



UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS - ICEX
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

TRANSFORMAÇÕES DE CREMONA DADAS POR
QUÁDRICAS NO ESPAÇO PROJETIVO DE DIMENSÃO 3 E
4 E SUAS INVERSAS

Aislan Leal Fontes

Belo Horizonte - MG
2013

UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS - UFMG
CURSO DE MESTRADO EM MATEMÁTICA

Aislan Leal Fontes

Orientador:
Dan Avritzer

TRANSFORMAÇÕES DE CREMONA DADAS POR
QUÁDRICAS NO ESPAÇO PROJETIVO DE DIMENSÃO 3 E
4 E SUAS INVERSAS

Dissertação submetida à banca examinadora, designada pelo Programa de Pós-Graduação em Matemática da UFMG, como requisito parcial para a obtenção do título de mestre em Matemática.

Belo Horizonte - MG
Julho - 2013

Agradecimentos

Em primeiro lugar agradeço a Deus por me dar forças, amor e delinear meus objetivos propondo-me alcançar mais uma meta em minha vida. Muito obrigado senhor por estar ao meu lado em momentos bons e ruins.

Agradeço ao meu orientador Dan, pela atenção, pela amizade, por me apresentar essa fascinante teoria, por confiar em mim e pela forma com que conduziu de maneira tão eficaz meus estudos até a conclusão de minha dissertação.

Aos meus pais pelo apoio e carinho vindos de tão longe; de forma especial a minha mãe, Edilma, que sempre me apoiou.

Aos meus irmãos Adjan e Amanda.

À minha noiva, Jussineide, pessoa que não encontro palavras para descrevê-la e quão grande é importante para mim. Está sempre do meu lado, participando de minhas dificuldades e emoções. Meu sincero e humilde muito obrigado!

À todos os professores que compartilharam seus conhecimentos nas disciplinas que cursei durante o mestrado: Ana Cristina, Heleno, Márcio Soares, Sonia, Emerson. Aos professores da graduação Alan Almeida, Éder Mateus, Arlúcio Viana e Joedson.

Aos meus amigos Victor, Tauan, Antonio Marcos, Michely, Fernanda, Guilherme Souza, Divane, Carlos, José, Renato, Luciana, Taciana, Andréa e todos os colegas pelo companheirismo e atenção.

À CAPES e à FAPEMIG pela bolsa de estudos.

Sozinho andamos mais rápido, mas juntos podemos ir mais longe.

Autor Desconhecido

Resumo

Nesse trabalho, estudaremos as transformações de Cremona dadas por quádricas do espaço linear projetivo de dimensão n com $n = 3$ e $n = 4$, e suas inversas. Nossa abordagem utiliza um método devido a Cremona com o objetivo de determinar uma classe especial de sistemas lineares de quádricas que dão origem as transformações de Cremona. Esse método também possibilita o estudo de propriedades sobre tais transformações como, por exemplo, onde não está definida, o grau da transformação inversa e o conjunto onde não é injetiva.

Abstract

In this dissertation, we consider Cremona transformations given by quadrics in the projective space of dimension n , $n = 3$ and $n = 4$, and its inverses. Our approach considers a method due to Cremona with the aim of determining a special class of linear systems of quadrics that give rise to Cremona transformations. This method also enables one to study further properties of Cremona transformations such as the locus where it is not defined, the degree of its inverse and the set where it is not injective.

Sumário

1	Pré-Requisitos	11
1.1	Divisores	11
1.1.1	Divisores e Funções Racionais	17
1.1.2	O sistema Linear Associado a um Divisor	19
1.2	Teorema de Bézout	21
1.3	A Relação Entre Sistemas Lineares e Transformações de Cremona	23
2	Algumas Superfícies Clássicas	31
2.0.1	Superfície de Veronese	31
2.0.2	Projeções da Superfície de Veronese	34
2.0.3	O Scroll Cúbico em \mathbb{P}^4	35
2.0.4	Variedade Cúbica de Segre	39
3	Transformações de Cremona em \mathbb{P}^3	41
3.1	Representação Plana de uma Superfície Racional	41
3.2	Construção de Sistemas Homaloidais	44
3.2.1	A Transformação T_{22}	46
3.2.2	A Transformação T_{23}	48
3.2.3	A transformação T_{24}	51
3.2.4	As três Classes de Transformações Birracionais em \mathbb{P}^3 dadas por Quádricas	53
3.3	Transformação de Cremona dada por superfícies Cúbicas	57
3.3.1	A Transformação T_{33}	57
3.3.2	A Transformação T_{33}^*	60
4	Transformações de Cremona em \mathbb{P}^4 dadas por Quádricas	62
4.1	As Transformações Quádricas T_{23} através de uma Curva Quíntica Elíptica c_5 em \mathbb{P}^4	63

4.1.1	Vizinhanças dos Pontos no Lugar de Base c_5 de T	67
4.2	Generalização do Método de Cremona para \mathbb{P}^4	73
4.2.1	O Sistema Inverso Ψ	75

Introdução

O objetivo desta dissertação é estudar as transformações de Cremona $\mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^n$ dadas por quádricas, e suas inversas para o caso em que $n = 3$ e $n = 4$. Para as transformações de Cremona de \mathbb{P}^2 sabe-se que o grau da aplicação inversa sempre coincide com o grau da transformação o que não acontece para as transformações de Cremona em espaços de dimensão $n > 2$ como é o caso das transformações de Cremona com $n = 3$ e $n = 4$. O sub esquema de \mathbb{P}^n dado por $\varphi_0 = \varphi_1 = \dots = \varphi_n = 0$ é chamado o lugar de base da Cremona $\varphi = (\varphi_0 : \varphi_1 : \dots : \varphi_n)$. Um dos nossos objetivos é estudar o lugar de base de uma transformação de Cremona que fica mais complicado ao passo que aumentamos a dimensão do espaço. Por exemplo, as transformações de Cremona de \mathbb{P}^2 poderão ter apenas pontos em seu lugar de base; quando estamos com transformações de Cremona de \mathbb{P}^3 pode-se ter pontos ou curvas no lugar de base; para as transformações de \mathbb{P}^4 , as possibilidades para seu lugar de base são pontos, retas ou superfícies.

Iniciaremos a dissertação abordando temas que serão necessários para uma melhor compreensão dos demais capítulos, tendo como principais temas, Divisores, o conhecido teorema de Bézout e as transformações de Cremona de \mathbb{P}^2 . Na sequência, no capítulo 2 será destacado algumas superfícies clássicas tais como: a superfície de Veronese, algumas das projeções da Superfície de Veronese como é o caso do Scroll Cúbico em \mathbb{P}^4 e por último, a variedade Cúbica de Segre. Essas variedades irão classificar os sistemas lineares de quádricas de \mathbb{P}^4 associados as transformações de Cremona.

O terceiro capítulo será dedicado ao estudo das transformações de Cremona dadas por quádricas. De início, expomos um método, devido a Cremona, que nos mostra como construir sistemas homaloidais. Segundo esse método vemos a necessidade de se obter a representação plana de uma superfície quádrica genérica onde calculamos explicitamente algumas dessas representações planas. Utilizando o método de Cremona vamos estudar três classes de transformações quádricas de \mathbb{P}^3 , mostraremos na verdade que só existe essas três classes de transformações quádricas: T_{22}, T_{23}, T_{24} . A notação T_{mn} significa que a transformação de Cremona T é dada por polinômios de grau n e sua inversa por

polinômios de grau m . Com intuito de mostrar ao leitor que o método se aplica não só para transformações de Cremona dada por quádricas, neste capítulo ainda determinamos dois tipos de transformações de Cremona dada por cúbricas: T_{33} e T_{33}^* .

Por fim, no capítulo 4 estudaremos as transformações de Cremona do espaço linear projetivo \mathbb{P}^4 . Mais precisamente, vamos considerar o sistema linear de quádricas através de uma curva quártica elíptica e analisar a transformação de Cremona associada como, por exemplo, determinar o grau da inversa e seu lugar de base. Em seguida, vamos expor o método geral de determinar sistemas lineares homaloidais dados por quádricas e mostrar que ele consiste de uma mera adaptação do método utilizado por Cremona abordado no capítulo 3 para o espaço linear projetivo \mathbb{P}^3 .

Os trabalhos de Semple [6] e [8] são básicos para todo nosso trabalho. Estes textos possuem uma rica geometria que no entanto utiliza uma linguagem que hoje caiu em desuso. Foi também nosso objetivo adaptar essa linguagem, utilizando as ferramentas da Geometria Algébrica atual para torná-la mais acessível ao leitor contemporâneo.

CAPÍTULO 1

Pré-Requisitos

Neste capítulo serão abordados temas que serão de extrema importância para a compreensão da dissertação. Procuramos expor esses temas de maneira sucinta e que ao mesmo tempo não prejudique a compreensão do leitor. Os exemplos que estão expostos ao longo do capítulo ajudarão a entender exemplos mais complexos nas seções seguintes como é o caso do estudo das vizinhanças de um ponto no lugar de base da transformação quádrlica padrão.

No decorrer de toda dissertação k denotará um corpo algebricamente fechado, a menos que se mencione o contrário.

1.1 Divisores

Definição 1.1.1. Seja X uma variedade irredutível. Uma coleção de subvariedades fechadas C_1, \dots, C_r de codimensão 1 em X com suas respectivas multiplicidades k_1, \dots, k_r é chamado um divisor em X . Ele é escrito como

$$D = k_1 C_1 + \dots + k_r C_r. \quad (1.1)$$

Definição 1.1.2. Na definição acima se todos os $k_i \geq 0$ e algum $k_i > 0$, então nós escrevemos $D > 0$ e dizemos que D é um divisor efetivo. Caso todos os k_i 's sejam não nulos então a variedade $C_1 \cup \dots \cup C_r$ é chamada o suporte de D e denotada por $\text{supp}D$.

Definição 1.1.3. Uma subvariedade C_i de X de codimensão 1 e com multiplicidade 1 é chamada um divisor primo.

Tendo definido o conceito de divisores podemos definir também uma operação de adição entre divisores:

Definição 1.1.4. Se temos dois divisores D e D' podemos escrevê-los como

$$D = k_1C_1 + \dots + k_rC_r \text{ e } D' = k'_1C_1 + \dots + k'_rC_r$$

com a mesma coleção de divisores. Então, por definição

$$D + D' = D = (k_1 + k'_1)C_1 + \dots + (k_r + k'_r)C_r.$$

Munido dessa operação de soma, os divisores em X formam um grupo, o grupo livre tendo as subvariedades irredutíveis C de X de codimensão 1 como seus geradores.

Agora, assumimos que o conjunto dos pontos singulares de X tem codimensão maior ou igual a dois. Seja $C \subset X$ uma subvariedade de codimensão 1 irredutível e U um aberto afim onde $C \cap U \neq \emptyset$, consistindo de pontos não singulares, e tal que C é definido em U por uma equação local. Um tal aberto fim U existe pelo teorema 1 de [12], p.108. Assim o ideal da variedade C é tal que $I(C) = (\pi)$ em $k[U]$ e para qualquer $0 \neq f$ em $k[U]$

Definição 1.1.5. Denotamos o número $v_C(f) = k$ o inteiro positivo $k \geq 0$ tal que

$$f \in (\pi^k) \text{ e } f \notin (\pi^{k+1}). \quad (1.2)$$

Mostra-se que $v_C(f)$ não depende da escolha do aberto U . Ver [12].

Proposição 1.1.1. O número $v_C(f)$ tem as propriedades:

1. $v_C(f_1f_2) = v_C(f_1) + v_C(f_2)$;
2. $v_C(f_1 + f_2) \geq \min\{v_C(f_1), v_C(f_2)\}$.

Demonstração. Ver em [12]. □

Se X é uma variedade irredutível, então qualquer função $f \in k(X)$ pode ser escrita da forma $f = \frac{g}{h}$ com $f, g \in k[U]$. Da proposição (4.1.2) item (1) temos $v_C(f) = v_C(g) - v_C(h)$ e se tomamos uma outra representação para $f = \frac{g'}{h'}$ temos $gh' - hg' = 0$ e novamente da proposição (4.1.2) item (1) segue que $v_C(f)$ não depende da representação de f e (1) é verdadeira para toda $f \in k(X)$ com $f \neq 0$.

Definição 1.1.6. Para uma variedade irredutível X e $f \in k(X)$ se $v_C(f) = k > 0$, então dizemos que f tem um zero de ordem k ao longo de C e se $v_C(f) = -k < 0$ dizemos que f tem um polo de ordem k ao longo de C .

Teorema 1.1.1. Dado uma função $f \in k(X)$, existe apenas um número finito de subvariedades C irredutíveis de codimensão 1 tal que $v_C(f) \neq 0$.

Demonstração. Ver em [12]. □

Com este teorema podemos considerar a seguinte

Definição 1.1.7. O divisor

$$\operatorname{div}(f) = \sum v_C(f)C \quad (1.3)$$

onde a soma é feita sobre toda subvariedade irredutível de codimensão 1 no qual $v_C(f) \neq 0$. Esse divisor é chamado de divisor principal.

Exemplo 1.1.1. Seja X a superfície quadrática $xy - zt = 0$ em \mathbb{P}^3 e considere $f = \frac{x}{y}$.

Da proposição (4.1.2), propriedade (1) temos que

$$\operatorname{div}(f) = \operatorname{div}(x) - \operatorname{div}(y)$$

e impomos as condições $x = 0$ e $y = 0$ na quádrica X para encontrar, respectivamente, $\operatorname{div}(x)$ e $\operatorname{div}(y)$. Assim,

$$x = 0 \implies zt = 0$$

$$y = 0 \implies zt = 0$$

Portanto,

$$\operatorname{div}(x) = \{x = z = 0\} \cup \{x = t = 0\}$$

$$\operatorname{div}(y) = \{y = z = 0\} \cup \{y = t = 0\}.$$

Exemplo 1.1.2. Seja $X = \mathbb{A}^n$ e então toda subvariedade codimensão 1 e irredutível C é dada por uma equação $I(C) = (F)$ com $F \in k[X]$. Para $k = 1$ vemos que F satisfaz a condição da definição (1.1.5), logo $\operatorname{div}(F) = C$, ou seja, todo divisor primo, portanto todo divisor, é principal.

Seja X uma variedade afim no espaço \mathbb{A}^n sobre um corpo k .

Definição 1.1.8. Uma função $f : X \rightarrow k$ é regular se existe um polinômio $F(t)$ com coeficientes em k tal que $f(x) = F(x)$ para todo $x \in X$.

Observação 1.1.1. Note que dada uma função f , o polinômio F não necessariamente é único. Basta adicionar a F qualquer termo do sistema de equações de X .

¹Ver Teorema 3, Cap. I de [12].

Definição 1.1.9. O conjunto de todas as funções regulares em uma variedade afim X forma um anel e uma álgebra sobre k munido das operações de adição, multiplicação e multiplicação por escalar por elementos de k efetuando as operações no valor das funções em cada ponto de $x \in X$. Esse anel obtido desta maneira é denotado por $k[X]$ e chamado de anel de coordenadas.

Seja $k[t]$ o anel de polinômios com coeficientes em k nas variáveis t_1, \dots, t_n . A cada polinômio $F \in k[t]$ associemos uma função $f \in k[X]$ por olhar F como uma função no conjunto dos pontos de X . Desta forma temos um homomorfismo entre $k[t]$ e $k[X]$. O núcleo desse homomorfismo é o ideal formado pelos polinômios $F \in k[t]$ tal que vale zero em todo ponto $x \in X$. Ele é chamado de ideal de uma variedade X e denotado por $I(X)$. Consequentemente,

$$k[X] = k[t]/I(X).$$

Exemplo 1.1.3. Se $X = \{(a_1, \dots, a_n)\}$ é um ponto de \mathbb{A}^n , então $k[X] = k$ pois $I(X) = (t_1 - a_1, \dots, t_n - a_n)$.

Exemplo 1.1.4. Para $X = \mathbb{A}^n$ tem-se que $I(X) = 0$ e então $k[X] = k[t]$.

Se temos agora duas variedades afins $X \subset \mathbb{A}^n, Y \subset \mathbb{A}^n$ temos a

Definição 1.1.10. Uma aplicação $f : X \rightarrow Y$ é regular se existe m funções regulares f_1, \dots, f_m em X tal que $f(x) = (f_1(x), \dots, f_m(x))$ para todo $x \in X$.

Exemplo 1.1.5. Uma função regular em X é exatamente a mesma coisa que uma aplicação regular $X \rightarrow \mathbb{A}^1$.

Definição 1.1.11. Um conjunto algébrico X é redutível se existe variedades afins próprias $X_1, X_2 \subsetneq X$ tal que $X = X_1 \cup X_2$. Do contrário X é dito irredutível.

Definição 1.1.12. Se um conjunto X é irredutível, então o corpo de frações do anel de coordenadas $k[X]$ é o corpo de funções de X , denotado por $k(X)$.

Os elementos de $k(X)$ são da forma $F(t)/G(t)$ tal que $G(t) \notin I(X)$, e $F(t)/G(t) = F_1(t)/G_1(t)$ se $FG_1 - F_1G \in I(X)$.

Definição 1.1.13. Definimos o subanel $\mathcal{O}_X \subset k(t_1, \dots, t_n)$ para ser

$$\mathcal{O}_X = \{f = P/Q; P, Q \in k[t] \text{ e } Q \notin I(X)\} \quad (1.4)$$

Definição 1.1.14. Se $\text{div}(f) = \sum k_i C_i$ com $f \in k(X)$ então os divisores

$$\text{div}_0 f = \sum_{\{i; k_i > 0\}} k_i C_i \quad \text{e} \quad \text{div}_\infty f = \sum_{\{i; k_i < 0\}} -k_i C_i \quad (1.5)$$

são chamados respectivamente, o divisor dos zeros e o divisor dos polos de f . Consequentemente,

$$\text{div}(f) = \text{div}_0 f - \text{div}_\infty f.$$

Teorema 1.1.2. *Seja X uma variedade irredutível não singular. Se $\text{div}(f) \geq 0$, então f é regular.*

Demonstração. Vamos demonstrar o teorema pela contra positiva. Para isso, seja $x \in X$ um ponto onde f não é regular. Assim, $f = \frac{g}{h}$ com $g, h \in \mathcal{O}_x$ mas $\frac{g}{h} \notin \mathcal{O}_x$ e sendo \mathcal{O}_x um domínio de fatoração única podemos escolher g, h de forma que não tenham fatores em comum, daí considere π um elemento primo de \mathcal{O}_x que divide h mas não divide g . Em alguma vizinhança U do ponto x , $V(\pi)$ será irredutível de codimensão 1 e por considerar C como sendo o fecho de $V(\pi)$ encontramos que $v_C(f) < 0$. \square

Corolário 1.1.1. *Se X é uma variedade projetiva irredutível segue que se $\text{div}(f) \geq 0$, então $f = \alpha \in k$.*

Demonstração. Basta lembrar que uma função regular em uma variedade projetiva irredutível é sempre constante. \square

Definição 1.1.15. Definimos o grau de um divisor $D = \sum k_i C_i$, onde C_i é uma subvariedade irredutível definida pela forma H_i de grau k_i , pelo inteiro

$$\text{deg}(D) = \sum k_i H_i \quad (1.6)$$

Definição 1.1.16. O conjunto dos divisores principais formam um subgrupo $P(X)$ do grupo $\text{Div}X$ de todos os divisores. Definimos

$$\text{cl}X = \text{Div}X/P(X)$$

o grupo de classe do divisor de X .

Definição 1.1.17. Com a notação da definição acima dois elementos em $\text{cl}X$ são linearmente equivalentes $D_1 \sim D_2$ se $D_1 - D_2 = \text{div}(f)$ para algum $0 \neq f \in k(X)$.

Exemplo 1.1.6. De acordo com o exemplo (1.1.2), $\text{cl}(\mathbb{A}^n) = 0$.

Teorema 1.1.3. *Para qualquer divisor D em uma variedade não singular X e qualquer número finito de pontos $x_1, \dots, x_m \in X$, existe um divisor D' com $D' \sim D$ tal que $x_i \notin \text{Supp}(D')$ para $i = 1, \dots, m$.*

Demonstração. Sem perda de generalidade podemos supor que o divisor D é primo, do contrário aplicamos a afirmação para cada componente separadamente. Por considerar uma vizinhança aberta afim V_i (sempre existe) para o ponto x_i olhamos para o subconjunto de X aberto afim $V = \bigcup_{n=1}^m V_i$ de modo que podemos supor também que X é uma variedade afim.

A demonstração da afirmação será por indução. Suponha que $x_1, \dots, x_{m-1} \notin \text{Supp}(D)$ mas $x_m \in \text{Supp}(D)$. Vamos construir um divisor D' com $D' \sim D$ de modo que $x_1, \dots, x_m \notin \text{Supp}(D')$. Primeiro, considere uma equação local π' para o divisor primo D em uma vizinhança do ponto x_m . Pode-se escolher uma equação local π para D com $\pi \in k[X]$. Com efeito, sendo π' regular em x_m , se π' tem um divisor de polos $\text{div}_\infty(\pi') = \sum k_l F_l$ então $x_m \notin F_l$. Assim, para cada l existe uma função $f_l \in k[X]$ que se anula em toda a subvariedade F_l e $f_l(x_m) \neq 0$. Como "retiramos" todos os polos de π a função $\pi = \pi' \prod f_l^{k_l}$ é regular em X e é uma equação local de D em uma vizinhança de x_m . Por hipótese de indução tem-se que $x_i \notin D \cup \{x_1, \dots, x_{i-1}, x_{i+1}, \dots, x_m\}$ de modo que existe uma função $g_i \in k[X]$ tal que $g_i(x_i) \neq 0$, mas $g_i = 0$ neste conjunto onde as funções g_i 's são dadas pela equação local π de D . Agora, considere constantes $\alpha_i \in k$ tais que

$$f = \pi + \sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i g_i^2 \quad (1.7)$$

satisfazendo $f(x_i) \neq 0$ para $i = 1, \dots, m-1$.

Para ter estas constantes basta tomar $\alpha_i \neq \frac{\pi(x_i)}{(g_i(x_i))^2}$. Para terminar a demonstração vamos mostrar que $D' = D - \text{div}(f)$ satisfaz as condições do teorema. Segundo a equação (1.7) tem-se que $x_i \notin \text{div}(f)$ e logo $x_i \notin \text{Supp}(D')$ para $i = 1, \dots, m-1$.

Por construção, g_i se anula em D e assim $\pi \mid g_i$ no anel local \mathcal{O}_{x_m} e conseqüentemente,

$$\sum_{i=1}^{m-1} \alpha_i g_i^2 = \pi^2 h \quad \text{com } h \in \mathcal{O}_{x_m}.$$

Portanto, $f = \pi(1 + \pi h)$. Como $\pi(x_m) = 0$ segue que $(1 + \pi h)(x_m) = 1$ e com isso, F é uma equação local de D em uma vizinhança de x_m . Então, obtemos o divisor $\text{div}(f) = D + \sum r_s D_s$, onde nenhum divisor primo passa através de x_m . Assim, $x_m \notin \text{Supp}(D')$. \square

1.1.1 Divisores e Funções Racionais

Nesta subseção vamos aplicar o conceito de divisores a aplicações racionais de variedades para espaço projetivo.

Seja uma aplicação racional $\varphi : X \rightarrow \mathbb{P}^n$ onde X é uma variedade não singular. Podemos expressá-la como

$$\varphi = (f_0 : \dots : f_n), \quad \text{com } f_i \in k(X) \quad (1.8)$$

onde podemos assumir que nenhum f_i é nulo em X .

Suponha que

$$\text{div}(f_i) = \sum_{j=1}^m k_{ij} C_j$$

para C_j um divisor primo. Vamos determinar as condições para que φ seja regular em um ponto $x \in X$. Para isso, seja π_j para uma equação local de C_j em x . Então,

$$f_i = \left(\prod \pi_j^{k_{ij}} \right) u_j \quad \text{com } u_i \in \mathcal{O}_x \text{ e } u_i(x) \neq 0.$$

Como \mathcal{O}_x é um Domínio de Fatoração Única (DFU), existe o máximo divisor comum d dos elementos f_0, \dots, f_n , isto é, $d \in k(X)$ com $f_i/d \in \mathcal{O}_x$ e se $d_1 \in k(X)$ é um outro elemento com a mesma propriedade de d , então $d_1 \mid d$, ou seja, $d/d_1 \in \mathcal{O}_x$. Novamente, pelo fato de \mathcal{O}_x ser um DFU segue que todas as equações locais π_j dos divisores primos C_j são elementos primos de \mathcal{O}_x , e conseqüentemente

$$d = \prod \pi_j^{l_j}, \quad \text{onde } l_j = \min_{0 \leq i \leq n} k_{ij}.$$

Aqui é bem sugestivo olhar para a matriz $(n+1) \times m$ cuja i -ésima linha é dada por $\text{div}(f_i)$ e a j -ésima coluna dada por $k_{ij}, j = 1, \dots, m$ e teremos que o termo l_j sera o máximo múltiplo comum na j -ésima coluna da matriz.

Pelo fato de φ ser regular em x existe uma função $g \in k(X)$ no qual $f_i/g \in \mathcal{O}_x$ para todo $i = 1, \dots, n$ e no mínimo um $(f_i/g)(x)$ é não nulo em x . Com isso, chegamos que a função g satisfaz as mesmas condições que a função d_1 , logo segue da definição de máximo múltiplo comum que $g \mid d$. Agora temos duas possibilidades: se $d = gh$ com $h \in \mathcal{O}_x$ e $h(x) \neq 0$, então $h \mid f_i/g$ pois d sendo o máximo divisor comum dos f_i podemos escrever $f_i = dm_1, m_1 \in k(X)$ donde segue que $f_i/g = ghm_1$. Assim, $(f_i/g)(x) = 0$ para todo $i = 1, \dots, n$ contradizendo o fato de φ ser regular. Então, a condição requerida é que $d = gh$ com $h(x) \neq 0$ e assim, $f_i/g = (f_i/d)h$, ou seja,

$$f_i/g = \left(\prod_j \pi_j^{k_{ij} - l_j} \right) u_i h$$

onde teremos agora que φ é regular em x se, e somente se, ao menos uma das funções $\prod_j \pi_j^{k_{ij}-l_j}$ são não nulas em x . Na sequência, o que faremos é simplesmente mudar para linguagem de divisores.

Definição 1.1.18. Dado os divisores $D_i = \sum k_{ij}C_j, i = 1, \dots, n$ define-se o máximo múltiplo comum desses divisores para ser

$$MDC\{D_1, \dots, D_n\} = \sum l_j C_j, \text{ onde } l_j = \min_{0 \leq i \leq n} k_{ij} \quad (1.9)$$

Olhando para os divisores $D'_i = D_i - mdc\{D_1, \dots, D_n\} \geq 0$, segue da definição de MDC que os divisores D'_i não tem componentes comum. Em particular, se consideramos

$$D = MDC\{div(f_0), \dots, div(f_n)\} \text{ e } D'_i = div(f_i) - D.$$

em alguma vizinhança de x teremos

$$div\left(\prod_j \pi_j^{k_{ij}-l_j}\right) = D'_i$$

e com essa linguagem de divisores dizemos que φ é regular em x se, e somente se, nem todas as subvariedades $supp(D'_i)$ passam através de x . Isso mostra o seguinte resultado:

Teorema 1.1.4. *A aplicação racional em (1.8) não é regular justamente nos pontos de $\cap Supp(D'_i)$ onde $D'_i = D_i - mdc\{D_1, \dots, D_n\} \geq 0$ para $i = 0, \dots, n$.*

Para fixar esse conceito que relaciona aplicações racionais com divisores vamos considerar o seguinte exemplo:

Exemplo 1.1.7. Seja a transformação racional $\varphi : \mathbb{P}^3 \longrightarrow \mathbb{P}^3$ conhecida por aplicação padrão de \mathbb{P}^3 dada pela fórmula

$$\varphi(x, y, z, t) = (yzt, xzt, xyt, xyz)$$

Essa aplicação é análoga à transformação padrão de \mathbb{P}^2 tratada no exemplo (1.3.1). Vendo cada entrada da aplicação como uma função $f_i, i = 0, \dots, 3$ vamos ter que os divisores $div(f_i)$ são sempre três planos com as seis retas em comum: $x = y = 0, x = z = 0, x = t = 0, z = y = 0, t = y = 0, y = z = 0$. Dessa forma, para $D_i = div(f_i)$

$$D = MDC\{D_0, \dots, D_3\} = \{x = y = 0, x = z = 0, x = t = 0, z = y = 0, t = y = 0, y = z = 0\}$$

Então φ não é regular em D . Podemos ver ainda que φ é um isomorfismo de $\mathbb{P}^3 \setminus D$.

1.1.2 O sistema Linear Associado a um Divisor

Em analogia ao espaço vetorial dos polinômios em t de grau $\leq n$ temos uma interpretação em termos de divisores. Escreva x_∞ para o ponto no infinito da reta \mathbb{P}^1 com coordenada t . Um polinômio de grau k tem apenas um polo de ordem k , logo a condição $\deg f \leq n$ pode ser expressa como $\text{div}(f) + nx_\infty \geq 0$. De maneira geral temos a definição

Definição 1.1.19. Seja D um divisor em uma variedade não singular X . Então, definimos o conjunto

$$\mathcal{L}(D) = \{f \in k(X) \mid \text{div}(f) + D \geq 0\} \quad (1.10)$$

Lema 1.1.1. O conjunto $\mathcal{L}(D)$ é um espaço vetorial sobre k via as operações algébricas usuais em funções, chamado de Riemann-Roch de D .

Demonstração. Seja $D = \sum n_i C_i$. Então a condição $\text{div}(f) + D \geq 0$ é equivalente a

$$v_{C_i}(f) \geq -n_i \quad \text{e} \quad v_C(f) \geq 0 \quad \text{e} \quad C \neq C_i$$

e as propriedades de espaço vetorial seguem da proposição (4.1.2) item (1). □

Definição 1.1.20. A dimensão de $\mathcal{L}(D)$ é também chamada a dimensão de D , e denotada por $l(D)$.

Teorema 1.1.5. Divisores linearmente equivalentes tem a mesma dimensão.

Demonstração. Suponha que D_1 e D_2 sejam dois divisores linearmente equivalentes, assim

$$D_1 - D_2 = \text{div}(g), \quad \text{com} \quad g \in k(X).$$

Se $f \in \mathcal{L}(D_1)$, então $\text{div}(f) + D_1 \geq 0$ donde segue que $\text{div}(fg) + D_2 = \text{div}(f) + D_1 \geq 0$, isto é, $fg \in \mathcal{L}(D_2)$, de modo que $g \cdot \mathcal{L}(D_1) = \mathcal{L}(D_2)$. Definindo a aplicação $\varphi : \mathcal{L}(D_1) \rightarrow \mathcal{L}(D_2)$ por

$$\varphi(f) = fg$$

que é trivialmente um isomorfismo concluimos o teorema. □

Teorema 1.1.6. $\mathcal{L}(D)$ tem dimensão finita para qualquer divisor D em uma curva algébrica projetiva não singular.

Demonstração. Notemos que a asserção resume-se ao caso $D \geq 0$. Com efeito, seja $D = D_1 - D_2$ com $D_1, D_2 \geq 0$. Então, $\mathcal{L}(D) \subset \mathcal{L}(D_1)$: dado $f \in \mathcal{L}(D)$ significa que $\text{div}(f) + D_1 - D_2 = \bar{D} \geq 0$ e portanto, $\text{div}(f) + D_1 = D_2 + \bar{D} \geq 0$, ou seja, $f \in \mathcal{L}(D_1)$. Assim, se D é um divisor, não necessariamente efetivo, podemos escrevê-lo como $D = D_1 - D_2$, $D_1 \geq 0$ e mostramos que $\mathcal{L}(D_1)$ tem dimensão finita.

Seja $D \geq 0$ e tome um ponto x aparecendo em D com multiplicidade $r > 0$, ou seja, $D = rx + D_1$. Defina então o divisor $D^{(1)} = (r-1)x + D_1$ e seja t o parâmetro local de x em X . Agora seja a aplicação $\lambda : \mathcal{L}(D) \rightarrow k$ dada por

$$\lambda(f) = (t^r f)(x)$$

Para U uma vizinhança de x e sendo $I(x) = (t)$ em $k[U]$ segue, por definição, que

$$f \in (t^{v_x(f)}) \text{ e } f \notin (t^{v_x(f)+1})$$

e assim f pode ser escrito como

$$f = t^{v_x(f)} u \tag{1.11}$$

Tem-se de imediato que λ é linear e ainda que $\ker \lambda = \mathcal{L}(D^{(1)})$. Com efeito, se $f \in \ker \lambda$ então $(t^r f)(x) = 0$ e por (1.11) acontece que $(t^r t^{v_x(f)} u)(x) = 0$ e assim, $r + v_x(f) \geq 1$ donde segue que $(r-1) + v_x(f) \geq 0$. Portanto, $f \in \mathcal{L}(D^{(1)})$. Consequentemente,

$$\mathcal{L}(D)/\mathcal{L}(D^{(1)}) \simeq k$$

Da mesma forma, teremos um $D^{(2)}$ e também uma aplicação $\lambda_{(1)} : \mathcal{L}(D) \rightarrow k$ com

$$\ker \lambda_{(1)} = \mathcal{L}(D^{(2)}) \text{ e } \mathcal{L}(D^{(1)})/\mathcal{L}(D^{(2)}) \simeq k$$

Empregando o mesmo argumento $\text{deg} D$ vezes obtemos a sequência de subespaços vetoriais

$$\mathcal{L}(0) \subset \dots \subset \mathcal{L}(D^{(n)}) \subset \dots \subset \mathcal{L}(D^{(2)}) \subset \mathcal{L}(D^{(1)}) \subset \mathcal{L}(D)$$

Isso mostra que $\mathcal{L}(0)$ é um subespaço vetorial de $\mathcal{L}(D)$ e como $\mathcal{L}(0) = k[X]$ temos também que $l(D) = 1$. Então, se supormos $l(D) \geq \text{deg}(D) + 2$ teremos

$$\begin{aligned} l(D^1) &\geq \text{deg}(D-1) + 2 \\ &\vdots \\ l(0) &\geq 2 \end{aligned}$$

o que é um absurdo! Portanto,

$$l(D) \leq \text{deg} D + 1.$$

□

Observação 1.1.2. Para $X = \mathbb{P}^1$ vale a igualdade $l(D) = \deg D + 1$. De fato, o divisor D é linearmente equivalente a rx , onde $x \in \mathbb{P}^1$ é o ponto no infinito. Assim, $\mathcal{L}(D)$ é o conjunto dos polinômios de grau $\leq r$ e então $l(D) = r + 1$.

Para terminarmos esse capítulo vamos dar mais duas definições que poderão ser encontradas com detalhes em [8] e [13]. Na segunda dessas referências a definição de gênero de uma curva é mais natural sendo consequência do teorema de Riemann Roch com uso do conceito de divisores.

Definição 1.1.21. Um ponto múltiplo de uma curva é dito ser um ponto ordinário se a curva tem todas as suas tangentes nodais distintas nesse ponto.

Definição 1.1.22. O gênero de uma curva C de grau n com apenas pontos múltiplos ordinários é dado pelo número

$$g = \frac{(n-1)(n-2)}{2} - \sum_{P_i \in C} \frac{k_i(k_i-1)}{2}, \quad (1.12)$$

onde k_i é a multiplicidade do ponto P_i .

1.2 Teorema de Bézout

Nessa seção vamos estudar a interseção de variedades em um espaço projetivo. Se X e Y são variedades projetivas em \mathbb{P}^n , então o que se pode dizer sobre $X \cap Y$? A primeira pergunta que pode ser feita é sobre a dimensão de suas componentes irredutíveis. Fazendo uma analogia a teoria de espaços vetoriais: se U e W são subespaços vetoriais de dimensão r e s do espaço vetorial V de dimensão n então $U \cap W$ é um subespaço de dimensão $\geq r + s - n$. Além disso, se U e W são tomados genericamente a dimensão de $U \cap W$ é exatamente $r + s - n$ (desde que $r + s - n \geq 0$). Este resultado implica o análogo para subespaços lineares de \mathbb{P}^n .

Aqui não iremos definir a multiplicidade $i(X, Y, W)$ de interseção de duas variedades X e Y ao longo de uma componente irredutível W de $X \cap Y$ mas pode ser encontrada, por exemplo, em [11] ou em [1]. Para ilustrar esse conceito considere

Exemplo 1.2.1. Em $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$, considere a parábola $y = x^2$ e a elipse cuja equação é $x^2 + 4(y - \lambda)^2 = 4$.

Para $\lambda = 1$ as duas curvas se intersectam em apenas três pontos, contudo, ambas as curvas se intersectam tangencialmente na origem. Neste caso, a multiplicidade deste ponto será 2, e portanto a parábola e a cônica se intersectam em 4 pontos contados com a multiplicidade.

Uma forma que generaliza o teorema de Bézout em \mathbb{P}^n é o resultado

Teorema 1.2.1. *Seja Y uma variedade de dimensão $n \geq 1$ em \mathbb{P}^n e seja H uma hipersuperfície não contendo Y . Sejam Z_1, Z_2, \dots, Z_s as componentes irredutíveis de $Y \cap H$. Então,*

$$\sum_{j=1}^s i(Y, H, Z_j) \deg(Z_j) = (\deg Y)(\deg H) \quad (1.13)$$

onde $i(Y, H, Z_j)$ é a multiplicidade de interseção de Y e H ao longo de $Z_j, j = 1, \dots, s$.

Demonstração. Ver demonstração em [11]. □

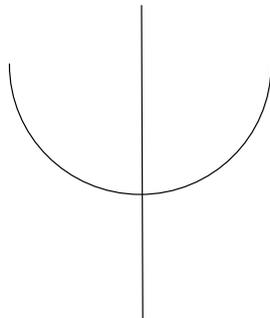
Corolário 1.2.1 (Teorema de Bézout). *Sejam Y e Z curvas distintas em \mathbb{P}^2 tendo grau m e n , respectivamente. Seja $Y \cap Z = \{P_1, \dots, P_s\}$. Então,*

$$\sum_{j=1}^s i(Y, Z, P_j) = mn \quad (1.14)$$

Exemplo 1.2.2. Intersecte a parábola $y = x^2$ com uma reta L em um espaço afim. Assuma que L não é vertical.

Sobre \mathbb{R} , é claro que o número de pontos da interseção pode ser 0, 1, ou 2. Isto mostra que o teorema de Bézout não vale porque \mathbb{R} não é um corpo algebricamente fechado. Sobre \mathbb{C} , o número de pontos dessa interseção é sempre 2 contados com a multiplicidade.

Exemplo 1.2.3. Agora considere a interseção da mesma parábola $y = x^2$ e L uma reta vertical, tendo a figura



Em \mathbb{C} , o número de pontos dessa interseção é 1 mesmo contado com a multiplicidade. Então onde está o outro ponto?

Considere o espaço projetivo $\mathbb{P}^2(\mathbb{C})$ e seja z uma terceira variável. Homogeneizando a equação $y = x^2$ obtemos $yz = x^2$ e a equação homogênea da reta $x = c$ é dada pela equação projetiva $x = cz$. Eliminando x nós encontramos $(x : y : z) = (c : c^2 : 1)$ ou $(0 : 1 : 0)$. O primeiro ponto é o que aparece na figura enquanto que o segundo é o ponto no infinito (onde $z = 0$). Isto mostra que a hipótese de o espaço ser projetivo não pode ser retirada.

1.3 A Relação Entre Sistemas Lineares e Transformações de Cremona

Vamos iniciar a seção com uma série de definições básicas.

Definição 1.3.1. Uma transformação racional $T : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{n'}$ faz corresponder a um ponto $P = (x_0, \dots, x_n)$ um único ponto $P' = (x'_0, \dots, x'_n)$ definido pelas equações

$$\begin{cases} x'_0 = \phi_0(x_0, \dots, x_n) \\ x'_1 = \phi_1(x_0, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x'_n = \phi_n(x_0, \dots, x_n) \end{cases}$$

onde $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n$ são polinômios homogêneos em $k[x_0, x_1, \dots, x_n]$ de grau $d = \deg(T)$.

Aqui, os polinômios $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n$ são tomados linearmente independentes e sem fatores comuns.

Definição 1.3.2. Uma transformação de Cremona é uma transformação racional cuja inversa também é racional. Seu grau é dado pelo grau dos polinômios homogêneos que a representa.

Dando continuidade ao tema, veremos a relação existente entre transformações de Cremona e um sistema linear de hipersuperfícies munido de algumas propriedades. Primeiro, considere

Definição 1.3.3. O lugar de base de uma transformação de Cremona $T : \mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{n'}$ dada por $T = (\varphi_0 : \varphi_1 : \dots : \varphi_n)$ é a subvariedade dada pelas equações

$$\varphi_0 = \varphi_1 = \dots = \varphi_n = 0,$$

com $\varphi_0, \varphi_1, \dots, \varphi_n$ polinômios homogêneos de mesmo grau em $k[x_0, \dots, x_n]$.

Definição 1.3.4. Sejam $\Phi_0, \Phi_1, \dots, \Phi_r$ polinômios homogêneos de mesmo grau em $k[x_0, x_1, \dots, x_n]$. Um sistema linear de hipersuperfícies Φ em \mathbb{P}^n é definida pela equação

$$\lambda_0\Phi_0 + \lambda_1\Phi_1 + \dots + \lambda_r\Phi_r = 0 \quad (1.15)$$

onde os λ_i 's são parâmetros arbitrários em k .

Notação: Sempre que nos referirmos a interseção residual significa que estamos considerando nessa interseção o conjunto que não pertence ao lugar de base da transformação ou do sistema linear.

Definição 1.3.5. Chamamos de um sistema linear homaloïdal um sistema linear de hipersuperfícies de dimensão n , e tal que quaisquer n hipersuperfícies intersectam-se residualmente em apenas um ponto pertencente a \mathbb{P}^n . Vamos nos referir também a um sistema com essas duas propriedades como um H sistema.

Agora veremos um importante resultado que será utilizado implicitamente ou não em toda a dissertação, o qual relaciona os conceitos de transformação de Cremona e de sistema homaloïdal de hipersuperfícies.

Teorema 1.3.1. *Se uma transformação racional T é dada por*

$$\rho x_0 = \Phi_0(x_0, \dots, x_n), \dots, \rho x_n = \Phi_n(x_0, \dots, x_n), \quad (1.16)$$

onde $\Phi_i, i = 0, \dots, n$ são polinômios homogêneos em $k[x_0, \dots, x_n]$, então T é uma transformação de Cremona se, e somente se, o sistema linear dado em (1.15) é homaloïdal.

Demonstração. Seja $B = \{\Phi_0 = 0, \dots, \Phi_n = 0\}$ o lugar de base da transformação T . Para toda transformação de Cremona de \mathbb{P}^n em um outro espaço de mesma dimensão $\mathbb{P}^{n'}$, os hiperplanos de $\mathbb{P}^{n'}$ são representados por um sistema linear homaloïdal de hipersuperfícies em \mathbb{P}^n e como n hiperplanos se intersectam residualmente em apenas um ponto de \mathbb{P}^n segue que as hipersuperfícies correspondentes se intersectam também em um único ponto.

Reciprocamente, dado um H sistema representado por $\sum_{i=0}^n a_i \Phi_i = 0$, onde os a_i 's são coeficientes livres, temos uma transformação de Cremona que pode ser obtida da seguinte forma: supondo que x_0, \dots, x_n são as coordenadas de \mathbb{P}^n e fazendo as coordenadas de \mathbb{P}^n proporcionais aos $n + 1$ polinômios Φ_n , de mesmo grau,

$$\rho x_0 = \Phi_0(x_0, \dots, x_n), \dots, \rho x_n = \Phi_n(x_0, \dots, x_n) \quad (1.17)$$

temos uma aplicação de Cremona T . Com efeito, notemos que hipersuperfícies em \mathbb{P}^n são levadas por T em hiperplanos em $\mathbb{P}^{n'}$ e portanto, a interseção residual de n destas

hipersuperfícies em \mathbb{P}^n que consiste de um único ponto corresponde a interseção de n hiperplanos de $\mathbb{P}^{n'}$ também se intersectando residualmente em um único ponto. Isso estabelece uma correspondência 1-1 entre os pontos de qualquer hipersuperfície S com os pontos do hiperplano M de $\mathbb{P}^{n'}$ correspondente, mostrando assim que T é uma transformação de Cremona. \square

Observação 1.3.1. Notemos que dado um sistema linear homaloidal de hipersuperfícies $\Phi_i, i = 0, \dots, n$ nós podemos determinar infinitas transformações de Cremona: basta tomar combinações lineares das hipersuperfícies Φ_i 's.

Definição 1.3.6. Para $n = 4$, a interseção de duas hipersuperfícies de um sistema linear Φ é chamada de Φ -superfície e a interseção de três hipersuperfícies de Φ é chamada de Φ -curva. Para $n = 3$ uma Φ -superfície é simplesmente uma superfície de Φ e uma Φ -curva é a interseção de duas superfícies de Φ . Analogamente, definimos as Ψ -superfícies e as Ψ -curvas, onde Ψ é o sistema inverso.

Teorema 1.3.2. *Uma transformação de Cremona de \mathbb{P}^2 e sua inversa possuem o mesmo grau.*

Demonstração. Seja T uma transformação de Cremona. Denotaremos por $A.B$ o número de interseções de duas curvas A e B ; L e L' , são retas; Φ e Ψ , curvas de graus $\deg(T)$ e $\deg(T^{-1})$, respectivamente. Tomando L diferente das retas fundamentais, pelo teorema de Bézout,

$$\deg(T) = \Phi.L = T(\Phi).T(L) = L'.\Psi = \deg(T^{-1})$$

pois T é injetiva. \square

Com o intuito de fixar o conceito de transformação de Cremona consideremos o exemplo

Exemplo 1.3.1. Em \mathbb{P}^2 , considere o sistema de curvas dado pela equação

$$\Phi = \lambda yz + \mu xz + \nu xy = 0, \text{ onde } \lambda, \mu, \nu \text{ constantes arbitrárias.}$$

que também pode ser visto como o subespaço vetorial V de $\mathcal{L}(Q)$ para Q uma cônica de \mathbb{P}^2 . Como V é o subespaço de $\mathcal{L}(Q)$ formado pelas cônicas de \mathbb{P}^2 passando pelos três pontos $A = (1 : 0 : 0), B = (0 : 1 : 0), C = (0 : 0 : 1)$ e $\mathcal{L}(Q)$ tem dimensão cinco tem-se que a dimensão de V é dois pois cada um dos pontos em questão impõe uma condição. Além disso, a interseção residual de quaisquer 2 cônicas é um único ponto, logo Φ é um H sistema. E de acordo com o teorema (1.3.1) a Transformação de Cremona advinda deste H sistema, digamos T , tem equações

$$\rho x' = yz, \quad \rho y' = xz, \quad \rho z' = xy. \quad (1.18)$$

Como já mencionado, as cônicas do sistema Φ tem os três pontos base $A = (1 : 0 : 0)$, $B = (0 : 1 : 0)$, $C = (0 : 0 : 1)$. Essa é uma importante transformação de Cremona conhecida na literatura por transformação quadrática padrão sendo proveitoso destacar algumas de suas propriedades.

1. A transformação padrão

$$T : \mathbb{P}^2 \setminus \{x = 0, y = 0, z = 0\} \longrightarrow \mathbb{P}^2 \setminus \{x = 0, y = 0, z = 0\}$$

é uma bijeção com $T^{-1}(x', y', z') = (y'z', x'z', y'x')$. Em particular, T^{-1} e T tem o mesmo grau.

2. Pode-se verificar que as retas $x = 0, y = 0, z = 0$ correspondem via a transformação T , respectivamente, aos pontos A, B e C . Essas retas são chamadas de retas fundamentais.

3. Uma reta através de um ponto base é transformada em outra reta através do mesmo ponto base. De fato, uma reta através do ponto B , por exemplo, tem equação $ax + bz = 0$ e usando que $y' \neq 0$ nas equações que definem a transformação inversa encontramos que a transformação própria da reta tem equação $az' + bx' = 0$.

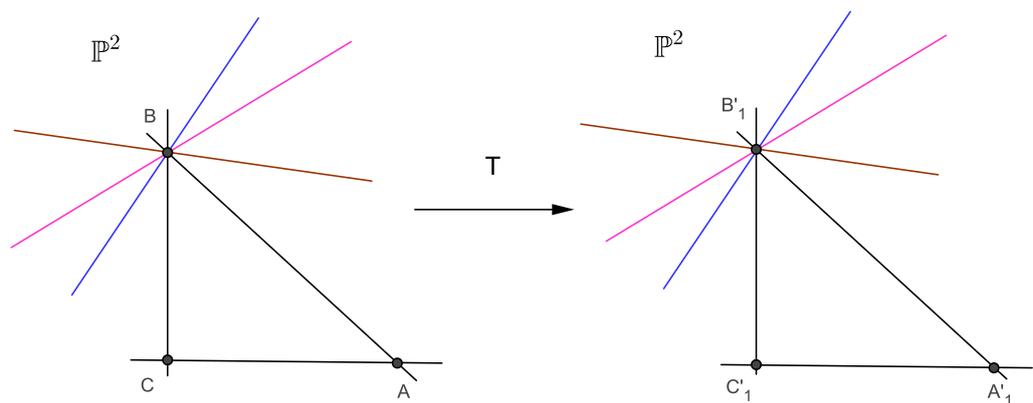


FIGURA 1.1: Transformação de retas passando por um ponto base

4. A transformação quádrlica padrão T transforma cônicas através dos pontos A, B, C em retas e reciprocamente.

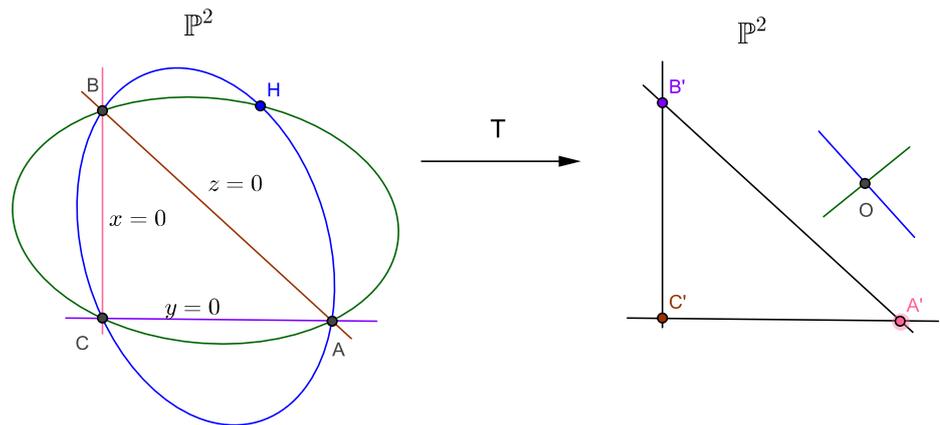


FIGURA 1.2: Correspondência entre cônicas e retas

5. **Vizinhança de pontos bases.** Como sabemos, T não está definida nos pontos bases mas podemos estudar o comportamento da transformação T em uma "vizinhança" de um ponto base.

Considere $Q = T(P)$ e faça P se aproximar de A , por exemplo, ao longo de um caminho γ . Seja Q o vértice de um feixe de retas $L_1 + \lambda L_2$, e assim o feixe de cônicas correspondente $C_1 + \lambda C_2$ tem A, B, C, P como pontos base e para P se aproximando de A ao longo de γ o feixe de cônicas $C_1 + \lambda C_2$ tende ao feixe de cônicas passando por A, B, C e estas adicionalmente tocam tangencialmente a tangente l_A a γ em A . Simultaneamente, tem-se Q tendendo ao vértice Q_{l_A} , correspondente do feixe de retas. Mas sendo a tangente l_A a uma cônica com equação

$$\lambda yz + \mu xz + \nu yx = 0 \quad (1.19)$$

dada por $\nu y + \mu z = 0$ e pelo argumento visto em 2., esta reta é transformada propriamente na reta $l_{A'}$ com equação $\nu z' + \mu y' = 0$. Fixando ν e μ , a reta $\lambda x' + \mu y' + \nu z' = 0$ correspondente a cônica em (1.19) intersecta BC em $(0, \nu, -\mu)$, ou seja, a medida que fazemos P se aproximar de A em uma direção l_A , Q se aproxima de um ponto O de BC .

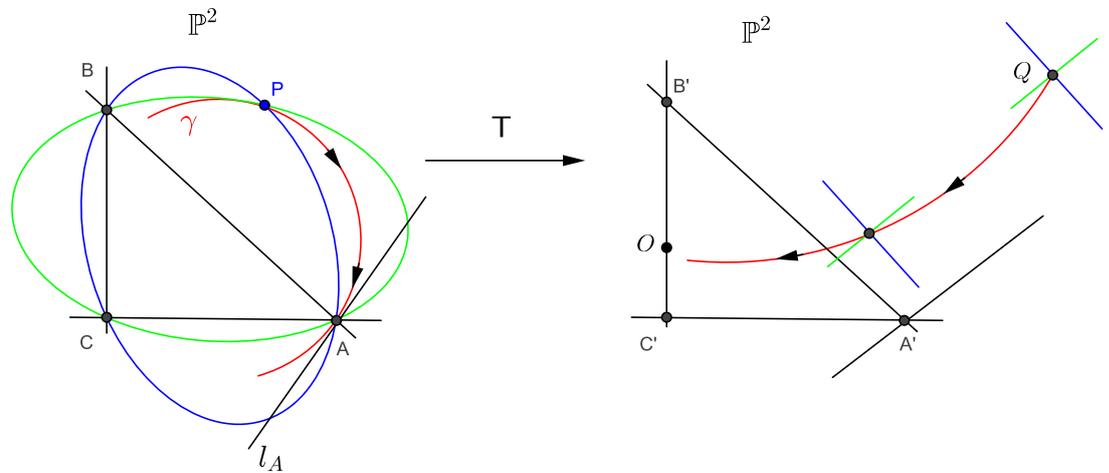


FIGURA 1.3: O comportamento de uma Curva na vizinhança de um Ponto Base

Para a última propriedade da transformação padrão que vamos abordar sob a forma de um teorema vamos necessitar das notações

Notações

- Seja $C^n(A^\alpha, B^\beta, C^\gamma)$ uma curva de ordem n , tendo pontos de multiplicidades α, β, γ , respectivamente em A, B, C .
- Usaremos o símbolo (Γ') para denotar o conjunto de pontos diferentes de A, B, C , que as curvas Γ e Γ' intersectam.
- Usaremos o símbolo $\Gamma\Gamma'$ para denotar o número total de pontos no conjunto (Γ') .

Teorema 1.3.3. *A transformação de uma curva Γ do tipo $C^n(A^\alpha, B^\beta, C^\gamma)$ segundo a aplicação padrão cujos pontos bases são A, B, C é uma curva Γ' do tipo*

$$C^{2n-\alpha-\beta-\gamma}(A^{n-\beta-\gamma}, B^{n-\alpha-\gamma}, C^{n-\alpha-\beta}). \quad (1.20)$$

Demonstração. Para uma curva $\Gamma = C^n(A^\alpha, B^\beta, C^\gamma)$ seja Γ' sua transformada própria segundo a transformação padrão do tipo $C^{n'}(A^{\alpha'}, B^{\beta'}, C^{\gamma'})$. Para termos o caso genérico, suponhamos que nenhum ramo de Γ em A ou B ou C tenha uma reta fundamental como uma reta tangente neste ponto, de modo que BC , por exemplo, encontra Γ em $n - \beta - \gamma$ pontos distintos ou não, removido B e C .

Seja n' o grau da interseção de Γ' com uma reta L arbitrária. Então,

$$n' = L\Gamma' = T(L)T(\Gamma') = \Phi\Gamma = 2n - \alpha - \beta - \gamma$$

pois uma Φ -cônica encontra Γ em $2n$ pontos dos quais α diminuem em A , β diminuem em B e γ diminuem em C .

Agora, o expoente α' é o número de interseções absolutas em A quando Γ' é encontrada por uma reta L_1 através de A . Assim,

$$\alpha' = n' - L_1\Gamma' = n' - T(L_1)\Gamma = L'_1\Gamma = n' - (n - \alpha) = n - \beta - \gamma$$

onde a segunda igualdade segue do fato de T e T^{-1} possuírem o mesmo grau, a terceira igualdade decorre da propriedade 3 e L'_1 é a imagem de L_1 via a aplicação T . \square

Exemplo 1.3.2. Uma reta L que não passa pelos pontos A, B, C pode ser expressa como

$$L = C^1(A^0, B^0, C^0).$$

Pelo teorema (1.3.3), L é enviada na cônica $C^2(A^1, B^1, C^1)$ conforme a propriedade 4.

Exemplo 1.3.3. Uma reta L através do ponto A tem a forma

$$C^{2-1}(A^1, B^0, C^0).$$

Pelo teorema (1.3.3), L é levada em uma reta através do mesmo ponto A como visto na propriedade 3.

Observação 1.3.2. Caso Γ toque tangencialmente BC em um ponto O , então Γ' tem um ramo cuspidal em A cuja tangente cuspidal é a transformada de OA . Ver em [8].

Um outro exemplo de aplicação birracional é a aplicação projeção definida da seguinte forma

Definição 1.3.7. Dado um ponto $P \in \mathbb{P}^n$, sua projeção segundo um vértice \mathbb{P}^h ($0 \leq h \leq n - 2$) é um ponto P' no espaço \mathbb{P}^{n-h-1} dado pela interseção de \mathbb{P}^{n-h-1} com o espaço \mathbb{P}^{h+1} , este gerado pelo vértice \mathbb{P}^h e o ponto P .

Observação 1.3.3. Note que a aplicação projeção racional $\mathbb{P}^n \dashrightarrow \mathbb{P}^{n-h-1}$ não está definida no espaço projetivo \mathbb{P}^h .

Similarmente, temos a definição da aplicação projeção sobre uma variedade V_k^n em \mathbb{P}^r segundo um espaço \mathbb{P}^h em um espaço \mathbb{P}^{r-h-1} . Formalmente temos,

Definição 1.3.8. Dado um ponto $P \in V_k^n$, sua projeção segundo um espaço \mathbb{P}^h ($h \leq r - k - 2$) é um ponto P' na variedade U_k contida no espaço \mathbb{P}^{r-h-1} . A projeção é própria se o ponto genérico de U_k é a projeção de um único ponto de V_k^n .

Exemplo 1.3.4. Consideramos V_2^2 para ser a superfície quadrática Φ_0 da proposição (3.1.1). Implicitamente, nesta proposição fizemos a projeção de V_2^2 segundo o vértice O de \mathbb{P}^3 obtendo uma aplicação birracional $\phi : V_2^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$ que não está definida em O e não é injetiva nas retas λ_0, μ_0 , onde estas retas são enviadas nos pontos A e B respectivamente. Consequentemente, ϕ não é uma projeção própria.

Teorema 1.3.4. *Qualquer projeção própria U_k de V_k^n , segundo um vértice \mathbb{P}^h no qual não encontra V_k^n , tem ordem n . As seções de U_k por hiperplanos de seu próprio espaço são seções hiperplanas de V_k^n no qual passam através de \mathbb{P}^h .*

Demonstração. Como U_k tem dimensão k e se encontra em \mathbb{P}^{r-h-1} , para calcular sua ordem devemos intersectá-la com um espaço linear $\mathbb{P}^{r-h-1-k}$. Sendo U_k a projeção de V_k^n segundo o vértice \mathbb{P}^h segue que os pontos P' onde $\mathbb{P}^{r-h-1-k}$ intersecta U_k são projeções dos pontos P no qual V_k^n encontra o espaço projetivo \mathbb{P}^{r-k} gerado pelo vértice \mathbb{P}^h e pelo espaço $\mathbb{P}^{r-h-1-k}$. Mas a interseção desses espaços projetivos V_k^n com \mathbb{P}^{r-k} é justamente a definição da ordem de V_k^n , portanto se a projeção é própria e \mathbb{P}^h não encontra V_k^n existe em geral n pontos P' .

Agora, uma seção hiperplana $M \simeq \mathbb{P}^{r-h-2}$ de \mathbb{P}^{r-h-1} se encontra em um único espaço linear \mathbb{P}^{r-1} o qual é gerado por \mathbb{P}^h e \mathbb{P}^{r-h-2} de modo que a variedade no qual U_k intersecta M é a projeção da variedade no qual \mathbb{P}^{r-1} encontra V_k^n . \square

Observação 1.3.4. A razão de restringir $h \leq r - h - 1$ agora aparece: caso tivesse $h = r - h - 1$, então o espaço linear \mathbb{P}^{h+1} gerado pelo vértice \mathbb{P}^h e um ponto P encontra V_k^n em n pontos pois a interseção $\mathbb{P}^{h+1} \cap V_k^n$ tem dimensão zero em \mathbb{P}^r e grau n . Assim, cada ponto P' é a projeção de n pontos diferentes. Assim, a projeção não é própria se $n > 1$.

Observação 1.3.5. Se \mathbb{P}^h encontra V_k^n , a projeção U_k terá ordem menor que n . Por exemplo, a projeção de V_k^n segundo um ponto de si mesma é em geral uma U_k^{n-1} como é o caso do exemplo (1.3.4).

CAPÍTULO 2

Algumas Superfícies Clássicas

2.0.1 Superfície de Veronese

Podemos olhar as cônicas de \mathbb{P}^2 como sendo o espaço de Riemann-Roch $\mathcal{L}(Q)$ sendo Q uma cônica (ou um divisor) em \mathbb{P}^2 . Para o sistema de cônicas

$$\lambda_0x^2 + \lambda_1y^2 + \lambda_2z^2 + \lambda_3yz + \lambda_4xz + \lambda_5xy = 0 \quad (2.1)$$

consideremos a aplicação $\varphi : \mathbb{P}^2 \longrightarrow \mathbb{P}^5$ dada por

$$\varphi(x, y, z) = (x^2, y^2, z^2, yz, xz, xy). \quad (2.2)$$

Definição 2.0.9. A imagem de \mathbb{P}^2 via a aplicação φ é chamada superfície de Veronese a qual denotaremos por F^4 .

Como podemos ver, a superfície de Veronese está em \mathbb{P}^5 e tem grau 4. Designando as coordenadas da aplicação φ como

$$x_0 = x^2, x_1 = y^2, \dots, x_5 = xy$$

as equações paramétricas de F^4 são

$$\frac{x_0}{x^2} = \frac{x_1}{y^2} = \frac{x_2}{z^2} = \frac{x_3}{yz} = \frac{x_4}{xz} = \frac{x_5}{xy} \quad (2.3)$$

e as equações explícitas de F^4 são os 6 menores 2×2 da matriz simétrica

$$\begin{pmatrix} x_0 & x_5 & x_4 \\ x_5 & x_1 & x_3 \\ x_4 & x_3 & x_2 \end{pmatrix}$$

que são

$$\begin{aligned}
 x_0x_1 - x_5^2 &= 0 \\
 x_0x_3 - x_4x_5 &= 0 \\
 x_0x_2 - x_4^2 &= 0 \\
 x_5x_3 - x_4x_1 &= 0 \\
 x_5x_2 - x_4x_3 &= 0 \\
 x_1x_2 - x_2^2 &= 0
 \end{aligned} \tag{2.4}$$

Teorema 2.0.5. *A aplicação φ é uma imersão isomorfa $\mathbb{P}^2 \hookrightarrow \mathbb{P}^5$.*

Demonstração. Primeiro, dado $u_0 = (x_0, y_0, z_0)$ em \mathbb{P}^2 trivialmente, $\varphi(u_0) \in F^4$. Reciprocamente, dado um ponto $v = (x_0, \dots, x_5)$ satisfazendo (2.4) tem-se que pelo menos um dos termos x_0, x_1 ou x_2 é não nulos pois, do contrário, todas as coordenadas de φ seriam nulas por (2.4). Sem perda de generalidade, suponha que $x_0 \neq 0$ e considere o ponto $p = (x^2, xy, xz)$ em \mathbb{P}^2 . Queremos mostrar que $\varphi(p) = u$. Com efeito, usando as equações em (2.4) e o fato de $x_0 \neq 0$ segue que

$$\begin{aligned}
 \varphi(p) = (x^4, x^2y^2, x^2z^2, x^2yz, x^3z, x^3y) &= (x_0^2, x_0x_1, x_0x_2, x_0x_3, x_0x_4, x_0x_5) \\
 &= (x_0, x_1, x_2, x_3, x_4, x_5) = v.
 \end{aligned}$$

□

Corolário 2.0.1. *Toda curva de ordem n em \mathbb{P}^2 é levada em uma curva de ordem $2n$ na superfície.*

Observação 2.0.6. A superfície de Veronese é um caso particular com $n = m = 2$ da imagem pela Imersão de Veronese $v_m : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^{\binom{n+m}{m}}$ onde m é o grau das hipersuperfícies de \mathbb{P}^n . Para mais detalhes veja em [12].

Proposição 2.0.1. *Os hiperplanos tangentes de F^4 são aqueles que a encontram em pares de cônicas.*

Demonstração. Primeiro, observe que se um hiperplano toca tangencialmente uma superfície, então ele encontra a superfície em uma curva a qual possui um ponto duplo. Assim, as seções hiperplanas de F^4 são curvas quárticas racionais que serão representadas em \mathbb{P}^2 por cônicas e as únicas dessas quárticas que possuem nó são aquelas que "quebram-se" em duas cônicas, representadas em \mathbb{P}^2 por pares de reta. □

Por fim, notemos que existe uma família a dois parâmetros de retas repetidas correspondendo aos termos x^2, y^2 e z^2 . Essas retas repetidas correspondem a seções hiperplanas

que são cônicas repetidas. Então, correspondendo a cada cônica da superfície, existe um hiperplano que toca tangencialmente F^4 ao longo de todas elas. Esses hiperplanos são chamados de Hiperplanos de contato de F^4 . Sendo $(\lambda_0, \dots, \lambda_5)$ as coordenadas de qualquer um desses hiperplanos de contato segue que

$$\lambda_0 x^2 + \lambda_1 y^2 + \lambda_2 z^2 + \lambda_3 yz + \lambda_4 xz + \lambda_5 xy = (lx + my + nz)^2$$

e em relação aos parâmetros homogêneos l, m, n as equações paramétricas da envoltória dos hiperplanos de contato são

$$\frac{\lambda_0}{l^2} = \frac{\lambda_1}{m^2} = \dots = \frac{\lambda_5}{2lm} \quad (2.5)$$

e comparando com a equação (2.3) vemos que elas são similares, logo a envoltória de hiperplanos de contato de F^4 é uma envoltória de Veronese Φ^4 , dual da superfície de Veronese.

Agora, representemos o espaço das cônicas de \mathbb{P}^2 no espaço projetivo \mathbb{P}^5 como segue

$$\lambda_0 x^2 + \lambda_1 y^2 + \lambda_2 z^2 + \lambda_3 yz + \lambda_4 xz + \lambda_5 xy \longmapsto (\lambda_0 : \dots : \lambda_5). \quad (2.6)$$

Segundo essa representação podemos ver que as retas repetidas são imaginadas, por dualidade, por pontos de uma superfície de Veronese como por exemplo: a reta dupla $x^2 = 0$ é vista como o ponto $(1 : 0 : 0 : 0 : 0) \in \mathbb{P}^5$. Por outro lado, dado um feixe de cônicas em \mathbb{P}^2 podemos escrevê-lo com sendo $\lambda C_1 + \beta C_2$ que corresponde então, por dualidade, a uma reta de \mathbb{P}^5 . Analogamente, sistemas lineares de dimensão 2, 3 e 4 são imaginados como sendo planos, sólidos e hiperplanos, respectivamente.

Além disso, se $K(\Lambda_i)$ é a envoltória-cônica no dual de \mathbb{P}^2 com equação

$$\Lambda_0^2 + \Lambda_1 m^2 + \dots + \Lambda_5 lm = 0$$

dada uma condição nos coeficientes de uma cônica k do plano \mathbb{P}^2 , isto é, que a cônica passe por um ponto obtemos a expressão

$$\lambda_0 \Lambda_0 + \lambda_1 \Lambda_1 + \lambda_2 \Lambda_2 + \frac{1}{2} \lambda_3 \Lambda_3 + \frac{1}{2} \lambda_4 \Lambda_4 + \frac{1}{2} \lambda_5 \Lambda_5 = 0 \quad (2.7)$$

e segundo a representação em (2.6) pode-se representar as envoltória-cônicas em hiperplanos de \mathbb{P}^5 por associar cada envoltória-cônica ao hiperplano de \mathbb{P}^5 cujas coordenadas são

$$\Lambda_0, \Lambda_1, \frac{1}{2} \Lambda_3, \frac{1}{2} \Lambda_4, \frac{1}{2} \Lambda_5$$

Então, para esse caso definimos

Definição 2.0.10. Dizemos que o lugar geométrico das cônicas de \mathbb{P}^2 é apolar a uma envoltória-cônica $K(\Lambda_i)$ se, em \mathbb{P}^5 , o ponto $P = (\lambda_0, \dots, \lambda_5)$ correspondente a uma cônica em \mathbb{P}^2 pertence ao hiperplano Π correspondente a envoltória-cônica.

2.0.2 Projeções da Superfície de Veronese

Em geral, se olharmos para as superfícies racionais representadas por um sistema de cônicas, qualquer superfície em \mathbb{P}^4 será representada em \mathbb{P}^2 por meio de um sistema a quatro parâmetros. Contudo, qualquer sistema linear a quatro parâmetros consiste de todas as cônicas de \mathbb{P}^2 cujos coeficientes estão sujeitos a uma única condição linear (passar por um único ponto) que segundo a equação (2.7) será equivalente a requerer que todas as cônicas sejam apolares a uma envoltória-cônica K .

Agora, consideremos a superfície de Veronese F^4 e a condição das cônicas de \mathbb{P}^2 serem apolares a uma envoltória-cônica K significa que as seções de F^4 passam através de um ponto fixo $O \in \mathbb{P}^5$ uma vez que os coeficientes λ_i estão sujeitos a uma única condição linear.

Definição 2.0.11. Com a mesma notação usada acima definimos a representação plana como sendo a projeção da superfície de Veronese F^4 segundo o ponto O no espaço \mathbb{P}^4 .

Observação 2.0.7. Teremos três casos de projeção da superfície F^4 que surgirão de acordo com a envoltória K , que é uma cônica no dual de \mathbb{P}^2 :

1. K ser uma cônica própria;
2. Um par de pontos U e V ;
3. Um ponto repetido A^2 .

Proposição 2.0.2. *Segundo os três casos mencionados acima, as cônicas apolares a K ou formam um sistema linear geral de dimensão 4, ou um sistema de cônicas que passa através dos dois pontos U e V , ou um sistema de cônicas que passa através de um ponto A no lugar de base.*

Demonstração. O primeiro caso é o genérico. Nos outros dois casos quando impomos a condição das cônicas serem apolares a envoltória K que por sua vez ou são os dois pontos U e V , ou é o ponto A , o sistema de cônicas apolar a K tem, respectivamente, associado os dois pontos U, V ou passa através do ponto A que está no lugar de base do sistema de cônicas (segue do teorema de Bertini). \square

Corolário 2.0.2. *A representação plana desses sistemas são as projeções de F^4 segundo o vértice O o qual é, respectivamente, um ponto genérico de \mathbb{P}^5 , um ponto que se encontra no plano de F^4 , um ponto de F^4 (é o caso em que K corresponde a uma reta dupla).*

Definição 2.0.12. Nos casos (1) e (2), no qual o ponto O não pertence a superfície F^4 obtemos uma superfície em \mathbb{P}^4 de mesmo grau que F^4 que chamamos de superfície de Veronese Projetada.

Notação: Se temos a projeção de F^4 segundo um ponto genérico denotamos por $F^4[4]$;

Se a projeção de F^4 é segundo um ponto no plano denotamos a projeção por $F_{(1)}^4[4]$

2.0.3 O Scroll Cúbico em \mathbb{P}^4

Antes de definirmos o Scroll cúbico em \mathbb{P}^4 vamos definir o conceito de explosão do espaço projetivo \mathbb{P}^n segundo um ponto. A definição de explosão para uma variedade qualquer X pode ser encontrada facilmente na literatura. Veja [12] e [3].

Considere dois espaços projetivos \mathbb{P}^n com coordenadas homogêneas x_0, \dots, x_n e \mathbb{P}^{n-1} com coordenadas homogêneas y_1, \dots, y_n . Para os pontos $x = (x_0 : \dots : x_n) \in \mathbb{P}^n$ e $y = (y_1 : \dots : y_n) \in \mathbb{P}^{n-1}$ denotamos o ponto $(x, y) \in \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ do produto também por $(x_0 : \dots : x_n; y_1 : \dots : y_n)$. Considere a subvariedade fechada $\Gamma \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ definida pelas equações

$$x_i y_j = x_j y_i, \quad i, j = 1, \dots, n. \quad (2.8)$$

Definição 2.0.13. A aplicação $\sigma : \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{P}^n$ definida pela restrição da primeira projeção $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1} \longrightarrow \mathbb{P}^n$ é chamada de explosão de \mathbb{P}^n centrada em ξ .

Escreva ξ para o ponto $\xi = (1 : 0 : \dots : 0) \in \mathbb{P}^n$. Se $(x_0 : \dots : x_n) \neq \xi$, então ao menos um $x_i \neq 0$, com $i \in \{1, \dots, n\}$, e assim podemos assumir $x_i = 1$. Por (2.8) tem-se que

$$y_j = x_j y_i, \quad \forall j = 1, \dots, n.$$

Assim,

$$(y_1 : \dots : y_n) = (x_1 y_i : \dots : x_n y_i) = (x_1 : \dots : x_n)$$

já que $y_i \neq 0$.

Portanto, a aplicação $\sigma^{-1} : \mathbb{P}^n \setminus \xi \longrightarrow \Gamma$ definida por

$$(x_1 : \dots : x_n) \longmapsto ((x_0 : \dots : x_n), (x_1 : \dots : x_n)) \quad (2.9)$$

é a inversa de σ .

Caso $(x_1 : \dots : x_n) = \xi$, então a equação (2.8) é satisfeita para qualquer y_i , e portanto, $\sigma^{-1}(\xi) = \xi \times \mathbb{P}^{n-1}$, assim $\sigma : \mathbb{P}^n \setminus \xi \longrightarrow \mathbb{P}^{n-1} \setminus \xi \times \mathbb{P}^{n-1}$ é um isomorfismo.

Definição 2.0.14. A reta $E = \xi \times \mathbb{P}^{n-1} \subset \Gamma$ é chamada de divisor excepcional da explosão.

Seja L uma reta em \mathbb{P}^n que passa através do pontos ξ . Podemos supor que L é parametrizada por $x_j = \alpha_j x_i$, para algum i e $j = 1, \dots, n$. Então, em L a plicação definida em (2.9) é tal que

$$\sigma^{-1}(x_0 : \dots : x_n) = ((x_0 : \dots : x_n), (\alpha_1 x_i : \dots : 1 : \dots : \alpha_n x_i)) \quad (2.10)$$

$$= ((x_0 : \dots : x_n), (\alpha_1 : \dots : \alpha_n)) \quad (2.11)$$

com 1 na coordenada i . Vemos então que $\sigma^{-1}(L) \subset \Gamma$ intersecta a reta $\xi \times \mathbb{P}^{n-1}$ no ponto $(\xi, \alpha_1 : \dots : 1 : \dots : \alpha_n)$.

Vamos agora definir o Scroll cúbico em \mathbb{P}^n e fazer algumas descrições.

Definição 2.0.15. Considere a aplicação racional $\psi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^4$ dada por

$$\psi(Z_0 : Z_1 : Z_2) = (Z_0^2 : Z_1^2 : Z_0 Z_1 : Z_0 Z_2 : Z_1 Z_2) \quad (2.12)$$

A imagem X desta aplicação é chamada de Scroll cúbico em \mathbb{P}^4 .

Existem várias maneiras de descrever o Scroll cúbico. Primeiro, podemos descrevê-lo como a imagem da superfície de Veronese $F^4 \subset \mathbb{P}^5$ vista na seção anterior, via a projeção $\pi_p : F^4 \rightarrow \mathbb{P}^4$, onde $p \in F^4$, ou seja, sendo a aplicação de veronese $\varphi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^4$ dada por

$$\varphi(Z_0 : Z_1 : Z_2) = (Z_0^2 : Z_1^2 : Z_2^2 : Z_0 Z_1 : Z_0 Z_2 : Z_1 Z_2)$$

Então ψ é a composição de φ com a projeção

$$\pi_p(W_0 : W_1 : W_2) = (W_0 : W_1 : W_3 : W_4 : W_5)$$

com $p = (0 : 0 : 1 : 0 : 0 : 0)$.

A segunda maneira de descrever X é por explosão.

Teorema 2.0.6. X é isomorfo à explosão do plano \mathbb{P}^2 centrada no ponto $q = (0 : 0 : 1) \in \mathbb{P}^2$ no qual ψ não está definida.

Demonstração. Sejam $(Z_0 : Z_1 : Z_2)$ as coordenadas homogêneas de \mathbb{P}^2 e \mathbb{P}^1 com coordenadas homogêneas $(W_0 : W_1)$. Segundo as equações em (2.8), a equação que define $\Gamma \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ é

$$Z_0 W_1 = W_0 Z_1$$

Então a explosão de \mathbb{P}^2 centrada em q é a projeção $\sigma : \Gamma \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ com

$$\sigma((Z_0 : Z_1 : Z_2); (W_0 : W_1)) = (Z_0 : Z_1 : Z_2)$$

Considere a imersão de Segre $\phi : \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 \hookrightarrow \mathbb{P}^5$ dada por

$$\phi((Z_0 : Z_1 : Z_2), (W_0 : W_1)) = (Z_0W_0 : Z_0W_1 : Z_1W_0 : Z_1W_1 : Z_2W_0 : Z_2W_1).$$

Para os pontos $(Z_0 : Z_1 : Z_2) \neq (0 : 0 : 1)$ tem-se

$$\begin{aligned} \phi \circ \sigma^{-1}(Z_0 : Z_1 : Z_2) &= \phi((Z_0 : Z_1 : Z_2); (Z_0 : Z_1)) = \\ &= (Z_0^2 : Z_0Z_1 : Z_0Z_1 : Z_1^2 : Z_0Z_2 : Z_2Z_1) \in H \cong \mathbb{P}^4, \end{aligned}$$

onde o hiperplano $H = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4 : x_5)/x_1 = x_2\}$ em \mathbb{P}^5 . Dito de outra forma, ψ é a composição da inversa da projeção $\sigma : \Gamma \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ com a aplicação de Segre. Temos então o seguinte diagrama que resolve ψ : \square

$$\begin{array}{ccc} X \subset \mathbb{P}^2 \times \mathbb{P}^1 & & \\ \sigma \downarrow & \searrow \phi & \\ \mathbb{P}^2 & \xrightarrow{\psi} & \mathbb{P}^4 \end{array}$$

Também podemos descrever X em termos das imagens de curvas em \mathbb{P}^2 via a aplicação ψ . Primeiro, vemos que a imagem do divisor excepcional $E \subset \Gamma$ é uma reta $L \subset \mathbb{P}^4$. De fato, um ponto de E é da forma $((0 : 0 : 1); (W_0 : W_1))$ e segundo a aplicação ϕ ele é enviado no ponto de coordenadas $(0 : 0 : 0 : W_0 : W_1)$.

Para podermos concluir a descrição X por meio das curvas de \mathbb{P}^2 precisamos de duas proposições.

Proposição 2.0.3. *As imagens das transformações próprias em Γ de retas passando através do ponto q são novamente retas M_λ em \mathbb{P}^4 , onde cada uma dessas retas intersectam L uma vez.*

Demonstração. Assim como feito em (2.10), dado uma reta r em \mathbb{P}^2 através do ponto q seja $i = 1$ e temos sua equação $x_0 = \alpha_0 x_1$. Logo,

$$\begin{aligned} \phi\left(\sigma^{-1}((x_0 : x_1 : x_2))\right) &= \phi((x_0 : x_1 : x_2); (\alpha_0 : 1)) \\ &= (x_0\alpha_0 : x_0 : x_1\alpha_0 : x_1 : x_2\alpha_0 : x_2) \\ &= (x_1\alpha_0^2 : \alpha_0 x_1 : \alpha_0 x_1 : x_1 : \alpha_0 x_2 : x_2) \end{aligned}$$

que é uma reta em \mathbb{P}^4 intersectando L no ponto $(0 : 0 : 0 : 0 : \alpha_0 : 1)$. \square

Proposição 2.0.4. *As imagens via ψ de retas de \mathbb{P}^2 que não passam através do ponto q são curvas cônicas em \mathbb{P}^4 , disjuntas de L e encontram cada reta M_λ em um ponto.*

Demonstração. Antes de iniciarmos a demonstração é importante perceber que pelo fato de estarmos considerando as retas que não passam através do ponto q podemos aplicar diretamente a função ψ nos pontos de cada uma destas retas.

Agora seja L uma reta em \mathbb{P}^2 que não passa pelo ponto q , então L tem equação

$$aZ_0 + bZ_1 + cZ_2 = 0, \quad \text{com } c \neq 0.$$

Assim, um ponto $P \in L$ tem coordenadas $(Z_0 : Z_1 : -\frac{a}{c}Z_0 - \frac{b}{c}Z_1)$ e segundo a aplicação ψ segue que

$$\psi(P) = (Z_0^2 : Z_1^2 : Z_0Z_1 : -\frac{a}{c}Z_0^2 - \frac{b}{c}Z_0Z_1 : -\frac{a}{c}Z_0Z_1 - \frac{b}{c}Z_1^2) = (x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4)$$

e encontramos que $\psi(P)$ se encontra no plano

$$H = \{(x_0 : x_1 : x_2 : x_3 : x_4)/x_3 = -\frac{a}{c}x_0 - \frac{b}{c}x_2, \quad x_4 = -\frac{a}{c}x_2 - \frac{b}{c}x_1\}.$$

Além disso, a imagem $\psi(P)$ obedece a equação da cônica $x_0x_1 = x_2^2$. Através de uma verificação direta segue as outras duas afirmações. \square

Das proposições (2.0.3) e (2.0.4), por exemplo, se escolhermos uma dessas curvas cônicas $C \subset X \subset \mathbb{P}^4$ nós podemos descrever X como a união de retas em \mathbb{P}^4 ligando uma reta L a cônica C em planos complementares.

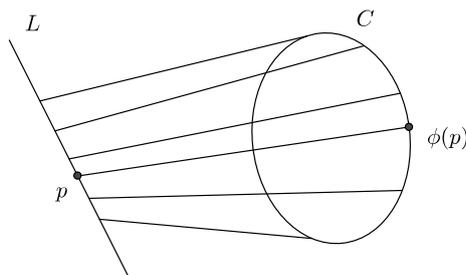


FIGURA 2.1: Scroll Cúbico em \mathbb{P}^4

Aqui, para a generalização do conceito do Scroll Cúbico em \mathbb{P}^4 precisamos da definição de curva racional normal.

Definição 2.0.16. Uma curva racional normal $C \subset \mathbb{P}^d$ é definida como sendo a imagem da aplicação

$$\nu_d : \mathbb{P}^1 \longrightarrow \mathbb{P}^d$$

dada por

$$\nu_d : [X_0, X_1] \mapsto [X_0^d : X_0^{d-1}X_1 : \dots : X_0X_1^{d-1} : X_1^d].$$

Sejam k e l dois inteiros positivos com $k \leq l$ e $n = k + l + 1$, e sejam Λ e Λ' subespaços lineares complementares de dimensão k e l em \mathbb{P}^n (ou seja, Λ e Λ' são disjuntos em \mathbb{P}^n). Escolha curvas racionais normais $C \subset \Lambda$ e $C' \subset \Lambda'$, e um isomorfismo $\varphi : C' \rightarrow C$. Seja $S_{k,l}$ a união de todas as retas $\overline{p, \varphi(p)}$ ligando pontos de C aos pontos correspondentes de C' .

Definição 2.0.17. $S_{k,l}$ é chamado Scroll Racional Normal e as retas $\overline{p, \varphi(p)}$ são chamadas de retas da regra de $S_{l,k}$.

Observação 2.0.8. O Scroll Cúbico em \mathbb{P}^4 é o caso particular quando $k = 2$ e $l = 1$.

2.0.4 Variedade Cúbica de Segre

Começamos essa subseção com um resultado bastante conhecido que pode ser encontrado em [2];

Teorema 2.0.7. *Uma variedade cúbica pode ter no máximo 10 nós.*

Esse limite de 10 nós é atingido pela variedade cúbica de Segre que é definida como

Definição 2.0.18. Para qualquer corpo de característica $\neq 2$ a variedade cúbica de Segre $S \subset \mathbb{P}^4$ é dada pela equação

$$\left\{ (x_0, \dots, x_4) / \sum_{i \neq j \neq k} 2x_i x_j x_k + \sum_{i \neq j} x_i^2 x_j = 0, \quad i, j, k \in \{0, \dots, 4\} \right\} \quad (2.13)$$

Se calculamos as derivadas parciais $\frac{\partial}{\partial x_0}, \frac{\partial}{\partial x_1}, \frac{\partial}{\partial x_2}, \frac{\partial}{\partial x_3}, \frac{\partial}{\partial x_4}$ para a equação em (2.13) encontraremos um dos nós de S , a saber o ponto $(1 : 1 : 1 : -1 : -1)$. Os outros nove pontos surgirão por permutar as coordenadas desse ponto.

Proposição 2.0.5. *Não existe reta na variedade cúbica com três pontos duplos sem que a reta inteira seja singular.*

Demonstração. Vamos supor três pontos duplos em uma reta e mostraremos que a reta inteira está na variedade cúbica e também é singular. Sem perda de generalidade podemos supor que os três pontos duplos são $P_1 = (0 : 0 : 0 : 0 : 1), P_2 = (1 : 0 : 0 : 0 : 1)$ e $P_3 = (-1 : 0 : 0 : 0 : 1)$ no espaço projetivo \mathbb{P}^4 com coordenadas $(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4)$. A

equação da reta l que passa pelo ponto P_1 e tem a direção do vetor $P = P_2 - P_1$ é dada por

$$P_1 + t(P_2 - P_1) = (t : 0 : 0 : 0 : 1)$$

escrevendo a equação da variedade cúbica como

$$f(x_0, x_1, x_2, x_3, x_4) = \sum_{0 \leq i, j, k \leq 4} a_{ijk} x_i x_j x_k = 0$$

calculemos a equação do plano tangente a f em P_1 . Com efeito,

$$f(P_1) = a_{444}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_0} = a_{044}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_1} = a_{144}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_2} = a_{244}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_3} = a_{344}$$

$$\frac{\partial f}{\partial x_4} = 3a_{444}$$

onde a notação a_{i44} significa $x_i x_4^2$, $i = 1, \dots, 4$. Por P_1 ser um ponto duplo temos que $a_{i44} = 0$, $i = 1, \dots, 4$. Pelo mesmo motivo encontramos que $a_{000} = a_{001} = a_{002} = a_{003} = a_{014} = a_{024} = a_{034} = 0$. Agora, calculando as derivadas parciais nos pontos $(t : 0 : 0 : 0 : 1)$ da reta l usamos as condições acima e concluimos que l está inteiramente na variedade e é singular. \square

CAPÍTULO 3

Transformações de Cremona em \mathbb{P}^3

Nesta seção será exposto um método, devido a Cremona, para determinar as transformações de Cremona de um espaço projetivo \mathbb{P}^3 usando uma Φ -superfície fixa Φ_0 . Nesse método a consideração essencial é que encontramos a representação plana da superfície genérica (racional) Φ_0 em um plano π e olhamos para o sistema de curvas em π correspondente ao sistema de curvas formado pela interseção de Φ_0 com superfícies de mesmo grau e mesmo lugar de base da Φ_0 . Em seguida, utilizaremos esse método para determinarmos algumas das mais simples e mais úteis Transformações de Cremona de \mathbb{P}^3 , dadas por quádricas e cúbicas.

3.1 Representação Plana de uma Superfície Racional

Como explicado no parágrafo introdutório, será indispensável a representação plana da superfície fixa considerada. Então, introduziremos o conceito de representação plana para uma superfície racional em um espaço linear projetivo de dimensão n . Para isso, começaremos com algumas definições.

Sejam $f_0 = f_1 = \dots = f_n = 0$ as equações de $n + 1$ curvas linearmente independentes C^n em \mathbb{P}^2 e o sistema linear de curvas (f) de dimensão n dado por

$$\lambda_0 f_0 + \lambda_1 f_1 + \dots + \lambda_n f_n = 0, \tag{3.1}$$

onde $\lambda_0, \dots, \lambda_n$ são constantes arbitrárias.

Definição 3.1.1. Nós dizemos que (f) é redutível se, e somente se, suas curvas genéricas

são redutíveis. Este será o caso se toda curva de (f) quebra-se em uma parte fixa e uma variável, ou em número de partes variáveis.

Definição 3.1.2. Seja (f) um sistema linear de curvas e P_1, \dots, P_k seus pontos base. Então (f) é simples se cada ponto $P \in \mathbb{P}^2$, $P \neq P_i$, impõe uma única condição em (f) .

Definição 3.1.3. O grau ν do sistema (f) é o número da interseção residual de duas curvas genéricas de (f) .

Exemplo 3.1.1. No exemplo (1.3.1), duas cônicas arbitrárias do sistema se intersectam em um ponto variável e assim, o grau do sistema é 1.

O teorema seguinte estabelece o conceito de representação plana de uma superfície racional.

Teorema 3.1.1. *Se (f) é simples, irredutível e de dimensão $n > 2$, então suas curvas podem ser birracionalmente representadas por seções planas de uma superfície racional S de \mathbb{P}^n , onde o grau de S é ν .*

Demonstração. Suponha que o sistema (3.1) satisfaça as hipóteses do teorema e considere a aplicação T dada por

$$T(x, y, z) = (f_0(x, y, z) : \dots : f_n(x, y, z)) \quad (3.2)$$

Por hipótese, f_0, f_1, \dots, f_n são linearmente independentes e assim $x_0 = f_0, \dots, x_n = f_n$ também são linearmente independentes e conseqüentemente x_0, x_1, \dots, x_n são coordenadas homogêneas de um ponto em \mathbb{P}^n . Mediante essa construção, para qualquer ponto $P(x, y, z)$ do plano corresponde um ponto $Q(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ de \mathbb{P}^n e como P descreve todo o plano, Q descreverá uma superfície S no qual (3.2) são suas equações paramétricas.

Se Q descreve uma seção hiperplana de S cuja equação é

$$a_0x_0 + a_1x_1 + \dots + a_nx_n = 0 \quad (3.3)$$

então P descreve a curva de (f) cuja equação é

$$a_0f_0 + a_1f_1 + \dots + a_nf_n = 0. \quad (3.4)$$

Claramente, a cada ponto do plano corresponde um único ponto da superfície S . Suponha agora, por contradição, que para um ponto genérico Q de S correspondam vários pontos P_1, P_2, \dots, P_n do plano. Por (3.2) esses pontos fornecem o mesmo conjunto de valores para as relações $f_0 : f_1 : \dots : f_n$ e iriam impor a mesma condição nas curvas de (f)

para as conter o que contradiz o fato do sistema (f) ser simples. Portanto, a cada ponto genérico de S corresponde um único ponto do plano.

Para o cálculo da ordem de S percebemos que o número de pontos na interseção de S com um \mathbb{P}^{n-2} é representado por duas equações tais com em (3.3) o que representa o grau ν de (f) .

□

Observação 3.1.1. Se p é o gênero de (f) , isto é, o gênero de uma curva genérica de (f) , então do fato de S ser racional tem-se que as curvas de (f) estão em correspondência birracional com as seções hiperplanas de S e portanto elas tem o mesmo gênero p .

Com intuito de fixar esse conceito vamos encontrar a representação plana de uma superfície racional Φ_0 de grau 2 em \mathbb{P}^3 .

Proposição 3.1.1. *A superfície quádrlica Φ_0 é birracionalmente equivalente a um plano π .*

Demonstração. Seja O um ponto de Φ_0 . Considere a projeção $\varphi : \Phi_0 \rightarrow \pi$ segundo o ponto O como de costume: para um ponto $P \in \Phi_0$ olhamos para a interseção da reta OP com o plano π obtendo um ponto P' em π . Veja figura (3.1). Notemos que o plano tangente à quádrlica Φ_0 no ponto O intersecta a quádrlica em duas retas, digamos λ_0, μ_0 , que pertencem a duas regras distintas e são projetadas em dois pontos A e B , respectivamente. Além disso, os pontos da reta AB correspondem a projeção dos pontos da vizinhança do ponto O em Φ_0 . Assim, a aplicação $\varphi : \Phi_0 \setminus \{\lambda_0, \mu_0\} \rightarrow \pi \setminus \{A, B\}$ é um isomorfismo e a proposição está demonstrada.

□

Corolário 3.1.1. *A quádrlica Φ_0 é representada no plano π por meio de cônicas através de dois pontos base A, B .*

Demonstração. As seções planas genéricas de Φ_0 , isto é, que não passam através do ponto O , serão cônicas que intersectam λ_0, μ_0 e assim serão representadas no plano π por cônicas através dos pontos A, B .

□

Como no capítulo 1, denotamos por $C^2(A, B)$ as cônicas de \mathbb{P}^2 passando pelos pontos A e B .

Em virtude da representação da quádrlica Φ_0 , temos algumas observações a fazer:

1. O sistema $C^2(A, B)$ tem dimensão 3 e duas cônicas quaisquer desse sistema intersectam-se residualmente em dois pontos.

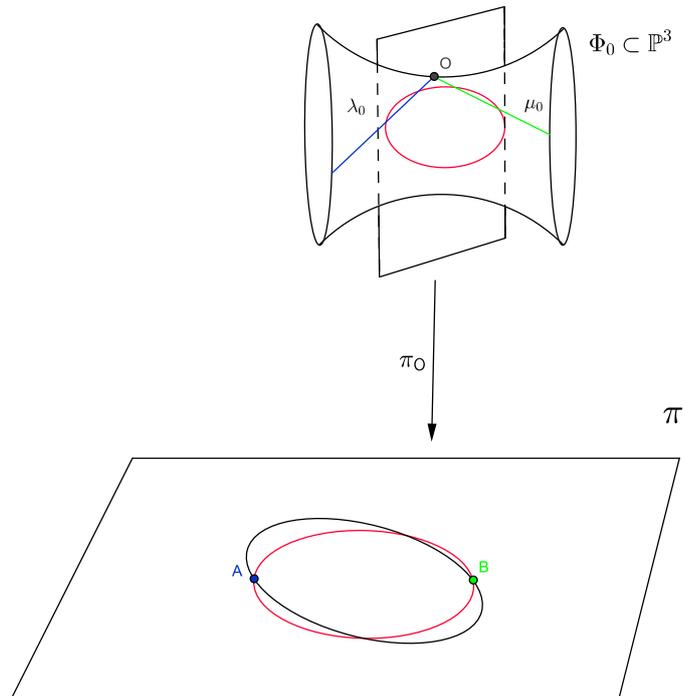


FIGURA 3.1: Projeção de Φ_0 segundo o ponto O .

2. Caso as seções planas de Φ_0 passem através do ponto P_0 , elas são projetadas em retas de π .
3. Todo λ -gerador de Φ_0 encontra μ_0 em um ponto pois este pertence a outra regra da quádrca Φ_0 , e portanto é projetado em uma reta do plano π formando um feixe de retas com vértice em B . Pelo mesmo motivo, os μ -geradores são projetados em retas de um feixe com vértice em A .

3.2 Construção de Sistemas Homaloidais

Nesta seção vamos explicitar um método desenvolvido por Cremona que é utilizado para determinar sistemas lineares homaloidais de quádricas em \mathbb{P}^3 , e em seguida iremos aplicá-lo para determinar algumas transformações de Cremona. Esse método também é aplicável para determinar as transformações de Cremona no espaço linear projetivo de dimensão 4 como mostraremos no último capítulo.

Temos a seguinte descrição do método de Cremona:

1. Fixe uma superfície racional de grau n , $\Phi_0^n \subset \mathbb{P}^3$;
2. Represente a superfície Φ_0 em um plano $\pi \simeq \mathbb{P}^2$;
3. No plano π , a qual Φ_0 é birracionalmente representada, nós construímos primeiro o sistema de curvas (L) correspondente a interseção de Φ_0 com superfícies de ordem n as quais têm os mesmos pontos e curvas base que Φ_0 ;
4. Caso o sistema (L) não seja homaloidal temos que reduzi-lo a um sistema homaloidal (L') impondo componentes fixas A' e pontos bases O'_i em (L) ;

As imposições sobre o sistema (L) significam que as superfícies de ordem n que tem os mesmos pontos e curvas múltiplos terão adicionalmente curvas base simples A em Φ_0 correspondendo a A' em π e também terão adicionalmente pontos base ou pontos de contato nos pontos O_i de Φ_0 correspondendo a O'_i . Elas formam um sistema Φ que encontra Φ_0 em um sistema homaloidal de curvas correspondente ao sistema (L') uma vez que a representação de Φ_0 em π é birracional.

Para finalizarmos o método temos o último passo que colocaremos na forma de proposição:

5.

Proposição 3.2.1. *O sistema de superfícies Φ é um sistema homaloidal.*

Demonstração. Observe que por Φ_0 ser um membro genérico do sistema Φ quando tomamos outras duas superfícies Φ_1, Φ_2 de Φ tem-se que

$$\Phi_0 \cap \Phi_1 \cap \Phi_2 = (\Phi_1 \cap \Phi_0) \cap (\Phi_2 \cap \Phi_0) = C_1 \cap C_2$$

onde C_1, C_2 são curvas do sistema homaloidal correspondente a (L') e portanto o grau de interseção é igual a 1. Conseqüentemente, Φ é um sistema homaloidal. \square

Notação: Vamos denotar por T_{nm} uma transformação T dada por polinômios homogêneos de grau n e tal que sua inversa é dada por polinômios homogêneos de grau m .

Proposição 3.2.2. *Seja $T_{nm} : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^{3'}$ uma transformação de Cremona com sistemas de geradores Φ e Ψ . Então, a ordem das Φ -superfícies é igual a ordem das Ψ -curvas e a ordem das Ψ -superfícies é igual a ordem das Φ -curvas.*

Demonstração. Se ψ é uma Ψ -curva qualquer, então, por definição, ela corresponde a uma reta $l \subset \mathbb{P}^3$. Assim,

$$\#(\psi \cap H) = \#(l \cap \phi),$$

onde H é um hiperplano de \mathbb{P}^3 e ϕ é a Φ -quádrica correspondente a H . Isto prova a primeira afirmação. A demonstração da outra afirmação é análoga. \square

3.2.1 A Transformação T_{22}

A transformação de Cremona T_{22} é uma transformação simétrica dada por superfícies de grau dois cuja inversa também é dada por superfícies de grau 2. Seguindo o método descrito acima, seja Φ_0 uma superfície quádrlica genérica de \mathbb{P}^3 . Pelo corolário (3.1.1), Φ_0 é representada no plano π por um sistema linear $(L) = C^2(A, B)$ de cônicas através de dois pontos A e B . Agora vamos determinar as condições mínimas para termos um sistema homaloidal de quádrlicas.

Usando representação de Φ_0 obtida no corolário (3.1.1) temos que uma dada superfície quádrlica através de uma cônica k encontra Φ_0 em uma cônica residual e que segundo a demonstração do corolário (3.1.1) (vale ressaltar que quando falamos em uma cônica já escolhemos o plano em que ela se encontra e neste caso é uma seção plana de Φ_0) ela é representada no plano π em uma cônica através dos pontos A e B . Isso significa que

Proposição 3.2.3. *As superfícies quádrlicas de \mathbb{P}^3 através da cônica k formam um sistema linear de dimensão 3.*

Como o sistema linear $(L) = C^2(A, B)$ tem dimensão três, ele não é homaloidal. Temos que impor uma condição adicional a esse sistema, ou seja, que as cônicas de (L) passem através de um terceiro ponto C' . Quando impomos essa condição obtemos um sistema homaloidal de cônicas através dos três pontos base A, B, C' denotado por $C^2(A, B, C')$. Segundo a proposição (3.2.1), existe um sistema homaloidal Φ formado pelas quádrlicas que passam através da cônica k e adicionalmente pelo ponto base C correspondente ao ponto C' o qual encontra a superfície quádrlica Φ_0 em um sistema linear homaloidal de curvas correspondente a $C^2(A, B, C')$.

Podemos então considerar T a transformação de Cremona associada ao sistema homaloidal Φ . A primeira propriedade da transformação T é que

Proposição 3.2.4. *As Φ -curvas são cônicas encontrando k em dois pontos.*

Demonstração. Que as Φ -curvas são cônicas é trivial. Agora sendo ϕ uma dessas Φ -curvas temos que o número de pontos da interseção $\#(\phi \cap k)$ é tal que

$$\#(\phi \cap k) = \#(\bar{\phi} \cap \bar{k}) = 2$$

pois as cônicas $\bar{\phi}$ e \bar{k} em π correspondentes a ϕ e k respectivamente se intersectam residualmente em apenas dois pontos. \square

No intuito de explicitar a transformação T , sem perda de generalidade, podemos supor que $C = (0 : 0 : 0 : 1)$ e a equação da cônica k é $t = 0 = (x, y, z)_2$ em que $(x, y, z)_2$ representa uma cônica completa em um plano nas variáveis x, y, z . Como o ponto C não pode pertencer a k , na equação do sistema Φ não deve aparecer termos apenas com x, y, z . Então,

$$\Phi \equiv \lambda_0 xt + \lambda_1 yt + \lambda_2 zt + \lambda_3 (x, y, z)_2 = 0$$

Consequentemente,

$$T(x, y, z, t) = (xt, yt, zt, (x, y, z)_2) \quad (3.5)$$

Proposição 3.2.5. *Podemos verificar que os elementos fundamentais da aplicação T são:*

1. *O plano da cônica k ;*
2. *As retas que ligam C aos pontos da cônica.*

Demonstração. A primeira afirmação é trivial pois para $t = 0$ temos o ponto $C^* = (0 : 0 : 0 : (x, y, z)_2) = (0 : 0 : 0 : 1) \in \mathbb{P}^3$. A segunda afirmação é menos direta.

Notemos que um ponto P da cônica k é da forma $P = (x : y : z : 0)$ e o segmento de reta que liga C a P é parametrizado por

$$C + \lambda(P - C) = (\lambda x, \lambda y, \lambda z, 1 - \lambda), \quad \lambda \in (0, 1).$$

Considere um desses segmentos, isto é, fixe um ponto $P_0 = (x_0 : y_0 : z_0 : 0)$. Um ponto arbitrário desse segmento fixado é da forma $(\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0, 1 - \lambda)$ e segundo a aplicação T tem-se

$$\begin{aligned} T(\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0, 1 - \lambda) &= (\lambda x_0(1 - \lambda) : \lambda y_0(1 - \lambda) : \lambda z_0(1 - \lambda) : (\lambda x_0, \lambda y_0, \lambda z_0)_2) \\ &= (\lambda x_0(1 - \lambda) : \lambda y_0(1 - \lambda) : \lambda z_0(1 - \lambda) : \lambda^2(x_0, y_0, z_0)_2) \\ &= (x_0(1 - \lambda) : y_0(1 - \lambda) : z_0(1 - \lambda) : \lambda(x_0, y_0, z_0)_2) \\ &= (x_0 : y_0 : z_0 : 0) + (-\lambda x_0 : -\lambda y_0 : -\lambda z_0 : \lambda(x_0, y_0, z_0)_2) \\ &= (x_0 : y_0 : z_0 : 0) + (-x_0 : -y_0 : -z_0 : (x_0, y_0, z_0)_2) \\ &= (0 : 0 : 0 : (x_0, y_0, z_0)_2) \end{aligned}$$

sendo $P' = (0 : 0 : 0 : (x_0, y_0, z_0)_2)$ um ponto correspondente de uma cônica k' . \square

Agora sendo T^{-1} dada por um sistema Ψ de quádricas que encontram uma superfície quádrica genérica Ψ_0 contendo a cônica k' cujos pontos correspondem aos segmentos de reta ligando C aos pontos de k e o plano de k , ao empregarmos os argumentos anteriores concluímos que

Corolário 3.2.1. *T^{-1} é dada por um sistema linear de superfícies quádricas, que tem como lugar de base uma cônica k' e um ponto C^* . Além disso, suas Ψ -curvas são cônicas através de C^* que encontram k' duas vezes.*

3.2.2 A Transformação T_{23}

Seja Φ_0 uma superfície quádrica em \mathbb{P}^3 . Pelo corolário (3.1.1) sabemos que a quádrica Φ_0 é representada em um plano π por meio de um sistema de cônicas através de dois pontos A e B os quais correspondem, respectivamente, aos geradores λ_0 e μ_0 de Φ_0 que representamos por $C^2(A, B)$.

Considere uma curva (α, β) , isto é, uma curva que intersecta os λ -geradores em α pontos e os μ -geradores em β pontos. Então a curva (α, β) pode ser projetada no plano π em uma curva $C^{\alpha+\beta}(A^\alpha, B^\beta)$. Observemos ainda que a última curva não tem interseções livres com AB de acordo com o fato que ela representa uma curva em Φ_0 que não passa pelo ponto O .

Como a representação de Φ_0 no plano π é birracional, se uma curva (α, β) não tem pontos múltiplos, então seu gênero g é igual ao da curva $C^{\alpha+\beta}(A^\alpha, B^\beta)$ que segundo a equação (1.12) é dado por

$$g = \frac{1}{2}(\alpha + \beta - 1)(\alpha + \beta - 2) - \frac{1}{2}\alpha(\alpha - 1) - \frac{1}{2}\beta(\beta - 1) = (\alpha - 1)(\beta - 1)$$

e se (α', β') é uma outra curva o número de interseções com a curva (α, β) é igual ao número da interseções das suas curvas projetadas, que é

$$(\alpha + \beta)(\alpha' + \beta') - \alpha\alpha' - \beta\beta' = \alpha\beta' + \alpha'\beta.$$

Uma vez que Φ_0 é gerada pelas retas λ_0, μ_0 o grau de sua interseção com uma superfície G^α de grau α é igual ao grau da interseção de G^α com λ_0 somado ao grau da interseção de G^α com a reta μ_0 donde concluímos que Φ_0 intersecta uma superfície G^α em uma curva (α, α) . Reciprocamente, usando a equação paramétrica de Φ_0

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = xy : xz : yz : z^2$$

mostra-se que qualquer curva (α, α) é a interseção completa de Φ_0 com uma superfície G^α .

Caso $\alpha > \beta$ então a curva $C^{\alpha+\beta}(A^\alpha, B^\beta)$ junto com $\alpha - \beta$ retas através de B formam uma curva do tipo $C^{2\alpha}(A^\alpha B^\alpha)$. Isso mostra o

Teorema 3.2.1. *Uma curva (α, β) no qual $\alpha > \beta$ é a interseção residual de Φ_0 com uma superfície G^α passando através de $\alpha - \beta$ geradores do segundo sistema.*

Vamos agora determinar o sistema homaloidal de quádricas.

Lema 3.2.1. *Seja Φ_0 uma quádrica de \mathbb{P}^3 contendo uma reta l . Então o sistema $\bar{\Phi}$ de quádricas através da reta l encontra Φ_0 em um sistema de curvas o qual é representado no plano π , de representação plana de Φ_0 , por um sistema (L) de curvas cúbicas através de um ponto simples em A e um ponto múltiplo em B .*

Demonstração. Observe que a interseção residual de duas quádricas de $\bar{\Phi}$ é uma curva cúbica reversa que encontra l em dois pontos¹. Se c_3 é uma dessas cúbicas reversas podemos supor sem perda de generalidade que $\alpha = 2$ e $\beta = 1$ no teorema (3.2.1) e concluímos que c_3 será representada no plano π por uma curva do tipo $C^3(A^2, B)$, isto é, uma curva cúbica que passa pelo ponto simples B e tem A como ponto múltiplo, ou seja, uma curva de (L) . □

Teorema 3.2.2. *Se impomos mais três condições nas quádricas de $\bar{\Phi}$, então obtemos um sistema homaloidal Φ de quádricas através da reta l e de três pontos.*

Demonstração. Note que o sistema de curvas (L) correspondente a interseção de superfícies quádricas com Φ_0 tem dimensão 5 pois o fato de A ser um ponto múltiplo de uma curva $c_3 \in (L)$ impõe três condições à c_3 - uma é passar pelo ponto A e as outras duas condições é para que c_3 possua retas tangentes distintas em A - e mais a condição de passar pelo ponto B . Desta forma, (L) tem dimensão $\binom{3+2}{2} - 4 = 5$ e claramente (L) não é um sistema homaloidal de curvas no plano π .

Para obtermos um sistema homaloidal de curvas então temos que restringir o sistema (L) impondo mais três condições as curvas de (L) , isto é, impor que as curvas cúbicas passem através de três pontos fixos C', D', E' obtendo assim um sistema homaloidal de curvas (L^*) em π através dos pontos simples B, C', D', E' e do ponto múltiplo A . Portanto, segundo a proposição (3.2.1) o sistema de quádricas Φ através da reta l e que passa através de três pontos C, D, E correspondentes aos pontos C', D', E' é homaloidal. □

¹Tem-se que duas quádricas que passam através de uma cúbica reversa intersectam-se residualmente em uma reta secante da cúbica reversa. Esse resultado pode ser encontrado em [7], pág.302.

Seja T a transformação de Cremona associada ao sistema Φ . Fica claro a partir da construção do sistema homaloidal Φ que o lugar de base de T é a reta l e os três pontos C, D, E .

Proposição 3.2.6. *Os elementos fundamentais de Φ são:*

1. *Três feixes de retas, com vértices em C, D, E respectivamente;*
2. *Um feixe de cônicas através de C, D, E e um ponto de l coplanar com estes três.*

Demonstração. Seja, por exemplo, Υ o feixe de retas que passa através do ponto C . Esse feixe de retas é formado apenas pelas retas que passam através do ponto C e que intersectam a reta l . Então, se l é um dos λ -geradores vamos considerar as retas que passam por C e é um μ gerador. Como uma reta qualquer r de Υ já intersecta uma quádrlica qualquer de Φ em dois pontos que são C e um ponto da reta l , segue imediatamente que uma reta de Υ impõe apenas uma condição em uma quádrlica de Φ para contê-la. Desta forma, todo ponto de r é enviado em um único ponto do sistema inverso Ψ .

Para o segundo item, seja Ω o feixe de cônicas através de C, D, E e de um ponto P_0 de l coplanar com estes três. Seguindo o raciocínio do item anterior, notemos que se c_2 é uma das cônicas do feixe Ω , então uma quádrlica de Φ intersecta c_2 em quatro pontos no lugar de base de Φ - três são os pontos C, D, E e o outro é o ponto P_0 de l , coplanar com C, D, E - donde segue que c_2 impõem apenas uma condição para que uma quádrlica de Φ a contenha. Portanto, todo ponto de c_2 corresponde a um único ponto de Ψ . \square

Observação 3.2.1. O ponto P_0 de l coplanar com os pontos C, D, E é o ponto da interseção de l com o plano α gerado pelos pontos C, D, E .

Observação 3.2.2. Considerando o plano $\alpha = [C, D, E, P_0]$, o sistema de cônicas fundamentais de Φ surge da interseção de α com as quádrlicas de Φ .

Corolário 3.2.2. *As Φ -curvas são cúbricas reversas através dos pontos C, D, E que encontram l em dois pontos.*

Demonstração. Segue diretamente da construção do sistema linear Φ . \square

Teorema 3.2.3. *Aos três feixes de retas passando pelos pontos C, D, E respectivamente da proposição (3.2.6), correspondem três retas simples c, d, e que estão no lugar de base de Ψ . Além disso, ao feixe de cônicas fundamentais da proposição (3.2.6) corresponde uma reta dupla l' no lugar de base de Ψ .*

Demonstração. Seja Υ o feixe de retas que passam através do ponto C . Essas retas fundamentais estão formando uma curva em \mathbb{P}^3 pertencente ao sistema Ψ e desde que cada quádrlica de Φ contem apenas uma reta de Υ (é consequência de como foi tomado o feixe Υ) segue que essa curva tem grau 1, ou seja, é uma reta.

Seja Ω o sistema de cônicas em questão. Como cada superfície quádrlica de Φ encontra o plano gerado pelos pontos C, D, E e P_0 em apenas uma cônica de Ω segue que a curva em \mathbb{P}^3 no qual o sistema de cônicas fundamentais Ω descreve é uma reta. Por fim, se H é um plano em \mathbb{P}^3 , então

$$\#(H \cap l') = \#(\phi \cap l) = 2 \quad (3.6)$$

onde ϕ é a quádrlica em \mathbb{P}^3 correspondente ao plano H via a aplicação T . Isto mostra que a reta l' é uma reta dupla. \square

Proposição 3.2.7. *Cada uma das retas simples c, d, e do teorema (3.2.3) encontra a reta dupla l' em um ponto.*

Demonstração. Com a mesma notação do teorema (3.2.3) sejam Ω o feixe de cônicas através dos pontos bases C, D, E , o ponto P_0 pertencente a l coplanar com estes três e Υ o feixe de retas de Φ passando através do ponto C . Sejam os planos $\sigma_1 = [l, C]$ e $\alpha = [C, D, E, P_0]$.

Desde que o plano σ_1 encontra o plano α em uma reta de Υ , na verdade é a reta que passa pelos pontos C e P_0 , segue que a reta c encontra a reta l' em um ponto. Da mesma forma mostra-se que as retas d, e encontram l' . \square

Proposição 3.2.8. *As Ψ -superfícies são scrolls cúbicos.*

Demonstração. A reta l' é uma das retas diretrizes. A outra reta diretriz l , simples, basta considerar em um plano complementar ao plano de l' . Estabelecemos assim uma bijeção entre essas duas retas. As retas simples c, d, e são retas da regra do Scroll. \square

3.2.3 A transformação T_{24}

Considere Φ_0 uma superfície quádrlica que toca tangencialmente um plano $\bar{\pi}$ em O . Vamos utilizar a mesma representação plana provada no corolário (3.1.1). Qualquer quádrlica que toca tangencialmente $\bar{\pi}$ em O encontra Φ_0 em uma curva quártica c_4 com um nó em O e sem perda de generalidade, podemos supor que c_4 intersecta os λ -geradores em 2 pontos e os μ -geradores em outros 2 pontos, logo pelo teorema (3.2.1) tem-se que c_4 é representada

no plano de representação π de Φ_0 por uma curva quártica através dos pontos duplos A, B, O' , ou seja, uma curva de $C^4(A^2, B^2, O'^2)$.

Portanto, o sistema linear $(L) = C^4(A^2, B^2, O'^2)$ de curvas em π correspondente a interseção de Φ_0 com superfícies quádricas as quais tem os mesmos pontos múltiplos e as mesmas curvas múltiplas de Φ_0 é composto por curvas quárticas com nós em A, B, O' . Vamos fazer agora um cálculo de dimensão do sistema linear (L) : sabemos que a dimensão das curvas quárticas em π é $\binom{2+4}{2} - 1 = 14$, mas a condição das curvas terem nó, por exemplo, no ponto A impõe três condições- uma de passar pelo ponto e as outras duas condições são para que as curvas possuam retas tangentes distintas- e assim os três pontos A, B, O' impõem um total de 9 condições no sistema linear (L) , e conseqüentemente (L) tem dimensão 5. Em particular, (L) não é um sistema homaloidal em π .

De acordo com o método de Cremona precisamos reduzir o sistema linear (L) a um sistema homaloidal (L^*) por impor três pontos bases, digamos C', D', E' . Dessa forma, as superfícies quádricas que tocam tangencialmente $\bar{\pi}$ em O terão adicionalmente três pontos base C, D, E correspondentes aos pontos C', D', E' , respectivamente, formando um sistema linear Φ que pela proposição (3.2.1) é um sistema homaloidal.

Vamos agora estudar propriedades do sistema homaloidal Φ .

Lema 3.2.2. *Os elementos fundamentais de Φ são:*

1. *Três feixes de cônicas que tocam tangencialmente o plano de contato $\bar{\pi}$ em O e passam através de dois dos pontos C, D, E ;*
2. *Um feixe de retas através de O pertencentes ao plano $\bar{\pi}$.*

Demonstração. Vamos demonstrar o primeiro item. Seja Υ um dos três feixes de cônicas que tocam tangencialmente o plano $\bar{\pi}$ em O e passam através de C, D . Uma superfície de Φ encontra qualquer cônica c_2 de Υ em quatro pontos base de Φ - C, D são dois desses pontos e O é o outro ponto com multiplicidade dois- donde segue que c_2 impõe apenas uma condição nas Φ -quádricas para conter c_2 . Logo, c_2 é um elemento fundamental de Φ . Com o mesmo argumento prova-se que os outros dois feixes são fundamentais.

Para o segundo caso, basta perceber que qualquer reta no plano $\bar{\pi}$ passando por O é uma reta que toca O com multiplicidade 2. □

Claramente, as curvas de Φ são curvas quárticas com nó em O e passando através dos pontos C, D, E . Portanto, as Ψ -superfícies tem grau 4 de acordo com a proposição (3.2.2).

Teorema 3.2.4. *O lugar de base do sistema inverso Ψ é composto por uma cônica k correspondente ao feixe de retas em Φ passando através de O e que se encontra em $\bar{\pi}$, e adicionalmente por três retas duplas c, d, e correspondentes aos três feixes de cônicas fundamentais do lema (3.2.2).*

Demonstração. Sejam Ω o feixe de retas em $\bar{\pi}$ passando através do ponto O e ϕ uma quádrlica de Φ . Temos que a interseção $T_p(\phi) \cap \phi$ são duas retas e que pertencem à Ω , ou seja, cada quádrlica de Φ contem duas retas de Ω . Portanto, os pontos de \mathbb{P}^3 correspondentes as retas de Ω formam uma cônica base isolada de Ψ , digamos k .

Considere agora Υ um dos três feixes de cônicas, digamos que seja o feixe de cônicas passando pelos pontos C, D e tendo O como nó. Sabemos que o lugar de base de Ψ será uma curva l' . Vamos calcular o seu grau: notemos que esse feixe de cônicas se encontra no plano gerado pelos pontos O, C, D o qual denotamos por $[O, \overline{CD}]$ e assim cada quádrlica de Φ encontra-o em apenas uma cônica de Υ , e conseqüentemente o grau de l' será 1, ou seja, a curva l' é uma reta. O mesmo cálculo na equação (3.6) do teorema (3.2.3) mostra que a reta l' é dupla.

□

Corolário 3.2.3. *Com as mesmas notações do teorema (3.2.4) tem-se que cada uma das retas duplas c, d, e encontra a cônica k em um ponto.*

Demonstração. Sejam $[O, \overline{CD}]$, $[O, \overline{CE}]$, $[O, \overline{ED}]$ os três planos nos quais os três feixes de cônicas pertencem, respectivamente. Desde que cada um dos planos em questão encontra $\bar{\pi}$ em uma E -reta (uma reta de Υ), segue que cada uma das retas c, d, e encontram a cônica k em um ponto.

□

Corolário 3.2.4. *As Ψ -curvas são cônicas encontrando c, d, e, k .*

Demonstração. Segue da proposição (3.2.2).

□

3.2.4 As três Classes de Transformações Birracionais em \mathbb{P}^3 dadas por Quádrlicas

Para finalizar o estudo das transformações de Cremona em \mathbb{P}^3 dadas por quádrlicas, dedicaremos esta subseção a prova de que só existem as três classes de transformações de Cremona estudadas neste capítulo, a saber: a classe das transformações T_{22} ; a classe das transformações T_{23} ; a classe das transformações T_{24} . Para este fim, vamos iniciar a subseção definindo alguns conceitos e estabelecendo notações .

Definição 3.2.1. Sejam \mathcal{A}_2 o espaço vetorial dos polinômios quadráticos em $\mathbb{C}[x_0, x_1, x_2, x_3]$ e \mathcal{H} o conjunto dos subespaços M de dimensão 4 de \mathcal{A}_2 tais que

$$\phi_M : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}(M^\vee), \quad x \dashrightarrow \{f \in M \mid f(x) = 0\} \quad (3.7)$$

é birracional (M^\vee denota o dual de M).

Para um esclarecimento do conjunto \mathcal{H} seja $M \in \mathcal{H}$. Então as aplicações birracionais associadas a M são as aplicações $x \rightarrow [\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3]$, onde $(\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3)$ é uma base de M^\vee .

Definição 3.2.2. Sejam C, D, H respectivamente uma cônica, uma reta, um plano de \mathbb{P}^3 e seja p um ponto de H . Definimos os conjuntos

$$\mathcal{A}_2[C] := \{f \in \mathcal{A}_2 \mid V(f) \text{ contem } C\},$$

$$\mathcal{A}_2[D] := \{f \in \mathcal{A}_2 \mid V(f) \text{ contem } D\},$$

$$\mathcal{A}_2[p^H] := \{f \in \mathcal{A}_2 \mid V(f) \text{ contem } p \text{ e é tangente a } H \text{ em } p\};$$

onde $V(f)$ denota a superfície $f = 0$.

Mais precisamente, se a cônica C é definida como a interseção de uma quádrlica de equação $q = 0$ com um plano de equação $l = 0$, o fato de $f \in \mathcal{A}_2[C]$ significa que f pertence ao ideal gerado por q e l uma vez que $V(f)$ contem C (é usado a correspondência entre ideais e variedades). O significado de $\mathcal{A}_2[D]$ é claro. Para esclarecer o significado do conjunto $\mathcal{A}_2[p^H]$ podemos escolher $p = (1 : 0 : 0 : 0)$ e o plano H de equação $x_3 = 0$. Se $f \in \mathcal{A}_2[p^H]$, então a condição de $V(f)$ conter p e ser tangente a H em p implica que f pode ser escrito como

$$f = \alpha x_0 x_3 + h(x_1, x_2, x_3),$$

com $\alpha \in \mathbb{C}$ e h um polinômio homogêneo de grau 2.

Definição 3.2.3. Seja $V \subset \mathcal{A}_2$ um subespaço vetorial. Denotamos por $\mathcal{H}(V)$ o conjunto dos subespaços M de V que pertencem a \mathcal{H} . Então colocamos

$$\mathcal{H}^I := \bigcup_C \mathcal{H}(\mathcal{A}_2[C]), \quad \mathcal{H}^{II} := \bigcup_D \mathcal{H}(\mathcal{A}_2[D]), \quad \mathcal{H}^{III} := \bigcup_{p \in H} \mathcal{H}(\mathcal{A}_2[p^H]).$$

e enfim, se \mathcal{A}_1 denota o espaço das formas lineares em \mathbb{C}^4 , então definimos

$$\mathcal{H}^0 = \{l\mathcal{A}_1 | l \in \mathcal{A}_1\},$$

que é o conjunto dos $M \in \mathcal{H}$ tal que ϕ_M é linear. Finalmente vamos para a proposição que fornece condições para concluirmos que só há três casos genéricos de transformações de Cremona em \mathbb{P}^3 dada por quádricas. A demonstração dessa proposição será sucinta e para mais detalhes ver em [4].

Teorema 3.2.5. *Vale a igualdade*

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^I \cup \mathcal{H}^{II} \cup \mathcal{H}^{III}$$

Demonstração. É fácil ver que $\mathcal{H}^0 \subset \mathcal{H}^I \cap \mathcal{H}^{II} \cap \mathcal{H}^{III}$. Agora, dado $M \in \mathcal{H} - \mathcal{H}^0$ vamos mostrar que ou $M \in \mathcal{H}^I$ ou $M \in \mathcal{H}^{II}$ ou $M \in \mathcal{H}^{III}$. Passa isso, sejam q, q' duas quádricas genéricas de M . Assim, a interseção $q \cap q'$ é composta da transformada estrita B por ϕ_M^{-1} de uma reta genérica e uma curva efetiva B_0 que não depende de M e seu suporte está contido no conjunto base $Base(M)$ dos pontos base de M . Além disso, a curva B é racional irreduzível de grau 2, 3 ou 4.

Se $deg B = 2$ (isto é, uma cônica suave), segue que B_0 é a interseção de uma quádrica com um plano. De fato, sem perda de generalidade, podemos supor que B é definido pelas equações $q = 0 = x_3$ e como já temos $B \subset q'$ segue que q' pertence ao ideal gerado por q e x_3 . Portanto, existe $l \in \mathcal{A}_1$ e $\alpha \in \mathbb{C}$ tais que $q' = \alpha q + x_3 l$ e por fazer $q = q' = 0$ com $x_3 \neq 0$ encontramos que B_0 é definido pelas equações $q = l = 0$. Logo, $M \in \mathcal{H}^I$.

Se $deg B = 3$ (isto é, uma cúbica reversa), então segue imediatamente que B_0 é uma reta, e portanto $M \in \mathcal{H}^{II}$.

Se $deg B = 4$, segue que $B_0 = 0$ e $Base(M)$ é finito não-vazio. Observemos que neste caso a quádrica $q = 0$ é suave: do contrário, isto é, se existe um ponto múltiplo $P_0 \in q$ segue do teorema de Bertini que P_0 é um ponto base de M . Logo, cada elemento de M define um cone com um vértice fixo ($P \in f \implies \overline{P_0 P} \in f, \forall P \in f, f \in M$) e ϕ_M não seria dominante². Agora considere o sistema linear cortado por M na quádrica lisa q em que um elemento genérico é uma quártica racional irreduzível que possui portanto um ponto duplo, e novamente, segundo o teorema de Bertini, este ponto é fixo e conseqüentemente, $M \in \mathcal{H}^{III}$. \square

Proposição 3.2.9. *Seja $\Phi : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$ uma transformação birracional de grau d . Suponha que ϕ^{-1} é dada por polinômios homogêneos de grau d' , mais precisamente*

$$\phi^{-1} = [\psi_0, \psi_1, \psi_2, \psi_3],$$

²Uma aplicação dominante é uma aplicação com imagem densa, na topologia de Zariski.

onde os polinômios ψ_i tem grau d' . Então, o $\deg(\phi^{-1})$ também é igual ao grau da imagem recíproca por ϕ de uma reta genérica.

Demonstração. Seja ψ uma superfície qualquer de grau d' . Então, por definição, o grau de ϕ^{-1} é

$$d' = \psi.l = H.\phi^{-1}(l),$$

onde l é uma reta genérica e a igualdade $H = \phi^{-1}(\psi)$ segue de como é definida a aplicação ϕ^{-1} . \square

Corolário 3.2.5. *Nas mesmas hipóteses da proposição (3.2.9) vale a desigualdade*

$$\deg(\phi^{-1}) \leq (\deg\phi)^2 \quad (3.8)$$

Demonstração. Pela proposição (3.2.9) sabemos que o grau de ϕ^{-1} é igual ao grau de S , imagem recíproca por ϕ de uma reta genérica, e segundo o início da demonstração do teorema (3.2.5) segue que o grau de S pode ser 2, 3, ou 4. \square

Notação: Vamos usar $\mathcal{H}^{2,e}$ para denotar o conjunto dos $M \in \mathcal{H}$ tal que ϕ_M é de grau 2 e sua inversa de grau e .

Da demonstração do teorema (3.2.5) segue que

$$\mathcal{H} = \mathcal{H}^0 \cup \mathcal{H}^{2,2} \cup \mathcal{H}^{2,3} \cup \mathcal{H}^{2,4} \quad (\text{união disjunta}) \quad e \quad (3.9)$$

$$\mathcal{H}^{2,2} \subset \mathcal{H}^I, \quad \mathcal{H}^{2,3} \subset \mathcal{H}^{II}, \quad \mathcal{H}^{2,4} \subset \mathcal{H}^{III}.$$

Isso deixa claro a existência de apenas três classes de transformações de Cremona de \mathbb{P}^3 dadas por quádricas como mencionado no início desta seção no qual: a primeira classe, segundo a demonstração do teorema (3.2.5), é composta pelas transformações T_{22} (ou o sistema de quádricas associado) as quais são determinadas por possuírem uma cônica em seu lugar de base; a segunda classe, segundo a demonstração do teorema (3.2.5), é composta pelas transformações T_{23} as quais são determinadas por possuírem uma reta em seu lugar de base; a terceira classe, segundo a demonstração do teorema (3.2.5), é composta pelas transformações T_{24} as quais são determinadas por possuírem um ponto duplo em seu lugar de base.

Em [4] é classificado todas as transformações birracionais para cada uma das três classes.

3.3 Transformação de Cremona dada por superfícies Cúbicas

Como explicado no método para encontrar sistemas homaloidais, a superfície fixa Φ_0 é de grau n e não necessariamente de grau dois como foi utilizado em todos os casos acima, contudo, a dificuldade de determinar a representação plana da superfície Φ_0 e encontrar o sistema de curvas correspondente a interseção de Φ_0 com superfícies de mesmo grau é muito maior que no caso $n = 2$. Com o intuito de ressaltar a dificuldade da representação plana da superfície fixa daremos dois exemplos quando $n = 3$.

3.3.1 A Transformação T_{33}

Esta aplicação é chamada de Transformação Cubo-Cúbica Padrão de \mathbb{P}^3 que tem uma grande variedade de casos especiais. Ela é uma transformação simétrica e cada sistema homaloidal consiste de superfícies cúbicas através de uma curva base de grau seis e de gênero 3.

Considere Φ_0 uma superfície cúbica geral em \mathbb{P}^3 . Vamos representar Φ_0 em um plano π e no teorema (3.3.1) chegaremos que a representação plana de Φ_0 será por meios de curvas cúbicas através de seis pontos base distintos. Para a representação de Φ_0 vamos precisar do seguinte lema cuja ideia da demonstração pode ser encontrada em [6].

Lema 3.3.1. *A equação homogênea geral de grau três em x_0, \dots, x_3 pode ser escrita na forma*

$$\Delta \equiv \begin{vmatrix} u_1 & v_1 & w_1 \\ u_2 & v_2 & w_2 \\ u_3 & v_3 & w_3 \end{vmatrix} = 0,$$

onde u_1, \dots, w_3 são funções homogêneas lineares de x_0, \dots, x_3 .

Proposição 3.3.1. *A superfície cúbica Φ_0 é birracionalmente equivalente a um plano π .*

Demonstração. Sendo Φ_0 dado por uma equação cúbica, pelo lema anterior podemos supor que ela é dada por $\Delta = 0$ que é equivalente a eliminação de λ, μ, ν no sistema

$$\begin{cases} \lambda u_1 + \mu v_1 + \nu w_1 = 0 \\ \lambda u_2 + \mu v_2 + \nu w_2 = 0 \\ \lambda u_3 + \mu v_3 + \nu w_3 = 0 \end{cases} \quad (3.10)$$

Desta forma, existem valores não todos nulos λ, μ, ν satisfazendo (3.10) se, e somente se, x_0, x_1, x_2, x_3 são as coordenadas de um ponto P de Φ_0 . Interpretando λ, μ, ν como sendo as coordenadas homogêneas de um ponto P' de um plano π temos que a correspondência entre P e P' é birracional. \square

Para obter as equações explícitas da representação, nós resolvemos as equações de (3.10) para as razões de x_0, x_1, x_2, x_3 obtendo a equação

$$x_0 : x_1 : x_2 : x_3 = L_0 : L_1 : L_2 : L_3,$$

onde L_0, L_1, L_2, L_3 são polinômios cúbicos em λ, μ, ν .

Logo se P descreve uma seção plana de Φ_0 , então P' descreve uma curva cúbica em π que será não singular pois as seções planas genérica de Φ_0 não são racionais e o gênero é preservado via aplicações birracionais.

Teorema 3.3.1. *As superfícies cúbicas gerais em \mathbb{P}^3 são representadas birracionalmente em um plano por meio de um sistema de curvas cúbicas através de seis pontos base $C^3(O_1, \dots, O_6)$.*

Demonstração. Podemos escrever o sistema de curvas cúbicas (L) em π pela equação

$$aL_0 + bL_1 + cL_2 + dL_3 = 0 \quad (3.11)$$

Como uma curva cúbica desse sistema representa uma seção plana de Φ_0 , dado duas curvas C_1 e C_2 de (L) tem-se duas seções planas de Φ_0 que genericamente encontram Φ_0 em 3 pontos variáveis e conseqüentemente, o sistema (L) tem grau 3. Isso implica que as curvas cúbicas de (L) passam através de seis pontos bases distintos O_1, \dots, O_6 em posição geral de π . Reciprocamente, se temos um sistema similar ao de (3.11) no plano π segundo a correspondência birracional estabelecida na proposição (3.3.1) então representa seções planas de uma superfície cúbica no espaço \mathbb{P}^3 . \square

Corolário 3.3.1. *Uma curva arbitrária Γ de Φ_0 pode ser representada em π por uma curva $C^m(O_1^{k_1}, O_2^{k_2}, \dots, O_6^{k_6})$ no qual a ordem n e o gênero ρ da curva Γ são dados por*

$$n = 3m - \sum_1^6 k_i, \quad \rho = \frac{1}{2}(m-1)(m-2) - \frac{1}{2} \sum_{i=1}^6 k_i(k_i-1). \quad (3.12)$$

Demonstração. Como Γ pertence a superfície Φ_0 a ordem desta curva Γ será $n = 3m - \sum_1^6 k_i$. Já o gênero ρ é preservado. \square

De acordo com o método de Cremona vamos usar a representação de Φ_0 do teorema (3.3.1) para estabelecer a existência das transformações T_{33} . Para isso, segundo o corolário (3.3.1) temos que qualquer curva c de ordem 6 e gênero 3 em Φ_0 pode ser supostamente representada no plano π por uma curva $\bar{c} = \bar{c}^8(O_1^3, O_2^3, \dots, O_6^3)$.

Teorema 3.3.2. *As superfícies cúbicas através de c encontram residualmente Φ_0 em um sistema homaloidal de curvas cúbicas reversas representadas por retas de π .*

Demonstração. Seja ϕ uma superfície cúbica através de c . Então, genericamente teremos que a interseção residual $\phi \cap \Phi_0$ tem uma curva cúbica reversa (não está contida em um plano).

Uma vez que as superfícies cúbicas encontram Φ_0 em cúbicas reversas as quais são racionais e a superfície Φ_0 é birracionalmente equivalente a um plano π segue da definição de curva racional (uma curva é racional se ele é birracionalmente equivalente a uma reta) que tais curvas cúbicas reversas correspondem a retas do plano π . Como essas retas do plano π correspondentes as curvas cúbicas de Φ_0 formam um sistema homaloidal segue que as superfícies cúbicas através de c encontram Φ_0 em um sistema homaloidal de curvas cúbicas reversas. \square

Corolário 3.3.2. *Seja Φ o sistema de superfícies cúbicas através de c . Então Φ é um sistema homaloidal.*

Demonstração. O resultado segue do teorema (3.3.2) e da proposição (3.2.1). \square

Proposição 3.3.2. *Nesse momento enumeremos algumas propriedades do sistema Φ .*

1. *A curva c é o lugar de base do sistema Φ ;*
2. *As Φ -curvas de Φ são curvas cúbicas reversas;*
3. *As Φ -curvas encontram a curva c em 8 pontos;*
4. *As superfícies de Φ contém 6 retas trissecantes de c ;*
5. *As retas trissecantes de c são os elementos fundamentais de Φ_0 que se transformam em pontos da curva base c' de Ψ .*

Demonstração. Os itens (1) e (2) seguem diretamente da construção do sistema Φ . Vamos então demonstrar o item (3). Seja C^3 uma Φ -curva. Segundo a representação de Φ no plano π e a da curva c em uma curva \bar{c} tem-se que

$$\#(C^3 \cap c) = \#(l \cap \bar{c}) = 8,$$

onde l é a reta em π correspondente a cúbica reversa C^3 . Isto conclui o item (3).

Para o item (4) é suficiente perceber que se O é um dos 6 pontos de multiplicidade 3 da curva \bar{c} , então é porque ele é imagem de uma reta trissecante a c via a representação de Φ_0 no plano π .

Por fim, o item (5). Sendo r umas das 6 retas trissecantes a c , uma superfície cúbica de Φ já intersecta r em três pontos por conter c e portanto, a reta r impõe apenas uma condição nas superfícies cúbicas requeridas para conter r , ou seja, toda a reta r é enviada em um único ponto da curva base c' de Ψ . \square

Para concluir a análise desse tipo de transformação vamos analisar o sistema inverso o qual denotaremos por Ψ . Em analogia ao procedimento feito para determinar o sistema Φ escolha uma superfície cúbica genérica Ψ_0 através de uma curva c' de grau 6 e gênero 3. Teremos então que o sistema Ψ será formado por superfícies cúbicas através da curva c' . Similarmente ao caso do sistema Φ temos adicionalmente que as Ψ -curvas encontram c' em 8 pontos.

3.3.2 A Transformação T_{33}^*

Seja Φ_0 uma superfície cúbica em \mathbb{P}^3 com quatro nós. Sem perda de generalidade podemos supor que esses nós são

$$X = (1 : 0 : 0 : 0), Y = (0 : 1 : 0 : 0), Z = (0 : 0 : 1 : 0), T = (0 : 0 : 0 : 1).$$

Agora consideremos Φ consistindo de superfícies cúbicas com nós em X, Y, Z, T e consequentemente, contendo os seis segmentos de reta ZT, XT, YT, ZY, ZX, XY pois, por exemplo, o segmento ZT intersecta cada superfície de Φ em quatro pontos- dois pontos em Z e dois em T - e pelo teorema de Bézout segue a afirmação.

Segundo a escolha dos quatro nós o sistema Φ pode ser escrito como

$$\Phi \equiv \lambda_0 yzt + \lambda_1 xzt + \lambda_2 xyt + \lambda_3 xyz = 0 \quad (3.13)$$

Corolário 3.3.3. *Derivado do sistema (3.13) temos a transformação de Cremona*

$$T(x, y, z, t) = (yzt, xzt, yxt, yzx) \quad (3.14)$$

Observação 3.3.1. Note que a transformação T acima é justamente a transformação de Cremona do exemplo (1.1.7) do primeiro capítulo.

Proposição 3.3.3. *Algumas propriedades da transformação T são:*

1. O lugar de base da transformação T são as retas

$$x = y = 0, x = z = 0, x = t = 0, z = y = 0, t = y = 0, y = z = 0$$

2. Os elementos fundamentais de T são os planos

$$x = 0, y = 0, z = 0, t = 0$$

que são enviados, respectivamente, nos pontos X', Y', Z', T' .

Demonstração. Segue da análise direta da transformação T . □

Teorema 3.3.3. *A transformação de Cremona T de (3.14) aplica todas as retas de \mathbb{P}^3 em curvas cúbicas através de quatro pontos fixos e reciprocamente.*

Demonstração. Primeiro vemos que no aberto $\{x \neq 0\} \cap \{y \neq 0\} \cap \{z \neq 0\} \cap \{t \neq 0\}$ a transformação T coincide com

$$T(x, y, z, t) = \left(\frac{1}{x}, \frac{1}{y}, \frac{1}{z}, \frac{1}{t} \right)$$

e se P descreve uma reta cuja equação paramétrica é

$$(x, y, z, t) = (a_1 : a_2 : a_3 : a_4) + \lambda(b_1 : b_2 : b_3 : b_4) = (a_1 + \lambda b_1 : a_2 + \lambda b_2 : a_3 + \lambda b_3 : a_4 + \lambda b_4)$$

então P' descreve a cúbica reversa dada pela equação

$$\begin{aligned} (x', y', z', t') &= \left((a_1 + \lambda b_1)^{-1} : (a_2 + \lambda b_2)^{-1} : (a_3 + \lambda b_3)^{-1} : (a_4 + \lambda b_4)^{-1} \right) \\ &= \left((a_2 + \lambda b_2)(a_3 + \lambda b_3)(a_4 + \lambda b_4) : \dots : (a_2 + \lambda b_2)(a_3 + \lambda b_3)(a_1 + \lambda b_1) \right) \end{aligned}$$

Além disso, encontramos que os quatro pontos fixos são

$$\lambda = -\frac{a_1}{b_1}, \lambda = -\frac{a_2}{b_2}, \lambda = -\frac{a_3}{b_3}, \lambda = -\frac{a_4}{b_4}.$$

□

CAPÍTULO 4

Transformações de Cremona em \mathbb{P}^4 dadas por Quádricas

Neste capítulo vamos dar início ao estudo das transformações de Cremona no espaço linear projetivo \mathbb{P}^4 tendo como objetivo determinar e classificar a transformação de Cremona dada por um H sistema de quádricas através de uma curva quártica elíptica, determinando o grau de sua inversa que tem como lugar de base uma superfície regrada de grau 5. Além disto, estudaremos como adaptar o método de Cremona visto no Capítulo 3 para situações mais gerais.

Um teorema que apenas enunciaremos e que será de grande importância para podermos estabelecer o método geral no espaço linear projetivo \mathbb{P}^4 , pode ser encontrado em [6], nos diz que

Teorema 4.0.4. *Se $r - k$ hipersuperfícies de mesmo grau $F_1 = 0, \dots, F_{r-k} = 0$ em \mathbb{P}^r se intersectam em uma subvariedade de dimensão k sem pontos múltiplos, então toda hipersuperfície desta ordem através desta subvariedade tem uma equação da forma*

$$\lambda_1 F_1 + \dots + \lambda_{r-k} F_{r-k} = 0$$

4.1 As Transformações Quádricas T_{23} através de uma Curva Quíntica Elíptica c_5 em \mathbb{P}^4

Vamos considerar o espaço linear projetivo \mathbb{P}^4 . Sejam três quádricas próprias Q_1, Q_2 e Q_3 em \mathbb{P}^4 as quais tem uma curva cúbica c_3 em comum. A interseção destas três quádricas tem dimensão 1, grau 8 e tem c_3 em comum o que implica que $Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3$ contem uma curva quíntica c_5 . Tomando a projeção de c_5 a partir de um ponto de si mesma teremos uma curva quártica c_4 em \mathbb{P}^3 . Novamente, projetando c_4 de um ponto de si mesma vamos obter uma curva cúbica no plano e esta é elíptica ou racional. Como essas projeções são aplicações birracionais podemos concluir que c_5 em \mathbb{P}^4 deve ser elíptica ou racional. Neste caso, c_5 não pode ser racional. Ver [6], página 333.

Teorema 4.1.1. *As curvas c_5 e c_3 se encontram em cinco pontos os quais pertencem a um hiperplano.*

Demonstração. Uma vez que c_3 é uma curva cúbica racional ela pode ser vista em \mathbb{P}^3 e chamando $Q'_i = Q_i \cap \mathbb{P}^3, i = 1, 2, 3$ estas Q'_i serão superfícies quádricas através de c_3 e que necessariamente não contem c_5 . Estas superfícies não tem ponto adicional em comum visto que a interseção de quaisquer duas dessas superfícies tem grau 4 e assim, é composta pela curva cúbica c_3 união uma reta a qual intersectará a terceira superfície quádratica em dois pontos os quais estão em c_3 . Como c_5 e c_3 formam a interseção completa de $Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3$ temos que

$$(c_3 \cup c_5) \cap \mathbb{P}^3 = (Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3) \cap \mathbb{P}^3 = c_3$$

Portanto,

$$c_3 \cup \{P_1, \dots, P_5\} = c_3$$

ou seja, os cinco pontos P_1, \dots, P_5 os quais a curva c_5 encontra \mathbb{P}^3 pertencem à c_3 e segue que c_5 encontra c_3 em apenas cinco pontos. \square

Vamos analisar agora o sistema linear de quádricas de \mathbb{P}^4 que contém uma curva quíntica c_5 que denotaremos por Φ . Notemos que o sistema Φ é um subespaço vetorial do espaço de Riemann Roch

$$L(Q) = \{f \in k(\mathbb{P}^4) \mid \text{div}(f) + Q \geq 0\},$$

onde a quádrica Q é uma subvariedade irredutível de codimensão 1, um divisor.

Teorema 4.1.2. *O subespaço vetorial Φ é um H sistema de dimensão 4.*

Demonstração. Como c_3 e c_5 tem cinco pontos em comum, uma quádrlica que já contém c_5 requer apenas duas condições para conter c_3 . Desde que as duas curvas c_3 e c_5 formam a interseção completa das quádrlicas Q_1, Q_2 e Q_3 (c_3 é a curva residual) segundo o teorema (4.0.4) com $r = 4, k = 1$ deve existir uma família de quádrlicas passando através da interseção $Q_1 \cap Q_2 \cap Q_3$ com equação

$$\lambda_1 Q_1 + \lambda_2 Q_2 + \lambda_3 Q_3 = 0$$

Assim, olhando para as quádrlicas de Φ , apenas através de c_5 , a liberdade destas quádrlicas deve ser 4 e então $\Phi \subset L(Q)$ tem dimensão 4. Além disso tendo grau 8, segundo o teorema de Bézout quaisquer três quádrlicas de Φ se encontram residualmente em uma curva cúbica c'_3 encontrando c_5 em cinco pontos. Notemos que dadas três quádrlicas em Φ , digamos Q_i, Q_j, Q_k verificamos que a interseção residual obedece

$$(Q_i \cap Q_j \cap Q_k) \cap Q_l = c'_3 \cap Q_l$$

cujas interseções são seis pontos dos quais cinco estão em c_5 . Concluimos então que quaisquer quatro quádrlicas de Φ encontram-se no lugar de base de Φ unindo um único ponto P , onde $P \in \mathbb{P}^4$. Logo, Φ é um H sistema como desejávamos mostrar. \square

Observação 4.1.1. Quando é dito impor uma condição a um sistema significa que vamos restringir esse sistema aos elementos que devem passar adicionalmente por um ponto fixo. Claramente, cada condição imposta reduz-se em 1 na dimensão do sistema.

Naturalmente, vamos agora analisar a transformação de Cremona associada ao H sistema Φ que obtemos por particularizar o caso visto em (1.17) com $n = 4$. Segundo a transformação de Cremona associada, que vamos denotar por T , representamos as quádrlicas do subespaço vetorial de dimensão 4, Φ , nos hiperplanos de um $\mathbb{P}^{4'}$ estabelecendo assim uma correspondência 1-1 entre os pontos de \mathbb{P}^4 e $\mathbb{P}^{4'}$.

Observação 4.1.2. *Neste caso, uma Φ -curva é uma curva cúbica encontrando c_5 em 5 pontos.*

Como "recíproca" da observação acima temos a

Proposição 4.1.1. *Se c_3 é uma curva cúbica reversa encontrando c_5 em cinco pontos, então c_3 é uma Φ -curva.*

Demonstração. Como c_3 é uma cúbica reversa então ela tem equações em um espaço projetivo \mathbb{P}^3

$$x_0 : x_2 : x_2 : x_3 = \lambda^3 : \lambda^2 : \lambda : 1.$$

Desde que as coordenadas de qualquer ponto de c_3 satisfazem as equações

$$\frac{x_0}{x_1} = \frac{x_1}{x_2} = \frac{x_2}{x_3}$$

c_3 se encontra em cada uma das quádricas

$$Q_1 \equiv x_1^2 - x_0x_2 = 0,$$

$$Q_2 \equiv x_1x_2 - x_0x_3 = 0, \quad Q_3 \equiv x_2^2 - x_1x_3 = 0.$$

□

Nesse momento vamos analisar o sistema associado a inversa da transformação de Cremona, intuitivamente chamado de Sistema Inverso. Começamos com o seguinte resultado:

Proposição 4.1.2. *A transformação de Cremona inversa T^{-1} é dada por um sistema linear de hipersuperfícies cúbicas, ou seja, T^{-1} tem grau 3. Além disso, essas hipersuperfícies cúbicas podem ser representadas por meio de quádricas em Φ .*

Demonstração. Primeiro vamos mostrar que a inversa da transformação de Cremona é dada por um sistema linear de hipersuperfícies cúbicas. Para isso, observemos que os pontos de qualquer hiperplano $M \simeq \mathbb{P}^3$ de \mathbb{P}^4 correspondem a pontos de uma hipersuperfície V e fazendo a interseção de uma reta l de $\mathbb{P}^{4'}$ com V ela corresponde a interseção de M com a Φ -curva cúbica correspondente a l em \mathbb{P}^4 , e temos que V tem grau 3.

Portanto, ao sistema de hiperplanos de \mathbb{P}^4 corresponde um subespaço vetorial de

$$L(S) = \{f \in k(\mathbb{P}^{4'}) \mid \text{div}(f) + S \geq 0\},$$

onde S é uma hipersuperfície cúbica, e conseqüentemente esse subespaço formado por hipersuperfícies cúbicas de $\mathbb{P}^{4'}$ é de dimensão 4. Vamos denotar esse subespaço vetorial por Ψ .

Há uma correspondência 1-1 entre os pontos de uma hipersuperfície V de Ψ e os pontos do hiperplano correspondente M pois mostramos a existência de uma correspondência birracional entre os pontos de \mathbb{P}^4 e $\mathbb{P}^{4'}$ e por considerar seções de V por hiperplanos tem-se seções de M por quádricas de Φ . □

Vimos que as quádricas de Φ encontram um espaço projetivo $M \simeq \mathbb{P}^3$ em superfícies quadráticas as quais tem em comum os cinco pontos os quais M encontra a curva c_5 e é por meio destas superfícies quádricas que V é representado em M .

Mas uma hipersuperfície cúbica em \mathbb{P}^4 representada em um espaço de dimensão três por meio de quádricas através de cinco pontos é conhecida como hipersuperfície de Segre com 10 nós. Ver no capítulo 2 a variedade cúbica de Segre.

Observação 4.1.3. Quando um lugar geométrico V é representado em um espaço plano M , de modo que as seções hiperplanas de V são representadas por meio de um certo sistema de hipersuperfícies de M dizemos então que a representação é por meio destas hipersuperfícies.

Continuando a análise do sistema inverso, dois hiperplanos de \mathbb{P}^4 encontram-se em um plano que corresponde em \mathbb{P}^4 a superfície de interseção de duas hipersuperfícies de Ψ a qual chamamos de Ψ -superfície. A primeira vista poderíamos pensar que uma Ψ -superfície tem grau 9 o que não é verdade.

Com efeito, dado um hiperplano H e uma Ψ -superfície S os pontos da seção $H \cap S$ correspondem aos pontos onde uma quádrica ϕ de Φ encontra um plano π de \mathbb{P}^4 correspondente a Ψ -superfície S donde obtemos uma das cônicas C de um sistema linear de dimensão 4 no plano π . Na sequência, sendo H' um outro hiperplano de \mathbb{P}^4 tem-se que

$$\alpha \cap S = H' \cap (H \cap S) \mapsto \phi' \cap (\phi \cap \pi) = (\phi' \cap \pi) \cap (\phi \cap \pi) = C \cap C'$$

sendo α o plano residual da interseção dos hiperplanos H e H' , e C' uma outra cônica em π . Portanto, uma Ψ -superfície é de ordem 4 e é uma superfície de Veronese Projetada e toda Ψ -superfície é deste tipo.

Por definição sabemos que uma hipersuperfície de Ψ está correspondendo a um hiperplano em \mathbb{P}^4 e conseqüentemente, quaisquer duas hipersuperfícies de Ψ estarão correspondendo a um plano e pelo que acabamos de ver, estas se intersectarão em uma Ψ -superfície quártica que residualmente intersecta em uma superfície quártica F_2^5 . Acabamos de mostrar:

Proposição 4.1.3. *Uma Ψ -superfície tem grau 4 e conseqüentemente, todas as hipersuperfícies de Ψ tem uma superfície quártica F_2^5 em comum.*

Corolário 4.1.1. *No sistema inverso Ψ , as Ψ -curvas são cônicas.*

Demonstração. Para uma Ψ -curva, sua interseção com um hiperplano será igual a interseção de l com uma Φ -quádrica e assim uma Ψ -curva tem ordem 2, ou seja, as Ψ -curvas são cônicas. \square

4.1.1 Vizinhanças dos Pontos no Lugar de Base c_5 de T

Na seção de pré-requisitos analisamos o comportamento de um lugar geométrico que continha um ponto base de T . Em analogia a este caso, vamos estudar o comportamento de um lugar geométrico em \mathbb{P}^4 contendo um ponto base do sistema Φ .

Considere todas as direções através de um ponto dado P de c_5 . Essas direções requerem uma condição para que uma quádriga de Φ toque tangencialmente qualquer reta através de P e dizemos assim que a quádriga contém a direção desta reta em P . Lembremos que um plano em \mathbb{P}^4 é dado por duas equações, ou seja, um sistema

$$\begin{cases} a_0x_0 + a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0 \\ b_0x_0 + b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = 0 \end{cases}$$

e impondo a condição de este plano passar através da reta tangente a c_5 em P , digamos l_p , ou equivalentemente através de dois pontos dessa reta que sem perda de generalidade podemos supor $q_0 = (1 : 0 : 0 : 0 : 0)$ e $q_1 = (0 : 1 : 0 : 0 : 0)$ concluímos que há uma família a dois parâmetros de planos através de l_p de equações

$$\begin{cases} a_1x_1 + a_2x_2 + a_3x_3 + a_4x_4 = 0 \\ b_1x_1 + b_2x_2 + b_3x_3 + b_4x_4 = 0 \end{cases}$$

e sem perda de generalidade, podemos supor que a_1 e b_2 sejam não nulos e então podemos tomar $a_1 = b_2 = 1$ tendo as equações dos planos

$$\begin{cases} x_2 + a_4x_4 = 0 \\ x_3 + b_4x_4 = 0 \end{cases} \quad (4.1)$$

Isso mostra que existe uma família a dois parâmetros de planos passando através da reta tangente a c_5 em P .

Agora, quádrigas de Φ necessariamente tocam l_p e com a condição adicional de satisfazer a equação do plano tangente a ela em P essas quádrigas tocam tangencialmente qualquer plano através de l_p e desta forma todas as direções através de P que estão em um mesmo plano impõem a mesma condição linear nas quádrigas de Φ de modo que correspondem ao mesmo ponto em $\mathbb{P}^{4'}$. Existindo uma família a dois parâmetros de planos através de l_p os pontos de $\mathbb{P}^{4'}$ que correspondem as vizinhanças de P também encontram-se na interseção de planos e portanto formam uma superfície ω .

Para calcular o grau dessa superfície ω , dado qualquer Φ -superfície S ela passa através de c_5 e toca tangencialmente em apenas um dos planos através de l_p , logo determinando

um único plano e conseqüentemente o plano de $\mathbb{P}^{4'}$ correspondente a ϕ intersectará ω em apenas um ponto, ou seja, ω tem grau 1 e portanto é um plano.

Proposição 4.1.4. *Os planos a dois parâmetros através da reta tangente l_p são homogêrficos com os pontos correspondentes de ω .*

Demonstração. Primeiramente vamos mostrar que os planos através de l_p correspondem a pontos de uma reta de ω . Para isso, observemos que todos os planos através da tangente l_p estão no hiperplano dado por esta reta tangente l_p . Esse hiperplano só é tocado tangencialmente por uma quádrlica de Φ , digamos σ , do contrário teria que uma Φ -superfície encontraria em mais de um plano através da tangente l_p . Daí, o hiperplano correspondente a σ em $\mathbb{P}^{4'}$ encontra ω em uma reta, logo todos os planos através de l_p correspondem a pontos de uma reta em ω e sendo

$$X + bY + cZ = 0 \tag{4.2}$$

a equação dessa reta no plano ω temos que a relação

$$(a_4, b_4) \longmapsto (-ba_4 - cb_4, a_4, b_4),$$

com a_4, b_4 satisfazendo (4.1) é a aplicação que associa biunivocamente a cada plano do sistema (4.1) um único ponto da reta (4.2) o que conclui a demonstração. \square

Com as últimas informações obtidas temos como consequência regras do comportamento de um lugar geométrico em $\mathbb{P}^{4'}$ quando fazemos um lugar geométrico em \mathbb{P}^4 conter um ponto base P da transformação de Cremona determinada pela quádrlicas de Φ : para qualquer curva passando por P e que não toca tangencialmente c_5 neste ponto a curva correspondente em $\mathbb{P}^{4'}$ encontra o plano ω na vizinhança correspondente ao ponto P ; se uma superfície passa através de P ela contém em geral uma direção de cada plano através da reta tangente a c_5 em P e assim a superfície correspondente em $\mathbb{P}^{4'}$ vai intersectar ω em uma reta; se uma hipersuperfície passa através de P ela contém em geral uma direção de cada plano através da reta tangente de modo que a hipersuperfície correspondente contém todo o plano ω .

Definição 4.1.1. Planos em um espaço de dimensão quatro cujos quatro planos gerais encontram um quinto plano, os cinco planos são ditos associados.

Proposição 4.1.5. *O conjunto dos planos que correspondem aos pontos de c_5 formam um lugar geométrico de dimensão três e ordem cinco o qual denotaremos por V_3^5 . Além disso, cinco planos de V_3^5 são associados.*

Demonstração. Como vimos, se uma curva cúbica passa através de um ponto P de c_5 , a reta correspondente em $\mathbb{P}^{4'}$ encontrará ω correspondendo a P e reciprocamente, para uma reta encontrando o plano ω a Φ -curva cúbica em \mathbb{P}^4 que corresponde a reta encontra c_5 através de um ponto P , este da forma como foi construído o plano ω . Desde que uma Φ -curva encontra c_5 em cinco pontos a reta correspondente a esta Φ -curva em $\mathbb{P}^{4'}$ encontrará cinco planos do sistema de planos correspondente a c_5 de modo que este sistema de planos forma um lugar geométrico V_3^5 de dimensão três e de ordem cinco.

Para terminar a demonstração da proposição relembremos que toda Φ -curva é uma curva cúbica e que toda curva cúbica encontra c_5 em cinco pontos pertencentes a um hiperplano. Tem-se que todas as Φ -curvas através de quatro pontos dados da c_5 , desde que eles geram um hiperplano, encontram o quinto ponto de c_5 estando no hiperplano gerado pelos quatro pontos o que implica em $\mathbb{P}^{4'}$, a reta que encontra quatro planos dados de V_3^5 intersecta um quinto plano formando assim um conjunto de cinco planos associados. \square

Corolário 4.1.2. *Dado um hiperplano Π de \mathbb{P}^4 encontrando c_5 em cinco pontos P_1, \dots, P_5 então a variedade de Segre S correspondente a Π contém os cinco hiperplanos associados de V_3^5 correspondendo aos pontos P_1, \dots, P_5 .*

Demonstração. Sejam $\omega_i, i = 1, \dots, 5$, os planos associados aos P_i 's, igual a construção do plano ω . Então Π conterá em geral uma direção através de P_i em todo plano através da reta tangente a c_5 neste ponto P_i , e portanto o grau de interseção $S \cap \omega_i$ é ≥ 3 , ou seja, $\omega_i \subset S, \forall i = 1, \dots, 5$. \square

Proposição 4.1.6. *Na verdade, a variedade de Segre S que aparece no corolário acima é gerada por todas as retas nas quais encontram quatro e portanto cinco dos planos de V_3^5 .*

Demonstração. As retas que intersectam quatro planos de V_3^5 correspondem em \mathbb{P}^4 à Φ -curvas cúbicas através dos pontos P_1, \dots, P_5 sendo que apenas uma delas intersecta Π em um ponto variável. Sabendo que quatro pontos de c_5 geram um hiperplano, considere o hiperplano gerado por quatro dos pontos P_1, \dots, P_5 e teremos apenas uma hipersuperfície cúbica de Segre do sistema Ψ , e esta será S , uma vez que os hiperplanos de \mathbb{P}^4 estão em correspondência 1-1 com as hipersuperfícies cúbicas de $\mathbb{P}^{4'}$. Como apenas uma das curvas cúbicas em Π através dos cinco pontos P_1, \dots, P_5 intersecta Π em um ponto variável podemos fazer esse ponto percorrer todo Π e simultaneamente, via a aplicação de Cremona associada, percorreremos toda a variedade de Segre S com as retas que intersectam quatro hiperplanos de V_3^5 e conseqüentemente S é gerada por estas retas. \square

Proposição 4.1.7. *A superfície F_2^5 é o lugar geométrico que corresponde as retas secantes de c_5 como também é o lugar geométrico dos pontos de interseção dos planos de V_3^5 .*

Demonstração. Qualquer reta secante l de c_5 que passa por um ponto de uma quádrlica de Φ está contida nessa quádrlica, ou seja, impõe apenas uma condição na quádrlica de Φ e todos os pontos dela devem corresponder portanto a um mesmo ponto K de $\mathbb{P}^{4'}$. Desde que l encontra todo hiperplano de \mathbb{P}^4 , K deve pertencer a todas as Ψ -hipersuperfícies, ou seja, K deve pertencer a superfície de base F_2^5 . Para a outra afirmação, basta lembrar que pelo fato da reta l intersectar c_5 em dois pontos tem-se que o ponto K correspondente a l está em dois planos de V_3^5 . \square

Teorema 4.1.3. *As retas secantes através de um ponto P de c_5 residem em um cone reto cúbico com vértice na tangente a c_5 em P e conseqüentemente, todo plano de V_3^5 encontra F_2^5 em uma curva cúbica.*

Demonstração. Considere l_P a reta tangente a c_5 em P . Primeiramente, projetamos c_5 através de l_P obtendo uma curva elíptica em $\mathbb{P}^2 = \mathbb{P}^{4-1-1}$ e seu grau será 3 já que estamos projetando uma curva de grau cinco através de uma reta tangente, logo obtemos uma curva cúbica c_3 em \mathbb{P}^2 e temos o cone reto cúbico² gerado pelos planos através da reta l_P , com geratriz c_3 e vértice l_P .

Agora mostremos que as retas secantes através do ponto P estão contidas no cone reto cúbico construído acima. Para isso, dado uma dessas retas secantes r seja P' o outro ponto no qual r encontra c_5 e tem-se que o plano β através de l_P passando por P' encontra r nos dois pontos P, P' , ou seja, $r \in \beta$. Isso significa que a reta r esta contida em um dos geradores do cone reto cúbico.

Por fim, dado um plano ω em V_3^5 pela proposição (4.1.4), sabemos que existe uma homografia entre os pontos de ω e os planos através de l_P . Como as secantes de c_5 através de P se encontram em um cone cúbico, os pontos de ω correspondente a estas cordas devem formar uma curva cúbica. \square

Proposição 4.1.8. *F_2^5 é uma superfície regradada.*

Demonstração. Quaisquer cinco planos de V_3^5 são encontrados por um sistema a um parâmetro de retas formando assim uma superfície regradada de ordem cinco³. Além disso, essa

²A definição precisa de \mathbb{P}^h -cone pode ser encontrada em J.P. Sample and L.Roth, Introduction Algebraic Geometry, pág.17.

³O cálculo da ordem da superfície regradada em questão é a quantidade de retas contidas na interseção de seis planos e pode ser vista em [6], pág. 337.

superfície regradada encontra-se em cada uma das cinco Ψ -superfícies contendo quatro dos planos. Com efeito, da proposição (4.1.6) tem-se que cada uma dessas Ψ -hipersuperfícies é gerada por todas as retas encontrando quatro dos planos de V_3^5 e simultaneamente, a superfície regradada de dimensão um a menos também está sendo gerada por essas retas. \square

Teorema 4.1.4. *Para uma hipersuperfície cúbica em \mathbb{P}^4 através de F_2^5 corresponde um hiperplano em \mathbb{P}^4 .*

Demonstração. Para demonstrarmos esse teorema vamos verificar primeiro duas afirmações.

A primeira é que dado uma reta genérica l em \mathbb{P}^4 , ela encontra cinco retas secantes de c_5 . Com efeito, ao projetarmos a curva c_5 através de l em um plano \mathbb{P}^2 obtemos uma curva c'_5 quártica elíptica plana no qual seu gênero é preservado e assim é $g = 1$. Genericamente, ao aplicarmos $g = 1$ e $d = 5$ na equação (1.12) concluímos que c'_5 terá cinco nós.

Todavia, supondo que Q_{i_0} seja um desses cinco nós significa que existem pontos P_{i_0}, P'_{i_0} em c_5 que estão no mesmo plano que passa através de l . Quando traçamos a reta s que passa por esses dois pontos tem-se que l e s estão no mesmo plano, logo se intersectam. Aplicando esse argumento para os cinco nós verificamos a afirmação.

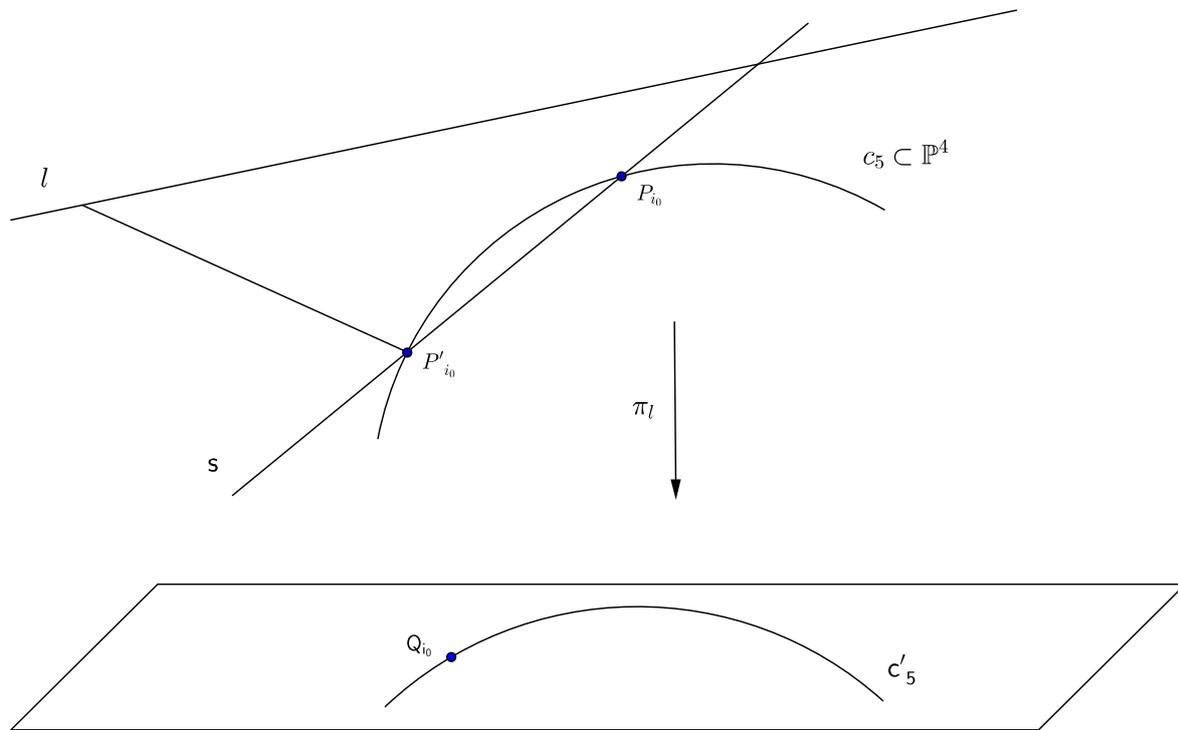


FIGURA 4.1: Projeção de c_5 segundo a reta l .

A segunda afirmação é uma consequência da primeira: as retas de \mathbb{P}^4 correspondem às cônicas de \mathbb{P}^4 que são 5-secantes de F_2^5 . Para isso, basta ver que a Ψ -curva ϕ correspondendo a uma reta l é uma cônica conforme verificado no comentário abaixo da proposição (4.1.3), e pelo fato da reta l intersectar cinco cordas de c_5 tem-se que ϕ intersecta F_2^5 em cinco pontos pois para cada uma dessas cordas corresponde um ponto de F_2^5 conforme a proposição (4.1.7).

Agora, seja S uma hipersuperfície cúbica através de F_2^5 . Temos a correspondência

$$S \cap \phi \mapsto G \cap l$$

onde G é uma hipersuperfície de \mathbb{P}^4 . Agora, pela afirmação dois tem-se que S intersectará ϕ em seis pontos dos quais cinco estão em F_2^5 , e consequentemente l intersecta G em apenas um ponto P , com P não estando no lugar de base. Portanto, G é um hiperplano. \square

Todos os resultados obtidos até o presente momento classificam a transformação de Cremona de \mathbb{P}^4 dada pelo sistema linear homaloidal de quádras através de uma curva quártica e sua inversa.

4.2 Generalização do Método de Cremona para \mathbb{P}^4

O objetivo desta seção é generalizar o procedimento empregado anteriormente para um sistema homaloïdal de quádricas qualquer, determinando os tipos de transformações de Cremona associadas aos H sistemas, encontrando suas inversas, seus lugares de base, entre outros. Para isso, vamos considerar uma dada Φ -superfície geral F e encontrar todos os H sistemas de quádricas Φ no qual F é uma Φ -superfície geral.

Pelo teorema (1.3.1), para qualquer transformação de Cremona de \mathbb{P}^4 em um outro $\mathbb{P}^{4'}$, existe um H sistema Φ de quádricas correspondendo a hiperplanos de $\mathbb{P}^{4'}$ e um H sistema Ψ de hipersuperfícies em $\mathbb{P}^{4'}$ correspondendo a hiperplanos de \mathbb{P}^4 .

Proposição 4.2.1. *Para uma transformação de Cremona $T : \mathbb{P}^4 \longrightarrow \mathbb{P}^{4'}$ valem as seguintes afirmações:*

1. Φ -curvas e Ψ -hipersuperfícies tem a mesma ordem;
2. Φ -curvas encontram Φ -quádricas residualmente em apenas um ponto;
3. Φ e Ψ -superfícies sempre tem a mesma ordem;
4. Ψ -curvas são sempre cônicas que encontram Ψ -hipersuperfícies residualmente em um ponto.

Demonstração. Para demonstrarmos o item (1), dadas ϕ uma Φ -curva e Υ uma Ψ -hipersuperfície temos a correspondência

$$\phi \cap H \longmapsto l \cap \Upsilon,$$

onde H é um hiperplano de \mathbb{P}^4 correspondente a Υ .

Para o item (2) basta notar que dado uma Φ -curva ϕ e uma quádrica Q de Φ temos a correspondência

$$\phi \cap Q \longmapsto l \cap M,$$

sendo que M é o hiperplano em $\mathbb{P}^{4'}$ correspondente a quádrica Q .

A demonstração dos itens (3) e (4) segue usando um raciocínio análogo.

□

Definição 4.2.1. Uma ϕ -superfície é dita geral se ela é a interseção parcial ou completa de duas quádricas.

Esse método consiste em mostrar que dado qualquer Φ -superfície geral F , pode-se encontrar todos os H sistemas de quádricas Φ tendo F como uma Φ -superfície geral. Para isso seja F a interseção parcial ou completa de duas quádricas Q_1, Q_2 . É suficiente encontrar todos os H sistemas de quádricas no qual contém Q_1, Q_2 , e que também F é uma Φ -superfície geral.

Agora existem apenas três tipos de restrições que podemos impor em um sistema linear de quádricas, no qual afeta o tipo de superfície geral de interseção os quais são advindos da análise do posto de uma quádrica Q de Φ_0 em um plano dado Π .

Primeiro, se a cônica $Q \cap \Pi$ tem posto três (não-singular) é equivalente a dizer que Q contém um plano dado ou uma superfície; Segundo, quando a cônica $Q \cap \Pi$ tem posto dois, ou seja, quando a cônica são duas retas é equivalente a dizer que Q passa através de um ponto e toca tangencialmente um hiperplano neste ponto (segundo duas retas). Por fim, temos o caso quando a cônica $Q \cap \Pi$ tem posto um, isto é, uma reta dupla. Neste caso, faz-se Q tocar tangencialmente um plano dado ao longo de uma reta l dada nesse plano¹.

Proposição 4.2.2. *As condições seguintes determinam o sistema Φ_0 :*

1. *Se Q_1, Q_2 tem uma superfície em comum diferente de F , então Φ_0 deve ter esta como superfície base;*
2. *Se Q_1, Q_2 toca tangencialmente qualquer plano ao longo da mesma reta o mesmo deve acontecer com todas as quádricas de Φ_0 .*
3. *Se Q_1, Q_2 tem um ponto isolado de contato, que não se encontra na reta de contato de tal plano tangente, então todas quádricas de Φ_0 deve tocar tangencialmente Q_1 e Q_2 neste ponto.*

Demonstração. No primeiro item, note que para a interseção $Q_1 \cap Q_2 \subset \mathbb{P}^4$ corresponde a interseção de dois hiperplanos $H_1 \cap H_2 \simeq \mathbb{P}^{r-2} \subset \mathbb{P}^r$, com $r \geq 4$ pois Φ_0 , em geral, não é um sistema homaloidal. Assim, se $G \neq F \subset Q_1 \cap Q_2$ segue que G é uma superfície base de Φ_0 . Para a mostramos a afirmação 2, uma vez que Q_1 e Q_2 intersectam tangencialmente um plano dado segundo uma mesma reta l basta lembrar que duas quádricas quaisquer sempre intersectam l em dois pontos. O terceiro item segue do raciocínio análogo aos dois primeiros. □

¹Para este caso, em [6] mostra-se ainda que quaisquer duas dessas quádricas irão tocar tangencialmente em cerca de dois pontos da reta l e a superfície de interseção terá nós nestes pontos.

Intersectando as quádricas de Φ_0 com a superfície F obtemos um certo sistema linear de curvas o qual chamaremos de Λ . Agora representando F em um plano π , as curvas de Λ serão representadas em π por um certo sistema linear de curvas que chamaremos de Λ' . Dado um sistema linear homaloidal de curvas N' de Λ' ele corresponde a um sistema linear homaloidal de curvas N de Λ em F . Com efeito,

Lema 4.2.1. *Seja N um sistema homaloidal de curvas de Λ correspondente a um sistema linear homaloidal de curvas N' de Λ' assim como construído acima. Então, N é a interseção de F com um sistema linear Φ de quádricas de Φ_0 de dimensão 4.*

Demonstração. Por fixar uma curva arbitrária α do sistema Λ sabemos que ela é dada pela interseção de uma quádrica Q de Φ_0 com F e assim,

$$\alpha = Q \cap F \subset Q \cap Q_1 \cap Q_2$$

e aplicando o teorema (4.0.4) com $r = 3$ e $k = 1$ tem-se que existe um sistema linear de quádrica de dimensão 2 através da curva α . Como uma superfície em \mathbb{P}^4 é dada por duas condições segue que o sistema de curvas N deve ser a interseção com F de algum sistema linear de quádricas de Φ_0 de dimensão 4. \square

Teorema 4.2.1. *O sistema linear de quádricas Φ do lema (4.2.1) é homaloidal.*

Demonstração. Observe que as curvas e pontos base do sistema Φ não tem relação com a superfície F nem com as quádricas Q_1, Q_2 . Fixando uma superfície F_0 de Φ temos que as quádricas de Φ encontram F_0 em um sistema linear homaloidal exatamente similar a N . Portanto, o sistema linear Φ é homaloidal². \square

4.2.1 O Sistema Inverso Ψ

Considerando agora uma superfície F' em Ψ e fixando uma curva de um sistema homaloidal de curvas N' em Λ' , para o sistema Φ de quádricas nós mostraremos como o sistema inverso de hipersuperfícies Ψ pode ser encontrado. Como primeiro resultado temos

Teorema 4.2.2. *Seções planas de uma hipersuperfície em Ψ ou são elípticas ou são racionais.*

Demonstração. Primeiro, dado uma Ψ -hipersuperfície V , suas seções hiperplanas correspondem em \mathbb{P}^4 a seções de $M \simeq \mathbb{P}^3$ por quádricas de Φ de modo que V é representado em

²O argumento aqui utilizado é exatamente análogo ao método utilizado para determinar sistemas homaloidais em \mathbb{P}^3 como visto no capítulo 3.

M . Isso nos diz que toda hipersuperfície de Ψ é representada em um espaço de dimensão 3 por meio de quádricas.

Além disso, se elas tem uma superfície dupla, esta deve ser a mesma para todas as hipersuperfícies e sua ordem é igual ao número de pontos duplos das seções planas das hipersuperfícies de Ψ . Agora, dado uma seção plana $M \cap V$ de uma hipersuperfície V em Ψ ela corresponde a seção hiperplana de uma Φ -superfície. Esta por sua vez é a interseção parcial ou completa de duas superfícies quádricas em \mathbb{P}^3 como visto no argumento da demonstração do teorema (4.1.1) e ainda, essa seção hiperplana corresponde a uma curva de grau 4 que está sendo representada em \mathbb{P}^3 , logo é elíptica ou racional. \square

Vamos dar sequência ao estudo do sistema linear inverso com a análise do seu lugar de base que pode ser composto por: superfícies, curvas ou pontos.

Dado uma curva de grau C em \mathbb{P}^4 que intersecta as quádricas de Φ em pontos no lugar de base, então a curva C impõe apenas uma condição nestas quádricas de Φ para conter a curva C , isto é, impor que as quádricas de Φ passem por apenas um ponto adicional e assim C é transformada em um único ponto de $\mathbb{P}^{4'}$.

Definição 4.2.2. Uma curva em \mathbb{P}^4 que passa através das Φ -quádricas em pontos no lugar de base do sistema Φ é chamada de curva excepcional ou E -curva.

Exemplo 4.2.1. Qualquer reta secante de uma curva cônica base de Φ é uma E -reta.

Exemplo 4.2.2. Qualquer cônica 4-secante de uma curva base é uma E -cônica. Notemos que as quádricas de Φ encontram uma cônica em no máximo quatro pontos e assim quando impomos a condição delas passarem por outro ponto teremos que as quádricas contêm a cônica 4-secante.

Proposição 4.2.3. *Uma família infinita dupla de E -curvas será em geral transformada em uma superfície base³ de multiplicidade n de Ψ .*

Demonstração. Uma E -curva de ordem n encontra todo hiperplano de \mathbb{P}^4 em n pontos, e conseqüentemente o ponto correspondente em $\mathbb{P}^{4'}$ deve ser um ponto base de Ψ com multiplicidade n . \square

Continuando nossa análise ao caso da Φ -superfície F mostramos a existência de E -curvas para o sistema Ψ mediante alguma condição, mais precisamente:

³Reciprocamente, pode-se mostrar que a uma vizinhança de um ponto de uma superfície base de Ψ deve corresponder em geral uma E -curva de \mathbb{P}^4 . Para os detalhes ver em [6].

Proposição 4.2.4. *Se o sistema Ψ possui superfícies em seu lugar de base, então existem sistemas infinitos duplos de E -curvas.*

Demonstração. Seja F uma Φ -superfície geral. Ela corresponde em \mathbb{P}^4 a um plano Π onde as retas de Π correspondem às seções de F por quádricas de Φ , isto é, curvas da rede N e projetando F segundo uma reta l em ϖ obtemos curvas de N' . Por outro lado, o plano Π encontra cada uma das superfícies de base em pontos de Ψ e estes correspondem em \mathbb{P}^4 a E -curvas residindo em F . As E -curvas serão representadas no plano ϖ em curvas que encontram curvas de N' em pontos fixos, ou possivelmente por pontos fundamentais de ϖ correspondendo a E -retas em F .

□

Observação 4.2.1. Para um ponto fundamental Q_{i_0} no plano ϖ o qual é ponto duplo de uma curva base C' de N' corresponde uma reta secante r , em F , da curva base correspondente C de Φ .

Para finalizar a seção analisaremos a existência de curvas e pontos base de Ψ .

Em poucos casos acontece que existe em \mathbb{P}^4 um sistema de E -superfícies, isto é, para cada superfície corresponde um único ponto de \mathbb{P}^4 e a esse sistema corresponde uma curva base de Ψ . Assim como mencionado para superfícies no lugar de base de Ψ , para uma vizinhança de um ponto de uma curva isolada de Ψ deve corresponder em geral uma E -superfície de \mathbb{P}^4 mas não entraremos em detalhes.

Por fim, em apenas um caso acontece que Ψ tem um ponto base isolado e sua existência é facilmente identificada segundo a existência de um E -hiperplano de \mathbb{P}^4 .

Considerações Finais

Como pode ser visto capítulo 3, estudamos os três tipos genéricos de transformações de Cremona dadas por quádricas em \mathbb{P}^3 . Identificando a uma transformação de Cremona um sistema linear homaloidal de quádricas analisamos os três casos em que as quádricas do sistema contém:

1. Uma cônica não-singular e um ponto em posição geral;
2. Um ponto múltiplo e três pontos em posição geral;
3. Uma reta l fixa e três pontos em posição geral.

Contudo, há muitas outras transformações de Cremona, num total de 30 transformações quádricas birracionais. Contrariando a afirmação feita por Cremona em [9], que garantia a existência de apenas 23 transformações de Cremona em [4] é garantida a existência de 30 transformações birracionais que surgem à medida que a cônica k , no caso (1), se degenera e a posição dos pontos nos três casos variam. No primeiro caso, à medida que k se degenera e o ponto se encontra em posições particulares, em [4] é determinado *sete* transformações birracionais T_{22} . No segundo caso, em [4] mostra que existe *doze* transformações birracionais T_{23} . Por fim, em [4] é explicitado as *onze* transformações T_{24} restantes.

Assim como em [9] e [4], o objetivo no capítulo 4 é determinar todas as transformações birracionais dadas por quádricas. Nesse mesmo capítulo é dado um exemplo bastante rico de uma transformação de Cremona dada por quádricas e em seguida foi explicitado o método geral para determinar todas as transformações birracionais (dadas por quádricas), e suas inversas. Nesse método, as classes de transformações birracionais são determinadas pelas Φ -superfícies gerais, isto é, a cada Φ -superfície geral é obtida uma classe de transformação birracional.

Em [6] é explicitado seis tipos de Φ -superfícies gerais, a saber: a *superfície I*, interseção de duas quádricas gerais; a *Superfície I₁*, interseção de duas quádricas as quais se tocam tangencialmente em um ponto em comum; a *Superfície I₂*, interseção de duas quádricas

que tocam tangencialmente um plano dado ao longo de uma reta dada; a Superfície I_3 , que é a superfície apenas definida; a *Superfície Regrada Cúbica*; por último, considera os H sistemas de quádricas no qual tem uma superfície quádrica e um ponto em comum.

Para cada uma das Φ -superfícies assim como no método para encontrar as transformações de Cremona de \mathbb{P}^3 é necessário determinar sua representação plana e só depois determinar os sistemas homaloidais de curvas no plano da representação o qual irá determinar, segundo o método geral, um sistema homaloidal de quádricas. Ainda em [6], mediante a consideração de cada Φ -superfície, é explicitado as transformações de Cremona inclusive suas inversas em relação a cada classe.

Para a classe das transformações tendo I como Φ -superfície geral, em [6] são encontradas *sete* transformações e suas respectivas inversas, inclusive algumas propriedades. Das transformações cubo-quádricas T_{23} desta classe, existe apenas uma que é justamente a transformação dada pelo sistema linear de quádricas com uma curva quádrica c_5 em comum estudada minuciosamente no capítulo 4. Alguns dos casos especiais ocorrem à medida que c_5 se degenera, como por exemplo:

1. Uma cúbica reversa c_3 e uma cônica c_2 encontrando c_3 duas vezes;
2. Uma quártica elíptica c_4 e uma reta l encontrando a quártica;
3. Uma quártica racional normal c_4 e uma corda l .

Para a classe das transformações tendo I_1 como Ψ -superfície geral, em [6] é explicitado *oito* transformações. Para a classe das transformações tendo I_2 como Ψ -superfície geral, em [6] são enumeradas, sem detalhes, *doze* transformações. A classe das transformações tendo I_3 como Ψ -superfície geral, segundo [6], é composta por apenas *duas* transformações. No último tipo de transformação a ser considerado, onde a Φ -superfície geral é uma superfície regrada cúbica a classe das transformações é composta por *três* transformações.

Referências Bibliográficas

- [1] D. Cox, J.Little, D.O'Shea, *Ideals, Varieties and Algorithms, An Introduction to Computacional Algebraic Geometry an Comutative Algebra*, Springer, Second Edition;
- [2] G.Tawanda, *Degenerations of Prym Varieties and Cubic Threefolds*, B.Sc., The University of Zimbabwe, Zimbabwe, 1995;
- [3] Harris, J., *Algebraic Geometry A First Course*, Springer-Verlag, 1992;
- [4] I. Pan, F.Ronga, T.Vust, *Transformations Rirationnelles Quadratiques De L'espace Projectif Complex À Trois Dimensions*, Ann.Inst. Fourier, Grenoble 51, 5(2001), P.1153 – 1187;
- [5] I. Pan *Sur les transformations de Cremona de bidegré (3,3)*, l'Ens. Math., 43 (1997), 285 – 297;
- [6] J.G. Semple, *Cremona Transformations of Space of Four Dimensions by Means of Quadrics, and the Reverse Transformations*, 1929.
- [7] J. G. Semple, & G. T. Kneebone, *Algebraic Projective Geometry*, Oxford, 1952;
- [8] J. G. Semple and L. Roth. *Introduction to Algebraic Geometry*, Oxford, (1949);
- [9] L. Cremona, *Suelle Transformazioni Razionali Nello Spazio*, Annali di Mat, ser. II, V (1871 – 1873), 131 – 162;
- [10] Ph. Griffiths and J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley and Sons, New York (1978);
- [11] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Springer Verlag, 1979;
- [12] Shafarevich, I.R.: *Basic Algebraic Geometry I* , Second Printing, 1996;
- [13] W. Fulton, *An Intriduction to Algebraic Geometry*, Third Edition, 2008;