1** será recordada a definição de uma partição pontilhada, bem como será definido o conceito de *função calibre*, elemento principal da teoria. Serão dados exemplos de calibres, bem como aplicações na demonstração de teoremas já conhecidos da análise na reta. No **capítulo 2** serão apresentadas a definição da integral de Henstock-Kurzweil, bem como propriedades importantes. Além disso, serão vistas novas versões dos Teoremas do Cálculo e evidenciado o fato de que o produto de funções Henstock-Kurzweil integráveis não é necessariamente integrável. Também, o módulo de uma função Henstock-Kurzweil integrável não necessariamente é integrável. Na última seção do capítulo 2 ocuparemos de expor fatos básicos sobre a integral de funções definidadas em intervalos infinitos. No **capítulo 3** serão revistos conceitos básicos da teoria de Lebesgue no que se refere a σ-álgebras, funções mensuráveis e medidas; para que possamos dar uma nova definição e caracterização da integral de Lebesgue por meio da integral de Henstock-Kurzweil.

Capítulo 1

Calibres

Neste capítulo introduziremos o conceito de **calibre** onde daremos exemplos e aplicações. Um calibre é uma função que desempenhará um papel principal no desenvolvimento da teoria de integração de Henstock-Kurzweil que será vista nos capítulos seguintes. Nas definições retomaremos conceitos tais como partições e pontilhamentos. No estudo da integral de Riemann utilizamos o conceito de *norma* de uma partição, a fim de controlar o comprimento dos subintervalos da partição, enquanto que na integral de Henstock-Kurzweil quem fará esse trabalho serão os calibres. Quanto as aplicações iremos reapresentar alguns teoremas clássicos da análise na reta como forma de ilustrar o potencial do conceito de Calibre.

1.1 Conceitos Iniciais

Definição 1.1.1 *Uma* ***partição de um intervalo*** $I = [a, b]$ *é uma coleção* $\mathcal{P} = \{I_1, ...I_n\}$ *de intervalos fechados na qual a união é* $[a, b]$ *e cada dois intervalos consecutivos se intercectam em um único ponto. Cada subintervalo da partição é denotado por* $I_i = [x_{i-1}, x_i]$*, assim temos*

$$a = x_0 < ... < x_{i-1} < x_i < ... < x_n = b.$$

Onde os pontos $\{x_i\}_{i=1,...,n}$ *são chamados de* ***pontos da partição*** $\mathcal{P}$*. Um* ***pontilhamento*** *de* $\mathcal{P}$ *é "escolher" em cada intervalo* I_i *um ponto* t_i*. Assim* $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ *é dita uma* ***partição pontilhada*** *de* I*. Fixada a partição pontilhada* $\dot{\mathcal{P}}$*, cada ponto* t_i *é dito uma* ***marca*** *do intervalo* I_i*.*

Definição 1.1.2 *Um **calibre** em I é simplesmente uma função $\delta : I \to (0, \infty)$ (não necessariamente contínua).*

*Seja δ um calibre em I e $\dot{\mathcal{P}}$ uma **partição pontilhada** de I. Dizemos que $\dot{\mathcal{P}}$ é δ-fina se satisfaz:*

$$I_i \subseteq [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)], \quad \forall \quad i = 1, ..., n.$$

Exemplo 1.1.1 *Na definição da integral de Riemann, usa-se partições pontilhadas. Seja $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$ uma partição pontilhada de $I = [a, b]$ e $\delta_0 = ||\dot{\mathcal{P}}|| = sup\{(x_i - x_{i-1}), i = 1, ..., n\}$ chamada de **norma** de $\dot{\mathcal{P}}$. Definimos o calibre $\delta(x) = \delta_0, \quad \forall \quad x \in I$. Assim, $\dot{\mathcal{P}}$ é uma partição δ-fina. Mais ainda, para qualquer partição $\dot{\mathcal{Q}}$ com norma $\leq \delta_0$, temos que $\dot{\mathcal{Q}}$ é uma partição δ-fina.*

Um questionamento que surge: dado um calibre $\delta : [a, b] \to \mathbb{R}$, será que existe partição δ-fina? A resposta é afirmativa e dada pelo seguinte resultado:

Teorema 1.1.1 *Se δ é um calibre definido sobre o intervalo $[a, b]$, então existe uma partição δ-fina de $[a, b]$.*

Demonstração: Denotemos por E o conjunto dos pontos $x \in [a, b]$ tal que existe uma partição δ-fina do subintervalo $[a, x]$.

1. O conjunto E não é vazio, de fato: $\delta(a) > 0$, escolhemos x tal que, $a < x \leq a+\delta(a)$, é claro que $([a, x], a)$ é uma partição pontilhada δ-fina de $[a, x]$, isso implica que $x \in E$. É claro também que para todo $a \leq x_0 \leq x$ temos que $x_0 \in E$. Sendo $E \subset [a, b]$ limitado, possui supremo, que denotamos por $u = sup(E)$.

2. $u \in E$, de fato, uma vez que $u - \delta(u) < u$, existe $v \in E$ tal que $u - \delta(u) < v < u$. Como $v \in E$ seja $\dot{\mathcal{P}}_1$ uma partição δ-fina de $[a, v]$ e definimos uma partição de $[a, u]$ da seguinte forma: $\dot{\mathcal{P}}_2 = \dot{\mathcal{P}}_1 \cup ([v, u], u)$. Assim, $\dot{\mathcal{P}}_2$ é uma partição δ-fina de $[a, u]$ o que implica $u \in E$.

3. $E = [a, b]$, basta mostrar que $u = b$. Por absurdo, suponhamos $u < b$ e tomemos $w \in [a, b]$ tal que $u < w < u + \delta(u)$. Como $u \in E$, isso implica que $w \in E$, seja $\dot{\mathcal{Q}}_1$ uma partição δ-fina de $[a, u]$, logo $\dot{\mathcal{Q}}_2 = \dot{\mathcal{Q}}_1 \cup ([u, w], u)$ é uma partição δ-fina

de $[a, w]$ o que implica $w \in E$, mas isso constradiz o fato de u ser um supremo de E. Assim $u = b$.

$\square$

Observação 1.1.1 *Se δ e γ são calibres em $I = [a, b]$ tais que $0 < \delta(x) \leq \gamma(x)$ para todo $x \in I$, então toda partição $\dot{\mathcal{P}}$ que é δ-fina também será γ-fina. Isso é imediato, basta ver que $t_i - \gamma(t_i) \leq t_i - \delta(t_i)$ e que $t_i + \delta(t_i) \leq t_i + \gamma(t_i)$, logo*

$$I_i \subseteq [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)] \subseteq [t_i - \gamma(t_i), t_i + \gamma(t_i)].$$

Consequentemente se δ_1 e δ_2 são dois calibres em $I = [a, b]$ e se definimos o calibre $\delta(x) = \min\{\delta_1(x), \delta_2(x)\}$ $\forall$ $x \in I$, então temos que qualquer partição δ-fina também será δ_1-fina e δ_2-fina.

Observação 1.1.2 *Se $\dot{\mathcal{P}}$ é uma partição δ-fina de $I = [a, b]$, então dado qualquer $x \in I$, existe uma marca t_i tal que $|x - t_i| \leq \delta(t_i)$. Para ver isto, $x \in I_i$ para algum i, logo $t_i - \delta(t_i) \leq x_{i-i} \leq x \leq x_i \leq t_i + \delta(t_i)$, então $|x - t_i| \leq \delta(t_i)$.*

1.2 Exemplos de Calibres

Exemplo 1.2.1 *Seja δ um calibre definido em $I = [0, 1]$ por*

$$\delta(x) = \begin{cases} \frac{1}{10}, & se \quad x = 0, \\ \frac{1}{2}x, & se \quad 0 < x \leq 1. \end{cases}$$

Vamos construir uma partição δ-fina. Para o intervalo da partição $[0, x_1]$, temos que a única marca possível é $t_1 = 0$. De fato, suponhamos que $0 < t_1 \leq x_1$, então

$$[t_1 - \delta(t_1), t_1 + \delta(t_1)] = [t_1 - t_1/2, t_1 + t_1/2] = [t_1/2, (3/2)t_1].$$

Note que $0 < t_1/2$. Assim, a marca de $[0, x_1]$ deve ser obrigatoriamente $t_1 = 0$. O primeiro intervalo é tal que $[0, x_1] \subseteq [-1/10, 1/10]$. Assim, podemos fazer $0 < x_1 \leq 1/10$. A construção dos demais subintervalos decorrem de testes em elementos de $[x_1, 1]$. Por exemplo, uma partição $\dot{\mathcal{P}}$, δ-fina é:

$$\dot{\mathcal{P}} = \{([0, 1/10], 0), ([1/10, 3/10], 2/10), ([3/10, 9/10], 6/10), ([9/10, 1], 1)\}.$$

Vemos neste exemplo um fato importante em relação a calibres, isto é, definido um calibre δ podemos ter que, determinados pontos são obrigatoriamente *marcas* da partição pontilhada. Daremos mais um exemplo a seguir, de quando isso ocorre, mas essas situações ocorrerão inúmeras vezes ao longo do texto.

É importante observar que no exemplo acima (e no próximo) já temos os calibres definidos e estamos apenas constatando a obrigatoriedade de alguns pontos serem marcas, mas tais calibres já podem ser construídos com essa finalidade.

Exemplo 1.2.2 *Seja* $I = [a, b]$, *com* $a < b$, *vamos construir um calibre* λ *de modo que qualquer partição* λ*-fina, necessariamente contém o ponto* b *como uma marca do subintervalo que o contém. Para isto, definimos:*

$$\lambda(x) = \begin{cases} \frac{(b-x)}{2}, & se \quad x \in [a, b), \\ 1, & se \quad x = b. \end{cases}$$

Para $[x_{n-1}, b]$ *obrigatoriamente temos* $t_n = b$ *como marca. De fato, suponhamos que* $x_{n-1} \leq t_n < x_n$, *então*

$$[t_n - \delta(t_n), t_n + \delta(t_n)] = [t_n - (b - t_n)/2, t_n + (b - t_n)/2].$$

Ou seja, $t_n + (b - t_n)/2 < b$ *o que impossibilita* $[x_{n-1}, b] \subseteq [t_n - (b - t_n)/2, t_n + (b - t_n)/2]$, *logo* $t_n = b$ *é obrigatoriamente marca de* $[x_{n-1}, b]$.

Exemplo 1.2.3 (Refinamento) *Um procedimento que será utilizado muitas vezes ao longo do texto é baseado no seguinte: seja* δ *um calibre em* $I = [a, b]$ *e seja* $\dot{\mathcal{P}}$ *uma partição* δ*-fina de* I. *Se* t_i *é uma marca pertencente ao interior do subintervalo* $[x_{i-1}, x_i]$ *de* $\dot{\mathcal{P}}$, *então podemos construir uma nova partição* $\mathcal{Q}$ *de modo que os pontos desta partição são* $\{x_0 < x_1 < ... < x_{i-1} < t_i < x_i < ... < x_n\}$. *É claro que,* $\dot{\mathcal{Q}}$ *é* δ*-fina usando como marcas de* $\dot{\mathcal{Q}}$ *as marcas de* $\dot{\mathcal{P}}$, *com* t_i *como marca dos novos intervalos* $[x_{i-1}, t_i]$ *e* $[t_i, x_i]$.

1.3 Aplicações de Calibres

Alguns teoremas importantes sobre funções contínuas da análise na reta podem ser provados utilizando calibres. Essa é uma maneira de demonstrar a importância desse conceito. Utilizaremos a continuidade das funções para criar os calibres.

Definição 1.3.1 *Seja* $A \subseteq \mathbb{R}$, $f : A \to \mathbb{R}$ *e* $c \in A$. *Dizemos que a função* f *é* ***contínua*** *em* c *se* $\forall \epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que para todo* x *satisfazendo* $|x - c| < \delta$ *temos*

$$|f(x) - f(c)| < \epsilon.$$

Dizemos ainda que f *é contínua em* A *se* f *é contínua em cada ponto de* A.

Teorema 1.3.1 (Teorema da Limitação) *Seja* $I = [a, b]$ *um intervalo fechado e limitado e seja* $f : I \to \mathbb{R}$ *uma função contínua em I. Então* f *é limitada em I.*

Demonstração: Como f é contínua em I, dado $\epsilon = p > 0$ um número fixo arbitrário, para cada $t \in I$ existe $\delta(t) > 0$ tal que $\forall$ $x \in I$ com $|x - t| \leq \delta(t)$, temos que $|f(x) - f(t)| \leq p$. Assim, definimos o calibre $\delta(t)$ em I. Seja $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^{n}$ uma partição δ-fina de I e seja $K = \max\{|f(t_i)|; i = 1, ..., n\}$. Pela observação 2, dado $x \in I$ existe i com $|x - t_i| \leq \delta(t_i)$, assim

$$|f(x)| \leq |f(x) - f(t_i)| + |f(t_i)| \leq p + K.$$

Uma vez que x é arbitrário, segue que f é limitada por $p + K$ em I.

$\square$

Teorema 1.3.2 (Teorema da Localização de Raízes) *Seja* $I = [a, b]$ *e seja* $f : I \to \mathbb{R}$ *contínua em* I. *Se* $f(a) < 0 < f(b)$ *(ou se* $f(a) > 0 > f(b)$*), então existe um número* $c \in (a, b)$ *tal que* $f(c) = 0$.

Demonstração: Mostraremos o caso $f(a) < 0 < f(b)$, o outro caso tem demonstração análoga. Suponhamos que $f(t) \neq 0$ para todo $t \in I$. Pelo fato de f ser contínua em t, dado $\epsilon = |f(t)|/2 > 0$, existe $\delta(t) > 0$ tal que para todo $x \in I$ tal que $|x - t| \leq \delta(t)$, então $f(x) < 0$ se $f(t) < 0$ ou $f(x) > 0$ se $f(t) > 0$. Definimos o calibre $\delta(t)$ em I. Seja então $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^{n}$ uma partição δ-fina. Assumindo $f(x_0) = f(a) < 0$ temos (pelo fato de $\dot{\mathcal{P}}$ ser δ-fina) que $f(x_1) < 0$, $f(x_2) < 0, ..., f(x_n) = f(b) < 0$. Isso é absurdo, pois temos a hipótese de que $f(b) > 0$

$\square$

Definição 1.3.2 *Seja* $A \subseteq \mathbb{R}$ *e* $f : A \to \mathbb{R}$. *Dizemos que* f *é* ***uniformemente contínua*** *em* A *se para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta > 0$ *tal que para* $x, u \in A$ *satisfazendo* $|x - u| < \delta$, *então temos que:*

$$|f(x) - f(u)| < \epsilon.$$

Teorema 1.3.3 (Teorema da Continuidade Uniforme) *Seja* $I = [a, b]$ *limitado e fechado e* $f : I \to \mathbb{R}$ *contínua em* I. *Então* f *é uniformemente contínua em* I.

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, como f contínua em $t \in I$, existe $\delta(t) > 0$ tal que para $x \in I$ tal que $|x - t| \leq 2\delta(t)$, temos que $|f(x) - f(t)| \leq (1/2)\epsilon$. Podemos definir o calibre $\delta(t)$ em I. Se $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^{n}$ é uma partição δ-fina de I, tomamos $\delta_\epsilon = min\{\delta(t_1), ..., \delta(t_n)\}$. Sejam $x, y \in I$ tal que $|x - y| \leq \delta_\epsilon$ e i tal que $|x - t_i| \leq \delta(t_i)$ (Isso é possível devido observação já feita anteriormente). Assim

$$|y - t_i| \leq |y - x| + |x - t_i| \leq \delta_\epsilon + \delta(t_i) \leq 2\delta(t_i),$$

Então segue que

$$|f(x) - f(y)| \leq |f(x) - f(t_i)| + |f(t_i) - f(y)| \leq (1/2)\epsilon + (1/2)\epsilon = \epsilon.$$

Isso implica que f é uniformemente contínua em I.

□

Capítulo 2

A Integral de Henstock-Kurzweil

Neste capítulo estamos interessados no estudo da integral de Henstock-Kurzweil, esta integral contém as integrais de Riemann e Lebesgue como casos particulares. Denotaremos simplesmente por integral **H-K**. Nas seções 2.1 e 2.2 será apresentada a definição de funções **H-K** integráveis, daremos exemplos e algumas propriedades importantes desta integral. Na seção 2.3 serão vistos versões dos Teoremas Fundamentais do Cálculo para a integral **H-K**. Na seção 2.4 discutiremos a integral do produto de funções e a integral do módulo de funções. Veremos que o produto e o módulo de funções **H-K** integráveis não são necessariamente integráveis. Na seção 2.5 serão apresentados os teoremas de convergência monótona e dominada para funções **H-K** integráveis. Por fim, na seção 2.6 daremos uma nova definição de **H-K** integral para funções definidas em intervalos infinitos e mostraremos a Integral de Dirichlet.

2.1 Definição e Primeiros Exemplos

No que segue f denotará uma função $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, não necessariamente limitada definida em um intervalo não degenerado $I = [a,b]$.

Definição 2.1.1 *Dada* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$*, seja* $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^{n}$ *uma partição pontilhada de* I *com* $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, $\forall i = 1, ..., n$*. Definimos a* ***soma de Riemann*** *de* f *correspondente a* $\dot{\mathcal{P}}$ *por:*

$$S(f; \dot{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}).$$

Definição 2.1.2 *Uma função* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é* ***Henstock-Kurzweil integrável*** *em* $[a,b]$*, se existe um número* $H \in \mathbb{R}$*, tal que para todo* $\epsilon > 0$ *existe um* ***calibre*** δ_ϵ *em* I *tal que para toda partição pontilhada* $\dot{\mathcal{P}}$ *de* I *que seja* δ_ϵ*-fina temos que*

$$|S(f;\dot{P}) - H| < \epsilon.$$

Denotamos por $\mathcal{R}^*[a,b]$ o conjunto das funções **H-K integráveis** em $I = [a,b]$. O conjunto das funções **Riemann integráveis** será denotado por $\mathcal{R}[a,b]$. Utilizaremos para a integral **H-K** o mesmo símbolo da integral de Riemann, ou seja, assim:

$$\int_a^b f \quad ou \quad \int_I f.$$

O teorema a seguir nos mostra a relação entre funções Riemann integráveis e funções Henstock-Kurzweil integráveis.

Teorema 2.1.1 *Funções Riemann integráveis são Henstock-Kurzweil integráveis (i.e.* $\mathcal{R}[a,b] \subset \mathcal{R}^*[a,b]$*).*

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$ vamos construir um calibre apropriado. Uma vez que f é Riemann integrável, existe $\delta_\epsilon > 0$ tal que se $\dot{\mathcal{P}}$ é qualquer partição com $||\dot{\mathcal{P}}|| < \delta_\epsilon$, então $|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - H| < \epsilon$. Definimos a função $\delta^*_\epsilon = (1/4)\delta_\epsilon$ para $x \in [a,b]$, então δ^*_ϵ é um calibre em $[a,b]$. Se $\dot{\mathcal{Q}}$ é uma partição δ^*_ϵ-fina, onde $I_i = [x_{i-1}, x_i]$, então:

$$I_i \subseteq [t_i - \delta^*_\epsilon(t_i), t_i + \delta^*_\epsilon(t_i)] = [t_i - (1/4)\delta_\epsilon, t_i + (1/4)\delta_\epsilon].$$

Como $0 < x_i - x_{i-1} \leq (1/2)\delta_\epsilon < \delta_\epsilon$ para $i = 1, ..., n.$, temos que a norma $||\dot{\mathcal{Q}}|| < \delta_\epsilon$ e logo $|S(f;\dot{\mathcal{Q}}) - H| < \epsilon$. Uma vez que ϵ é arbitrário, temos que f é Henstock-Kurzweil integrável.

□

No exemplo a seguir temos uma função Riemann integrável, logo é **H-K** integrável. Mas usaremos a definição de calibre para mostrar que é **H-K** integrável, afim de mostrar a técnica no uso de calibres.

Exemplo 2.1.1 *Seja* $I = [a, b]$, $c \in (a, b)$ *e* α, $\beta \in \mathbb{R}$ *com* $\alpha \neq \beta$. *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) = \begin{cases} \alpha, & se \quad a \leq x < c, \\ \beta, & se \quad c \leq x \leq b. \end{cases}$$

Vamos mostrar que $f \in R^*[a, b]$ *e* $\int_a^b f = \alpha(c - a) + \beta(b - c)$.

Dado $\epsilon > 0$ *vamos escolher um calibre* δ_ϵ *em* I *que força o ponto* c *ser a marca dos intervalos que o contém, para qualquer partição que é* δ_ϵ*-fina. Par obter isto definimos* δ_ϵ *o calibre*

$$\delta_\epsilon(x) = \begin{cases} \frac{1}{2}|c - t|, & se \quad t \neq c, \\ \delta_0, & se \quad t = c. \end{cases}$$

No final escolheremos um δ_0 *de acordo com o necessário. Seja* $\dot{\mathcal{P}}$ *uma partição de* I *que é* δ_ϵ*-fina. Caso* c *não seja um ponto da partição poderemos acrescentá-lo, de modo que teremos* $[x_{k-1}, c]$ *e* $[c, x_k]$ *e* c *é uma marca para ambos. Uma vez que* $f(t_i) = \alpha$ *para* $i = 1, ..., k - 1$ *a soma dos* $k - 1$ *primeiros termos em* $S(f; \dot{\mathcal{P}})$ *é* $\alpha(x_{k-1} - a)$. *Para* $i = k, ..., n$, $f(t_i) = \beta$ *de maneira que os termos restantes de* $S(f; \dot{\mathcal{P}})$ *é* $\beta(b - x_{k-1})$. *Temos assim* $S(f; \dot{\mathcal{P}}) = \alpha(x_{k-1} - a) + \beta(b - x_{k-1})$. *No entanto,* $x_{k-1} - a = (c - a) - (c - x_{k-1})$ *e* $b - x_{k-1} = (b - c) + (c - x_{k-1})$, *temos então* $S(f; \dot{\mathcal{P}}) = \alpha(c - a) + \beta(b - c) + (\beta - \alpha)(c - x_{k-1})$. *Uma vez que* $\dot{\mathcal{P}}$ *é* δ_ϵ*-fina, então* $c - \delta \leq x_{k-1} < c$ *onde* $0 < c - x_{k-1} \leq \delta$, *assim*

$$|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - [\alpha(c - a) + \beta(b - c)]| \leq |\beta - \alpha|(c - x_{k-1}) \leq |\beta - \alpha|\delta.$$

Desta desigualdade e usando que $\epsilon > 0$ *é arbitrário basta escolher* $\delta_0 = \delta_\epsilon(c) = \epsilon/|\beta - \alpha|$, *podemos concluir assim que* $f \in \mathcal{R}^*[a, b]$ *e que*

$$\int_a^b f = \alpha(c - a) + \beta(b - c).$$

Exemplo 2.1.2 (Função de Dirichlet) *Sabemos que a função de Dirichlet* $f : [0, 1] \to \mathbb{R}$ *definida por*

$$f(x) = \begin{cases} 1, & se \quad x \quad é \ racional, \\ 0, & se \quad x \quad é \ irracional. \end{cases}$$

não é Riemann integrável (Ver [1], pág. 209). Este exemplo mostra que esta função é ***H-K*** *integrável e vale:*

$$\int_0^1 f = 0.$$

De fato, consideremos uma enumeração dos racionais em $[0,1]$ *por* $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$. *Dado* $\epsilon > 0$ *definimos o calibre* $\delta : [0,1] \to \mathbb{R}$*:*

$$\delta_\epsilon(x) = \begin{cases} \epsilon/2^{k+2}, & se \quad x \quad \acute{e} \ racional, \\ 1, & se \quad x \quad \acute{e} \ irracional. \end{cases}$$

Seja $\dot{\mathcal{P}}$ *é uma partição* δ_ϵ*-fina, então temos que:* $x_i - x_{i-1} \leq 2\delta_\epsilon(t_i)$. *Consideremos a soma de Riemann* $S(f;\dot{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$, *nesta soma apenas as marcas racionais fazem contribuições diferentes de zero, então sem perda de generalidade, podemos supor que todas as marcas são racionais* $\{t_i = r_{ki}; i = 1, ..., n\}$. *Temos:*

$$0 < f(r_{ki})(x_i - x_{i-1}) = 1.(x_i - x_{i-1}) \leq \frac{2\epsilon}{2^{k_i+2}} = \frac{\epsilon}{2^{k_i+1}},$$

assim

$$0 \leq \ S(f;\dot{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1}) \leq \sum_{i=1}^{n} \frac{\epsilon}{2^{k_i+1}} < \sum_{j=1}^{\infty} \frac{\epsilon}{2^j} = \epsilon \quad (j \in \mathbb{N}).$$

Uma vez que ϵ *é arbitrário o resultado segue.*

2.2 Propriedades da Integral

Teorema 2.2.1 *(da Unicidade) Se* $f \in \mathcal{R}^*[a,b]$, *então o valor da integral é único.*

Demonstração: Suponhamos que existam H_1 e H_2 valores da integral de f em $[a,b]$. Como f é **H-K** integrável, $\forall \ \epsilon > 0$ existe um calibre $\delta'_{\frac{\epsilon}{2}}$ tal que se $\dot{\mathcal{P}}_1$ é uma partição $\delta'_{\frac{\epsilon}{2}}$-fina, então $|S(f;\dot{\mathcal{P}}_1) - H_1| < \frac{\epsilon}{2}$. Analogamente existe $\delta''_{\frac{\epsilon}{2}}$ tal que se $\dot{\mathcal{P}}_2$ é uma partição $\delta''_{\frac{\epsilon}{2}}$-fina, então $|S(f;\dot{\mathcal{P}}_2) - H_2| < \frac{\epsilon}{2}$. Definimos o calibre $\delta_\epsilon(x) = min\{\delta'_{\frac{\epsilon}{2}}(x), \delta''_{\frac{\epsilon}{2}}(x)\}$, pela **observação 1.1.1** temos que se $\dot{\mathcal{P}}$ é δ_ϵ-fina, então $\dot{\mathcal{P}}$ também é $\delta'_{\frac{\epsilon}{2}}$ e $\delta''_{\frac{\epsilon}{2}}$-fina. Agora:

$$|H_1 - H_2| \leq |H_1 - S(f;\dot{\mathcal{P}})| + |S(f;\dot{\mathcal{P}}) - H_2| < \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon.$$

Uma vez que $|H_1 - H2| < \epsilon, \forall \ \epsilon > 0$, implica que $H_1 = H_2$.

□

Abaixo relacionaremos algumas propriedades básicas da integral de Henstock-Kurzweil que são reformulações de propriedades análogas para a integral de Riemann, cujas demonstrações são apenas uma mudança de linguagem em termos de calibres das demonstrações feitas para funções Riemann integráveis.

Teorema 2.2.2 *Suponha que* f *e* g $\in \mathcal{R}^*[a,b]$. *Então:*

1. *Se* $k \in \mathbb{R}$, *a função* $kf \in \mathcal{R}^*[a,b]$ *e* $\int_a^b kf = k\int_a^b f$.
2. *A função* $f+g \in \mathcal{R}^*[a,b]$ *e* $\int_a^b (f+g) = \int_a^b f + \int_a^b g$.
3. *Se* $f(x) \leq g(x)$ $\forall$ $x \in [a,b]$, *então* $\int_a^b f \leq \int_a^b g$.

Teorema 2.2.3 *Se* $f \in \mathcal{R}^*[a,b]$ *e* $0 \leq f(x)$ *para todo* x *em* $[a,b]$, *então* $0 \leq \int_a^b f$.

Teorema 2.2.4 (Critério de Cauchy) *A função* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *pertence a* $\mathcal{R}^*[a,b]$ *se, e somente se, para todo* $\epsilon > 0$ *existe um calibre* η_ϵ *tal que se* $\dot{\mathcal{P}}$ *e* $\dot{\mathcal{Q}}$ *são quaiquer partições* η_ϵ*-finas de* $[a,b]$, *então* $|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - S(f;\dot{\mathcal{Q}})| < \epsilon$.

Teorema 2.2.5 (Aditividade) *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *e seja* $c \in (a,b)$. *Então* $f \in \mathcal{R}^*[a,b]$ *se, e somente se, suas restrições a* $[a,c]$ *e* $[c,b]$ *são ambas Henstock-Kurzweil integráveis. Neste caso* $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$.

Teorema 2.2.6 (Confronto) *Uma função* $f \in \mathcal{R}^*[a,b]$ *se, e somente se,* $\forall$ $\epsilon > 0$ *existe funções* φ *e* ψ *pertencentes a* $\mathcal{R}^*[a,b]$ *com* $\varphi(x) \leq f(x) \leq \psi(x)$ *para todo* $x \in [a,b]$ *e tal que* $\int_a^b (\varphi - \psi) \leq \epsilon$.

2.2.1 Integral de Funções Nulas

Definição 2.2.1 *Um conjunto* $Z \in \mathbb{R}$ *é chamado de* ***conjunto de medida nula*** *se* $\forall$ $\epsilon > 0$ *existe uma coleção enumerável* $\{J_k\}_{k=1}^{\infty}$ *de intervalos abertos tal que*

$$Z \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} J_k \quad e \quad \sum_{k=1}^{\infty} l(J_k) < \epsilon.$$

Lembramos que uma união enumerável de conjuntos de medida nula, também é um conjunto de medida nula. Vale também que um subconjunto de um conjunto de medida nula tem medida nula.

Definição 2.2.2 *Seja* $f : A \to \mathbb{R}$ *uma função definida em um conjunto* $A \subseteq \mathbb{R}$*. Dizemos que* f *é uma* ***função nula*** *se o conjunto* $\{x \in A \ \ talque \ \ f(x) \neq 0\}$ *é um conjunto de medida nula.*

Daqui em diante denotaremos por $l(I) = b - a$ o comprimento do intervalo $I = [a, b]$ com $a \leq b$.

Teorema 2.2.7 *Seja* ψ *qualquer função nula em* $I = [a, b]$*. Então* $\psi \in \mathcal{R}^*[a, b]$ *com* $\int_I f = 0$*.*

Demonstração: Seja $Z = \{x \in I; \psi(x) \neq 0\}$ então da definição de função nula temos que Z é um conjunto de medida nula. Para cada $m \in \mathbb{N}$ denotemos $Z_m = \{x \in Z; m - 1 < |\psi(x)| \leq m\}$. Uma vez que $Z_m \subseteq Z$, então Z_m é um conjunto de medida nula. Dessa maneira, dado $\epsilon > 0$, para cada $m \in \mathbb{N}$, $\exists$ $\{J_{m,k}\}_{k=1}^{\infty}$ uma coleção de intervalos abertos tal que

$$Z_m \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} J_{m,k} \ \ e \ \ \sum_{k=1}^{\infty} l(J_{m,k}) < \frac{\epsilon}{m2^m}.$$

Definiremos um calibre δ_ϵ em I da seguinte maneira, se $x \in I - Z$ fazemos $\delta_\epsilon(x) = 1$. Se $x \in Z$, uma vez que $Z = \bigcup_{m\in\mathbb{N}} Z_m$ e os $\{Z_m\}_{m=1}^{\infty}$ são dois a dois disjuntos, existe um único $m(x) \in \mathbb{N}$ tal que $x \in Z_{m(x)}$; seja $k(x)$ o menor índice k tal que $x \in J_{m(x),k}$; escolhemos $0 < \delta_\epsilon(x)$ tal que $[x - \delta_\epsilon(x), x + \delta_\epsilon(x)] \subset J_{m(x),k(x)}$.

Seja agora $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^{n}$ uma partição δ_ϵ-fina de I. Se $t_i \in I - Z$, então $\psi(t_i) = 0$, logo a soma dos termos em $S(\psi, \dot{\mathcal{P}})$ com *marcas* em $I - Z$ é igual a zero.

Resta mostrar agora, que a soma dos termos em $|S(\psi, \dot{\mathcal{P}})|$ com *marcas* em Z é menor que ϵ. De fato,

1. Se $t_{i1}, ..., t_{ik} \in Z_{mi}$, onde $Z \subseteq \bigcup_{k=1}^{\infty} J_{m_i,k}$

$$\sum_{j=1}^{k} |\psi(t_{ij})|(x_{ij} - x_{i(j-1)}) \leq m_i \sum_{j=1}^{k}(x_{ij} - x_{i(j-1)}) \leq m_i \sum_{k=1}^{\infty} l(J_{m_i,k}) < \epsilon/2^{m_i}.$$

2. Assim,

$$|S(\psi, \dot{\mathcal{P}})| = |\sum_{i=1}^{n} \psi(t_i)(x_i - x_{i-1})| \leq \sum_{i=1}^{n} |\psi(t_i)|(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^{n} \epsilon/2^{m_i} < \sum_{m=1}^{\infty} \epsilon/2^m = \epsilon.$$

Dessa forma $|S(\psi, \dot{\mathcal{P}})| < \epsilon$ e como ϵ é arbitrário, concluimos que $\psi \in \mathcal{R}^*[a,b]$ e $\int_I \psi = 0$.

$\square$

Exemplo 2.2.1 *Seja $H : [0,1] \to \mathbb{R}$ definida por $H(1/k) = k$ para $k \in \mathbb{N}$ e $H(x) = 0$ em qualquer outro ponto de $[0,1]$. Notemos que H é função não limitada, mas é função nula, logo é **H-K** integrável com $\int_o^1 H = 0$.*

Exemplo 2.2.2 *Sabemos que a função de Dirichlet, definida por $f(x) = 1$ se $x \in [0,1]$ é racional e $f(x) = 0$ se $x \in [0,1]$ é irracional é uma função nula, não contínua em nenhum ponto de $[0,1]$ e **H-K** integrável, com $\int_0^1 f = 0$; como também visto no **exemplo 2.1.2**. Assim, o conjunto $\mathcal{R}^*[a,b]$ contém estritamente o conjunto $\mathcal{R}[a,b]$.*

2.3 Teoremas Fundamentais

Nesta seção iremos estudar os teoremas fundamentais do cálculo. Perceberemos que as versões para a integral **H-K** são bem mais gerais que as conhecidas da integral de Riemann, e isso nos permitirá integrar um número bem maior de funções sobre condições mais fracas que as habituais.

Definição 2.3.1 *Seja $I = [a,b] \subset \mathbb{R}$ e seja $f : I \to \mathbb{R}$.*

1. *Dizemos que F é uma **primitiva** (antiderivada) de f em I se a derivada $F'(x)$ existe e $F'(x) = f(x)$ $\forall x \in I$.*

2. *Dizemos que F é uma **a-primitiva** de f em I, se F é **contínua** em I, e existe um **conjunto de medida nula** $E \subset I$; $\forall x \in E$, temos que $F'(x)$ não existe ou $F'(x) \neq f(x)$.*

3. *Dizemos que F é uma **c-primitiva** de f em I, se F é **contínua** em I, e existe um **conjunto enumerável** $E \subset I$; $\forall x \in E$, temos que $F'(x)$ não existe ou $F'(x) \neq f(x)$. O conjunto E é dito um **conjunto excepcional** de f.*

Lema 2.3.1 (Straddle) *Seja* $I = [a,b]$ *e* $F : I \to \mathbb{R}$ *diferenciável no ponto* $x \in I$. *Dado* $\epsilon > 0$ *existe* $\delta_\epsilon > 0$ *tal que se* u *e* v $\in I$ *satisfazem* $x - \delta_\epsilon \le u \le x \le v \le x + \delta_\epsilon$, *então vale que*

$$|F(v) - F(u) - F'(x)(v-u)| < \epsilon(v-u).$$

Demonstração: Pela definição da derivada $F'(x)$ no ponto $x \in I$, dado $\epsilon > 0$, existe $\delta_\epsilon(x) > 0$, tal que se $0 < |z - x| \le \delta_\epsilon(x)$, $z \in I$, então

$$\left| \frac{F(z) - F(x)}{z - x} - F'(x) \right| < \epsilon,$$

Daí segue

$$|F(z) - F(x) - F'(x)(z-x)| < \epsilon |z - x|. \quad (*)$$

Tomando $u \le x$ e $x \le v$, tal que $|u - x| < \delta_\epsilon(x)$ e $|v - x| < \delta_\epsilon(x)$. Subtraindo e adicionando $F(x) - F'(x)x$ em $(*)$, temos

$$|F(v)-F(u)-F'(x)(v-u)| = |[F(v)-F(x)-F'(x)(v-x)]-[F(u)-F(x)-F'(x)(u-x)]|$$

$$\le |F(v)-F(x)-F'(x)(v-x)|+|F(u)-F(x)-F'(x)(u-x)| < \epsilon(v-x)+\epsilon(x-u) = \epsilon(v-u).$$

$\square$

Vamos relembrar agora o enunciado do Teorema Fundamental 1 para funções Riemann integráveis.

Teorema 2.3.1 (Teorema Fundamental 1) *Seja* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ ***Riemann integrável*** *e suponha que* F *é uma* ***c-primitiva*** *(* E *finito) de* f. *Então:*

$$\int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Teorema 2.3.2 (Teorema Fundamental 1.1) *Se* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *tem primitiva* F *em* $[a,b]$, *então*

$$f \in \mathcal{R}^*[a,b] \quad e \quad \int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Demonstração: Dado $\epsilon > 0$, definimos o calibre $\delta_\epsilon(x)$ em $[a,b]$, onde $\delta_\epsilon(x)$ é como no Lema de Straddle e seja $\dot{\mathcal{P}}$ uma partição δ_ϵ-fina de $[a,b]$. Segue então que

$$|F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(t_i)(x_i - x_{i-1})| < \epsilon(x_i - x_{i-1}).$$

Sabemos que

$$F(b) - F(a) - S(f;\dot{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^{n}[F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(t_i)(x_i - x_{i-1})].$$

Pela desigualdade triangular, temos

$$|F(b)-F(a)-S(f;\dot{\mathcal{P}})| \leq \sum_{i=1}^{n}|F(x_i)-F(x_{i-1})-f(t_i)(x_i-x_{i-1})| < \sum_{i=1}^{n}\epsilon(x_i-x_{i-1}) = \epsilon(b-a).$$

Como ϵ arbitrário, assim f é **H-K** integrável e $\int_a^b f = F(b) - F(a)$.

□

A seguir mostraremos uma versão mais forte deste teorema.

Teorema 2.3.3 (Teorema Fundamental 1.2) *Se* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *tem uma c-primitiva* F *em* $[a, b]$*, então:*

$$f \in \mathcal{R}^*[a, b] \quad e \quad \int_a^b f = F(b) - F(a).$$

Demonstração: Seja $E = \{c_k\}_{k=1}^{\infty}$ o conjunto excepcional para a c-primitiva F. O conjunto E é enumerável, então é também um conjunto nulo. Iremos assumir $f(c_k) = 0$, podemos fazer isso, pois se tivermos funções h, g, com h integrável e $h = g$ a menos de um conjunto de medida nula, g é integrável e tem integral igual a de h.

Definiremos um calibre δ_ϵ em $I = [a, b]$. Se $\epsilon > 0$ e $x \in I - E$, $\delta_\epsilon(x)$ é definida como no Lema de Straddle. Se $x \in E$, então $x = c_k$ para algum $k \in \mathbb{N}$, da continuidade de F em c_k, escolhemos $0 < \delta_\epsilon(c_k)$ tal que $|F(z) - F(c_k)| < \epsilon/2^{k+2}$ para todo $z \in [a, b]$ satisfazendo $|z - c_k| < \delta_\epsilon(c_k)$.

Seja agora $\dot{\mathcal{P}}$ uma partição δ_ϵ-fina de $[a, b]$. Se nenhuma *marca* pertence a E, então o Teorema se torna igual ao anterior. Resta o caso em que $c_k \in E$ é a *marca* do subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$, então $|F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(c_k)(x_i - x_{i-1}) \leq |F(x_i) - F(c_k)| + |F(c_k) - F(x_{i-1})| + |f(c_k)(x_i - x_{i-1}) < \epsilon/2^{k+2} + \epsilon/2^{k+2} + 0 = \epsilon/2^{k+1}$. A soma dos termos com $t_i \in E$ satisfaz a desigualdade

$$\sum_{t_i \in E}|F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(t_i)(x_i - x_{i-1})| < \sum_{k=1}^{\infty}\epsilon/2^k = \epsilon.$$

Pelo lema de Straddle a soma dos termos com $t_i \notin E$ satisfaz

$$\sum_{t_i \notin E}|F(x_i) - F(x_{i-1}) - f(t_i)(x_i - x_{i-1})| < \sum_{t_i \notin E}\epsilon(x_i - x_{i-1}) \leq \epsilon(b - a).$$

Assim

$$|F(b) - F(a) - S(f;\dot{P})| < \epsilon(1 + b - a).$$

Uma vez que ϵ é arbitrário, segue que $f \in \mathcal{R}^*[a,b]$ com integral $F(b) - F(a)$.

$\square$

Exemplo 2.3.1 *Voltando a analisar a função de Dirichlet, uma c-primitiva é* $F(x) = 0$ *e podemos assim aplicar o teorema e concluir que* $\int_0^1 f = 0$. *Qualquer função constante é um primitiva de* f.

Exemplo 2.3.2 *Se* $F(x) = 2\sqrt{x}$ *para* $x \in [0,b]$, *então* F *é contínua e* $F'(x) = 1/\sqrt{x}$ *para* $x \in (0,b]$. *Definimos* $f(x) = F'(x)$ *para* $x \in (0,b]$ *e* $f(0) = 0$. *Assim, pelo teorema anterior, vemos que* $f \in \mathcal{R}^*[0,b]$ *e* $\int_0^b f = F(b) - F(0) = F(b) = 2\sqrt{b}$.

As definições e resultados a seguir servirão para a prova do Teorema Fundamental 2, que será enunciado posteriormente.

Definição 2.3.2 *Seja* $I = [a,b]$ *um intervalo não degenerado com partição pontilhada* $\dot{\mathcal{P}} = \{(I_i, t_i)\}_{i=1}^n$.

1. *Uma* ***subpartição*** *de* $\dot{\mathcal{P}}$ *é uma subcoleção* $\{I_j\}_{j=1}^s$.

2. *Uma* ***subpartição pontilhada*** *de* $\dot{\mathcal{P}}$ *é uma subcoleção* $\dot{\mathcal{P}}_0 = \{(I_j, t_j)\}_{j=1}^s$.

3. *Seja* δ *um calibre em* I, *dizemos que a subpartição pontilhada* $\dot{\mathcal{P}}_0$ *é* δ***-fina*** *se* $I_j \subseteq [t_j - \delta(t_j), t_j + \delta(t_j)]$ *para* $j = 1, ..., s$.

4. *Seja* $\dot{\mathcal{P}}_0$ *uma subpartição pontilhada, denotando* $U(\dot{\mathcal{P}}_0) = \bigcup_{j=1}^s I_j$ *e considerando* f *uma função* ***H-K*** *integrável em* $[a,b]$, *podemos definir*

$$S(f;\dot{\mathcal{P}}_0) = \sum_{j=1}^{s} f(t_j)(x_j - x_{j-1}) \ \ e \ \ \int_{U(\dot{\mathcal{P}}_0)} f = \sum_{j=1}^{s} \int_{I_j} f.$$

Sabemos que se $f \in \mathcal{R}^*[a,b]$, dado $\epsilon > 0$, existe δ_ϵ um calibre em $I = [a,b]$ tal que se $\dot{\mathcal{P}}$ é δ_ϵ-fina, então

$$|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - \int_I f| < \epsilon.$$

Com esta notação temos:

Lema 2.3.2 (Saks-Henstock) *Se* $\dot{\mathcal{P}}_0$ *é qualquer* δ_ϵ*-fina subpartição de* $\dot{\mathcal{P}}$ *, então*

$$\left|\sum_{j=1}^{s}\left\{f(t_j)(x_j - x_{j-1}) - \int_{I_j} f\right\}\right| = \left|S(f;\dot{\mathcal{P}}_0) - \int_{U(\dot{\mathcal{P}}_0)} f\right| < \epsilon.$$

Corolário 2.3.1 *Com as hipóteses do lema anterior, temos*

$$\sum_{j=1}^{s}\left|f(t_j)(x_j - x_{j-1}) - \int_{I_j} f\right| < 2\epsilon.$$

As demonstrações dos lema e corolário acima podem ser encontradas em ([3], pág. 77 e pág. 78).

Definição 2.3.3 *Seja* $E \subseteq [a,b]$ *e seja* $\mathcal{F}$ *uma coleção de intervalos fechados não degenerados em* $[a-1, b+1]$*. Dizemos que* $\mathcal{F}$ *é uma* ***cobertura de Vitali*** *para* E *se para todo* $x \in E$ *e para todo* $s > 0$*, existe um intervalo* $J \in \mathcal{F}$ *tal que* $x \in J$ *e* $0 < l(J) < s$*.*

O seguinte teorema da Cobertura de Vitali é necessário para a demonstração do Teorema Fundamental 2, a prova deste pode ser encontrada em ([3], pág. 79).

Teorema 2.3.4 (Cobertura de Vitali) *Seja* $E \subseteq [a,b]$ *e seja* $\mathcal{F}$ *uma cobertura de Vitali para* E*. Então, dado* $\epsilon > 0$*, existem intervalos disjuntos* $I_i, ..., I_p$ *de* $\mathcal{F}$ *e uma coleção enumerável de intervalos fechados* $\{J_i; i = p+1, ...\}$ *em* $\mathbb{R}$ *na qual*

$$E - \bigcup_{i=1}^{p} I_i \subseteq \bigcup_{i=p+1}^{\infty} J_i \quad e \quad \sum_{i=p+1}^{\infty} l(J_i) < \epsilon.$$

Segue que

$$E \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} I_i \cup \bigcup_{i=p+1}^{\infty} J_i.$$

Definição 2.3.4 *Se* $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é* ***H-K*** *integrável, definimos a* ***integral indefinida*** *de* f *por*

$$F(z) = \int_a^z f(x) \quad z \in [a,b].$$

Lema 2.3.3 *A função* F *definida acima é contínua.*

Demonstração: Tomando $c \in [a,b)$, vamos mostrar inicialmente que F é contínua pela direita em c. Seja $\epsilon > 0$ e seja δ_ϵ um calibre em $I = [a,b]$ como nas hipóteses do lema de Saks-Henstock. Definiremos o seguinte calibre em I:

$$\delta'_\epsilon(x) = \begin{cases} \min\{\delta_\epsilon(x), (1/2)|x-c|\}, & \text{se} \quad x \neq c, \\ \min\{\delta_\epsilon(c), \epsilon/(|f(c)|+1)\}, & \text{se} \quad x = c. \end{cases}$$

Seja agora $0 < h < \delta'_\epsilon(c)$ e seja $\dot{\mathcal{P}}_0$ uma subpartição δ'_ϵ-fina, consistindo em um único par $([c, c+h], c)$. Usando o lema de Saks-Henstock para $\dot{\mathcal{P}}_0$, temos que

$$\left| f(c)h - \int_c^{c+h} f \right| < \epsilon.$$

Assim, do fato que $h \leq \epsilon/(|f(c)|+1)$ segue que

$$|F(c+h) - F(c)| = \left| \int_c^{c+h} f \right| \leq |f(c)|h + \epsilon < \epsilon + \epsilon = 2\epsilon.$$

Sendo ϵ arbitrário, concluímos que F é contínua pela direita em $x = c$. Um argumento análogo, olhando para o lado esquerdo de c mostra que F também é contínua pela esquerda. Portanto, contínua em $[a,b]$.

$\square$

Teorema 2.3.5 (Teorema Fundamental 2) *Sejam $f \in \mathcal{R}^*[a,b]$ e F a integral indefinida de f. Então:*

1. *Existe um conjunto de medida nula Z tal que para todo $x \notin Z$ temos que F é diferenciável em x e $F'(x) = f(x)$. Isto é, F é uma* ***a-primitiva*** *de f.*

2. *Se f é contínua em $c \in [a,b]$, então $F'(c) = f(c)$.*

Demonstração: **PARTE 1:** Denotemos por E o conjunto de pontos $x \in [a,b)$ tal que a **derivada a direita** de F não existe ou não é igual a $f(x)$. Mostraremos que E é um conjunto de medida nula.

Se F tem a derivada pela direita em $x \in [a,b]$, então para todo $\alpha > 0$ existe $s > 0$ tal que se $v \in [a,b]$ satisfaz $x < v < x+s$, segue-se que

$$\left| \frac{F(v) - F(x)}{v - x} - f(x) \right| < \alpha.$$

Para negar a condição acima, para $x \in E$, existe $\alpha(x) > 0$ tal que para todo $s > 0$ existe um ponto $v_{x,s} \in [a,b]$ com $x < v_{x,s} < x + s$ e tal que

$$\left| \frac{F(v_{x,s}) - F(x)}{v_{x,s} - x} - f(x) \right| \geq \alpha(x) \quad \textbf{(I)},$$

Daí temos

$$|[F(v_{x,s}) - F(x)] - f(x)(v_{x,s} - x)| \geq \alpha(x)(v_{x,s} - x) \quad \textbf{(II)}.$$

Fixamos $n \in \mathbb{N}$ e tomamos $E_n = \{x \in E; \alpha(x) \geq 1/n\}$. Dado $\epsilon > 0$, sendo f integrável, existe um calibre δ_ϵ em I tal que se $\dot{\mathcal{P}}$ é δ_ϵ-fina, então

$$\left| S(f;\dot{\mathcal{P}}) - \int_I f \right| < \epsilon/n \quad \textbf{(III)}.$$

Vamos criar $\mathcal{F}_n = \{[x, v_{x,s}]; x \in E_n, 0 < s \leq \delta_\epsilon(x)\}$. Temos então que $\mathcal{F}_n$ é uma cobertura de Vitali para E_n. Então pelo Teorema da Cobertura de Vitali, existem $I_1 = [x_1, v_1], ..., I_p = [x_p, v_p]$ em $\mathcal{F}_n$ e uma sequência $(J_i)_{i=p+1}^{\infty}$ de intervalos fechados tal que

$$E_n \subseteq \bigcup_{i=1}^{p} I_i \cup \bigcup_{i=p+1}^{\infty} J_i \quad e \quad \sum_{i=p+1}^{\infty} l(J_i) < \epsilon \quad \textbf{(IV)}.$$

Seja agora

$$\sum_{i=1}^{p} \left| f(x_i)(v_i - x_i) - \int_{x_i}^{v_i} f \right| = \sum_{i=1}^{p} |f(x_i)(v_i - x_i) - [F(v_i) - F(x_i)]| \quad \textbf{(V)}.$$

De (II), com $\alpha(x_i) \geq 1/n$ seque que o lado direito em (V) satisfaz

$$(1/n) \sum_{i=1}^{p} (v_i - x_i) \leq \sum_{i=1}^{p} |f(x_i)(v_i - x_i) - [F(v_i) - F(x_i)]| \quad \textbf{(VI)}.$$

Por outro lado, uma vez que temos $x_i \leq v_i \leq x_i + \delta_\epsilon(x_i)$ para $i = 1, ..., p$, os pares ordenados $\{(I_i, x_i)\}_{i=1}^{p}$ formam uma subpartição de uma partição de I que é δ_ϵ-fina e na qual **(III)** vale. Pelo corolário do lema de Saks-Henstock, podemos cocluir que **(V)** é menor que $2\epsilon/n$. Combinando com **(VI)** e múltiplicando por n, temos

$$\sum_{i=1}^{p} (v_i - x_i) < n \sum_{i=1}^{p} \left| f(x_i)(v_i - x_i) - \int_{x_i}^{v_i} f \right| < 2\epsilon \quad \textbf{(VII)}.$$

Em virtude de **IV**, temos que E_n está contido numa união enumerável de intervalos com comprimento menor que 3ϵ. Sendo $\epsilon > 0$ arbitrário isso implica que E_n é um conjunto de medida nula e como $E = \bigcup_{n=1}^{\infty} E_n$ temos que E também é de medida nula. Por fim para completar a prova dessa parte do teorema basta seguir argumento semelhante e mostrar que M, o conjunto dos pontos $x \in [a,b]$ onde a derivada a esquerda não existe ou é diferente de $f(x)$, também é um conjunto de medida nula.

PARTE 2: Seja $c \in [a,b)$. Vamos considerar a derivada a direita de F em c. Uma vez que f é contínua em c, para $\epsilon > 0$ existe $\eta_\epsilon > 0$ tal que para $c \leq x \leq c + \eta_\epsilon$ temos

$$f(c) - \epsilon < f(x) < f(c) + \epsilon.$$

Tomando h tal que $0 < h < \eta_\epsilon$, pelo Teorema da Aditividade temos que f é integrável em $[a,c], [a,c+h]$ e em $[c,c+h]$, além disso

$$F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f.$$

No intervalo $[c,c+h]$ a função f satisfaz a desigualdade acima. Assim temos

$$(f(c) - \epsilon).h \leq F(c+h) - F(c) = \int_c^{c+h} f \leq (f(c) + \epsilon).h.$$

Dividindo por $h > 0$ e subtraindo $f(c)$, isso nos dá

$$\left| \frac{f(c+h) - F(c)}{h} - f(c) \right| \leq \epsilon.$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, podemos concluir que o limite pela direita existe e é dadto por

$$\lim_{x \to 0+} \frac{F(c+h) - F(c)}{h} = f(c).$$

Analogamente o limite pela esquerda para um $c \in (a,b]$ pode ser calculado e é igual a $f(c)$. Isso conclui a demonstração da parte 2.

$\square$

2.4 Produto e Módulo de Funções

Na integral de Riemann, sabemos que o produto de funções Riemann integráveis é tamém Riemann integrável ([1], pág. 222). No entanto, como mostram os exemplos abaixo, o produto de funções Henstock-Kurzweil integráveis pode não ser

Henstock-Kurzweil integrável. Do mesmo modo, o módulo de funções **H-K** integráveis não é necessariamente **H-K** integrável. Este fato é crucial para dar uma nova definição através da integral **H-K** para funções Lebesgue integráveis, como será visto no último capítulo.

Exemplo 2.4.1 *Seja* $F(x) = xcos(\pi/x)$ *para* $x \in (0,1]$ *e* $F(0) = 0$. *Definimos* $f(x) = F'(x) = cos(\pi/x) + (\pi/x)sen(\pi/x)$ *para* $x \in (0,1]$ *e* $f(0) = F'(0) = 0$. *Mostraremos que* $|f|$ *não é* ***H-K*** *integrável.*

De fato, suponha que existe $\int_0^1 |f| = M$, $M \in \mathbb{R}$. *Temos que* f *é contínua em* $(0,1]$, *desse modo* f *e* $|f|$ *são integráveis restritas a qualquer subintervalo fechado de* $(0,1]$. *Se tomarmos* $a_k = 2/(2k+1)$ *e* $b_k = 1/k$, $k \in \mathbb{N}$, *então* $F(a_k) = 0$ *e* $F(b_k) = (-1)^k/k$. *Temos que* $0 < a_k < b_k < a_{k-1} < b_{k-1} < 1$ *para* $k > 1$. *Usando o Teorema Fundamental* 1.2, *obtemos:*

$$\frac{1}{k} = |F(b_k) - F(a_k)| = |\int_{a_k}^{b_k} f| \leq \int_{a_k}^{b_k} |f|.$$

Temos que:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} \leq \sum_{k=1}^{n} \int_{a_k}^{b_k} |f| \leq \int_0^1 |f| \ \ \forall \ \ n \in \mathbb{N}.$$

Assim, para algum k_o, *tem-se que* $\int_0^1 |f| > M \ \ \forall \ \ k > k_0$. *Isso implica que* $|f|$ *não é* ***H-K*** *integrável, pois temos um* M *arbitrário.*

Exemplo 2.4.2 *Seja* f *como no exemplo anterior. Definimos a função*

$$g(x) = \begin{cases} (-1)^k, & se \quad x \in [a_k, b_k], k \in \mathbb{N}, \\ 0, & se \quad x \in [0,1]; \quad x \notin [a_k, b_k], k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

Temos g, $f \in \mathcal{R}^*[0,1]$, *mas* $f.g$ *não é Henstock-Kurzweil integrável.*

Notemos que $0 \leq \bar{f} = g.f = |g.f|$. Para cada $k \in \mathbb{N}$, temos que $\bar{f}$ restrita a $[a_k, b_k]$ satisfaz $\bar{f} = |f|$. Pelo que vimos no exemplo anterior $\bar{f} = g.f$ não é integrável.

Proposição 2.4.1 *Seja* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ *uma série convergente em* $\mathbb{R}$ *e seja* A *o limite dessa série, então* $\exists$ $h : [0,1] \to \mathbb{R}$, ***H-K*** *integrável e tal que* $\int_0^1 h = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = A$.

Demonstração: Tomando $c_n = 1 - 1/2^n$ para $n = 0, 1, 2, ...,$ então temos $c_0 = 0, c_1 = 1/2, c_2 = 3/4, ...$ Definimos a função $h : [0, 1] \to \mathbb{R}$ da seguinte maneira:

$$h(x) = \begin{cases} 2^k a_k, & \text{se} \quad x \in [c_{k-1}, c_k), k \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{se} \quad x = 1. \end{cases}$$

Uma primeira observação nos mostra que $l([c_{k-1}, c_k]) = 1/2^k$. Também temos um provável candidato a integral de h, pelo seguinte:

$$\sum_{k=1}^{\infty} (2^k a_k).(1/2^k) = \sum_{k=1}^{\infty} a_k = A.$$

Para demonstrar a afirmação feita, será escolhido um calibre δ_ϵ de maneira que os pontos 1 e c_k sejam *marcas* de qualquer partição δ_ϵ-fina. Seja $\sup\{|a_k|; k \in \mathbb{N}\} \leq M$ e $1 \leq M$. Dado $\epsilon > 0$ com $\epsilon < 1$, podemos obter $m(\epsilon) \in \mathbb{N}$ tal que se $m(\epsilon) < m$, então:

$$|a_m| < \epsilon \;\; e \;\; |\sum_{k=m}^{\infty} a_k| < \epsilon.$$

Considere $E = \{c_k; k \in \mathbb{N}\} \cup \{1\}$, definimos então δ_ϵ em $[0, 1]$ por:

$$\delta_\epsilon(x) = \begin{cases} (1/2)dist(t, E), & \text{se} \quad x \in [0, 1] - E, \\ \epsilon/4^{k+1} M, & \text{se} \quad x = c_k, k \in \mathbb{N}, \\ 1/2^{m(\epsilon)}, & \text{se} \quad x = 1 \end{cases}$$

Seja agora $\dot{\mathcal{P}} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ uma partição δ_ϵ-fina de $[0, 1]$. Podemos assumir $c_1 = 1/2 \leq x_{n-1} < 1$. O ponto 1 é uma *marca* para o subintervalo $[x_{n-1}, 1]$ em $\dot{\mathcal{P}}$. Seja $\mu = \inf\{k \in \mathbb{N}; x_{n-1} \leq c_k\}$; então $c_k < x_{n-1}$ para $k = 0, 1, ..., \mu - 1$. Por $\dot{\mathcal{P}}$ ser δ_ϵ-fina temos;

$$1 - 1/2^{m(\epsilon)} = 1 - \delta_\epsilon(1) \leq x_{n-1} \leq c_\mu = 1 - 1/2^\mu,$$

isso implica $m(\epsilon) \leq \mu$. Segue da definição de δ_ϵ que cada c_k em $[0, x_{n-1}] \subseteq [0, c_\mu]$ é uma *marca* para qualquer subintervalo em $\dot{\mathcal{P}}$ que contém esse ponto. Podemos supor que cada ponto c_k é *marca* de dois subintervalos consecutivos de $\dot{\mathcal{P}}$. Dessa maneira, temos dois casos a considerar:

CASO 1: $x_{n-1} = c_\mu$

Para cada $k = 1, ..., \mu$ será considerada a contribuição T_k para $S(h, \dot{\mathcal{P}})$ correspondente aos intervalos $[c_{k-1}, x_r], ..., [x_s, c_k]$. O último intervalo então tem c_k como *marca*. $h(c_k) = 2^{k+1} a_{k+1}$. Para todas as outras *marcas* $t_r, ..., t_{s-1}$ temos que $h(t_i) = 2^k a_k$. Assim,

$$T_k = 2^k a_k (x_s - c_{k-1}) + 2^{k+1} a_{k+1} (c_k - x_s).$$

Uma vez que $x_s - c_{k-1} = (x_s - c_k) + (c_k - c_{k-1}) = (x_s - c_k) + 1/2^k$, obtemos

$$T_k = 2^k a_k(1/2^k) + (2^{k+1}a_{k+1} - 2^k a_k)(c_k - x_s),$$

Segue então que

$$T_k - a_k = (2^{k+1}a_{k+1} - 2^k a_k)(c_k - x_s),$$

Logo

$$|T_k - a_k| \leq 2^k.3M.|c_k - x_s|.$$

Como $\dot{\mathcal{P}}$ é δ_ϵ-fina, temos que $|c_k - x_s| \leq \delta_\epsilon(c_k) = \epsilon/4^{k+1}M$, o que resulta em

$$|T_k - a_k| \leq 2^k.3M.\frac{\epsilon}{4^{k+1}M} < \frac{\epsilon}{2^k}.$$

A contribuição para $S(h, \dot{\mathcal{P}})$ de $[x_{n-1}, 1]$ é zero, pois $h(1)(1 - x_{n-1}) = 0$. Dessa forma temos $S(h, \dot{\mathcal{P}}) = \sum_{k=1}^{\mu} T_k$. Assim

$$|S(h, \dot{\mathcal{P}}) - A| \leq \sum_{k=1}^{\mu} T_k - \sum_{k=1}^{\mu} a_k| + |\sum_{k=\mu+1}^{\infty} a_k| \leq \sum_{k=1}^{\mu} |t_k - a_k| + \epsilon \leq \sum_{k=1}^{\mu} \epsilon/2^k + \epsilon < \epsilon.$$

O resultado segue do fato de ϵ ser arbitrário.

CASO 2: $x_{n-1} < c_\mu$

Os intervalos de $\dot{\mathcal{P}}$ imediatamente anteriores a $[x_{n-1}, 1]$ são

$$[c_{\mu-1}, x_r], ..., [x_{n-1}, x_{n-1}].$$

O valor de h nas *marcas* desses intervalos é $2^\mu a_\mu$. A contribuição T_μ para $S(h, \dot{\mathcal{P}})$ é

$$T_\mu = 2^\mu a_\mu(x_{n-1} - c_{\mu-1}).$$

Uma vez que $c_{\mu-1} < x_{n-1} < c_\mu$, então $0 < x_{n-1} - c_{\mu-1} < c_\mu - c_{\mu-1} = 1/2^\mu$; logo,

$$|T_k| \leq 2^\mu |a_\mu|.(1/2^\mu) = |a_\mu| < \epsilon.$$

Temos então que $S(h, \dot{\mathcal{P}}) = \sum_{k=1}^{\mu-1} T_k + T_\mu + 0$, dessa forma

$$|S(h, \dot{\mathcal{P}}) - A| \leq \left|\sum_{k=1}^{\mu-1} T_k - \sum_{k=1}^{\mu-1} a_k\right| + |T_\mu| + \left|\sum_{k=\mu}^{\infty} a_k\right| < \epsilon.$$

O fato de $\epsilon > 0$ ser arbitrário e levando em conta o CASO 1, concluímos que $h \in \mathcal{R}^*[0, 1]$ e $\int_0^1 h = A$.

$\square$

Exemplo 2.4.3 *Seja* $\kappa : [0,1] \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$\kappa(x) = \begin{cases} (-1)^{k+1}2^k/k, & se \quad x \in [c_{k-1}, c_k), k \in \mathbb{N}, \\ 0, & se \quad x = 1. \end{cases}$$

Como a série harmônica alternada $\sum_{k=1}^{\infty}(-1)^{k+1}/k$ converge, então pela **prop. 2.4.1** temos que

$$\int_0^1 \kappa = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^{k+1}}{k}.$$

Exemplo 2.4.4 *Seja* $\gamma : [0,1] \to \mathbb{R}$ *definida por:*

$$\gamma(x) = \begin{cases} 2^k/k, & se \quad x \in [c_{k-1}, c_k), k \in \mathbb{N}, \\ 0, & se \quad x = 1. \end{cases}$$

Temos que $\gamma = |\kappa|$, não pertence a $\mathcal{R}^*[0,1]$, pois se tomarmos $\gamma_n(x) = \gamma(x)$ para $x \in [0, c_n)$ e $\gamma_n(x) = 0$ para $x \in [c_n, 1]$, temos que $0 \leq \gamma_n \leq \gamma$. Assim:

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \int_0^1 \gamma_n \leq \int_0^1 \gamma.$$

2.5 Teoremas de Convergência

Esta seção tem a finalidade de expor os principais teoremas de convergência nas suas versões para a H-K integral. Serão dadas condições para que o limite de uma sequência de funções Henstock-Kurzweil integráveis seja integráavel, bem como para que a integral do limite seja o limite da sequência de integrais. Alguns nomes são bem familiares vindos da teoria de Lebesgue, tais como: Teoremas da Convergência Monótona, Dominada e o Lema de Fatou.

Definição 2.5.1 *Uma sequência* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *de funções definidas em* I ***converge uniformemente*** *em* I *para a função* f *se para todo* $\epsilon > 0$ *existe* $K_\epsilon \in \mathbb{N}$ *tal que se* $k > K_\epsilon$ *e* $x \in I$*, então* $|f_k(x) - f(x)| < \epsilon$*.*

Assim como na integral de Riemann, na integral **H-K** vale o Teorema da Convergência uniforme.

Teorema 2.5.1 (Convergênia Uniforme) *Seja* $I = [a,b]$*. Se a sequência* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}} \in \mathcal{R}^*[a,b]$ *converge uniformemente para* f *em* I*, então* $f \in \mathcal{R}^*[a,b]$ *e vale*

$$\int_I f = \lim_{k\to\infty} \int_I f_k.$$

Demonstração: Tomando $\epsilon > 0$, existe K_ϵ tal que se $k > K_\epsilon$ e $x \in [a,b]$, então temos $|f_k(x) - f(x)| < \epsilon$. Assim se $h, k \geq K_\epsilon$, vale

$$-2\epsilon < f_k(x) - f_h(x) < 2\epsilon \quad x \in [a,b].$$

e

$$-2\epsilon(b-a) < \int_a^b f_k - \int_a^b f_h < 2\epsilon(b-a).$$

Como $\epsilon > 0$ é arbitrário, $(\int_a^b f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $\mathbb{R}$ e portanto converge para um número $A \in \mathbb{R}$. Veremos que $f \in \mathcal{R}^*[a,b]$ com integral A.

Para $\epsilon > 0$ seja K_ϵ como acima. Seja $\dot{\mathcal{P}} = \{([x_{i-1}, x_i], t_i)\}_{i=1}^n$ qualquer partição pontilhada de $[a,b]$ e seja $k \geq K_\epsilon$, então

$$\left|S(f_k;\dot{\mathcal{P}}) - S(f;\dot{\mathcal{P}})\right| = \left|\sum_{i=1}^n \{f_k(t_i) - f(t_i)\}(x_i - x_{i-1})\right|$$

$$\leq \sum_{i=1}^n |f_k(t_i) - f(t_i)|(x_i - x_{i-1}) < \sum_{i=1}^n \epsilon(x_i - x_{i-1}) = \epsilon(b-a).$$

Fixando $r \geq K_\epsilon$ tal que $|\int_a^b f_r - A| < \epsilon$ e seja $\delta_{r,\epsilon}$ um calibre em $[a,b]$ tal que $|\int_a^b f_r - S(f_r;\dot{\mathcal{P}})| < \epsilon$ onde $\dot{\mathcal{P}}$ é $\delta_{r,\epsilon}$-fina. Temos

$$\left|S(f;\dot{\mathcal{P}}) - A\right| \leq |S(f;\dot{\mathcal{P}}) - S(f_r;\dot{\mathcal{P}})| + \left|S(f_r;\dot{\mathcal{P}}) - \int_a^b f_r\right| + \left|\int_a^b f_r - A\right|$$

$$< \epsilon(b-a) + \epsilon + \epsilon = \epsilon(b-a+2).$$

Usando o fato de ϵ ser arbitrário, temos o resultado.

$\square$

A hipótese de $I = [a,b]$ ser limitado não pode ser retirada do teorema anterior, pois caso contrário o resultado pode não ser válido. Veja o exemplo abaixo.

Exemplo 2.5.1 *Seja* $k \in \mathbb{N}$ *e seja*

$$f_k(x) = \begin{cases} 1/k, & se \quad x \in [0,k], \\ 0, & se \quad x \in (k,\infty). \end{cases}$$

A sequência acima converge uniformemente para a função $f = 0$, pois $\forall\ \epsilon > 0$ $\exists\ n_0 \in \mathbb{N}$ tal que $1/n_0 < \epsilon$ e se $n > n_0$, então $0 \le f_k(x) \le 1/n < 1/n_0 < \epsilon$ para todo $x \in [0,\infty)$. Temos que $\int_0^\infty f_k = 1$ para todo $k \in \mathbb{N}$ (Ver integral em intervalos infinitos no Apêndice). Dessa maneira temos que

$$\int_0^\infty f = 0 \ne 1 = \lim_{k\to\infty} \int_0^\infty f_k.$$

Definição 2.5.2 *Seja* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções* $f_k : [a,b] \to \mathbb{R}$*. A sequência* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *é dita* ***crescente*** *se vale*

$$f_k(x) \le f_{k+1}(x) \quad \forall \quad x \in I, k \in \mathbb{N}.$$

A sequência $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *é dita* ***decrescente*** *se tivermos*

$$f_k(x) \ge f_{k+1}(x) \quad \forall \quad x \in i, k \in \mathbb{N}.$$

Diremos que a sequência $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *é* ***monótona*** *se é crescente ou decrescente em* I*.*

Teorema 2.5.2 (Convergência Monótona) *Seja* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *uma sequência monótona de funções em* $\mathcal{R}^*[a,b]$*, definidas em* $I = [a,b]$ *e suponhamos que* $\lim f_k(x) = f(x)$ *para todo* $x \in I$*. Então* $f \in \mathcal{R}^*[a,b]$ *se, e somente se, a sequência* $(\int_a^b f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *é limitada em* $\mathbb{R}$*. Temos então*

$$\int_a^b f = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k.$$

Definição 2.5.3 *Seja* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções definidas em* $I = [a,b]$*, então definimos as seguintes funções:*

1. $i(x) = \inf f_k(x), \ \forall x \in I$;
2. $I(x) = \sup f_k(x), \ \forall x \in I$;
3. $f^*(x) = \liminf_{k\to\infty} f_k(x) = \sup_{n\ge1}\{\inf_{k\ge n} f_k(x)\}, \ \forall x \in I$;

4. $F^*(x) = \limsup_{k\to\infty} f_k(x) = \inf_{n\geq 1}\{\sup_{k\geq n} f_k(x)\}, \ \ \forall x \in I.$

Observação 2.5.1 *Propriedades sobre* $\lim, \liminf, \limsup, \inf$ *e* $\sup$ *podem ser encontradas em ([3], pág. 365). Por exemplo, uma propriedade que usaremos frequentemente:*

$$\lim f_k = f(x) \iff \liminf f_k = \limsup f_k.$$

Neste caso vale $\lim f_k = \limsup f_k = \liminf f_k$.

Lema 2.5.1 *Seja* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *e* α *funções definidas em* $I = [a,b]$, ***H-K*** *integráveis, tais que*

$$\alpha(x) \leq f_k(x) \ \ \forall \ \ x \in I, k \in \mathbb{N}.$$

Então $\inf f_k \in \mathcal{R}^*[a,b]$.

Demonstração: A desigualdade acima nos mostra que $\inf f_k$ existe e é maior ou igual a α. Para $k \in \mathbb{N}$, $\psi_k = \min\{f_1, ..., f_k\}$ é **H-K** integrável ([3], pág. 109). Temos $(\psi_k)_{k\in\mathbb{N}}$ sequência decrescente. Uma vez que $\int_I \alpha \leq \int_I \psi_k \leq \int_I f_1$ para todo $k \in \mathbb{N}$, podemos usar o Teorema da Convergência monótona que implica $\lim \psi_k = \inf f_k$ **H-K** integrável.

$\square$

Lema 2.5.2 (Lema de Fatou) *Sejam* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}, \alpha \in \mathcal{R}^*[a,b]$ *tais que*

$$\alpha(x) \leq f_k(x) \ \ x \in I, k \in \mathbb{N}$$

e suponhamos que

$$\liminf_{k\to\infty} \int_a^b f_k < \infty.$$

Então $\liminf f_k \in \mathcal{R}^*[a,b]$ *e*

$$-\infty < \int_a^b \liminf_{k\to\infty} f_k \leq \liminf_{k\to\infty} \int_a^b f_k < \infty.$$

Demonstração: Se $\varphi_m = \inf\{f_m, f_{m+1}, ...\}$ para $m \in \mathbb{N}$, então o lema anterior implica que $\varphi_m \in \mathcal{R}^*[a,b]$. Assim temos que

$$\int_a^b \alpha \leq \int_a^b \varphi_m \leq \int_a^b f_k, \ \ m \leq k,$$

E que

$$\int_a^b \alpha \leq \int_a^b \varphi_m \leq \liminf_{k\to\infty} \int_a^b f_k < \infty$$

Assim $(\int_a^b \varphi_m)_{m\in\mathbb{N}}$ é limitada e pelo Teorema da Convergência Monótona, temos que $\varphi = \lim \varphi_m = \liminf f_k$ pertence a $\mathcal{R}^*[a,b]$ e que $\int_a^b \varphi = \lim \int_a^b \varphi_m$. O resultado segue imediatamente.

$\square$

Teorema 2.5.3 (Convergência Dominada) *Seja* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções em* $\mathcal{R}^*[a,b]$ *com* $\lim f_k(x) = f(x)$ *para todo* $x \in I$. *Suponha que existem funções* $\alpha, \omega \in \mathcal{R}^*[a,b]$ *tais que*

$$\alpha(x) \leq f_k(x) \leq \omega(x) \quad x \in I, k \in \mathbb{N}.$$

Então $f \in \mathcal{R}^*[a,b]$ *e*

$$\int_a^b f = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k.$$

Demonstração: Por hipótese temos que $\liminf f_k(x) = \lim f_k(x) = f(x)$ pertencem a $\mathbb{R}$. Das propriedades de integral seque que

$$\int_a^b \alpha \leq \int_a^b f_k \leq \int_a^b \omega \quad k \in \mathbb{N},$$

Pelo lema de Fatou, temos que $f \in \mathcal{R}^*[a,b]$ e

$$\int_a^b f \leq \liminf_{k\to\infty} \int_a^b f_k.$$

Podemos aplicar o Lema de Fatou em $(-f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ e utilizar a propriedade $\liminf(-x_k) = -\limsup(x_n)$ para obter

$$-\int_a^b f = \int_a^b (-f) \leq \liminf_{k\to\infty} \int_a^b (-f_k) = -\limsup_{k\to\infty} \int_a^b f_k,$$

Disso segue que

$$\limsup_{k\to\infty} \int_a^b f_k \leq \int_a^b f.$$

Assim

$$\int_a^b f \leq \liminf_{k\to\infty} \int_a^b f_k \leq \limsup_{k\to\infty} \int_a^b f_k \leq \int_a^b f.$$

e

$$\int_a^b f = \lim_{k\to\infty} \int_a^b f_k.$$

$\square$

Observação 2.5.2 *No Teorema da Convergência Dominada acima poderíamos supor que a convergência fosse a menos de um conjunto de medida nula. De fato, se* $\lim f_k = f = g$ *a menos de um conjunto de medida nula, então* $\int_a^b g = \int_a^b f$.

Exemplo 2.5.2 *Seja* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções* $f_k : [0,1] \to \mathbb{R}$ *definidas por*

$$f_k(x) = \begin{cases} \frac{x^k+1}{x^k+3}, & se \quad x \in [0,1), \\ 0, & se \quad x = 1. \end{cases}$$

Temos que $\lim_{k\to\infty} f_k = 1/3$ em $[0,1)$, pois se $x = 0$, $f_k(0) \to 1/3$ $(k \to \infty)$, se $x \in (0,1)$, então $x = 1/p$, para um $p > 1$, assim $f_k(1/p) \to 1/3$, $(k \to \infty)$. Assim vemos que f_k converge a $1/3$ em quase todo ponto. Como $0 \le f_k(x) \le 1$, pelo Teorema da Convergência dominada, temos que

$$\lim_{k\to\infty} \int_0^1 \frac{x^k+1}{x^k+3} = \int_0^1 1/3 = 1/3.$$

2.6 Integral H-K Sobre Intervalos Infinitos

Nesta seção daremos uma definição de **H-K** integral para funções definidas em intervalos do tipo $[a,\infty)$. É claro que também existem resultados análogos para intervalos do tipo $(-\infty,b], (-\infty,\infty)$, mas não exploraremos; detalhes podem ser encontrados em ([3], pág. 255). Nos limitaremos a definir a integral, enunciar o Teorema de Hake para demonstrar o Teorema Fundamental e para dar uma aplicação na Integral de Dirichlet.

A notação será $[a,\infty)$ ou $[a,\infty]$, ambas referem se ao conjunto $[a,\infty)\cup\{\infty\}$.

Definição 2.6.1 (Caso $[a,\infty)$) *Um* ***calibre*** *em* $[a,\infty]$ *é uma função real estritamente positiva* δ *definida em* $[a,\infty]$. *Diremos que*

$$\dot{\mathcal{P}} = \{([x_0,x_1],t_1),...,([x_{n-1},x_n],t_n]),([x_n,x_{n+1}],t_{n+1})\},$$

em que $x_0 = a$ *e* $x_{n+1} = \infty$ *é* ***δ-fina*** *se os subintervalos finitos satisfazem*

$$[x_{i-1},x_1] \subseteq [t_i - \delta(t_i), t_i + \delta(t_i)], \quad para \quad i = 1,...,n.$$

e o intervalo infinito $[x_n,\infty]$ *satisfaz*

$$[x_n,\infty] \subseteq [1/\delta(\infty),\infty].$$

Teorema 2.6.1 (Cousin) *Sejam* $I = [a, \infty]$ *e* δ *um calibre em* I*, então existe uma partição* δ*-fina de* I*.*

Para funções f as quais queremos integrar em $[a, \infty]$ iremos definir $f(\infty) = 0$, desse modo a **soma de Riemann** reduz-se a $S(f; \dot{\mathcal{P}}) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)(x_i - x_{i-1})$.

Definição 2.6.2 *Se* $I = [a, \infty)$ *e se* $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$*, então* f *é* ***Henstock-Kurzweil integrável*** *em* $[a, \infty)$ *ou* $[a, \infty]$*, se existe um número* $H \in \mathbb{R}$ *tal que* $\forall \; \epsilon > 0$ *existe um* ***calibre*** δ_ϵ *em* $[a, \infty]$ *tal que se* $\dot{\mathcal{P}}$ *é qualquer* δ_ϵ*-fina partição de* $[a, \infty]$*, então*

$$|S(f; \dot{\mathcal{P}}) - H| < \epsilon.$$

Denotamos por $\mathcal{R}^*[a, \infty)$ *ou* $\mathcal{R}^*[a, \infty]$ *o conjunto das funções Henstock-Kurzweil integráveis em* $[a, \infty)$*.*

O teorema a seguir (Teorema de Hake) será utilizado nas demonstrações do Teorema Fundamental e da Integral de Dirichlet. A demonstração encontra-se em ([3], pág. 265).

Teorema 2.6.2 (Hake) *Seja* $f : [a, \infty) \to \mathbb{R}$*. Então* f *é* ***H-K*** *integrável em* $I = [a, \infty)$ *se, e somente se,* f *é* ***H-K*** *integral em* $[a, c]$ *para todo* $c \in (a, \infty)$ *e existe* $A \in \mathbb{R}$ *tal que:*

$$\lim_{c \to \infty} \int_a^c f = A.$$

Neste caso $\int_a^\infty f = A$*.*

Teorema 2.6.3 (Teorema Fundamental) *Suponha que* E *seja um conjunto enumerável de* $[a, \infty)$ *e que* $f, F : [a, \infty) \to \mathbb{R}$ *são tais que:*

1. F *é contínua em* $[a, \infty)$ *e* $\lim_{x \to \infty} F(x)$ *existe;*

2. $F'(x) = f(x) \;\; \forall \; x \in (a, \infty) - E$*;*

   Então f *pertence a* $\mathcal{R}^*[a, \infty)$ *e*

$$\int_a^\infty f = \lim_{x \to \infty} F(x) - F(a).$$

Demonstração: Seja γ qualquer número real pertencente a (a, ∞), então podemos utilizar o Teorema Fundamental 1 para funções em intervalos fechados e limitados visto anteriormente e concluir que f restrita a $[a, \gamma]$ é **H-K** integrável e:

$$\int_a^\gamma f = F(\gamma) - F(a).$$

Tomando $\gamma \to \infty$ e sabendo que $\lim_{x \to \infty} F(x)$ existe, podemos utilizar o Teorema de Hake e garantir que f é **H-K** integrável em $[a, \infty)$.

$\square$

Exemplo 2.6.1 (Integral de Dirichlet) *Seja* $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ *definida por;*

$$D(x) = \begin{cases} \frac{sen(x)}{x}, & se \quad x \in (0, \infty), \\ 1, & se \quad x = 0. \end{cases}$$

Mostraremos que D *é* ***H-K*** *integrável em* $[0, \infty)$*. Observamos inicialmente que* D *restrita a* $[0, \gamma]$*,* $\gamma \in (0, \infty)$ *é contínua, e portanto,* ***H-K*** *integrável em* $[0, \gamma]$*. Resta mostrar que existe o seguinte limite:*

$$\lim_{\gamma \to \infty} \int_0^\gamma D(x).$$

Para isso vamos tomar β *tal que* $0 < \beta < \gamma$*. Utilizando uma* ***integração por partes*** *com* $F(x) = -cos(x)$*,* $F'(x) = sen(x)$*,* $G(x) = 1/x$ *e* $G'(x) = -(1/x^2)$ *e*

$$\int_\beta^\gamma F'G = FG\Big|_\beta^\gamma - \int_\beta^\gamma FG',$$

obtemos

$$\int_0^\gamma D(x) - \int_0^\beta D(x) = \int_\beta^\gamma \frac{sen(x)}{x} = -\frac{cos(x)}{x}\Big|_\beta^\gamma - \int_\beta^\gamma \frac{cos(x)}{x^2}.$$

Pela parte direita das igualdades acima e do fato de que $|cos(x)| \leq 1$*, temos:*

$$\left| -\frac{cos(x)}{x}\Big|_\beta^\gamma - \int_\beta^\gamma \frac{cos(x)}{x^2} \right| \leq \left| \frac{cos(\gamma)}{\gamma} \right| + \left| \frac{cos(\beta)}{\beta} \right| + \int_\beta^\gamma \left| \frac{cos(x)}{x^2} \right|$$

$$\leq \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\beta} - \frac{1}{\gamma} + \frac{1}{\beta}.$$

Fazendo β*,* $\gamma \to \infty$*, temos que*

$$\left| \int_0^\gamma D(x) - \int_0^\beta D(x) \right| \to 0.$$

Assim, podemos criar a sequência $\{D_n\}_{n=1}^{\infty}$*, onde cada* $D_n = \int_0^n D(x)$*. Dado um* $\epsilon > 0$*, existe* $N(\epsilon) \in \mathbb{N}$*, talque para* $m, n > N(\epsilon)$ *vale*

$$\left| \int_0^m D(x) - \int_0^n D(x) \right| < \epsilon.$$

Ou seja, esta é uma sequêcia de Cauchy em $\mathbb{R}$ *e, portanto, converge para um número* $A \in \mathbb{R}$*. Isso nos mostra que existe o limite* $\lim_{\gamma \to \infty} \int_0^{\gamma} D(x)$ *e pelo* ***Teorema de Hake*** *podemos concluir que* D *é* ***H-K*** *integrável em* $[0, \infty)$*.*

Exemplo 2.6.2 *A função* $|D|$ *onde* D *é a função do exemplo anterior não é* ***H-K*** *integrável em* $[0, \infty)$*.*

Vamos supor que sim, ou seja, que existe $\int_0^{\infty} |D(x)| = A \in \mathbb{R}$*. Como* $|D|$ *é contínua em* $[0, \gamma]$ *para* $\gamma \in (0, \infty)$*, então é* ***H-K*** *integrável em* $[0, \gamma]$*. Observamos que* $1/2 < 1/\sqrt{2} \leq |sen(x)|$ *e* $1/\pi < 1/x$ *para todo* $x \in (\pi/4, 3\pi/4)$*. Ou seja,* $\int_0^{\pi} |D| > 1/4$*. De maneira geral para* $x \in (n\pi + \pi/4, n\pi + 3\pi/4)$ *temos que* $1/2 < 1/\sqrt{2} \leq |sen(x)|$*,* $1/\pi(n+1) < 1/x$ *e* $\int_{n\pi}^{(n+1)\pi} |x^{-1} sen(x)| > 1/4(n+1)$*.*

Com base nas observações anteriores temos $\int_0^{\pi(n+1)} |D| > (1/4)(1/1 + 1/2 + 1/3 + ... + 1(n+1))$*. Assim, podemos encontrar um* $N_0 \in \mathbb{N}$ *tal que para* $N_o \leq n$ *tem-se que* $\int_0^{\pi}(n+1)|D| > A$*, contrariando o que foi suposto no início.*

Capítulo 3

A Integral de Lebesgue

O objetivo principal deste capítulo é fazer o estudo resumido, porém detalhado, dos principais resultados a respeito da integral de Lebesgue. Na seção **3.1** faremos um resumo de conceitos e resultados, tais como σ-álgebras, funções mensuráveis, medidas, funções integráveis e teoremas de convergência. Na seção **3.2** caracterizaremos as funções Lebesgue integráveis por meio do conceito das funções Henstock-Kurzweil integráveis.

3.1 σ-álgebras, Funções Mensuráveis e Medidas

Definição 3.1.1 *Definimos o sistema de números reais estendidos por* $\bar{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{-\infty, \infty\}$. *Os símbolos* $-\infty$ *e* ∞ *não são números reais, mas vale que* $-\infty < x < \infty \ \ \forall \ \ x \in \mathbb{R}$.

Em relação à aritmética com $-\infty$ e ∞ serão seguidas as seguintes convenções:

1. $0 \cdot (\pm\infty) = 0 = (\mp\infty) \cdot 0$;

2. *Se* $x \in \mathbb{R}$, então $x + (\pm\infty) = \pm\infty = (\pm\infty) + x$;

3. *Se* $x > 0$, então $x \cdot (\pm\infty) = \pm\infty = (\pm\infty) \cdot x$;

4. *Se* $y < 0$, então $y \cdot (\pm\infty) = (\mp\infty) = (\pm\infty) \cdot y$;

5. Nada será dito a respeito de $(+\infty) - (+\infty), (-\infty) + (+\infty)$ ou quocientes com denominador $(\pm\infty)$.

3.1.1 σ-álgebras

Definição 3.1.2 *Uma família Ω de subconjuntos de um conjunto X é dita uma σ-álgebra quando:*

1. $X \in \Omega$;
2. *Se $A \in \Omega$, então o complementar $A^c \in \Omega$;*
3. *Se $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência enumerável de conjuntos em Ω, então $\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k \in \Omega$.*

*O par (X, Ω) é denominado **espaço mensurável**.*

Observação 3.1.1 *Pelas propriedades de De Morgan, se $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ em Ω, então $\bigcap_{k=1}^{\infty} A_k$ também pertence a Ω.*

Exemplo 3.1.1 *:*

1. *Seja Ω a família $\{\emptyset, X\}$ de X. Então Ω é uma σ-álgebra.*
2. *Também, seja X qualquer conjunto e seja $\mathcal{P}(X)$ a família de todos os subconjuntos de X. Temos que $\mathcal{P}(X)$ é uma σ-álgebra.*

Observação 3.1.2 *Seja A uma coleção de conjuntos de X, então a menor σ-álgebra que contém A é denominada **σ-álgebra gerada por** A. Esta menor σ-álgebra existe, pois o conjunto das partes de X é σ-álgebra e a interseção de σ-álgebras contendo A é uma σ-álgebra ([4], pág. 7).*

Exemplo 3.1.2 *Tomando $X = \mathbb{R}$. A **σ-álgebra de Borel** é a σ-álgebra B gerada pelos intervalos abertos (a, b) (ou intervalos fechados $[a, b]$).*

3.1.2 Funções Mensuráveis

Definição 3.1.3 *Seja (X, Ω) espaço mensurável. Um função $f : X \to \mathbb{R}$ é **mensurável** se para todo número real α o conjunto*

$$\{x \in X; f(x) > \alpha\} \in \Omega.$$

Observação 3.1.3 *Na definição acima podemos substituir $f(x) > \alpha$ por $f(x) \leq \alpha$ ou $f(x) \geq \alpha$ ou $f(x) < \alpha$.*

Lema 3.1.1 *Sejam* f *e* g *funções (com imagens reais) mensuráveis e seja* c *um número real. Então as funções*

$$cf, \quad f^2, \quad f+g, \quad f.g, \quad |f|,$$

são mensuráveis. Definimos f^+ *e* f^- *por*

$$f^+(x) = sup\{f(x), 0\} \quad e \quad f^-(x) = sup\{-f(x), 0\}.$$

Temos $f = f^+ - f^-$ *e* $|f| = f^+ + f^-$. *Então* f *é mensurável se, e somente se,* f^+ *e* f^- *são mensuráveis.*

Definição 3.1.4 *Seja* (X, Ω) *um espaço mensurável. A função* $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ *(f pode assumir valores infinitos) é mensurável se para todo* $\alpha \in \mathbb{R}$ *o conjunto* $\{x \in X; f(x) > \alpha\} \in \Omega$.

Observação 3.1.4 *Denotamos por* $M(X, \Omega)$ *o conjunto* $\{f : X \to \bar{\mathbb{R}}; f \text{ é mensurável}\}$.

Lema 3.1.2 *Seja* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *uma sequência em* $M(X, \Omega)$, *então as funções*

$$f(x) = \inf f_k(x), \quad F(x) = \sup f_k(x),$$

$$f^*(x) = \liminf f_k(x), \quad F^*(x) = \limsup f_k(x).$$

pertencem a $M(X, \Omega)$.

Demonstração: Decorre das seguintes observações:

$$\{x \in X; f(x) \geq \alpha\} = \bigcap_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f_k(x) \geq \alpha\},$$

$$\{x \in X; F(x) > \alpha\} = \bigcup_{n=1}^{\infty} \{x \in X; f_k(x) > \alpha\},$$

Dessa forma f e F são mensuráveis e isso implica que

$$f^*(x) = \sup_{k\geq 1} \{\inf_{m\geq k} f_m(x)\},$$

e

$$F^*(x) = \inf_{k\geq 1} \{\sup_{m\geq k} f_m(x)\},$$

são mensuráveis.

Corolário 3.1.1 *Se* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *é uma sequência em* $M(X, \Omega)$ *que converge para* f *em* X, *então* $f \in M(X, \Omega)$.

Demonstração: Pelo resultado anterior, observando que $f(x) = \liminf f_k(x)$

3.1.3 Medidas

Definição 3.1.5 *Uma **medida** μ é uma função definida na σ-álgebra Ω de subconjuntos de X com valores nos reais estendidos ($\mu : \Omega \to \bar{\mathbb{R}}$) tal que*

1. $\mu(\emptyset) = 0$;

2. $\mu(E) \geq 0$ *para todo* $E \in \Omega$;

3. μ *é enumeravelmente adidiva, ou seja para* $(E_k)_{k\in\mathbb{N}} \subset \Omega$ *tal que* $E_k \cap E_n = \emptyset$ *se* $k \neq n$, *então*
$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(E_k).$$

Observação 3.1.5 *Se a medida não tem valores em* $+\infty$ *, dizemos que é uma **medida finita**. No caso em que existe uma sequência* $(E_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *de conjuntos em* Ω *na qual* $X = \bigcup E_k$ *e tal que* $\mu(E_k) < +\infty$ *para todo* k, *então diremos que* μ *é* σ*-finita.*

Exemplo 3.1.3 *Seja* $X = \mathbb{N}$ *e seja* Ω *a* σ*-álgebra de todos os subconjuntos de* $\mathbb{N}$. *Definimos* $\mu(E) =$ *número de elementos de* E, *em que* $E \in \Omega$. *Temos que* μ *é uma medida, chamada de **Medida de Contagem**.*

Definição 3.1.6 *Um **espaço de medida** é uma tripla* (X, Ω, μ), *em que* X *é um conjunto,* Ω *é* σ*-álgebra e* μ *é uma medida definida em* Ω.

Dizemos que certa propriedade (ou proposição) vale μ-qtp (em quase todo ponto) se existe um subconjunto $N \in \Omega$ tal que $\mu(N) = 0$ e a propriedade vale em $X - N$.

3.1.4 Medida de Borel

Definição 3.1.7 *Uma família* $\mathcal{A}$ *de subconjuntos de* X *é uma **Álgebra** se valem as propriedades:*

1. $X \in \mathcal{A}$;

2. *Se* $E \in \mathcal{A}$, *então* $E^c \in \mathcal{A}$;

3. Se $E_1, E_2, ..., E_n \in \mathcal{A}$*, então* $\bigcup_{j=1}^{n} E_n \in \mathcal{A}$.

A coleção $\mathcal{F}$ de todas as uniões finitas de subconjuntos da forma $(a,b], (-\infty,b]$, $(a,+\infty)$ e $(-\infty,+\infty)$ é uma álgebra de subconjuntos de $\mathbb{R}$.

Observação 3.1.6 *Podemos definir em uma álgebra uma medida* μ*, tal como fizemos para* σ*-álgebras.*

Tendo em vista a última observação podemos definir na álgebra $\mathcal{F}$ de $\mathbb{R}$ a medida $l : \mathcal{F} \to \mathbb{R}$, onde l é o comprimento. Utilizando a **extenção de medidas** ([4], pág. 98), temos uma σ-álgebra $\mathcal{F}^*$, tal que $\mathcal{F} \subset \mathcal{F}^*$, uma medida l^* definida em $\mathcal{F}^*$ (l^* restrita a $\mathcal{F}$ é igual a l) e o espaço de medida $(\mathbb{R}, \mathcal{F}^*, l^*)$. Denominamos $l^* = \lambda$ de **Medida de Lebesgue**. Restringindo λ à σ-álgebra B de Borel a denominamos de **Medida de Borel (ou de Lebesgue)**.

Teorema 3.1.1 *Seja* $X = \mathbb{R}$, $B = \sigma$*-álgebra de Borel e* λ *a medida de Lebesgue. Se* $E \in B$ *e* $f : E \to \mathbb{R}$ *é contínua em quase todo ponto, então* f *é mensurável.*

Demonstração: O conjunto D de descontinuidade de f tem medida zero, ou seja, $\lambda(D) = 0$ e todos seus subconjuntos também tem medida zero. Seja $r \in \mathbb{R}$, temos

$$\{x \in E; f(x) > r\} = \{x \in E - D; f(x) > r\} \bigcup \{x \in D; f(x) > r\}.$$

Como $\{x \in D; f(x) > r$ tem medida zero, ele é mensurável. Resta vermos que $C = \{x \in E - D; f(x) > r\}$ pertence a B. De fato, como f é contínua, para $x \in C$ podemos encontrar δ_x, tal que se $|y-x| < \delta_x$ ($y \in$ uma vizinhança V_{δ_x} de x), temos que $f(y) > r$. Dessa forma

$$C = (E - D) \bigcap \bigcup_{x \in C} V_{\delta_x}.$$

Essa é uma interseção de conjuntos em B, logo $C \in B$.

□

Observação 3.1.7 *O teorema acima é importante, pois se tivermos uma sequência de funções contínuas convergindo para uma dada* f*, então* f *é mensurável. Esse resultado vale mesmo que a convergência seja em quase todo ponto; basta utilizar o fato de que se* g *é mensurável e* $g = f$ *em quase todo, então* f *é mensurável. Assim, se a sequência converge em quase todo ponto, podemos ajustar (colocando zero na imagem do conjunto exepcional) para termos convergência em todo ponto.*

3.1.5 Funções Integráveis Não Negativas

Fixaremos (X, Ω, μ) e denotaremos o conjuntos das funções mensuráveis não negativas $f : X \to \bar{\mathbb{R}}$ por $M^+(X, \Omega)$.

Definição 3.1.8 *Uma função* $\varphi : X \to \mathbb{R}$ *é* ***simples*** *se atinge apenas quantidade finita de valores.*

Uma função simples φ pode ter várias representações, mas estaremos interessanos numa representação padrão. Seja a_j a coleção de valores de φ $(j = 1, ..., n)$ e seja $E_j = \{x \in X; \varphi(x) = a_j\}$. Temos que $\bigcup_{j=1}^{n} E_j = X$, o que nos dá

$$\varphi = \sum_{j=1}^{n} a_j \mathcal{X}_{E_j},$$

em que $\mathcal{X}_{E_j}$ é a função característica de E_j, ou seja, vale 1 se $x \in E_j$ e 0 caso contrário.

Lema 3.1.3 *Se* f *é uma função não negativa em* $M(X, \Omega)$*, então existe uma sequência* $(\varphi_k)_{k \in \mathbb{N}}$ *em* $M(X, \Omega)$ *tal que*

1. *Cada* φ_k *tem apenas um número finito de valores reais (chamadas de funções simples);*
2. $0 \leq \varphi_k(x) \leq \varphi_{k+1}(x)$ *para* $x \in X, k \in \mathbb{N}$*;*
3. $f(x) = \lim \varphi_k(x)$ *para cada* $x \in X$*.*

Demonstração: Seja $k \in \mathbb{N}$ fixo. Se $n = 0, 1, 2, ..., k2^k - 1$, tomemos o seguinte conjunto:

$$E_{nk} = \{x \in X; n2^{-k} \leq f(x) < (n+1)2^{-k}\},$$

Se $n = k2^k$, tomamos

$$E_{nk} = \{x \in X; k \leq f(x)\}.$$

Estes conjuntos são disjuntos, pertencem a Ω e tem união igual a X. Definimos $\varphi_k = n2^{-k}$ em E_{nk}. Temos que $\varphi_k \in M(X, \Omega)$ e as condições 1, 2 e 3 são satisfeitas.

$\square$

Definição 3.1.9 *Se φ é uma função simples em $M^+(X,\Omega)$ com representação padrão, definimos a **integral** de φ em relação a μ por*

$$\int \varphi d\mu = \sum_{j=1}^{n} a_j \mu(E_j).$$

Lema 3.1.4 *Se φ e ψ são funções simples em $M^+(X,\Omega)$ e $c \geq 0$, então*

$$\int c\varphi = c \int \varphi d\mu,$$

$$\int (\varphi + \psi) d\mu = \int \varphi d\mu + \int \psi d\mu.$$

Definição 3.1.10 *Se f pertence a $M^+(X,\Omega)$, definimos a **integral de f com respeito a** μ como:*

$$\int f d\mu = sup \int \varphi d\mu,$$

onde o supremo é tomado sobre todas a funções simples em $M^+(X,\Omega)$ tais que $0 \leq \varphi(x) \leq f(x)$ para todo $x \in X$.

Teorema 3.1.2 (Convergência Monótona) *Se $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência crescente de funções em $M^+(X,\Omega)$ que converge para f, então vale*

$$\int f d\mu = \lim \int f_k d\mu.$$

Lema 3.1.5 (Lema de Fatou) *Se $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ é uma sequência de funções em $M^+(X,\Omega)$, então*

$$\int (\liminf f_k) d\mu \leq \liminf \int f_k d\mu.$$

3.1.6 Funções Lebesgue Integráveis

Fixada a tripla (X,Ω,μ), definimos

$$L = L(X,\Omega,\mu) = \{f : X \to \mathbb{R}; f^+, f^- \in M^+(X,\Omega) \ \ e \ \int f^+ d\mu < +\infty, \int f^- d\mu < +\infty\}.$$

Se $f \in L$, então

$$\int f d\mu = \int f^+ d\mu - \int f^- d\mu.$$

Teorema 3.1.3 *Uma função mensurável* f *pertence a* L *se, e somente se,* $|f|$ *pertence a* L*. Vale então*

$$\left|\int f d\mu\right| \leq \int |f| d\mu.$$

Demonstração: Suponhamos primeiramente que $f \in L$; então f^+ e f^- pertencem a L. Como $|f|^+ = |f| = f^+ + f^-$ e $|f|^- = 0$ temos que $|f| \in L$.

Reciprocamente, suponhamos que $|f| \in L$. Como $f^+ \leq |f|^+$, temos que $\int f^+ \leq \int |f|^+ < +\infty$. Escrevendo $f^- = |f| - f^+$, temos que $f^- \in L$. Logo $f = f^+ - f^- \in L$.

A desigualdade segue de

$$\left|\int f d\mu\right| = \left|\int f^+ d\mu - \int f^- d\mu\right| \leq \left|\int f^+ d\mu\right| + \left|\int f^- d\mu\right| = \int f^+ d\mu + \int f^- d\mu = \int |f| d\mu.$$

$\square$

Teorema 3.1.4 *Seja* $f, g \in L$ *e* $c \in \mathbb{R}$*, então temos que* $\alpha \cdot f$ *e* $f + g$ *pertencem a* L*.*

$$\int \alpha \cdot f d\mu = \alpha \int f d\mu, \quad \int (f+g) d\mu = \int f d\mu + \int g d\mu.$$

Teorema 3.1.5 (Convergência Dominada) *Seja* $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ *uma sequência de funções Lebesgue integráveis que converge em quase todo ponto para a função real* f*. Se existe uma função Lebesgue integrável* g *tal que* $|f_k| \leq g$ *para todo* $k \in \mathbb{N}$*, então* f *é integrável e:*

$$\int f d\mu = \lim \int f_k d\mu.$$

3.2 Construção da Integral de Lebesgue pela Integral de Henstock-Kurzweil

O objetivo dessa seção é dar uma nova definição para a Integral de Lebesgue, que se baseia no seguinte: uma função **H-K** integrável é **Lebesgue integrável** se, e somente se, seu módulo é Henstock-Kurzweil integrável. Fixaremos o espaço de medida $(\mathbb{R}, B, \lambda)$, onde B é a σ-álgebra de Borel e λ é a medida de Lebesgue.

Teorema 3.2.1 *Seja* f *é uma função Henstock-Kurzweil integrável; então* f *é mensurável.*

Demonstração: Seja $F : [a, b+1] \to \mathbb{R}$ definida do seguinte modo:

$$F(x) = \begin{cases} \int_a^x f, & \text{se} \quad x \in [a,b], \\ \int_a^b f, & \text{se} \quad x \in (b, b+1]. \end{cases}$$

Pelo **Lema 2.3.3** temos que F é contínua em $[a,b]$. Pelo segundo ítem do Teorema Fundamental 2, existe Z um conjunto de mediza nula tal que para $x \in [a,b] - Z$ temos $F'(x) = f(x)$. Introduzimos as seguintes funções

$$g_k(x) = \frac{F(x+1/k) - F(x)}{1/k} \quad \textit{para} \quad x \in [a,b), k \in \mathbb{N}.$$

Para $x \in [a,b] - Z$ temos que

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x+h) - F(x)}{h} = f(x).$$

Em particular para $h = 1/k$, $k \in \mathbb{N}$, temos que $g_k(x) \to f(x)$ para todo $x \in [a,b] - Z$. Ou seja, cada g_k é contínua e $\{g_k\}_{k=1}^{\infty}$ converge em quase todo ponto para f, isso implica que f é mensurável

$\square$

Definição 3.2.1 *Uma função* $p : [a,b] \to \mathbb{R}$ *é chamada de* ***função degrau*** *se existe uma partição* $\{[c_{i-1}, c_i]\}_{i=1}^n$ *de* $[a,b]$ *e números reais* $\{\alpha_i\}_{i=1}^n$ *tais que*

$$p(x) = \alpha_i, \quad x \in (c_{i-1}, c_i), i = 1, ..., n.$$

Em c_i *a função* p *pode assumir quaisquer valores reais.*

Uma observação importante a fazer sobre uma função degrau é que ela é integrável a Riemann, a Lebesgue e também **H-K** integrável e sua integral é:

$$\int_a^b p = \alpha_i(c_i - c_{i-1}), \quad i = 1, ..., n.$$

Para ver que p é Riemann integrável, basta observar que o conjunto dos pontos de descontinuidade tem medida nula e essa integral coincide com a integral **H-K** como já visto. Além disso, como p é um caso particular de função simples, essa definição de integral é justamente a definição de integral para funções simples no sentido Lebesgue.

A seguir enunciaremos um teorema importante para os propósitos desta seção. A demonstração encontra-se em ([5], pág. 94).

Teorema 3.2.2 *Seja* $E \in B$*, onde* B *é a* σ*-álgebra de Borel. Suponha* $f : E \to \bar{\mathbb{R}}$ *mensurável. Então existe* $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ *uma sequência de* ***funções degrau*** *que converge para* f *em quase todo ponto em* E*. Mais ainda, se* $|f(x)| \leq M$ *para todo* $x \in E$*, então* $|p_k(x)| \leq M$ *para todo* $x \in E$ *e* $k \in \mathbb{N}$*.*

De agora em diante é preciso distinguir a integral de Lebesgue da integral de Henstock-Kurzweill. Basta observar a notação: $\int f d\lambda$ indica a integral de Lebesgue (onde consideraremos λ a medida de lebesgue e sempre a σ-álgebra B de Borel) equanto que apenas $\int f$ refere-se a integral de Henstock-Kurzweil.

Teorema 3.2.3 *Suponhamos que* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$ *é não negativa. Então,* f *é Henstock-Kurzweil integrável se, e somente se,* f *é mensurável e Lebesgue integrável. Temos assim:*

$$\int f d\lambda = \int f.$$

Demonstração: Vamos considerar primeiro o caso em que f é limitada com $|f| \leq M$. Suponhamos que f é **H-K** integrável, então f é mensurável e pelo teorema anterior existe $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ sequência de funções degrau convergindo em quase todo ponto para f e $-M \leq p_k \leq M$. Como a integral **H-K** de funções degrau coincide com sua integral de Lebesgue, então pelo Teorema da Convergência Dominada para funções Lebesgue integráveis, temos que f é Lebesgue integrável e ainda

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b p_k d\lambda = \int_a^b f d\lambda.$$

Reciprocamente, suponhamos que f é mensurável e Lebesgue integrável, então considerando a sequência $\{p_k\}_{k=1}^{\infty}$ anterior e o Teorema da Convergência Dominada para funções **H-K** integráveis, temos que f é **H-K** integrável e

$$\lim_{k\to\infty} \int_a^b p_k = \int_a^b f.$$

Dessa forma:

$$\int_a^b f = \lim_{k\to\infty} \int_a^b p_k = \lim_{k\to\infty} \int_a^b p_k d\lambda = \int_a^b f d\lambda.$$

Suponhamos agora uma f não negativa. Definimos a seguinte sequência de funções $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ por $f_k(x) = \min\{f(x), k\}$. Cada f_k é não negativa, limitada e mensurável; logo pela parte inicial temos $\int_a^b f_k d\lambda = \int_a^b f_k$.

Suponha f **H-K** integrável; uma vez que $(f_k)_{k\in\mathbb{N}}$ converge para f e é crescente, podemos aplicar o Teorema da Convergência Monótona para funções Lebesgue integráveis para concluir que f é Lebesgue Integrável e

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b f_k d\lambda = \int_a^b f d\lambda.$$

Reciprocamente, suponhamos f mensurável e Lebesgue integrável. Tomando a mesma sequência de funções f_k de antes e utilizando o Teorema da Convergência monótona para funções **H-K** integráveis, temos que f é **H-K** integrável e

$$\lim_{k\to\infty}\int_a^b f_k = \int_a^b f.$$

Por fim valem as igualdades seguintes:

$$\int_a^b f = \lim_{k\to\infty}\int_a^b f_k = \lim_{k\to\infty}\int_a^b f_k d\lambda = \int_a^b f d\lambda.$$

$\square$

Teorema 3.2.4 *Seja* $f : [a, b] \to \mathbb{R}$. *Então,* f *e* $|f|$ *são Henstock-Kurzweil integráveis se, e somente se, f é mensurável e Lebesgue integrável.*

Demonstração: Suponhamos que f e $|f|$ são H-K integráveis. Temos que

$$f^+ = \frac{|f| + f}{2} \quad e \quad f^- = \frac{|f| - f}{2},$$

são H-K integráveis. Assim $f = f^+ - f^-$ é Lebesgue integrável, pois pelo teorema anterior f^+ e f^- são Lebesgue integráveis.

Reciprocamente se f é Lebesgue integrável, então f^+ e f^- também o são. Além disso pelo teorema anterior f^+ e f^- são Henstock-Kurzweil integráveis. Como $|f| = f^+ + f^-$ e $f = f^+ - f^-$, temos que f e $|f|$ são Henstock-Kurzweil integráveis.

$\square$

Referências

[**1**] BARTLE, R. G.; SHERBERT, D. R. *Introduction to Real Analysis.* University of Illinois. John Wiley & Sons, Inc. 4 ed, 2011.

[**2**] LIMA, E. L. Curso de Análise. IMPA. Vol. 1. 14.ed. Rio de Janeiro, 2011;

[**3**] BARTLE, R. G. *A Modern Theory of Integration.* Graduate Studies in Mathematics. University of Illinois - Eastern Michigan University. Vol. 32. 2000.

[**4**] BARTLE, R. G. *The Elements of Integration.* New York: John Wiley & Sons, 1966.

[**5**] KURTZ, D. S.; SWARTZ, C. W. *Theories Of Integration: The Integrals of Riemann, Lebesgue, Henstock-Kurzweil and McShane.* Series in Real Analysis. New Jersey: World Scientific, Vol. 13, 2 ed., 2012.