

Universidade Federal de Minas Gerais

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

TRANSFORMAÇÕES DE CREMONA  
CUBO-CÚBICAS E O COMPLEXO QUADRÁTICO  
DE RETAS

LUCIANA FRANÇA DA CUNHA

Belo Horizonte, 29 de junho de 2013

LUCIANA FRANÇA DA CUNHA

TRANSFORMAÇÕES DE CREMONA CUBO-CÚBICAS E O COMPLEXO  
QUADRÁTICO DE RETAS

Dissertação apresentada ao corpo docente de Pós-Graduação em Matemática do Instituto de Ciências Exatas da Universidade Federal de Minas Gerais, como parte dos requisitos para a obtenção do título de Mestre em Matemática.

Orientador: Dan Avritzer

Belo Horizonte

2013

Aos meus pais,  
Pedro e Maura,  
dedico.

“Se não posso fazer tudo que devo,  
devo fazer tudo que posso”.

Santo Agostinho

# Agradecimentos

À Deus que me guia através das intuições no caminho do bem.

Ao Programa de Pós-Graduação em Matemática, da Universidade Federal de Minas Gerais.

À CAPES, pelo apoio financeiro.

Ao professor orientador Dan Avritzer, pela disponibilidade, atenção dispensada, paciência, dedicação e profissionalismo.

Aos professores, André Gimenez Bueno e Renato Vidal da Silva Martins, pelas sugestões e contribuições para esse trabalho.

Ao professor Mário Jorge Dias Carneiro, pelos conselhos, incentivo e confiança.

Aos professores, Carmen Rosa Giraldo Vergara e Paulo Antônio Fonseca Machado pelos momentos agradáveis.

Aos “irmãos”, Aislan, Divane, Manaíra e Neila, pela ajuda e colaboração.

Aos amigos, em especial à Amanda, Leonel, Luiza, Natália, Silvia e Willian, por seu incontestável apoio, pelos momentos de descontração e, principalmente, pela paciência.

A todos os meus familiares, especialmente aos meus pais, por seu incondicional incentivo e amor.

Ao André, pelo carinho, ajuda e convivência.

Meus mais sinceros agradecimentos.

# Resumo

Uma transformação é chamada de Cremona se é racional com inversa também racional. Seja  $G$  a quádrlica de Plücker de  $\mathbb{P}^5$ . Um complexo quadrático  $X$  é a interseção de  $G$  com uma segunda quádrlica  $F$ . Dada uma reta  $L \subset X \subset \mathbb{P}^5$  e um subespaço linear  $M \subset \mathbb{P}^5$ ,  $M \cong \mathbb{P}^3$ ,  $M \cap L = \emptyset$ , podemos considerar a projeção  $\pi_L : X \dashrightarrow M$  com centro em  $L$ .

Nosso objetivo é estudar a relação entre as transformações de Cremona cubo-cúbicas no espaço e complexos quadráticos de retas. A relação é a seguinte: dada duas retas  $L_1$  e  $L_2 \subset X$  mostramos que  $\varphi = \pi_{L_2} \circ \pi_{L_1}^{-1}$  é uma transformação de Cremona cubo-cúbica que será classificada em termos da posição relativa das retas escolhidas. Mostra-se ainda que o lugar de base de uma tal transformação contém uma curva quártica suave de gênero 2.

A referência básica da dissertação é o artigo “On Cremona Transformations and Quadratic Complexes”, dos autores D. Avritzer, G. Gonzalez-Sprinberg e I. Pan, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 57 (2008), 353-375 .

# Abstract

A transformation is called Cremona if it is rational with rational inverse. Let  $G$  be the Plücker quadric in  $\mathbb{P}^5$ . A quadratic complex  $X$  is the intersection of  $G$  with a second quadric  $F$ . Given a line  $L \subset X \subset \mathbb{P}^5$  and a linear subspace  $M \subset \mathbb{P}^5$ ,  $M \cong \mathbb{P}^3$ ,  $M \cap L = \emptyset$ , we can consider the projection  $\pi_L : X \dashrightarrow M$  with center  $L$ .

Our goal is to study the relation between Cremona cubo-cubic transformations and quadratic line complexes. The relation is as follows: given two lines  $L_1$  and  $L_2 \subset X$  we show that  $\varphi = \pi_{L_2} \circ \pi_{L_1}^{-1}$  is a cubo-cubic Cremona transformation that will be classified in terms of the relative position of the lines chosen. We will also show that the base locus of such a transformation contains a smooth genus 2 quintic.

The basic reference for the dissertation is the article “On Cremona Transformations and Quadratic Complexes” by D. Avritzer, G. Gonzalez-Sprinberg and I. Pan, *Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo*, 57 (2008), 353-375 .

# Sumário

<b>Introdução</b>	<b>3</b>
<b>1 Preliminares</b>	<b>5</b>
1.1 O espaço projetivo $\mathbb{P}^n$	5
1.1.1 Variedades Projetivas	6
1.1.2 Interseções no espaço projetivo - Teorema de Bezout	8
1.2 Funções e Aplicações Regulares	11
1.2.1 Projeção	13
1.3 Funções e Aplicações Racionais	16
1.3.1 Explosões	17
1.3.2 Explosões em um ponto	17
1.3.3 Explosões de Subvariedades	18
1.4 Divisores	21
1.4.1 O Grupo de Picard	23
1.4.2 Fibrado Canônico Algumas Aplicações Importantes	25
1.5 Sistemas lineares de curvas	28
1.6 Resoluções Livres	29
<b>2 Transformações de Cremona de <math>\mathbb{P}^2</math></b>	<b>34</b>
2.1 Transformações racionais	34
2.2 Transformações de Cremona	35
2.2.1 Propriedades Locais de curvas	40
2.2.2 Transformações de curvas	43

<b>3</b>	<b>Complexo Quadrático de retas</b>	<b>46</b>
3.1	A Grassmanniana de Retas de $\mathbb{P}^3$ . . . . .	46
3.1.1	Coordenadas de Plücker . . . . .	46
3.1.2	Espaços Lineares de Quádricas . . . . .	50
3.2	Complexo de retas . . . . .	51
3.2.1	Complexo Linear de Retas . . . . .	51
3.2.2	Complexo Quadrático de Retas . . . . .	54
<b>4</b>	<b>Transformação de Cremona de <math>\mathbb{P}^3</math></b>	<b>59</b>
<b>5</b>	<b>Transformações de Cremona e Complexos Quadráticos</b>	<b>72</b>
5.1	Complexos Quadráticos . . . . .	72

# Introdução

O objetivo deste trabalho é estudar as transformações de Cremona de uma maneira geral mas, especialmente em 3 situações:

1. As transformações de Cremona  $\varphi : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ ;
2. As transformações de Cremona  $\varphi : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$  cubo-cúbicas;
3. a terceira situação é mais elaborada. Tome  $X = F \cap G$  onde  $F$  e  $G$  são quádricas de  $\mathbb{P}^5$  e  $L \subset X$  uma reta. Seja a aplicação  $\pi : X_L \dashrightarrow M$ , a projeção de  $X$  para  $M \approx \mathbb{P}^3$ ,  $M$  fixa.

Mostraremos que dadas  $L_1, L_2 \subset X$ ,  $\pi_{L_1} : X \dashrightarrow M_1$  e  $\pi_{L_2} : X \dashrightarrow M_2$ ,  $M_i \approx \mathbb{P}^3 \subset \mathbb{P}^5$ ,  $i = 1, 2$  a transformação  $\pi_{L_2} \circ \pi_{L_1}^{-1} : M_1 \dashrightarrow M_2$  é uma transformação de Cremona cubo-cúbica que será determinantal se  $L_1 \cap L_2 = \emptyset$  e de de Jonquières se  $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ .

Mostra-se ainda que o lugar de base de uma tal transformação contém uma curva quártica suave.

A dissertação possui três partes principais. O objetivo da primeira parte da dissertação é expor de maneira rápida várias noções, umas básicas, outras nem tanto, fundamentais para uma melhor compreensão do texto, tendo como principal assunto, sistemas lineares de curvas. Essas noções são bastante ricas, mas, por razões de espaço, omitimos os detalhes. Quatro livros foram importantes para este estudo: R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, (1977); A. Beauville, *Complex Algebraic Surfaces*, Second Edition, (1996) e I. R. Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry 1 e 2*, Springer-Verlag, (1977) e (1997).

Na segunda parte, estudamos as transformações de Cremona do plano  $\mathbb{P}^2$  nele mesmo, estabelecendo relações entre as curvas e suas transformadas estritas de vários graus. Estudamos também seus conjuntos de singularidades. Essa parte foi baseada em J. G. Semple and L. Roth. *Introduction to Algebraic Geometry*, Oxford at the Clarendon Press (1949) e W. Fulton, *Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry*, Third Edition,(2008). Estudamos também, as transformações birracionais de  $\mathbb{P}^3$  de grau 3 cuja inversa também é de grau 3. Existem 3 tipos dessas transformações, dependendo da natureza da transformada estrita de um plano ou de uma reta genérica. A bibliografia básica deste capítulo é D I. Pan. *Sur les transformations de Cremona de bidegré (3,3)*, l'Ens. Math., 43 (1997), 285-297 e I. Pan. *Sur les transformations de Cremona de bidegré (3,3)*, Tese de Doutorado, (1997). E ainda, apresentamos o complexo quadrático de retas que será importante na dissertação cujo estudo foi baseado em Ph. Griffiths and J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley and Sons, New York (1978) e D. Avritzer, *Introdução à Geometria Enumerativa: Algumas Propriedades Geométricas das Grassmannianas*, Escola de Álgebra, São Paulo, (1990).

Por fim, estudamos a relação entre complexos quadráticos e Cremonas cubo-cúbicas descrita em D. Avritzer, G. Gonzalez-Sprinberg and I. Pan. *On Cremona Transformations and Quadratic Complexes*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 57 (2008), 353-375.

# Capítulo 1

## Preliminares

Neste primeiro capítulo apresentaremos algumas definições e resultados básicos de Geometria Algébrica fundamentais para a compreensão do nosso trabalho.

### 1.1 O espaço projetivo $\mathbb{P}^n$

Definimos uma relação de equivalência de pontos não nulos de  $K^{n+1}$  por

$$(x'_0, x'_1, \dots, x'_n) \sim (x_0, x_1, \dots, x_n)$$

se existe um elemento não nulo  $\lambda \in K$  tal que  $(x'_0, x'_1, \dots, x'_n) = \lambda(x_0, x_1, \dots, x_n)$ . Denotamos por  $0$  a origem  $(0, 0, \dots, 0)$  em  $K^{n+1}$  e definimos o espaço projetivo como se segue:

**Definição 1.1.** O espaço projetivo  $n$ -dimensional sobre o corpo  $K$ , denotado por  $\mathbb{P}^n(K)$ , é o conjunto de classes de equivalência  $\sim$  em  $K^{n+1} - \{0\}$ , isto é,

$$\mathbb{P}^n(K) = (K^{n+1} - \{0\}) / \sim .$$

Cada  $(n+1)$ -upla não nula  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$ ,  $x_i \in K$  define um ponto  $p$  em  $\mathbb{P}^n(K)$ . Dizemos que  $(x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  são *coordenadas homogêneas de  $p$*  e denotamos

$$p = (x_0 : x_1 : \dots : x_n).$$

Identificando um ponto  $(x_1, x_2, \dots, x_n)$  de  $K^n$  com o ponto

$$(1 : x_1 : x_2 : \dots : x_n)$$

de  $\mathbb{P}^n$ , podemos pensar em  $\mathbb{P}^n$  como um  $K^n$  completado pelos pontos

$$(0 : x_1 : x_2 : \dots : x_n)$$

“no infinito” em  $\mathbb{P}^n$ .

### 1.1.1 Variedades Projetivas

Um polinômio qualquer  $F \in \mathbb{C}[x_0, \dots, x_n]$  definido em  $K^{n+1}$ , não necessariamente se anula em pontos de  $\mathbb{P}^n$ . Mas, se  $F$  for homogêneo de grau  $d$  temos que

$$F(\lambda x_0, \dots, \lambda x_n) = \lambda^d F(x_0, \dots, x_n),$$

fazendo sentido dizer se  $F$  se anula ou não em  $x \in \mathbb{P}^n$ .

**Definição 1.2.** Uma **variedade projetiva**  $X \subset \mathbb{P}^n$  é definida como o conjunto dos zeros de uma coleção de polinômios homogêneos  $F_\alpha$ .

Escrevemos  $X = \mathbb{V}(F_1, \dots, F_r)$  se  $X$  for uma variedade definida como os zeros comuns dos polinômios homogêneos  $F_1, \dots, F_r$ . Se  $X = \mathbb{V}(F)$ , dizemos que  $X$  é uma *hipersuperfície*.

**Exemplo 1.3.** Dado  $F(x, y, z) \in K[x, y, z]$  homogêneo, seja

$$\mathbb{V}(F) = \{(x : y : z) \in \mathbb{P}^2; F(x, y, z) = 0\}.$$

Dizemos que  $\mathbb{V}(F)$  é uma curva algébrica plana. Uma cônica é uma variedade em  $\mathbb{P}^2$  dada pelos zeros de um polinômio homogêneo de grau 2, ou seja, um polinômio da forma

$$F(x, y, z) = ax^2 + bxy + cxz + dy^2 + eyz + fz^2 = 0.$$

**Definição 1.4.** Uma hipersuperfície  $X = \mathbb{V}(F) \subset \mathbb{P}^n$  é dita **singular** em um ponto  $p \in \mathbb{P}^n$  ou  $p$  é uma **singularidade** de  $X$  se

$$F(p) = \frac{\partial F}{\partial x_0}(p) = \frac{\partial F}{\partial x_1}(p) = \dots = \frac{\partial F}{\partial x_n}(p) = 0.$$

Dizemos que uma variedade é **não-singular** ou **suave** se ela for não-singular em todos os seus pontos.

Se transladamos  $p$  para a origem, podemos dizer que  $O$  é singular se  $F$  não possui termos constantes.

**Exemplo 1.5.** Seja  $V = \mathbb{V}(zw - xy)$  uma hipersuperfície em  $\mathbb{P}^3$ . Temos

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -y, \frac{\partial F}{\partial y} = -x, \frac{\partial F}{\partial z} = w, \frac{\partial F}{\partial w} = z.$$

Portanto  $\nabla F = \left( \frac{\partial F}{\partial x}, \frac{\partial F}{\partial y}, \frac{\partial F}{\partial z}, \frac{\partial F}{\partial w} \right) = 0 \Leftrightarrow (x : y : z : w) = (0 : 0 : 0 : 0)$ .

Logo  $V$  é não singular.

**Exemplo 1.6.** Seja  $S = \mathbb{V}(z^2 - x^2 - y^2) \subset \mathbb{P}^3$ . Temos

$$\frac{\partial F}{\partial x} = -2x, \frac{\partial F}{\partial y} = -2y, \frac{\partial F}{\partial z} = 2z, \frac{\partial F}{\partial w} = 0.$$

Portanto  $\nabla F = (-2x, -2y, 2z, 0) = 0 \Leftrightarrow (x, y, z, w) = (0, 0, 0, w)$ .

Logo  $S$  é singular em  $(0, 0, 0, 1)$ .

**Definição 1.7.** Um **espaço linear  $L$  em  $\mathbb{P}^n$**  é definido pelo conjunto dos pontos

$$p = (x_0 : \dots : x_n) \text{ de } \mathbb{P}^n$$

tais que as coordenadas  $x_i$  satisfazem a um sistema linear de equações  $\sum_{i=0}^n a_{\alpha i} x_i = 0$ , com  $\alpha = 1, \dots, (n - d)$ .

Assim,  $L$  tem dimensão  $d$  se as  $(n - d)$  equações acima são linearmente independentes, isto é, se a matriz  $(n - d) \times (n + 1)$  de coeficientes  $[a_{\alpha i}]$  tem todos os menores  $(n - d) \times (n - d)$  não nulos.  $L$  será uma *reta* se  $d = 1$ , um *plano* se  $d = 2$  e um *hiperplano* se  $d = (n - 1)$ . Um *d-plano* é um espaço linear de dimensão  $d$ .

A interseção de qualquer família e a união de uma família finita de variedades em  $\mathbb{P}^n$  são ainda variedades em  $\mathbb{P}^n$ . Logo, podemos munir este espaço projetivo de uma topologia, chamada *topologia de Zariski*, tomando para fechados as variedades. Assim, podemos definir:

**Definição 1.8.** Uma variedade **quase-projetiva** é um subconjunto aberto de uma variedade projetiva.

**Observação:** Em alguns momentos, por exemplo na Definição 4.12, necessitaremos de um conceito mais amplo de variedade para podermos considerar os chamados pontos imersos por exemplo. São os *sub-esquemas fechados de  $\mathbb{P}^n$* . Para uma definição precisa ver [12], página 33.

Dizemos que uma variedade  $X$  é *irredutível*, se o for como fechado nesta topologia, isto é, se sempre que  $X = X_1 \cup X_2$ , em que  $X_1$  e  $X_2$  são variedades projetivas, tivermos  $X = X_1$  ou  $X = X_2$ .

### 1.1.2 Interseções no espaço projetivo - Teorema de Bezout

O objetivo desta seção é apresentar o Teorema de Bezout para hipersuperfícies.

Sejam  $Y, Z$  variedades projetivas em  $\mathbb{P}^n$ . Temos que  $X = Y \cap Z$  é um conjunto algébrico. De fato, se  $Y = \mathbb{V}(I)$  e  $Z = \mathbb{V}(J)$ , então

$$Y \cap Z = \mathbb{V}(I) \cap \mathbb{V}(J) = \mathbb{V}(I, J).$$

Assim  $Y \cap Z$  é um conjunto algébrico. Agora vamos estudar sua dimensão começando com um resultado para variedades lineares, isto é, interseções de hiperplanos.

**Proposição 1.9.** *Sejam  $Y, Z$  variedades lineares em  $\mathbb{P}^n$  com dimensões  $r$  e  $s$ , respectivamente. Se  $r + s - n \geq 0$ , então  $Y \cap Z \neq \emptyset$ . Mais ainda, se  $Y \cap Z \neq \emptyset$ , então  $Y \cap Z$  é uma variedade linear de dimensão  $\geq r + s - n$ .*

*Demonstração.* ver [16] página 13. □

**Proposição 1.10.** *Sejam  $Y, Z$  variedades em  $\mathbb{P}^n$  de dimensões  $r$  e  $s$ , respectivamente. Então*

1. *Cada componente irredutível de  $Y \cap Z$  tem dimensão pelo menos  $r + s - n$ .*
2. *Se  $r + s - n \geq 0$ , então  $Y \cap Z$  é não vazio.*

*Demonstração.* ver [16] página 48. □

Daí, temos o seguinte corolário:

**Corolário 1.11.** *Sejam  $Y \subseteq \mathbb{P}^n$  uma variedade projetiva de dimensão  $r$  e  $H$  uma hipersuperfície em  $\mathbb{P}^n$  que não contém  $Y$ . Se  $Z_j$  são as componentes irredutíveis de  $Y \cap H$ , então  $\dim Z_j = r - 1$ .*

*Demonstração.* ver[11] página 71. □

**Definição 1.12.** *Seja  $X \subset \mathbb{P}^n$  uma variedade algébrica. Se  $X$  é uma hipersuperfície, o número de pontos da interseção de  $X$  e uma reta genérica de  $\mathbb{P}^n$  é chamado **grau de  $X$**  e denotamos por  $\deg X$ .*

Assim, se  $X$  é o conjunto de zeros de um polinômio irredutível e homogêneo de grau  $d$ , então  $\deg X = d$ .

Generalizando, se  $X$  possui dimensão  $r$ , definimos o *grau de  $X$*  como o número de pontos da interseção de  $X$  e um subespaço linear genérico de dimensão  $n - r$  em  $\mathbb{P}^n$ .

Note que o grau não é um invariante intrínseco de  $X$ . Por exemplo, uma reta e uma cúbica reversa em  $\mathbb{P}^3$  são ambas isomorfas a  $\mathbb{P}^1$ , mas a reta tem grau 1 enquanto a cúbica reversa tem grau 3.

Seja  $X$  uma variedade projetiva irredutível de dimensão  $r \geq 1$  em  $\mathbb{P}^n$  e  $H$  uma hipersuperfície que não contém  $X$ . Decompondo, obtemos

$$X \cap H = Z_1 \cup \dots \cup Z_s,$$

onde cada  $Z_j$  é uma subvariedade irredutível. Pelo Corolário 1.11 a dimensão de cada componente é  $r - 1$ , pois  $H$  é uma hipersuperfície. Seja  $P_j$  o ideal primo homogêneo associado a  $Z_j$ . Definimos a *multiplicidade de interseção de  $X$  e  $H$  ao longo de  $Z_j$*  como

$$i(X, H; Z_j) := m_{P_j}(S/(I_X + I_H))$$

onde  $I_X$  e  $I_H$  são os ideais de  $X$  e  $H$  em  $S$  e  $m_{P_j}$  é definida acima.

**Teorema 1.13. (Bezout)** *Seja  $X$  uma variedade projetiva irredutível de dimensão  $\geq 1$  em  $\mathbb{P}^n$  e  $H$  uma hipersuperfície que não contém  $X$ . Sejam  $Z_1, \dots, Z_s$  as componentes irredutíveis de  $X \cap H$ . Então*

$$\sum_{j=1}^s i(X, H; Z_j) \deg Z_j = (\deg X)(\deg H).$$

*Demonstração.* ver em [16] página 53. □

Como corolário, temos o caso de curvas planas:

**Corolário 1.14. (Bezout)** *Sejam  $X, Y$  duas curvas planas e projetivas, sem componentes em comum, de graus  $m$  e  $n$ . Sejam  $X \cap Y = \{p_1, \dots, p_s\}$ . Então*

$$\sum_{j=1}^s i(X, Y; p_j) = m.n.$$

*Demonstração.* ver [17] página 57. □

Considere  $F$  e  $G$  curvas em  $\mathbb{P}^2$ . Como consequência deste corolário temos os seguintes resultados e para mais detalhes ver [17] página 58.

1. Se  $F$  e  $G$  não possuem componente comum, então

$$\sum_p m_p(F)m_p(G) \leq \deg(F) \cdot \deg(G).$$

2. Se  $F$  e  $G$  se encontram em  $mn$  pontos distintos, onde  $m = \deg(F)$  e  $n = \deg(G)$ , então esses pontos são pontos simples em  $F$  e  $G$ .
3. Se duas curvas de  $\mathbb{P}^2$  de graus  $m$  e  $n$  tem mais de  $mn$  pontos em comum, então, elas possuem uma componente comum.

**Exemplo 1.15.** Vamos olhar para a interseção do círculo unitário  $x^2 + y^2 - z^2 = 0$  e a curva elíptica  $x^3 - x^2z - xz^2 + z^3 - y^2z = 0$ . O ponto  $(0 : 0 : 1)$  não pertence às curvas, mas é colinear aos pontos  $(0 : 1 : 1)$  e  $(0 : -1 : 1)$ . Assim, a fim de calcular multiplicidades, temos que escolher um sistema de coordenadas diferente. Substituindo  $x$  por  $x - z$  e  $y$  por  $y - z$ , temos as equações

$$F(x, y, z) = x^2 + y^2 - 2(x + y)z + z^2,$$

$$G(x, y, z) = x^3 - (4x^2 + y^2)z + 2(2x + y)z^2 - z^3.$$

Agora, existem as seguintes possibilidades:

1.  $y = 0$ : então  $x^2 - 2xz + z^2 = (x - z)^2 = 0$  e  $x^3 - 4x^2z + 4xz^2 - z^3 = 0$ , portanto, o ponto de interseção correspondente é  $(1 : 0 : 1)$ , e tem multiplicidade 1.

2.  $y = 2x$ : então  $0 = 5x^2 - 6xz + z^2 = (5x - z)(x - z)$  e  $x^3 - 8x^2z + 8xz^2 - z^3 = 0$ , portanto  $x = z$ , e o ponto de interseção correspondente é  $(1 : 2 : 1)$ .
3.  $x = 0$ : isto conduz a  $(y - z)^2 = 0$  e  $-y^2z + 2yz^2 - z^3 = 0$ , portanto, o ponto de interseção correspondente é  $(0 : 1 : 1)$ , e tem multiplicidade 2.
4.  $x = 2y$ : então  $(5y - z)(y - z) = 0$  e  $8y^3 - 17y^2z + 10yz^2 - z^3 = 0$ , portanto, o ponto de interseção correspondente é  $(2 : 1 : 1)$ , e tem multiplicidade 2.

No antigo sistema de coordenadas (afim), temos dois pontos de interseção com multiplicidade 1 (ou seja,  $(0, 1)$  e  $(0, -1)$ ), e de dois pontos com multiplicidade 2 (ou seja,  $(-1, 0)$  e  $(1, 0)$ ).

## 1.2 Funções e Aplicações Regulares

Em geral, uma função racional em  $K(x_0, \dots, x_n)$

$$f(x_0, \dots, x_n) = \frac{P(x_0, \dots, x_n)}{Q(x_0, \dots, x_n)}$$

não pode ser vista como uma função racional de  $x \in \mathbb{P}^n$  (supondo  $Q(x) \neq 0$ ). Porém se  $f$  for uma função homogênea de grau zero, isto é, se  $P$  e  $Q$  são polinômios homogêneos de mesmo grau,  $f$  é uma função de  $x \in \mathbb{P}^n$ .

**Definição 1.16.** Seja  $X \subset \mathbb{P}^n$  uma variedade quase-projetiva,  $x \in X$  e  $f = \frac{P}{Q}$  uma função homogênea de grau zero com  $Q(x) \neq 0$ . Então  $f$  define uma função em uma vizinhança de  $x$  tomando valores em  $K$  e dizemos que  $f$  é **regular** em  $x \in X$ . A função  $f$  é regular em  $X$  se ela for regular em todos os pontos  $x \in X$ .

**Definição 1.17.** Seja  $f : X \rightarrow Y$  uma aplicação entre variedades quase-projetivas com  $Y \subset \mathbb{P}^n$ . A aplicação  $f$  é **regular** se para todo  $x \in X$  e para algum subespaço afim  $K_i^m$  contendo  $f(x)$  existe uma vizinhança  $U \ni x$  tal que  $f(U) \subset K_i^m$  e a aplicação  $f : U \rightarrow K_i^m$  é regular.

Se considerarmos aplicações regulares entre uma variedade quase-projetiva irredutível  $X$  e o espaço projetivo  $\mathbb{P}^n$ , a definição acima pode ser reescrita da seguinte forma:

**Definição 1.18.** Uma aplicação regular  $f : X \rightarrow \mathbb{P}^n$  de uma variedade quase-projetiva irredutível  $X$  para  $\mathbb{P}^n$  é dada por uma  $(m + 1)$ -upla

$$(F_0, \dots, F_m) \tag{1.1}$$

de polinômios homogêneos de mesmo grau em  $K[x_0, \dots, x_n]$  tal que para cada  $x \in X$  existe uma expressão (1.1) para  $f$  com  $F_i(x) \neq 0$  para pelo menos um  $i$ .

Um *isomorfismo* é uma aplicação regular que tem uma aplicação regular inversa.

**Exemplo 1.19.** Considere a variedade  $C \subset \mathbb{P}^2$  dada por  $x^2 + y^2 - z^2$ , e a aplicação  $\varphi$  de  $C$  em  $\mathbb{P}^1$

$$(x : y : z) \mapsto (x : y - z).$$

A aplicação pode ser considerada como uma projeção estereográfica a partir do ponto

$$p = (0 : 1 : 1);$$

$\varphi$  envia um ponto  $r \in C$ ,  $r \neq p$  no ponto de interseção do eixo  $(y = 0)$  com a reta  $\overline{pr}$ . Os dois polinômios  $x$  e  $y - z$  possuem um zero comum em  $C$  no ponto  $p = (0 : 1 : 1)$ , reforçando o fato de que a aplicação não faz sentido quando  $r = p$ ; mas é possível estender a função de modo que ela seja regular neste ponto: nós definimos  $\varphi(p) = (1 : 0)$  e observe que os termos das coordenadas  $(S, T)$  em  $\mathbb{P}^1$  com abertos afins  $U_0 : (S \neq 0)$  e  $U_1 : (T \neq 0)$ , temos

$$\varphi^{-1}(U_0) = C - \{(0 : -1 : 1)\}$$

e

$$\varphi^{-1}(U_1) = C - \{(0 : 1 : 1)\}.$$

Agora, em  $\varphi^{-1}(U_1)$ , a aplicação  $\varphi^{-1}$  é claramente regular; em termos de coordenadas  $s = S/T$  em  $U_1$ , a restrição de  $\varphi$  é dada por

$$(x : y : z) \mapsto \frac{x}{y - z}$$

que é claramente uma aplicação regular em  $C - \{(0 : 1 : 1)\}$ . Por outro lado, em  $\varphi^{-1}(U_0)$ , podemos escrever a aplicação, em termos de coordenadas euclidianas  $t = T/S$ , como

$$(x : y : z) \mapsto \frac{y - z}{x}.$$

Isto pode parecer não ser regular em  $p$ , mas quando escrevemos

$$\begin{aligned} \frac{y-z}{x} &= \frac{y^2-z^2}{x(y+z)} \\ &= \frac{-x^2}{x(y+z)} \\ &= \frac{-x}{(y+z)}, \end{aligned}$$

vemos que é claramente regular em  $C \setminus \{(0 : -1 : 1)\}$ . Note também que a aplicação  $\varphi : C \rightarrow \mathbb{P}^1$  de fato não pode ser dada por um par de polinômios homogêneos em  $\mathbb{P}^2$  sem zeros comuns sobre  $C$ .

### 1.2.1 Projecção

Escrevemos  $\overline{qp}$  para denotar a reta que passa pelo pontos  $q$  e  $p$ , e também,  $H_q = \langle L, q \rangle$  para denotar o espaço gerado pela reta  $L$  e o ponto  $q$ .

**Definição 1.20.** Seja  $p$  um ponto em  $\mathbb{P}^2$  e seja  $l \sim \mathbb{P}^1 \subset \mathbb{P}^2$  uma reta onde  $p \notin l$ .

A aplicação

$$\begin{aligned} \pi_p : X \setminus \{p\} \subseteq \mathbb{P}^2 &\dashrightarrow \mathbb{P}^1 \\ q &\longmapsto \overline{pq} \cap l \end{aligned}$$

é chamada **projecção de  $X$  com centro em  $p$** .

A projecção está bem definida pois a intersecção de duas retas em  $\mathbb{P}^2$  é sempre diferente de  $\emptyset$ .

**Exemplo 1.21.** A projecção da cônica  $C$  dada pelo polinômio  $axy + bxz + cyz = 0$  com centro no ponto  $p \in C$ , é como mostra a figura:

Generalizando, seja  $\mathbb{P}^{n-1} \subset \mathbb{P}^n$  um hiperplano e  $p \in \mathbb{P}^n \setminus \mathbb{P}^{n-1}$  um ponto. Definimos a aplicação

$$\pi_p : \mathbb{P}^n \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$$

por

$$\pi_p : q \mapsto \overline{qp} \cap \mathbb{P}^{n-1};$$

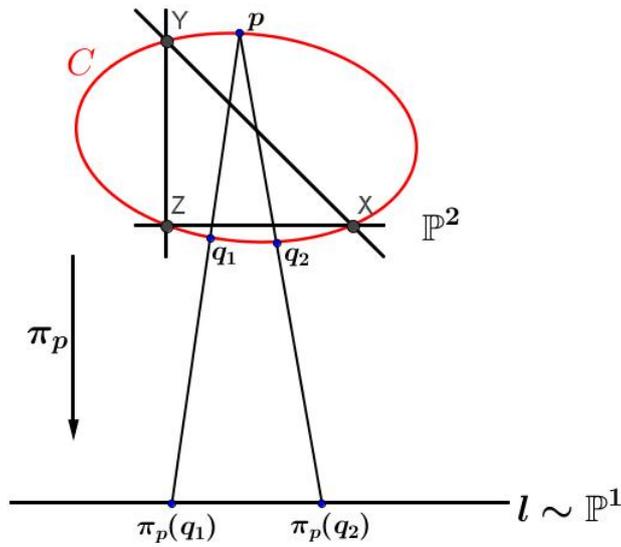


Figura 1.1: Projeção de uma cônica

isto é, a aplicação envia um  $q \in \mathbb{P}^n$  diferente de  $p$ , em um ponto da interseção da reta  $\overline{qp}$  com o hiperplano  $\mathbb{P}^{n-1}$ . A aplicação  $\pi_p$  é chamada de *projeção com centro em  $p$  no hiperplano  $\mathbb{P}^{n-1}$* .

Em termos de coordenadas, isso é simples. Se  $q = (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  temos

$$\pi_p : (x_1 : \dots : x_n) \mapsto (x_0 : x_1 : \dots : x_n).$$

Suponha agora que  $X$  é uma variedade projetiva qualquer em  $\mathbb{P}^n$  tal que  $p \notin X$ . Podemos, então, restringir a aplicação  $\pi_p$  para a variedade  $X$  obtendo uma aplicação regular  $\pi_p : X \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$ ; a imagem  $\overline{X} = \pi_p(X)$  desta aplicação é chamada *projeção de  $X$  com centro em  $p$  no hiperplano  $\mathbb{P}^{n-1}$* .

Assim,

**Definição 1.22.** *Sejam  $L, P \subset \mathbb{P}^n$  dois espaços disjuntos onde  $\dim L = l$  e  $\dim P = n - l - 1$ . A aplicação*

$$\pi_p : \begin{array}{ccc} X \setminus \{L\} \subseteq \mathbb{P}^n & \dashrightarrow & P \\ q & \mapsto & H_q \cap P \end{array},$$

é a *projeção de  $X$  com centro em  $L$* .

Indexando, tome  $q = (x_0 : x_1 : \dots : x_n)$  um ponto de  $\mathbb{P}^n$  e  $L$  um espaço dado por

$$\{x_{l+1} = x_{l+2} = \dots = x_n = 0\}.$$

Se  $P$  é dado por  $\{x_0 = x_1 = \dots = x_l = 0\}$  então  $\pi_p(q) = (x_{l+1} : x_{l+2} : \dots : x_n)$ .

Temos, então, o seguinte teorema:

**Teorema 1.23.** *A projeção  $\overline{X}$  de  $X$  com centro em  $p$  no hiperplano  $\mathbb{P}^{n-1}$  é uma variedade projetiva.*

*Demonstração.* ver [14] página 35. □

**Exemplo 1.24.** Seja  $C$  uma curva em  $\mathbb{P}^n$ . Dado  $p \in \mathbb{P}^n$ , a projeção  $\pi_p : C \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$  com centro em  $p$  no hiperplano  $\mathbb{P}^{n-1}$  é regular se  $p \in \mathbb{P}^n \setminus C$  e, ainda,  $\deg \pi_p(C) = \deg C$ . Agora se  $p \in C$  é um ponto não singular da curva, a projeção  $\pi_p$  é racional  $\deg \pi_p(C) = \deg C - 1$ .

Podemos generalizar a noção de projeção do seguinte modo:

**Definição 1.25.** Sejam  $\Lambda \approx \mathbb{P}^k$  e  $\mathbb{P}^{n-k-1}$  subespaços disjuntos de  $\mathbb{P}^n$ . Definimos a aplicação

$$\pi_\Lambda : \mathbb{P}^n \setminus \Lambda \rightarrow \mathbb{P}^{n-k-1}$$

que envia um ponto  $q \in \mathbb{P}^n \setminus \Lambda$  em um ponto da interseção de  $\mathbb{P}^{n-k-1}$  com o  $(k+1)$ -plano  $\langle \Lambda, q \rangle$ .  $\pi_\Lambda$  é chamada **projeção com centro em  $\Lambda$  no  $(n-k-1)$ -plano  $\mathbb{P}^{n-k-1}$** .

**Exemplo 1.26.** Tome  $Q \subset \mathbb{P}^3$  uma quádrlica dada pelo polinômio  $x_0x_3 - x_1x_2 = 0$  e  $p = (0 : 0 : 0 : 1) \in Q$ . Seja  $\pi_p : Q \setminus \{p\} \rightarrow \mathbb{P}^2$  a projeção de  $Q \setminus \{p\}$  com centro em  $p$  no plano projetivo. Dessa maneira,

$$\pi_p : (x_0 : x_1 : x_2 : x_3) \longmapsto (x_0 : x_1 : x_2).$$

Como  $p \in Q$ , essa aplicação define uma aplicação racional  $\pi : Q \dashrightarrow \mathbb{P}^2$ , claramente não definida em  $p$  e injetiva. Agora, se tomamos  $q \in \mathbb{P}^2$ , pelo Teorema de Bezout, a reta  $\overline{qp}$  intersecta  $Q$  em dois pontos, a saber  $p$ , e outro ponto diferente de  $p$ . Assim, a aplicação racional  $\pi^{-1}$  está bem definida. Para encontrar a aplicação inversa, suponha que  $q = (z_0 :$

$z_1 : z_2), z_0 \neq 0$ . O ponto em  $\overline{pq} \cap Q$  é da forma  $\left( z_0 : z_1 : z_2 : \frac{z_1 z_2}{z_0} \right) = (z_0^2 : z_0 z_1 : z_0 z_2 : z_1 z_2)$ .

Assim

$$\begin{aligned} \pi^{-1} : \quad \mathbb{P}^2 & \dashrightarrow \quad Q \\ (z_0 : z_1 : z_2) & \longmapsto (z_0^2 : z_0 z_1 : z_0 z_2 : z_1 z_2). \end{aligned}$$

Portanto,  $\pi$  é um isomorfismo birracional, isto é, a quádriga  $Q$  é birracional a  $\mathbb{P}^2$ .

Agora, se  $X \subset \mathbb{P}^n$  é uma variedade tal que  $X \cap \Lambda = \emptyset$ , podemos restringir  $\pi_\Lambda$  para a variedade  $X$  obtendo uma aplicação regular  $\pi_\Lambda : X \rightarrow \mathbb{P}^{n-k-1}$  cuja imagem  $\overline{X} = \pi_\Lambda(X)$  desta aplicação é chamada *projeção de  $X$  com centro em  $\Lambda$  no  $(n-k-1)$ -plano  $\mathbb{P}^{n-k-1}$* .

Na medida em que a aplicação  $\pi_\Lambda$  pode ser realizada como a composição de uma sequência de projeções dos pontos  $p_0, \dots, p_k$  de  $\Lambda$ , pelo teorema 1.23 temos que a projeção  $\pi_\Lambda \subset \mathbb{P}^n$  é uma variedade projetiva.

### 1.3 Funções e Aplicações Racionais

Seja  $X \subset \mathbb{P}^n$  uma variedade quase-projetiva irredutível e  $\mathcal{O}_X$  o conjunto das funções racionais  $f = P/Q$ , tal que  $P, Q \in K[x_0, \dots, x_n]$  são polinômios homogêneos do mesmo grau e  $Q \notin \mathcal{U}_X$ . Segue da irredutibilidade de  $X$  que  $\mathcal{O}_X$  é um anel.

Seja  $M_X$  o conjunto das funções  $f \in \mathcal{O}_X$  tal que  $P \in \mathcal{U}_X$ .  $M_X$  é um ideal maximal, dessa forma o anel quociente  $\mathcal{O}_X/M_X$  é um corpo, chamado *corpo de funções de  $X$  ou corpo de funções racionais de  $X$*  e é denotado por  $K(X)$ .

**Definição 1.27.** Seja  $X \subset \mathbb{P}^n$  uma variedade quase-projetiva. Uma aplicação **racional**  $f : X \dashrightarrow \mathbb{P}^m$  é definida pela  $(m+1)$ -upla  $(F_0, \dots, F_m)$  de polinômios homogêneos do mesmo grau nas  $n+1$  coordenadas homogêneas de  $\mathbb{P}^n$  contendo  $X$ , tais que pelo menos um  $F_i \notin \mathcal{U}_X$ . Duas aplicações  $(F_0, \dots, F_m)$  e  $(G_0, \dots, G_m)$  são iguais se  $F_i G_j = F_j G_i$  em  $X$  para todo  $i, j$ .

Assim como em variedades afins se a imagem de uma aplicação racional  $f : X \dashrightarrow Y$  é denso em  $Y$  então  $f$  define uma inclusão de corpos  $f_* : K(Y) \hookrightarrow K(X)$ .

Se uma aplicação racional  $f : X \dashrightarrow Y$  tem uma aplicação inversa racional, dizemos que  $f$  é *birracional* e  $X$  e  $Y$  são *birracionais*. Nesse caso a inclusão de corpos  $f_* : K(Y) \hookrightarrow K(X)$  é um isomorfismo.

No capítulo 5 teremos a seguinte aplicação: Seja  $G$  a quádrlica de Plücker de  $\mathbb{P}^5$ . Um complexo quadrático  $X$  é a interseção de  $G$  com uma segunda quádrlica  $F$ . Dada uma reta  $L \subset X \subset \mathbb{P}^5$  e um subespaço linear  $M \subset \mathbb{P}^5$ ,  $M \cong \mathbb{P}^3$ ,  $M \cap L = \emptyset$ , podemos considerar a projeção  $\pi_L : X \dashrightarrow M$  com centro em  $L$ .

### 1.3.1 Explosões

Vamos construir a explosão de uma variedade  $X$  ao longo de uma subvariedade  $Y$ , que será uma aplicação birracional regular  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  e um isomorfismo em  $X \setminus Y$ . É uma construção fundamental para a continuação do nosso trabalho.

### 1.3.2 Explosões em um ponto

O exemplo mais simples de uma explosão em um ponto é o gráfico  $\Gamma_\varphi$  da aplicação racional

$$\varphi : \mathbb{A}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^1$$

dada por  $\varphi(x, y) = (x : y)$ .

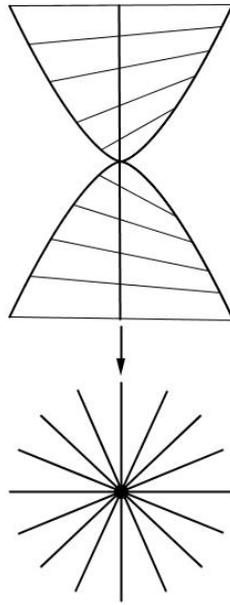
O gráfico, denotado por  $\tilde{\mathbb{A}}^2$ , juntamente com o mapa de projeção  $\pi : \tilde{\mathbb{A}}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$ , é chamado de **explosão** de  $\mathbb{A}^2$  no ponto  $(0, 0)$ . A aplicação  $\pi$  é um isomorfismo fora da origem  $(0, 0) \in \mathbb{A}^2$ , e a fibra sobre este ponto é uma cópia de  $\mathbb{P}^1$  correspondendo às retas que passam por esse ponto.

Para ver isto, note que se  $[t, u]$  são coordenadas homogêneas em  $\mathbb{P}^1$ , o subconjunto aberto  $t \neq 0$  em  $\tilde{\mathbb{A}}^2 \subset \mathbb{A}^2 \times \mathbb{P}^1$  é isomorfo a  $\mathbb{A}^2$  e que a restrição de  $\pi$  a este subconjunto aberto, é a aplicação  $f : \mathbb{A}^2 \rightarrow \mathbb{A}^2$  dada por

$$f(x, y) = (x, xy).$$

**Definição 1.28.** Sejam  $\varphi : \mathbb{P}^n \rightarrow \mathbb{P}^{n-1}$  a aplicação racional dada pela projeção de um ponto  $p \in \mathbb{P}^n$  e  $\tilde{\mathbb{P}}^n = \Gamma_\varphi \subset \mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$  o fecho do gráfico de  $\varphi$  em  $\mathbb{P}^n \times \mathbb{P}^{n-1}$ . A aplicação  $\pi : \tilde{\mathbb{P}}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$  é chamada de **explosão** de  $\mathbb{P}^n$  no ponto  $p$ .

No caso de  $\mathbb{A}^2$ , a aplicação  $\pi$  projeta  $\tilde{\mathbb{P}}^n$  isomorficamente em  $\mathbb{P}^n$  fora do ponto  $p$ , enquanto que a fibra sobre esse ponto é isomorfa a  $\mathbb{P}^{n-1}$ .



Ainda mais geral, seja  $X \subset \mathbb{P}^n$  uma variedade quase-projetiva e  $p \in X$  qualquer ponto; seja  $\tilde{X} = \Gamma_\varphi \subset X \times \mathbb{P}^{n-1}$  o fecho do gráfico de  $\varphi$  em  $X \times \mathbb{P}^n$ . A aplicação  $\pi : \tilde{X} \rightarrow X$  é a *explosão* de  $X$  em  $p$ . A imagem inversa  $E = \pi^{-1}(p) \subset \tilde{X}$  do ponto  $p$  é chamada o *divisor excepcional* da explosão.

Se  $\pi : \tilde{\mathbb{P}}^n \rightarrow \mathbb{P}^n$  é a explosão de  $\mathbb{P}^n$  em  $p$ , então para o fechado  $X \subset \mathbb{P}^n$ , definimos a *transformada estrita*  $\tilde{X}$  de  $X$  em  $\tilde{\mathbb{P}}^n$  como o fecho em  $\tilde{\mathbb{P}}^n$  da imagem inversa  $\pi^{-1}(X - \{p\})$  do complementar de  $p$  em  $X$ .

**Exemplo 1.29.** A seguir, a transformada estrita da cúbica nodal  $X \subset \mathbb{A}^2$  dada por  $y^2 = x^3 + x^2$ .

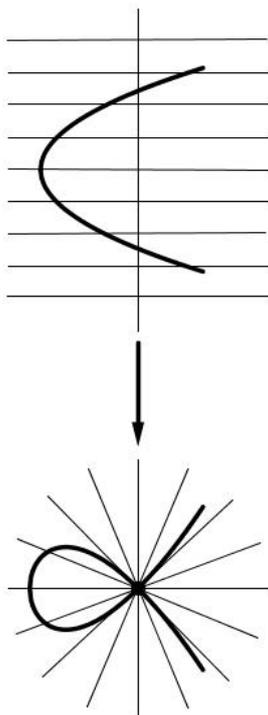
### 1.3.3 Explosões de Subvariedades

Em geral, seja  $X \subset \mathbb{A}^m$  uma variedade afim e  $Y \subset X$  qualquer subvariedade. Escolha um conjunto de geradores  $f_0, f_1, f_2, \dots, f_n \in A(X)$  para o ideal de  $Y$  em  $X$  e considere a aplicação racional

$$\varphi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$$

dada por

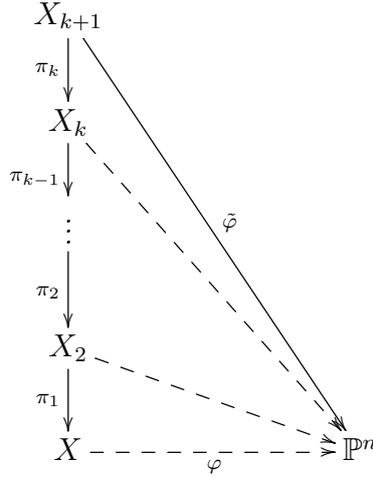
$$\varphi(x) = [f_0 : f_1 : f_2 : \dots : f_n].$$



Temos que  $\varphi$  é regular em  $X \setminus Y$ , e, em geral, não será em  $Y$ . Assim, o gráfico  $\Gamma_\varphi$  será um isomorfismo sobre  $X$  fora de  $Y$ , mas em geral, não será em  $Y$ . O gráfico,  $\Gamma_\varphi$  com a projeção  $\pi : \Gamma_\varphi \rightarrow X$ , é chamado a *explosão de  $X$  ao longo de  $Y$*  e denotado por  $BL_Y X$ , ou simplesmente,  $\tilde{X}$ . Como antes, a imagem inversa é chamado *divisor excepcional*.

**Teorema 1.30.** *Seja  $X$  uma variedade quase-projetiva e  $\varphi : X \dashrightarrow \mathbb{P}^n$  uma aplicação racional. Então  $\varphi$  pode ser resolvido por uma sequência finita de explosões, isto é, existem variedades  $X = X_1, X_2, \dots, X_k$ , subvariedades  $Y_i \subset X_i$  e aplicações  $\pi : X_{i+1} \rightarrow X_i$  tal que*

1.  $\pi_i : X_{i+1} \rightarrow X_i$  é a explosão de  $X_i$  ao longo de  $Y_i \subset X_i$
2. a aplicação  $\varphi$  se fatora como  $\tilde{\varphi} \circ \pi_k^{-1} \circ \dots \circ \pi_1^{-1}$  onde  $\tilde{\varphi} : X_{k+1} \rightarrow \mathbb{P}^n$  é regular.



Em outras palavras, depois de explodir  $X$  um número finito de vezes, chegamos a uma variedade  $\tilde{X}$  e um isomorfismo birracional de  $\tilde{X}$  em  $X$  tal que a aplicação racional  $\tilde{\varphi} : \tilde{X} \rightarrow \mathbb{P}^n$  é de fato regular. Neste sentido, podemos dizer que, para entender aplicações racionais, só precisamos compreender as aplicações regulares e explosões.

**Exemplo 1.31.** Considere a aplicação

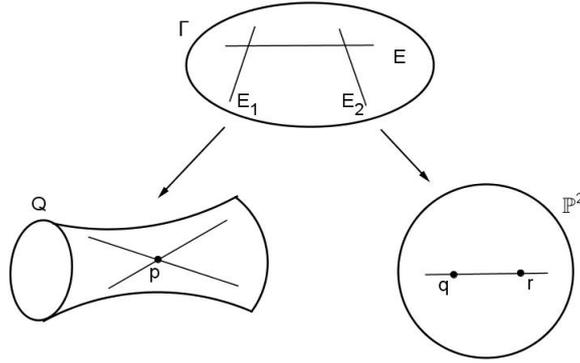
$$\pi : Q \dashrightarrow \mathbb{P}^2$$

obtida projetando a superfície quádrlica  $Q \subset \mathbb{P}^3$  dada pelos pontos que satisfazem a equação  $z_0 z_3 - z_1 z_2 = 0$  a partir do ponto  $p = [0, 0, 0, 1] \in Q$  em relação ao plano ( $z_3 = 0$ ). Podemos descrever esta aplicação em termos de explosões.

Primeiro, seja  $\Gamma \subset Q \times \mathbb{P}^2$  o gráfico de  $\pi$ . Uma vez que os polinômios homogêneos  $z_0, z_1, z_2$  dados pela aplicação  $\pi$  gera o ideal no ponto  $p$ , vemos que  $\pi_1 : \Gamma \rightarrow Q$  é a explosão de  $Q$  no ponto  $p$ . Note que o divisor excepcional  $E \subset \Gamma$  da explosão é mandada isomorficamente através da projeção  $\pi_2$  para a reta dada em coordenadas homogêneas  $[w_0, w_1, w_2]$  em  $\mathbb{P}^2$  por  $w_0 = 0$ .

Por outro lado, a aplicação  $\Gamma \rightarrow \mathbb{P}^2$  é injetiva exceto nos dois pontos  $q = [0, 0, 1]$  e  $r = [0, 1, 0]$  correspondente às duas retas em  $Q$  que passam pelo ponto  $p$ . A aplicação inversa  $\pi^{-1}$  é dada por

$$\pi^{-1} : [w_0 : w_1 : w_2] \mapsto [w_0^2, w_0 w_1, w_0 w_2, w_1 w_2],$$



e, como os polinômios  $w_0^2, w_0w_1, w_0w_2$  e  $w_1w_2$  geram o ideal homogêneo do conjunto  $\{q, r\} \subset \mathbb{P}^2$ , podemos concluir que  $\pi_2 : \Gamma \rightarrow \mathbb{P}^2$  é a explosão de  $\mathbb{P}^2$  nos pontos  $q$  e  $r$ . Finalmente, observa-se que as imagens em  $Q$  dos dois divisores excepcionais,  $E_1$  e  $E_2$  são retas em  $Q$  passando pelo ponto  $p$ .

## 1.4 Divisores

Um polinômio em uma variável é unicamente determinado, a menos de uma constante, pelas suas raízes e as suas multiplicidades, isto é, por um conjunto de pontos  $x_1, \dots, x_r \in \mathbb{A}^1$  com multiplicidades  $k_1, \dots, k_r$ . Uma função racional  $\varphi = \frac{f(x)}{g(x)}$  com  $f, g \in K[\mathbb{A}^1]$  é determinada pelos zeros de  $f$  e  $g$ . Para distinguir as raízes de  $g$  das raízes de  $f$ , tomamos suas multiplicidades com um sinal de menos. Assim, a função  $\varphi$  é dada por pontos  $x_1, \dots, x_r$  com multiplicidades  $k_1, \dots, k_r$ , onde  $k_i$  são inteiros arbitrários.

**Definição 1.32.** Seja  $X$  uma variedade irredutível. Uma coleção de subvariedades fechadas  $C_1, \dots, C_r$  de codimensão 1 em  $X$  com multiplicidades pré-determinadas  $k_1, \dots, k_r$  é o que se chama um **divisor em  $X$**  e se escreve

$$D = k_1C_1 + k_2C_2 + \dots + k_rC_r; K_i \in \mathbb{Z}; C_i \subset X.$$

Se todos os  $k_i = 0$  temos  $D = 0$ , e se todo  $K_i \geq 0$  e algum  $K_j > 0$  então  $D > 0$  e dizemos que  $D$  é o *divisor efetivo* em  $X$ . Um divisor irredutível com multiplicidade 1 é chamado *divisor primo*, isto é,  $D$  é um divisor primo se  $D = C_i$ . E ainda, se todos os  $k_i \neq 0$  então a variedade  $C_1 \cup \dots \cup C_r$  é chamada de *suporte de  $D$*  e denotamos por  $Supp D$ .

A operação de adição em divisores é definida. Sejam  $D$  e  $D'$  dois divisores escritos da seguinte forma

$$D = k_1 C_1 + \dots + k_r C_r \text{ e } D' = k'_1 C_1 + \dots + k'_r C_r.$$

Por definição,

$$D + D' = (k_1 + k'_1) C_1 + \dots + (k_r + k'_r) C_r.$$

Assim, divisores de  $X$  formam um grupo de subvariedades  $C$  de codimensão 1 de  $X$  como geradores. Este grupo é denotado por  $Div X$ .

Seja  $C$  um divisor primo. Para cada função não nula  $f \in K(X)$  atribuímos um inteiro  $v_C(f)$ . Se  $X = \mathbb{A}^1$ , então  $v_C(f)$  é a ordem do zero ou polo da função em um ponto. Assim, podemos considerar o divisor

$$\sum v_C(f) C,$$

onde a soma ocorre ao longo de toda subvariedade  $C$  irredutível de codimensão 1 para a qual  $v_C(f) \neq 0$ . Este divisor é chamado o *divisor de  $f$*  e denotado por  $div f$ .

Um divisor da forma  $D = div f$  para algum  $f \in K(X)$  é chamado *divisor principal*. Se  $div f = \sum k_i C_i$  então os divisores

$$div_0 f = \sum_{\{i|k_i>0\}} k_i C_i \text{ e } div_\infty f = \sum_{\{i|k_i<0\}} -k_i C_i$$

são chamadas de *divisor de zeros de  $f$*  e *divisor de polos de  $f$* , respectivamente.

Divisores principais formam um subgrupo  $P(X)$  do grupo  $Div X$  de todos os divisores. O grupo quociente

$$\frac{Div X}{P(X)}$$

é chamado *grupo da classe de divisores de  $X$* , e denotado por  $Cl X$ .

**Definição 1.33.** Divisores da mesma classe de  $\frac{Div X}{P(X)}$  são chamados linearmente equivalentes, isto é,  $D_1 \sim D_2$  se

$$D_1 - D_2 = div f$$

para alguma  $f \in K(X)$  não nula.

Seja  $\varphi : X \rightarrow Y$  uma aplicação regular de variedades suaves e irredutíveis, e  $D$  um divisor de  $Y$ . Suponha que  $\varphi(X) \not\subset \text{Supp } D$ . Podemos definir o *pullback* ou *imagem inversa*  $\varphi^*(D)$  do divisor  $D$  análogo a definição de pullback de funções regulares.

Suponha que  $D$  é dado por um sistema de funções  $\{f_i\}$  com respeito a cobertura de  $X = \bigcup U_i$ . Para todo  $i$  tal que  $\varphi(X) \cap U_i \neq \emptyset$ , a função racional  $\varphi^*(f_i)$  é definida em  $V_i = \varphi^{-1}(U_i)$ . Então  $X = \bigcup V_i$  é uma cobertura de abertos de  $X$ , em relação ao qual  $\{\varphi^*(f_i)\}$  é um sistema compatível com as funções de definidas no divisor em  $X$ . O divisor obtido é o pullback de  $D$  e denotado por  $\varphi^*(D)$ .

Se  $D$  e  $D'$  são dois divisores em  $Y$  definidos pelos sistemas de funções  $\{f_i\}$  e  $\{g_j\}$  com respeito às coberturas  $X = \bigcup U_i$  e  $X = \bigcup V_j$ , então o divisor  $D + D'$  é definido pelo sistema de funções  $\{f_i g_j\}$  com respeito à cobertura  $X = \bigcup (U_i \cap V_j)$ . Temos que

$$\varphi^*(D + D') = \varphi^*(D) + \varphi^*(D')$$

e se  $\varphi(X)$  é denso em  $Y$ , o pullback  $\varphi^*$  define um homomorfismo

$$\varphi^* : \text{Div } Y \rightarrow \text{Div } X.$$

O divisor principal  $\text{div } f$  é dado por um sistema de funções  $f_i = f$ , e então

$$\varphi^*(\text{div } f) = \text{div}(\varphi^*(f)).$$

Portanto  $\varphi^*$  aplica  $P(Y)$  em  $P(X)$  e define um homomorfismo

$$\varphi^* : \text{Cl } Y \rightarrow \text{Cl } X.$$

**Teorema 1.34.** *Existe uma correspondência 1–1 entre divisores a menos de equivalência linear, fibrados a menos de isomorfismo e feixes invertíveis.*

*Demonstração.* ver [12] página 272. □

### 1.4.1 O Grupo de Picard

**Definição 1.35.** Seja  $S$  uma variedade suave. O **grupo de Picard** de  $S$ ,  $\text{Pic}(S)$ , é o grupo das classes de isomorfismo de feixes invertíveis (ou fibrados em retas) em  $S$ . Para cada divisor efetivo  $D$  em  $S$  corresponde um feixe invertível  $\mathcal{O}_S(D)$  e uma seção  $s \in H^0(S, \mathcal{O}_S(D))$ ,  $s \neq 0$  tal que  $\text{div}(S) = D$ .

Definimos  $\mathcal{O}_S(D)$  para um  $D$  arbitrário por linearidade. A aplicação

$$D \rightarrow \mathcal{O}_S(D)$$

identifica  $Pic(S)$  ao grupo de classes de divisores módulo equivalência linear.

Sejam  $X$  e  $Y$  variedades suaves e irredutíveis e  $f : X \rightarrow Y$  um morfismo tal que  $f(X)$  é denso em  $Y$ . Podemos definir a imagem inversa por  $f$  de um feixe invertível. Obtemos um homomorfismo

$$f^* : Pic(Y) \rightarrow Pic(X).$$

Se  $f$  é sobrejetivo, então podemos definir a imagem inversa de um divisor, de tal maneira que  $f^*\mathcal{O}_Y(D) = \mathcal{O}_X(f^*(D))$ . Note que a imagem inversa de uma seção não nula de  $\mathcal{O}_Y(D)$  é diferente de zero.

Se  $f$  é um morfismo de variedades de dimensão  $n$  genericamente finito de grau  $d$  definimos a imagem direta  $f_*(D)$  de um divisor  $D$  fazendo

$$\begin{cases} f_*(D) = 0, & \text{se } f(D) \text{ tem dimensão menor que } n-1; \\ f_*(D) = r\Gamma, & \text{se } f(D) \text{ é um divisor } \Gamma \text{ e o morfismo induzido no divisor tem grau } r. \end{cases}$$

Definimos  $f_*D$  para todos os divisores  $D$  em  $S$  por linearidade. Verificamos que  $D \equiv D'$  implica  $f_*D \equiv f_*D'$ . Assim

$$f_*f^*D = dD \text{ para todos os divisores } D \text{ em } S.$$

A importância particular do grupo Picard, no caso de superfícies, decorre da existência de uma forma de interseção, definida como:

**Definição 1.36.** Seja  $C$  e  $C'$  são duas curvas irredutíveis em  $S$ ,  $x \in C \cap C'$  e  $\mathcal{O}_x$  o anel local de  $S$  em  $x$ . Se  $f$  (respectivamente  $g$ ) são as equações de  $C$  (respectivamente  $C'$ ) em  $\mathcal{O}_x$ , a multiplicidade da interseção de  $C$  e  $C'$  em  $x$  é definida por

$$m_x(C \cap C') = \dim_{\mathbb{C}} \frac{\mathcal{O}_x}{(f, g)}.$$

E ainda,

**Definição 1.37.** Se  $C$  e  $C'$  são duas curvas irredutíveis distintas em  $S$ , o número de interseções de  $C$  e  $C'$  é definida por

$$(C.C') = \sum_{x \in C \cap C'} m_x(C \cap C').$$

**Teorema 1.38.** *Seja  $S$  uma superfície e  $\mathcal{E} : \widehat{S} \rightarrow S$  a explosão de  $S$  em uma subvariedade suave  $Y$  de codimensão  $r \geq 2$  e seja  $E$  o divisor excepcional da explosão.*

1. *A aplicação  $\text{Pic}(S) \oplus \mathbb{Z}$  sobre  $\text{Pic}(\widehat{S})$  definida por*

$$(D, n) \longmapsto \mathcal{E}^*(D) + nE \quad (1.2)$$

*é um isomorfismo.*

2. *Sejam  $D$  e  $D'$  dois divisores sobre  $S$  temos*

$$(\mathcal{E}^*D \cdot \mathcal{E}^*D') = (D \cdot D'), (E \cdot \mathcal{E}^*(D)) = 0, E^2 = -1 \quad (1.3)$$

*Demonstração.* A prova dos itens 1 e 2 se encontra em [1] página 12. □

## 1.4.2 Fibrado Canônico Algumas Aplicações Importantes

Sejam  $V \subseteq \mathbb{A}^n$  uma variedade algébrica e  $p \in V$  e  $f = \overline{F} \in k[V]$ . Se  $v = (v_1, \dots, v_n)$  é um vetor tangente a  $V$  em  $p$  e  $F \in \mathbf{I}(V)$ , então

$$\sum_{i=1}^n \partial_i F(p) \cdot v_i = 0.$$

Dessa forma, se  $f = \overline{F} = \overline{G}$  em  $k[V]$ , então

$$F - G \in \mathbf{I}(V) \text{ e } \sum_{i=1}^n \partial_i F(p) \cdot v_i = \sum_{i=1}^n \partial_i G(p) \cdot v_i.$$

Assim, definimos:

**Definição 1.39.** Dado  $f = \overline{F} \in k[V]$ , o funcional linear  $d_p f : T_p V \rightarrow k$  definido por

$$d_p f(v) = \sum_{i=1}^n \partial_i F(p) \cdot v_i$$

é chamado de diferencial de  $f$  em  $p$ .

Fixando  $f \in k[V]$ , definimos a função  $\varphi_f : V \rightarrow \bigcup_{p \in V} (T_p V)^*$  por  $\varphi_f(p) = d_p f$  e denotamos esta função por  $df$ .

Por abuso de notação, escreveremos  $x_i$  ao invés de  $\bar{x}_i$ . Observemos que, para todo ponto  $p \in V$  e  $i \in \{1, \dots, n\}$  a aplicação  $d_p x_i : T_p V \rightarrow k$  é por definição dada por

$$d_p x_i(v) = \sum_{j=1}^n \partial_j(x_i)(p) \cdot v_j = v_i.$$

Logo, para qualquer  $f = \bar{F} \in k[V]$  e  $v \in T_p V$ ,

$$d_p f(v) = \sum_{i=1}^n \partial_i F(p) \cdot v_i = \sum_{i=1}^n \partial_i F(p) \cdot d_p x_i(v).$$

Portanto, podemos escrever  $d_p f = \sum_{i=1}^n \partial_i F(p) d_p x_i$  e  $df = \sum_{i=1}^n \partial_i F dx_i$ .

Consideremos o conjunto  $\Phi[V]$  consistindo de todas as funções que associam cada ponto  $p \in V$  a um elemento em  $(T_p V)^*$ . Observe que  $df \in \Phi[V]$ .

Com a operação de adição de funções,  $\Phi[V]$  é um grupo abeliano. Além disso, definindo  $(f\varphi)(p) = F(p)\varphi(p)$ , para cada  $f = \bar{F} \in k[V]$  e  $\varphi \in \Phi[V]$ , vemos que esta operação está bem definida, pois se  $f = \bar{F} = \bar{G}$  em  $k[V]$ , então  $F(p) = G(p)$ , e assim  $\Phi[V]$  é um  $k[V]$ -módulo.

**Definição 1.40.** Um elemento  $\varphi \in \Phi[V]$  é **uma forma diferencial regular em  $V$**  se cada ponto  $p \in V$  tem uma vizinhança  $U$  tal que a restrição de  $\varphi$  a  $U$  pertence ao  $k[U]$ -submódulo de  $\Phi[U]$  gerado pelos elementos  $df$  com  $f \in k[U]$ .

Assim,  $\varphi$  é uma forma diferencial regular em  $V$  se, e somente se, em alguma vizinhança de cada  $p \in V$  a aplicação  $\varphi$  pode ser escrita na forma  $\varphi = \sum_{i=1}^m f_i dg_i$  com  $f_i, g_i$  funções regulares nessas vizinhanças, para cada  $i \in \{1, \dots, m\}$ .

O conjunto das formas diferenciais regulares sobre  $V$  é um  $k[V]$ -módulo, que denotaremos por  $\Omega[V]$ .

**Definição 1.41.** Chamaremos uma forma diferencial regular em  $\mathbb{A}^n$  de uma *1-forma polinomial em  $\mathbb{A}^n$* . Assim, uma 1-forma polinomial em  $\mathbb{A}^n$  é dada por

$$\omega = a_1 dx_1 + \dots + a_n dx_n,$$

onde  $a_1, \dots, a_n \in k[x_1, \dots, x_n]$ . Quando  $a_1, \dots, a_n$  são todos homogêneos de mesmo grau  $s$ , dizemos que  $\omega$  é uma 1-forma homogênea de grau  $s$ .

Diremos que um ponto  $p \in \mathbb{A}^n$  é uma singularidade de  $\omega$  quando  $a_i(p) = 0$  para todo  $i \in \{1, \dots, n\}$ .

Desta forma podemos associar a um diferencial  $\omega \in \Omega[V]$  o divisor

$$\text{div}(\omega) = \sum_{p \in V} v_V(\omega)(p).$$

Um diferencial  $\omega \in \Omega[V]$  é *holomorfo* (ou *regular*) quando  $\text{div}(\omega)$  é efetivo. Se  $\text{div}(\omega) \leq 0$  diremos que  $\omega$  não se anula.

Se  $\omega_1, \omega_2 \in \Omega[V]$  então existe uma função  $f \in k(V)$  tal que  $\omega_1 = f\omega_2$  e, portanto,

$$\text{div}(\omega_1) = \text{div}(f) + \text{div}(\omega_2),$$

ou seja, os divisores de diferenciais não nulos são todos linearmente equivalentes.

**Definição 1.42.** *A classe em  $\text{Pic}(V)$  determinada pelo divisor de uma diferencial não nula é chamada de **classe canônica** e qualquer divisor nesta classe é dito um **divisor canônico**.*

A seguir, alguns resultados importantes para a continuação do nosso trabalho:

1. **(Fórmula de Projeção:)** Seja  $\Pi : X \rightarrow Y$  um morfismo sobrejetivo de variedades.

Dado um divisor  $D$  em  $Y$  temos

$$\Pi^*(D).D' = D.\Pi_*(D') \tag{1.4}$$

para  $D'$  divisor em  $X$ . (ver [18] página 34)

2. Seja  $f : \bar{X} \rightarrow X$  a explosão de  $X$  em uma curva  $C$  de gênero  $g$  e divisor excepcional  $E$ ,  $X$  uma variedade suave de dimensão 3. Então

$$f_*(E^2) = -C \text{ e } f_*(E^3) = K_X.C + 2 - 2g \tag{1.5}$$

onde  $K_X$  denota o divisor canônico de  $X$ . (ver [18] página 75)

3. Seja  $f : \bar{X} \rightarrow X$  a explosão de  $X$  em uma subvariedade suave  $Y$  de codimensão  $r \geq 2$  e seja  $E$  o divisor excepcional da explosão. Então

$$K_{\bar{X}} = f^*K_X + (r - 1)E. \tag{1.6}$$

(ver [15] página 301)

## 1.5 Sistemas lineares de curvas

Seja  $M_1, M_2, \dots, M_N$  uma ordem fixa do conjunto de monômios em  $K[x, y, z]$  de grau  $d$ , onde  $N$  é  $1 + 2 + \dots + (d + 1) = \frac{1}{2}(d + 1)(d + 2)$ . Seja  $F$  uma curva de grau  $d$  da forma  $F = \sum a_i M_i$ , onde  $a_1, \dots, a_N \in K$  e não são todos nulos. No espaço projetivo,  $(a_1, \dots, a_N)$  e  $\lambda(a_1, \dots, a_N)$  determinam a mesma curva. Ou então, cada curva  $F$  de grau  $d$  corresponde a um único ponto em  $\mathbb{P}^{N-1} = \mathbb{P}^{d(d+3)/2}$  e cada ponto de  $\mathbb{P}^{d(d+3)/2}$  corresponde a uma única curva. Identificamos  $F$  com seu ponto correspondente em  $\mathbb{P}^{d(d+3)/2}$  e dizemos que as curvas de grau  $d$  formam um espaço projetivo de dimensão  $d(d + 3)/2$ .

**Exemplo 1.43.** Sejam os casos:

1.  $d = 1$ .

Cada reta  $ax + by + cz$  corresponde a um ponto  $(a : b : c) \in \mathbb{P}^2$ .

As retas em  $\mathbb{P}^2$  formam o espaço projetivo  $\mathbb{P}^2$  conhecido como  $\mathbb{P}^2$  dual e denotado por  $(\mathbb{P}^2)^\vee$ .

2.  $d = 2$ .

A cônica  $ax^2 + bxy + cxz + dy^2 + eyz + fz^2$  corresponde ao ponto

$$(a : b : c : d : e : f) \in \mathbb{P}^5.$$

As cônicas formam um  $\mathbb{P}^5$ .

3. As cúbicas formam  $\mathbb{P}^9$ , as quárticas formam um  $\mathbb{P}^{14}$ , etc.

Se colocamos condições no conjunto de todas as curvas de grau  $d$ , as curvas que satisfazem tais condições formam um subconjunto de  $\mathbb{P}^{d(d+3)/2}$ . Esse subconjunto é uma subvariedade linear e é chamado *sistema linear de curvas*.

**Lema 1.44.** *Seja  $p \in \mathbb{P}^2$  um ponto fixo. O conjunto de curvas de grau  $d$  contendo  $p$  forma um hiperplano em  $\mathbb{P}^{d(d+3)/2}$ .*

*Demonstração.* Se  $p = (x : y : z)$ , a curva correspondente a  $(a_1 : \dots : a_N) \in \mathbb{P}^{d(d+3)/2}$  passa por  $p$  se, e somente se,  $\sum a_i M_i(x, y, z) = 0$ . Como nem todos os  $M_i(x, y, z)$  são nulos, então  $(a_1 : \dots : a_N)$  satisfazendo a equação formam um hiperplano.  $\square$

Assim, para qualquer conjunto de pontos, as curvas de grau  $d$  que os contêm formam uma variedade linear em  $\mathbb{P}^{d(d+3)/2}$ . A interseção de  $n$  hiperplanos em  $\mathbb{P}^n$  não é vazia, pois

$$\sum_{i=1}^n \dim H_i = n^2 - n \geq n = \dim \mathbb{P}^n, n > 1.$$

Logo, existe uma curva de grau  $d$  passando por quaisquer  $\frac{d(d+3)}{2} = n - 1$  pontos dados.

**Exemplo 1.45.** Dados  $P_1, P_2, P_3, P_4, P_5$  pontos de  $\mathbb{P}^2$  em posição geral, existe uma única cônica passando por estes pontos. Com efeito, a cônica é dada por  $\bigcap_{i=1}^5 H_i$ , onde  $H_i$  é o hiperplano que parametriza as cônicas passando por  $p_i$ .

## 1.6 Resoluções Livres

Uma importante distinção da teoria de módulos e da teoria de espaços vetoriais sobre um corpo é que muitas propriedades dos módulos são frequentemente indicado em termos de homomorfismos e sequências exatas. Apresentamos esta linguagem:

**Definição 1.46.** Considere a sequência de  $R$ -módulos e homomorfismos

$$\dots \rightarrow M_{i+1} \xrightarrow{\varphi_{i+1}} M_i \xrightarrow{\varphi_i} M_{i-1} \rightarrow \dots$$

1. Dizemos que a sequência é **exata** em  $M_i$  se  $Im(\varphi_{i+1}) = Ker(\varphi_i)$ .
2. A sequência completa é chamada **exata**, se é exata em cada  $M_i$ .

Muitas propriedades importantes de homomorfismos podem ser expressas dizendo que uma determinada sequência é exata. Por exemplo, podemos determinar se um homomorfismo de  $R$ -módulos  $\varphi : M \rightarrow N$  é sobrejetiva, injetiva, ou um isomorfismo:

- $\varphi : M \rightarrow N$  é sobrejetiva se, e somente se, a sequência

$$M \xrightarrow{\varphi} N \rightarrow 0$$

é exata, onde  $N \rightarrow 0$  é o homomorfismo que leva qualquer elemento de  $N$  em 0. De fato, a sequência é exata em  $N$  se, e somente se,  $Im(\varphi) = Ker(N \rightarrow 0) = N$ , como queríamos.

- $\varphi : M \rightarrow N$  é injetiva se, e somente se, a seqüência

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{\varphi} N$$

é exata, onde  $0 \rightarrow M$  é o homomorfismo que leva o elemento 0 na identidade aditiva de  $M$ . De fato, a seqüência é exata em  $N$  se, e somente se,  $0 = \text{Im}(0 \rightarrow M) = \text{Ker}(\varphi)$ , como queríamos.

- $\varphi : M \rightarrow N$  é um isomorfismo se, e somente se, a seqüência

$$0 \rightarrow M \xrightarrow{\varphi} N \rightarrow 0$$

é exata. De fato, pelos itens acima  $\varphi$  é um isomorfismo se, e somente se, é injetiva e sobrejetiva.

Dado qualquer homomorfismo de  $R$ -módulos ou qualquer par de módulos, sendo um, submódulo do outro, obtemos uma seqüência exata associada como se segue.

**Proposição 1.47.** 1. Para qualquer homomorfismo de  $R$ -módulos  $\varphi : M \rightarrow N$ , temos uma seqüência exata

$$0 \rightarrow \text{Ker}(\varphi) \xrightarrow{\varphi'} M \xrightarrow{\varphi} N \xrightarrow{\varphi''} \text{Coker}(\varphi) = \frac{N}{\text{Im}(\varphi)} \rightarrow 0,$$

onde  $\varphi'$  é a inclusão e  $\varphi''$  é o homomorfismo natural sobrejetivo no módulo quociente.

2. Se  $Q \subset P$  é um submódulo de um  $R$ -módulo  $P$ , então temos uma seqüência exata

$$0 \rightarrow Q \xrightarrow{v'} P \xrightarrow{v} \frac{P}{Q} \rightarrow 0,$$

onde  $v'$  é a inclusão, e  $v$  é o homomorfismo natural sobrejetivo no módulo quociente.

*Demonstração.* No item 1 temos  $\text{Im}(0 \rightarrow \text{Ker}(\varphi)) = 0 = \text{Ker}(\varphi')$ , logo a seqüência é exata em  $\text{Ker}(\varphi)$ . Da mesma forma,  $\text{Im}(\varphi') = \text{Ker}(\varphi)$  e, portanto, a seqüência é exata em  $M$ . Agora,  $\text{Ker}(\varphi'') = \text{Im}(\varphi)$  por definição de  $\text{Coker}(\varphi) = \frac{N}{\text{Im}(\varphi)}$ . Logo a seqüência é exata em  $N$ . E por último,  $\text{Ker}(\text{Coker}(\varphi) \rightarrow 0) = \text{Coker}(\varphi) = \text{Im}(\varphi'')$ , o que prova que a seqüência é de fato exata.

No item 2 temos  $\text{Im}(0 \rightarrow Q) = \text{Ker}(v')$  e, ainda,  $\text{Im}(v') = Q = \text{Ker}(v)$ . Logo, a seqüência é exata em  $Q$  e  $P$ , respectivamente. Como  $v$  é sobrejetivo, concluímos que a seqüência é exata.  $\square$

Escolhendo elementos de um  $R$ -módulo  $M$  é convenientemente descrevê-los em termos de homomorfismos.

**Proposição 1.48.** *Seja  $M$  um  $R$ -módulo.*

1. *Escolher um elemento de  $M$  é equivalente a escolher um homomorfismo  $R \rightarrow M$ .*
2. *Escolher  $t$  elementos de  $M$  é equivalente a escolher um homomorfismo  $R^t \rightarrow M$ .*
3. *Escolher um conjunto de  $t$  geradores de  $M$  é equivalente a escolher um homomorfismo  $R^t \rightarrow M$  sobrejetivo (isto é, a sequência  $R^t \rightarrow M \rightarrow 0$ ) é exata.*
4. *Se  $M$  é livre, escolher uma base com  $t$  elementos é equivalente a escolher um isomorfismo  $R^t \rightarrow M$ .*

*Demonstração.* Para provar o item 1, note que escolher um elemento  $f$  de um módulo  $M$  é o mesmo que escolher um homomorfismo de  $R$ -módulos  $\varphi : R \rightarrow M$  satisfazendo  $\varphi(1) = f$ . Isto é verdade, pois  $\varphi(1)$  determina os valores de  $\varphi$  em todo  $g \in R$ :

$$\varphi(g) = \varphi(g \cdot 1) = g \cdot \varphi(1) = gf.$$

Assim, a escolha de  $t$  elementos em  $M$  pode ser pensado como a escolha de  $t$  homomorfismos  $R \rightarrow M$  de  $R$ -módulos ou, equivalente, como a escolha de um homomorfismo  $R^t \rightarrow M$  de  $R$ -módulos. Isso prova o item 2. Mais explicitamente, se tomamos  $R^t$  como o espaço de vetores coluna e denotarmos a base standard de  $R^t$  por  $e_1, e_2, \dots, e_t$ , e então, escolher  $t$  elementos  $f_1, f_2, \dots, f_t$  de  $M$ , é equivalente a escolher homomorfismos de  $R$ -módulos  $\varphi : R^t \rightarrow M$  definidos por  $\varphi(e_i) = f_i$ , para todo  $i = 1, \dots, t$ . A imagem de  $\varphi$  é o submódulo  $\langle f_1, \dots, f_t \rangle \subset M$ . Portanto, a escolha de um conjunto de  $t$  geradores de  $M$  é equivalente a escolher um homomorfismo  $R^t \rightarrow M$  de  $R$ -módulos, que é sobrejetivo. Isto prova o item 3, e o item 4 segue imediatamente.  $\square$

Podemos também expressar o que significa ser projetiva em termos de homomorfismos e sequências exatas. Mais interessante para os nossos propósitos, é a interpretação de representação de matrizes em termos dessa linguagem. A seguinte terminologia será útil.

**Definição 1.49.** Seja  $M$  um  $R$ -módulo. Uma **apresentação para  $M$**  é um conjunto de geradores  $f_1, \dots, f_t$ , juntamente com um conjunto de geradores para o módulo sizígia  $Syz(f_1, \dots, f_t)$  de relações entre  $f_1, \dots, f_t$ .

Obtém-se uma apresentação matricial para o módulo  $M$  organizando os geradores de  $Syz(f_1, \dots, f_t)$  em colunas - uma apresentação matricial é equivalente à uma apresentação de  $M$ . Para interpretar a definição (1.49) em termos de seqüências exatas, note que os geradores  $f_1, \dots, f_t$  são dados por um homomorfismo sobrejetor  $\varphi : R^t \rightarrow M$  pelo item (3) da proposição (1.48), o que é equivalente a seqüência exata

$$R^t \xrightarrow{\varphi} M \rightarrow 0.$$

A aplicação  $\varphi$  leva  $(g_1, \dots, g_t) \in R^t$  em  $\sum_{i=1}^t g_i f_i \in M$ . Segue-se que sizígia em  $f_1, \dots, f_t$  é um elemento do  $ker(\varphi)$ , ou seja,

$$Syz(f_1, \dots, f_t) = Ker(\varphi : R^t \rightarrow M).$$

Pelo item (3) da proposição (1.48), escolher um conjunto de geradores para o módulo de sizígia é equivalente a escolher um homomorfismo sobrejetivo  $\psi$  de  $R^s$  em  $Ker(\varphi) = Syz(f_1, \dots, f_t)$ . Mas, como  $\psi$  é sobrejetiva temos que  $Im(\psi) = Ker(\varphi)$ , que é justamente a condição de exatidão em  $R^t$  na seqüência

$$R^s \xrightarrow{\psi} R^t \xrightarrow{\varphi} M \rightarrow 0. \quad (1.7)$$

Isto prova que a apresentação de  $M$  é equivalente a uma seqüência exata da forma (1.7). Note também que a matriz de  $\psi$  em relação às bases de  $R^s$  e  $R^t$  é uma matriz de apresentação de  $M$ .

**Proposição 1.50.** *Seja  $M$  um  $R$ -módulo finitamente gerado. Então,  $M$  tem uma apresentação da forma dada em (1.7)*

*Demonstração.* ver [8]. □

**Exemplo 1.51.** Seja  $I = \langle x^2 - x, xy, y^2 - y \rangle$ , em  $R = k[x, y]$ . Em termos geométricos,  $I$  é o ideal da variedade  $V = \{(0, 0), (1, 0), (0, 1)\}$  em  $K^2$ . Afirmamos que  $I$  tem uma apresentação dada pela seguinte seqüência exata:

$$R^2 \xrightarrow{\psi} R^3 \xrightarrow{\varphi} I \rightarrow 0, \quad (1.8)$$

onde  $\varphi$  é o homomorfismo definido pela matriz  $1 \times 3$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} x^2 - x & xy & y^2 - y \end{pmatrix}$$

e  $\psi$  é definida pela matriz  $3 \times 2$

$$\mathbf{B} = \begin{pmatrix} y & 0 \\ -x + 1 & y - 1 \\ 0 & -x \end{pmatrix}.$$

De fato a sequência (1.8) é uma representação de  $I$ .

# Capítulo 2

## Transformações de Cremona de $\mathbb{P}^2$

Nesse capítulo o nosso interesse é introduzir transformações do plano nele mesmo, que estabelecem relações entre as curvas de diferentes ordens e que possuem diferentes conjuntos de singularidades.

### 2.1 Transformações racionais

Vamos retornar a definição 1.27 em outro contexto:

**Definição 2.1.** Uma **transformação racional de  $\mathbb{P}^n$  em  $\mathbb{P}^n$** , faz corresponder a um ponto  $P = (x_0, x_1, \dots, x_n)$  um único ponto  $Q = (x'_0, x'_1, \dots, x'_n)$ , definido pelas equações da forma

$$\begin{cases} x'_0 = \phi_0(x_0, x_1, \dots, x_n) \\ x'_1 = \phi_1(x_0, x_1, \dots, x_n) \\ \vdots \\ x'_n = \phi_n(x_0, x_1, \dots, x_n) \end{cases}$$

onde  $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n$  são polinômios homogêneos de grau  $\deg(T)$  em  $x_0, x_1, \dots, x_n$ .

Assumimos que  $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n$  são linearmente independentes, e denotaremos a transformação por  $\mathbf{T}$ . Então podemos escrever

$$Q = \mathbf{T}(P).$$

Denotamos a inversa de  $T$  por  $T^{-1}$  e temos  $T.T^{-1} = T^{-1}.T = 1$ , onde  $1$  é a transformação identidade. O produto de uma transformação por si mesma diz-se o quadrado dessa transformação e representamos por  $T^2$ ; analogamente se define o cubo, etc.

Sejam pontos  $O_i$  zeros comuns de  $\phi_0, \phi_1, \dots, \phi_n$ . Tais pontos são chamados de *pontos base* da transformação. Observe que  $T$  não está definida nestes pontos.

## 2.2 Transformações de Cremona

Uma transformação racional no plano é, portanto, uma  $(N, 1)$  correspondência entre os pontos  $P$  e  $Q$ , isto é, dadas as relações de  $x', y', z'$ , as equações

$$x' = \phi_0(x, y, z), \quad y' = \phi_1(x, y, z), \quad z' = \phi_2(x, y, z) \quad (2.1)$$

tem  $N$  soluções distintas para  $x, y, z$ . Se  $N = 1$ , temos 1 solução, e isto significa que  $x : y : z$  são funções racionais de  $x' : y' : z'$ . Neste caso, as equações da transformação inversa serão da forma

$$x = \psi_1(x', y', z'), \quad y = \psi_2(x', y', z'), \quad z = \psi_3(x', y', z'), \quad (2.2)$$

onde  $\psi_1, \psi_2, \psi_3$  são polinômios homogêneos de grau  $\deg(T^{-1})$  em  $x', y', z'$ .

Considere agora a rede de curvas  $\Phi$  definida pela equação

$$\lambda\phi_1 + \mu\phi_2 + \nu\phi_3 = 0, \quad (2.3)$$

onde  $\lambda, \mu, \nu$  são parâmetros arbitrários. Assim,  $P$  descreve alguma curva da rede  $\Phi$ , e o ponto correspondente  $Q = \mathbf{T}(P)$  descreve uma reta. Então, pela transformação, as curvas da rede são relacionadas com retas no plano; e inversamente, dada qualquer rede de curvas, uma representação linear desta rede em retas no plano é equivalente a uma transformação racional no plano.

Dadas quaisquer duas curvas  $\Phi_1, \Phi_2$  da rede  $\Phi$ , definimos um feixe de curvas por  $\Phi_1 + \lambda\Phi_2$  e o correspondente deste feixe pela transformação, é um feixe de retas. Vamos denotar por  $N$  o número de interseções de  $\Phi_1, \Phi_2$ , fora dos pontos de base  $O_i$ ; e por  $G^N$  o conjunto desses pontos, a saber,  $P_1, \dots, P_N$ . Denotamos por  $N$  o grau de  $\Phi$ . As curvas  $\Phi$  podem ter pontos base  $O_i$  comum a todas elas.

Curvas arbitrárias do feixe  $\Phi_1 + \lambda\Phi_2$  de  $\Phi$ , correspondem, pela transformação, as retas do feixe  $L_1 + \lambda L_2$ ; e se o vértice do feixe  $L_1 + \lambda L_2$  é  $Q$ , então todo ponto  $P_i$  de  $G_N$  corresponde ao ponto  $Q$ . Por outro lado, se quaisquer dois pontos do plano têm a mesma transformada  $Q$ , então eles pertencem ao mesmo conjunto de interseção  $G_N$  de alguma rede  $\Phi$ .

**Definição 2.2.** Uma **transformação de Cremona** é uma transformação birracional, isto é, uma transformação racional com inversa racional. O grau da transformação é o grau  $\deg(T)$  das curvas.

Então se  $\mathbf{T}$  é uma transformação de Cremona, sua inversa  $\mathbf{T}^{-1}$  também é. Neste caso, o par  $(\deg(T), \deg(T^{-1}))$  é chamado bigrau de  $T$ .

**Teorema 2.3.** *Uma transformação de Cremona de  $\mathbb{P}^2$  e sua inversa possuem o mesmo grau.*

*Demonstração.* Seja  $\mathbf{T}$  uma transformação de Cremona. Denotaremos por  $A.B$ , o número de interseções de duas curvas  $A$  e  $B$ ;  $L$  e  $L'$ , são retas;  $\Phi$  e  $\Psi$ , curvas de graus  $\deg(T)$  e  $\deg(T^{-1})$ , respectivamente. Tomando  $L$  diferente das retas  $XY, YZ$  e  $XZ$ , temos, pelo Teorema de Bezout,

$$\deg(T) = \Phi.L = T(\Phi).T(L) = L'.\Psi = \deg(T^{-1}) \quad (2.4)$$

pois  $\mathbf{T}$  é birracional. □

O principal exemplo de transformação de Cremona é a aplicação quadrática, também conhecida como Transformação de Cremona Standard.

**Exemplo 2.4.** Seja  $\mathbf{T} : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  uma transformação definida por

$$\mathbf{T}(x : y : z) = (yz : xz : xy).$$

Como os polinômios que definem a transformação são homogêneos de grau 2 temos que  $\mathbf{T}$  é uma transformação racional.

Pelo teorema 2.3 temos que o grau de  $T^{-1}$  é 2. Repare que  $\mathbf{T}^{-1} = \mathbf{T}$  pois

$$\begin{aligned}
 (\mathbf{T}^{-1} \circ \mathbf{T})(x : y : z) &= \mathbf{T}^{-1}(\mathbf{T}(x : y : z)) \\
 &= \mathbf{T}^{-1}(yz : xz : xy) \\
 &= (xzyx : yzxy : yzxx) \\
 &= xyz(x : y : z), \quad xyz \neq 0 \\
 &= (x : y : z).
 \end{aligned}$$

Os pontos de base de  $T$  são  $X = (1 : 0 : 0)$ ,  $Y = (0 : 1 : 0)$  e  $Z = (0 : 0 : 1)$ . Temos que  $T$  não é injetiva na reta  $XZ$ . De fato, seja um ponto qualquer  $P = (x : 0 : z)$  da reta  $XZ$ , diferente de  $X$  e  $Z$ . Então,

$$T(x : 0 : z) = (0 : xz : 0) = xz(0 : 1 : 0) = (0 : 1 : 0) = Y.$$

Do mesmo modo,  $T$  não é injetiva nas retas  $XY$  e  $YZ$ . Essas retas são chamadas retas fundamentais. A figura abaixo ilustra a situação.

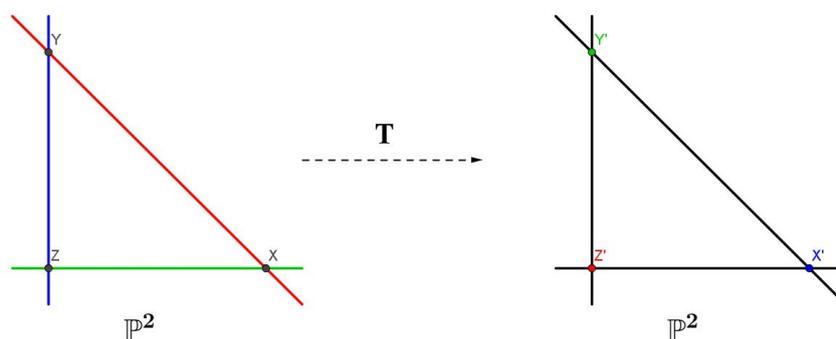


Figura 2.1: Transformação Standard

**Observação 2.5.** A imagem de uma reta passando por  $X$ , diferente das retas fundamentais, é uma reta passando por  $X'$ . De fato, se  $L$  é uma reta passando por  $X$ , podemos escrevê-la como  $L : my + nz = 0$ . Assim  $0 = mxy + nxz = mz' + ny'$  que é a reta  $T(L)$  passando por  $X'$ .

Do mesmo modo, a imagem de uma reta passando por  $Y$  ou  $Z$ , diferente das retas fundamentais, é uma reta passando por  $Y'$  ou  $Z'$ , respectivamente.

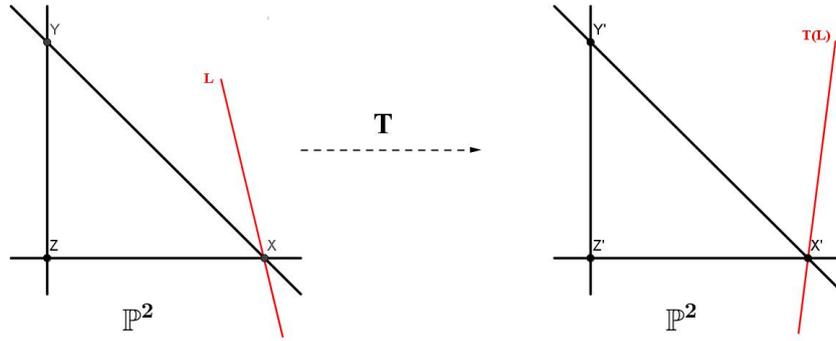


Figura 2.2: Correspondência entre retas

**Observação 2.6.** Chamamos as cônicas passando por  $X$ ,  $Y$  e  $Z$  de  $\Phi$ -cônicas. Se tomarmos  $\lambda, \mu, \nu$  fixos temos que  $P = (x : y : z)$  descreve uma  $\Phi$ -cônica  $C_1$  no domínio pois,

$$0 = \lambda\phi_1 + \mu\phi_2 + \nu\phi_3 = \lambda yz + \mu xz + \nu xy$$

e,  $Q = T(P) = (x' : y' : z')$  descreve uma reta  $T(C_1)$  na imagem pois,

$$\lambda x' + \mu y' + \nu z' = 0.$$

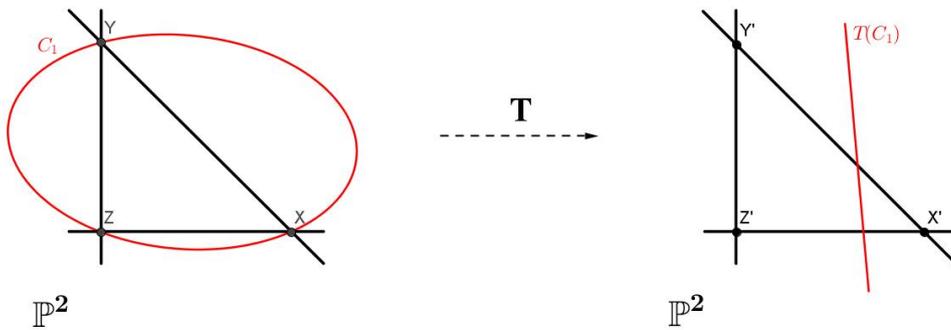


Figura 2.3: Correspondência

Dadas quaisquer duas  $\Phi$ -cônicas  $C_1$  e  $C_2$  passando por  $P$ , temos que o feixe de cônicas  $C_1 + \lambda C_2$  corresponde, pela transformação, ao feixe de retas  $L_1 + \lambda L_2$  passando por  $Q = T(P)$  como na figura abaixo.

Quando  $P$  tende a  $X$ , o feixe de cônicas tende a passar somente pelos pontos  $x, y, z$  e toca uma tangente  $t$  em  $X$ , e  $Q$  tende simultaneamente ao vértice  $Q_t$  do feixe de

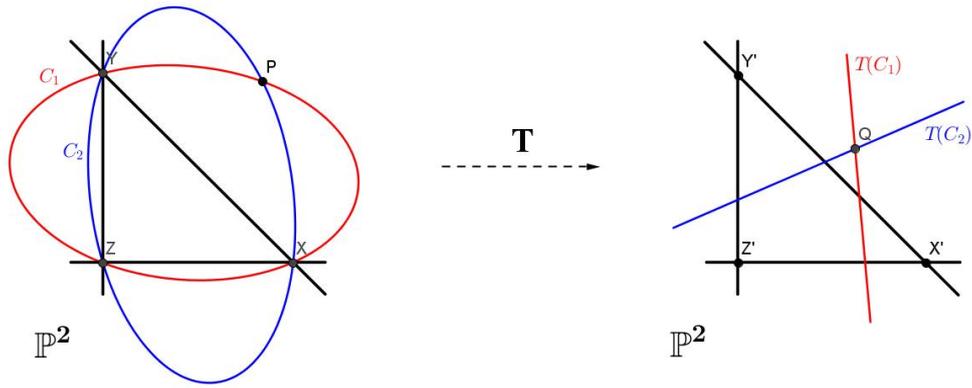


Figura 2.4: Correspondência entre feixes

retas correspondente a este limitante do feixe de cônicas. A tangente em  $X$  para a cônica  $\lambda yz + \mu xz + \nu xy = 0$  é  $\mu z + \nu y = 0$ . Se fixamos  $\mu : \nu$ , a correspondente reta  $\lambda x' + \mu y' + \nu z' = 0$  passa pelo ponto  $(0 : \nu : -\mu)$ .

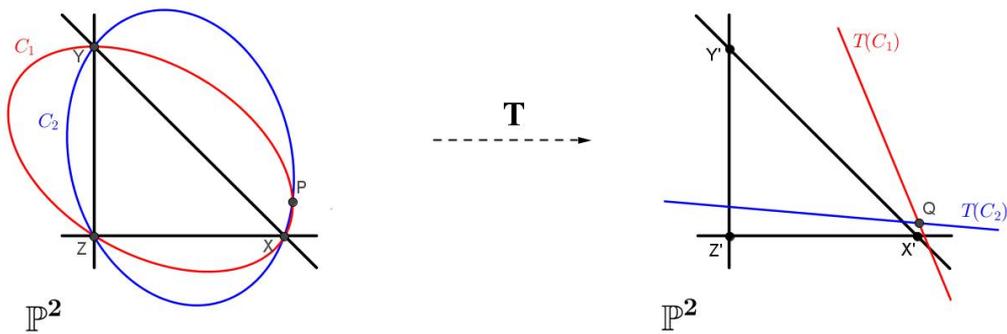


Figura 2.5: Correspondência entre feixes

Para toda direção  $t$  em  $X$  existe um correspondente ponto  $O$  na reta fundamental  $YZ$ , tal que, se a curva  $\mathcal{C}$  tem um ramo em  $X$  na direção  $t$ , então a transformada própria  $\mathcal{C}'$  de  $\mathcal{C}$  passa por  $O$ .

Reciprocamente, se  $O$  é qualquer ponto da reta fundamental  $YZ$  diferente de  $Y$  e  $Z$ , então qualquer curva  $\mathcal{C}$  passando por  $O$  transforma uma curva a qual tem ramos em  $X$  na direção correspondente  $0$ .

**Definição 2.7.** Uma **rede homaloidal** de curvas no plano é uma rede de curvas cujo grau é 1.

Qualquer transformação de plano cujas equações podem ser reduzidas por uma mudança de coordenadas a  $(yz : xz : xy)$  é chamada uma transformação quadrática padrão.

**Exemplo 2.8.** A transformação  $\mathbf{T}' : \mathbb{P}^2 \rightarrow \mathbb{P}^2$  definida por  $\mathbf{T}'(x : y : z) = \left(\frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z}\right)$ . Como os polinômios que definem a transformação são homogêneos de grau 2 temos que  $\mathbf{T}'$  é uma transformação racional.

Assim, as equações dadas em 2.1 definem uma transformação de Cremona se, e somente se, a rede dada em 2.3 é homaloidal. Por outro lado, podemos obter infinitas transformações de Cremona a partir de qualquer rede homaloidal de curvas. Isto é, se  $\bar{\phi}_1, \bar{\phi}_2, \bar{\phi}_3$  são combinações lineares independentes de  $\phi_1, \phi_2, \phi_3$ , a rede dada por  $\lambda\phi_1 + \mu\phi_2 + \nu\phi_3 = 0$  também pode ser expressa por

$$p\bar{\phi}_1 + q\bar{\phi}_2 + r\bar{\phi}_3 = 0,$$

e, portanto, temos a transformação de Cremona definida por

$$x'' = \bar{\phi}_1, \quad y'' = \bar{\phi}_2, \quad z'' = \bar{\phi}_3.$$

Note que  $x'', y''$  e  $z''$  são funções lineares de  $x', y', z'$ . Assim, podemos enunciar o seguinte teorema:

**Teorema 2.9.** *Qualquer transformação de Cremona é associada a uma rede homaloidal de curvas  $\Phi$  e, inversamente, qualquer rede homaloidal de curvas gera uma infinidade de transformações de Cremona.*

Para mais detalhes ver [13] página 46.

### 2.2.1 Propriedades Locais de curvas

Seja  $F \in K[x, y]$  a equação que define uma curva afim  $\mathcal{C} \subset \mathbb{A}^2$  e  $p = (a, b) \in \mathcal{C}$ . Chamamos  $p$  um *ponto simples* de  $\mathcal{C}$  se  $F_x(p) \neq 0$  ou  $F_y(p) \neq 0$ . Nesse caso, a reta

$$F_x(p).(x - a) + F_y(p).(y - b) = 0$$

é chamada *reta tangente de  $\mathcal{C}$  no ponto  $p$* .

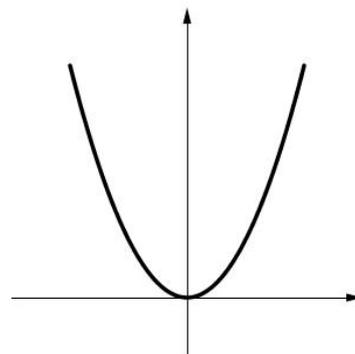
Como antes, um ponto que não é simples é chamado *múltiplo* ou *singular* e uma curva somente com pontos simples é dita *não singular*. Ou então, uma curva com pelo menos um ponto que não é simples é dita *singular*.

**Exemplo 2.10.** Seja  $F(x, y) = y - x^2 = 0$  a equação da curva  $\mathcal{C}$ . Repare que  $\mathcal{C}$  não é singular, pois seja  $p = (a, a^2)$  um ponto de  $\mathcal{C}$ . Temos que

$$F_x(p) = 2a \text{ e } F_y(p) = 1 \neq 0 \forall a.$$

E mais, a reta tangente à  $\mathcal{C}$  no ponto  $p$  é

$$2a \cdot (x - a) + 1 \cdot (y - a^2) = 2ax - 2a^2 + y - a^2 = 2ax - 3a^2 + y = 0.$$



Seja  $\mathcal{C}$  uma curva qualquer dada pela equação  $F$  tal que  $\partial F = n$  e  $p = (0, 0)$ . Podemos escrever  $F$  da seguinte maneira

$$F = F_m + F_{m+1} + \dots + F_n, F_i \in K[x, y]$$

homogêneo de grau  $i$ ,  $F_m \neq 0$ . Definimos a *multiplicidade de  $F$  em  $p$* , e escrevemos  $m = m_p(F)$ .

Observe que

$$p \in \mathcal{C} \text{ se, e somente se, } m_p(F) > 0.$$

De fato, seja

$$F(x, y) = \underbrace{a_0}_{F_0} + \underbrace{(a_1x + a_2y)}_{F_1} + \underbrace{(a_3x^2 + a_4xy + a_5y^2)}_{F_2} + \dots$$

então

$$p \in \mathcal{C} \Leftrightarrow F(p) = 0 \Leftrightarrow a_0 = 0 \Leftrightarrow m_p(F) > 0.$$

E mais  $p$  é um ponto simples de  $\mathcal{C}$  se, e somente se,  $m_p(F) = 1$ . Neste caso,  $F_1$  é exatamente a reta tangente de  $\mathcal{C}$  em  $p$ .

Se  $m = 2$  o ponto é duplo. Se  $m = 3$  o ponto é triplo.

Como  $F_m$  é homogêneo em duas variáveis, escrevemos  $F_m = \prod L_i^{r_i}$  onde  $L_i$ 's são retas distintas e  $r_i$  a multiplicidade.

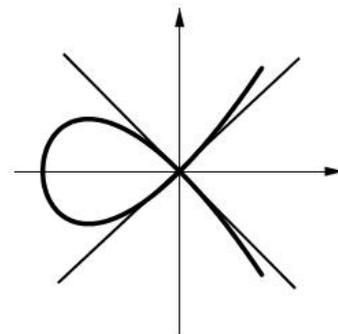
$$\begin{aligned} p(x, y) &= a_0(x) + a_1(x)y + \dots + a_n(x)y^n \\ &= (a'_0y - b_0)^{r_0} \cdot (a'_1y - b_1)^{r_1} \cdot \dots \cdot (a'_ky - b_k)^{r_k} \\ &= (a'_0y - b_0x)^{r_0} \cdot (a'_1y - b_1x)^{r_1} \cdot \dots \cdot (a'_ky - b_kx)^{r_k} \end{aligned}$$

As  $L_i$ 's são chamadas retas tangentes de  $\mathcal{C}$  em  $p = (0, 0)$  e  $L_i$  é simples se  $r_i = 1$ . Se  $\mathcal{C}$  tem  $m$  retas (simples) tangentes em  $p$ , dizemos que  $p$  é um múltiplo ordinário de  $\mathcal{C}$ .

**Exemplo 2.11.** Seja  $F(x, y) = y^2 - x^2 - x^3 = 0$  a equação da curva  $\mathcal{C}$ . Repare que  $\mathcal{C}$  é singular, pois para  $p = (0, 0)$  um ponto de  $\mathcal{C}$  temos que

$$F(p) = F_x(p) = F_y(p) = 0.$$

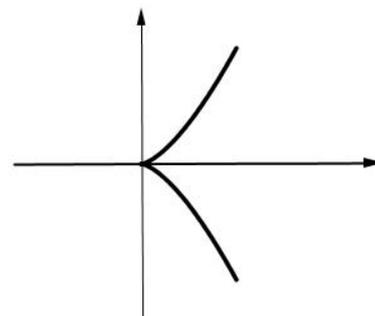
Logo  $p$  é um ponto singular ordinário.



**Exemplo 2.12.** Seja  $F(x, y) = y^2 - x^3 = 0$  a equação da curva  $\mathcal{C}$ . Repare que  $\mathcal{C}$  é singular, pois para  $p = (0, 0)$  um ponto de  $\mathcal{C}$  temos que

$$F(p) = F_x(p) = F_y(p) = 0.$$

Logo  $p$  é um ponto singular cuspidal.



## 2.2.2 Transformações de curvas

Seja  $F \in K[x, y, z]$  a equação de  $\mathcal{C}$  e  $\partial F = n$ . Chamamos de  $F^Q = F(yz, xz, xy)$  a *transformação algébrica de  $F$*  e  $\partial F^Q = 2n$ .

Sejam  $p = (0 : 0 : 1)$ ,  $p' = (0 : 1 : 0)$  e  $p'' = (1 : 0 : 0)$ . Se  $m_p(\mathcal{C}) = r$ , então  $z^r$  é a maior potência de  $z$  que divide  $F^Q$ .

Escrevendo

$$F = F_r(x, y).z^{n-r} + F_{r+1}(x, y).z^{n-(r+1)} + \dots + F_n(x, y)$$

temos

$$\begin{aligned} F^Q &= F_r(yz, xz).(xy)^{n-r} + F_{r+1}(yz, xz).(xy)^{n-(r+1)} + \dots + F_n(yz, xz) \\ &= z^r.(F_r(y, x).(xy)^{n-r} + z.F_{r+1}(y, x).(xy)^{n-(r+1)} + \dots + z^{n-r}.F_n(y, x)) \end{aligned}$$

Se  $m_{p'}(\mathcal{C}) = r'$  e  $m_{p''}(\mathcal{C}) = r''$  então

$$F^Q = z^r.y^{r'}.x^{r''}.F'(x, y, z),$$

onde  $x, y$  e  $z$  não divide  $F'$ . Chamamos  $F'$  de *transformada própria de  $F$* .

E mais,

$$\partial(F^Q) = 2n = \partial(F') + r + r' + r''$$

isto é,

$$\partial(F') = 2n - r - r' - r''.$$

Será conveniente introduzir a seguinte notação:

1. Usaremos o símbolo  $C^n(X^\alpha, Y^\beta, Z^\gamma)$  para denotar a curva de ordem  $n$ , com pontos de multiplicidades  $\alpha, \beta, \gamma$  respectivamente em  $X, Y, Z$ .
2. Usaremos o símbolo  $(CD)$  para denotar o conjunto de pontos diferentes de  $X, Y, Z$ , que as curvas  $C$  e  $D$  intersectam.
3. Usaremos o símbolo  $CD$  para denotar o número total de pontos no conjunto  $(CD)$ .

**Teorema 2.13.** *A transformação de uma curva do tipo  $\mathcal{C} = C^n(X^\alpha, Y^\beta, Z^\gamma)$  por uma transformação quadrática standard cujo os pontos bases são  $X, Y, Z$  é uma curva do tipo*

$$\mathcal{C}' = C^{2n-\alpha-\beta-\gamma}(X^{n-\beta-\gamma}, Y^{n-\alpha-\gamma}, Z^{n-\alpha-\beta}).$$

*Demonstração.* Suponha que  $T(\mathcal{C}) = \mathcal{C}' = C^{n'}(X^{\alpha'}, Y^{\beta'}, Z^{\gamma'})$ ,  $F \in K[x, y, z]$  a equação de  $\mathcal{C}$  e  $F' \in K[x, y, z]$  a equação de  $\mathcal{C}'$ . Sabendo que  $\partial F = n$ ,  $\partial F^Q$ ,  $m_X(\mathcal{C}) = \alpha$ ,  $m_Y(\mathcal{C}) = \beta$  e  $m_Z(\mathcal{C}) = \gamma$  temos

$$n' = \partial \mathcal{C}' = 2n - \alpha - \beta - \gamma.$$

Agora  $\alpha'$  é o número de interseções absorvidas em  $X$  quando  $\mathcal{C}'$  intersecta  $L_1$  em  $X$ , isto é,  $L_1 = n' - \alpha'$ . Então

$$\begin{aligned} \alpha' &= n' - L_1 \cdot \mathcal{C}' \\ &= n' - T(L_1) \cdot (\mathcal{C}') \\ &= n' - L'_1 \cdot \mathcal{C} \\ &= n' - (n - \alpha) \\ &= 2n - \alpha - \beta - \gamma - n + \alpha \\ &= n - \beta - \gamma. \end{aligned}$$

□

**Exemplo 2.14.** Seja  $L$  uma reta que passa pelo ponto base  $X$ , isto é,

$$L = C^1(X^1, Y^0, Z^0).$$

Pelo teorema 2.13 temos que

$$T(L) = L' = C^1(X^1, Y^0, Z^0),$$

ou seja, uma reta que também passa por  $X$ , como visto na observação 2.5.

**Exemplo 2.15.** Agora, seja  $L$  uma reta que não passa pelos pontos bases  $X, Y$  e  $Z$ , isto é,

$$L = C^1(X^0, Y^0, Z^0).$$

Pelo teorema 2.13 temos que

$$T(L) = L' = C^2(X^1, Y^1, Z^1),$$

ou seja, uma cônica passando por  $X, Y$  e  $Z$  como visto na observação 2.6.

**Exemplo 2.16.** Seja  $\mathcal{C}$  uma quártica dada pelo polinômio

$$F(X, Y, Z) = 8X^3Y + 8X^3Z + 4X^2YZ - 10XY^3 - 10XY^2Z - 3Y^3Z.$$

Temos que

$$T(\mathcal{C}) = F(yz : xz : xy) = 8Y^2Z + 8Y^3 + 4Y^2X - 10X^2Y - 10YX^2 - 3X^3.$$

Fazendo  $X = 1$  ou  $Y = 1$  vemos que  $\mathcal{C}$  passa por  $X$  e  $Y$  uma única vez. Agora fazendo  $Z = 1$  vemos que  $Z$  tem multiplicidade 3 em  $\mathcal{C}$ .

Logo

$$\mathcal{C} = C^4(X^1, Y^1, Z^3)$$

e pelo teorema 2.13 temos que

$$T(\mathcal{C}) = \mathcal{C}' = C^3(X^0, Y^0, Z^2).$$

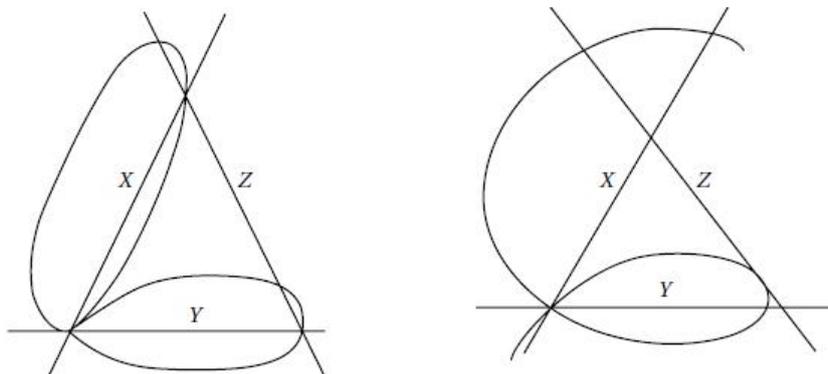


Figura 2.6: Exemplo 2.16

# Capítulo 3

## Complexo Quadrático de retas

### 3.1 A Grassmanniana de Retas de $\mathbb{P}^3$

As grassmannianas são objetos fundamentais em geometria algébrica; na construção e estudo de outras variedades. Por meio de notação, usamos  $\mathbf{G}(\mathbf{k}, \mathbf{n})$  para denotar o conjunto de subespaços lineares  $k$ -dimensionais do espaço vetorial  $K^n$ ; por exemplo, podemos escrever o conjunto de  $k$ -planos de um espaço vetorial abstrato  $V$  como  $\mathbf{G}(\mathbf{k}, \mathbf{V})$ . Sabemos que, um subespaço  $k$ -dimensional de um espaço vetorial  $K^n$  é o mesmo que um  $(k - 1)$ -plano no espaço projetivo correspondente  $\mathbb{P}^{n-1}$ , de modo que podemos pensar em  $\mathbf{G}(\mathbf{k}, \mathbf{n})$  como o conjunto de  $(k - 1)$ -planos e, denotamos por  $\mathbf{G}(\mathbf{k}-1, \mathbf{n}-1)$ .

#### 3.1.1 Coordenadas de Plücker

A grassmanniana de retas de  $\mathbb{P}^3$  é o espaço que parametriza as retas de  $\mathbb{P}^3$  da mesma maneira que o  $\mathbb{P}^5$  das cônicas parametriza as cônicas do plano projetivo. É uma generalização do espaço projetivo  $\mathbb{P}^3$ .

**Definição 3.1.** A Grassmanniana de retas de  $\mathbb{P}^3$  é o conjunto dos subespaços lineares de  $\mathbb{C}^4$  de dimensão dois que passam pela origem, que será notado por  $\mathbf{G}(\mathbf{2}, \mathbf{4})$ . Chamaremos os sub-espaços lineares de  $\mathbb{C}^4$  de dimensão dois de planos.

Assim a Grassmanniana parametriza as retas de  $\mathbb{P}^3$ , já que uma reta de  $\mathbb{P}^3$  é um plano de  $\mathbb{C}^4$  passando pela origem. A notação projetiva de  $\mathbf{G}(\mathbf{2}, \mathbf{4})$  é  $\mathbf{G}(\mathbf{1}, \mathbf{3})$ .

Uma definição mais geral de Grassmanniana é dada por:

**Definição 3.2.** A Grassmanniana  $\mathbf{G}(\mathbf{k}, \mathbf{n})$  de  $k$ -planos é o conjunto de  $k$ -planos de  $\mathbb{C}^n$ , passando pela origem.

Agora apresentaremos uma descrição mais detalhada da Grassmanniana  $\mathbf{G}(\mathbf{k}, \mathbf{n})$ .

Seja um plano  $\Lambda \subset \mathbb{C}^4$  passando pela origem representado por dois vetores linearmente independentes  $a_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14})$ ,  $a_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24})$  que geram este plano. Ou seja,  $\Lambda$  pode ser representado pela seguinte matriz:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}.$$

Seja

$$\mathcal{U}_{12} := \{\Lambda \in \mathbf{G}(\mathbf{2}, \mathbf{4}) \text{ tal que } a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} \neq 0\},$$

onde  $\Lambda$  está representado por dois geradores como acima. Observe que dada uma representação de um plano  $\Lambda \subset \mathbb{C}^4$  por dois vetores  $a_1, a_2 \in \mathbb{C}^4$  podemos considerar qualquer outro conjunto gerador  $b_1, b_2 \in \Lambda$  e escrevê-lo numa matriz como acima e a pertinência de  $\Lambda$  à  $\mathcal{U}_{12}$  não depende da base escolhida. Segue que podemos escolher geradores  $b_1, b_2$  de forma que cada elemento de  $\mathcal{U}_{12}$  possui uma única representação da seguinte forma:

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & b_{13} & b_{14} \\ 0 & 1 & b_{23} & b_{24} \end{pmatrix}$$

e reciprocamente cada matriz como acima corresponde a um único plano  $\Lambda \in \mathcal{U}_{12}$ . Assim, existe uma correspondência biunívoca entre  $\mathcal{U}_{12}$  e  $\mathbb{C}^4$ .

Seja

$$\mathcal{U}_{ij} := \{\Lambda \in \mathbf{G}(\mathbf{2}, \mathbf{4}) \text{ tal que } a_{1i}a_{2j} - a_{2i}a_{1j} \neq 0\},$$

onde  $i < j$ . Existem ao todo 6 tais  $\mathcal{U}_{ij}$ . Vemos então que  $\mathbf{G}(\mathbf{2}, \mathbf{4}) = \cup_{i < j} \mathcal{U}_{ij}$ , onde cada  $\mathcal{U}_{ij}$  corresponde biunivocamente a  $\mathbb{C}^4$ . Uma das vantagens desta representação é que faz sentido falar na dimensão de  $\mathbf{G}(\mathbf{2}, \mathbf{4})$ .

Como cobrimos  $\mathbf{G}(2, 4)$  por um número finito de  $\mathcal{U}_{ij}$  todos de dimensão 4 podemos dizer que sua dimensão é 4. Ou ainda,  $\dim \mathbf{G}(k, n) = (k + 1)(n - k)$ . Vamos identificar  $\mathbf{G}(2, 4)$  com uma superfície de  $\mathbb{P}^5$ . Para isto considere  $\Lambda \in \mathbb{C}^4$  dado por dois geradores:

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix}.$$

Seja  $p_{ij}$ ,  $i < j$  o determinante da submatriz  $2 \times 2$  de  $A$  formada pelas colunas  $i$  e  $j$ . Temos então o seguinte teorema:

**Teorema 3.3.** *Existe uma correspondência biunívoca entre os pontos de  $\mathbf{G}(2, 4)$  e os pontos*

$$(p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{23} : p_{24} : p_{34}) \in \mathbb{P}^5,$$

*cujas coordenadas satisfazem a equação:*

$$G : P_{12}P_{34} - P_{13}P_{24} + P_{14} : P_{23} = 0.$$

*Demonstração.* Dado  $\Lambda \in \mathbf{G}(2, 4)$  seja

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \end{pmatrix},$$

uma matriz que o representa. Sem perda de generalidade, considere  $\Lambda \in U_{12}, p_{12} \neq 0$ .

Seja a aplicação

$$\Phi : \mathbf{G}(2, 4) \longrightarrow \mathbb{P}^5$$

dada por

$$\Lambda \longmapsto (p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{23} : p_{24} : p_{34})$$

onde os  $p'_{ij}$ s são os determinantes  $2 \times 2$  acima. A aplicação  $\Phi$  está bem definida pois como  $a_1 = (a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{14})$  e  $a_2 = (a_{21}, a_{22}, a_{23}, a_{24})$  são linearmente independentes algum dos  $p_{ij} \neq 0$ . Além disto se

$$A' = \begin{pmatrix} a'_{11} & a'_{12} & a'_{13} & a'_{14} \\ a'_{21} & a'_{22} & a'_{23} & a'_{24} \end{pmatrix}$$

é uma outra matriz que representa o plano  $\Lambda$ , existe uma matriz de mudança de base  $g$  invertível  $2 \times 2$  tal que  $A' = gA$ .

Denotando por  $A_{ij}$  (respectivamente  $A'_{ij}$ ) a submatriz  $2 \times 2$  formada pelas colunas  $i$  e  $j$  de  $A$  (respectivamente  $A'$ ) temos:

$$A'_{ij} = gA_{ij} \text{ e, } p'_{ij} = \det(g) \cdot p_{ij},$$

onde  $p_{ij} = \det(A_{ij})$ ,  $p'_{ij} = \det(A'_{ij})$  por definição. Como  $\det(g) \neq 0$  segue que

$$(p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{23} : p_{24} : p_{34}) = (p'_{12} : p'_{13} : p'_{14} : p'_{23} : p'_{24} : p'_{34})$$

e, portanto,  $\Phi$  está bem definida. As coordenadas  $(p_{ij})$  de  $\Lambda$  são chamadas de coordenadas de *Plücker*.

A verificação de que um ponto  $\Phi(\Lambda)$  satisfaz a equação acima é fácil:

Temos que

$$\begin{aligned} \Phi(\Lambda) = & (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12} : a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13} : a_{11}a_{24} - a_{21}a_{14} : a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13} : \\ & : a_{12}a_{24} - a_{22}a_{14} : a_{13}a_{24} - a_{23}a_{14}). \end{aligned}$$

Substituindo na equação que define a quádrlica vemos que

$$\begin{aligned} \Phi(\Lambda) = & (a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12})(a_{13}a_{24} - a_{23}a_{14}) - (a_{11}a_{23} - a_{21}a_{13})(a_{12}a_{24} - a_{22}a_{14}) + \\ & +(a_{11}a_{24} - a_{21}a_{14})(a_{12}a_{23} - a_{22}a_{13}) = 0. \end{aligned}$$

Reciprocamente suponha que um ponto

$$P = (p_{12} : p_{13} : p_{14} : p_{23} : p_{24} : p_{34}) \in \mathbb{P}^5,$$

satisfaça a equação acima e que  $p_{12} \neq 0$  (a demonstração nos outros casos é idêntica).

Supondo que  $p_{12} = 1$  temos que  $p_{34} = p_{13}p_{24} - p_{14}p_{23}$ . Segue que o ponto  $\Lambda_0 \in \mathbf{G}(2, 4)$

dado por

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & -p_{23} & -p_{24} \\ 0 & 1 & p_{13} & p_{14} \end{pmatrix}$$

é tal que  $\Phi(\Lambda_0) = (1 : p_{13} : p_{14} : p_{23} : p_{24} : p_{34})$  como queríamos. Além disto se  $\Phi(\Lambda_1) = P$ , temos que  $\Lambda_1$  é dado pela mesma base acima logo  $\Lambda_0 = \Lambda_1$ , terminando a demonstração.  $\square$

### 3.1.2 Espaços Lineares de Quádricas

Um aspecto importante de quádricas é o comportamento dos espaços lineares.

**Teorema 3.4.** *Uma quádrica suave  $F$  de dimensão  $m$  não contém subespaços lineares de dim estritamente maior que  $\frac{m}{2}$ ; por outro lado*

1. *Se  $m = 2k + 1$  é ímpar, então  $F$  contém uma família  $\lfloor \frac{(k+1)(k+2)}{2} \rfloor$ -dimensional de  $k$ -planos;*
2.  *$m = 2k$  é par, então  $F$  contém duas famílias  $\lfloor \frac{k(k+1)}{2} \rfloor$ -dimensionais de  $k$ -planos. e além disso, para quaisquer dois planos  $k$ - Se e somente se  $\lambda$  e  $\Lambda$  pertencem à mesma família.*

*Demonstração.* ver detalhes em [15] página 735. □

**Exemplo 3.5.** Seja  $Q \subset \mathbb{P}^3$ . Temos que  $\dim Q = 2 = 2 \cdot 1$  e, portanto,  $k = 1$ . Logo  $Q$  contém duas famílias de retas.

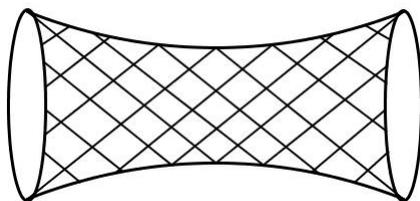


Figura 3.1: Exemplo 3.5

**Exemplo 3.6.** Seja  $F \subset \mathbb{P}^4$ . Temos que  $\dim F = 3 = 2 \cdot 1 + 1$  e, portanto,  $k = 1$ . Logo  $F$  uma família tridimensional de retas.

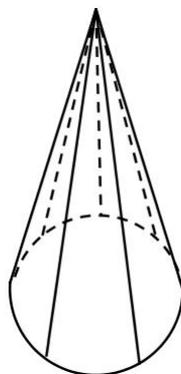


Figura 3.2: Exemplo 3.6

**Exemplo 3.7.** Seja  $T \subset \mathbb{P}^5$ . Temos que  $\dim T = 4 = 2 \cdot 2$ , então  $k = 2$ . Logo  $T$  contém duas famílias tridimensionais de planos.

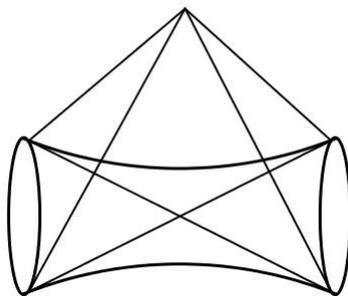


Figura 3.3: Exemplo 3.7

## 3.2 Complexo de retas

**Definição 3.8.** Um **complexo de retas de grau  $d$**  é a família de retas em  $\mathbb{P}^3$  que corresponde a interseção da quádrlica de *Plücker*  $G \subset \mathbb{P}^5$ , com uma hipersuperfície (em  $\mathbb{P}^5$ ) de grau  $d$ .

**Definição 3.9.** Dizemos que um complexo de retas  $X = G \cap S$ , no qual  $S$  é uma hipersuperfície em  $\mathbb{P}^5$ , é **singular** em um ponto  $x \in X$  se

$$T_x(G) = T_x(S),$$

isto é, se o hiperplano tangente a  $G$  no ponto  $x$  coincidir com o hiperplano tangente a  $S$  no mesmo ponto  $x$ . Caso contrário dizemos que o complexo é não-singular no ponto  $x \in X$ .  $X$  é não singular se o for para todo ponto  $x \in X$ .

### 3.2.1 Complexo Linear de Retas

Considere o complexo de retas  $X = G \cap H$ , no qual  $H \subset \mathbb{P}^5$  é um hiperplano.

- Suponha que  $X$  seja singular em um ponto  $x$ , isto é,  $H = T_x G$ . Seja  $a \in G$ .

**Afirmção:**  $a \in T_x G$  se, e somente se,  $\overline{ax} \subset G$ .

Para mostrar a afirmação, suponha que  $a \in T_x G$ , então  $\overline{ax}$  intercepta  $G$  em três pontos, a saber,  $a$  e  $x$ . Logo  $\overline{ax} \subset G$ .

Agora, suponha  $x = (1 : 0 : 0 : \dots : 0)$ . Daí, se  $a = (x_0 : x_1 : \dots : x_5)$  temos que

$$T_x G = x_5 = 0.$$

Assim

$$\begin{aligned} \overline{ax} &= 7x + t(a - x); \quad 0 \leq t \leq 1 \\ &= ((x_0 - 1)t + 1 : x_1 t : x_2 t : x_3 t : x_4 t : x_5 t) \end{aligned}$$

Como  $\overline{ax} \subseteq G$  temos

$$((x_0 - 1)t + 1) \cdot x_5 t - x_1 t \cdot x_4 t + x_2 t \cdot x_3 t = t^2(x_0 \cdot x_5 - x_1 \cdot x_4 + x_2 \cdot x_3) - x_5 t^2 + x_5 t = 0.$$

Isto é,  $x_5 = 0$  o que mostra que  $a \in T_x G$ .

- Vamos supor agora que o complexo  $X$  seja não-singular.

**Definição 3.10.** Para cada  $P \in \mathbb{P}^3$ , definimos  $\sigma(P) \subset G$  como sendo o conjunto que parametriza todas as retas de  $\mathbb{P}^3$  passando pelo ponto  $P$ .

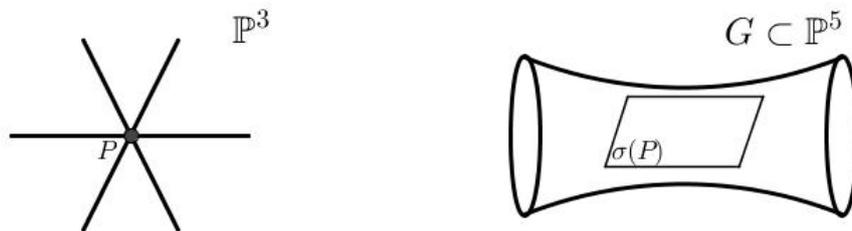


Figura 3.4: Definição 3.10

E mais,

$$X_P = \sigma(P) \cap H \quad (*)$$

parametriza as retas do complexo  $X$  passando pelo ponto  $P$  e tal que  $\sigma(P) \subset H$ .

Assim, como  $\sigma(P)$  tem dimensão 2 e grau 1 e,  $H$  tem dimensão 4 e grau 1, temos duas possibilidades:  $X_P$  é o próprio  $\sigma(P)$  ou é uma reta  $l$ .

Para verificar a observação acima temos:

**Lema 3.11.** *O conjunto dos hiperplanos tangentes*

$$\{T_x G\}_{x \in \sigma(P)}$$

a  $G$  nos pontos de  $\sigma(P)$  forma o sistema linear de todos os hiperplanos de  $\mathbb{P}^5$  contendo  $\sigma(P)$ , ou seja, qualquer hiperplano que contém  $\sigma(P)$  é tangente a  $G$ .

*Demonstração.* De fato, suponha que  $J = T_x G$  com  $x \in \sigma(P)$ . Então  $\sigma(P) \subset J$ , pois  $G \cap J = \sigma(l_x)$ ; em particular  $\sigma(P) \subset \sigma(l_x)$ , pois  $P \in l_x$ .

Logo

$$\sigma(P) \subset J = T_x G.$$

Por outro lado, seja  $\mathcal{F}$  a família dos hiperplanos  $H \subset \mathbb{P}^5$  tais que  $H \supset \sigma(P)$ . Assim,  $\{T_x G\}_{x \in \sigma(P)}$  é uma família de 2 parâmetros em  $\mathbb{P}^5$  que está contida em  $\mathcal{F}$ . Para ver que  $\mathcal{F} = \{T_x G\}_{x \in \sigma(P)}$  basta mostrar que  $\mathcal{F}$  tem 2 parâmetros.

Para isso vamos escolher três pontos para gerar  $\sigma(P)$ ,

$$P_1 = (1, 0, 0, 0, 0, 0), P_2 = (0, 1, 0, 0, 0, 0) \text{ e } P_3 = (0, 0, 1, 0, 0, 0).$$

Seja  $H \in \mathcal{F}$ , dado pela equação

$$H : ax_0 + bx_1 + cx_2 + dx_3 + ex_4 + fx_5 = 0.$$

Como  $\sigma(P) \subset H$ ,  $a = b = c = 0$ .

Seja  $\mathcal{G} : \mathbb{P}^5 \rightarrow \mathbb{P}^{5*}$  a aplicação de Gauss. Temos que  $\mathcal{G}(H) = (0, 0, 0, d, e, f)$ . Isso nos mostra que  $\mathcal{G}(\mathcal{F})$  é um plano em  $\mathbb{P}^5$ ; como  $\mathcal{G}$  é um isomorfismo entre  $\mathbb{P}^5$  e  $\mathbb{P}^{5*}$ , temos que  $\mathcal{F}$  é uma família a dois parâmetros.  $\square$

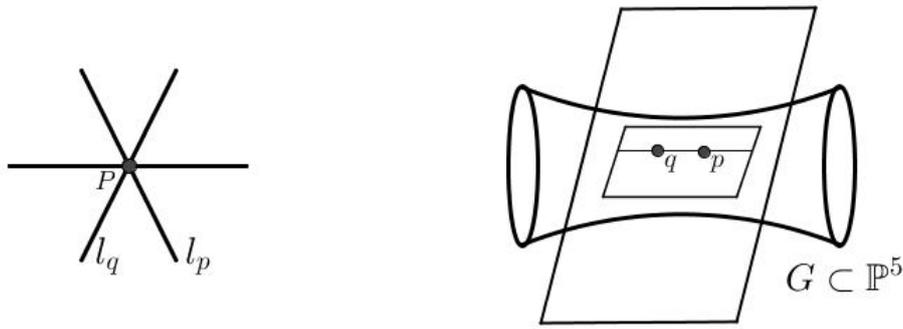
Dessa forma, qualquer hiperplano contendo  $\sigma(P)$  é tangente a  $G$ .

Como estamos supondo que o complexo  $X$  é não-singular,  $X_P$  tem que ser uma reta, isto é, para cada  $P \in \mathbb{P}^3$ , as retas de  $X$  que passam por  $P$  formam um feixe-plano, isto é,  $X_P = \sigma(P, h)$ .

**Proposição 3.12.**  *$X_P$  é necessariamente uma reta.*

*Demonstração.* Suponha por absurdo que  $X_P$  não é uma reta.

Então  $\sigma(P) \subsetneq H$ , isto é,  $H = T_x(G)$  para algum  $x \in \sigma(P)$ , o que é um absurdo pois  $X$  não é singular.  $\square$



De maneira análoga pode-se mostrar que dado qualquer plano  $h \subset \mathbb{P}^3$ , o hiperplano  $H$  não pode conter o plano  $\sigma(h) \subset \mathbb{P}^5$ , pois caso contrário  $X$  seria singular. Dessa forma, para cada plano  $h \subset \mathbb{P}^3$ , as retas de  $X$  contidas em  $h$  formam um feixe-plano  $X_h = \sigma(h, P)$ .

Para mais detalhes sobre o Complexo Linear de Retas ver [6].

### 3.2.2 Complexo Quadrático de Retas

Nesta seção estamos interessados em estudar o **Complexo Quadráticos de Retas**, definido como a família de retas em  $\mathbb{P}^3$  correspondendo à interseção não-singular  $X = G \cap F$  da quádrlica de Plücker  $G$  com uma hipersuperfície quádrlica suave  $F$  em  $\mathbb{P}^5$ .

Seguindo o raciocínio do complexo linear de retas, vamos identificar os feixes de retas em  $X$  e determinar, dado um ponto  $P \in \mathbb{P}^3$  e uma plano  $h \subset \mathbb{P}^3$ , as possíveis caracterizações das retas do complexo passando por  $P$  ou que estão contidas em  $h$ . Vamos primeiro verificar que:

**Lema 3.13.** *Nenhum plano dos tipos  $\sigma(P)$  ou  $\sigma(h)$  está contido no complexo quadrático não-singular  $X = G \cap F$ .*

*Demonstração.* Suponha que exista um plano  $V \subset \mathbb{P}^5$  tal que  $V \subset X$  e considere os mapas de Gauss

$$\mathcal{G}_F : F \rightarrow \mathbb{P}^{5*} \text{ e } \mathcal{G}_G : G \rightarrow \mathbb{P}^{5*}$$

O lema 3.11 nos garante que  $\{T_x G\}_{x \in V}$  é a família dos hiperplanos de  $\mathbb{P}^5$  que contém  $V$ . Dessa forma cada um desses mapas restritos a  $V$  nos dá um isomorfismo entre  $V$  e o conjunto  $V^*$  dos hiperplanos de  $\mathbb{P}^5$  contendo  $V$ .

Considere agora o isomorfismo

$$\mathcal{G}_F^{-1} \circ \mathcal{G}_G : V \rightarrow V$$

e seja  $x \in V$  um ponto fixo, isto é,  $\mathcal{G}_F^{-1} \circ \mathcal{G}_G(x) = x$ . Então  $T_x G = T_x F$ , o que contradiz o fato do complexo  $X$  ser não-singular.  $\square$

Intuitivamente, se um desses planos estivessem no complexo o mesmo não seria suave. A partir do lema podemos deduzir que para cada ponto  $P \in \mathbb{P}^3$  o conjunto

$$X_P = X \cap \sigma(P)$$

das retas do complexo  $X$  passando por  $P$ , formam uma cônica em  $\sigma(P) \subset G$ .

Há três possibilidades:

**1 -** A interseção de  $F$  com  $\sigma(P)$  ser transversal, isto é,  $X_P$  é uma cônica suave.

Podemos supor  $P = (0 : 0 : 0 : 1)$ . Nesse caso, qualquer reta de (\*) é dada por

$$\begin{pmatrix} x & y & z & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \rightarrow (0 : 0 : x : 0 : y : z)$$

pela imersão de Plücker, donde temos que  $\sigma(P)$  é parametrizado por  $(0 : 0 : x : 0 : y : z)$ .

Assim, dada a equação de uma cônica suave  $C \subset \sigma(P)$ , temos em  $\mathbb{P}^3$ , a mesma relação entre as retas de (\*), ou seja, o lugar das retas de  $X$  que passam por  $P$  é um cone com vértice  $P$  sobre uma cônica não-singular. (ver mais em [3], página 48)

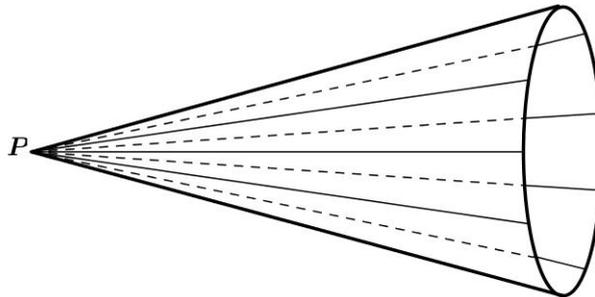


Figura 3.5: Caso 1

Para o item [2] temos,

**Corolário 3.14.** *Dada uma reta  $L \in Q$ ,  $L$  parametriza o conjunto das retas de  $\mathbb{P}^3$  contidas em um plano e passando por um ponto. Esta configuração é conhecida como feixe (plano) de retas de  $\mathbb{P}^3$ .*

*Demonstração.* ver detalhes em [4], página 18. □

**2 -  $F$  é tangente a  $\sigma(P)$  em um ponto.**

Vemos que  $\dim(F \cap \sigma(P)) = 4 + 2 - 5 = 1$ , logo retas estão na interseção. Além disso,  $\partial(F \cap \sigma(P)) = 2$ . Logo,  $(F \cap \sigma(P))$  é dado por duas retas que se interceptam.

Segundo o corolário 3.14,  $X_p$  corresponde a dois feixes de retas com foco em  $P$  onde cada qual está contida em um hiperplano.

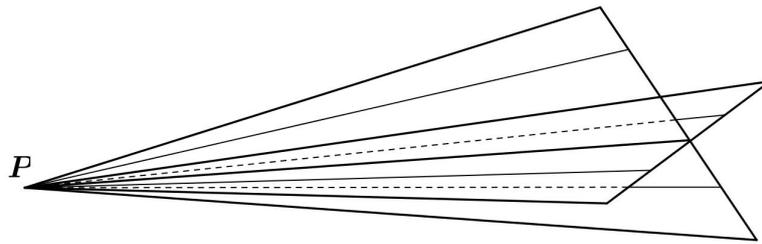


Figura 3.6: Caso 2

**3 -  $F$  é tangente a  $\sigma(P)$  ao longo de uma reta.**

Nesse caso  $X_P$  é uma reta dupla em  $\mathbb{P}^5$  que, em  $\mathbb{P}^3$ , corresponde a um feixe-plano duplo com foco  $P$ .

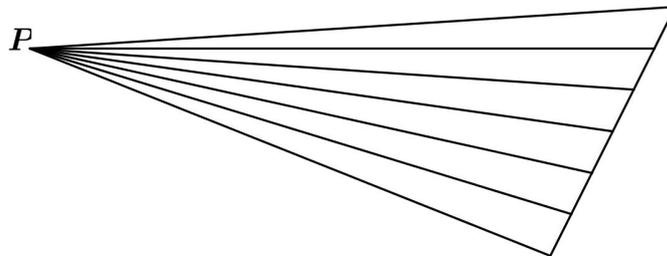


Figura 3.7: Caso 3

Na sequência, considere um hiperplano  $h \subset \mathbb{P}^3$  e o conjunto  $X_h = X \cap \sigma(h)$  será uma cônica em  $\sigma(h)$ .

Novamente temos três casos a considerar:

**1'** -  $F$  intercepta  $\sigma(h)$  transversalmente, ou seja,  $X_h \subset \sigma(h)$  é uma cônica suave, digamos  $C$ .

Seja  $t = 0$  a equação do plano em  $\mathbb{P}^3$  de coordenadas  $(x : y : z : t)$ .

Tome a reta

$$\Lambda \left( \begin{array}{cccc} \frac{y(z+1) - x}{z} & z+1 & 1 & 0 \\ y & z & x & 0 \\ z & 1 & 1 & 0 \end{array} \right)$$

e pela imersão de Plücker temos  $(x : y : 0 : z : 0 : 0) \in \mathbb{P}^5$  que é um  $\beta$ -plano parametrizando todas as retas em  $\mathbb{P}^3$  contidas em  $h$ .

No geral, dada uma reta  $ax + by + cz = 0$  em  $h$  temos que  $\Phi$  definida no teorema 3.3 aplica cada reta em seu dual. Assim, quando restringimos o conjunto de retas de  $h$  a  $C : x^2 + y^2 + z^2 = 0$  temos o conjunto das retas tangentes a  $C$  pois

$$T_P(C) = X(P).X + Y(P).Y + Z(P).Z = 0 \xrightarrow{\Phi} (X(P), Y(P), Z(P)).$$

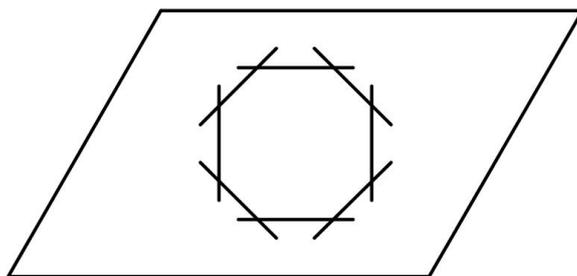


Figura 3.8: Caso 1'

Assim, em  $\mathbb{P}^3$  as retas de  $X_h$  formam o conjunto das retas tangentes a uma cônica não-singular em  $h$ . (ver [3])

**2'** -  $F$  é tangente a  $\sigma(h)$  em um ponto.

Daí,  $X_h$  será duas retas que se interceptam em um ponto em  $\sigma(h)$ . Novamente teremos dois feixes, só que agora ambos no mesmo plano, já que  $\sigma(h)$  parametriza em  $G$  todas as retas de  $\mathbb{P}^3$  que estão no mesmo plano. Além disso, o ponto  $P$  da interseção das duas retas, que é uma reta em  $\mathbb{P}^3$ , será a reta comum dos feixes, ou seja, em  $\mathbb{P}^3$ ,  $X_h$  corresponde a dois feixes planos distintos contidos em  $h$ .

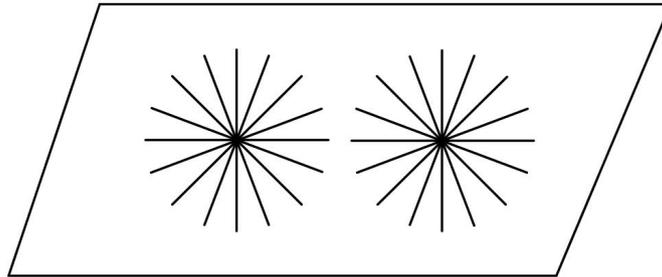


Figura 3.9: Caso 2'

**3'** -  $F$  é tangente a  $\sigma(h)$  ao longo de uma reta.

Pelo mesmo motivo que em [3],  $X_P$  será uma reta dupla e, em  $\mathbb{P}^3$ , representa um feixe de retas em  $h$  com foco em  $P$ .

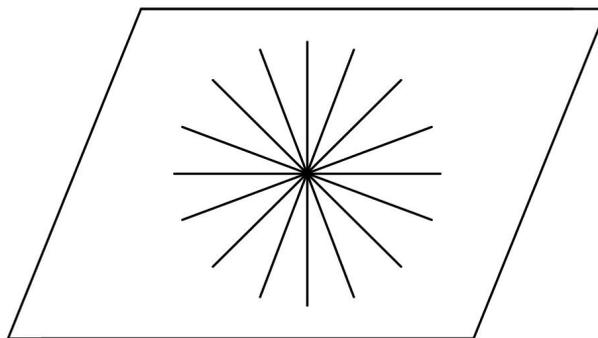


Figura 3.10: Caso 3'

# Capítulo 4

## Transformação de Cremona de $\mathbb{P}^3$

Neste capítulo estudaremos as transformações birracionais de  $\mathbb{P}^3$  de grau 3 cuja inversa também é de grau 3, chamadas de transformações cubo-cúbicas. Existem 3 tipos dessas transformações, dependendo da natureza da transformada estrita de um plano ou de uma reta genérica. As referências básicas para este artigo são [9] e [10].

**Definição 4.1.** Uma **transformação racional** no espaço

$$T : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3,$$

faz corresponder a um ponto  $P = (x_0, x_1, x_2, x_3)$  um único ponto  $Q = (x'_0, x'_1, x'_2, x'_3)$ , definido pelas equações da forma

$$\begin{cases} x'_0 = \phi_0(x_0, x_1, x_2, x_3) \\ x'_1 = \phi_1(x_0, x_1, x_2, x_3) \\ x'_2 = \phi_2(x_0, x_1, x_2, x_3) \\ x'_3 = \phi_n(x_0, x_1, x_2, x_3) \end{cases}$$

onde  $\phi_0, \phi_1, \phi_2, \phi_3$  são polinômios homogêneos de grau  $\deg(T)$  em  $x_0, x_1, x_2, x_3$ .

Recordamos que  $T$  é uma transformação de Cremona se possui uma inversa racional (isto é, se  $T$  é birracional). Neste caso, o par  $(\deg(T), \deg(T^{-1}))$  é chamado *bigrau* de  $T$ . Note que pode ocorrer  $\deg(T) \neq \deg(T^{-1})$  se  $T : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$  como no próximo exemplo, enquanto que se  $T : \mathbb{P}^2 \dashrightarrow \mathbb{P}^2$  temos sempre  $\deg(T) = \deg(T^{-1})$  pelo teorema [2.3].

**Exemplo 4.2.** Seja  $T : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$  dada por

$$T(x : y : z : w) = (x(xz + yw) : y(xz + yw) : y^3 : y^2z)$$

de grau 3.  $T$  é racional onde os pontos base são da forma  $(0 : 0 : z : w)$  ou  $(x : 0 : 0 : w)$ . A inversa de  $T$  é

$$T^{-1}(x : y : z : w) = (xz : yz : yw : -xw + y^2)$$

de grau 2 também racional.

Estamos interessados no caso das transformações de Cremona de bigrau  $(3, 3)$  cujo o exemplo mais famoso é a Transformação de Cremona Standard:

**Exemplo 4.3.** Seja  $T : \mathbb{P}^3 \rightarrow \mathbb{P}^3$  uma transformação definida por

$$T(x : y : z : w) = (yzw : xzw : xyw : xyz).$$

O lugar de base de  $T$  são 6 retas dadas por  $x = y = 0$ ,  $x = z = 0$ ,  $x = w = 0$ ,  $y = z = 0$ ,  $y = w = 0$  e  $z = w = 0$ . Temos que  $T$  não é injetiva no plano  $w = 0$ . De fato, seja um ponto qualquer  $P = (x : y : z : 0)$  do plano  $w = 0$ , fora das retas  $XY$ ,  $XZ$ ,  $YZ$ . Então,

$$T(x : y : z : 0) = (0 : 0 : 0 : xyz) = xyz(0 : 0 : 0 : 1) = (0 : 0 : 0 : 1) = W'.$$

Do mesmo modo,  $T$  não é injetiva nos planos  $x = 0$ ,  $y = 0$  e  $z = 0$ .

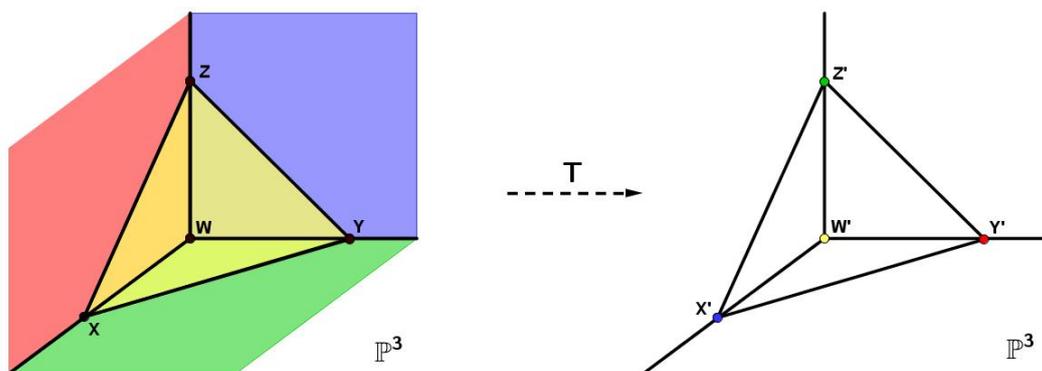


Figura 4.1: Transformação Standard

Observe que no aberto  $xyzw \neq 0$

$$T(x : y : z : w) = \left( \frac{1}{x} : \frac{1}{y} : \frac{1}{z} : \frac{1}{w} \right)$$

e, portanto,  $T = T^{-1}$ .

Seja  $T : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$  uma transformação de Cremona. Sejam  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$ , subconjuntos abertos não-vazios de  $\mathbb{P}^3$  tais que a restrição de  $T$  à  $\mathcal{U}$  induz um isomorfismo

$$\tau : \mathcal{U} \rightarrow \mathcal{V}.$$

Seja  $Z \subset \mathbb{P}^3$  uma subvariedade linear. Se  $Z$  é genérica então  $Z \cap V \neq \emptyset$  e então  $\overline{\tau^{-1}(Z \cap V)}$  é uma subvariedade que não depende da escolha de  $\mathcal{U}$  e  $\mathcal{V}$ . Chamamos  $\overline{\tau^{-1}(Z \cap V)}$  de transformada estrita de  $Z$  sob  $T$  e denotamos por  $\widetilde{T^{-1}(Z)}$ .

Por definição, o grau  $\deg(T)$  é o grau da transformada estrita de um plano genérico. Se  $L$  é uma reta genérica, podemos assumir que  $L$  não está contida no lugar de indeterminação de  $T^{-1}$  e neste caso a restrição de  $T^{-1}$  a  $L$  é descrita por um sistema linear sem pontos de base com grau igual ao grau de  $T^{-1}$ . Segue que  $\deg(T^{-1}) = \deg(\widetilde{T^{-1}(L)})$ .

Denotamos por  $\mathbf{T}_{3,3}$  o conjunto das transformações de Cremona de bigrau  $(3, 3)$ .

**Definição 4.4.** Sejam  $T \in \mathbf{T}_{3,3}$  e  $L, H \subset \mathbb{P}^3$  uma reta e um plano, genéricos.

1. Dizemos que  $T$  é **determinantal** se  $\exists$  uma matriz  $4 \times 3$  de formas lineares

$$\begin{pmatrix} \alpha_1 & \beta_1 & \gamma_1 \\ \alpha_2 & \beta_2 & \gamma_2 \\ \alpha_3 & \beta_3 & \gamma_3 \\ \alpha_4 & \beta_4 & \gamma_4 \end{pmatrix}$$

com menores  $3 \times 3$  (considerados com o seu sinal), denotados por  $\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4$  tal que

$$T = (\Delta_1, \Delta_2, \Delta_3, \Delta_4).$$

**Exemplo 4.5.** Temos que a transformação de Cremona standard

$$T = (yzw : xzw : xyw : xyz)$$

é determinantal associada a matriz

$$\begin{pmatrix} x & 0 & 0 \\ 0 & y & 0 \\ 0 & 0 & z \\ w & -w & w \end{pmatrix}.$$

2. Dizemos que  $T$  é de **de Jonquières** se a transformada estrita de uma reta genérica  $L$ ,  $\widetilde{T^{-1}(L)}$ , é uma curva cúbica plana.

**Exemplo 4.6.** A aplicação

$$T = (x^3 : x^2y : x^2z : x^2z - y^2w)$$

é de *de Jonquières*. O lugar de base de  $T$  são 2 retas dadas por  $x = y = 0$  e  $x = w = 0$  e como

$$T^{-1} = (xy^2 : y^3 : y^2z : x^2z - x^2w)$$

temos que  $T \in \mathbf{T}_{3,3}$ . Para verificar que  $T$  é de *de Jonquières*, seja uma reta genérica

$$L : \begin{cases} ax + by + cz + dw = 0 \\ a'x + b'y + c'z + d'w = 0 \end{cases}.$$

Fazendo a transformada estrita da reta  $L$  temos duas superfícies em  $\mathbb{P}^3$

$$\widetilde{T^{-1}(L)} = \begin{cases} ax^3 + bx^2y + cx^2z + d(x^2z - y^2w) = 0 \\ a'x^3 + b'x^2y + c'x^2z + d'(x^2z - y^2w) = 0 \end{cases}.$$

Assim  $\widetilde{T^{-1}(L)}$  é uma curva pois é dada pela interseção de 2 superfícies.

Temos ainda,

$$\widetilde{T^{-1}(L)} = \begin{cases} x^2(ax + by + cz) + d(x^2z - y^2w) = 0 & (I) \\ x^2(a'x + b'y + c'z) + d'(x^2z - y^2w) = 0 & (II) \end{cases}.$$

Como  $L$  é uma reta genérica, suponha  $d \neq 0$  ou  $d' \neq 0$ , isto é,  $d \cdot d' \neq 0$ . Sabemos que os planos que geram a reta  $L$  são linearmente independentes, então, fazendo  $d' \cdot (I) - d \cdot (II)$  temos

$$\widetilde{T^{-1}(L)} = \begin{cases} x^2(ax + by + cz) + d(x^2z - y^2w) = 0 \\ x^2 \cdot [d'(ax + by + cz) - d(a'x + b'y + c'z)] = 0 \end{cases},$$

ou ainda,

$$\widetilde{T^{-1}(L)} = \begin{cases} x^2(ax + by + cz) + d(x^2z - y^2w) = 0 & (I) \\ x^2 \cdot [(ad' - a'd)x + (bd' - b'd)y + (cd' - c'd)z] = 0 & (III) \end{cases}.$$

De (III), temos que (\*)  $x^2 = 0$  ou (\*\*)  $(ad' - a'd)x + (bd' - b'd)y + (cd' - c'd)z = 0$ .

Assim, se

$$\widetilde{T^{-1}(L)} = \begin{cases} x^2(ax + by + cz) + d(x^2z - y^2w) = 0 & (I) \\ x^2 = 0 & (*) \end{cases}$$

temos que o lugar de base de  $\widetilde{T^{-1}(L)}$  é

$$\begin{cases} x^2 = y^2 = 0 \\ x^2 = w = 0 \end{cases}$$

e, que portanto, tem grau 6 pois a primeira tem multiplicidade 4 e a segunda multiplicidade 2, como ilustra a figura.

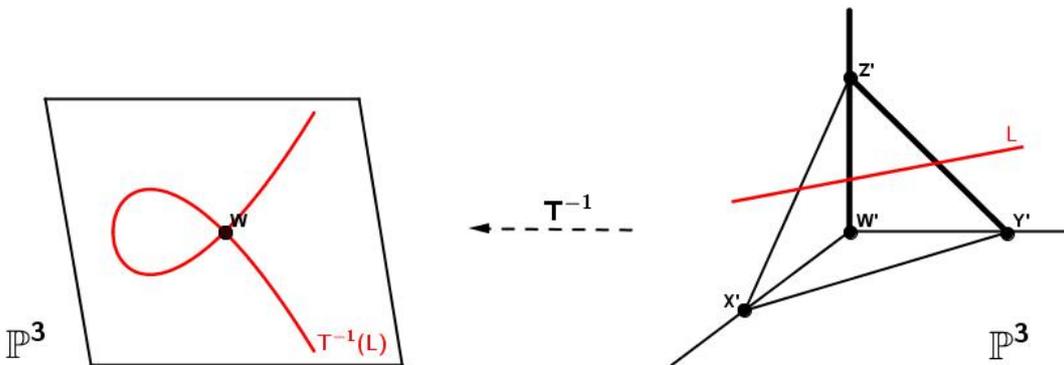


Figura 4.2: Exemplo 4.6

Se

$$\widetilde{T^{-1}(L)} = \begin{cases} x^2(ax + by + cz) + d(x^2z - y^2w) = 0 & (I) \\ (ad' - a'd)x + (bd' - b'd)y + (cd' - c'd)z = 0 & (**) \end{cases}$$

temos a interseção de um plano com uma superfície cúbica, o que nos dá, uma curva cúbica plana singular em  $(0 : 0 : 0 : 1)$ .

3. Dizemos que  $T$  é **regrada** se a transformada estrita de um plano genérico  $H$ ,  $\widetilde{T^{-1}(H)}$ , é uma superfície cúbica regrada (isto é, birracionalmente equivalente a  $C \times \mathbb{P}^1$ , onde  $C$  é uma curva).

**Exemplo 4.7.** A aplicação

$$T = (xy^2 : yx^2 : zx^2 : wy^2)$$

é regrada. O lugar de base de  $T$  são 3 retas dadas por  $x = y = 0$ ,  $x = w = 0$  e  $y = z = 0$  e como  $T = T^{-1}$  temos que  $T \in \mathbf{T}_{3,3}$ .

Dado um plano genérico  $H$ :  $ax + by + cz + dw = 0$  temos que

$$\begin{aligned} \widetilde{T^{-1}(H)} &= axy^2 + byx^2 + czx^2 + dwy^2 = \\ &= x^2(by + cz) + y^2(ax + dw) = 0 \end{aligned}$$

Dada uma família de planos  $y = kx$  em  $\mathbb{P}^3$ , temos

$$\begin{aligned} \widetilde{T^{-1}(H)} &= x^2(by + cz) + y^2(ax + dw) = \\ &= x^2(bkx + cz) + k^2x^2(ax + dw) = \\ &= x^2(bkx + cz + k^2ax + dw) = 0 \end{aligned}$$

Se

$$x \neq 0 \Rightarrow \begin{cases} (k^2a + bk)x + cz + dw = 0 \\ y = kx \end{cases}$$

é uma família de retas e, portanto,  $\widetilde{T^{-1}(H)}$  é uma superfície regrada.

Observe que  $\widetilde{T^{-1}(L)}$  ser plana, significa que ela é singular, pois uma curva irredutível racional cúbica é plana se, e somente se, ela é singular.

Denotemos por  $\mathbf{T}_{3,3}^D$ ,  $\mathbf{T}_{3,3}^J$ ,  $\mathbf{T}_{3,3}^R$  os conjuntos das transformações de Cremona de  $\mathbb{P}^3$  de bigrau  $(3, 3)$  que são *determinantais*, de *de Jonquières* e *regradas*, respectivamente.

**Proposição 4.8.** *Uma transformação de Cremona  $T$  de bigrau  $(3, 3)$  é determinantal se, e somente se, o lugar de base de  $T$  é uma curva de grau 6 e gênero 3.*

*Demonstração.* para mais detalhes ver [10] página 34. □

Temos que

- (i)  $\mathbf{T}_{3,3}^D \cap \mathbf{T}_{3,3}^R \neq \emptyset$ ;
- (ii)  $\mathbf{T}_{3,3}^R \cap \mathbf{T}_{3,3}^J \neq \emptyset$ ;
- (iii) Enquanto que  $\mathbf{T}_{3,3}^D \cap \mathbf{T}_{3,3}^J = \emptyset$ .

Para mostrar (i) Seja

$$T = (xy^2 : yx^2 : zx^2 : wy^2)$$

dada no exemplo 4.7. Mostramos que  $T$  é regrada. A aplicação é também determinantal associada a matriz

$$\begin{pmatrix} x & w & 0 \\ -y & 0 & z \\ 0 & 0 & -y \\ 0 & -x & 0 \end{pmatrix}.$$

Em (ii) temos

$$T = (x^3 : x^2y : x^2z : x^2z - y^2w)$$

que é uma transformação regrada e de de Jonquière como mostrado no exemplo 4.6.

A demonstração de (iii) se encontra em [10] página 130.

O resultado principal deste capítulo é:

**Teorema 4.9.**  $T_{3,3} = \mathbf{T}_{3,3}^D \cup \mathbf{T}_{3,3}^J \cup \mathbf{T}_{3,3}^R$ .

Para a demonstração, precisamos de alguns resultados e definições:

**Definição 4.10.** Dizemos que uma variedade  $X$  é normal, se o lugar singular

$$(\text{Sing}(X) \subset X)$$

possui codimensão  $\geq 2$ .

**Exemplo 4.11.** Seja  $S$  uma superfície normal em  $\mathbb{P}^3$ . Assim o lugar singular de  $S$ ,  $Sing(S)$  possui codimensão  $\geq 2$ , ou então,  $Sing(S)$  possui dimensão  $\leq 0$ . Logo, o lugar singular de  $S$  são pontos.

**Definição 4.12.** Seja  $Y \neq \emptyset$ , um sub-esquema fechado de  $\mathbb{P}^n$  e  $C(Y)$  o cone minimal de  $Y$  dado pelo quociente

$$C(Y) : + \frac{A}{(Y)};$$

onde  $A = k[x_0, \dots, x_n]$ .

1. Chamamos de profundidade de  $C(Y)$ , e denotamos por  $prof C(Y)$ , o comprimento máximo de uma sequência  $C(Y)$ -regular constituída por polinômios por homogêneos.
2. O anel  $C(Y)$  é chamado de Cohen-Macaulay graduado (denotado por CMg) se  $prof C(Y) = dim C(Y)$ , caso em que se diz que  $Y$  é projetivamente Cohen-Macaulay (denotado por pCM).

**Definição 4.13.** Sejam  $H_1, H_2, \dots, H_r$  hipersuperfícies em  $\mathbb{P}^n$ . Dizemos que

$$Y = H_1 \cap H_2 \cap \dots \cap H_r$$

é uma interseção completa se  $codim Y = r$ .

**Teorema 4.14.** (*Primeiro Teorema de Bertini*) Um elemento genérico de um feixe em  $\mathbb{P}^n$  sem componentes fixas não possui singularidades fora do lugar base.

*Demonstração.* ver [15] página 137. □

**Lema 4.15.** *Seja  $S \subseteq \mathbb{P}^3$  uma superfície cúbica não regradada e  $\gamma \subset S$  uma cúbica reversa. Seja  $\{q_1, q_2, q_3\}$  uma base constituída por polinômios homogêneos de grau 2. Se  $a = (a_1, a_2, a_3) \in k^3$ , denote por  $Q_a$  o sub-esquema definido por  $q_a := a_1q_1 + a_2q_2 + a_3q_3$ . Assim, uma interseção genérica (completa)  $Q_a \cap S$  liga  $\gamma$  à uma outra cúbica reversa  $\gamma_a$ . Além disso, se  $q$  é um polinômio homogêneo de grau dois temos que  $q|_{\gamma \cup \gamma_a} = 0$ ,  $q = cq_a$  para um  $c \in K$ .*

Como  $S$  uma superfície normal, temos que o conjunto dos seus pontos singulares tem dimensão zero.

A interseção completa

$$X := Qa \cap S$$

contém  $\gamma$ . Seja  $\gamma_a$  ligada à  $\gamma$  por  $X$ . Como toda curva não singular é  $pCM$  temos que  $\gamma$  é uma curva cúbica  $pCM$  de gênero aritmético zero, e, portanto,  $\gamma_a$  também é  $pCM$  de gênero aritmético zero.

A cúbica  $\gamma_a$  pode ser de dois tipos: ou uma cúbica reversa, ou uma cúbica redutível e,

$$Qa \cap S = \gamma \cup \gamma_a.$$

Para mais detalhes ver [10] página 18.

Seja  $q$  um polinômio homogêneo de grau 2 tal que  $q|_{\gamma \cup \gamma_a} = 0$ . Considere a função racional em  $S$  definida como a restrição à  $S$  por

$$f = \frac{q}{q_a}.$$

Como  $S$  é normal, esta função é regular por construção, onde  $f = cte = c$ . Assim,  $q - cq_a \in S$  e, portanto,  $q = cq_a$  pois  $deg(S) = 3$ .

Se  $S \subset \mathbb{P}^3$  é uma superfície cúbica não regradada,  $S$  é normal e podemos falar de sistemas lineares de curvas em  $S$ .

**Lema 4.16.** *Seja  $S \subset \mathbb{P}^3$  uma superfície cúbica regradada. Assim, qualquer sistema linear de cúbicas reversas em  $S$  possui dimensão  $\leq 2$ . Em particular, sistemas lineares de cúbicas reversas de dimensão de 2 em  $S$  são completos.*

*Demonstração.* Suponha, por contradição, que existe um sistema linear  $\Gamma$  de cúbicas reversas em  $S$ , de dimensão 3. Sejam  $P_1, P_2$  dois pontos genéricos. O sub-sistema  $\Gamma_{P_1, P_2} \subset \Gamma$  de cúbicas reversas passando por  $P_1$  e  $P_2$  possui dimensão 1. Agora, uma vez que  $S$  não é regradada, um plano genérico  $H$  passando por  $P_1$  e  $P_2$  é transversal à  $S$  em qualquer ponto; e a seção plana correspondente  $C_H \subset S$  é uma cúbica lisa de gênero 1.

Por outro lado, temos a aplicação racional

$$\Gamma_{P_1, P_2} \subset \Gamma = \mathbb{P}^1 \dashrightarrow C_H$$

em que  $\gamma \in \Gamma_{P_1, P_2}$  é associada a um ponto de  $\gamma \cap H$  distinto de  $P_1$  e  $P_2$ . Esta aplicação não é constante (pois  $H$  é genérico) e é, portanto, um morfismo não constante  $\mathbb{P}^1$  em  $C_H$  que é uma contradição.  $\square$

Se  $T = [f_1, f_2, f_3, f_4]$  é uma aplicação racional de  $\mathbb{P}^3$  em  $\mathbb{P}^3$ , note que o ideal  $I_T$  gerado por  $f_i, i = 1, \dots, 4$  em  $B(T)$  é um sub-esquema de  $\mathbb{P}^3$  assim definido, chamado de esquema da base de  $T$ .

**Lema 4.17.** *Seja  $T$  uma transformação birracional de bigrau  $(3, 3)$  de tal modo que  $T \notin T_{3,3}^J \cup T_{3,3}^R$ . Se  $g, f_1 \in \mathcal{I}_T$  são polinômios homogêneos irredutíveis genéricos de grau três, então existe uma cúbica reversa  $\gamma$  tal que*

$$\mathcal{I}_T \mathcal{I}(\gamma) \subset (g, f_1) \subset (\gamma).$$

*Demonstração.* Sem perda de generalidade, podemos assumir

$$T = [g, f_1, f_2, f_3]$$

tais que  $g, f_1, f_2, f_3$  são irredutíveis e

1.  $t_S = [f_1, f_2, f_3] : S \rightarrow \mathbb{P}^2$  é birracional onde  $S$  é a superfície cúbica não regrada definida pelo ideal  $(g)$  ( $t_S$  resulta da composição de  $T|_S$  com uma projeção de centro em  $[1, 0, 0, 0]$ );
2.  $g, f_1 \in (\gamma), f_2, f_3 \notin (\gamma)$ , onde  $\gamma$  é a transformada estrita, por  $T$ , da reta  $x = y = 0$ .

Como  $T$  não é de *de Jonquières* podemos assumir que  $\gamma$  é uma cúbica reversa. Assim,  $t_S$  define um sistema linear (de dimensão 2) de cúbicas reversas  $\Gamma_S$  em  $S$ , com  $\gamma \in \Gamma_S$ .

Sejam  $q_1, q_2, q_3$  três polinômios homogêneos de grau dois, que geram os sub-esquemas  $Q_1, Q_2, Q_3$  de  $\mathbb{P}^3$ .

É suficiente demonstrar que

$$f_j q_i \in (g, f_1), \forall i = 1, 2, 3, \forall j = 2, 3.$$

Pelo Lema 4.15, podemos supor que

$$S \cap Q_i = \gamma \cup \gamma_i$$

onde  $\gamma_i$  são cúbicas reversas. Escolhemos as bases

$$\{q_i, q_{2i}, q_{3i}\} \text{ de } (\gamma_i),$$

formada por polinômios homogêneos de grau dois.

Os espaços vetoriais  $\langle q_i, q_{2i}, q_{3i} \rangle$  definidos por sistemas lineares (de dimensão 2) de cúbicas reversas  $\Gamma_i$  em  $S$ . Estes sistemas contêm todas as cúbicas reversas  $\gamma$  em  $\Gamma_S$  e ainda: pelo lema 4.16 são coincidentes.

Se  $t_i : S \rightarrow \mathbb{P}^2$ , para  $i = 1, 2, 3$ , a aplicação racional definida por  $t_i = [q_i, q_{2i}, q_{3i}]$ , podemos deduzir que existe uma  $s_i$  tal que

$$t_S = s_i \circ t_i$$

onde

$$[f_1, f_2, f_3] = [q'_i, q'_{2i}, q'_{3i}]$$

e  $s_i \circ [q_i, q_{2i}, q_{3i}] = [q'_i, q'_{2i}, q'_{3i}]$ . Como  $f_1|_\gamma = 0$  temos que  $q'_i|_{\gamma \cup \gamma_i} = 0$ , e pelo lema 4.15, podemos assumir  $q'_i = q_i$ . Assim,

$$\left( \frac{f_j}{f_1} - \frac{q'_{ji}}{q_i} \right) |_S = 0, i = 1, 2, 3; j = 2, 3.$$

Portanto,

$$f_j q_i - q'_{ji} f_1 \in (g), i = 1, 2, 3; j = 2, 3$$

o que demonstra o lema. □

### Observações:

1. Podemos provar que as aplicações  $t_i$  da demonstração são birracionais independente da existência de  $t_S$ . (ver [14]). Assim, segue que qualquer cúbica reversa de uma superfície cúbica  $S \subset \mathbb{P}^3$  não regrada parte de um sistema linear birracional completo de dimensão 2.
2. A suposição de que  $\gamma_i$  é uma cúbica reversa na demonstração do lema 4.17 assegura que  $\gamma_i$  é dado por três polinômios homogêneos de grau 2, linearmente independentes, o que é verdadeiro para qualquer cúbica de gênero aritmético 0.

*Demonstração.* (Teorema 4.9) Seja

$$T \in T_{3,3} (T_{3,3}^J \cup T_{3,3}^R).$$

Pelo lema 4.17, existem polinômios homogêneos irreduzíveis de grau três,  $g, f_1 \in \mathcal{I}_T$ , e uma cúbica reversa  $\gamma$  tal que  $\mathcal{I}_T \subset (g, f_1) \subset (\gamma)$ . Seja

$$\mathcal{J} := ((g, f_1) : (\gamma)) \supset \mathcal{I}_T.$$

Vamos mostrar que  $\mathcal{J}$  é dado pelos menores de uma matriz  $4 \times 3$  de formas lineares e que

$$\mathcal{J} = \mathcal{I}_T.$$

Sabemos que  $C(\gamma)$  é uma resolução livre

$$0 \rightarrow A^2(-3) \xrightarrow{\varphi} A^3(-2) \rightarrow A \rightarrow C(\gamma) \rightarrow 0,$$

onde  $A = k[x, y, z, w]$ . Observamos que, se  $q_1, q_2, q_3$ , são os menores  $2 \times 2$  de  $\varphi$  que geram  $(\varphi)$

$$g = \sum_{i=1}^3 \lambda_i q_i, \quad f_1 = \sum_{i=1}^3 \mu_i q_i$$

onde  $\lambda_i, \mu_i$  são polinômios homogêneos de grau 1. Pela proposição (1.3.1) deduzimos que para  $A/\mathcal{J}$  é  $CMg$  de codimensão 2 e tem uma resolução livre da forma

$$0 \rightarrow A^3(-4) \xrightarrow{\psi} A^4(-3) \rightarrow A \rightarrow \frac{A}{\mathcal{J}} \rightarrow 0.$$

Como  $\lambda_i$  e  $\mu_i$  são polinômios homogêneos de grau 1,  $\psi$  é uma matriz  $4 \times 3$  de formas lineares. Assim,  $\mathcal{J}$  é gerado pelos quatro menores da matriz  $\psi$ , isto é,  $\mathcal{J}$  é gerado por quatro polinômios homogêneos de grau três, ou seja,  $\mathcal{I}_T = \mathcal{J}$ , o que completa a prova.  $\square$

**Corolário 4.18.** *Seja  $T \in T_{3,3}$ . Suponha que existe um plano  $H \subset \mathbb{P}^3$  tal que a sua transformada estrita é suave. Então  $T$  é determinantal.*

*Demonstração.* Podemos supor que o plano  $H$  é genérico. Em particular  $T$  não é regrada e, portanto, pelo teorema 4.9 precisamos apenas provar que  $T$  não é de *de Jonquières*.

Seja  $S$  a transformada estrita de  $H$  e  $\Gamma$  o sistema linear sobre  $S$  definido pelas transformadas estritas, por  $T$ , de retas. Pelo teorema 4.14 de Bertini, um elemento genérico de  $\Gamma$

não tem singularidades fora do lugar base de  $\Gamma$ . Uma vez que este conjunto é finito, se  $T$  é de *de Jonquières*, existe  $P \in S$  tal que um elemento genérico de  $\Gamma$  é uma secção plana de  $S$  singular em  $P$ , o que contradiz que  $S$  é suave.  $\square$

# Capítulo 5

## Transformações de Cremona e Complexos Quadráticos

Nosso objetivo é estudar a relação entre as transformações de Cremona cubo-cúbicas no espaço e complexos quadráticos de retas.

### 5.1 Complexos Quadráticos

Vamos denotar por  $Q_1$  a hipersuperfície quádrlica de Plücker suave em  $\mathbb{P}^5$  sobre  $\mathbb{C}$  dada pelo polinômio

$$x_0x_1 - x_2x_3 + x_4x_5 = 0,$$

parametrizando as retas de  $\mathbb{P}^3$ . O complexo quadrático de retas é, como definimos anteriormente, a interseção  $X = Q_1 \cap Q_2$ , onde  $Q_2 \subset \mathbb{P}^5$  é uma hipersuperfície quádrlica suave diferente de  $Q_1$ .

Sabemos que  $\dim X = 3$  e assumiremos que  $X$  é não singular, isto é,  $T_x Q_1 \neq T_x Q_2$ .

Seja a reta  $L \subset \mathbb{P}^5$ , contida em  $X$ . Fixamos um 3-plano genérico  $M \sim \mathbb{P}^3$  fixo em  $\mathbb{P}^5$ , e definimos a projeção

$$\begin{aligned} \pi_L : X \subset \mathbb{P}^5 &\dashrightarrow M \sim \mathbb{P}^3 \\ q &\longmapsto H_q \cap M \end{aligned}$$

do ponto  $q$  com centro em  $L$ , onde  $H_q = \langle q, L \rangle$  é o plano gerado pelo ponto  $q \in X$  e pela reta  $L \subset X$ . Assumiremos que  $M \cap L = \emptyset$ .

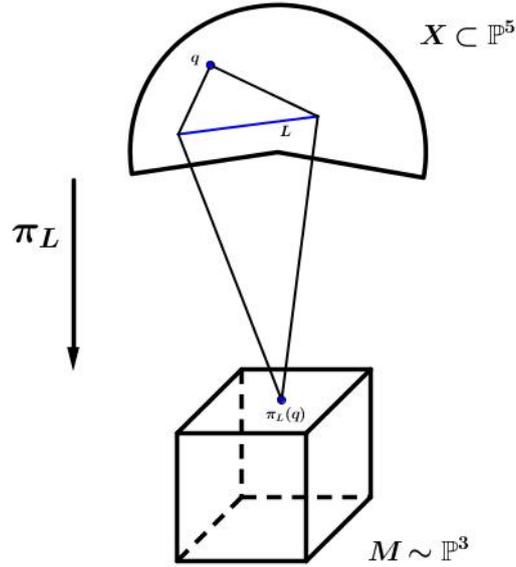


Figura 5.1: Projção  $\pi_L$

A projeção  $\pi_L$  está bem definida pois,  $\dim H_q = 2$  e  $\dim M = 3$ .

**Lema 5.1.** *A projeção  $\pi_L$  é uma aplicação birracional, cuja inversa  $\pi_L^{-1}$  é dada por um sistema linear de cúbicas.*

*Demonstração.* Para provar o lema seguiremos alguns passos:

- Primeiramente encontramos os pontos de  $X$  onde  $\pi_L$  não é injetiva.

A projeção  $\pi_L$  é racional e seu lugar de base é a reta  $L \subset X$  pois,  $\dim L + \dim M = 4$  e  $L \cap M = \emptyset$  por definição. Sejam  $q_1, q_2 \in X \setminus L$ .

Suponha que  $\pi_L(q_1) = \pi_L(q_2)$ .

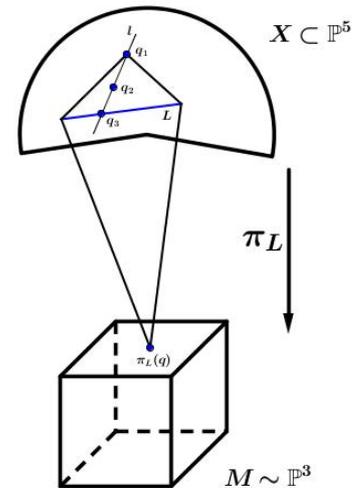
Então  $q_1, q_2$  estão no mesmo 2-plano  $H_{q_1} = H_{q_2} = H$ .

Seja  $l = \overline{q_1 q_2}$  a reta passando por  $q_1$  e  $q_2$ .

A reta  $l$  não necessariamente está em  $X$ .

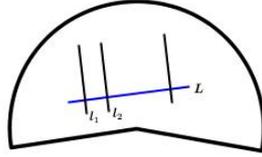
Mas como  $l, L \subset H$  temos que  $l \cap L \neq \emptyset$ .

Assim, chame  $l \cap L = q_3$ . Temos que  $q_1, q_2, q_3 \in H \cap X$ .



Como  $H$  é dado por uma equação linear (deg 1) e  $Q_i$  é dada por uma equação de grau 2, temos pelo teorema de Bézout  $\#(H \cap Q_i) = 2$ . Logo  $l \subset Q_i$  e,  $\forall p \in l \setminus \{q_3\}$ , temos  $\pi_L(p) = \pi_L(q_1) = \pi_L(q_2)$ .

Concluimos que  $\pi_L$  não é injetiva nas retas  $l' \subset X$  tal que  $l' \cap L \neq \emptyset$ .



Como anteriormente, chamaremos tais retas de retas fundamentais e denotaremos por  $\bar{X}$  o seguinte conjunto:  $\bar{X} = \{l' \subset X; l' \cap X \neq \emptyset\}$ .

Assim,  $\pi_L$  é injetiva em  $X \setminus \bar{X}$ .

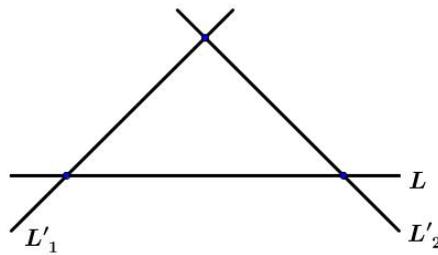
- Agora, mostraremos que  $\pi_L$  é birracional.

Tome um ponto genérico  $y \in M \sim \mathbb{P}^3$ . Considere o 2-plano  $H_y := \langle L, y \rangle$  gerado por  $L$  e  $y$ . Como  $\dim H_y = 2$  e  $\dim Q_i = 4$  temos que  $\dim (H_y \cap Q_i) = 1$ .

E ainda, como  $\deg H_y = 1$  e  $\deg Q_i = 2$  segue do Teorema de Bézout que

$$\deg (H_y \cap Q_i) = 2.$$

Logo  $H_y \cap Q_i$  é a união da reta  $L$  com outra reta  $L'_i$ .



Assim

$$H_y \cap Q_1 = L \cup L'_1 \quad \text{e} \quad H_y \cap Q_2 = L \cup L'_2.$$

Note que  $L, L'_1, L'_2$  são retas de  $H_y$  e temos que a interseção de quaisquer duas retas em  $H_y$  é diferente de vazio. Em especial,  $L'_1 \cap L'_2$  é um ponto em  $X$  pois  $L'_1 \neq L'_2$  dado que  $y$  é genérico.

Como  $X$  é suave,  $L'_1 \cap L'_2 \notin L$ , pois caso contrário,

$$H_y = T_{L'_1 \cap L'_2}(Q_1) = T_{L'_1 \cap L'_2}(Q_2).$$

Logo, genericamente  $L'_1 \cap L'_2$  é um ponto em  $H_y \cap X \setminus L$ , o que nos dá que  $\pi_L$  é birracional.

- Para mostrar que  $\pi_L^{-1}$  é dada por um sistema linear de cúbicas, seja  $S = \mathcal{H} \cap X \subset \mathbb{P}^5$  a seção por um hiperplano genérico com  $X$ .

Note que

$$S = F' \cap G'$$

onde  $F' = \mathcal{H} \cap F$  e  $G' = \mathcal{H} \cap G$  e, então,  $\dim F' = 3 = \dim G'$ . Assim,  $S$  é uma superfície suave em  $\mathcal{H}$  e, ainda,  $S$  é dada pelas equações das quádricas  $F'$  e  $G'$ .

Tal superfície, é conhecida como superfície de “*del Pezzo*”.

Seja  $p = \mathcal{H} \cap L$  um ponto de  $S$ . A imagem da projeção de  $S$  com centro em  $p$ , é uma superfície cúbica suave, pois  $p \in S$ .

□

Para demonstrar o próximo lema, usaremos a seguinte proposição:

**Proposição 5.2.** *Seja  $C$  uma curva de  $\mathbb{P}^3$  de grau  $\deg(C)$  e gênero  $\text{gen}(C)$ . Se  $X$  é uma curva de  $\mathbb{P}^3$  contendo  $C$ , dada por uma interseção de duas superfícies de graus  $f$  e  $g$ ,  $X = C \cup C'$ . Então, o grau e gênero da curva  $C'$  satisfaz as relações:*

$$\deg(C) + \deg(C') = f.g$$

e

$$\text{gen}(C) - \text{gen}(C') = \left( \frac{f+g}{2} - 2 \right) \left( \deg(C) - \deg(C') \right).$$

*Demonstração.* Ver em [2] página 282.

□

A seguir, denotaremos por  $H_{i_q} = \langle L_i, q \rangle$  o espaço gerado pela reta  $L_i$  e o ponto  $q \in X$ .

Sejam as retas  $L_1, L_2 \subset \mathbb{P}^5, L_1 \neq L_2$ , ambas contidas em  $X$ . Fixamos um 3-plano genérico  $M_i \sim \mathbb{P}^3$  em  $\mathbb{P}^5$ ,  $i = 1, 2$  e definimos projeções

$$\begin{aligned} \pi_i : X \subset \mathbb{P}^5 &\dashrightarrow M_i \sim \mathbb{P}^3 \\ q &\longmapsto H_{i,q} \cap M_i \end{aligned}$$

do ponto  $q$ , com centros em  $L_1$  e  $L_2$ , respectivamente. Assumiremos que  $M_i \cap L_i = \emptyset, i = 1, 2$ .

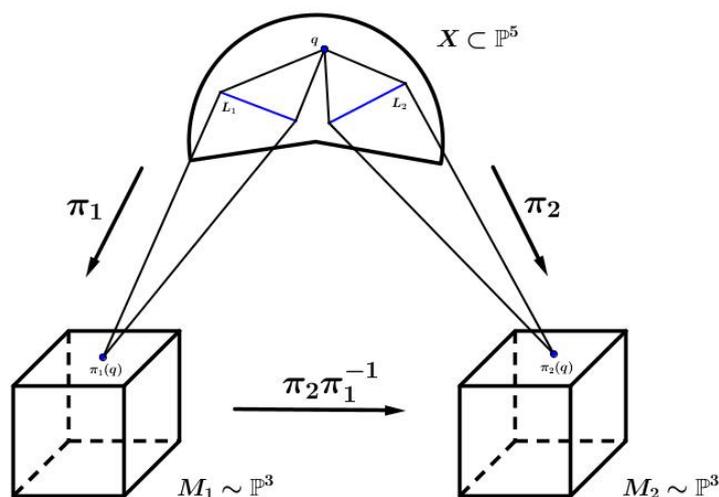


Figura 5.2: Projeção  $\pi_1^{-1}\pi_2$

**Proposição 5.3.** *A restrição de  $\pi_i$  a  $X$ ,  $i = 1, 2$ , induz uma aplicação birracional  $X \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ , que ainda denotaremos por  $\pi_i$ , cuja inversa  $\pi_i^{-1}$  é dada por um sistema linear de cúbicas onde o lugar de base é uma curva suave irreduzível  $C_i \subset \mathbb{P}^3$  de grau 5 e gênero 2.*

*Demonstração.* Sejam  $H_1$  e  $H_2$  planos em  $\mathbb{P}^3$  tal que  $H_1 \cap H_2 = L$  (ver figura abaixo). Denotamos por

$$\langle H_1, L_2 \rangle = \mathcal{H}_1 \text{ e } \langle H_2, L_2 \rangle = \mathcal{H}_2.$$

Temos que  $\pi_{L_1}^{-1}$  é dada por um sistema linear de cúbicas em  $\mathbb{P}^3$ , ou seja, cada seção hiperplana  $\mathcal{H}$  de  $X \subset \mathbb{P}^5$  corresponde a uma superfície cúbica  $\mathcal{S} \subset \mathbb{P}^3$ .

Dada  $\mathcal{H}_1 \subset \mathbb{P}^5$  uma seção hiperplana genérica, isto é,  $p \notin \mathcal{H}_1$  e, seja  $S = \mathcal{H}_1 \cap X$  a superfície de “del Pezzo”.

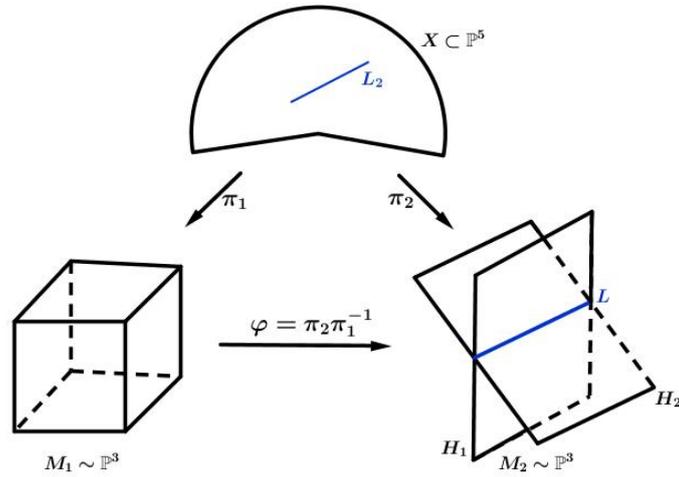


Figura 5.3: Proposição 5.3

Dada  $\mathcal{H}_2 \subset \mathbb{P}^5$  uma outra seção hiperplana genérica, isto é,  $p \notin \mathcal{H}_2$ , temos que

$$\mathcal{H}_2 \cap S = E$$

é uma curva elíptica de grau 4 e gênero 1 e  $\pi_2(E) = E'$  é isomórfica a  $E$ .

Considere  $C_1$  e  $C_2$  as superfícies cúbicas correspondentes a  $\mathcal{H}_1$  e  $\mathcal{H}_2$ , respectivamente.

Temos, pela Proposição 5.2

$$C_1 \cap C_2 = E \cup C_2^5 \subset \mathbb{P}^3,$$

onde o grau de  $C_2^5$  é 5 e o gênero é 2.

□

Considere duas retas  $L_1, L_2$  no complexo quadrático  $X = Q_1 \cap Q_2$ . Denotamos por

$$\varphi = \varphi_{L_1, L_2} := \pi_2 \pi_1^{-1} : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$$

a transformação de Cremona dada pelo lema 5.3.

**Corolário 5.4.** *Dado  $\varphi : \mathbb{P}^3 \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ , a transformada estrita de  $L \subset \mathbb{P}^3$  é uma curva elíptica quando  $L_1 \cap L_2 = \emptyset$  e uma cúbica singular plana quando  $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ .*

*Demonstração.* Se  $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ , chame  $x$  o ponto de interseção entre as retas  $L_1$  e  $L_2$  do complexo quadrático  $X$ . Seja,  $V = \langle L_2, l \rangle$ ,  $\dim V = 3$  e

$$V \cap X = L_2 \cup \tilde{C}$$

onde  $\tilde{C}$  é uma curva de grau 3.

Mas agora,  $\pi_1(L_2) = p$ , assim

$$\widetilde{\varphi^{-1}(l)} = \pi_1(\tilde{C}) \cup \{p\}.$$

Temos que

$$\pi_1(\tilde{C}) = \langle L_1, \tilde{C} \rangle \cap M_2 = C$$

é uma curva cúbica. E mais

$$\dim \langle V, L_1 \rangle \cap M_1 = 2.$$

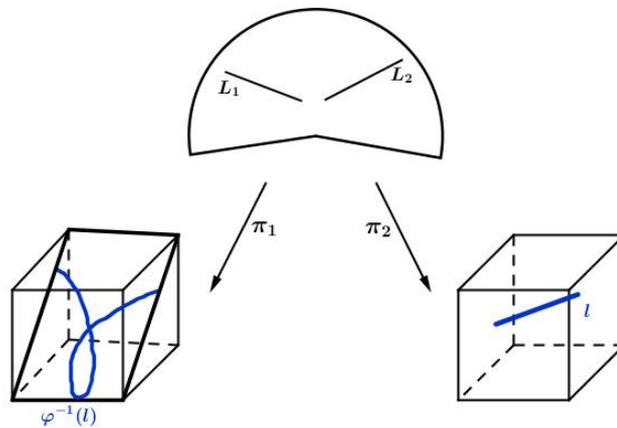


Figura 5.4: Corolário 5.4

Logo,  $C$  é uma curva planar de grau 3. □

A seguir, estudaremos a aplicação  $\varphi$  no caso em que  $X$  é suave.

Resolvemos as indeterminações de  $\varphi$  em dois diferentes casos:

**Caso (1).**  $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ .

Considere a explosão  $\alpha : V \rightarrow X$  de  $X$  ao longo de  $L_1$ , com divisor excepcional  $A$ . Denotamos por  $\widetilde{L}_2$  a transformada estrita de  $L_2$  sob  $\alpha$  e definimos  $p_i := \pi_i \alpha$ , ( $i = 1, 2$ ). Note que  $\widetilde{L}_2$  é o lugar de base de  $p_2 = \pi_2 \alpha : V \dashrightarrow \mathbb{P}^3$ .

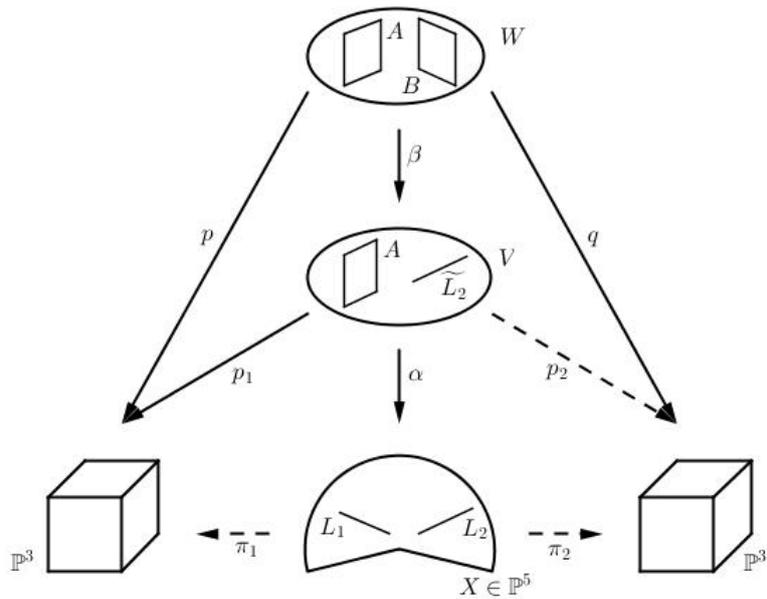
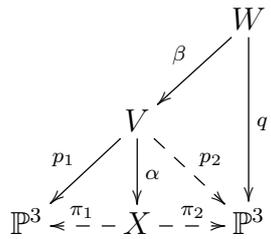
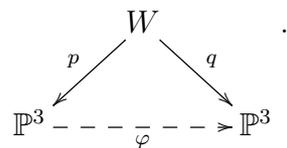


Figura 5.5: Explosão Caso (1)

Seja  $\beta : W \rightarrow V$  a explosão de  $V$  ao longo de  $\widetilde{L}_2$ , com divisor excepcional  $B$ , e definimos  $q := p_2\beta$ . Por construção  $p_1$  e  $q$  estão bem definidas e obtemos o seguinte diagrama comutativo:



**Lema 5.5.** *A resolução das indeterminações de  $\varphi$  é dada pelo seguinte diagrama comutativo*



E ainda, o grupo de Picard de  $W$  é

$$Pic(W) = D\mathbb{Z} \oplus A\mathbb{Z} \oplus B\mathbb{Z},$$

com as seguintes interseções

$$A^2.D = B^2.D = -1$$

$$A^2.B = A.B^2 = A.B.D = A.D^2 = B.D^2 = A^3 = B^3 = 0$$

$$D^3 = 4,$$

onde  $D = \beta^*\alpha^*\mathcal{H}_X$  e  $\mathcal{H}_X$  é a restrição de um hiperplano  $\mathcal{H}$  para  $X$  em  $\mathbb{P}^5$ , isto é, ( $\mathcal{H}_X = \mathcal{H} \cap X$ ).

*Demonstração.* Primeiro, como  $\mathcal{H}_X$  é a restrição de um hiperplano  $\mathcal{H}$  para  $X$  em  $\mathbb{P}^5$  temos que  $p_1$  e  $p_1 \circ \beta$  são definidos pelos sistemas lineares completos

$$|\alpha^*\mathcal{H}_X - A| \text{ e } |\beta^*(\alpha^*\mathcal{H}_X - A) - B|,$$

respectivamente. Para mais detalhes, ver [15] página 480.

Temos que  $\alpha : V \rightarrow X$  é a explosão de  $X$  ao longo de  $L_1$  de codimensão 2, e  $A$ , é o divisor excepcional. Então, pela equação 1.2,

$$Pic(V) = \alpha^*Pic(X) \oplus AZ.$$

Da mesma forma,  $\beta : W \rightarrow V$  é a explosão de  $V$  ao longo de  $\widetilde{L}_2$  de codimensão 2, e  $B$ , é o divisor excepcional. Então,

$$Pic(W) = \beta^*Pic(V) \oplus BZ.$$

Assim,

$$\begin{aligned} Pic(W) &= \beta^*(\alpha^*Pic(X) \oplus AZ) \oplus BZ \\ &= \beta^*\alpha^*Pic(X) \oplus \beta^*(AZ) \oplus BZ \\ &= DZ \oplus AZ \oplus BZ. \end{aligned}$$

Para os números de interseções, temos:

$$\begin{aligned} A^2.D &= \beta^*\alpha^*\mathcal{H}_X.A^2 \\ &= \alpha^*\mathcal{H}_X.\beta_*A^2 \text{ por (1.4)} \\ &= \mathcal{H}_X.\alpha_*\beta_*A^2 \text{ por (1.4)} \\ &= \mathcal{H}_X.\alpha_*A^2 \text{ por (1.5)} \\ &= \mathcal{H}_X.(-L_1) \\ &= -1 \end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned}
B^2.D &= \beta^* \alpha^* \mathcal{H}_X . B^2 \\
&= \alpha^* \mathcal{H}_X . \beta_* B^2 \\
&= \mathcal{H}_X . \alpha_* (-\widetilde{L}_2) \\
&= \mathcal{H}_X . (-L_2) \\
&= -1
\end{aligned}$$

Agora,  $A^2.B = 0$  pois  $\beta_* A^2 . \beta_* B = A^2 . \beta_* B = 0$  pois  $\beta$  contrai  $B$ .

Pela equação (1.5) temos,  $A.B^2 = 0$  pois  $\beta_* A . \beta_* B^2 = A . (-\widetilde{L}_2) = 0$ .

E ainda,  $A.B.D = 0$  pois pela fórmula de projeção (1.4)

$$A.B.\beta^* \alpha^* \mathcal{H}_X = \beta_* A . \beta_* B . \alpha^* \mathcal{H}_X = 0$$

pois  $\beta$  contrai  $B$ .

Temos ainda,

$$\begin{aligned}
A.D^2 &= (\beta^* \alpha^* \mathcal{H}_X)^2 . A \\
&= \mathcal{H}_X^2 . \alpha_* \beta_* A \\
&= \mathcal{H}_X^2 . \alpha_* A \\
&= 0 \text{ pois } \alpha \text{ contrai } A. \\
B.D^2 &= \beta^* \alpha^* \mathcal{H}_X . \beta^* \alpha^* \mathcal{H}_X . B \\
&= \mathcal{H}_X^2 . \alpha_* \beta_* B \\
&= 0 \text{ pois } \beta \text{ contrai } B.
\end{aligned}$$

Pela equação (1.5) temos

$A^3 = 0$  pois

$$\begin{aligned}
\alpha_*(A^3) &= K_X . (L_1) + 2 - 2g \\
&= -2\mathcal{H}_X . L_1 + 2 \\
&= 0.
\end{aligned}$$

E pela equação (1.6) temos

$B^3 = 0$  pois

$$\begin{aligned}
 \beta_*(B^3) &= K_V \cdot (\widetilde{L}_2) + 2 - 2g \\
 &= -2\mathcal{H}_V \cdot \widetilde{L}_2 + 2 \\
 &= -2\alpha^* \mathcal{H}_X \cdot \widetilde{L}_2 + 2 \\
 &= -2\mathcal{H}_X \cdot \alpha_* \widetilde{L}_2 + 2 \\
 &= -2\mathcal{H}_X \cdot L_2 + 2 \\
 &= 0.
 \end{aligned}$$

$D^3 = (\mathcal{H}_X)^3 = \mathcal{H}^3 \cap X = 4$ , pois  $X$  possui grau 4. □

**Caso (2).**  $L_1 \cap L_2 = \{x\}$ .

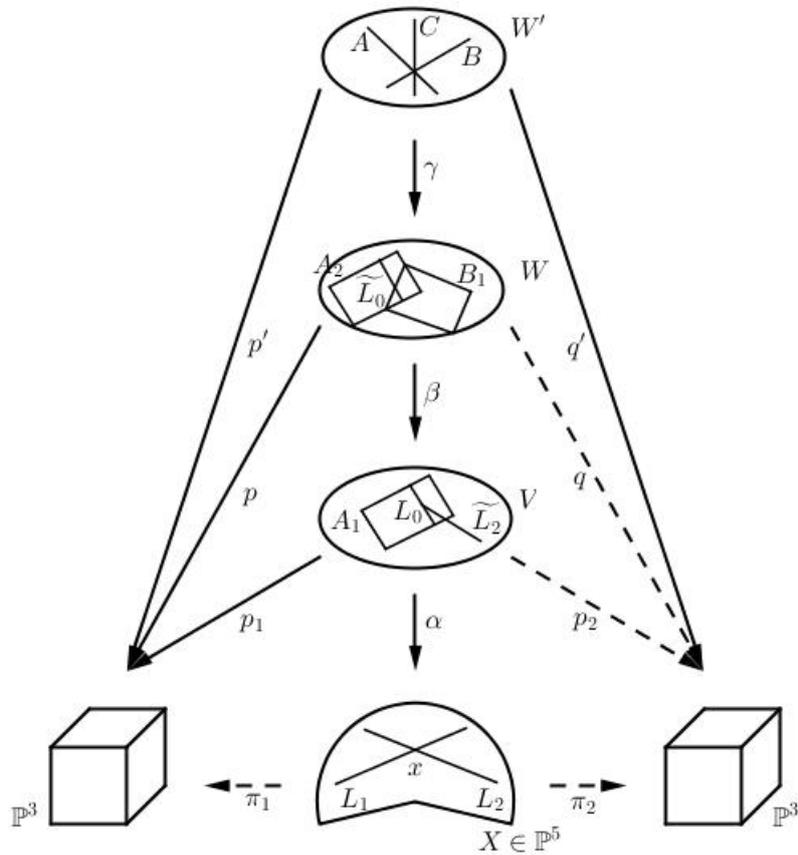
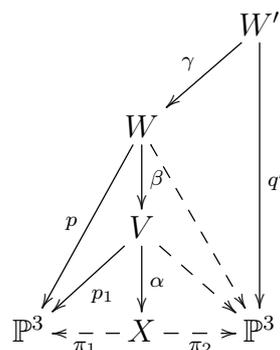


Figura 5.6: Explosão Caso (2)

Como no **Caso (1)**, considere  $\alpha : V \rightarrow X$  e  $\beta : W \rightarrow V$  as explosões ao longo de  $L_1$  e ao longo da transformada estrita  $\widetilde{L}_2 \subset V$  de  $L_2$ , respectivamente. Agora considere a

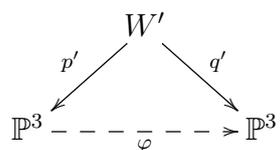
explosão  $\gamma : W' \rightarrow W$  de  $W$  ao longo da transformada estrita em  $W$  de  $L_0 := \alpha^{-1}(x) \subset A$ ; denote por  $P$  seu divisor excepcional. Note que  $p_1 = \pi_1\alpha$  é um morfismo mas,  $\pi_2\alpha$  está bem definido em  $z \in V$  se, e somente se,  $z \notin \widetilde{L}_2 \cup L_0$ .

Como no caso anterior, obtemos o diagrama comutativo ( $q'$  está bem definido pelo lema seguinte)



Seja  $p' = p\gamma$ . Mantendo as notações acima, obtemos o seguinte lema:

**Lema 5.6.** *A resolução das indeterminações de  $\varphi$  é dada pelo seguinte diagrama comutativo*



E ainda, o grupo de Picard de  $W'$  é

$$Pic(W') = D\mathbb{Z} \oplus P\mathbb{Z} \oplus A\mathbb{Z} \oplus B\mathbb{Z},$$

com as seguintes interseções

$$A^2.B = A.B^2 = A^2.D = B^2.D = A.P^2 = B.P^2 = -1$$

$$A^2.P = B^2.P = D^2.P = D.P^2 = A.B.D = A.D^2 = B.D^2 = A.D.P = B.D.P = 0$$

$$A^3 = B^3 = A.B.P = 1$$

$$P^3 = 2$$

$$D^3 = 4,$$

onde  $D = \gamma^*\beta^*\alpha^*\mathcal{H}_X$  e  $\mathcal{H}_X$  é a restrição de  $X$  para um hiperplano  $\mathcal{H}$  em  $\mathbb{P}^5$ , isto é, ( $\mathcal{H}_X = \mathcal{H} \cap X$ ).

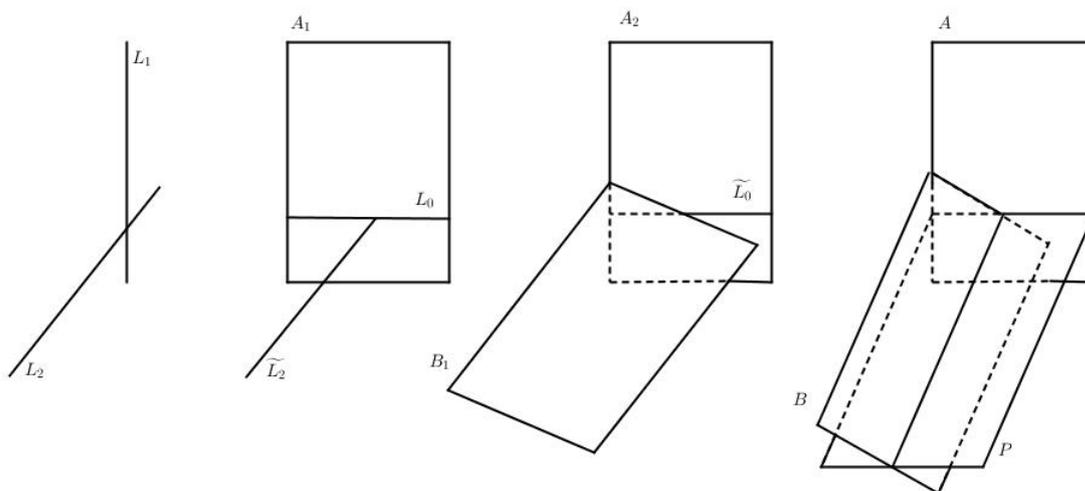


Figura 5.7: Interseção dos divisores excepcionais

*Demonstração.* Primeiro, como  $\mathcal{H}_X$  é a restrição de um hiperplano  $\mathcal{H}$  para  $X$  em  $\mathbb{P}^5$  temos que  $p_1$ ,  $p_1 \circ \beta$  e  $p_1 \circ \beta \circ \gamma$  são definidos pelos sistemas lineares completos

$$|\alpha^*\mathcal{H}_X - A|, |\beta^*(\alpha^*\mathcal{H}_X - A) - B| \text{ e } |\gamma(\beta^*(\alpha^*\mathcal{H}_X - A) - B) - P|,$$

respectivamente. Para mais detalhes, ver [15] página 480.

Temos que  $\alpha : V \rightarrow X$  é a explosão de  $X$  ao longo de  $L_1$  de codimensão 2, e  $A$ , é o divisor excepcional. Então,

$$Pic(V) = \alpha^*Pic(X) \oplus AZ.$$

Da mesma forma,  $\beta : W \rightarrow V$  é a explosão de  $V$  ao longo de  $\widetilde{L}_2$  de codimensão 2, e  $B$ , é o divisor excepcional. Então,

$$Pic(W) = \beta^*Pic(V) \oplus BZ.$$

E ainda,  $\gamma : W' \rightarrow W$  é a explosão de  $W$  ao longo de  $\widetilde{L}_0$  de codimensão 2, e  $P$ , é o divisor excepcional. Então,

$$Pic(W') = \gamma^*Pic(W) \oplus PZ.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
Pic(W') &= \gamma^*(\beta^*Pic(V) \oplus B\mathbb{Z}) \oplus P\mathbb{Z} \\
&= \gamma^*(\beta^*(\alpha^*Pic(X) \oplus A\mathbb{Z}) \oplus B\mathbb{Z}) \oplus P\mathbb{Z} \\
&= \gamma^*(\beta^*\alpha^*Pic(X) \oplus \beta^*(A\mathbb{Z}) \oplus B\mathbb{Z}) \oplus P\mathbb{Z} \\
&= \gamma^*\beta^*\alpha^*Pic(X) \oplus \gamma^*\beta^*(A\mathbb{Z}) \oplus \gamma^*(B\mathbb{Z}) \oplus P\mathbb{Z} \\
&= D\mathbb{Z} \oplus A\mathbb{Z} \oplus B\mathbb{Z} \oplus P\mathbb{Z}.
\end{aligned}$$

Para o número de interseções observe que  $\alpha^*(L_1 \cup L_2) = A_1 + \widetilde{L}_2$  e, então,

$$A_1.L_0 = \alpha^*(L_1 \cup L_2).L_0 - \widetilde{L}_2.L_0 = (L_1 \cup L_2).\alpha_*L_0 - 1 = -1,$$

dado que  $\alpha_*$  contrai  $L_0$ .

Sabemos por 1.6 que  $K_X = \mathcal{O}(-2) - 2H_X$ ,  $K_V = \alpha^*K_X + A_1$  e  $K_W = \beta^*K_V + B_1$ .

Assim,

$$K_W = \beta^*(\alpha^*K_X + A_1) + B_1$$

e

$$\gamma_*(P^3) = K_W.\widetilde{L}_0 + 2 - 2.g(\widetilde{L}_0) = (\beta^*(\alpha^*K_X + A_1).\widetilde{L}_0 + B_1).\widetilde{L}_0 + 2 = (\alpha^*K_X + A_1).\beta_*\widetilde{L}_0 + B_1.\widetilde{L}_0 + 2$$

Agora

$$\beta^*(D_1.D_2.D_3) = \widetilde{L}_0 + \sum q_i - \sum_{i=0}^n L_i,$$

isto é,

$$\widetilde{L}_0 = \beta^*(D_1.D_2.D_3) - \sum q_i + \sum_{i=0}^n L_i.$$

Multiplicando por  $B_1$  em ambos os lados,

$$\widetilde{L}_0.B_1 = \beta^*(D_1.D_2.D_3).B_1 - \sum q_i.B_1 + \sum_{i=0}^n L_i.B_1,$$

ou seja,

$$\widetilde{L}_0.B_1 = n.\widetilde{L}_0.B_1 \Rightarrow (1+n).\widetilde{L}_0.B_1 = 0 \Rightarrow \widetilde{L}_0.B_1 = 0$$

onde  $D_1, D_2, D_3$  são divisores em  $V$ .

Então  $P^3 = 2$ .

Assim, como  $\gamma^*A_2 = A + P$  temos

$$\begin{aligned}
A.P^2 &= (\gamma^*A_2 - P).P^2 \\
&= \gamma^*A_2.P^2 - P^3 \\
&= A_2.\gamma_*P^2 - 2 \\
&= A_2.(-\widetilde{L}_0) - 2 \\
&= 1 - 2 \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned}
B.P^2 &= (\gamma^*B_1 - P).P^2 \\
&= \gamma^*B_1.P^2 - P^3 \\
&= B_1.\gamma_*P^2 - 2 \\
&= B_1.(-\widetilde{L}_0) - 2 \\
&= 0 - 2 \\
&= -2.
\end{aligned}$$

Agora, utilizando a fórmula de projeção 1.4 temos,

$$\begin{aligned}
A^2.P &= (\gamma^*A_2 - P)^2.P \\
&= (\gamma^*A_2)^2.P - 2\gamma^*A_2.P^2 + P^3 \\
&= A_2^2.(\gamma_*P) - 2.A_2.\gamma_*P^2 + 2 \\
&= -2.A_2.(-\widetilde{L}_0) + 2 && \text{dado que } \gamma_* \text{ contrai } P. \\
&= -2 + 2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Da mesma forma,

$$\begin{aligned}
B^2.P &= (\gamma^*B_1 - P)^2.P \\
&= (\gamma^*B_1)^2.P - 2.P^2.\gamma^*B_1 + P^3 \\
&= B_1^2.\gamma_*P - 2.\gamma_*P^2.B_1 + 2 \\
&= -2.(-\widetilde{L}_0).B_1 + 2 \\
&= 2
\end{aligned}$$

Agora,

$$\begin{aligned}
A^2.B &= (\gamma^*A_2 - P)^2.B \\
&= \gamma^*A_2^2.B - 2\gamma^*A_2.P.B + P^2.B \\
&= A_2^2.\gamma_*B - 2A_2.\gamma_*P.B + (-1)
\end{aligned}$$

dado que  $B.P^2 = -1$  e  $\gamma_*P = 0$ . Como  $A_2^2.\gamma_*B = \beta^*A_1.B_1 = A_1.\beta_*B_1 = 0$  temos que

$$A^2.B = -1.$$

Agora, usando novamente que  $\gamma^*A_2 = A + P$  temos

$$\begin{aligned}
A.B^2 &= B^2.(\gamma^*A_2 - P) \\
&= \gamma^*A_2.B^2 - P.B^2
\end{aligned}$$

Como  $A_2.\gamma_*B^2 = \beta^*A_1.B_1^2 = A_1.\beta_*B_1^2 = A_1.(-\widetilde{L}_2) = -1$  e  $P.B^2 = 0$  temos

$$A.B^2 = -1.$$

As interseções  $A^2.D$  e  $B^2.D$  são facilmente calculadas por

$$\begin{aligned}
A^2.D &= A^2.\gamma^*\beta^*\alpha^*\mathcal{H}_X \\
&= \alpha_*\beta_*\gamma_*A^2.\mathcal{H}_X \\
&= \alpha_*\beta_*A_2^2.\mathcal{H}_X \\
&= \alpha_*A_1^2.\mathcal{H}_X \\
&= -L_1.\mathcal{H}_X \\
&= -1.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B^2.D &= B^2.\gamma^*\beta^*\alpha^*\mathcal{H}_X \\
&= \beta_*\gamma_*B^2.\alpha^*\mathcal{H}_X \\
&= \beta_*B_1^2.\alpha^*\mathcal{H}_X \\
&= -\widetilde{L}_2.\alpha^*\mathcal{H}_X \\
&= \alpha_*(-\widetilde{L}_2).\mathcal{H}_X \\
&= -L_2.\mathcal{H}_X \\
&= -1.
\end{aligned}$$

Para  $D^2.P$  e  $D.P^2$  temos

$$\begin{aligned}
D^2.P &= (\gamma^*\beta^*\alpha^*\mathcal{H}_X)^2.P \\
&= (\beta^*\alpha^*\mathcal{H}_X)^2.\gamma_*P \text{ pois } \gamma_* \text{ contrai } P. \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
D.P^2 &= \gamma^*\beta^*\alpha^*\mathcal{H}_X.P^2 \\
&= \beta^*\alpha^*\mathcal{H}_X.\gamma_*P^2 \\
&= \beta^*\alpha^*\mathcal{H}_X.(-\widetilde{L}_0) \quad \text{pois } \alpha_* \text{ contrai } L_0. \\
&= -\alpha^*\mathcal{H}_X.\beta_*\widetilde{L}_0 \\
&= -\mathcal{H}_X.\alpha_*L_0 \\
&= 0
\end{aligned}$$

Vemos ainda que,

$$\begin{aligned}
A.B.D &= A.B.\gamma^*\beta^*\alpha^*H_X \\
&= H_X.\alpha_*A.\beta_*\gamma_*B \quad \text{pois } \alpha_* \text{ contrai } A. \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A.D^2 &= A.(\gamma^*\beta^*\alpha^*\mathcal{H}_X)^2 \\
&= \mathcal{H}_X^2.\alpha_*\beta_*\gamma_*A \\
&= \mathcal{H}_X^2.\alpha_*\beta_*A_2 \quad \text{pois } \alpha_* \text{ contrai } A_1. \\
&= \mathcal{H}_X^2.\alpha_*A_1 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B.D^2 &= B.(\gamma^*\beta^*\alpha^*\mathcal{H}_X)^2 \\
&= \beta_*\gamma_*B.(\alpha^*\mathcal{H}_X)^2 \quad \text{pois } \beta_* \text{ contrai } B_1. \\
&= \beta_*(B_1).(\alpha^*\mathcal{H}_X)^2 \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
A.D.P &= A.\gamma^*\beta^*\alpha^*\mathcal{H}_X.P \\
&= A.\beta^*\alpha^*\mathcal{H}_X.\gamma_*P \quad \text{pois } \gamma_* \text{ contrai } P. \\
&= 0
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B.D.P &= B.\gamma^*\beta^*\alpha^*H_X.P \\
&= B.\beta^*\alpha^*H_X.\gamma_*P \quad \text{pois } \gamma_* \text{ contrai } P. \\
&= 0
\end{aligned}$$

Agora, utilizando a fórmula de projeção 1.4,

$$\begin{aligned}
A^3 &= (\gamma^* A_2 - P)^3 \\
&= (\gamma^* A_2^2 - 2\gamma^* A_2 \cdot P + P^2) \cdot (\gamma^* A_2 - P) \\
&= \gamma^* A_2^3 - 3\gamma^* A_2^2 \cdot P + 3\gamma^* A_2 \cdot P^2 - P^3 \\
&= \gamma^* A_2^3 - 3A_2^2 \gamma_* P + 3A_2 \gamma_* P^2 - 2 \\
&= \gamma^* A_2^3 + 3A_2 \cdot (-\widetilde{L}_0) - 2 \\
&= \gamma^* A_2^3 + 3 - 2 \\
&\stackrel{*}{=} 1.
\end{aligned}$$

Em (\*) temos por 1.5:

$$\begin{aligned}
A_2^3 &= A_1^3 = K_X \cdot L_1 + 2 - 2g(L_1) = -2\alpha^* H_X \cdot L_1 + 2 = \\
&= -2\alpha^* H_X \cdot L_1 + 2 = -2H_X \cdot \alpha_* L_1 + 2 = -2H_X \cdot L_1 + 2 = 0.
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
B^3 &= (\gamma^* B_1 - P)^3 \\
&= \gamma^* B_1^3 - 3\gamma^* B_1^2 \cdot P + 3\gamma^* B_1 \cdot P^2 - P^3 \\
&= \gamma^* B_1^3 - 3B_1^2 \gamma_* P + 3B_1 \gamma_* P^2 - 2 \\
&= \gamma^* B_1^3 + 3B_1 \cdot (-\widetilde{L}_0) - 2 \\
&\stackrel{**}{=} -2.
\end{aligned}$$

Em (\*\*\*) temos por 1.6:  $K_V = \alpha^* K_X + A_1 = -2\alpha^* H_X + A_1$  e, então,

$$\begin{aligned}
B_1^3 &= K_V \cdot \widetilde{L}_2 + 2 - 2g(\widetilde{L}_2) = (\alpha^* K_X + A_1) \cdot \widetilde{L}_2 + 2 = -2\alpha^* H_X \cdot \widetilde{L}_2 + 2 = \\
&= -2H_X \cdot \alpha_* \widetilde{L}_2 + A_1 \cdot \widetilde{L}_2 + 2 = -2H_X \cdot L_2 + 2 = -2 + 2 = 0.
\end{aligned}$$

Temos ainda,

$$A \cdot B \cdot P = 1$$

$$D^3 = (\mathcal{H}_X)^3 = \mathcal{H}^3 \cap X = 4, \text{ pois } X \text{ possui grau } 4. \quad \square$$

**Teorema 5.7.** *Assuma que o complexo quadrático  $X$  seja suave e, sejam  $L_1$  e  $L_2 \subseteq X$  duas retas distintas em  $X$ . Então a aplicação  $\varphi = \pi_2 \circ \pi^{-1}$  é uma transformação de Cremona cubo-cúbica tal que:*

1. O suporte do lugar de base de  $\varphi$  consiste em uma curva irreduzível quíntica  $C$  de gênero 2 união uma reta  $L$ .
2. Se  $L_1 \cap L_2 = \emptyset$ , então  $\varphi$  é uma transformação de Cremona determinantal.
3. Se  $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ , então  $\varphi$  é uma transformação de Cremona de de Jonquières.

*Demonstração.* 1. Sabemos que o lugar de base de  $\pi_2$  é a reta  $L_2$  e no lema 5.3 mostramos que o lugar de base de  $\pi_1^{-1}$  é uma curva quíntica de gênero 2 e que  $\pi_i(L_j) \subseteq L \subseteq M_i$ . Logo, o suporte do lugar de base de  $\varphi$  é a união de uma curva quíntica de gênero 2 união uma reta  $L$ .

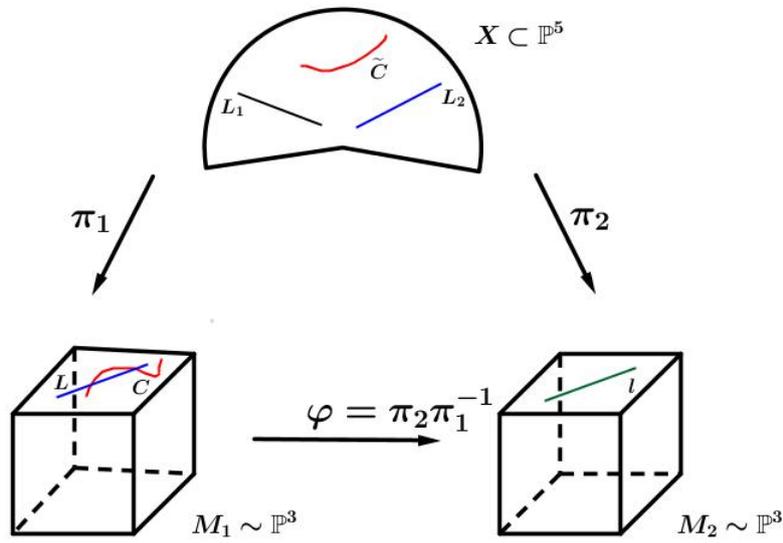


Figura 5.8: Demonstração do teorema 5.7

Agora, para provar os itens 2 e 3 temos:

Seja  $V = \langle L_2, l \rangle$  o espaço gerado por uma reta genérica  $l$  em  $M_2$  e  $L_2 \subset X$ .

Temos que

$$V \cap X = L_2 \cup \tilde{C}$$

onde  $\tilde{C}$  é uma curva de grau 3. Assim,

$$\pi_1(\tilde{C}) = \widetilde{\varphi^{-1}(l)}$$

e  $\tilde{C}$  é irredutível.

Logo  $\tilde{C}$  é a cúbica reversa em  $V$ .

2. Se  $L_1 \cap L_2 = \emptyset$  e  $L = \pi_1(L_2)$ . Para cada hiperplano em  $M_2$  temos uma superfície cúbica em  $M_1$ . Assim, podemos tomar  $l \subseteq \mathcal{H}_1 \cap \mathcal{H}_2$  e  $S, S'$  superfícies cúbicas tais que

$$S \cap S' = C \cup L \cup \widetilde{\varphi^{-1}(l)}.$$

Temos que

$$\deg(\widetilde{\varphi^{-1}(l)}) = 3 \text{ e } \text{gen}(\widetilde{\varphi^{-1}(l)}) = 0.$$

Pela Proposição 5.2 temos que

$$\deg(C \cup L) = 9 - 3 = 6 \text{ e } \text{gen}(C \cup L) = 3 - 2) \cdot 3 = 3.$$

Pela Proposição 4.8 temos que  $\varphi$  é determinantal.

3. Já provado no Corolário 5.4.

□

Vamos trabalhar dois exemplos: o primeiro vamos tratar o Caso (1)  $L_1 \cap L_2 = \emptyset$  e, no segundo exemplo, vamos tratar do Caso (2)  $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$ .

**Exemplo 5.8.** Caso (1)  $L_1 \cap L_2 = \emptyset$

Seja  $Q_1$  a quádrlica de Plücker dada pelo polinômio

$$F_1 = x_0x_1 - x_2x_3 + x_4x_5 = 0$$

e  $Q_2$  uma hipersuperfície quadrática dada pelo polinômio

$$F_2 = x_0^2 - x_1^2 + 2x_2^2 - 2x_3^2 + 4x_4^2 - 4x_5^2 = 0.$$

Tome  $X = Q_1 \cap Q_2$  o complexo quadrático de retas dado por  $\mathbb{V}(F_1, F_2)$  e sejam ainda,  $M_1 \approx \mathbb{P}^3$  dada por  $x_1 = x_3 = 0$  e  $M_2 \approx \mathbb{P}^3$  dada por  $x_2 = x_5 = 0$ .

Tome  $y \in M_1$  então  $y = (0 : y_1 : y_2 : 0 : y_4 : y_5)$  e  $x \in X$  tal que  $x = (1 : 1 : 1 : 1 : 0 : 0)$ .

Seja  $T_x X$  o espaço tangente a  $X$  no ponto  $x \in X$ .

Calculando,

$$TX = \begin{pmatrix} x_1 & x_0 & -x_3 & -x_2 & x_5 & x_4 \\ 2x_0 & -2x_1 & 4x_2 & -4x_3 & 8x_4 & -8x_5 \end{pmatrix}$$

e

$$T_x X = \begin{pmatrix} x_1 + x_0 - x_3 - x_2 \\ 2x_0 - 2x_1 + 4x_2 - 4x_3 \end{pmatrix}.$$

Se  $l_1 \in T_x X \cap X$ . Então  $l_1 = x + \lambda \vec{v}$  onde  $\vec{v} \in T_x X \cap X$ .

Seja  $\vec{v} = (1 : -3 : -2 : 0 : \sqrt{3} : \sqrt{3})$  e  $\lambda = \frac{x_0 - x_3}{x_3}$ ,  $x_3 \neq \emptyset$  pois caso contrário  $l_1 \cap M_1 \neq \emptyset$ .

Temos que  $\vec{v} \in T_x X$  pois

$$T_x X(\vec{v}) = \begin{pmatrix} -3 + 1 - 0 + 2 \\ 2 + 6 - 8 - 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Então,

$$l_1 = x + \lambda \vec{v} = (x_0 : -3x_0 + 4x_3 : -2x_0 + 3x_3 : x_3 : \sqrt{3}(x_0 - x_3) : \sqrt{3}(x_0 - x_3))$$

parametrizado por  $(x_0 : x_3) \in \mathbb{P}^1$ .

Se  $H_1 = \langle y, l_1 \rangle$  temos que

$$H_1 \cap X = p$$

onde  $p$  é um ponto em  $X$ .

Agora, sejam  $x' = (0 : 0 : 1 : 1 : 1 : 1) \in X$ ;  $\vec{w} = (\sqrt{3} : -\sqrt{3} : 1 : -3 : -2 : 0)$  e  $\lambda' = \frac{x_2 - x_5}{x_5}$ ,  $x_5 \neq \emptyset$ . Seguindo o mesmo raciocínio anterior,

$$l_2 = x' + \lambda' \vec{w} = (\sqrt{3}(x_2 - x_5) : -\sqrt{3}(x_2 - x_5) : x_2 : -3x_2 + 4x_5 : -2x_2 + 3x_5 : x_5)$$

parametrizado por  $(x_2 : x_5) \in \mathbb{P}^1$ .

Repare que  $l_1 \cap l_2 = \emptyset$  pois caso contrário, teríamos  $\begin{cases} x_0 = \sqrt{3}(x_2 - x_5) \\ x_3 = 4x_5 - 3x_2 \end{cases}$  o que é um absurdo.

A expressão que define  $\pi_1^{-1}(y)$  é dada por 6 polinômios de grau 3 e verifica-se que a reta  $\pi_1(L_2)$  é bissecante a uma curva quártica  $C$ . Assim, a transformação definida é uma Cremona cubo-cúbica determinantal.

**Exemplo 5.9.** Caso (1)  $L_1 \cap L_2 \neq \emptyset$

Sejam  $Q_1, Q_2$  e  $L_1$  dados no exemplo anterior. Tome

$$l_2 = (x_0 : -3x_0 + 4x_3 : -2x_0 + 3x_3 : x_3 : \sqrt{3}(x_3 - x_0) : \sqrt{3}(x_3 - x_0))$$

parametrizado por  $(x_0 : x_3) \in \mathbb{P}^1$ . Note que a reta  $l_2$  está em  $X$  e contém o ponto  $x = (1 : 1 : 1 : 1 : 0 : 0)$  de  $l_1$ .

Considere a projeção  $\pi_2$  em  $M_1$  com centro em  $l_2$ . A composição com  $\pi_1^{-1}$  é uma transformação de Cremona cubo-cúbica  $\varphi$ , e a intersecção de  $T_x X \cap M$  com a curva quártica  $C$  possui três pontos, isto é,  $T_x X \cap M$  é trissecante a  $C$ . Segue que  $\varphi$  é uma transformação de de Jonquières.

# Referências Bibliográficas

- [1] A. Beauville, *Complex Algebraic Surfaces*, Second Edition, (1996)
- [2] C. Peskine and L. Szpiro, *Liaison des variétés algébriques. I*, Invent. Math., 26 (1974), 271-302
- [3] D. Avritzer, *Introdução à Geometria Enumerativa: Algumas Propriedades Geométricas das Grassmannianas*, Escola de Álgebra, São Paulo, (1990)
- [4] D. Avritzer, *Introdução à Geometria Enumerativa via Teoria de Deformações*, 2ª Bienal da Sociedade Brasileira de Matemática, Salvador, (2004)
- [5] D. Avritzer, G. Gonzalez-Sprinberg and I. Pan. *On Cremona Transformations and Quadratic Complexes*, Rendiconti del Circolo Matematico di Palermo, 57 (2008), 353-375
- [6] D. Junca, *Complexo Linear e Tetraédrico de Retas*, Dissertação de Mestrado, UFMG - <http://www.mat.ufmg.br/intranet-atual/pgmat/TesesDissertacoes/uploaded/Diss142.pdf>, (2007)
- [7] D. Cox, J. Little and Donal O'Shea. *Ideals, Varieties, and Algorithms: An Introduction to Computational Algebraic Geometry and Commutative Algebra*, Second Edition, Springer (1996)
- [8] D. Cox, J. Little and Donal O'Shea. *Using Algebraic Geometry*, Second Edition, Springer (2004)
- [9] I. Pan. *Sur les transformations de Cremona de bidegré (3,3)*, l'Ens. Math., 43 (1997), 285-297

- [10] I. Pan. *Sur les transformations de Cremona de bidegré (3,3)*, Tese de Doutorado, (2010)
- [11] I. R. Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry 1*, Graduate texts in Mathematics, Springer-Verlag, (1977)
- [12] I. R. Shafarevich. *Basic Algebraic Geometry 2*, , Second Edition, (1997)
- [13] J. G. Semple and L. Roth. *Introduction to Algebraic Geometry*, Oxford at the Clarendon Press (1949)
- [14] J. Harris, *Algebraic Geometry: A First Course*, Springer-Verlag, Harvard University, Cambridge
- [15] Ph. Griffiths and J. Harris, *Principles of Algebraic Geometry*, John Wiley and Sons, New York (1978)
- [16] R. Hartshorne, *Algebraic Geometry*, Graduate texts in Mathematics, Springer-Verlag, New York, (1977)
- [17] W. Fulton, *Algebraic Curves: An Introduction to Algebraic Geometry*, Third Edition,(2008)
- [18] W. Fulton, *Intersection Theory*, Second Edition,(1997)