UNIVERSIDADE FEDERAL DE MINAS GERAIS
INSTITUTO DE CIÊNCIAS EXATAS
Departamento de Matemática

**Dissertação de Mestrado**

# ANÁLISE ASSINTÓTICA DE SOLUÇÕES DA EQUAÇÃO DO CALOR NÃO-LINEAR $D$-DIMENSIONAL VIA GRUPOS DE RENORMALIZAÇÃO

**Antônio Marcos da Silva**

**Orientador: Gastão de Almeida Braga**
**Coorientadora: Jussara de Matos Moreira**

16 de agosto de 2013

“O futuro só vem se a gente o fizer. Se a gente o fizer transformando o presente. O futuro não esta ali na esquina às escondidas, esperando pela nossa chegada para nos surpreender e para nos fazer dizer: ”Olha o fato aqui! Estava se escondendo de mim”. O futuro só vem se a gente construir. Se a gente transformar o presente com vistas ao perfil, ao sonho ou à utopia.”

(FREIRE, 1998, p.45)

# Agradecimentos

Agradeço primeiramente a Deus pela oportunidade e por ter me dado forças para realizar esse trabalho.

Ao meu orientador, Gastão de Almeida Braga, pelos ensinamentos, paciência e atenção, e, por ter se tornado um exemplo de educador, pesquisador e ser humano, através dos nossos encontros (quase diários).

À Jussara, pelas valiosas sugestões e pelo empenho em me coorientar.

Aos membros da banca examinadora, Antonio Francisco Neto, Raphael Campos Drumond e Silas Luiz de Carvalho, pelo cuidado na leitura da dissertação e pelas importantes observações e correções.

Aos meus pais, Maria José e Antônio, pelo amor, carinho, dedicação e, principalmente, pela constante presença mesmo estando longe.

Aos meus irmãos, Fábio e Flávia. E aos meus sobrinhos, em especial, ao Thalys, pelo companheirismo e pelo incentivo.

Aos professores da UFOP, em especial ao Wenderson, pelas dúvidas tiradas via email. Ajudaram demais!

À Fernanda pela amizade e por aguentar minhas reclamações durante o curso, e ao Wendell e Carlinhos, pelo apoio nos momentos difíceis.

Aos amigos do mestrado Aislan, Tauan, Victor e Joyce, que muito contribuíram para a minha formação e para a realização desta dissertação.

Ao Aurélio, pelos conselhos e companheirismo durante todo o curso.

Aos funcionários e professores do PPGMAT/UFMG, pela dedicação e prontidão.

À Fundação de Amparo à Pesquisa do estado de Minas Gerais - FAPEMIG, pelo auxílio financeiro.

Por fim, a todos aqueles que, direta ou indiretamente, colaboraram para realização do presente trabalho, expresso minha sincera gratidão.

# Resumo

Este trabalho tem como objetivo a obtenção do comportamento assintótico da solução do seguinte Problema de Valor Inicial (P.V.I.):

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + \lambda u^n, \ x \in \mathbb{R}^d, t > 1, \\ u(x,1) = f(x), \ x \in \mathbb{R}^d, \end{cases}$$

em que $f$ é uma função “suave” com decaimento integrável em $\mathbb{R}^d$, $\lambda \in [-1,1]$ e $n$ é um inteiro maior que $1 + 2/d$. Esse estudo generaliza o caso unidimensional já estudado por Moreira [1]. Para isso, utiliza-se a técnica do Grupo de Renormalização desenvolvida por Bricmont et al. [2] para estudar o caso de equações de difusão com não-linearidades classificadas como *irrelevantes* no sentido do Grupo de Renormalização.

# Sumário

# Capítulo 1

# Introdução

## 1.1 A técnica do grupo de Renormalização

O grupo de renormalização (RG) refere-se a um método matemático que permite a investigação sistemática das mudanças de um sistema físico, visto em diferentes escalas. Esse método está intimamente relacionado com a invariância por mudança de escalas, isto é, com a invariância de alguns sistemas sob a ação de um certo grupo de simetria. Em particular, no caso a ser tratado nessa dissertação, ou seja, em se tratando da equação do calor $d$-dimensional, podemos observar que para tempos longos o sistema torna-se assintoticamente autossimilar, isto é, invariante por mudança de escalas como será explicado na seção 3.1.

Existem registros de que a noção de invariância por mudança de escalas já era utilizada pelos pitagóricos (na Escola de Pitágoras), por Euclides de Alexandria e por Galileu Galilei. Porém, a técnica do Grupo de Renormalização utilizada para estudar o problema aqui apresentado e vários outros semelhantes, foi desenvolvida formalmente (do ponto de vista de Equações Diferenciais) no fim dos anos 80 e início dos anos 90 por Goldenfeld [4]. Posteriormente, Bricmont e Kupiainen [3] desenvolveram rigorosamente esse método. Logo após, uma versão numérica foi apresentada por Chen e Goldenfeld [5].

Já no ano de 2001, Rolla [7] fizeram um estudo numérico do comportamento de soluções da equação do calor com coeficiente de difusão periódico através do método do grupo de renormalização. Em 2002, Moreira [1], baseada na técnica apresentada por Bricmont e Kupiainen [2], analisou o comportamento de soluções da equação do calor unidimensional com perturbação do tipo $u^n$, para $n \geq 3$. Logo após, em 2003, Braga et al [6], apresentaram, baseados nos trabalhos de Rolla [7] e Moreira [1], um estudo dos casos analítico e numérico para a equação do calor com perturbações do tipo $F(u, u_x, u_{xx})$. E no ano de 2011, Souza [8], estudou o caso com perturbações do tipo $F(u, u_x, u_{xx}) = u^a u_x^b u_{xx}^c$.

Neste trabalho, iremos fazer uma generalização dos resultados apresentados na referência [1], agora para $d$-dimensões, sendo assim, o primeiro trabalho em $d$-dimensões que analisa o comportamento assintótico de soluções da equação do calor via técnica do Grupo de Renormalização apresentada por Bricmont et al. [3].

## 1.2 Objetivo

O objetivo desta dissertação é analisar o comportamento assintótico (para tempos longos) de soluções da equação do calor não-linear $d$-dimensional. Esse trabalho consiste, basicamente, em generalizar para $d$-dimensões o caso unidimensional apresentado na referência [1], em que é utilizada a formulação analítica do Grupo de Renormalização (RG) desenvolvida por Bricmont et al. [2] para estudar o caso de equações de difusão com não-linearidades classificadas como *irrelevantes* no sentido do Grupo de Renormalização.

Especificamente, estudaremos o seguinte Problema de Valor Inicial (PVI):

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + \lambda u^n, \ x \in \mathbb{R}^d, t > 1, \\ u(x,1) = f(x), \ x \in \mathbb{R}^d, \end{cases} \tag{1.1}$$

em que $f$ é uma função “suave” (essa suavidade será especificada posteriormente no Capítulo 2) com decaimento integrável em $\mathbb{R}^d$. Assumiremos que o parâmetro $\lambda$ esteja no intervalo $[-1, 1]$. Contudo, observamos que os argumentos apresentados neste trabalho se estendem para $\lambda$ pertencente a um compacto da reta. Nesta dissertação, mostraremos que, se $n > 1 + \frac{2}{d}$ é um inteiro, então, para tempos longos, temos

$$u(x,t) \sim \frac{\widehat{f}(0)}{t^{d/2}} f_0^* \left( \frac{x}{\sqrt{t}} \right),$$

em que $\widehat{f}(0)$ representa a transformada de Fourier do dado inicial $f$ na origem e $f_0^*$ a distribuição Gaussiana

$$f_0^*(x) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4}}}{(4\pi)^{d/2}}, \text{ em que } |x|^2 = \sum_{i=1}^{d} x_i^2. \tag{1.2}$$

## 1.3 Descrição da dissertação

Essa dissertação está dividida da seguinte forma:

No Capítulo 2, fazemos uma breve revisão sobre a transformada de Fourier e as suas propriedades que serão utilizadas nesta dissertação e definimos os espaços de funções que utilizaremos nas provas dos teoremas. Mostramos que é possível definir uma norma de modo a torná-los espaços de Banach contidos em $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$.

No Capítulo 3, assumindo a existência e unicidade de solução do P.V.I. (1.1) no caso linear, ou seja, quando $\lambda = 0$ (uma demonstração do teorema de existência e unicidade de solução do caso linear pode ser encontrada em [9]), definimos o operador Grupo de Renormalização e logo em seguida, demonstramos algumas de suas propriedades. Com isso, enunciamos e provamos o Lema da Contração e, através dele, que a solução do P.V.I. (1.1), com $\lambda = 0$, se comporta assintoticamente como um múltiplo da Gaussiana (1.2).

O Capítulo 4 é destinado à demonstração do teorema de existência e unicidade de solução do P.V.I. (1.1). Para isso, fazemos uso do teorema do ponto fixo de Banach, o qual está descrito nesse capítulo.

No Capítulo 5, definimos o operador Grupo de Renormalização para o caso não-linear e, através de suas propriedades, bem como dos resultados obtidos nos capítulos anteriores, demonstramos iterativamente um teorema que nos fornecerá informações sobre o comportamento assintótico da solução do P.V.I. (1.1).

Apresentamos por fim no Apêndice A, uma demonstração da necessidade da restrição $q > d$ para a definição dos espaços apresentados no Capítulo 2.

# Capítulo 2

# Preliminares

## 2.1 Um pouco sobre a transformada de Fourier em $d$-dimensões

Para um bom entendimento do método do Grupo de Renormalização apresentado nessa dissertação, é necessário um estudo da transformada de Fourier, que é uma importante ferramenta no estudo de equações diferenciais parciais, uma vez que através dela conseguimos converter EDP's em expressões algébricas ou equações diferenciais envolvendo menos variáveis, facilitando os cálculos envolvidos. Desse modo, apresentaremos nessa seção algumas definições e resultados sobre a teoria de Fourier que serão utilizados no desenvolvimento desse trabalho.

Sejam $1 \leq p \leq \infty$ e $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ uma função mensurável. Definimos

$$\|f\|_p = \begin{cases} \left(\int_{\mathbb{R}^d} |f|^p dx\right)^{\frac{1}{p}}, \text{ se } 1 \leq p < \infty, \\ \\ esssup\{|f|; x \in \mathbb{R}^d\}, \text{ se } p = \infty. \end{cases} \tag{2.1}$$

em que $esssup\{|f|; x \in \mathbb{R}^d\} = \inf_x\{\sup_g\{|g(x)|; g(x) = f(x) \ q.t.p.\}\}$ (veja [14]).

Denotaremos por $L^p(\mathbb{R}^d)$ o conjunto de todas as classes de equivalência das funções mensuráveis $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ com $\|f\|_p < \infty$. Pode-se mostrar que $(L^p(\mathbb{R}^d), \|\cdot\|_p)$ é um espaço de Banach e que a norma (2.1) satisfaz a desigualdade de Hölder (veja [9])

$$\|fg\|_1 \leq \|f\|_p \|g\|_q, \tag{2.2}$$

com $f \in L^p(\mathbb{R}^d)$, $g \in L^q(\mathbb{R}^d)$ e $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$.

**Definição 2.1** *Se $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$, definimos a sua transformada de Fourier como sendo*

$$\mathcal{F}\{u(\cdot)\}(w) \equiv \widehat{u}(w) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot w} u(x) dx, w \in \mathbb{R}^d, \tag{2.3}$$

*e sua transformada inversa por*

$$\mathcal{F}^{-1}\{u(\cdot)\}(w) \equiv \check{u}(w) = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} e^{ix\cdot w} u(x) dx, w \in \mathbb{R}^d, \tag{2.4}$$

*em que $x \cdot w = \sum_{i=1}^{d} x_i w_i$ representa o produto interno entre os vetores $x$ e $w$.*

Note que, como $|e^{\pm ix\cdot w}| = 1$ e $u \in L^1(\mathbb{R}^d)$, as integrais acima convergem para cada $w \in \mathbb{R}^d$.

Gostaríamos de saber quando $f$ pode ser obtida de $\hat{f}$, isto é, quando $\check{\hat{u}} = u$. Para isso, iremos estender as definições (2.3) e (2.4) para $L^2(\mathbb{R}^d)$.

**Teorema 2.1 (Teorema de Plancherel)** *Se $u \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$, então $\hat{u}, \check{u} \in L^2(\mathbb{R}^d)$ e vale a igualdade*

$$\|\hat{u}\|_2 = (2\pi)^d \|\check{u}\|_2 = \|u\|_2. \tag{2.5}$$

A demonstração desse teorema pode ser encontrada em [9].

Como $L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ é denso em $L^2(\mathbb{R}^d)$, através do Teorema de Plancherel é possível definir, por um processo de limite, a transformada de Fourier (e sua inversa) em $L^2(\mathbb{R}^d)$ (veja [9]). Assim, mostraremos a seguir algumas propriedades da transformada de Fourier em $L^2(\mathbb{R}^d)$. Para isso, precisamos das seguintes definições:

**Definição 2.2** *Dadas $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$, definimos a convolução de $f$ com $g$ como sendo*

$$(f * g)(x) = \int_{\mathbb{R}^d} f(x - w)g(w)dw.$$

**Lema 2.1** *A convolução satisfaz às seguintes propriedades:*

1. $f * g \in L^1(\mathbb{R}^d)$;
2. $f * g = g * f$;
3. $(f * g) * h = f * (g * h)$.

*Prova:* Sejam $f, g \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Pelo Teorema de Fubini [15] e pelo Teorema da Mudança de Variáveis [12], 2 e 3 são imediatos. Utilizando ainda esses teoremas, segue que

$$\begin{aligned} \|f * g\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^d} |(f * g)(x)|dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left| \int_{\mathbb{R}^d} f(x - w)g(w)dw \right| dx \\ &\leq \int_{\mathbb{R}^d} \int_{\mathbb{R}^d} |f(x - w)|dx|g(w)|dw = \int_{\mathbb{R}^d} |f(y)|dy \int_{\mathbb{R}^d} |g(w)|dw < \infty. \end{aligned}$$

∎

**Definição 2.3** *Um vetor $\alpha = (\alpha_1, \cdots, \alpha_d) \in \mathbb{Z}^d$, onde cada componente $\alpha_i$ é um inteiro não negativo, é dito um multi-índice de ordem $|\alpha| = \alpha_1 + \cdots + \alpha_d$. Dado um multi-índice $\alpha$, definimos*

$$D^\alpha u(x) \equiv \frac{\partial^{|\alpha|} u(x)}{\partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d}} = \partial x_1^{\alpha_1} \cdots \partial x_d^{\alpha_d} u.$$

**Teorema 2.2** *Denote por $\bar{u}$ o complexo conjugado de $u$. Se $u, v \in L^2(\mathbb{R}^d)$, então*

1. $\int_{\mathbb{R}^d} u\bar{v}dx = \int_{\mathbb{R}^d} \hat{u}\bar{\hat{v}}dw$.
2. $\widehat{(D^\alpha u)}(w) = (iw)^\alpha \hat{u}(w)$ *para cada multi-índice $\alpha$ tal que $D^\alpha u \in L^2(\mathbb{R}^d)$.*

*3. Se* $u, v \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$*, então* $\widehat{(u * v)} = \hat{u}\hat{v}$.

*Prova:* Tome $u, v \in L^2(\mathbb{R}^d)$ e $\lambda \in \mathbb{C}$. Pelo Teorema 2.1,

$$\|u + \lambda v\|_2^2 = \|\hat{u} + \widehat{\lambda v}\|_2^2.$$

Desse modo, temos que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(|u|^2 + |\lambda v|^2 + \bar{u}\lambda v + u\bar{\lambda}\bar{v}\right) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left(|\widehat{u}|^2 + |\widehat{\lambda v}|^2 + \bar{\widehat{u}}\widehat{\lambda v} + \widehat{u}\bar{\lambda}\bar{v}\right) dw$$

Usando novamente o Teorema 2.1, segue-se que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left(\bar{u}\lambda v + u\bar{\lambda}\bar{v}\right) dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\bar{\widehat{u}}\lambda\widehat{v} + \widehat{u}\bar{\lambda}\bar{\widehat{v}}\right) dw.$$

Fazendo $\lambda = 1$ e em seguida $\lambda = i$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^d} (\bar{u}v + u\bar{v})\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left(\bar{\widehat{u}}\widehat{v} + \widehat{u}\bar{\widehat{v}}\right) dw,$$

$$\int_{\mathbb{R}^d} (i\bar{u}v - iu\bar{v})\, dx = \int_{\mathbb{R}^d} \left(i\bar{\widehat{u}}\widehat{v} - i\widehat{u}\bar{\widehat{v}}\right) dw.$$

Multiplicando a segunda por $i$ e somando as duas igualdades acima, obtemos $\int_{\mathbb{R}^d} u\bar{v}dx = \int_{\mathbb{R}^d} \widehat{u}\bar{\widehat{v}}dw$, o que demonstra o item 1.

Agora, suponha que $u$ seja diferenciável e tenha suporte compacto. Note que, como $u$ tem suporte compacto, então $u$ se anula fora de um certo compacto do $\mathbb{R}^d$, e assim, dado $\alpha \in \mathbb{Z}^d$,

$$\int_{\mathbb{R}^d} \left[e^{-ix\cdot w} D^\alpha u(x) - (-1)^{|\alpha|} D_x^\alpha (e^{-ix\cdot w}) u(x)\right] dx = \int_{\mathbb{R}^d} D^\alpha \left(e^{-ix\cdot w} u(x)\right) dx = 0.$$

Assim, segue da identidade acima que

$$\begin{aligned}
\widehat{D^\alpha u}(w) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot w} D^\alpha u(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (-1)^{|\alpha|} D_x^\alpha (e^{-ix\cdot w}) u(x) dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} (iw)^\alpha (e^{-ix\cdot w}) u(x) dx \\
&= (iw)^\alpha \widehat{u}(x).
\end{aligned}$$

Como o conjunto das funções com suporte compacto é denso em $L^2(\mathbb{R}^d)$, o item 2 está demonstrado.

Para provar 3, note que dados $u, v \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$ e $w \in \mathbb{R}^d$, pela definição 2.2 e pelo Teorema de Fubini [15] temos que

$$
\begin{aligned}
(\widehat{u * v})(w) &= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot w} \int_{\mathbb{R}^d} u(x-w_1)v(w_1)dw_1dx \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-iw_1\cdot w} v(w_1) \left( \int_{\mathbb{R}^d} u(x-w_1)e^{-i(x-w_1)\cdot w}dx \right) dw_1 \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} e^{-iw_1\cdot w} v(w_1)dw_1 \widehat{u}(w) \\
&= \widehat{u}(w)\widehat{v}(w).
\end{aligned}
$$

∎

Outra propriedade importante da transformada de Fourier é dada pelo teorema abaixo. Sua demonstração pode ser encontrada em [10].

**Teorema 2.3** *A Transformada de Fourier é uma bijeção de $L^2(\mathbb{R}^d)$ em $L^2(\mathbb{R}^d)$.*

O lema abaixo nos mostrará que a transformada de Fourier do produto de $n$ funções em $L^2(\mathbb{R}^d)$ é dada por $n-1$ convoluções da transformada dessas funções multiplicado por $(2\pi)^{-d(n-1)}$. Essa propriedade será fundamental para a obtenção da existência e unicidade de soluções que será apresentada no Capítulo 4.

**Lema 2.2** *Dadas $f_1, \cdots, f_n \in L^2(\mathbb{R}^d)$, temos que*

$$\mathcal{F}\{f_1 \cdots f_n\}(w) = (2\pi)^{-d(n-1)} \left( \widehat{f}_1 * \cdots * \widehat{f}_n \right)(w). \tag{2.6}$$

*Prova:* Usaremos indução para demonstrar esse resultado. Inicialmente, pelo Teorema 2.2 temos $\mathcal{F}(f_1 * f_2)(w) = \widehat{f}_1(w)\widehat{f}_2(w)$ e com isso

$$\mathcal{F}^{-1}(f_1 f_2)(x) = \left( \check{f}_1 * \check{f}_2 \right)(x). \tag{2.7}$$

Observe também que, dado $x \in \mathbb{R}^d$,

$$\mathcal{F}^{-1}\{f\}(-x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot w} f(w)dw = \frac{1}{(2\pi)^d}\widehat{f}(x). \tag{2.8}$$

Assim, por (2.7) e (2.8), obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{f_1 f_2\}(x) &= (2\pi)^d \mathcal{F}^{-1}(f_1 f_2)(-x) \\
&= (2\pi)^d \left(\check{f}_1 * \check{f}_2\right)(-x) \\
&= (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} \check{f}_1(-x-y)\check{f}_2(y)dy \\
&= (2\pi)^d \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(2\pi)^d}\hat{f}_1(x+y)\frac{1}{(2\pi)^d}\hat{f}_2(-y)dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d}\int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}_1(x-y)\hat{f}_2(y)dy \\
&= \frac{1}{(2\pi)^d}\left(\widehat{f_1} * \widehat{f_2}\right)(x),
\end{aligned}$$

o que prova o caso $n = 2$. Suponha agora que (2.6) seja válida para algum natural $n \geq 3$. Então, pelos mesmos procedimentos acima, sendo agora a primeira função $f_1 \cdots f_n$ e a segunda $f_{n+1}$, concluímos que

$$\mathcal{F}\{(f_1 \cdots f_n)\cdot f_{n+1}\}(x) = \frac{1}{(2\pi)^d}\left(\mathcal{F}\{f_1\cdots f_n\} * \widehat{f_{n+1}}\right)(x).$$

Usando agora a hipótese de indução, obtemos

$$\begin{aligned}
\mathcal{F}\{(f_1 \cdots f_n)\cdot f_{n+1}\}(x) &= \frac{1}{(2\pi)^d}\left(\frac{1}{(2\pi)^{d(n-1)}}\widehat{f_1} * \cdots * \widehat{f_n} * \widehat{f_{n+1}}\right)(x) \\
&= \frac{1}{(2\pi)^{dn}}\left(\widehat{f_1} * \cdots * \widehat{f_n} * \widehat{f_{n+1}}\right)(x),
\end{aligned}$$

o que finaliza a demonstração. ∎

Para finalizar essa seção apresentamos a transformada de Fourier da função Gaussiana. Esse resultado será constantemente utilizado nesse trabalho.

**Lema 2.3** *Seja $b$ uma constante positiva e considere a função $f^* : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ definida por $f^*(x) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4b}}}{(4\pi b)^{\frac{d}{2}}}$, onde $|x|^2 = \sum_{i=1}^{d} x_i^2$. Então,*

$$\widehat{f^*}(w) = e^{-b|w|^2}.$$

*Prova:*

$$\begin{aligned}
\widehat{f^*}(w) &= \frac{1}{(4\pi b)^{d/2}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-iw\cdot x} e^{-|x|^2/(4b)} dx \\
&= \frac{1}{(4\pi b)^{d/2}} \prod_{j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} e^{-iw_j x_j - x_j^2/(4b)} dx_j \\
&= \frac{1}{(4\pi b)^{d/2}} \prod_{j=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} e^{-\left[\left(\frac{x_j}{2\sqrt{b}} + i\sqrt{b}w_j\right)^2 + bw_j^2\right]} dx_j \\
&= \frac{1}{(4\pi b)^{d/2}} \prod_{j=1}^{d} e^{-bw_j^2} \int_{\mathbb{R}} e^{-y_j^2}\ 2\sqrt{b}\ dy_j,
\end{aligned}$$

onde usamos a mudança de variáveis $y_j = \frac{x_j}{2\sqrt{b}} + i\sqrt{b}w_j$. Assim, usando que $\int_{\mathbb{R}} e^{-y_j^2} dy_j = \sqrt{\pi}$, obtemos o resultado.

∎

Observe que, como $f^* \in L^2(\mathbb{R}^d)$, então, pelo Teorema 2.3, concluímos do Lema acima, que $\mathcal{F}^{-1}[e^{-b|w|^2}](x) = (4\pi b)^{-d/2} e^{-\frac{|x|^2}{4b}}$.

## 2.2 Espaços utilizados

Nesta seção, definiremos o espaço $B_q$ (em que $q > d$), das funções cujas transformadas de Fourier sejam continuamente diferenciáveis e que satisfaçam a uma certa condição de decaimento no infinito. A restrição $q > d$ será necessária para garantirmos a integrabilidade das transformadas de Fourier e, consequentemente, para que possamos concluir que $B_q \subset L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Mostraremos também que $(B_q, \|\cdot\|)$ (em que a norma $\|\cdot\|$ será definida a seguir) é um espaço de Banach.

Para isso, inicialmente defina, para $q > d$,

$$B_q = \left\{ f : \mathbb{R}^d \longrightarrow \mathbb{R};\ \hat{f} \in C^1(\mathbb{R}^d)\ e\ \|f\| < \infty \right\} \tag{2.9}$$

sendo

$$\|f\| = \sup_{w\in\mathbb{R}^d} \left[ (1 + |w|^q) \left( |\hat{f}(w)| + |\nabla \hat{f}(w)| \right) \right], \tag{2.10}$$

No item 2 da Proposição 2.2 nós provaremos que (2.10) define, de fato, uma norma.

**Proposição 2.1** *Para todo $q > d$, temos que $B_q \subset L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$.*

*Prova:* Dado $f \in B_q$, temos que $\|f\| < \infty$ e, então $|\hat{f}(w)|, |\nabla \hat{f}(w)| \leq \frac{\|f\|}{1+|w|^q}$. Como $q > d$, então, pela Proposição A.1 (veja Apêndice), $\|\hat{f}\|_k, \|\nabla \hat{f}\|_k < \infty$ para todo $k \geq 1$ e, assim, $\hat{f}, \nabla \hat{f} \in L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d)$.

Para provarmos a proposição, observamos inicialmente que a pertinência $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ segue diretamente do fato de que a transformada de Fourier é uma bijeção em $L^2(\mathbb{R}^d)$ (Teorema 2.3) e de que $\hat{f} \in L^2(\mathbb{R}^d)$. Além disso, pelo Teorema 2.3, existe a inversa de $\hat{f}$, que denotaremos por $f$. Desse modo, $\mathcal{F}^{-1}(\hat{f}) = f \in L^2(\mathbb{R}^d)$.

Por outro lado, pelo item 2 do Teorema 2.2, $\mathcal{F}^{-1}(\nabla \hat{f}) = -ixf \in L^2(\mathbb{R}^d)$, e assim, para cada $x \in \mathbb{R}^d$, temos $\|f\|_2 + \|xf\|_2 < \infty$.

Note ainda que, como as funções $\frac{1}{(1+|x|)^2}$ e $\frac{1}{1+|x|^2}$ são contínuas em $\mathbb{R}^d$ e $\frac{1}{(1+|x|)^2} \leq \frac{1}{1+|x|^2}$ para todo $x \in \mathbb{R}^d$, pelo critério da comparação para integrais (veja [12]), temos que

$$\left\| \frac{1}{(1+|x|)} \right\|_2^2 = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{(1+|x|)^2} dx \leq \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dx}{1+|x|^2} < \infty.$$

Desse modo, usando que $\left\| \frac{1}{(1+|x|)} \right\|_2$, $\|f\|_2 + \||x|f\|_2 < \infty$ e a desigualdade de Hölder (2.2), obtemos

$$\begin{aligned} \|f\|_1 &= \int_{\mathbb{R}^d} |f| dx = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{|(1+|x|)f|}{|(1+|x|)|} dx = \left\| \frac{(1+|x|)f}{(1+|x|)} \right\|_1 \\ &\leq \left\| \frac{1}{(1+|x|)} \right\|_2 \|(1+|x|)f\|_2 < \infty, \end{aligned}$$

donde se segue que $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$.

Por fim, como $f \in B_q$, temos que

$$||f||_\infty = ||\mathcal{F}^{-1}(\hat{f})||_\infty \leq \frac{1}{(2\pi)^d} ||\hat{f}||_1 = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} |\hat{f}(w)| dw \leq \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{||f||}{1+|w|^q} = C||f|| < \infty$$

com $C = \frac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dw}{1+|w|^q}$. Portanto $f \in L^\infty(\mathbb{R}^d)$, o que conclui a demonstração.

∎

**Proposição 2.2** *Para todo $q > d$, $B_q$ é um espaço de Banach com a norma dada por (2.10).*

*Prova:*

1. Pela linearidade da transformada de Fourier e do operador de derivada, dadas $f, g \in B_q$ e uma constante $\lambda \in \mathbb{C}$, segue-se que $f + \lambda g \in B_q$. Logo, $B_q$ é um espaço vetorial.

2. Temos que (2.10) define uma norma. De fato,

   (a) é claro que $\|f\| \geq 0$. Agora, note que $\|f\| = 0$ se, e somente se, $|\hat{f}(w)| = |\nabla \hat{f}(w)| = 0$ para todo $w \in \mathbb{R}^d$. Além disso, como $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$, então

   $$f(x) = \tfrac{1}{(2\pi)^d} \int_{\mathbb{R}^d} \hat{f}(w) e^{iw.x} dw$$

   em quase todo ponto. Assim, se $\|f\| = 0$, temos $\hat{f}(w) = 0$ em *q.t.p.* e portanto, $f \equiv 0$, *q.t.p.*. Por outro lado, se $f \equiv 0$, então $|\hat{f}(w)| = |\nabla \hat{f}(w)| = 0$ e, portanto, $||f|| \equiv 0$.

   (b) Dados $\lambda \in \mathbb{R}$ e $f \in B_q$ temos $|\widehat{\lambda f}(w)| = |\lambda|\, |\widehat{f}(w)|$ para todo $w \in \mathbb{R}^d$ pois

   $$|\widehat{\lambda f}(w)| = \left| \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(w \cdot x)} \lambda f(x) dx \right| = |\lambda| \left| \int_{\mathbb{R}^d} e^{-i(w \cdot x)} f(x) dx \right| = |\lambda| |\hat{f}(w)|.$$

   De maneira similar, prova-se também que $|\nabla(\widehat{\lambda f})(w)| = |\lambda| |\nabla \hat{f}(w)|$ e assim obtemos, trivialmente, que $\|\lambda f\| = |\lambda| \|f\|$.

   (c) Finalmente, como $|(\widehat{f + g})(w)| + |\nabla(\widehat{f + g})(w)| \leq |\hat{f}(w)| + |\nabla \hat{f}(w)| + |\hat{g}(w)| + |\nabla \hat{g}(w)|$, obtemos facilmente a desigualdade triangular:

   $$\|f + g\| \leq \|f\| + \|g\|.$$

3. $B_q$ é completo.

   Se $(f_n)_{n \in \mathbb{N}}$ é uma sequência de Cauchy em $B_q$, então para todo $\epsilon > 0$, existe $k_0 \in \mathbb{N}$ tal que para qualquer $k, r > k_0$, temos:

   $$\begin{aligned} \|f_k - f_r\| &= \sup_{w \in \mathbb{R}^d} \left[ (1 + |w|^q) \left( |(\widehat{f_k - f_r})(w)| + |\nabla(\widehat{f_k - f_r})(w)| \right) \right] \\ &= \sup_{w \in \mathbb{R}^d} \left[ (1 + |w|^q) \left( |\hat{f}_k(w) - \hat{f}_r(w)| + |\nabla \hat{f}_k(w) - \nabla \hat{f}_r(w)| \right) \right] < \frac{\epsilon}{2} \end{aligned}$$

Desse modo, para quaisquer $k, r > k_0$, obtemos:

$$\sup_{w\in\mathbb{R}^d}\left[(1+|w|^q)\left(|\hat{f}_k(w)-\hat{f}_r(w)|\right)\right] < \frac{\epsilon}{2} \tag{2.11}$$

e

$$\sup_{w\in\mathbb{R}^d}\left[(1+|w|^q)\left(|\nabla\hat{f}_k(w)-\nabla\hat{f}_r(w)|\right)\right] < \frac{\epsilon}{2},$$

donde se segue que $(\hat{f}_k(w))_{k\in\mathbb{N}}$ e $(\nabla\hat{f}_k(w))_{k\in\mathbb{N}}$ são sequências uniformemente convergentes. Logo, $\hat{f}_k(w) \longrightarrow g(w) \in \mathbb{R}$ e, pelo teorema da derivação termo a termo (veja capítulo V, em [12]), $\nabla\hat{f}_k(w) \longrightarrow \nabla g(w) \in \mathbb{R}^d$.

De (2.11), temos que, para cada $w \in \mathbb{R}^d$,

$$\frac{\epsilon}{2} > (1+|w|^q)\,|g(w)-\widehat{f_k}(w)| > (1+|w|^q)\,|g(w)| - (1+|w|^q)\,|\widehat{f_k}(w)|.$$

Desse modo, temos que

$$|g(w)| < \frac{\epsilon}{2\,(1+|w|^q)} + |\widehat{f_k}(w)|.$$

Logo,

$$|g(w)|^2 < \frac{\epsilon^2}{4\,(1+|w|^q)^2} + \frac{\epsilon|\widehat{f_k}(w)|}{(1+|w|^q)} + |\widehat{f_k}(w)|^2. \tag{2.12}$$

Assim, integrando em $\mathbb{R}^d$ e tirando a raiz quadrada em ambos os lados de (2.12), obtemos

$$\begin{aligned} \|g\|_2 &< \left[\int_{\mathbb{R}^d}\frac{\epsilon^2 dw}{4\,(1+|w|^q)^2} + \int_{\mathbb{R}^d}\frac{\epsilon|\widehat{f_k}(w)|dw}{(1+|w|^q)} + \int_{\mathbb{R}^d}|\widehat{f_k}(w)|^2 dw\right]^{\frac{1}{2}} \\ &< \left[\left(\frac{\epsilon^2}{4}+\epsilon\|f_k\|\right)\int_{\mathbb{R}^d}\frac{dw}{1+|w|^q} + \int_{\mathbb{R}^d}|\widehat{f_k}(w)|^2 dw\right]^{\frac{1}{2}}. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Agora, como $q > d$, segue da Proposição A.1 que $\int_{\mathbb{R}^d}\frac{dw}{1+|w|^q} < \infty$. Além do mais, pela hipótese e pela Proposição 2.1, temos que $f_k \in B_q \subset L^1(\mathbb{R}^d)\cap L^2(\mathbb{R}^d)$, logo,

$\|f_k\|, \|f_k\|_2 < \infty$. Assim, usando (2.13) concluímos que $\|g\|_2 < \infty$ e, pelo Teorema 2.3, existe $f \in L^2(\mathbb{R}^d)$ tal que $g(w) = \hat{f}(w)$. Então,

$$\begin{aligned}
\|f_k - f\| &= \sup_{w\in\mathbb{R}^d} (1+|w|^q) \left[ | \left(\hat{f}_k - \hat{f}\right)(w)| + | \left(\nabla\hat{f}_k - \nabla\hat{f}\right)(w)| \right] \\
&= \sup_{w\in\mathbb{R}^d} (1+|w|^q) \lim_{r\to+\infty} \left[ | \left(\hat{f}_k - \hat{f}_r\right)(w)| + | \left(\nabla\hat{f}_k - \nabla\hat{f}_r\right)(w)| \right] \\
&\leq \sup_{w\in\mathbb{R}^d} (1+|w|^q) \sup_{r\geq k} \left[ | \left(\hat{f}_k - \hat{f}_r\right)(w)| + | \left(\nabla\hat{f}_k - \nabla\hat{f}_r\right)(w)| \right] \\
&\leq \frac{\epsilon}{2} + \frac{\epsilon}{2} = \epsilon,
\end{aligned}$$

para todo $k \geq k_0$. Logo, $f_k \to f$. Além disso, $\hat{f} = (\widehat{f - f_k}) + \hat{f}_k$ e $\nabla(\widehat{f - f_k}) + \nabla\hat{f}_k = \nabla\hat{f}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\|f\| &= \sup_{w\in\mathbb{R}^d} (1+|w|^q) \left[ |\hat{f}(w)| + |\nabla\hat{f}(w)| \right] \\
&\leq \sup_{w\in\mathbb{R}^d} (1+|w|^q) \left[ | \left(\widehat{f_k - f}\right)(w)| + |\hat{f}_k(w)| + |\nabla(\widehat{f_k - f})(w)| + |\nabla\hat{f}_k(w)| \right] \\
&= \|f_k - f\| + \|f_k\| < \infty.
\end{aligned}$$

Portanto, $f \in B_q$.

∎

# Capítulo 3

# O Grupo de Renormalização para a equação do calor $d$-dimensional

Nesse capítulo, definiremos o operador Grupo de Renormalização (RG) para a equação do calor linear $d$-dimensional. Uma vez definido, verificaremos algumas de suas propriedades e isto nos permitirá estudar o comportamento assintótico de soluções da equação do calor linear. Além disso, essas propriedades nos fornecerão a existência global da solução da equação (3.1) a partir da existência local, isto é, mostraremos que se tivermos uma solução do P.V.I. 3.1 para t $\in [1, L^2]$ então conseguimos estender essa solução, através da técnica do grupo de renormalização, para todo $t > 1$. Para isso, consideremos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= 0, \ x \in \mathbb{R}^d, \\ u(x,1) &= f(x), \ f \in B_q, \ q > d. \end{cases} \tag{3.1}$$

Para garantirmos a existência de soluções do PVI (3.1), considere, inicialmente, a função $\phi : \mathbb{R}^d \times (0, \infty) \to \mathbb{R}$ dada por:

$$\phi(x,t) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}}. \tag{3.2}$$

O teorema abaixo nos garante a existência de solução do PVI 3.1 para quaisquer $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times (0, \infty)$. Sua demonstração pode ser encontrada em [1] ou [9].

**Teorema 3.1** *Suponha $f \in C^0(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$. Então, para todo $(x,t) \in \mathbb{R}^d \times (0, \infty)$, a função*

$$u(x,t) = \int_{\mathbb{R}^d} \phi(y - x, t) f(y) dy = \frac{1}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{-\frac{|x-y|^2}{4t}} f(y) dy, \tag{3.3}$$

*é de classe $C^\infty(\mathbb{R}^d \times (0,\infty))$ e é solução do PVI (3.1).*

Pela Proposição 2.1, $B_q \subset L^1(\mathbb{R}^d) \cap L^2(\mathbb{R}^d) \cap L^\infty(\mathbb{R}^d)$ e com isso é possível mostrar que a solução dada no teorema acima é única (veja [9]).

## 3.1 Soluções invariantes por mudança de escalas

Nosso objetivo é obter o comportamento assintótico das soluções de equações de difusão lineares e não-lineares, $d$-dimensionais, usando o Método do Grupo de Renormalização. Tal método baseia-se no fato de que as soluções de algumas EDPs não-lineares tornam-se assintoticamente invariantes por mudanças de escalas. Uma solução $u$ de uma EDP é dita invariante por mudança de escala se seus valores em um tempo $t_2$ puderem ser obtidos de seus valores no tempo $t_1$ através de um reescalonamento em $x$, $t$ e $u$. Esse é o caso, por exemplo, da equação do calor. Nessa seção, definiremos esse conceito mais precisamente e mostraremos que a solução fundamental da equação em (3.1) é invariante por escalas.

**Definição 3.1** *Uma solução $u(x,t)$ da equação do calor é invariante por mudança de escalas se, para todo $L > 1$, existirem números reais $\alpha$ e $\beta$ tais que*

$$u(x,t) = L^\alpha u(Lx, L^\beta t),$$

*para quaisquer $x \in \mathbb{R}^d$ e $t > 0$.*

Note que, pela Definição 3.1, se $u$ é invariante por escalas então, se queremos determinar $u$ em um tempo $t' = L^\beta t$, então, $u(x,t') = L^{-\alpha} u(L^{-1}x, t)$.

Vamos mostrar então que existe uma solução invariante por escalas da equação em (3.1). Para isso, considere

$$v(x,t) \equiv L^\alpha u(Lx, L^\beta t), \tag{3.4}$$

em que $\alpha$ e $\beta$ são números reais e $L > 1$ é dado.

Verifiquemos para quais valores de $\alpha$ e $\beta$ o reescalonamento (3.4) deixa a equação do calor invariante. Façamos $w = Lx$ e $y = L^{\beta}t$. Pela regra da cadeia, temos de (3.4) que

$$v_t(x,t) = L^{\alpha+\beta}u_y, \quad \Delta v(x,t) = L^{\alpha+2}\Delta u(w,y)$$

e, como $u$ é solução da equação do calor, obtemos

$$\frac{1}{L^{\alpha+2}}\Delta v(x,t) = \frac{1}{L^{\alpha+\beta}}v_t(x,t).$$

Assim, $v(x,t)$ será solução da equação do calor se $\beta = 2$ e, em princípio, $\alpha$ pode assumir qualquer valor. Mais adiante veremos que, para a classe de problemas que pretendemos estudar, $\alpha$ deve ser igual a $d$. Para isso, utilizaremos um argumento de conservação da massa, de acordo com a definição a seguir:

**Definição 3.2** *Para qualquer $f \in L^1(\mathbb{R}^d)$, definimos a massa $M$ de $f$ por*

$$M \equiv \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx.$$

**Proposição 3.1** *Se u(x, t) é solução do P.V.I. 3.1, então*

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(x,t)dx = M,$$

*para todo $t \geq 1$.*

*Prova:* Como $u(x,t)$ é solução do P.V.I. 3.1, temos que $u(\cdot,t) \in L^1(\mathbb{R}^d)$ e $u_t = \Delta u$ para quaisquer $x \in \mathbb{R}^d$ e $t > 0$. Assim, integrando ambos os lados dessa igualdade em $\mathbb{R}^d$, obtemos

$$\int_{\mathbb{R}^d} u_t(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}^d} \Delta u(x,t)dx.$$

Agora, como $u \in C^{\infty}(\mathbb{R}^d \times (1,\infty))$ e como a função $x \longmapsto u(x,t)$ é integrável em $\mathbb{R}^d$ para todo $t \in (1,\infty)$, pela regra de Leibniz [12], obtemos:

$$\int_{\mathbb{R}^d} u_t(x,t)dx = \frac{d}{dt}\int_{\mathbb{R}^d} u(x,t)dx.$$

Por outro lado, para cada $i \in \{1, 2, ..., d\}$, temos que

$$u_{x_i} = \frac{1}{(4\pi(t-1))^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{-2(x_i - y_i)}{4(t-1)} e^{\frac{-|x-y|^2}{4(t-1)}} f(y)dy$$

e, pelo Teorema da Convergência Dominada [14], podemos tomar o limite dentro da integral, donde segue-se que

$$\lim_{x_i \to \pm\infty} u_{x_i} = \frac{1}{(4\pi(t-1))^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} \lim_{x_i \to \pm\infty} \frac{-2(x_i - y_i)}{4(t-1)} e^{\frac{-|x-y|^2}{4(t-1)}} f(y)dy = 0. \tag{3.5}$$

Pelo teorema de Fubini [15] e por (3.5), temos que

$$\begin{aligned}
\int_{\mathbb{R}^d} \Delta u(x,t)dx &= \int_{\mathbb{R}^d} \left( \sum_{i=1}^{d} u_{x_i x_i} \right) dx_1 dx_2 ... dx_d \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left( \sum_{i=1}^{d} \int_{\mathbb{R}} u_{x_i x_i} dx_1 \right) dx_2 ... dx_d \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left( u_{x_1} |_{\mathbb{R}} + \sum_{i=2}^{d} \int_{\mathbb{R}} u_{x_i x_i} dx_1 \right) dx_2 ... dx_d \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left( \sum_{i=2}^{d} \int_{\mathbb{R}} u_{x_i x_i} dx_1 \right) dx_2 ... dx_d \\
&= \int_{\mathbb{R}^d} u_{x_d x_d} dx_1 dx_2 ... dx_d \\
&= \int_{\mathbb{R}^{d-1}} \left( \int_{\mathbb{R}} u_{x_d x_d} dx_d \right) dx_1 dx_2 ... dx_{d-1} = 0.
\end{aligned}$$

Assim, $\int_{\mathbb{R}} u(x,t)dx$ é constante em relação a variável temporal e, novamente, pelo Teorema da Convergência Dominada [15], segue-se que

$$\int_{\mathbb{R}^d} u(x,t)dx = \int_{\mathbb{R}^d} u(x,1)dx = \int_{\mathbb{R}^d} f(x)dx = M. \tag{3.6}$$

∎

Utilizaremos, a seguir, o resultado acima para concluir que uma condição necessária para a existência de soluções invariantes por mudança de escalas do P.V.I. (3.1) é que o expoente $\alpha$ em (3.4), com $\beta = 2$, seja igual a $d$.

**Proposição 3.2** *Se $u(x,t)$ é uma solução invariante por mudança de escalas do P.V.I. (3.1) com dado inicial $u(x,1) \in B_q \subset L^1(\mathbb{R}^d)$, então $\alpha = d$ e $\beta = 2$.*

*Prova:* Vimos no início da seção que, para que uma função definida por (3.4) seja solução da equação do calor, devemos ter $\beta = 2$. Resta mostrar então que $\alpha = d$. Pela Proposição 3.1, sabemos que

$$M = \int_{\mathbb{R}^d} u(x,1)dx = \int_{\mathbb{R}^d} u(x,t)dx.$$

Como $u(x,t)$ é uma solução invariante por escalas do P.V.I. (3.1), então, $u(x,t) = L^{\alpha} u(Lx, L^2 t)$ e portanto,

$$M = \int_{\mathbb{R}^d} L^{\alpha} u(Lx, L^2 t)dx.$$

Aplicando o teorema da Mudança de variáveis, obtemos

$$M = L^{\alpha-d} \int_{\mathbb{R}^d} u(x, L^2 t)dx.$$

Finalmente, usando novamente a Proposição 3.1, como $\int_{\mathbb{R}^d} u(x,t)dx = M$, para todo $t \geq 1$, então,

$$M = L^{\alpha-d} M$$

e portanto, $\alpha = d$. ∎

Acabamos de mostrar, portanto, que se $u(x,t)$ é uma solução invariante por escalas do P.V.I. (3.1), então,

$$u(x,t) = L^d u(Lx, L^2 t) \tag{3.7}$$

Uma pergunta natural é a seguinte: realmente existem soluções invariantes por escala da equação do calor? Se a resposta for positiva então elas devem satisfazer (3.7). Agora, note que fazendo $L^2 = 1/t$ em (3.7), obtemos

$$u(x,t) = \frac{1}{t^{\frac{d}{2}}} u\left(\frac{x}{\sqrt{t}}, 1\right).$$

É natural, nesse caso, buscarmos soluções radiais, de forma que vamos supor que $u$ seja dada por

$$u(x,t) = \frac{1}{t^{\frac{d}{2}}} \phi\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right).$$

Derivando $u(x,t)$ em relação a $t$ e às coordenadas $x_i$ de $x$, com $i \in \{1, ..., d\}$, temos que

$$u_t(x,t) = -\frac{d}{2t^{\frac{d+2}{2}}}\phi - \frac{|x|}{2t^{\frac{d+3}{2}}}\phi'$$

e

$$u_{x_ix_i}(x,t) = \frac{\phi'}{t^{\frac{d+1}{2}}|x|} + \frac{{x_i}^2}{t^{\frac{d+2}{2}}|x|^2}\phi'',$$

onde assumimos $|x|$ e $t$ positivos. Como $u$ é solução da equação do calor, então

$$0 = u_t - \Delta u = \frac{-d}{2t^{\frac{d+2}{2}}}\phi - \left(\frac{d-1}{t^{\frac{d+1}{2}}|x|} + \frac{|x|}{2t^{\frac{d+3}{2}}}\right)\phi' - \frac{1}{t^{\frac{d+2}{2}}}\phi'',$$

donde se segue que

$$\phi'' + \left(\frac{d-1}{\zeta} + \frac{1}{2}\zeta\right)\phi' + \frac{d}{2}\phi = 0,$$

em que $\zeta = \frac{|x|}{\sqrt{t}}$. Multiplicando ambos os lados da igualdade acima por $\zeta^{d-1}$, obtemos a seguinte equação diferencial ordinária:

$$\zeta^{d-1}\phi'' + \left((d-1)\zeta^{d-2} + \frac{\zeta^d}{2}\right)\phi' + \frac{d}{2}\zeta^{d-1}\phi = 0,$$

que podemos escrever como

$$\left(\zeta^{d-1}\phi'\right)' + \left(\frac{\zeta^d}{2}\phi\right)' = 0.$$

Integrando a equação acima, obtemos

$$\zeta^{d-1}\phi' + \frac{\zeta^d}{2}\phi = c_1 \Rightarrow \phi' + \frac{\zeta}{2}\phi = c_1\zeta^{1-d} \Rightarrow (e^{\zeta^2/4}\phi)' = c_1\zeta^{1-d}e^{\zeta^2/4}.$$

Integrando novamente, temos finalmente

$$\phi(\zeta) = c_1 e^{-\frac{\zeta^2}{4}} \int x^{1-d} e^{\frac{x^2}{4}} dx + c_2 e^{-\frac{\zeta^2}{4}}.$$

Como $\int_{\mathbb{R}^d} e^{-x^2/4}dx = (4\pi)^{d/2}$, tomamos $c_1 = 0$ e $c_2 = (4\pi)^{-\frac{d}{2}}$ de modo a normalizar $\phi$ em $L^1\left(\mathbb{R}^d\right)$. Dessa forma, a solução invariante por escalas que desejamos é dada por:

$$u(x,t) = \frac{1}{t^{\frac{d}{2}}}\phi\left(\frac{|x|}{\sqrt{t}}\right) = \frac{e^{-\frac{|x|^2}{4t}}}{(4\pi t)^{\frac{d}{2}}}. \tag{3.8}$$

Note que $u(x,t)$ dada acima por (3.8) é a solução fundamental da equação do calor $d$-dimensional linear.

## 3.2 O Método, heuristicamente

Uma vez que obtivemos a solução invariante por escalas da equação do calor d-dimensional, podemos analisar como o Método do Grupo de Renormalização funciona. Tal método surgiu nos anos 50, proposto por dois físicos teóricos, Gellmann e Low [16], interessados em estudar problemas em Teoria Quântica de Campos, já nos anos 70, Kenneth Wilson [17] desempenhou um papel importante utilizando tais ideias no estudo de Fenômenos Críticos, abordando questões centrais como a invariância por escalas e universalidade de sistemas, através do estudo da transformação do grupo de renormalização. Wilson ganhou o Prêmio Nobel de Física em 1982 por essas contribuições.

O método se baseia nas mudanças de escalas e na auto-similaridade do sistema. Definiremos uma transformação que envolve uma mudança de escalas e, iterando essa transformação, espera-se que haja convergência das iteradas. Soluções invariantes por mudanças de escalas são pontos fixos dessa transformação e as iteradas, espera-se, convergirão para algum ponto fixo. Assim, o estudo da bacia de atração do ponto fixo dessa transformação dará o caráter de universalidade dos sistemas envolvidos. Essa é a ideia geral do método, que foi nos anos 90 aplicada de maneira rigorosa por Bricmont, Kupiainen et al. [2] no estudo do comportamento assintótico de soluções de equações diferenciais parciais. Tentaremos abaixo explicar mais especificamente como tais ideias funcionam nesse último caso, que é o de nosso interesse nesse trabalho.

Para simplificar o argumento, consideremos em particular o problema (3.1), isto é,

$$\begin{cases} u_t - \Delta u &= 0, \ x \in \mathbb{R}^d, t > 1. \\ u(x,1) &= f(x). \end{cases}$$

Dada a condição inicial $f(x)$ e uma escala $L > 1$, usa-se a equação do calor em $\mathbb{R}^d$ para evolui r $f$ do tempo inicial 1 ao tempo final $L^2$, em seguida reescalona-se a variável espacial $x$ e a solução $u$, respectivamente, por $L$ e $L^d$, obtendo assim $L^d u(Lx, L^2)$. Observe que esse reescalonamento se baseia na invariância por escalas da equação. Define-se, a partir daí, um operador atuando sobre o dado inicial, por

$$\left(R_L^0 f\right)(x) \equiv L^d u(Lx, L^2). \tag{3.9}$$

Em seguida, define-se uma função $u_1(x,t) = L^d u(Lx, L^2 t)$, que pela invariância da equação será também solução da equação do calor, porém, com dado inicial $f_1(x) = R_L^0 f(x)$. O operador é então aplicado ao novo dado inicial e, definindo $u_2(x,t) = L^d u_1(Lx, L^2 t)$, obteremos novo problema de valor inicial, com dado inicial $f_2(x) = R_L^0 f_1(x)$. Itera-se então o procedimento, de modo que teremos uma sequência de problemas de valor inicial, nesse caso todos com mesma equação, mas com dados iniciais distintos, cada um deles a serem analisados em um intervalo limitado de tempo $[1, L^2]$:

$$\begin{cases} \partial_t u_n - \Delta u_n &= 0, \ x \in \mathbb{R}^d, t \in [1, L^2]. \\ u_n(x,1) &= f_n(x), \end{cases} \tag{3.10}$$

em que $u_0 = u$, $u_n(x,t) = L^d u_{n-1}(Lx, L^2 t)$, para $n \geq 1$, $f_0 = f$ e $f_n(x) = R_L^0 f_{n-1}(x) = (R_L^0 \circ \cdots \circ R_L^0) f(x)$, para $n \geq 1$.

Gostaríamos de mostrar nesse caso que a solução do problema (3.1) comporta-se assintoticamente como

$$u(x,t) \sim \frac{A}{t^{d/2}} f_0^* \left( \frac{x}{\sqrt{t}} \right),$$

em que $f_0^*$ é a solução invariante por escalas (ponto fixo do operador) e $A$ é uma constante, ou, analogamente, em uma norma adequada,

$$\lim_{t \to \infty} \| t^{\frac{d}{2}} u(t^{\frac{1}{2}} \cdot, t) - A f_0^*(\cdot) \| = 0. \tag{3.11}$$

Tomando $\sqrt{t} = L^n$ podemos reescrever formalmente esse limite como

$$\lim_{n \to \infty} \| L^{nd} u(L^n \cdot, L^{2n}) - A f_0^*(\cdot) \| = 0.$$

Por outro lado, não é difícil mostrar que o operador $R_L^0$ possui a propriedade de que $n$ aplicações dele a uma escala $L$ sobre o dado inicial são equivalentes a uma única aplicação a uma escala $L^n$, ou seja, $f_n(x) = R_{L^n}^0 f(x) = L^{nd} u(L^n x, L^{2n})$ (Lema 3.2).

Sendo assim, o estudo do comportamento assintótico da solução de fato se resume no estudo da convergência dos dados iniciais, ou, em outras palavras, no estudo da bacia de atração do ponto fixo do operador grupo de renormalização (RG). Para isso, decompomos os dados iniciais de cada problema de valor inicial obtido, em que uma parcela é a componente na direção do ponto fixo do operador, isto é, inicia-se a análise definindo uma função $g_0$ por

$$f_0 = A f_0^* + g_0.$$

Aplicando o operador ao dado inicial, como $f_0^*$ é ponto fixo, obteremos $R_L^0 f_0 = f_1 = Af_0^* + g_1$, em que $g_1 = R_L^0 g_0$. Aplicando o operador ao novo dado inicial $f_1$ teremos então $R_L^0 f_1 = f_2 = Af_0^* + g_2$, em que $g_2 = R_L^0 g_1 = R_{L^2}^0 g_0$ e assim por diante, de forma que, para mostrar a convergência dos dados iniciais para um múltiplo do ponto fixo, é preciso garantir que essa sequência $g_n$ converge para zero. Na próxima seção mostraremos portanto importantes propriedades do operador $R_L^0$, que garantirão a eficácia do método nesse caso.

## 3.3 Propriedades do operador Grupo de Renormalização para a equação do calor linear

Definimos o operador Grupo de Renormalização (RG) para a equação do calor linear por (3.9). Pelas considerações feitas na seção anterior, precisamos mostrar que esse operador satisfaz algumas propriedades e é isto o que faremos nos lemas a seguir.

**Lema 3.1** *Dado $q > d$, $R_L^0$ é um operador linear que leva $B_q$ em $B_q$.*

*Prova:* Primeiramente, verificaremos que o operador é linear. Para isso, suponha que $v$ seja solução da equação do calor, sendo $v(x,1) \equiv (kf+g)(x)$, com $k \in \mathbb{R}$ e $f, g \in B_q$. Assim,

$$R_L^0(kf+g)(x) = L^d v(Lx, L^2),$$

em que

$$v(x,t) = \frac{1}{(4\pi(t-1))^{\frac{d}{2}}} \int_{\mathbb{R}^d} e^{\frac{-|x-y|^2}{4(t-1)}} (kf+g)(y)dy$$

A linearidade do operador segue portanto trivialmente da linearidade da integral.

Para mostrar que $R_L^0 f \in B_q$ se $f \in B_q$ nós precisaremos analisar, de acordo com as definições (2.9) e (2.10), se $\widehat{R_L^0 f} \in C^1(\mathbb{R}^d)$ e se

$$\|R_L^0 f\| = \sup_{w\in\mathbb{R}^d} \left[(1+|w|^q)\left(|\widehat{R_L^0 f}(w)| + |\nabla \widehat{R_L^0 f}(w)|\right)\right] < \infty.$$

Fazendo $y = Lx$ temos, pelo Teorema da Mudança de Variáveis [12],

$$\widehat{R_L^0 f}(w) = \mathcal{F}(L^d u(Lx, L^2))(w) = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-ix\cdot w} L^d u(Lx, L^2) dx = \int_{\mathbb{R}^d} e^{-iy\cdot \frac{w}{L}} u(y, L^2) dy = \hat{u}\left(\frac{w}{L}, L^2\right).$$

Como $u$ é solução da equação do calor com dado inicial $f(x) = u(x, 1)$ então $u$ é o produto de convolução da solução fundamental com o dado inicial, isto é,

$$u(x,t) = \left[\phi(., t-1) * f(.)\right](x),$$

em que $\phi(x,t) = (4\pi t)^{-\frac{d}{2}} e^{-\frac{|x|^2}{4t}}$. Como $\phi \in L^2(\mathbb{R}^d)$ e $f \in B_q \subset L^2(\mathbb{R}^d)$, podemos usar o Teorema 2.2 para escrever $\hat{u}(w,t) = \hat{\phi}(w, t-1)\hat{f}(w)$. Por outro lado, de acordo com o Lema 2.3, $\hat{\phi}(w,t) = e^{-|w|^2 t}$. Logo,

$$\hat{u}(w,t) = e^{-|w|^2(t-1)} \hat{f}(w).$$

Assim, obtemos finalmente

$$\widehat{(R_L^0 f)}(w) = \hat{u}\left(\frac{w}{L}, L^2\right) = e^{-|w|^2(1-L^{-2})} \hat{f}\left(\frac{w}{L}\right). \tag{3.12}$$

Como $f \in B_q$, então $\hat{f} \in C^1(\mathbb{R}^d)$ e, derivando (3.12) em relação ao vetor $w$, obtemos:

$$\nabla\widehat{(R_L^0 f)}(w) = \sum_{i=1}^{d} \left( -2w_i(1-L^{-2}) e^{-|w|^2(1-L^{-2})} \hat{f}\left(\frac{w}{L}\right) + \frac{1}{L} e^{-|w|^2(1-L^{-2})} \hat{f}_{\gamma_i}\left(\frac{w}{L}\right) \right) .e_i,$$

em que $\gamma_i$ representa a $i$-ésima coordenada do vetor $w/L$ e $e_i$, com $i \in \{1, ..., d\}$, são os vetores canônicos de $\mathbb{R}^d$. Agora, lembrando que podemos escrever, para qualquer vetor $x \in \mathbb{R}^d$,

$$|x| \le |x_1 e_1 + \cdots + x_d e_d| \le \sum_{i=1}^{d} |x_i|$$

e que temos

$$|\widehat{(R_L^0 f)}_{w_i}(w)| \;\; \le \;\; 2|w_i|(1-L^{-2}) e^{-|w|^2(1-L^{-2})} \left|\hat{f}\left(\frac{w}{L}\right)\right| + \frac{1}{L} e^{-|w|^2(1-L^{-2})} \left|\hat{f}_{\gamma_i}\left(\frac{w}{L}\right)\right|,$$

usando que $|w_i| \le |w|$ e $|\hat{f}_{\gamma_i}| \le |\nabla \hat{f}|$, concluímos então que

$$|\nabla\widehat{(R_L^0 f)}(w)| \;\; \le \;\; 2d|w|(1-L^{-2}) e^{-|w|^2(1-L^{-2})} \left|\hat{f}\left(\frac{w}{L}\right)\right| + \frac{d}{L} e^{-|w|^2(1-L^{-2})} \left|\nabla\widehat{f}\left(\frac{w}{L}\right)\right|. \tag{3.13}$$

Como $L > 1$, de (3.12) e (3.13) podemos limitar $|\widehat{(R_L^0 f)}(w)| + |\nabla\widehat{(R_L^0 f)}(w)|$ superiormente por

$$\left|\hat{f}\left(\frac{w}{L}\right)\right| + 2d|w|\left(1-L^{-2}\right) e^{-|w|^2(1-L^{-2})} \left|\hat{f}\left(\frac{w}{L}\right)\right| + d\left|\nabla\hat{f}\left(\frac{w}{L}\right)\right|$$

e, como $d \geq 1$, escrevendo $1+|w|^q = L^q\left(\frac{1}{L^q}+\left|\frac{w}{L}\right|^q\right) \leq L^q\left(1+\left|\frac{w}{L}\right|^q\right)$, obtemos

$$\|R_L^0 f\| \;\leq\; dL^q\|f\| + 2dL^q \sup_{w\in\mathbb{R}^d}\left[\left(1+\left|\frac{w}{L}\right|^q\right)|w|\left(1-L^{-2}\right)e^{-|w|^2(1-L^{-2})}\left|\hat{f}\left(\frac{w}{L}\right)\right|\right].$$

Usando novamente que $L > 1$, podemos limitar a função $|w|\sqrt{1-L^{-2}}e^{-|\sqrt{1-L^{-2}}w|^2}$ por um e $\sup_{w\in\mathbb{R}^d}\left(1+\left|\frac{w}{L}\right|^q\right)\sqrt{1-L^{-2}}\left|\hat{f}\left(\frac{w}{L}\right)\right|$ por $\|f\|$ de modo que

$$\|R_L^0 f\| \leq 3dL^q\|f\| < +\infty,$$

o que mostra que $R_L^0 f \in B_q$. ∎

Conforme discutimos na Seção 3.2, utilizaremos nas próximas seções que o operador $R_L^0$ possui a propriedade de que $n$ aplicações dele a uma escala $L$ sobre o dado inicial são equivalentes a uma única aplicação a uma escala $L^n$. Esse resultado será demonstrado no próximo lema.

**Lema 3.2** *Dado* $n \geq 1$, $\underbrace{R_L^0 \circ ... \circ R_L^0}_{n\ vezes} = R_{L^n}^0$.

*Prova:* Pelo Teorema 3.1, temos a existência de uma solução global para o PVI (3.1), dada por (3.3). Pela definição do operador $R_L^0$, se $f(x) = u(x,1)$ com $u$ solução da equação do calor, então, $R_L^0 f(x) = L^d u(Lx, L^2)$. Definindo $u_1(x,t) = L^d u(Lx, L^2 t)$, já vimos que $u_1$ também será solução da equação do calor, porém com dado inicial $R_L^0 f(x)$. Dessa forma,

$$R_L^0(R_L^0 f)(x) = L^d u_1(Lx, L^2) = L^{2d}u(L^2x, L^4) = R_{L^2}^0 f(x).$$

onde usamos, na segunda igualdade acima, que o PVI (3.1) possui uma única solução no intervalo $[1, L^4]$. Supondo por indução que temos $\underbrace{R_L^0 \circ ... \circ R_L^0}_{n\ vezes} f(x) = L^{nd}u(L^n x, L^{2n})$ e definindo $u_n(x,t) = L^{nd}u(L^n x, L^{2n}t)$, então $u_n$ é também solução da equação do calor, com dado inicial $L^{nd}u(L^n x, L^{2n})$. Dessa forma, como o PVI (3.1) possui uma única solução no intervalo $[1, L^{2n+2}]$,

$$R_L^0\left((\underbrace{R_L^0 \circ ... \circ R_L^0}_{n\ vezes})f(x)\right) = L^d u_n(Lx, L^2) = L^{(n+1)d}u(L^{n+1}x, L^{2n+2}) = R_{L^{n+1}}f(x),$$

o que finaliza a indução.

∎

O lema a seguir garante que operador RG possui um ponto fixo em $B_q$.

**Lema 3.3** *A função $f_0^*$ definida por (1.2) é ponto fixo de $R_L^0 : B_q \to B_q$.*

*Prova:* Usando o Lema 2.3, obtemos que $\widehat{f_0^*}(w) = e^{-|w|^2} \in C^1(\mathbb{R}^d)$ e ainda,

$$\|f_0^*\| \leq \sup_{w\in\mathbb{R}^d} (1+|w|^q)\left(e^{-|w|^2} + 2d|w|e^{-|w|^2}\right) \leq \sup_{w\in\mathbb{R}^d}\left(1+2d|w|+|w|^q+2d|w|^{q+1}\right)e^{-|w|^2}.$$

Assim, definindo a constante $K_q$, dependente de $q$ e $d$, por

$$K_q = K_q(q,d) \equiv 1 + \sqrt{2}de^{\frac{-1}{2}} + \left(\frac{q}{2}\right)^{\frac{q}{2}} e^{\frac{-q}{2}} + 2d\left(\frac{q+1}{2}\right)^{\frac{q+1}{2}} e^{\frac{-q-1}{2}}, \tag{3.14}$$

obtemos $\|f_0^*\| \leq K_q$ e, portanto, $f_0^* \in B_q$. Agora, de (3.12), temos que

$$\widehat{(R_L^0 f_0^*)}(w) = e^{-|w|^2(1-L^{-2})}\widehat{f_0^*}\left(\frac{w}{L}\right)$$

e, como $\widehat{f_0^*}(w) = e^{-|w|^2}$, obtemos

$$\widehat{(R_L^0 f_0^*)}(w) = \widehat{f_0^*}(w).$$

O resultado segue tomando-se a transformada inversa. ∎

Mostraremos finalmente o Lema da Contração, que garantirá que, para $L$ suficientemente grande, $R_L^0$ será uma contração em $B_q \cap \mathcal{F}_0$, em que $\mathcal{F}_0$ denota o espaço das aplicações cujas transformadas de Fourier são nulas na origem. Esse fato será fundamental nos estudos dos comportamentos assintóticos de soluções da equação do calor, tanto linear quanto não-linear, que serão obtidos mais adiante.

**Lema 3.4 (Lema da Contração)** *Se $q > d$ e $g \in B_q$ é tal que $\hat{g}(0) = 0$, então existem constantes $C = C(q) > 0$ e $L_0 > 1$, satisfazendo:*

$$\|R_L^0 g\| \leq \frac{C}{L}\|g\|, \tag{3.15}$$

*para todo $L > L_0$.*

*Prova:* Inicialmente, lembremos de (3.12) e (3.13) que uma cota superior para $\left|\widehat{(R_L^0 g)}(w)\right| + \left|\nabla\widehat{(R_L^0 g)}(w)\right|$ é

$$e^{-|w|^2(1-L^{-2})}\left[\left(1+2d|w|(1-L^{-2})\right)\left|\hat{g}\left(\frac{w}{L}\right)\right| + \frac{d}{L}\left|\nabla\hat{g}\left(\frac{w}{L}\right)\right|\right].$$

Obteremos inicialmente uma cota para $\left|\hat{g}\left(\frac{w}{L}\right)\right|$. Note que não basta tomarmos uma cota como $\|g\|$ nesse caso, uma vez que queremos uma limitação do tipo $\|g\|/L$ para a norma do operador aplicado a $g$. Para isso, como $g \in B_q$, então $\hat{g} \in C^1(\mathbb{R}^d)$ e, definindo $\varphi : [0,1] \to \mathbb{R}$ por $\varphi(t) = \hat{g}(th)$, pelo Teorema Fundamental do Cálculo, temos

$$\varphi(1) = \varphi(0) + \int_0^1 \varphi'(t)dt.$$

Como $\varphi'(t) = \hat{g}'(th)h = (\nabla\hat{g})(th) \cdot h$, fazendo $h = w/L$,

$$\hat{g}\left(\frac{w}{L}\right) = \hat{g}(0) + \int_0^1 \nabla\hat{g}\left(\frac{tw}{L}\right) \cdot \frac{w}{L}dt.$$

Como $\hat{g}(0) = 0$ e $\left|\nabla\hat{g}\left(\frac{tw}{L}\right)\right| \leq \|g\|$, então,

$$\left|\hat{g}\left(\frac{w}{L}\right)\right| \leq \frac{|w|}{L}\|g\|. \tag{3.16}$$

Fazendo $1 - L^{-2} \leq 1$, chegamos portanto a uma cota superior para $\left|\widehat{(R_L^0 g)}(w)\right| + \left|\nabla\widehat{(R_L^0 g)}(w)\right|$ como

$$e^{-|w|^2(1-L^{-2})}\left[(1 + 2d|w|)\,|w| + d\right]\frac{\|g\|}{L}.$$

Como gostaríamos de obter uma constante independente de $L$, tomemos qualquer $L_0 > 1$, por exemplo, $L_0 = \sqrt{3/2}$, de forma que $-(1 - L^{-2}) < 1/2$, para todo $L > L_0$. Assim, usando que $d \geq 1$ e fazendo finalmente $C = d \sup\limits_{w \in \mathbb{R}^d}(1 + |w|^q)(1 + |w| + 2|w|^2)e^{-|w|^2/2}$, obtemos então o resultado.

∎

## 3.4 O comportamento assintótico

Nessa seção utilizaremos o Lema da Contração e as propriedades do operador RG para verificar como se comporta a solução do P.V.I. (3.1). O Teorema 3.2 a seguir nos mostrará que, para tempos longos, a solução da equação do calor linear se comporta assintoticamente como um múltiplo do ponto fixo Gaussiano. Além disso, mais que obter o limite (3.11), o resultado nos fornece uma taxa para o decaimento da solução.

**Teorema 3.2** *Se $u(x,t)$ é solução do P.V.I. (3.1) e $f_0^*$ é a função Gaussiana dada por (3.2), então, para todo $\delta \in (0,1)$, existem $L_1 = L_1(\delta, q, d)$ e $C = C(q,d)$, tais que*

$$\|t^{\frac{d}{2}} u(t^{\frac{1}{2}}\cdot, t) - \hat{f}(0) f_0^*\| \leq \frac{C}{t^{\frac{1-\delta}{2}}} \|f\|, \tag{3.17}$$

*para qualquer $t > L_1^2$.*

Antes de demonstrar o teorema, voltemos à discussão sobre o método apresentada na Seção 3.2. A ideia consiste em decompor o dado inicial, sendo uma das componentes um múltiplo do ponto fixo do operador RG, no caso, a função $f_0^*$. O método é iterado aplicando-se o operador a cada dado inicial, que será por sua vez decomposto dessa forma novamente, de maneira que a componente restante deverá convergir para zero. Para que isso aconteça, utilizaremos o Lema da Contração e, portanto, precisaremos que tais componentes tenham transformada de Fourier nula na origem. Sendo assim, mostraremos inicialmente o seguinte:

**Lema 3.5** *Sejam $L_0$ e $C$ as constantes obtidas no Lema da Contração 3.4. Dado $L > L_0$, considere o PVI (3.10) com $f_n$ dada por*

$$f_0 = u_0(\cdot, 1) \qquad e \qquad f_{n+1} = R_L^0 f_n, \; n = 0, 1, 2, \ldots \tag{3.18}$$

*Então, para cada $n = 0, 1, 2, \ldots$, existem funções $g_n \in B_q$ tais que $\hat{g}_n(0) = 0$,*

$$f_n = A f_0^* + g_n, \tag{3.19}$$

*sendo $A \equiv \widehat{f}_0(0)$ e*

$$\|g_n\| \leq \left(\frac{C}{L}\right)^n \|g_0\|. \tag{3.20}$$

*Prova:* Defina a função $g_0$ por

$$f_0 = A f_0^* + g_0$$

onde $A$, no momento, é uma constante. Queremos saber, inicialmente, qual deve ser a escolha de $A$ para que $g$ tenha as propriedades desejadas. Note que como $f_0$ e $f_0^*$ pertencem ao espaço vetorial $B_q$, então $g_0$ também pertence a $B_q$. Além disso, na origem, a transformada de Fourier da função acima será:

$$\hat{f}_0(0) = A + \hat{g}_0(0),$$

já que $\widehat{f_0^*}(0) = 1$. Portanto, para que tenhamos $\hat{g}_0(0) = 0$ de modo a poder aplicar o Lema da Contração, consideramos $A = \hat{f}_0(0)$. Com isso,

$$\|g_0\| \leq \|f_0\| + |\hat{f}_0(0)|\|f_0^*\|.$$

Sabemos ainda de (3.14) que $\|f_0^*\| < K_q$ e, além disso, $|\hat{f}_0(0)| \leq \|f_0\|$. Logo,

$$\|g_0\| \leq (1 + K_q)\|f_0\|. \tag{3.21}$$

Agora, tomamos $L > L_0$ (em que $L_0$ é a constante dada pelo lema da Contração) e, definindo $u_1(x,t) = L^d u(Lx, L^2 t)$, consideramos o novo problema de valor inicial satisfeito por $u_1$, isto é,

$$\begin{cases} \partial_t u_1 = \Delta u_1, \\ u_1(x,1) = L^d u(Lx, L^2) = f_1(x). \end{cases} \tag{3.22}$$

Temos assim $f_1 = R_L^0 f = R_L^0(A_0 f_0^* + g_0)$ e usando o fato de a Gaussiana $f_0^*$ ser um ponto fixo do operador linear RG,

$$f_1(x) = \hat{f}(0) f_0^*(x) + R_L^0 g_0(x).$$

Definindo $g_1 \equiv R_L^0 g_0$, temos, pelo Lema da Contração,

$$\|g_1\| \leq \frac{C}{L}\|g_0\|.$$

Além disto, lembrando que

$$\hat{g}_1(w) = \widehat{R_L^0 g_0}(w) = e^{-|w|^2(1-L^{-2})}\hat{g}_0\left(\frac{w}{L}\right),$$

vemos que $\hat{g}_1(0) = 0$.

Iteramos o procedimento acima definindo $u_2(x,t) = L^d u_1(Lx, L^2 t)$, que satisfaz o P.V.I.:

$$\begin{cases} \partial_t u_2 = \Delta u_2, \\ u_2(x,1) = L^d u_1(Lx, L^2) = f_2(x). \end{cases} \tag{3.23}$$

Temos assim $f_2 = R_L^0 f_1 = R_L^0(\hat{f}(0) f_0^* + g_1)$ e, mais uma vez,

$$f_2(x) = \hat{f}(0) f_0^*(x) + R_L^0 g_1(x).$$

Definimos então $g_2 \equiv R_L^0 g_1$ e, lembrando que

$$\hat{g}_2(w) = \widehat{R_L^0 g_1}(w) = e^{-|w|^2(1-L^{-2})}\hat{g}_1\left(\frac{w}{L}\right),$$

vemos que $\hat{g}_2(0) = 0$ e podemos, portanto, aplicar mais uma vez o Lema da Contração, de forma que,

$$\|g_2\| \leq \frac{C}{L}\|g_1\| \leq \left(\frac{C}{L}\right)^2 \|g_0\|.$$

Mostraremos agora o lema indutivamente. Assuma então que, para algum $n = k$, exista uma função $g_k \in B_q$, com $\hat{g}_k(0) = 0$, tal que (3.19) e (3.20) sejam válidas. Aplicando $R_L^0$ em ambos os lados de (3.19) com $n = k$, temos

$$f_{k+1} = R_L^0 f_k = Af_0^* + R_L^0 g_k = Af_0^* + g_{k+1},$$

em que $g_{k+1} = R_L^0 g_k$. Como, pela hipótese de indução, $\hat{g}_k(0) = 0$, podemos aplicar o Lema da Contração novamente, obtendo

$$\|g_{k+1}\| \leq \frac{C}{L}\|g_k\|$$

e, usando (3.20) com $n = k$, obtemos

$$\|g_{k+1}\| \leq \left(\frac{C}{L}\right)^{k+1} \|g_0\|,$$

o que finaliza a prova. ∎

Com esse resultado, podemos finalmente provar o Teorema 3.2:

*Prova:* [**Teorema 3.2**] De (3.18), temos que $f_n = R_L^0 f_{n-1} = (R_L^0 \circ \cdots \circ R_L^0)f_0$. Pelo Lema 3.2, obtemos, portanto, $f_n = R_{L^n}^0 f_0 = L^{nd}u(L^n\cdot, L^{2n})$. Além disso, de (3.18),

$$\|L^{dn}u(L^n\cdot, L^{2n}) - Af_0^*\| = \|f_n - Af_0^*\| = \|g_n\|.$$

Assim, usando (3.20), chegamos a

$$\|L^{dn}u(L^n\cdot, L^{2n}) - Af_0^*\| \leq \left(\frac{C}{L}\right)^n \|g_0\|, \tag{3.24}$$

para todo $n \in \mathbb{N}$.

Desse modo fazendo $t = L^{2n}$, vemos que a solução do P.V.I. (3.1), assintoticamente, se comporta como um múltiplo do ponto fixo Gaussiano. Mostraremos agora que esse comportamento se repete quando $t \in (L^{2n}, L^{2n+2})$ e também obteremos a taxa com que a solução se aproxima desse ponto fixo, como se segue.

Para isso, dado $\delta \in (0,1)$, tome $L_1 > L_0$ tal que $L_1^{\delta} > C$. Então, se $L > L_1$,

$$\left(\frac{C}{L}\right)^n = \left(\frac{C}{L^{\delta}}\right)^n \frac{1}{L^{n(1-\delta)}} \leq \frac{1}{L^{n(1-\delta)}}$$

Assim, se $t = L^{2n}$, com $L > L_1$, obtemos de (3.24),

$$\|t^{\frac{d}{2}} u(\sqrt{t}\,\cdot, t) - Af_0^*\| \leq \frac{1}{(\sqrt{t})^{(1-\delta)}}\|g_0\|.$$

Finalmente, de (3.21), obtemos

$$\|t^{\frac{d}{2}} u(\sqrt{t}\,\cdot, t) - Af_0^*\| \leq \frac{C}{(\sqrt{t})^{(1-\delta)}}\|f_0\|,$$

em que $C = 1 + K_q$. A cota acima pode ser estendida para $t = \tau L^{2n}$, com $\tau \in (1, L^2)$ e $L > L_1$ bastando para isso trocarmos $L$ por $\tau^{1/(2n)}L$ nas estimativas. Assim, como $C$ e $L_0$ não dependem do valor particular de $L$ considerado, a desigualdade acima vale para todo $t > L_1^2$, o que finaliza a demonstração. ∎

# Capítulo 4

# Existência e unicidade de solução para a equação do calor não-linear

Nesse capítulo, apresentaremos a prova da existência e unicidade local de solução do P.V.I.

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + \lambda u^n, \\ u(x,1) = f(x), \;\; f \in B_q, \;\; q > d. \end{cases} \tag{4.1}$$

Para isso, enunciaremos a seguir o teorema do ponto fixo de Banach que será imprescindível para o desenvolvimento deste capítulo. Sua demonstração pode ser encontrada em [1] ou [13].

**Teorema 4.1** *Seja $(M,d)$ um espaço métrico completo. Se $F : M \to M$ é uma contração, isto é, se existe uma constante $k \in (0,1)$ tal que $d(F(x),F(y)) \leq kd(x,y)$ para quaisquer $x, y \in M$ então, $F$ admite um único ponto fixo em $M$.*

A fim de alcançar o objetivo deste capítulo, inicialmente definiremos de forma adequada um espaço de Banach, que denotaremos por $(B^{(L)}, \|.\|_L)$, e um operador $T : B^{(L)} \to B^{(L)}$, que mostraremos ser uma contração numa bola $B_f \subset B^{(L)}$ de centro $u_f$ em que $u_f$ denotará a solução da equação do calor linear com dado inicial $f$. Dessa forma, utilizando o teorema do ponto fixo de Banach 4.1, mostraremos a existência e unicidade (locais) da solução do problema acima.

## 4.1 Definições e resultados preliminares

A partir de agora, denotaremos por $u_f$ a solução da equação do calor linear com dado inicial $f$, para diferenciá-la da solução $u$ do problema não-linear (4.1). Primeiramente, definiremos a bola de centro em $u_f$ na qual obteremos a existência e unicidade de soluções de (4.1). Para isso, dado $q > d$, seja $B_q$ o espaço de Banach definido por (2.9) e considere agora, para $L > 1$, o espaço

$$B^{(L)} = \left\{ u : \mathbb{R}^d \times [1, L^2] \to \mathbb{R} \;\mid\; u(\cdot, t) \in B_q \text{ para todo } t \in [1, L^2] \right\}$$

munido da norma

$$\|u\|_L = \sup_{t \in [1, L^2]} \|u(., t)\|.$$

É possível mostrar que $(B^{(L)}, \|.\|_L)$ é um espaço de Banach, como se pode ver em [1]. Sendo assim, considere o operador

$$\begin{array}{rcccc} T & : & B^{(L)} & \longrightarrow & B^{(L)} \\ & & u & \longmapsto & u_f + \lambda N(u), \end{array} \tag{4.2}$$

em que

$$N(u) = \int_0^{t-1} \left[ \frac{1}{(4\pi s)^{d/2}} \int e^{\frac{-|x-y|^2}{4s}} u^n(y, t-s) dy \right] ds. \tag{4.3}$$

Pelo princípio de Duhamel (veja [9], página 49), pode-se mostrar que, se $u$ é ponto fixo de $T$, então $u$ satisfaz ao P.V.I. (4.1). Considere agora a bola

$$B_f = \left\{ u \in B^{(L)} | \; \|u - u_f\|_L < \|f\| \right\}. \tag{4.4}$$

Mostraremos que, se o dado inicial $f$ for suficientemente pequeno, então o operador $T$, definido acima, é tal que $T(B_f) \subset B_f$ e que $T$ é uma contração em $B_f$. Logo, pelo teorema do ponto fixo de Banach, $T$ possui um único ponto fixo em $B_f$, mostrando assim que o P.V.I. (4.1) tem uma única solução clássica.

Antes de mostrar os lemas que nos permitirão verificar que a imagem do operador $T$ definido em (4.2) está contida em $B_f$ e ainda que $T$ é uma contração nessa bola, precisamos de estimativas para a convolução de determinadas funções que obteremos através da proposição a seguir.

**Proposição 4.1** *Para quaisquer $q > d$ e $w \in \mathbb{R}^d$, temos que*

$$I(w) = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{1+|x|^q} \cdot \frac{1}{1+|x-w|^q} dx \leq \frac{K}{1+|w|^q},$$

*em que $K = K(q) = (2^{q+1}+2)\int_{\mathbb{R}^d} \frac{dx}{1+|x|^q}$.*

*Prova:* Observamos que $I(w)$ está bem definido e é estritamente positivo para todo $w \in \mathbb{R}^d$ pois o integrando é um produto de funções positivas e integráveis em $\mathbb{R}^d$ já que $q > d$ (veja Proposição A.1). Dividiremos a prova da proposição em dois casos, analisando a situação em que $|w| \leq 1$ e em seguida quando $|w| > 1$.

Inicialmente, como $\sup\limits_{x \in \mathbb{R}^d} \dfrac{1}{1+|x-w|^q} \leq 1$, podemos escrever

$$I(w) \leq \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{1+|x|^q} \cdot 1 \; dx.$$

Assim, se $|w| \leq 1$, então $1 \leq \frac{2}{1+|w|^q}$ e portanto,

$$I(w) \quad \leq \quad \frac{2}{1+|w|^q} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{1+|x|^q} dx = \frac{2C}{1+|w|^q},$$

em que

$$C = \int_{\mathbb{R}^d} \frac{dx}{1+|x|^q}.$$

Por outro lado, se $|w| > 1$, temos:

$$I(w) = \int_{\mathbb{R}^d \setminus B\left(0, \frac{|w|}{2}\right)} \frac{1}{1+|x|^q} \cdot \frac{1}{1+|x-w|^q} dx + \int_{B\left(0, \frac{|w|}{2}\right)} \frac{1}{1+|x|^q} \cdot \frac{1}{1+|x-w|^q} dx = I_1(w) + I_2(w).$$

Na primeira integral, para $|x| > \frac{|w|}{2}$, temos que $1 + |x|^q > 1 + \frac{|w|^q}{2^q}$ e assim,

$$I_1(w) \leq \frac{2^q}{2^q + |w|^q} \int_{\mathbb{R}^d \setminus B(0, \frac{|w|}{2})} \frac{1}{1+|x-w|^q} dx.$$

Substituindo a integração em $\mathbb{R}^d \setminus B(0, \frac{|w|}{2})$ pela integração em $\mathbb{R}^d$ e usando o Teorema da Mudança de Variáveis, nós obtemos que

$$I_1(w) \leq \frac{2^q}{2^q + |w|^q} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{1+|y|^q} dy \leq \frac{2^q}{1+|w|^q} \int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{1+|y|^q} dy = \frac{2^q C}{1+|w|^q}.$$

Agora, dado $x \in B(0, \frac{|w|}{2})$, então, $|x-w| > \frac{|w|}{2}$ e assim $1+|x-w|^q > 1+\frac{|w|^q}{2^q}$. Com isso,

$$I_2(w) \leq \frac{2^q}{2^q+|w|^q}\int_{B\left(0,\frac{|w|}{2}\right)} \frac{1}{1+|x|^q}dx \leq \frac{2^q}{1+|w|^q}\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{1+|x|^q}dx = \frac{2^q C}{1+|w|^q}.$$

Portanto, somando as cotas para $I$ no primeiro caso e $I_1$ e $I_2$ no segundo, obtemos o resultado.

∎

Finalmente obteremos na proposição abaixo uma estimativa para a norma da solução do problema linear e para as funções $u \in B_f$, que utilizaremos nas demonstrações dos lemas que garantirão a existência e unicidade da solução do problema não linear.

**Proposição 4.2** *Seja $u_f$ a solução da equação do calor linear com dado inicial $f \in B_q$ e considere $u \in B_f$, com $B_f$ dado por (4.4). Então,*

$$\|u\|_L \leq (1+d+2d\sqrt{L^2-1})\|f\|. \tag{4.5}$$

*Prova:* Como $\widehat{u_f}(w,t) = e^{-|w|^2(t-1)}\hat{f}(w)$, usando que $e^{-|w|^2(t-1)} \leq 1$ para todo $t \geq 1$,

$$|\widehat{u_f}(w,t)| \leq |\hat{f}(w)|. \tag{4.6}$$

Além disso,

$$\begin{aligned} |\nabla\widehat{u_f}(w,t)| &= \sum_{i=1}^{d}\left|-2w_i(t-1)e^{-|w|^2(t-1)}\widehat{f}(w) + e^{-|w|^2(t-1)}\hat{f}_{w_i}(w)\right| \\ &\leq de^{-|w|^2(t-1)}\left[2|w|(t-1)|\widehat{f}(w)| + |\nabla\hat{f}(w)|\right]. \end{aligned}$$

Usando agora que $e^{-|w|^2(t-1)} \leq 1$ para todo $t \geq 1$ e $\sup_{x>0} xe^{-x^2} < 1$, obtemos

$$|\nabla\widehat{u_f}(w,t)| \leq 2d\sqrt{t-1}\left|\hat{f}(w)\right| + d\left|\nabla\hat{f}(w)\right|. \tag{4.7}$$

Assim, de (4.6) e (4.7) e pela definição de norma em $B_q$,

$$\begin{aligned} \|u_f\|_L &\leq d\sup_{t\in[1,L^2]}\{\sup_{w\in\mathbb{R}^d}\{(1+|w|^q)\left(\left|\hat{f}(w)\right| + 2\sqrt{t-1}\left|\hat{f}(w)\right| + \left|\nabla\hat{f}(w)\right|\right)\}\} \\ &\leq d\sup_{t\in[1,L^2]}\left(1+2\sqrt{t-1}\right)\|f\| \\ &\leq d(1+2\sqrt{L^2-1})\|f\|. \end{aligned}$$

Agora, se $u \in B_f$, então,

$$\|u\|_L \leq \|u - u_f\|_L + \|u_f\|_L \leq \|f\| + d(1 + 2\sqrt{L^2 - 1})\|f\| = (1 + d + 2d\sqrt{L^2 - 1})\|f\|,$$

o que finaliza a demonstração. ∎

Com os resultados obtidos anteriormente, podemos provar o próximo lema, que irá garantir que o operador $T$ leva a bola $B_f$ nela mesma.

**Lema 4.1** *Dados $L > 1$, $q > d$ e um natural $n \geq 2$, existe $\epsilon_1 = \epsilon_1(L, n, q, d) > 0$ tal que se $f \in B_q$ e $\|f\| < \epsilon_1$, então $\|N(u)\|_L < \|f\|$ sempre que $u \in B_f$.*

*Prova:* Inicialmente, lembremos que o operador $N : B^{(L)} \to B^{(L)}$ é dado por (4.3). Assim, aplicando a transformada de Fourier em $N(u)(x,t)$, obtemos

$$\widehat{N(u)}(w,t) = \int_0^{t-1} ds e^{-s|w|^2} \widehat{u^n}(w, t-s) \tag{4.8}$$

e reescrevendo $\widehat{u^n}$ como uma integral de convolução (veja o Lema 2.2), temos:

$$\widehat{u^n}(w) = \frac{1}{(2\pi)^{d(n-1)}} \int \hat{u}(-w - y_1)\hat{u}(y_1 - y_2)...\hat{u}(y_{n-1})dy_1...dy_{n-1}. \tag{4.9}$$

De (4.8) e (4.9),

$$\widehat{N(u)}(w,t) = \frac{1}{(2\pi)^{d(n-1)}} \int_0^{t-1} e^{-|w|^2 s} ds \int \hat{u}(-w - y_1)\hat{u}(y_1 - y_2)...\hat{u}(y_{n-1})dy_1...dy_{n-1}. \tag{4.10}$$

Agora, por hipótese, $u \in B^{(L)}$, logo, $|\hat{u}(w,t)| \leq \frac{\|u\|_L}{1+|w|^q}$ para todo $t \in [1, L^2]$. Assim,

$$|\widehat{N(u)}(w,t)| \leq \frac{1}{(2\pi)^{d(n-1)}} \|u\|_L^n \int_0^{t-1} ds e^{-s|w|^2} \int \frac{1}{1 + |-w - y_1|^q} \cdots \frac{1}{1 + |y_{n-1}|^q} dy_1 \cdots dy_{n-1}.$$

Agora, observando que

$$I(w,t) \equiv \int_0^{t-1} e^{-|w|^2 s} ds \leq \int_0^{t-1} ds = t - 1, \tag{4.11}$$

temos:

$$|\widehat{N(u)}(w,t)| \;\leq\; \frac{\|u\|_L^n(t-1)}{(2\pi)^{d(n-1)}}\int \frac{1}{1+|-w-y_1|^q}\cdots\frac{1}{1+|y_{n-1}|^q}dy_1\cdots dy_{n-1}.$$

Finalmente, usando a Proposição 4.1,

$$|\widehat{N(u)}(w,t)| \;\leq\; \left(\frac{K}{(2\pi)^d}\right)^{n-1}\frac{(t-1)\|u\|_L^n}{1+|w|^q} = \frac{K_n(t-1)\|u\|_L^n}{1+|w|^q}, \tag{4.12}$$

sendo $K$ a constante da Proposição 4.1 e

$$K_n = \left(\frac{K}{(2\pi)^d}\right)^{n-1}. \tag{4.13}$$

Vamos agora obter estimativas para o gradiente de $N(u)$. Para isso, considere a derivada de $\widehat{N(u)}$ em relação a cada componente de $w$:

$$\begin{aligned}\widehat{N(u)}_{w_i}(w,t) &= -\frac{2}{(2\pi)^{d(n-1)}}\int_0^{t-1} w_i s e^{-|w|^2 s}ds\int \hat{u}(-w-y_1)\hat{u}(y_1-y_2)...\hat{u}(y_{n-1})dy_1...dy_{n-1}\\ &\quad -\frac{1}{(2\pi)^{d(n-1)}}\int_0^{t-1} e^{-|w|^2 s}ds\int \hat{u}_{w_i}(-w-y_1)\hat{u}(y_1-y_2)...\hat{u}(y_{n-1})dy_1...dy_{n-1}\\ &= I_1(w,t)+I_2(w,t).\end{aligned}$$

Vamos estimar inicialmente a integral $I_1$. Para isso, observe que, integrando por partes,

$$\int_0^{t-1} w_i s e^{-|w|^2 s}ds = -\frac{w_i}{|w|^4}\left[[(t-1)|w|^2+1]e^{-(t-1)|w|^2}-1\right]. \tag{4.14}$$

Analisaremos (4.14) em dois casos: primeiramente, se $|w|\geq 1$, como $|w_i|\leq|w|$, temos

$$\left|\int_0^{t-1} w_i s e^{-|w|^2 s}ds\right| \leq \frac{1}{|w|^3}\left|[(t-1)|w|^2+1]e^{-(t-1)|w|^2}-1\right|.$$

e, se $|w|\geq 1$, então $1/|w|^3\leq 1$ e como $\sup_{x>0}(1+x)e^{-x}\leq 1$, obtemos $\left|\int_0^{t-1} w_i s e^{-|w|^2 s}ds\right|\leq 2$. Por outro lado, se $|w|\leq 1$, reescrevemos (4.14) como

$$\int_0^{t-1} w_i s e^{-|w|^2 s}ds = \frac{w_i e^{-(t-1)|w|^2}}{|w|^4}\left[e^{(t-1)|w|^2}-[(t-1)|w|^2+1]\right].$$

Expandindo a exponencial $e^{(t-1)|w|^2}$, obtemos que $e^{(t-1)|w|^2}-[(t-1)|w|^2+1]=\sum_{n\geq 2}\frac{[|w|^2(t-1)]^n}{n!}$. Assim, obtemos como cota para (4.14):

$$\frac{e^{-(t-1)|w|^2}}{|w|^3}\sum_{n\geq 2}\frac{[|w|^2(t-1)]^n}{n!} \leq \frac{e^{-(t-1)|w|^2}}{|w|^3}\frac{[|w|^2(t-1)]^2}{2!}e^{(t-1)|w|^2} = \frac{|w|(t-1)^2}{2}.$$

Como $|w| \leq 1$, obtemos portanto que $\left|\int_0^{t-1} w_i s e^{-|w|^2 s} ds\right| \leq (t-1)^2$. Somando as estimativas nos dois casos obtemos finalmente

$$\left|\int_0^{t-1} w_i s e^{-|w|^2 s} ds\right| \leq 2 + (t-1)^2. \tag{4.15}$$

Além disso, usando novamente $|\hat{u}(w,t)| \leq \|u\|_L(1+|w|^q)^{-1}$ e a Proposição 4.1,

$$|I_1(w,t)| \leq \frac{2K_n[2+(t-1)^2]\|u\|_L^n}{1+|w|^q}, \tag{4.16}$$

sendo $K_n$ dada por (4.13).

Para estimar $I_2$ basta observar que $|\hat{u}_{w_i}(w,t)| \leq |\nabla \hat{u}(w,t)| \leq \|u\|_L(1+|w|^q)^{-1}$. Dessa forma, a estimativa para a integral $I_2$ se torna idêntica à estimativa que fizemos para $N(u)$ e, portanto, $|I_2|$ fica limitada superiormente pelo lado direito de (4.12). Com isso, obtemos,

$$|\widehat{N(u)}_{w_i}(w,t)| \leq \frac{K_n\|u\|_L^n}{1+|w|^q}[4+(t-1)+2(t-1)^2]$$

e assim,

$$|\nabla\widehat{N(u)}(w,t)| \quad \leq \quad \frac{dK_n\|u\|_L^n}{1+|w|^q}[4+(t-1)+2(t-1)^2]. \tag{4.17}$$

Usando (4.12) e (4.17), tomando o supremo sobre $w \in \mathbb{R}^d$ e sobre $t \in [1, L^2]$ e usando ainda que $n \geq 2$, obtemos

$$\begin{aligned}
\|N(u)\|_L &\leq \sup_{\{t\in[0,L^2]\}} \sup_{\{w\in\mathbb{R}^d\}} \left\{(1+|w|^q)\left(\frac{K_n(t-1)\|u\|_L^n}{1+|w|^q} + \frac{dK_n\|u\|_L^n}{1+|w|^q}[4+(t-1)+2(t-1)^2]\right)\right\} \\
&\leq \sup_t \left[4d+(1+d)(t-1)+2d(t-1)^2\right] K_n\|u\|_L^n \\
&= \left[4d+(1+d)(L^2-1)+2d(L^2-1)^2\right] K_n\|u\|_L^{n-2}\|u\|_L^2.
\end{aligned}$$

Agora, pela Proposição 4.2, se tomarmos $\|f\| \leq [(1+d+2d\sqrt{L^2-1})]^{-1}$, então, $\|u\|_L \leq 1$ e, nesse caso,

$$\|N(u)\|_L \leq \left[4d+(1+d)(L^2-1)+2d(L^2-1)^2\right] K_n(1+d+2d\sqrt{L^2-1})^2\|f\|^2.$$

Daí obtemos

$$\|N(u)\|_L \leq C_L\|f\|^2, \tag{4.18}$$

em que

$$C_L = C_{L,n,q,d} = K_n \left[4d + (1+d)(L^2-1) + 2d(L^2-1)^2\right](1+d+2d\sqrt{L^2-1})^2. \tag{4.19}$$

Note que para obtermos a cota acima foi necessário tomar o dado inicial pequeno e, para obter o resultado do lema com a cota acima, basta que a norma do dado inicial seja menor que $C_L^{-1}$. Sendo assim, é suficiente tomar $\epsilon_1 = \min\left\{C_L^{-1}, [(1+d+2d\sqrt{L^2-1})]^{-1}\right\}$ e, se $\|f\| < \epsilon_1$, obtemos $\|N(u)\|_L < \|f\|$.

∎

Através do lema a seguir obteremos condições sobre o dado inicial para que o operador $T$ definido em (4.2) seja uma contração em $B_f$, o que nos permitirá finalmente utilizar o Teorema do Ponto Fixo de Banach para demonstrar a existência e unicidade de soluções do P.V.I. (4.1).

**Lema 4.2** *Sob as hipóteses do Lema 4.1, existe* $\epsilon_2 = \epsilon_2(L,n,q,d) > 0$ *tal que, se* $f \in B_q$ *e* $\|f\| < \epsilon_2$, *então* $\|N(u) - N(v)\|_L < \frac{1}{2}\|u-v\|_L$ *para quaisquer* $u, v \in B_f$.

*Prova:* Temos por (4.10) que

$$\left[\widehat{N(u)} - \widehat{N(v)}\right](w,t) = \frac{1}{(2\pi)^{d(n-1)}} \int_0^{t-1} e^{-s|w|^2} ds \int \left[(\hat{u} * \cdots * \hat{u}) - (\hat{v} * \cdots * \hat{v})\right](-w,s) ds$$

com $n-1$ convoluções de $u$ e $n-1$ de $v$. Somando e subtraindo $\hat{v} * \hat{u} * \cdots * \hat{u}$ no integrando acima sendo $n-2$ convoluções de $\hat{u}$ consigo mesmo, e usando a linearidade da convolução em cada entrada, temos que

$$\left[\widehat{N(u)} - \widehat{N(v)}\right](w,t) = \frac{1}{(2\pi)^{d(n-1)}} \int_0^{t-1} e^{-s|w|^2} \left[(\hat{u}-\hat{v}) * \hat{u} * \cdots * \hat{u}\right](-w,s) ds$$
$$+ \frac{1}{(2\pi)^{d(n-1)}} \int_0^{t-1} e^{-s|w|^2} \hat{v} * \left[(\hat{u} * \cdots * \hat{u}) - (\hat{v} * \cdots * \hat{v})\right](-w,s) ds \equiv I_1 + I_2,$$

em que existem $n-2$ convoluções de $\hat{u}$ consigo mesmo e de $\hat{v}$ consigo mesmo em $I_2$. Assim, usando que $|\hat{u} - \hat{v}| \leq \|u-v\|/(1+|w|^q)$, podemos estimar a integral $I_1$ de forma totalmente análoga ao que fizemos na estimativa de $|\widehat{N(u)}(w,t)|$ obtida em (4.12) no Lema 4.1. Assim,

$$|I_1| \leq \frac{K_n \|u\|_L^{n-1} \|u-v\|_L (t-1)}{1+|w|^q}. \tag{4.20}$$

Para estimar a integral $I_2$, observamos inicialmente que, se $n = 2$, então aparece no integrando de $I_2$ o termo $\hat{v} * (\hat{u} - \hat{v})$ e nesse caso conseguimos estimar $|I_2|$ como acima, ou seja, para $n = 2$,

$$|I_2| \leq \frac{K_2}{1 + |w|^q} \|v\|_L \|u - v\|_L (t - 1).$$

Se $n > 2$, utilizamos o mesmo raciocínio acima, somando e subtraindo $\hat{v} * \hat{v} * \hat{u} \cdots * \hat{u}$ ($n - 3$ convoluções de $\hat{u}$ com si mesmo) ao integrando de $I_2$, isto é,

$$I_2 = \frac{1}{(2\pi)^{d(n-1)}} \int_0^{t-1} e^{-s|w|^2} [\hat{v} * (\hat{u} - \hat{v}) * \hat{u} \cdots * \hat{u}](-w, s) ds$$

$$+ \frac{1}{(2\pi)^{d(n-1)}} \int_0^{t-1} e^{-s|w|^2} \hat{v} * \hat{v} * \left[ (\hat{u} * \cdots * \hat{u}) - (\hat{v} * \cdots * \hat{v}) \right] (-w, s) ds,$$

em que existem $n - 3$ convoluções de $\hat{u}$ consigo mesmo na primeira integral e na segunda, dentro dos colchetes, também há $n - 3$ convoluções de $\hat{u}$ consigo mesmo e de $\hat{v}$ consigo mesmo. A primeira integral acima pode ser estimada por $[K_n \|v\|_L \|u\|_L^{n-2} \|u - v\|_L (t - 1)](1 + |w|^q)^{-1}$ e, se $n > 3$ a segunda é novamente decomposta em duas, somando-se e subtraindo-se em seu integrando $\hat{v} * \hat{v} * \hat{v} * \hat{u} \cdots * \hat{u}$, com $n - 4$ convoluções de $\hat{u}$ consigo mesmo. Assim, obtemos a seguinte cota superior para $|[\widehat{N(u)} - \widehat{N(v)}](w, t)|$:

$$\frac{K_n (t - 1)}{1 + |w|^q} \|u - v\|_L \left( \|u\|_L^{n-1} + \|v\|_L \|u\|_L^{n-2} + \cdots + \|v\|_L^{n-2} \|u\|_L + \|v\|_L^{n-1} \right).$$

Tomando mais uma vez $\|f\| < (1 + d + 2d\sqrt{L^2 - 1})^{-1}$, de modo que $\|u\|_L, \|v\|_L < 1$, e usando a Proposição 4.2, já que $u, v \in B_f$,

$$\|u\|_L^{n-1} + \|v\|_L \|u\|_L^{n-2} + \cdots + \|v\|_L^{n-2} \|u\|_L + \|v\|_L^{n-1} \leq \|u\|_L + \cdots + \|v\|_L \leq n(1 + d + 2d\sqrt{L^2 - 1}) \|f\|.$$

Assim, chegamos finalmente a

$$\left| \left[ \widehat{N(u)} - \widehat{N(v)} \right] (w, t) \right| \leq \frac{n(1 + d + 2d^2\sqrt{L^2 - 1}) K_n (t - 1)}{1 + |w|^q} \|f\| \|u - v\|_L. \qquad (4.21)$$

Para obter uma estimativa para o gradiente de $\widehat{N(u)} - \widehat{N(v)}$, derivando em relação a cada componente de $w$, temos:

$$\left[ \widehat{N(u)} - \widehat{N(v)} \right]_{w_i} (w, t) = -\frac{2}{(2\pi)^{d(n-1)}} \int_0^{t-1} w_i s e^{-s|w|^2} \left[ (\hat{u} * \cdots * \hat{u}) - (\hat{v} * \cdots * \hat{v}) \right] (-w, s) ds$$

$$-\frac{1}{(2\pi)^{d(n-1)}} \int_0^{t-1} e^{-s|w|^2} \left[ (\hat{u}_{w_i} * \hat{u} * \cdots * \hat{u}) - (\hat{v}_{w_i} * \hat{v} * \cdots * \hat{v}) \right] (-w, s) ds = I_3 + I_4.$$

As estimativas para as integrais $I_3$ e $I_4$ são feitas como anteriormente, procedendo em relação às convoluções através da soma e subtração de termos adequados, sendo que, para estimar $I_3$, utilizamos (4.15). Além disso, para estimar $I_4$, assim como feito no Lema 4.1, usamos que $|\hat{u}_{w_i}(w,t)| \leq |\nabla \hat{u}(w,t)| \leq \|u\|_L (1+|w|^q)^{-1}$. Dessa forma, a estimativa para $I_4$ se torna idêntica à cota obtida para $\widehat{N(u)} - \widehat{N(v)}$. Assim,

$$|I_3| \leq \frac{2n(1+d+2d\sqrt{L^2-1})K_n[2+(t-1)^2]}{1+|w|^q} \|f\| \|u-v\|_L$$

e

$$|I_4| \leq \frac{n(1+d+2d\sqrt{L^2-1})K_n(t-1)}{1+|w|^q} \|f\| \|u-v\|_L.$$

Assim, obtemos:

$$|\nabla [\widehat{N(u)} - \widehat{N(v)}](w,t)| \leq dn(1+d+2d\sqrt{L^2-1})K_n \frac{[4+(t-1)+2(t-1)^2]}{1+|w|^q} \|f\| \|u-v\|_L. \quad (4.22)$$

Somando as cotas obtidas em (4.21) e (4.22) e usando as definições das normas em $B_q$ e $B^{(L)}$, como $(1+d+2d\sqrt{L^2-1}) \geq 1$, temos

$$\begin{aligned} \|N(u) - N(v)\|_L &\leq n(1+d+2d\sqrt{L^2-1})K_n \left[4d + (1+d)(L^2-1) + 2d(L^2-1)^2\right] \|f\| \|u-v\|_L \\ &\leq nC_L \|f\| \|u-v\|_L, \end{aligned}$$

em que $C_L$ é dada por (4.19). Portanto, tomando $\epsilon_2 = \min\{(2nC_L)^{-1}, [(1+d+2d\sqrt{L^2-1})]^{-1}\}$, se $\|f\| < \epsilon_2$, então $\|N(u)-N(v)\|_L \leq \frac{1}{2}\|u-v\|_L$, para quaisquer $u, v \in B_f$, o que demonstra o lema.

∎

## 4.2 O teorema da existência e unicidade local

De posse dos lemas da seção anterior, podemos finalmente obter a existência e unicidade da solução do PVI (4.1) em $B_f$:

**Teorema 4.2** *Dados $L > 1$, $q > d$, $\lambda \in [-1,1]$ e um natural $n \geq 2$, existe $\epsilon = \epsilon(L,n,q,d) > 0$ tal que, se $f \in B_q$ e $\|f\| < \epsilon$, então o problema de valor inicial (4.1) possui uma única solução em $B_f$.*

*Prova:* Primeiramente observe que, como $n \geq 2$, considerando $\epsilon_1$ e $\epsilon_2$ obtidos nos Lemas 4.1 e 4.2, respectivamente, temos $\epsilon_2 \leq \epsilon_1$. Assim, definindo $\epsilon = \epsilon_2$ e tomando $\|f\| < \epsilon$, obtemos, do Lema 4.1,

$$\|T(u) - u_f\|_L = |\lambda| \|N(u)\|_L < \|f\|,$$

já que $|\lambda| \leq 1$ e, pelo Lema 4.2,

$$\|T(u) - T(v)\|_L = |\lambda| \|N(u) - N(v)\|_L < \frac{1}{2} \|u - v\|_L$$

para todas as funções $u, v \in B_f$. Isso garante que o operador $T$ mapeia a bola $B_f$ nela mesma e é uma contração em $B_f$. Logo pelo teorema do ponto fixo de Banach 4.1, concluímos que $T$ possui um único ponto fixo em $B_f$ e portanto, o PVI (4.1) tem uma única solução em $B_f$, já que, se $u$ é ponto fixo de $T$, então $u$ satisfaz tal problema, pelo Princípio de Duhamel.

∎

Cabe observar aqui que a restrição de $\lambda \in [-1, 1]$ é simplesmente para considerar cotas independentes de $\lambda$. Poderíamos ter inserido $\lambda$ na definição de $N(u)$ de forma que as estimativas nos Lemas 4.1 e 4.2 dependeriam de $\lambda$, assim como $\epsilon$, o que não invalidaria o resultado.

# Capítulo 5

# O comportamento assintótico da solução do problema não-linear

Nesse capítulo, utilizaremos os resultados obtidos anteriormente para provar um teorema análogo ao Teorema 3.2, que nos fornecerá de maneira rigorosa, o comportamento assintótico da solução do P.V.I. 4.1, com $n > 1 + \frac{2}{d}$.

Inicialmente, mostraremos a necessidade da restrição $n > 1 + \frac{2}{d}$. Faremos essa consideração no caso do problema mais geral:

$$\left\{ \begin{array}{rcc} u_t & = & \Delta u + \lambda F(u, \partial_1^1 u, \cdots, \partial_d^1 u, \partial_1^2 u, \cdots, \partial_d^2 u),\ \lambda \in \mathbb{R}, \\ u(x,1) & = & f(x),\ f \in B_q,\ q > d, \end{array} \right. \tag{5.1}$$

em que $\partial_j^i u$ representa a $i$-ésima derivada parcial de $u(x,t)$ em relação a $j$-ésima coordenada de $x \in \mathbb{R}^d$ e $F(u, \partial_1^1 u, \cdots, \partial_d^1 u, \partial_1^2 u, \cdots, \partial_d^2 u) = \prod_{j=1}^{d} \prod_{i=0}^{2} \left(\partial_j^i u\right)^{n_{ij}}$, sendo $n_{ij}$ inteiros positivos.

Dado $L > 1$, defina $v(x,t) = L^d u(Lx, L^2 t)$. Fazendo $y = Lx$ e $s = L^2 t$ e derivando $v(x,t)$, obtemos

$$v_t = L^{d+2} u_s(y,s) \text{ e } \partial_j^i v(x,t) = L^{d+i} \partial_j^i u(y,s), \text{ com } i = 0, 1, 2.$$

Como $u(y,s)$ é solução de (5.1), segue-se que $v(x,t)$ satisfaz à equação:

$$v_t = \Delta v + \lambda L^{\{(d+2) - dn_0 - (d+1)n_1 - (d+2)n_2\}} v^{n_0} (\partial_1^1 v)^{n_{11}} (\partial_1^2 v)^{n_{21}} \cdots (\partial_d^1 v)^{n_{1d}} (\partial_d^2 v)^{n_{2d}}$$

com $n_i = \sum_{j=1}^{d} n_{ij}$, $i \in \{0, 1, 2\}$.

Classificaremos agora os termos não-lineares da equação em (5.1) baseados na nomenclatura introduzida por Bricmont et al. [2]. Definindo $d_F = dn_0 + (d+1)n_1 + (d+2)n_2 - (d+2)$., dizemos que a perturbação $F$ adicionada à equação é:

- irrelevante, se $d_F > 0$;

- marginal, se $d_F = 0$;

- relevante, se $d_F < 0$.

No nosso caso $n_0 = n$, $n_1 = n_2 = 0$, e queremos analisar soluções da equação do calor não linear com perturbações irrelevantes. Logo, $d_F = dn - (d+2) > 0$, isto é, $n > 1 + \frac{2}{d}$. Observe que o caso $d = 1$ é mais restritivo, isto é, para termos perturbações irrelevantes precisamos considerar $n > 3$. Se $d = 2$, basta que $n > 2$, enquanto que, se $d \geq 3$, então ainda é permitida a perturbação $u^2$, ou seja, qualquer termo do tipo $u^n$ com $n \geq 2$ será irrelevante. Note que essa é a condição sobre $n$ exigida também no teorema de existência e unicidade. Nosso objetivo nesse capítulo é mostrar que, após um reescalonamento adequado da solução do P.V.I. (4.1), ela se aproxima de um múltiplo da distribuição gaussiana $d$-dimensional, e obteremos ainda uma taxa para o seu decaimento. Cabe observar que todos os resultados obtidos nessa dissertação podem ser estendidos para o problema (5.1), com $d_F = dn_0 + (d+1)n_1 + (d+2)n_2 - (d+2) > 0$. Optamos por abordar o caso particular apenas para simplificar as estimativas obtidas.

## 5.1 Processo iterativo

O método funciona para o caso não-linear de forma análoga à que foi feita para o caso linear. Inicialmente, tomamos o P.V.I. (4.1), que consideraremos no intervalo de tempo $[1, L^2]$. Em seguida, definindo o operador Grupo de Renormalização de forma adequada, o aplicamos ao dado inicial, obtendo um novo PVI, com novo dado inicial e um novo parâmetro $\lambda_1 \in [-1, 1]$. Esse procedimento é iterado e, estudando a convergência da sequência de dados iniciais, conseguimos determinar o comportamento assintótico da solução do P.V.I. (4.1). Uma diferença do procedimento nos casos linear e não-linear é que, no caso não-linear, a cada iteração a equação é modificada e é preciso observar as alterações nas perturbações. Além disso, a análise da convergência do operador se torna mais delicada, uma vez que a contribuição da parte não linear deve ser controlada em cada etapa.

Para dar início a esse processo, consideremos o seguinte problema de valor inicial:

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + \lambda_0 u^n, t \in [1, L^2], x \in \mathbb{R}^d, \\ u(\cdot, 1) = f_0,\ f_0 \in B_q,\ q > d. \end{cases} \tag{5.2}$$

Tomando $\varepsilon$ dado no Teorema 4.2, temos que, se $\|f_0\| < \varepsilon$, então o PVI (5.2) possui uma única solução em $B_{f_0}$, representada por

$$u_0(x,t) = u_{f_0}(x,t) + \nu_0(x,t), \tag{5.3}$$

em que $u_{f_0}$ é a solução da equação do calor linear com dado inicial $f_0$ e $\nu_0(x,t) = \lambda_0 N(u_0)(x,t)$, sendo $N(u)$ dado por (4.3). O Grupo de Renormalização para a equação não-linear é definido a partir de (5.3), da seguinte maneira: dado $L > 1$,

$$(R_{L,0} f_0)(x) \equiv L^d u_0(Lx, L^2) = L^d u_{f_0}(Lx, L^2) + L^d \nu_0(Lx, L^2) = R_L^0 f_0(x) + L^d \nu_0(Lx, L^2), \tag{5.4}$$

sendo $R_L^0$ o operador linear definido em (3.9).

Assim como foi feito no caso linear, defina $g_0 \equiv f_0 - A_0 f_0^*$, com $A_0 = \hat{f}(0)$. Então $\hat{g}_0(0) = 0$ e, assim como em (3.21), obtemos

$$\|g_0\| \le \|f_0\| + |A_0| \|f_0^*\| \le (1 + K_q)\|f_0\|. \tag{5.5}$$

Em seguida, defina $u_1(x,t) = L^d u_0(Lx, L^2 t)$, onde $u_0(x,t)$ é solução do problema (5.2). Então, $u_1(x,t)$ satisfaz

$$\begin{cases} u_t &= \Delta u + \lambda_1 u^n, t \in [1, L^2], x \in \mathbb{R}^d, \\ u(x,1) &= f_1(x),\ f_1 \in B_q,\ q > d, \end{cases} \tag{5.6}$$

em que $\lambda_1 = L^{d+2-dn} \lambda_0$ e $f_1 = L^d u_0(L\cdot, L^2) = R_{L,0} f_0$.

Durante o desenvolvimento desse capítulo usaremos, para cada iteração $k$, a notação $\nu_k(L\cdot) \equiv \nu_k(L\cdot, L^2)$. Assim, de (5.4) e da decomposição de $f_0$, temos

$$f_1 = R_L^0 f_0 + L^d \nu_0(L\cdot, L^2) = R_L^0(A_0 f_0^* + g_0) + L^d \nu_0(L\cdot) = A_0 f_0^* + R_L^0 g_0 + L^d \nu_0(L\cdot). \tag{5.7}$$

Como feito para $f_0$, queremos que $f_1 \equiv A_1 f_0^* + g_1$, com $\widehat{g_1}(0) = 0$. Note que, se fizéssemos $A_0 = A_1$ e $g_1 = R_L^0 g_0 + L^d \nu_0(L\cdot)$, teríamos $\widehat{g_1}(0) = \widehat{\nu_0}(0)$, já que $\mathcal{F}\{R_L^0 g_0\}(0) = 0$ e, pelo Teorema da Mudança de Variáveis, $\mathcal{F}\{L^d \nu_0(L\cdot)\}(w) = \widehat{\nu_0}(w/L)$. Para corrigir esse fato, devemos somar e subtrair $\widehat{\nu_0}(0) f_0^*$ ao lado direito da igualdade (5.7), obtendo

$$f_1 = [A_0 + \hat{\nu_0}(0)] f_0^* + R_L^0 g_0 + L^d \nu_0(L\cdot) - \hat{\nu_0}(0) f_0^* = A_1 f_0^* + g_1, \tag{5.8}$$

em que $A_1 = A_0 + \widehat{\nu_0}(0)$ e $g_1 = R_L^0 g_0 + L^d \nu_0(L\cdot) - \widehat{\nu_0}(0) f_0^*$ (note que agora $\widehat{g_1}(0) = 0$, uma vez que $\mathcal{F}(f_0^*)(0) = 1$). Observe que, a cada iteração, a componente do dado inicial na direção do ponto fixo é modificada e portanto, é preciso controlar essa sequência de constantes $A_k$. Para isso, observe que, do Lema 4.1, se $\|f_0\| < \epsilon$,

$$|A_1 - A_0| = |\hat{\nu_0}(0)| \leq \|\nu_0\|_L = \|\lambda_0 N(u_0)\|_L \leq C_L \|f_0\|^2, \tag{5.9}$$

sendo $C_L$ a constante dada por (4.19). Além disso, é preciso controlar a convergência da sequência $g_n$ e, para isso, por (4.12), como $L > 1$ e $|\lambda| \leq 1$, temos:

$$\left| \widehat{L^d \nu_0(Lx)}(w) \right| = \left| \hat{\nu_0}\left(\frac{w}{L}\right) \right| \leq \frac{K_n(L^2-1)}{1 + \left|\frac{w}{L}\right|^q} \|u_0\|_L^n = \frac{L^q K_n(L^2-1)}{1 + |w|^q} \|u_0\|_L^n$$

e, de (4.17), usando novamente que $L > 1$ e $|\lambda| \leq 1$,

$$\left| \nabla \left[ \widehat{L^d \nu_0(Lx)} \right](w) \right| = \left| \nabla \hat{\nu_0}\left(\frac{w}{L}\right) \right| \leq d L^q \left[4 + (L^2-1) + 2(L^2-1)^2\right] \frac{K_n}{1 + |w|^q} \|u_0\|_L^n.$$

Agora, tomando $\|f_0\| < \epsilon$ e usando que $n \geq 2$,

$$\|L^d \nu_0(L\cdot)\| \leq L^q C_L \|f_0\|^2.$$

Daí, lembrando que $\|\nu_0\| = \|N(u_0)\|_L \leq C_L \|f_0\|^2$ e $\|f_0^*\| \leq K_q$, temos

$$\|L^d \nu_0(L\cdot) - \hat{\nu_0}(0) f_0^*\| \leq \|L^d \nu_0(L\cdot)\| + \|\nu_0\| \|f_0^*\| \leq L^q (1 + K_q) C_L \|f_0\|^2. \tag{5.10}$$

Assim, como $\widehat{g_0}(0) = 0$, do lema da contração, de (5.5) e (5.10),

$$\|g_1\| \leq \|R_L^0 g_0\| + \|L^d \nu_0(L\cdot) - \hat{\nu_0}(0) f_0^*\| \leq \frac{C}{L}(1 + K_q)\|f_0\| + L^q(1 + K_q)C_L\|f_0\|^2.$$

Como queremos determinar uma taxa para o decaimento da solução é conveniente escrevermos,

$$\|g_1\| \leq \frac{1}{L^{1-\delta}} \left[ \frac{C}{L^\delta}(1 + K_q) + L^{1-\delta} L^q (1 + K_q) C_L \|f_0\| \right] \|f_0\|.$$

Além disso, como desejamos obter uma sequência $(g_n)_{n\in\mathbb{N}}$ tal que $\|g_n\| \to 0$, tomemos

$$L > [2C(1 + K_q)]^{\frac{1}{\delta}}, \tag{5.11}$$

de forma que $L^{-\delta} C(1 + K_q) < 1/2$ e consideremos também $f_0$ suficientemente pequeno tal que

$$L^{1-\delta} L^q (1 + K_q) C_L \|f_0\| < \frac{1}{2}. \tag{5.12}$$

Dessa forma,

$$\|g_1\| \leq \frac{1}{L^{1-\delta}} \|f_0\| \tag{5.13}$$

e, com isso, usando (5.9) e (5.13),

$$\|f_1\| \leq \|g_1\| + \|(A_1 - A_0) f_0^* + A_0 f_0^*\| \leq \frac{\|f_0\|}{L^{1-\delta}} + K_q (C_L \|f_0\|^2 + \|f_0\|) = D_1 \|f_0\|, \tag{5.14}$$

com

$$D_1 = L^{\delta - 1} + K_q (C_L \|f_0\| + 1). \tag{5.15}$$

Agora iremos iterar o procedimento descrito acima a fim de obtermos cotas superiores para $\|f_2\|$ e $\|g_2\|$ em termos de $\|f_0\|$ como fizemos para $\|f_1\|$ e $\|g_1\|$. Novamente, tomando $\epsilon$ dado no Teorema 4.2, se $\|f_1\| < \epsilon$, então o PVI (5.6) possui uma única solução em $B_{f_1}$, representada por

$$u_1(x, t) = u_{f_1}(x, t) + \nu_1(x, t), \tag{5.16}$$

em que $u_{f_1}$ é a solução da equação do calor linear com dado inicial $f_1$ e $\nu_1(x, t) = \lambda_1 N(u_1)(x, t)$. O operador Grupo de Renormalização é então aplicado novamente ao dado inicial $f_1$, isto é,

$$(R_{L,1} f_1)(x) \equiv L^d u_1(Lx, L^2) = L^d u_{f_1}(Lx, L^2) + L^d \nu_1(Lx, L^2) = R_L^0 f_1(x) + L^d \nu_1(Lx, L^2).$$

Definindo agora $u_2(x,t) = L^d u_1(Lx, L^2 t)$, em que $u_1$ é solução do P.V.I (5.6), temos que $u_2$ satisfaz

$$\left\{ \begin{array}{rcl} u_t & = & \Delta u + \lambda_2 u^n, t \in [1, L^2], x \in \mathbb{R}^d, \\ u(x,1) & = & f_2(x),\ f_2 \in B_q,\ q > d, \end{array} \right. \tag{5.17}$$

em que $\lambda_2 = L^{2(d+2-nd)}\lambda_0$ e $f_2 = L^d u_1(L\cdot, L^2) = R_{L,1} f_1$. Note que estamos usando um índice a mais na definição do operador uma vez que a cada iteração a equação no PVI é modificada e, portanto, a aplicação do operador ao dado inicial dependerá do problema considerado. Em outras palavras, o índice deixará claro a solução de qual equação deve ser renormalizada. Observe ainda que

$$R_{L,1} f_1 \equiv L^d u_1(L\cdot, L^2) = L^{2d} u_0(L^2\cdot, L^4).$$

Agora, usando a decomposição para $f_1$,

$$f_2 = R_L^0 f_1 + L^d \nu_1(L\cdot, L^2) = A_1 f_0^* + R_L^0 g_1 + L^d \nu_1(L\cdot)$$

e somando e subtraindo $\hat{\nu_1}(0) f_0^*$ ao lado direito da igualdade acima, obtemos

$$f_2 = A_2 f_0^* + g_2,$$

com $A_2 = A_1 + \widehat{\nu_1}(0)$ e

$$g_2 = R_L^0 g_1 + L^d \nu_1(L\cdot) - \widehat{\nu_1}(0) f_0^*$$

e com isso, temos novamente, $\widehat{g_2}(0) = 0$. Para estimar a norma de $g_2$, note que a diferença da estimativa de $\nu_1$ para $\nu_0$ vem da modificação de $\lambda$ e assim, como $|\lambda_0| \leq 1$, concluímos que

$$\|L^d \nu_1(L\cdot)\| \leq |\lambda_1| L^q C_L \|f_1\|^2 \leq L^{d+2-dn} L^q C_L \|f_1\|^2.$$

Daí, como $\|\nu_1\| \leq C_L |\lambda_1| \|f_1\|^2$ e $\|f_0^*\| \leq K_q$, temos

$$\|L^d \nu_1(L\cdot) - \hat{\nu_1}(0) f_0^*\| \leq \|L^d \nu_1(L\cdot)\| + \|\nu_1\| \|f_0^*\| \leq L^{d+2-dn} L^q (1 + K_q) C_L \|f_1\|^2.$$

Assim, como $\widehat{g_1}(0) = 0$, do lema da contração e das estimativas anteriores,

$$\|g_2\| \leq \|R_L^0 g_1\| + \|L^d \nu_1(L\cdot) - \hat{\nu_1}(0) f_0^*\| \leq \frac{C}{L}\|g_1\| + L^{d+2-dn} L^q (1 + K_q) C_L \|f_1\|^2.$$

Agora, tomando $L > [2C(1+K_q)]^{\frac{1}{\delta}}$ e $f_0$ tal que $L^{1-\delta} L^q (1 + K_q) C_L \|f_0\| < 1/2$, de (5.13) e (5.14) temos

$$\begin{array}{rcl} \|g_2\| & \leq & \dfrac{C}{L^{2-\delta}}\|f_0\| + L^{d+2-dn} L^q (1+K_q) C_L D_1^2 \|f_0\|^2 \\ & = & \dfrac{1}{L^{2(1-\delta)}} \left[ \dfrac{C}{L^\delta} + L^{2(1-\delta)} L^{(1-n)d+2+q} (1+K_q) C_L D_1^2 \|f_0\| \right] \|f_0\|. \end{array}$$

Como $K_q > 1$, repetindo a escolha $L > [2C(1+K_q)]^{\frac{1}{\delta}}$ e tomando $f_0$ tal que

$$L^{2(1-\delta)}L^{(1-n)d+2+q}(1+K_q)C_L D_1^2\|f_0\| < \frac{1}{2},$$

obtemos

$$\|g_2\| \leq \frac{1}{L^{2(1-\delta)}}\|f_0\|. \tag{5.18}$$

Finalmente, como

$$|A_2 - A_1| = |\widehat{\nu_1}(0)| \leq \|\nu_1\| \leq C_L|\lambda_1|\|f_1\|^2,$$

temos

$$\begin{aligned} \|f_2\| &\leq \|g_2\| + \|[(A_2 - A_1) + (A_1 - A_0) + A_0]f_0^*\| \\ &\leq \frac{1}{L^{2(1-\delta)}}\|f_0\| + K_q\left[C_L|\lambda_1|\|f_1\|^2 + C_L\|f_0\|^2 + \|f_0\|\right] = D_2\|f_0\|, \end{aligned} \tag{5.19}$$

em que

$$D_2 = \frac{1}{L^{2(1-\delta)}} + K_q\left[C_L L^{d+2-dn}D_1^2\|f_0\| + C_L\|f_0\| + 1\right]. \tag{5.20}$$

Iteramos novamente o processo, tomando $\epsilon$ dado no Teorema 4.2 e, se $\|f_2\| < \epsilon$, então o PVI (5.17) possui uma única solução em $B_{f_2}$, representada por

$$u_2(x,t) = u_{f_2}(x,t) + \nu_2(x,t),$$

em que $u_{f_2}$ é a solução da equação linear com dado inicial $f_2$ e $\nu_2(x,t) = \lambda_2 N(u_2)(x,t)$. O operador RG é então aplicado novamente ao dado inicial $f_2$, isto é,

$$(R_{L,2}f_2)(x) \equiv L^d u_2(Lx, L^2) = L^d u_{f_2}(Lx, L^2) + L^d\nu_2(Lx, L^2) = R_L^0 f_2(x) + L^d\nu_2(Lx, L^2).$$

Definindo agora $u_3(x,t) = L^d u_2(Lx, L^2 t)$, em que $u_2$ é solução do P.V.I (5.17), temos que $u_3$ satisfaz

$$\left\{\begin{array}{rcl} u_t & = & \Delta u + \lambda_3 u^n, t \in [1, L^2], x \in \mathbb{R}^d, \\ u(x,1) & = & f_3(x),\ f_3 \in B_q,\ q > d, \end{array}\right. \tag{5.21}$$

em que $\lambda_3 = L^{3(d+2-nd)}\lambda_0$ e $f_3 = L^d u_2(L\cdot, L^2) = R_{L,2}f_2$. Observe ainda que

$$R_{L,2}f_2 \equiv L^d u_2(L\cdot, L^2) = L^{2d}u_1(L^2\cdot, L^4) = L^{4d}u_0(L^4\cdot, L^6).$$

Agora, usando a decomposição para $f_2$,

$$f_3 = R_L^0 f_2 + L^d\nu_2(L\cdot, L^2) = A_2 f_0^* + R_L^0 g_2 + L^d\nu_2(L\cdot)$$

e somando e subtraindo $\hat{\nu_2}(0)f_0^*$ ao lado direito da igualdade acima, obtemos

$$f_3 = A_3 f_0^* + g_3,$$

com $A_3 = A_2 + \widehat{\nu_2}(0)$ e

$$g_3 = R_L^0 g_2 + L^d \nu_2(L\cdot) - \widehat{\nu_2}(0) f_0^*$$

e com isso, temos novamente, $\widehat{g_3}(0) = 0$. A norma de $g_3$ é estimada como anteriormente e assim, como $\widehat{g_2}(0) = 0$, do lema da contração e das estimativas para a norma de $\nu_2$,

$$\|g_3\| \leq \|R_L^0 g_2\| + \|L^d \nu_2(L\cdot) - \hat{\nu_2}(0) f_0^*\| \leq \frac{C}{L}\|g_2\| + L^{2(d+2-dn)} L^q (1+K_q) C_L \|f_2\|^2.$$

Agora, tomando $L$ satisfazendo (5.11) e $f_0$ satisfazendo (5.12), de (5.18) e (5.19) temos

$$\begin{aligned} \|g_3\| &\leq \frac{C}{L}\frac{1}{L^{2(1-\delta)}}\|f_0\| + L^{2(d+2-dn)} L^q (1+K_q) C_L D_2^2 \|f_0\|^2 \\ &= \frac{1}{L^{3(1-\delta)}}\left[\frac{C}{L^\delta} + L^{3(1-\delta)} L^{2[(1-n)d+2]+q}(1+K_q) C_L D_2^2 \|f_0\|\right]\|f_0\|. \end{aligned}$$

Como $L > [2C(1+K_q)]^{\frac{1}{\delta}}$, tomando $f_0$ tal que

$$L^{3(1-\delta)} L^{2[(1-n)d+2]+q}(1+K_q) C_L D_2^2 \|f_0\| < \frac{1}{2}, \tag{5.22}$$

obtemos

$$\|g_3\| \leq \frac{1}{L^{3(1-\delta)}}\|f_0\|. \tag{5.23}$$

Finalmente, como

$$|A_3 - A_2| = |\widehat{\nu_2}(0)| \leq \|\nu_2\| \leq C_L |\lambda_2| \|f_2\|^2,$$

temos

$$\begin{aligned} \|f_3\| &\leq \|g_3\| + \|[(A_3 - A_2) + (A_2 - A_1) + (A_1 - A_0) + A_0] f_0^*\| \\ &\leq \frac{1}{L^{3(1-\delta)}}\|f_0\| + K_q\left[C_L|\lambda_2|\|f_2\|^2 + C_L|\lambda_1|\|f_1\|^2 + C_L\|f_0\|^2 + \|f_0\|\right] \\ &\leq D_3\|f_0\|, \end{aligned}$$

em que

$$D_3 = \frac{1}{L^{3(1-\delta)}} + K_q\left[C_L L^{2(d+2-dn)} D_2^2 \|f_0\| + C_L L^{d+2-dn} D_1^2 \|f_0\| + C_L\|f_0\| + 1\right]. \tag{5.24}$$

## 5.2 Indução

Os cálculos na seção anterior já são suficientes para percebermos o comportamento da sequência de dados iniciais. Porém, todas as contas foram feitas formalmente e precisamos garantir de fato que a solução única existe em cada etapa do processo para que o operador fique bem definido e possamos iterar o procedimento. Justamente para isso foi que obtivemos as estimativas para cada dado inicial na seção anterior, $f_1$, $f_2$ e $f_3$, em função da norma do dado inicial do problema original, $f_0$. Se conseguirmos garantir que $\|f_k\| < D\|f_0\|$ (em que $D$ é uma constante) e tomarmos $f_0$ suficientemente pequeno, então garantiremos que os dados iniciais de cada $k$-ésimo problema também são pequenos de forma a garantir a existência e unicidade da solução de cada PVI no processo. Entretanto, para obter essa estimativa, devido à decomposição dos dados iniciais descritos na seção anterior, como $f_k = A_k f_0^* + g_k$, precisaremos ao mesmo tempo estimar as normas de $g_k$ e ainda controlar a convergência da sequência $(A_k)$.

O passo indutivo será feito, portanto, da seguinte forma: Dados $L > 1$, $\lambda \in [-1, 1]$ e $n > 1 + 2/d$, observamos inicialmente que, se o dado inicial $f$ for tal que $f \in B_q$ e $\|f\| < \epsilon$, para algum $\epsilon$ suficientemente pequeno, então as hipóteses do Teorema de Existência e Unicidade 4.2 estarão satisfeitas e o PVI (5.1) terá uma única solução $u(x, t)$, com $t \in [1, L^2]$. Além disto, mostraremos abaixo que as contribuições do termo não-linear $u^n$ serão contraídas à medida que iteramos o procedimento. Para isso, defina, para cada $k = 0, 1, 2, \cdots$, $\lambda_k = L^{k(d+2-nd)}\lambda$ e considere a sequência de problemas de valor inicial

$$\begin{cases} u_t = \Delta u + \lambda_k u^n, t \in [1, L^2], x \in \mathbb{R}^d, \\ u(\cdot, 1) = f_k, \ f_k \in B_q, \ q > d. \end{cases} \tag{5.25}$$

Note que, para cada $k \in \{0, 1, 2, \cdots\}$, como $L > 1$, $d + 2 - nd < 0$ e $|\lambda| \leq 1$, então, $|\lambda_k| \leq 1$. Assim, tomando $\epsilon$ como no Teorema 4.2, temos que, para todo $k = 0, 1, 2...$, se $\|f_k\| < \epsilon$, então existe uma única solução em $B_{f_k}$ para o P.V.I. (5.25), para todo $t \in [1, L^2]$, dada por

$$u_k(x, t) = u_{f_k}(x, t) + \nu_k(x, t), \tag{5.26}$$

em que $u_{f_k}$ é a solução da equação do calor linear com dado inicial $f_k$ e

$$\nu_k(x, t) = \lambda_k \int_0^{t-1} \left[ \frac{1}{(4\pi s)^{d/2}} \int e^{\frac{-|x-y|^2}{4s}} u_k^n(y, t-s) dy \right] ds = \lambda_k N(u_k)(x, t). \tag{5.27}$$

Definimos, então, o operador Grupo de Renormalização para a equação não-linear da seguinte maneira:

$$\left(R_{L,k}f_k\right)(x) \equiv L^d u_k(Lx,L^2) \equiv L^d u_{f_k}(Lx,L^2) + L^d \nu_k(Lx) = R_L^0 f_k(x) + L^d \nu_k(Lx,L^2), \quad (5.28)$$

em que $R_L^0$ é o operador linear definido em (3.9), e definimos

$$f_{k+1}(x) = L^d u_k(Lx,L^2) = R_{L,k}f_k(x). \quad (5.29)$$

Motivados pelo processo iterativo descrito na seção anterior, mostraremos que todos os dados iniciais $f_k$ definidos em (5.29) podem ser escritos como uma soma de um múltiplo da distribuição gaussiana com uma aplicação $g_k$ cuja transformada de Fourier se anula na origem. Além disso, obteremos estimativas como as obtidas na seção anterior. Para isso, considere $L_0$ dado no Lema da Contração, $f_0^*$ dada por (1.2) e a constante $K_q$ dada por (3.14).

**Lema 5.1** *Dados $k_0 \in \mathbb{N}$, $q > d$, $L > L_0$, $\lambda \in [-1,1]$ e $n > 1 + 2/d$, considere a sequência de P.V.I. (5.25) de forma que $f_{k+1}$ dada por (5.29) esteja bem definida para $k = 0, 1, \ldots, k_0$. Então, existem constantes $A_k$ e funções $g_k \in B_q$ com $\widehat{g_k}(0) = 0$ tais que, para $k = 0, 1, \ldots, k_0$,*

$$f_0 = A_0 f_0^* + g_0, \quad f_{k+1} = A_{k+1} f_0^* + g_{k+1}, \quad (5.30)$$

$$|A_{k+1} - A_k| \leq \frac{C_L}{L^{k(dn-d-2)}} \|f_k\|^2, \quad (5.31)$$

*e*

$$\|g_{k+1}\| \leq \frac{C}{L}\|g_k\| + \frac{E_L}{L^{k(nd-d-2)}} \|f_k\|^2, \quad (5.32)$$

*sendo $C_L$ a constante dada por (4.19) e $E_L = (L^q + K_q)C_L$.*

*Prova:* Primeiramente, demonstraremos (5.30) de maneira indutiva. O primeiro passo de indução foi obtido em (5.8). Agora suponha válida (5.30) com $k = 0, \ldots, j-1$, sendo $j \leq k_0$. Provaremos que esta estimativa ainda vale quando $k = j$. Usando (5.30) com $k = j-1$ e a representação (5.28), obtemos

$$f_{j+1}(x) = A_j f_0^*(x) + R_L^0 g_j(x) + L^d \nu_j(Lx). \quad (5.33)$$

Definindo

$$A_{j+1} \equiv A_j + \widehat{\nu_j}(0) \tag{5.34}$$

e

$$g_{j+1} \equiv R^0_L g_j + L^d \nu_j(L\cdot) - \widehat{\nu_j}(0) f^*_0, \tag{5.35}$$

podemos reescrever (5.33) como $f_{j+1} = A_{j+1} f^*_0 + g_{j+1}$. Pela hipótese de indução, $\widehat{g_j}(0) = 0$ e assim, da definição (5.35), como as transformadas de Fourier de $R^0_L g_j$ e $f^*_0$ na origem são respectivamente iguais a $\widehat{g_j}(0) = 0$ e 1, obtemos $\widehat{g_{j+1}}(0) = 0$, o que prova (5.30) para $k = 0, 1, \ldots, k_0$.

Como $n > 2$ e $\|f_k\| < \epsilon$, as estimativas obtidas no Lema 4.1 são válidas, de forma que $\|N(u_k)\| \leq C_L \|f_k\|^2$ e assim:

$$\|\nu_k\| \leq |\lambda_k| C_L \|f_k\|^2 \leq \frac{C_L}{L^{k(nd-d-2)}} \|f_k\|^2, \tag{5.36}$$

já que $|\lambda| \leq 1$. Agora, note que $\widehat{g_{k+1}}(0) = 0$, e de (5.34) e (5.36),

$$|A_{k+1} - A_k| = |\widehat{\nu_k}(0)| \leq \|\nu_k\| \leq \frac{C_L}{L^{k(nd-d-2)}} \|f_k\|^2,$$

de onde segue a desigualdade (5.31).

Observe agora que, assim como fizemos nos primeiros passos na seção anterior, valem também as desigualdades

$$\left| \widehat{L^d \nu_k(Lx)}(w) \right| = \left| \hat{\nu}_k \left( \frac{w}{L} \right) \right| \leq |\lambda_k| \frac{L^q K_n (L^2 - 1)}{1 + |w|^q} \|u_k\|^n_L,$$

e, de (4.17),

$$\left| \nabla \widehat{L^d \nu_k(Lx)}(w) \right| = \left| \nabla \hat{\nu}_k \left( \frac{w}{L} \right) \right| \leq |\lambda_k| d L^q \left[ 4 + (L^2 - 1) + 2(L^2 - 1)^2 \right] \frac{K_n}{1 + |w|^q} \|u_k\|^n_L$$

e como $\|u_k\|_L \leq (1 + d + 2d\sqrt{L^2 - 1}) \|f_k\|$ e $\|f_k\| < \epsilon < \left[ 1 + d + 2d\sqrt{L^2 - 1} \right]^{-1}$, temos

$$\|L^d \nu_k(L\cdot)\| = \frac{L^q C_L}{L^{k(nd-d-2)}} \|f_k\|^2. \tag{5.37}$$

Como $\|f^*_0\| \leq K_q$, de (5.36) e (5.37),

$$\|L^d \nu_k(L\cdot) - \widehat{\nu_k}(0) f^*_0\| \leq (L^q + K_q) C_L \frac{\|f_k\|^2}{L^{k(nd-d-2)}} = E_L \frac{\|f_k\|^2}{L^{k(nd-d-2)}} \tag{5.38}$$

em que $E_L = (L^q + K_q)C_L$. Logo, como $\widehat{g_k}(0) = 0$ e $L > L_0$, pelo lema da contração e por (5.38), como $\|g_{k+1}\| \leq \|R_L^0 g_k\| + \|L^d \nu_k(L\cdot) - \widehat{\nu_k}(0) f_0^*\|$, obtemos (5.32), o que finaliza a demonstração. ∎

Os próximos dois lemas servirão para garantir a possibilidade de se tomar $f_0$ suficientemente pequena de forma que os dados iniciais de todos os problemas obtidos nas iterações fiquem também pequenos e portanto, que haja uma única solução para cada um deles, no intervalo de tempo de 1 a $L^2$.

**Lema 5.2** *Dados $\delta \in (0,1)$ e $L > L_\delta = \max\left\{L_0, [2C(1+K_q)]^{\frac{1}{\delta}}\right\}$ em que $C$ e $L_0$ são as constantes dadas pelo lema da contração, seja*

$$D \equiv 1 + K_q \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{L^{(1-\delta)k}} < \infty. \tag{5.39}$$

*Suponha que $f_0$ seja tal que*

$$E_L D^2 \|f_0\| < \frac{1}{2L^{(1-\delta)}}. \tag{5.40}$$

*Então,*

$$\frac{C_L D^2 \|f_0\|}{L^{k(nd-d-2)}} < \frac{E_L D^2 \|f_0\|}{L^{k(nd-d-2)}} < \frac{1}{2L^{(1-\delta)}}, \forall k = 0, 1, 2, \cdots \tag{5.41}$$

*Prova:* Como $n \in \mathbb{N}$ e $n > 1 + \frac{2}{d}$, então $nd - d - 2 \geq 1$ e com isso, $L^{nd-d-2} > L^{1-\delta}$. Como $E_L = (L^q + K_q)C_L > C_L$, temos que

$$\frac{C_L D^2 \|f_0\|}{L^{k(nd-d-2)}} < \frac{E_L D^2 \|f_0\|}{L^{k(nd-d-2)}} < \frac{E_L D^2 \|f_0\|}{L^{k(1-\delta)}} < \frac{1}{2L^{(1-\delta)}}.$$

∎

**Lema 5.3** *Suponha válida a desigualdade (5.40). Seja $D_1 \equiv \frac{1}{L^{(1-\delta)}} + K_q(1 + \|f_0\| C_L)$ e defina*

$$D_{k+1} = \frac{1}{L^{(1-\delta)(k+1)}} + K_q \left(1 + \|f_0\| C_L + \frac{C_L D_1^2 \|f_0\|}{L^{(nd-d-2)}} + \cdots + \frac{C_L D_k^2 \|f_0\|}{L^{k(nd-d-2)}}\right).$$

*Então,*

$$D_{k+1} < D, \forall k = 0, 1, 2, \cdots$$

*Prova:* Usaremos indução para provar o lema. Se $k = 0$, então por (5.40), temos que

$$D_1 = \frac{1}{L^{(1-\delta)}} + K_q(1 + \|f_0\|E_L) \leq \frac{1}{L^{(1-\delta)}} + K_q\left(1 + \frac{1}{2L^{1-\delta}}\right) \leq 1 + K_q\left(1 + \frac{1}{L^{1-\delta}}\right) < D.$$

Suponha agora $D_{k+1} < D$, para todo $k \in \{0, 1, \cdots m-1\}$. Como $K_q > 1$ temos que $D_k > 1$, e assim, pela definição de $D_{k+1}$, pela hipótese de indução e por (5.41), segue que

$$D_{m+1} \leq 1 + K_q\left(1 + \frac{1}{L^{1-\delta}} + \cdots + \frac{1}{L^{m(1-\delta)}}\right) < D,$$

o que demonstra o lema. ∎

De posse dos lemas anteriores, mostraremos o resultado a seguir, que irá fornecer condições para que cada $f_k$ seja pequena, bastando para isso tomarmos $f_0$ suficientemente pequena. Além disso, fornecerá uma estimativa para a norma de $g_k$ que garantirá sua convergência para zero. Antes de enunciá-lo, precisamos de algumas definições.

Considere o problema de valor inicial (4.1), com $\lambda \in [-1, 1]$ e $n > 1 + \frac{2}{d}$ e defina $f_0 \equiv f$. Além disso, dado $\delta \in (0, 1)$, defina

$$L_\delta \equiv \max\{L_0, [2C(1 + K_q)]^{\frac{1}{\delta}}\}, \tag{5.42}$$

em que as constantes $C$ e $L_0$ são dadas no lema da contração e $K_q$ é dada em (3.14).

**Lema 5.4** *Dados $\delta \in (0, 1)$ e $L > L_\delta$, existe $\bar{\epsilon} > 0$ tal que, se $\|f_0\| < \bar{\epsilon}$, então $f_k$ dada por (5.29) está bem definida para todo $k \geq 1$,*

$$\|f_k\| \leq D_k\|f_0\|, \tag{5.43}$$

*e, se $g_k$ é dada pela decomposição (5.30),*

$$\|g_k\| \leq \frac{\|f_0\|}{L^{k(1-\delta)}}, \tag{5.44}$$

*para todo $k \in \{0, 1, 2, \cdots\}$. Em particular, $\|f_k\| < \epsilon$, $\forall k$, em que $\epsilon$ é dado pelo Teorema 4.2.*

*Prova:* Inicialmente, para cada $L > L_\delta$, defina

$$\bar{\epsilon} = \min\left\{\frac{\epsilon}{D}, \frac{1}{2E_L D^2 L^{1-\delta}}\right\}. \tag{5.45}$$

em que $\epsilon$ é dado pelo Teorema 4.2, $D$ é dada por (5.39) e $E_L = (L^q + K_q)C_L$, sendo $C_L$ a constante dada por (4.19). Note que, como $D > 1$, pela definição de $\bar{\epsilon}$, se $\|f_0\| < \bar{\epsilon}$, então

$$\|f_0\| < D\|f_0\| < \epsilon \quad \text{e} \quad E_L\|f_0\| < E_L D^2 \|f_0\| < \frac{1}{2L^{1-\delta}}. \tag{5.46}$$

Faremos a demonstração por indução. Se $k = 1$, como $\|f_0\| < \epsilon$, então pelo Lema 5.1, $f_1 = A_1 f_0^* + g_1$ está bem definida. Além disso, por (5.46), obtemos (5.13) e (5.14), o que demonstra o teorema para o caso $k = 1$.

Agora, suponha (5.43) e (5.44) válidas para todo $k \in \{1, 2, \cdots, m\}$, para um certo natural $m > 1$. Pelo Lema 5.3, $D_k < D$, para todo $k$. Assim, por (5.46) e pela hipótese de indução, obtemos

$$\|f_k\| \leq D\|f_0\| < \epsilon, \forall k \in \{1, 2, \cdots, m\}.$$

Novamente pelo Lema 5.1, $f_{m+1} = A_{m+1} f_0^* + g_{m+1}$ está bem definida e valem (5.31) e (5.32) com $k = m$. Desse modo, pela hipótese de indução, temos que

$$\|g_{m+1}\| \leq \frac{C}{L} \frac{\|f_0\|}{L^{(1-\delta)m}} + \frac{E_L D_m^2 \|f_0\|^2}{L^{(nd-d-2)m}} = \frac{1}{L^{(1-\delta)(m+1)}} \left[ \frac{C}{L^\delta} + \frac{L^{(1-\delta)(m+1)}}{L^{(nd-d-2)m}} E_L D_m^2 \|f_0\| \right] \|f_0\|.$$

Assim, de (5.46) e do Lema 5.2, como $\frac{C}{L^\delta} < \frac{1}{2}$ e $D_m < D$, obtemos

$$\|g_{m+1}\| \leq \frac{\|f_0\|}{L^{(1-\delta)(m+1)}}. \tag{5.47}$$

Como $f_{m+1} = A_{m+1} f_0^* + g_{m+1}$, de (5.47), temos

$$\|f_{m+1}\| \leq \frac{\|f_0\|}{L^{(1-\delta)(m+1)}} + K_q \left[ \sum_{k=0}^{m} |A_{k+1} - A_k| + |A_0| \right].$$

Portanto, de (5.31) e (5.43) para $k \in \{1, 2, \cdots, m\}$, e como $|A_0| = |\widehat{f}_0(0)| \leq \|f_0\|$, temos

$$\|f_{m+1}\| \leq \frac{\|f_0\|}{L^{(1-\delta)(m+1)}} + K_q \left[ \sum_{k=1}^{m} \frac{C_L D_k^2 \|f_0\|^2}{L^{k(nd-d-2)}} + C_L \|f_0\|^2 + \|f_0\| \right] = D_{m+1} \|f_0\|.$$

Por fim, note que por (5.46), temos que $\|f_{m+1}\| \leq D_{m+1}\|f_0\| < D\|f_0\| < \epsilon$, o que finaliza a demonstração. ∎

## 5.3 O Teorema da Existência e Unicidade global

Com base nos resultados obtidos até aqui, apresentaremos agora a prova do teorema da existência e unicidade global para soluções do P.V.I. (4.1). Basicamente, mostraremos que as soluções obtidas (pelo Teorema 4.2) para cada $t \in [L^{2k}, L^{2k+2}]$ podem ser "coladas", obtendo assim a existência de solução para todo $t > 1$. Além disso, mostraremos que a contribuição do termo não-linear da equação do calor é pequena se $n > 1 + \frac{2}{d}$ e que a sequência $(A_k)$ é convergente. Esses fatos nos permitirão concluir que o comportamento assintótico da solução do P.V.I. (4.1) é análogo ao obtido para o caso linear.

Para isso, considere o espaço

$$B^{(L^{k+1})} = \left\{u : \mathbb{R}^d \times [L^{2k}, L^{2(k+1)}] \to \mathbb{R}; u(\cdot, t) \in B_q, \forall t \in [L^{2k}, L^{2(k+1)}]\right\} \tag{5.48}$$

com a norma

$$\|u\|_{L^{k+1}} = \sup_{t \in [L^{2k}, L^{2(k+1)}]} \|u(\cdot, t)\|.$$

Defina então, para cada $k = 0, 1, 2, \cdots$,

$$B_{h_k} = \{u \in B^{L^{k+1}}; \|u - u_{h_k}\|_{L^{k+1}} \leq \|h_k\|\}, \tag{5.49}$$

em que

$$h_0 = f \text{ e } h_{k+1} = L^{-dk} u(L^{-k}, L^2) \tag{5.50}$$

e $u_{h_k}$ é a solução do P.V.I. (5.25) com $\lambda_k = 0$ e dado inicial $h_k$. Finalmente, defina

$$B^{(\infty)} = \{u : \mathbb{R}^d \times [1, \infty) \to \mathbb{R}; u(\cdot, t) \in B_q, \forall t \geq 1 \text{ e } \|u\|_\infty < \infty\},$$

com $\|u\|_\infty = \sup\limits_{t \geq 1} \|u(\cdot, t)\|$ e

$$B \equiv \{u \in B^{(\infty)}; \|u - u_{h_k}\|_{L^{k+1}} \leq \|h_k\|, \forall k\}. \tag{5.51}$$

**Teorema 5.1 (Existência global e unicidade da solução)** *Dados $n > 1 + \frac{2}{d}$, $\lambda \in [-1, 1]$, $\delta \in (0, 1)$ e $L > L_\delta$, se $\|f\| < \bar{\epsilon}$, com $\bar{\epsilon}$ dado por (5.45), então o P.V.I. (4.1) possui uma única solução em $B$.*

*Prova:* Do Lema 5.4, como $f_0 \equiv f$ e $\|f\| < \bar{\epsilon}$, então $\|f_k\| < \epsilon_k$ para todo $k \in \{0, 1, \cdots\}$, e pelo Teorema 4.2, existe uma única solução $u_k \in B_{f_k}$ do problema (5.25), com $t \in [1, L^2]$.

Defina $u(x,t) = L^{-dk} u_k(L^{-k}x, L^{-2k}t)$, para todo $t \in [L^{2k}, L^{2k+2}]$ e considere a sequência $(h_k)$ definida em (5.50). Note que para $t \in [1, L^2]$, temos $u(x,t) = u_0(x,t) \in B_{h_0} = B_f$. Agora, se $t \in [L^2, L^4]$, então $u(x,t) = L^{-d} u_1(L^{-1}x, L^{-2}t)$, e assim $u(x, L^2) = L^{-d} u_1(L^{-1}x, 1)$. Lembrando que $f_k$ é dada por (5.29), temos

$$f_1(y) = u_1(y, 1) = R_{L,0} f_0(y) = L^d u_0(Ly, L^2).$$

Agora, tome $y = L^{-1}x$ e $s = L^{-2}t$. Então, $u_1(y,s)$ será solução de (5.6) em $B_{f_1}$ e

$$u(x, L^2) = L^{-d} u_1(y, 1) = u_0(x, L^2) = h_1(x).$$

Obtemos daí que, para $t \in [L^2, L^4]$, $u(x,t) \in B_{h_1}$. Em geral, para cada $k = 1, 2, \cdots$, temos

$$u(x, L^{2k}) = L^{-dk} u_k(L^{-k}x, 1)$$

e, fazendo $y = L^{-k}x$, como $f_k(y) = u_k(y,1) = L^d u_{k-1}(Ly, L^2)$, então

$$u(x, L^{2k}) = L^{-dk} u_k(y, 1) = L^{-d(k-1)} u_{k-1}(L^{-(k-1)}x, L^2) = h_k(x)$$

e assim, $u(x,t) \in B_{h_k}$ para todo $t \in [L^{2k}, L^{2k+2}]$. Portanto, tomando $y = L^{-k}x$ e $s = L^{-2k}t$, temos que $u_k(y,s)$ é a solução única do P.V.I. (5.25) em $B_{h_k}$, para cada $k = 0, 1, 2, \cdots$.

Agora, para cada intervalo $[L^{2k}, L^{2k+2}]$, considere um novo intervalo $I_\epsilon = [L^{2k} - \frac{\epsilon}{2}, L^{2k} + \frac{\epsilon}{2}]$, com $\epsilon > 0$ dado pelo Teorema 4.2. Assim, ainda pelo Teorema 4.2, fazendo um reescalonamento adequado, temos que existe uma única solução $\overline{u}$ definida em $I_\epsilon$. Mas, novamente pelo teorema de existência e unicidade, as soluções $L^{-d(k-1)} u_{k-1}(L^{-(k-1)}x, L^{-2(k-1)}t)$ e $L^{-dk} u_k(L^{-k}x, L^{-2k}t)$, coincidem com $\overline{u}$ em $[L^{2k} - \frac{\epsilon}{2}, L^{2k}]$ e $[L^{2k}, L^{2k} + \frac{\epsilon}{2}]$, respectivamente. Logo, a função $u(x,t)$ definida acima é solução do P.V.I. (4.1) em $B$.

∎

**Lema 5.5** *Dados $\delta \in (0,1)$ e $L > L_\delta$, se $\|f_0\| < \bar{\epsilon}$, então o operador RG definido em (5.28) satisfaz a propriedade de semi-grupo, isto é,*

$$R_{L^k,0} = R_{L,k-1} \circ \cdots \circ R_{L,1} \circ R_{L,0}, \ \forall k = 1, 2, ... \tag{5.52}$$

*Além disso,*

$$\|L^{dk}u(L^k\cdot, L^{2k}) - A_k f_0^*\| \le \frac{\|f_0\|}{L^{(1-\delta)k}}, \tag{5.53}$$

*para todo* $k = 1, 2, 3, \cdots$, *com* $A_k$ *as constantes em (5.30).*

*Prova:* Para provar a propriedade de semi-grupo usaremos indução. Pelo que vimos anteriormente, existe uma única $u \in B$ solução do P.V.I. (4.1), definida portanto para todo $t \ge 1$. Desse modo, $u_1(x,t) = L^d u(Lx, L^2 t)$ está bem definida em $t \in [1, L^2]$ e é solução do P.V.I. 4.1 com dado inicial $u_1(x,1) = L^d u(Lx, L^2)$. Assim,

$$R_{L^2,0}(x) = L^{2d}u(L^2x, L^4) = L^d u_1(Lx, L^2) = R_{L,1}u_1(x,1) = R_{L,1}L^d u(Lx, L^2) = (R_{L,1} \circ R_{L,0})f(x).$$

Suponha agora que (5.52) seja válida para algum $k > 2$. Então, como $u(x,t) = L^{-kd}u_k(L^{-k}x, L^{-2k}t)$ com $t \in [L^{2k}, L^{2k+2}]$, temos

$$\begin{aligned} R_{L^{k+1},0}(x) &= L^{kd+d}u(L^{k+1}x, L^{2k+2}) = L^d u_k(Lx, L^2) \\ &= R_{L,k}u_k(x,1) = R_{L,k}L^{kd}u(L^kx, L^{2k}) = R_{L,k} \circ R_{L^k,0}f(x). \end{aligned}$$

Assim, usando a hipótese de indução, obtemos

$$R_{L^{k+1},0}(x) = R_{L,k}\left(R_{L,k-1} \circ \cdots \circ R_{L,0}f\right)(x),$$

o que prova (5.52).

Agora, de (5.29) e da propriedade de semi-grupo,

$$f_k(x) = R_{L,k-1}f_{k-1}(x) = (R_{L,k-1} \circ \cdots \circ R_{L,0})f(x) = R_{L^k,0}f(x) = L^{dk}u(L^kx, L^{2k})$$

e, pelos Lemas (5.1) e (5.4), temos $f_k = A_k f_0^* + g_k$, com $g_k$ satisfazendo (5.44). Assim,

$$\|L^{dk}u(L^k\cdot, L^{2k}) - A_k f_0^*\| = \|f_k - A_k f_0^*\| = \|g_k\| \le \frac{\|f_0\|}{L^{(1-\delta)k}}.$$

∎

**Lema 5.6** *Dados $\delta \in (0,1)$ e $L > L_\delta$, se $\|f_0\| < \bar{\epsilon}$, então a sequência $(A_k)$ formada pelas constantes em (5.30) é de Cauchy. Mais especificamente, existe uma constante $A$ tal que*

$$|A_k - A| \leq \frac{L^{-(nd-d-2)k}}{2L^{1-\delta}(1-L^{-(nd-d-2)})}\|f_0\|.$$

*Além disso, existe uma constante $C = C(L,n,q,d,\delta)$ tal que*

$$\|L^{dk}u(L^k\cdot, L^{2k}) - Af_0^*\| \leq \frac{C}{L^{(1-\delta)k}}\|f_0\|,$$

*para todo $k = 1,2,3,\cdots$*

*Prova:* Como $\|f_0\| < \bar{\epsilon}$, segue dos Lemas 5.1 e 5.4 que $|A_{k+1} - A_k| \leq C_L L^{-k(dn-d-2)}\|f_k\|^2$ e $\|f_k\| < D_k\|f_0\|$. Além disso, como $f_0$ satisfaz (5.40), segue do Lema 5.3 que $D_k < D$ para todo $k \in \{0,1,\cdots\}$. Portanto,

$$|A_{k+1} - A_k| \leq \frac{C_L}{L^{k(dn-d-2)}}D^2\|f_0\|^2.$$

Logo, $(A_k)$ é de Cauchy e, assim, existe uma constante $A \in \mathbb{R}$ tal que $A_k \to A$. Assim, usando a desigualdade triangular e a estimativa acima,

$$\begin{aligned} |A_k - A| &= \lim_{l\to\infty}|A_k - A_{k+l}| \leq \lim_{l\to\infty}\left(|A_{k+l} - A_{k+l-1}| + |A_{k+l-1} - A_{k+l-2}| + \cdots + |A_{k+1} - A_k|\right) \\ &\leq C_L D^2\|f_0\|^2 \lim_{l\to\infty}\sum_{j=0}^{l-1}\left(\frac{1}{L^{nd-d-2}}\right)^{k+j}. \end{aligned}$$

Além disso, como $E_L = (L^q + K_q)C_L > C_L$, segue da definição (5.45) de $\bar{\epsilon}$ que

$$C_L D^2\|f_0\| < E_L D^2\|f_0\| < \frac{1}{2L^{1-\delta}}.$$

Logo,

$$|A_k - A| \leq \frac{\|f_0\|}{2L^{1-\delta}}\lim_{l\to\infty}\sum_{j=0}^{l-1}\left(\frac{1}{L^{nd-d-2}}\right)^{k+j} \leq \frac{L^{-(nd-d-2)k}}{2L^{1-\delta}(1-L^{-(nd-d-2)})}\|f_0\|.$$

Com isso, usando (5.53), obtemos

$$\begin{aligned} \|L^{dk}u(L^kx, L^{2k}) - Af_0^*\| &\leq \|L^{dk}u(L^kx, L^{2k}) - A_kf_0^*\| + |A_k - A|\|f_0^*\| \\ &\leq \frac{1}{L^{(1-\delta)k}}\left[1 + \frac{K_qL^{(1-\delta)k}L^{-k(nd-d-2)}}{2L^{1-\delta}(1-L^{-(nd-d-2)})}\right]\|f_0\|. \end{aligned}$$

Como $n > 1 + \frac{2}{d}$, $L > 1$ e $\delta \in (0,1)$, temos que $L^{1-\delta}L^{-nd+d+2} < 1$ e assim, tomando

$$C = C(L,n,q,d,\delta) = 1 + \frac{K_q}{2L^{1-\delta}(1-L^{-(nd-d-2)})},$$

obtemos (5.54) e o lema está provado. ∎

## 5.4 O comportamento assintótico

Vimos até aqui que a desigualdade (5.54) será verdadeira sempre que o dado inicial $f \equiv f_0$ for suficientemente pequeno. Nesse caso, para quaisquer $k \in \{1, 2, 3, \cdots\}$ e $L > L_\delta$, tomando $t = L^{2k}$, obtemos

$$\|t^{\frac{d}{2}} u(t^{\frac{1}{2}} \cdot, t) - A f_0^*\| \leq \frac{C}{t^{\frac{1-\delta}{2}}} \|f\|.$$

Procedendo como no Teorema 3.2, mostraremos que esse resultado continua válido para todo $t > L_\delta^2$. Especificamente, demonstraremos o seguinte teorema:

**Teorema 5.2** *Considere o P.V.I. (4.1) com $\lambda \in [-1, 1]$ e $n > 1 + \frac{2}{d}$ e seja $\delta \in (0, 1)$. Então, se $f \in B_q$, $\|f\| < \bar{\epsilon}$, com $\bar{\epsilon}$ dado por (5.45), existem constantes $A = A(f, n)$ e $C = C(L, n, q, d, \delta)$ tais que*

$$\|t^{\frac{d}{2}} u(t^{\frac{1}{2}} \cdot, t) - A f_0^*\| \leq \frac{C}{t^{\frac{1-\delta}{2}}} \|f\|,$$

*para todo $t > L_\delta^2$.*

*Prova:* Já vimos que (5.54) é válida para qualquer $t$ do tipo $L^{2k}$. Assim, dado $L > L_\delta$, suponha agora $t \in (L^{2n_0}, L^{2n_0+2})$. Assim, existe $\tau$ tal que $t = \tau L^{2n_0}$, com $\tau \in (1, L^2)$ e desse modo, tomando $L_1 = \sqrt{\tau} L^{n_0}$, temos que $L_1 > L_\delta$ e repetindo todos os procedimentos utilizados para provar (5.54) podemos ver que os mesmos valem para $L_1$, de onde segue

$$\|\sqrt{t} u(\sqrt{t} x, t) - A f_0^*\| \leq \frac{C}{t^{\frac{1-\delta}{2}}} \|f\|.$$

Logo, a estimativa (5.54) é válida também para $t \in (L^{2k}, L^{2k+2})$, sempre que $L > L_\delta$. Portanto, (5.54) é válida para todo $t > L_\delta^2$. ∎

# Apêndice A

# Coordenadas esféricas em $d$-dimensões

Uma informação importante nesse trabalho diz respeito à convergência da integral $\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{1+|x|^q} dx$, sempre que $q > d$. Neste apêndice, mostraremos a razão da restrição $q > d$. Antes porém, estenderemos o conceito de coordenadas esféricas (conhecida para dimensão $d = 3$) para dimensões $d > 3$ e calcularemos o determinante jacobiano do difeomorfismo $\phi$ da mudança de coordenadas. Essa extensão será necessária uma vez que ao utilizaremos o Teorema da Mudança de Variáveis [12] para o cálculo da integral em questão.

Considere inicialmente um vetor $\vec{x} = (x_1, \cdots, x_d) \in \mathbb{R}^d$. A primeira coordenada esférica é obtida projetando-se o vetor $\vec{x}$ sobre o eixo $Ox_1$, na direção do semi-plano superior, usando o ângulo $\theta_1$, com $0 < \theta_1 < \pi$, de $Ox_1$ a $\vec{x}$. Com isso, obtemos que $x_1 = |\vec{x}| \cos\theta_1$.

Projetando-se $\vec{x}$ sobre $x_1 = 0$, obtemos $r_1 = |\vec{x}| \sin\theta_1$. Agora, faremos o mesmo processo com o vetor $\vec{r_1}$, isto é, considere a projeção do vetor $\vec{r_1}$ sobre o eixo $Ox_2$, com um ângulo $\theta_2$, com $0 < \theta_2 < \pi$, de $Ox_2$ a $\vec{r_1}$, obtendo $x_2 = r_1 \cos\theta_2 = |\vec{x}| \sin\theta_1 \cos\theta_2$. Além disso, a projeção $\vec{r_2}$ de $\vec{r_1}$ sobre $x_2 = 0$, nos fornece $r_2 = r_1 \sin\theta_2 = |\vec{x}| \sin\theta_1 \sin\theta_2$ e, projetando-a na direção de $Ox_3$, usando um ângulo $\theta_3$, onde $0 < \theta_3 < \pi$, de $Ox_3$ a $\vec{r_2}$, teremos $x_3 = |\vec{x}| \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cos\theta_3$. Continuando esse processo, chegamos a

$$x_4 = |\vec{x}| \sin\theta_1 \sin\theta_2 \sin\theta_3 \cos\theta_4, \ \cdots, \ x_{d-2} = |\vec{x}| \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdots \sin\theta_{d-3} \cos\theta_{d-2}.$$

Assim, nos resta encontrar as coordenadas esféricas sobre os eixos $Ox_{d-1}$ e $Ox_d$. Para isso, procederemos analogamente às coordenadas polares em $\mathbb{R}^2$. Pelos passos acima vemos que $r_{d-2} = |\vec{x}| \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdots \sin\theta_{d-2}$, de onde segue-se que:

$$x_{d-1} = r_{d-2}\cos\theta_{d-1} = |\vec{x}| \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdots \sin\theta_{d-2}\cos\theta_{d-1}$$

e,

$$x_d = r_{d-2}\sin\theta_{d-1} = |\vec{x}| \sin\theta_1 \sin\theta_2 \cdots \sin\theta_{d-2}\sin\theta_{d-1},$$

em que $0 < \theta_{d-1} < 2\pi$.

Agora defina $\phi : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}^d$, por $\phi\left(|\vec{x}|, \theta_1, \cdots, \theta_{d-1}\right) = (x_1, x_2, \cdots, x_d)$, isto é,

$$\phi\left(|\vec{x}|, \theta_1, \cdots, \theta_{d-1}\right) = \begin{pmatrix} |\vec{x}|\cos\theta_1 \\ |\vec{x}|\sin\theta_1\cos\theta_2 \\ \cdot \\ \cdot \\ \cdot \\ |\vec{x}|\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{d-2}\cos\theta_{d-1} \\ |\vec{x}|\sin\theta_1\cdots\sin\theta_{d-1} \end{pmatrix}. \tag{A.1}$$

Fazendo $r = |\vec{x}|$, afirmamos que, se $d \geq 3$, então,

$$\det J\phi = r^{d-1} A(\theta_1, \cdots, \theta_{d-2}), \tag{A.2}$$

em que $J\phi$ representa a matriz jacobiana de $\phi$ e $A(\theta_1, \cdots, \theta_{d-2})$ é uma função dependente dos ângulos $\theta_1, \cdots, \theta_{d-2}$ e independente de $r$.

Demonstraremos essa afirmação por indução. Para $d = 3$, temos que $\phi : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ é dada por $\phi(r, \theta_1, \theta_2) = (r\cos\theta_1, r\sin\theta_1\cos\theta_2, r\sin\theta_1\sin\theta_2)$ e o determinante de sua matriz jacobiana é

$$\det J\phi = r^2 \sin\theta_1 = r^2 A(\theta_1),$$

o que demonstra o caso $d = 3$.

Suponha agora a afirmação válida para algum $k > 3$. Mostraremos que ela também é válida para $k + 1$. Para isso, considere a função $\phi : \mathbb{R}^{k+1} \to \mathbb{R}^{k+1}$, dada por

$$\phi(r, \theta_1, \cdots, \theta_k) = (r\cos\theta_1, r\sin\theta_1\cos\theta_2, \cdots, r\sin\theta_1\sin\theta_2\cdots\sin\theta_{k-1}\cos\theta_k, r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_k).$$

Então, a jacobiana de $\phi$ é a matriz de ordem $k+1$:

$$J\phi = \begin{pmatrix} \cos\theta_1 & -r\sin\theta_1 & 0 & 0 & \cdots & 0 \\ \sin\theta_1\cos\theta_2 & r\cos\theta_1\cos\theta_2 & -r\sin\theta_1\sin\theta_2 & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & . & & . \\ . & . & . & . & & . \\ . & . & . & . & & . \\ . & . & . & . & & 0 \\ \sin\theta_1\cdots\cos\theta_{k-1} & . & . & . & & -r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_k \\ \sin\theta_1\cdots\sin\theta_k & . & . & . & & r\sin\theta_1\cdots\cos\theta_k \end{pmatrix}$$

Utilizando o conceito de cofator (veja [18], página 158) para calcular o determinante da matriz acima, temos que

$$\det J\phi = \cos\theta_1 \det(J\phi)_{-1,-1} + r\sin\theta_1 \det(J\phi)_{-1,-2},$$

em que $(J\phi)_{-i,-j}$ representa a matriz quadrada $(J\phi)$ sem a $i$-ésima linha e sem a $j$-ésima coluna, de ordem $k\times k$, ou seja,

$$(J\phi)_{-1,-1} = \begin{pmatrix} r\cos\theta_1\cos\theta_2 & -r\sin\theta_1\sin\theta_2 & 0 & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & . \\ . & . & . & \cdots & 0 \\ . & . & . & \cdots & -r\sin\theta_1\cdots\sin\theta_k \\ r\cos\theta_1\cdots\sin\theta_k & . & . & \cdots & r\sin\theta_1\cdots\cos\theta_k \end{pmatrix}_{k\times k}$$

Note que a primeira coluna da matriz $(J\phi)_{-1,-1}$ possui $r\cos\theta_1$ em todas as entradas e, as demais, possuem $\sin\theta_1$. Desse modo, usando as propriedades do determinante [18], obtemos

$$\det(J\phi)_{-1,-1} = r\cos\theta_1 \sin^{k-1}\theta_1 \det\overline{(J\phi)_{-1,-1}},$$

onde

$$\overline{(J\phi)_{-1,-1}} = \begin{pmatrix} \cos\theta_2 & -r\sin\theta_2 & 0 & \cdot & \cdot & \cdot & 0 \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & . \\ . & . & . & . & . & . & 0 \\ . & . & . & . & . & . & -r\sin\theta_2\cdots\sin\theta_k \\ \sin\theta_2\cdots\sin\theta_k & . & . & . & . & . & r\sin\theta_2\cdots\cos\theta_k \end{pmatrix}_{k\times k}$$

Mas, pela hipótese de indução, $\det(J\phi)_{-1,-1} = r\cos\theta_1 \sin^{k-1}\theta_1 \det\overline{(J\phi)_{-1,-1}} = r^k \cos\theta_1 \sin^{k-1}\theta_1 A(\theta_2, \cdots, \theta_{k-1})$.

De modo análogo, vemos que $\det(J\phi)_{-1,-2} = r^k \sin\theta_1 \sin^{k-1}\theta_1 A(\theta_2, \cdots, \theta_{k-1})$.

Portanto, $\det(J\phi) = r^k A(\theta_1, \theta_2, \cdots, \theta_{k-1})$. O que demonstra nossa afirmação. ∎

Com esses resultados é possível mostrar a integrabilidade da integral $\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{1+|x|^q} dx$, que é o objetivo desse apêndice.

## A.1 Integrabilidade de $(1 + |x|^q)^{-1}$

**Proposição A.1** *A integral $\int_{\mathbb{R}^d} \frac{1}{1+|x|^q} dx$ converge se, e somente se, $q > d$.*

*Prova:* Inicialmente, note que, se $d = 1$, então $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+|x|^q}$ converge desde que $q > 1$. De fato, como a integral $\int_{\mathbb{R}} |x|^{-q} dx$ converge para qualquer $q > 1$ e $(1 + |x|^q)^{-1} < |x|^{-q}$, então, $\int_{\mathbb{R}} \frac{dx}{1+|x|^q}$ também converge desde que $q > 1$.

Se $d = 2$, utilizando coordenadas polares, temos, pelo Teorema das Variáveis [12], que

$$\int_{\mathbb{R}^2} \frac{dx}{1 + |x|^q} = \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} \frac{dx_1 dx_2}{1 + |x|^q} = \int_0^{2\pi} \int_0^{\infty} \frac{r dr d\theta}{1 + r^q}.$$

Como, $\frac{r}{1+r^q} < \frac{1}{r^{q-1}}$ e como a integral $\int_{\mathbb{R}} \frac{dr}{r^{q-1}}$ converge se, e somente se, $q-1 > 1$, segue novamente que a integral $\int_{\mathbb{R}} \frac{rdr}{1+r^q}$ convergirá desde que $q > 2$ e portanto, $\int_{\mathbb{R}^2} \frac{dx}{1+|x|^q}$ converge para $q > 2$.

Por fim, se $d \geq 3$, utilizando (A.1) e (A.2), temos pelo Teorema da Mudança de Variáveis [12], que

$$\int_{\mathbb{R}^d} \frac{dx}{1 + |x|^q} = \int_0^{2\pi} \underbrace{\int_0^{\pi} \int_0^{\pi} \cdots \int_0^{\pi}}_{d-2 \text{ vezes}} \int_0^{\infty} \frac{r^{d-1} A(\theta_1, \cdots, \theta_{d-2})}{1 + r^q} dr d\theta_1 d\theta_2 \cdots d\theta_{\theta_{d-1}}.$$

Como $\frac{r^{d-1}}{1+r^q} < \frac{1}{r^{q+1-d}}$, a integral $\int_0^{\infty} \frac{r^{d-1} dr}{1+r^q}$ convergirá se, e somente se, $q > d$ e, como todas as outras integrais envolvidas são finitas, obtemos o resultado desejado. ∎

# Referências Bibliográficas


[1] Moreira, J. M., *O comportamento assintótico de soluções da equação do calor não-linear via Grupos de Renormalização.* Dissertação de mestrado, Departamento de Matemática da UFMG, (2002).

[2] J. Bricmont, A. Kupiainen and G. Lin, *Renormalization Group and Asymptotics of Solutions of Nonlinear Parabolic Equations*, Comm. Pure Appl. Math., **47**, 893-922, (1994).

[3] Bricmont, J. Kupiainen, A. *Renormalization Partial Differential Equations*, Constructive Physics, p.83-115. Berlin: Springer, 1995. (Lecture Notes in Physics, 446)

[4] Goldenfeld, N. *Lectures on Phase Transitions and the Renormalization Group.* Reading: Addison-Wesley, 1992.

[5] Chen, L. Goldenfeld, N. *Numerical renormalization group calculations for similarity solutions and travelling waves*, Phys. Rev. E., 51, 5577-5581, 1995.

[6] Braga, G. A., Rolla, L. T.,Moreira, J.M. *Análise Assintótica de Soluções de EDP's via Grupos de Renormalização.* Minicurso ministrado no 57º Seminário Brasileiro de Análise, UFV, Viçosa, (2003).

[7] Braga G. A., Rolla, L. T. *Estudo do comportamento assintótico de soluções da equação do calor com coeficiente de difusão periódico através do método do grupo de renormalização numérico.* Trabalho ganhador do Prêmio Beatriz Neves da SBMAC, disponível em http://www.mat.ufmg.br/ leorolla, 2001.

[8] Souza, C.F. *O método do grupo de renormalização para equações de evolução com termos não lineares dependentes de derivados*. Dissertação de Mestrado, Departamento de Matemática da UFMG, (2011).

[9] Evans, L. C., *Partial Differential Equations*, Graduate studies in mathematics, v.19, (1998).

[10] Lima, P. C. *Análise de Fourier*, notas de aula, Departamento de Matemática da UFMG.

[11] Lima, E. L, *Curso de Análise*, vol. 1. Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2002.

[12] Lima, E. L, *Curso de Análise*, vol. 2. Coleção Matemática Universitária, IMPA, 2000.

[13] Lima,E. L, *Espaços Métricos*, SBM, Rio de Janeiro (1993).

[14] Bartle, R. G. *The elements of integration*. Wiley, 1995.

[15] Spivak, M. *Calculus on Manifolds*. W.A.Benjamin, New York, 1965

[16] GellMann, M. and Low, F. E., *Quantum Electrodynamics at Small Distances*, Phys. Rev., **95**, 1300-1312, 1954.

[17] Wilson, K., *Renormalization Group and Critical Phenomena I, II* Phys. Rev. B, 4. 3174-83, 3184-3205, 1971.

[18] Hoffman, K., *Linear Algebra*. 2.ed. University of California, 1971.