PARES DE SUBESPAÇOS EM $\mathbb{R}^n$

Luciana Cadar Chamone

Monografia apresentada ao Departamento de Matemática do Instituto de Ciências Exatas
da Universidade Federal de Minas Gerais como parte dos requisitos para
obtenção do título de Especialista em Matemática.

UFMG
31 de julho de 2013

RESUMO

Dados dois pares (U, V) e (U', V') de subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$, caracterizamos a existência de uma isometria f de $\mathbb{R}^n$ tal que $f(U) = U'$ e $f(V) = V'$. De fato, demonstramos que uma tal isometria existe se, e somente se, os ângulos principais do par (U, V) são iguais aos ângulos principais do par (U', V'). Mais ainda, se consideramos pares de subespaços afins, transladados de subespaços vetoriais, demonstramos que existe uma isometria entre dois pares de tais subespaços se, e somente se, além da igualdade dos ângulos principais tem-se a igualdade da distância entre os subespaços.

Sumário

Introdução

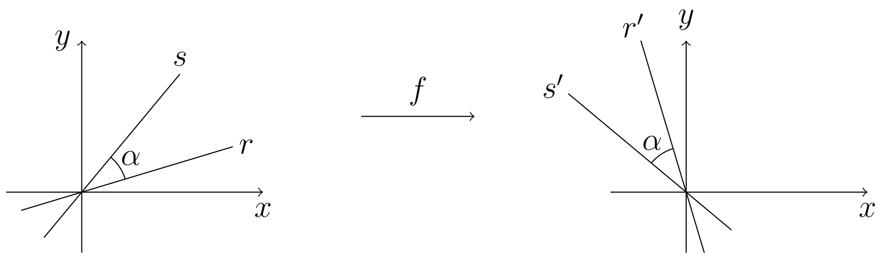
Sejam dados dois pares (U, V) e (U', V') de subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$. Neste trabalho estudamos invariantes geométricos que caracterizam a existência de uma isometria f de $\mathbb{R}^n$ tal que $f(U) = U'$ e $f(V) = V'$, ou seja, investigamos invariantes que caracterizam a existência de uma isometria entre pares de subespaços de $\mathbb{R}^n$.

Além de considerar subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$, concorrentes naturalmente na origem do sistema de coordenadas, também analisamos subespaços afins, transladados de subespaços vetoriais. Neste caso, veremos que a distância entre os subespaços afins é um dos invariantes que deve ser considerado.

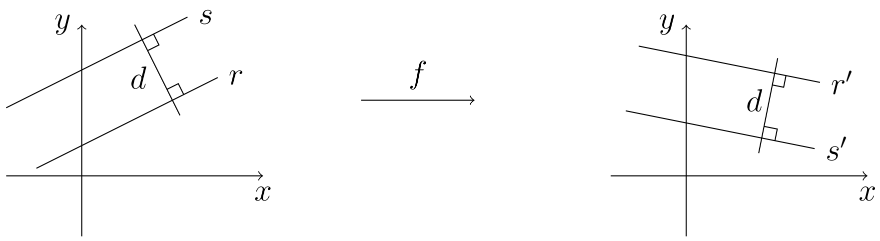
Antes de discutir estes problemas, em vez de pares de subespaços, poderíamos começar analisando o seguinte problema mais simples. Dados dois subespaços U e U' de $\mathbb{R}^n$, quando existe uma isometria $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $f(U) = U'$? Como uma isometria preserva dimensões de subespaços, $\dim f(U) = \dim U$. Logo para $f(U) = U'$ é necessário que as dimensões de U e U' sejam iguais. Portanto a igualdade destas dimensões é uma condição necessária para a existência de f. Por outro lado, se estas dimensões são iguais, transformando uma base ortonormal de U em uma base ortonormal de U' pode-se construir uma isometria que identifica U com U'. Portanto, exceto a condição natural da igualdade das dimensões de U e U', não existe obstrução alguma para a existência de uma isometria de $\mathbb{R}^n$ que identifica U com U'.

Entretanto, se passamos a analisar pares de subespaços, além da igualdade das dimensões, aparecem obstruções geométricas para a existência da isometria f que identifica o par de subespaços (U, V) com o par de subespaços (U', V'). Vamos analisar alguns exemplos em dimensões baixas.

Considere dois pares (r, s) e (r', s') de retas concorrentes no plano Euclidiano. Aplicando uma translação podemos supor que estas retas são concorrentes na origem do sistema de coordenadas. Agora observe que se o ângulo entre r e s for igual ao ângulo entre r' e s', aplicando uma rotação e se necessário uma reflexão, podemos levar o par de retas (r, s) no par de retas (r', s'). Deste modo, o ângulo entre as retas é o único invariante que caracteriza a existência de uma isometria que transforma duas retas concorrentes em outras duas retas concorrentes dadas.

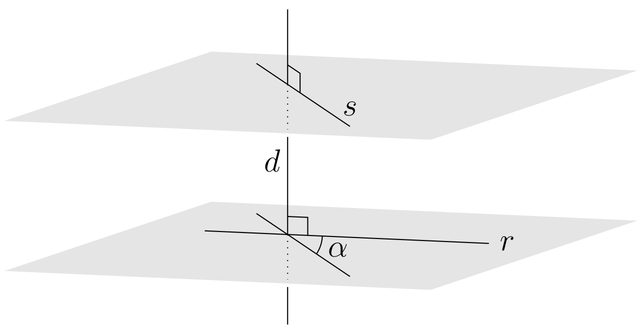


Agora, se as retas r e s são paralelas, podemos dizer que o ângulo entre elas é igual a zero e, via uma rotação, uma reflexão e uma translação, podemos levar r e s em quaisquer retas r' e s' tais que $\operatorname{dist}(r, s) = \operatorname{dist}(r', s')$.



Portanto, no caso de pares de retas no plano, existe um único número real que caracteriza a existência de uma isometria que identifica um par de retas com um outro par de retas: o ângulo entre as retas, no caso delas serem concorrentes, ou a distância, no caso delas serem paralelas. Este número é o invariante geométrico investigado neste trabalho, no caso de retas no plano.

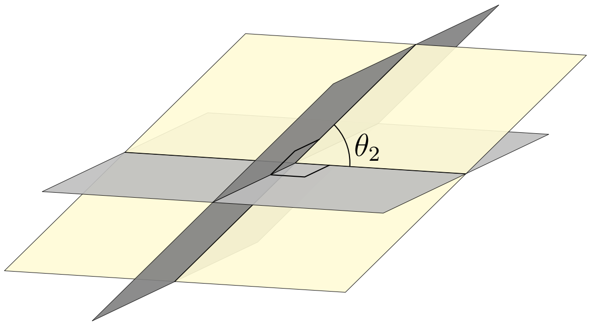
Vamos analisar agora duas retas no espaço tridimensional. Se elas são concorrentes ou paralelas, voltamos ao caso anterior, quando analisamos duas retas coplanares. E se elas não são coplanares, podemos definir o ângulo α e a distância d entre elas. Aplicando isometrias de $\mathbb{R}^3$, é possível identificar estas retas com quaisquer outras que possuem o mesmo ângulo e a mesma distância. Portanto, neste caso, é necessário considerar dois números reais para garantir a existência de uma isometria entre dois pares de retas no espaço tridimensional.



Voltando ao caso geral, se (U, V) e (U', V') são dois pares de subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$, como isometrias preservam ângulos, para que exista uma isometria f tal que $f(U) = U'$ e $f(V) = V'$, além das igualdades das dimensões, é necessário que $\operatorname{ang}(U, V) = \operatorname{ang}(U', V')$, em que $\operatorname{ang}(U, V) = \theta_1$ é o ângulo entre os subespaços U e V, definido como o menor ângulo entre um vetor de U e um vetor de V.

$$\theta_1 = \min \{ \ \text{ang}(u, v) \mid u \in U, \ v \in V, \ u \neq \vec{0}, \ v \neq \vec{0} \ \}.$$

Observe que no caso de duas retas no plano, este conceito coincide com a idéia comum do ângulo entre duas retas. Mas e no caso de dois planos U e V concorrentes no espaço? Como existe um vetor que está nos dois planos, o menor ângulo entre um vetor do plano U e um vetor do plano V é igual a zero, de modo que $\text{ang}(U, V) = 0$. Note que este número não coincide com o do conceito comum do ângulo entre dois planos. Para obter este ângulo θ_2, devemos considerar o complemento ortogonal em U e em V da reta interseção $U \cap V$. Estes complementos ortogonais são duas retas concorrentes e o ângulo θ_2 entre elas é igual ao ângulo entre os planos.



Portanto, no caso de planos no espaço, podemos definir dois ângulos: θ_1 e θ_2. O ângulo θ_1 será igual a zero sempre que os planos forem concorrentes em uma reta. E o ângulo θ_2 é o ângulo de abertura de um plano em relação ao outro. Mais ainda, dados dois pares de planos (U, V) e (U', V'), se os dois ângulos definidos para (U, V) forem iguais aos dois ângulos definidos para (U', V'), aplicando rotações é possível transformar (U, V) em (U', V'). Portanto, neste caso, são dois os invariantes geométricos que caracterizam a existência de uma isometria entre dois pares de planos dados.

Continuando deste modo, se U e V são subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$ tais que $\dim U = p$, $\dim V = q$ e $1 \leq p \leq q$, é possível definir p **ângulos principais**, $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \cdots \leq \theta_p$, associados ao par (U, V). Vamos demonstrar que estes ângulos são os invariantes que caracterizam a existência de uma isometria entre dois pares (U, V) e (U', V') de subespaços de $\mathbb{R}^n$. Mais ainda, para caracterizar pares de subespaços afins, veremos que além dos ângulos principais, precisamos de mais um único invariante: a distância entre os subespaços.

As demonstrações destes resultados e a definição de ângulos principais foram dadas por Camille Jordan em 1875, [12]. A partir de então, estes resultados e estes conceitos já foram utilizados em vários artigos e também já foram generalizados para outros tipos de espaços, veja por exemplo as referências [5], [6], [10] e [13]. Neste trabalho, apresentamos demonstrações, em linguagem moderna, para estes teoremas, utilizando conceitos de Álgebra Linear. Para isso, organizamos este trabalho do seguinte modo.

No capítulo 1 definimos os conceitos de ângulos e de direções principais, demonstramos algumas propriedades básicas e demonstramos o teorema 1.2, que fornece um método prático para o cálculo dos ângulos principais.

No capítulo 2 relembramos algumas propriedades das isometrias de $\mathbb{R}^n$, estudamos a matriz de Gram de um conjunto de vetores em $\mathbb{R}^n$ e demonstramos o teorema 2.2, que afirma que se dois conjuntos de vetores possuem a mesma matriz de Gram então existe uma isometria que identifica cada vetor de um conjunto com o respectivo vetor do outro conjunto. Observamos que este teorema desempenha um papel central nas demonstrações dos teoremas principais dos últimos capítulos deste trabalho.

No capítulo 3 aplicamos os resultados do capítulo 2 para demonstrar o teorema 3.1, que afirma que se (U, V) e (U', V') são dois pares de subespaços em $\mathbb{R}^n$ com os mesmos ângulos principais, então existe uma isometria f de $\mathbb{R}^n$ tal que $f(U) = U'$ e $f(V) = V'$.

O capítulo 4, de certo modo, é independente dos outros capítulos deste trabalho. Nele definimos quando dois subespaços de $\mathbb{R}^n$ estão em "posição geral", e mostramos que, em vez de estudar quaisquer pares de subespaços para demonstrar o teorema principal do capítulo 3, é suficiente considerar pares de subespaços em posição geral. Observamos que os resultados deste capítulo não são utilizados no capítulo 5.

No capítulo 5 exploramos algumas propriedades da distância entre dois subespaços afins de $\mathbb{R}^n$ e demonstramos, no teorema 5.1, que os ângulos principais e a distância entre os subespaços são os invariantes que caracterizam a existência de uma isometria entre dois pares de subespaços afins.

Finalmente, no capítulo 6 apresentamos uma lista de perguntas, algumas delas ainda em aberto, que mostram que este trabalho está relacionado com temas de pesquisa atual.

Observação. Ao longo de todo este trabalho estamos assumindo que o espaço vetorial $\mathbb{R}^n$ está munido do seu produto escalar usual definido positivo

$$\langle x, y \rangle = x_1 y_1 + \cdots + x_n y_n$$

em que $x = (x_1, \ldots, x_n)$ e $y = (y_1, \ldots, y_n)$ são vetores quaisquer de $\mathbb{R}^n$.

Capítulo 1

Pares de subespaços em $\mathbb{R}^n$

Neste capítulo vamos definir os conceitos de ângulos e de direções principais de um par de subespaços de $\mathbb{R}^n$, e também vamos demonstrar algumas propriedades destes invariantes.

1.1 O primeiro ângulo principal

Sejam U e V dois subespaços de $\mathbb{R}^n$, $\dim U = p$, $\dim V = q$, $1 \leq p \leq q$. O **primeiro ângulo principal** θ_1 entre U e V é definido por:

$$\theta_1 = \min \{ \operatorname{ang}(u, v) \mid u \in U,\ v \in V,\ u \neq \vec{0},\ v \neq \vec{0} \},$$

em que $\operatorname{ang}(u, v)$ representa o ângulo entre os vetores u e v. Como o ângulo entre dois vetores não depende da norma dos vetores, como $\theta_1 \in \left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ e como a função cosseno é decrescente neste intervalo, podemos caracterizar θ_1 por:

$$\cos\theta_1 = \max\{ \langle u, v\rangle \mid u \in U,\ v \in V,\ \| u \| = \| v \| = 1 \}$$

ou equivalentemente

$$\cos\theta_1 = \max\left\{ \frac{\langle u, v\rangle}{\| u \| \| v \|} \mid u \in U,\ v \in V,\ u \neq \vec{0},\ v \neq \vec{0} \right\}.$$

Como a função $f(u, v) = \langle u, v\rangle$ é contínua, se ela estiver definida no conjunto

$$\{ (u, v) \in U \times V \mid \| u \| = \| v \| = 1 \},$$

vemos que o seu máximo é assumido para algum par (u_1, v_1) deste conjunto, uma vez que temos uma função contínua definida em um subconjunto compacto de $\mathbb{R}^n$. Assim, existem vetores unitários $u_1 \in U$ e $v_1 \in V$ tais que

$$\theta_1 = \operatorname{ang}(u_1, v_1) \quad \text{e} \quad \cos\theta_1 = \langle u_1, v_1\rangle.$$

Tais vetores u_1 e v_1 são os **primeiros vetores principais** dos subespaços U e V.

Observação:

1. $\theta_1 = 0 \;\Leftrightarrow\; \dim(U \cap V) \geq 1$.
2. $\theta_1 = \dfrac{\pi}{2} \;\Leftrightarrow U$ e V são subespaços ortogonais. Neste caso, qualquer vetor unitário em U e qualquer vetor unitário em V podem ser considerados como vetores principais.
3. Os vetores principais não são unicamente determinados por U e V. Como observado acima, isto sempre ocorre quando $\theta_1 = \dfrac{\pi}{2}$ ou quando $\dim(U \cap V) \geq 2$.

Exemplo: [ângulo entre uma reta e um subespaço] Seja U um subespaço 1-dimensional de $\mathbb{R}^n$ e seja V um subespaço de dimensão $q \geq 1$ de $\mathbb{R}^n$. Vamos determinar o primeiro ângulo principal entre U e V.

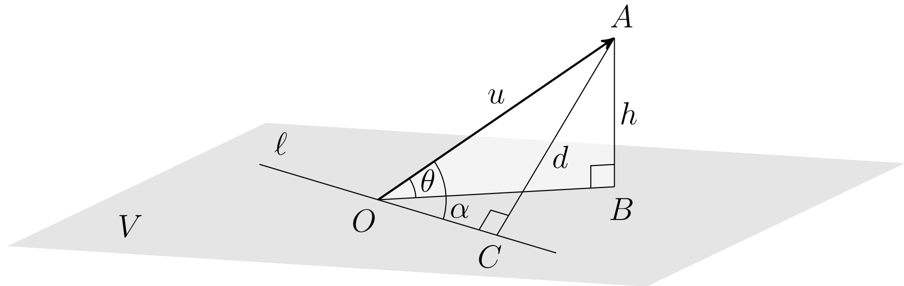
Primeiramente vamos supor que U e V não são ortogonais. Então vamos considerar um vetor unitário u de U e uma base ortonormal $\{v_1, \ldots, v_q\}$ de V. Também vamos considerar o vetor $P_V(u)$, projeção ortogonal de u sobre o subespaço V. Este vetor é dado por

$$P_V(u) \;=\; \sum_{i=1}^{q} \langle u, v_i \rangle \, v_i \; .$$

- $P_V(u)$ é o único vetor de V tal que o vetor $u - P_V(u)$ é ortogonal ao subespaço V.
- a projeção ortogonal $P_V : \mathbb{R}^n \to V$ é um operador linear auto-adjunto. Isto é

$$\langle P_V(x), y \rangle = \langle x, P_V(y) \rangle, \quad \forall\, x, y \;\in\; \mathbb{R}^n.$$

- como estamos supondo que a reta U não é ortogonal ao subespaço V, $P_V(u) \neq \vec{0}$.
- se θ é o ângulo entre u e $P_V(u)$ então θ é um ângulo agudo e $\cos\theta = \| P_V(u) \|$.
- se ℓ é uma reta qualquer em V passando pela origem e se α é o ângulo entre u e ℓ, então $\theta \leq \alpha$. De fato, considere a figura a seguir, em que $u = \overrightarrow{OA}$, $P_V(u) = \overrightarrow{OB}$ e C é o pé da perpendicular à reta ℓ traçada por A.



Como o triângulo ABC é retângulo em B, vemos que $h \leq d$. Agora, no triângulo retângulo OAB vemos que $\operatorname{sen}\theta = h$, e no triângulo retângulo OAC vemos que $\operatorname{sen}\alpha = d$. De $h \leq d$, concluímos então que $\operatorname{sen}\theta \leq \operatorname{sen}\alpha$. Esta desigualdade finalmente implica que $\theta \leq \alpha$.

Do que acabamos de demonstrar, podemos concluir que o menor ângulo entre u e um vetor de V é o ângulo θ entre u e $P_V(u)$. Daí, e da definção de ângulo principal, vemos que θ é o primeiro ângulo principal entre U e V. Mais ainda, um vetor unitário $u_1 = u$ em U e o vetor $v_1 = \dfrac{P_V(u)}{\| P_V(u) \|}$ são os vetores principais destes subespaços. Como $\cos\theta = \| P_V(u) \|$ vemos que $P_V(u_1) = \cos(\theta)v_1$. Na próxima proposição veremos que esta relação é geral, e não um caso particular deste exemplo.

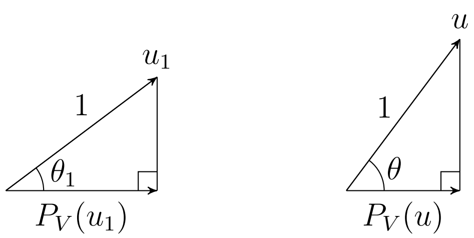
No caso em que a reta U é ortogonal ao subespaço V, então $P_V(u) = \vec{0}$ e o primeiro ângulo principal entre U e V é $\theta = \dfrac{\pi}{2}$. Entretanto agora qualquer vetor unitário u_1 de U e qualquer vetor unitário v_1 de V podem ser considerados como vetores principais. Observe que neste caso também são verdadeiras as expressões $\cos\theta = \| P_V(u) \|$ e $P_V(u_1) = \cos(\theta)v_1$.

A próxima proposição generaliza o exemplo anterior e desempenha um papel central na teoria que se pretende desenvolver.

Proposição 1.1 *Sejam U e V dois subespaços de $\mathbb{R}^n$ com $\dim U = p$, $\dim V = q$ e $1 \leq p \leq q$. Seja θ_1 o primeiro ângulo principal e sejam u_1 e v_1 vetores principais de U e V. Se P_V denota a projeção ortogonal de $\mathbb{R}^n$ sobre V, então*

$$\cos(\theta_1) \;=\; \max_{u\in U,\ \|u\|=1} \| P_V(u) \| = \| P_V(u_1) \| \qquad \text{e} \qquad P_V(u_1) = \cos(\theta_1)v_1 \;.$$

Dem.: Seja u um vetor unitário qualquer em U e seja θ o ângulo entre u e $P_V(u)$. Como θ_1 é o menor ângulo entre um vetor de U e um vetor de V, temos que $\theta_1 \leq \theta$.



Calculando $\cos(\theta_1)$ e $\cos(\theta)$ nos triângulos retângulos indicados na figura acima, vemos que $\cos(\theta_1) = ||P_V(u_1)||$ e $\cos(\theta) = ||P_V(u)||$. Como $\theta_1 \leq \theta$ segue que $||P_V(u)|| \leq ||P_V(u_1)||$ e portanto

$$\cos(\theta_1) \;=\; \max_{u\in U,\ ||u||=1} ||P_V(u)|| \;=\; ||P_V(u_1)||$$

Para finalizar, como observado no exemplo anterior, os vetores v_1 e $P_V(u_1)$ devem apontar para a mesma direção. Daí, como v_1 é unitário e $||P_V(u_1)|| = \cos(\theta_1)$, vemos que $P_V(u_1) = \cos(\theta_1)v_1$. ∎

Pelo caráter simétrico de U e V na definição de ângulo e de vetores principais, trocando U por V na demonstração anterior, obtemos uma demonstração da seguinte proposição.

Proposição 1.2 *Seja θ_1 o primeiro ângulo principal e sejam u_1 e v_1 vetores principais de U e V. Se P_U denota a projeção ortogonal de $\mathbb{R}^n$ sobre U, então*

$$\cos(\theta_1) \;=\; \max_{v\in V,\ \|v\|=1} \| P_U(v) \| = \| P_U(v_1) \| \qquad \text{e} \qquad P_U(v_1) = \cos(\theta_1)u_1 \ .$$

Observação: Das duas proposições anteriores segue que $\cos^2(\theta_1)$ é um autovalor do operador auto-adjunto $P_U P_V P_U$ restrito a U. De fato,

$$P_U P_V P_U(u_1) \;=\; P_U P_V(u_1) \;=\; P_U(\cos(\theta_1)v_1) = \cos(\theta_1)P_U(v_1) = \cos^2(\theta_1)u_1 \ .$$

O estudo da aplicação $P_U P_V P_U : U \to U$ será realizado na seção 1.4.

1.2 O demais ângulos principais

Sejam U e V dois subespaços de $\mathbb{R}^n$, $\dim U = p$, $\dim V = q$, $1 \leq p \leq q$. Como vimos na seção anterior, o primeiro ângulo principal θ_1 entre U e V é definido por:

$$\cos(\theta_1) \;=\; \max_{\substack{u\,\in\, U,\ \|\,u\,\|=1 \\ v\,\in\, V,\ \|\,v\,\|=1}} \langle u, v\rangle \ .$$

Mais ainda, existem vetores principais unitários $u_1 \in U$ e $v_1 \in V$ tais que $\cos(\theta_1) = \langle u_1, v_1\rangle$.

Considere agora o complemento ortogonal de u_1 em U e o complemento ortogonal de v_1 em V:

$$U_2 = \{u \in U | \langle u, u_1\rangle = 0\} \qquad \text{e} \qquad V_2 = \{v \in V | \langle v, v_1\rangle = 0\} \ .$$

O **segundo ângulo principal** θ_2 de U e V é definido como sendo o primeiro ângulo principal de U_2 e V_2.

$$\cos(\theta_2) \;=\; \max_{\substack{u\,\in\, U_2,\ \|\,u\,\|=1 \\ v\,\in\, V_2,\ \|\,v\,\|=1}} \langle u, v\rangle \;=\; \max_{\substack{u\,\in\, U, v\,\in\, V, \|\,u\,\|=\|\,v\,\|=1 \\ \langle u, u_1\rangle = \langle v, v_1\rangle = 0}} \langle u, v\rangle \ .$$

Observe que $\cos(\theta_2) \leq \cos(\theta_1)$, uma vez que o máximo de uma função sobre um conjunto deve ser maior do que ou igual ao máximo desta mesma função sobre um subconjunto. Equivalentemente, $\theta_1 \leq \theta_2$.

Como na seção anterior, existem vetores unitários $u_2 \in U_2$ e $v_2 \in V_2$ tais que $\cos(\theta_2) = \langle u_2, v_2\rangle$. Estes são os vetores principais de U_2 e V_2, ou podem ser chamados de segundos vetores principais de U e V. Pelas definições de U_2 e V_2, vemos que $\{u_1, u_2\}$ e $\{v_1, v_2\}$ são conjuntos ortonormais de vetores em U e V. Agora, utilizando as proposições 1.1 e 1.2 temos que

$$\langle u_2, v_1\rangle = \langle P_U(u_2), v_1\rangle = \langle u_2, P_U(v_1)\rangle = \langle u_2, \cos(\theta_1)u_1\rangle = \cos(\theta_1)\langle u_2, u_1\rangle = 0 .$$
$$\langle v_2, u_1\rangle = \langle P_V(v_2), u_1\rangle = \langle v_2, P_V(u_1)\rangle = \langle v_2, \cos(\theta_1)v_1\rangle = \cos(\theta_1)\langle v_2, v_1\rangle = 0 .$$

Daí, se $i, j \in \{1, 2\}$, então $\langle u_i, v_j\rangle = \cos(\theta_i)\delta_{ij}$.

Continuando deste modo, podemos definir todos os ângulos principais $\theta_1, \ldots, \theta_p$ de U e V. Isso pode ser feito formalmente através de uma recorrência. Para isso, suponhamos definidos os primeiros $k-1$ ângulos principais $\theta_1, \ldots, \theta_{k-1}$ de U e V onde k pertence ao conjunto $\{2, \ldots, p\}$. Assim, existem vetores principais unitários $\{u_1, \ldots, u_{k-1}\}$ em U e vetores principais unitários $\{v_1, \ldots, v_{k-1}\}$ em V tais que $\cos(\theta_i) = \langle u_i, v_i\rangle$, para $i = 1, \ldots, k-1$. Para definir o próximo ângulo principal θ_k considere os espaços

$$U_k = \{u \in U | \langle u, u_i\rangle = 0,\ i = 1, \ldots, k-1\} \quad \text{e} \quad V_k = \{v \in V | \langle v, v_i\rangle = 0,\ i = 1, \ldots, k-1\} .$$

O **k-ésimo ângulo principal** θ_k de U e V é definido como sendo o primeiro ângulo principal de U_k e V_k.

$$\cos(\theta_k) = \max_{\substack{u \in U_k,\ \| u \|= 1 \\ v \in V_k,\ \| v \|= 1}} \langle u, v\rangle = \max_{\substack{u \in U, v \in V, \| u \|=\| v \|= 1 \\ \langle u, u_i\rangle = \langle v, v_i\rangle = 0, i = 1, \ldots, k-1}} \langle u, v\rangle .$$

Como vimos na seção anterior, existem vetores unitários $u_k \in U_k$ e $v_k \in V_k$ tais que $\cos(\theta_k) = \langle u_k, v_k\rangle$. Estes são os vetores principais de U_k e V_k, ou podem ser chamados de k-ésimos vetores principais de U e V. De modo geral, os vetores principais não são únicos. Apesar disso, na próxima seção mostraremos que a definição de ângulos principais não depende da escolha dos vetores principais.

Procedendo deste modo, conseguimos então definir p ângulos principais $\theta_1 \le \theta_2 \le \cdots \le \theta_p$, uma base ortonormal $\{u_1, \ldots, u_p\}$ de vetores principais de U e um conjunto ortonormal de vetores principais $\{v_1, \ldots, v_p\}$ de V, tais que $\cos(\theta_i) = \langle u_i, v_i\rangle$, $i = 1, \ldots, p$. Pelas proposições 1.1 e 1.2, para todo $k = \{1, \ldots, p\}$, $(U_1 = U,\ V_1 = V)$

$$P_{U_k}(v_k) = \cos(\theta_k)u_k \quad \text{e} \quad P_{V_k}(u_k) = \cos(\theta_k)v_k .$$

Agora, se $p < q$, considere vetores unitários ortogonais $v_{p+1}, \ldots, v_q$ que completa o conjunto $\{v_1, \ldots, v_p\}$ a uma base ortonormal $\{v_1, \ldots, v_p,\ v_{p+1}, \ldots, v_q\}$ de V. Para estes vetores temos então que

$$\langle u_i, u_j\rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, p \quad \text{e} \quad \langle v_i, v_j\rangle = \delta_{ij}, \quad i, j = 1, \ldots, q .$$

No que segue, vamos utilizar estas bases para escrever as projeções ortogonais sobre U e V.

$$P_U(x) = \sum_{i=1}^{p} \langle x, u_i\rangle\, u_i \quad \text{e} \quad P_V(x) = \sum_{i=1}^{q} \langle x, v_i\rangle\, v_i .$$

Proposição 1.3 (Reciprocidade) *Para todo $k \in \{1, \ldots, p\}$,*

$$P_{U_k}(v_k) = P_U(v_k) = \cos(\theta_k) u_k \quad \text{e} \quad P_{V_k}(u_k) = P_V(u_k) = \cos(\theta_k) v_k \ .$$

DEM.: Vamos demonstrar apenas que $P_{U_k}(v_k) = P_U(v_k) = \cos(\theta_k)u_k$, já que a outra igualdade pode ser provada de modo análogo. Pelas proposições 1.1 e 1.2, vemos que esta proposição é verdadeira para $k = 1$ ($U_1 = U$, $V_1 = V$). Agora seja dado $k \in \{2, \ldots, p\}$. Como $\{u_k, \ldots, u_p\}$ é uma base ortonormal de U_k, a projeção ortonormal sobre U_k é dada por $P_{U_k}(x) = \sum_{i=k}^{p} \langle x, u_i \rangle \, u_i$. Agora observe que

$$P_U(v_k) \ = \ \sum_{i=1}^{p} \langle v_k, u_i \rangle \, u_i \ = \ \sum_{j=1}^{k-1} \langle v_k, u_j \rangle \, u_j \ + \ \sum_{i=k}^{p} \langle v_k, u_i \rangle \, u_i \ .$$

$$P_U(v_k) \ = \ \sum_{j=1}^{k-1} \langle v_k, u_j \rangle \, u_j \ + \ P_{U_k}(v_k) \ .$$

Se $j \in \{1, \ldots, k-1\}$, temos que $v_k \in V_k \subset V_j$. Logo $P_{V_j}(v_k) = v_k$ e assim

$$\langle v_k, u_j \rangle = \langle P_{V_j}(v_k), u_j \rangle = \langle v_k, P_{V_j}(u_j) \rangle = \langle v_k, \cos(\theta_j) v_j \rangle = \cos(\theta_j) \langle v_k, v_j \rangle = 0 \ .$$

Daí $\sum_{j=1}^{k-1} \langle v_k, u_j \rangle \, u_j = \vec{0}$ e assim $P_U(v_k) = P_{U_k}(v_k) = \cos(\theta_k) u_k$. ∎

Proposição 1.4 *Para quaisquer $i, j \in \{1, \ldots, p\}$, $\langle u_i, v_j \rangle \ = \ \cos(\theta_i) \, \delta_{ij}$.*

DEM.: Da proposição anterior temos que $P_U(v_j) = \cos(\theta_j) u_j$. Daí,

$$\langle u_i, v_j \rangle = \langle P_U(u_i), v_j \rangle = \langle u_i, P_U(v_j) \rangle = \langle u_i, \cos(\theta_j) u_j \rangle = \cos(\theta_j) \langle u_i, u_j \rangle = \cos(\theta_j) \delta_{ij} \ .$$

∎

Teorema 1.1 *Seja $\{u_1, \ldots, u_p\}$ uma base ortonormal de vetores principais de U, seja $\{v_1, \ldots, v_p\}$ um conjunto ortonormal de vetores principais de V e, se $p < q$, considere vetores unitários ortogonais $v_{p+1}, \ldots, v_q$ que completa o conjunto $\{v_1, \ldots, v_p\}$ a uma base ortonormal $\{v_1, \ldots, v_p, \ v_{p+1}, \ldots, v_q\}$ de V. Considere a matriz $p \times q$, $M = (\langle u_i, v_j \rangle)$, $i \in \{1, \ldots, p\}$ e $j \in \{1, \ldots, q\}$. Então M tem a forma*

$$M \ = \ [\Gamma \mid 0]_{p \times q}$$

em que $\Gamma = \operatorname{diag}(\cos(\theta_1), \ldots, \cos(\theta_p))$. Daí vemos que a matriz quadrada MM^t ($p \times p$) é a matriz diagonal

$$MM^t \ = \ \operatorname{diag}(\cos^2(\theta_1), \ldots, \cos^2(\theta_p)) \ .$$

DEM.: Se $i, j \in \{1, \ldots, p\}$, a proposição anterior nos mostra que $\langle u_i, v_j \rangle = \cos(\theta_i)\, \delta_{ij}$. Agora se $i \in \{1, \ldots, p\}$ e $j \in \{p+1, \ldots, q\}$ então

$$\langle u_i, v_j \rangle = \langle u_i, P_V(v_j) \rangle = \langle P_V(u_i), v_j \rangle = \langle \cos(\theta_i) v_i, v_j \rangle = \cos(\theta_i) \langle v_i, v_j \rangle = 0.$$

∎

1.3 A matriz de Souriau

Nesta seção vamos mostrar que os quadrados dos cossenos dos ângulos principais de U e V podem ser calculados como os autovalores de uma matriz de Souriau qualquer de U e V. No artigo [13] esta idéia foi utilizada para a classificação da posição relativa de pares de subvariedades Lagrangianas em um espaço vetorial hermitiano. Como consequência deste resultado, mostraremos que a definição dos ângulos principais não depende da escolha dos vetores principais e, além disso, teremos uma maneira prática para calcular os ângulos principais.

Vamos então considerar U e V dois subespaços de $\mathbb{R}^n$, $\dim U = p$, $\dim V = q$, $1 \leq p \leq q$. Sejam $\{u_1, \ldots, u_p\}$ e $\{v_1, \ldots, v_q\}$ bases ortonormais quaisquer de U e V, e seja M a matriz $p \times q$ $M = (\langle u_i, v_j \rangle)$. Uma **matriz de Souriau** de U e V é a matriz simétrica $A = MM^t$.

Observação: Fazendo uma conta simples pode-se verificar que as entradas da matriz de Souriau A são dadas por $A_{ij} = \langle u_i, P_V(u_j) \rangle$, para $i = 1, \ldots, p$ e $j = 1, \ldots, q$.

Vamos ver agora o que acontece com a matriz de Souriau A quando consideramos outras bases de U e V. Então, vamos considerar $\{u'_1, \ldots, u'_p\}$ e $\{v'_1, \ldots, v'_q\}$ outras bases ortonormais de U e V, $M' = (\langle u'_i, v'_j \rangle)$ e $A' = M'M'^t$ a correspondente matriz de Souriau. Se $P = (\langle u'_i, u_j \rangle)_{p \times p}$ e $Q = (\langle v'_i, v_j \rangle)_{q \times q}$ são as matrizes mudança de base, no sentido que fixado i

$$u'_i = \sum_{j=1}^{p} \langle u'_i, u_j \rangle\, u_j \quad \text{ e } \quad v'_i = \sum_{j=1}^{q} \langle v'_i, v_j \rangle\, v_j \ ,$$

então pode-se verificar que P e Q são matrizes ortogonais ($PP^t = I_p$ e $QQ^t = I_q$) e que $M' = PMQ^t$. Desta última igualdade segue que

$$A' = M'M'^t = (PMQ^t)\,(QM^tP^t) = P(MM^t)P^t = PAP^{-1} \ .$$

Isto demonstra que as matrizes de Souriau A e A' são conjugadas e portanto possuem os mesmos autovalores. Portano estes p autovalores são invariantes do par (U, V) por não dependerem das bases utilizadas nas construções das matrizes M e A.

Considerando bases de vetores principais de U e V como no teorema 1.1, obtemos uma matriz de Souriau diagonal. Assim, do que acabamos de comentar, podemos obter a seguinte interpretação geométrica para os autovalores de uma matriz de Souriau do par (U, V).

Teorema 1.2 *Sejam U e V subespaços de dimensões p e q de $\mathbb{R}^n$ com $1 \leq p \leq q$. Se $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \cdots \leq \theta_p$ são os ângulos principais de (U, V), então $\cos^2(\theta_p) \leq \cdots \leq \cos^2(\theta_2) \leq \cos^2(\theta_1)$ são os autovalores de qualquer matriz de Souriau de U e V.*

O teorema anterior nos mostra que os ângulos principais de U e V podem ser calculados a partir de uma matriz de Souriau qualquer de U e V. Além disso ele fornece uma maneira prática para o cálculo destes ângulos e também demonstra que a definição dos ângulos principais de U e V não depende da escolha dos vetores principais.

Observação: Como cada ângulo principal está no intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$ e como $\cos\theta_i \geq 0$ neste intervalo, realmente cada autovalor $\cos^2(\theta_i)$ da matriz de Souriau determina unicamente o ângulo principal $\theta_i \in \left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$.

Exemplo: [Existência de subespaços com ângulos principais dados] Vamos mostrar que dado um conjunto de ângulos $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \cdots \leq \theta_p$, cada um deles no intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, sempre existe um par de subespaços (U, V) que tem estes como ângulos principais.

De fato, seja $\{w_1, \ldots, w_{2p}\}$ uma base ortonormal de $\mathbb{R}^{2p}$. Para todo $i = 1, \ldots, p$ seja $u_i = w_i$ e seja $v_i = \cos\theta_i w_i + \text{sen}\theta_i w_{p+i}$. Sejam U e V os subespaços de dimensão p de $\mathbb{R}^{2p}$ caracterizados por

- $\{u_1, \ldots, u_p\} = \{w_1, \ldots, w_p\}$ é uma base ortonormal de U.
- $\{v_1, \ldots, v_p\} = \{\cos\theta_1 w_1 + \text{sen}\theta_1 w_{p+1}, \ldots, \cos\theta_p w_p + \text{sen}\theta_p w_{2p}\}$ é uma base ortonormal de V.

Para todo $i, j = 1, \ldots, p$ pode-se verificar que $\langle u_i, v_j\rangle = \delta_{ij}\cos\theta_i$. Daí a matriz $M = (\langle u_i, v_j\rangle)$, definida no início desta seção, é a seguinte matriz diagonal

$$M \;=\; \text{diag}(\cos(\theta_1), \ldots, \cos(\theta_p)) \;.$$

Deste modo a matriz de Souriau $A = MM^t$ de U e V é a matriz diagonal

$$A \;=\; \text{diag}(\cos^2(\theta_1), \ldots, \cos^2(\theta_p)) \;.$$

Como $\cos^2(\theta_p) \leq \cdots \leq \cos^2(\theta_2) \leq \cos^2(\theta_1)$ são os autovalores desta matriz, o teorema anterior implica que $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \cdots \leq \theta_p$ são os ângulos principais de U e V. Mais ainda, também temos que $\{u_1, \ldots, u_p\}$ é uma base de vetores principais de U e $\{v_1, \ldots, v_p\}$ é uma base de vetores principais de V pois estes são vetores ortonormais em U e V tais que $\langle u_i, v_i\rangle = \cos\theta_i$.

1.4 Projeção Ortogonal

Sejam U e V dois subespaços de $\mathbb{R}^n$, $\dim U = p$, $\dim V = q$, $1 \leq p \leq q$. Sejam $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \cdots \leq \theta_p$ os ângulos principais do par (U, V), e seja $\{u_1, \ldots, u_p\}$ uma base ortonormal de vetores principais de U. Para todo $i \in \{1, \ldots, p\}$, temos que

$$P_U P_V P_U(u_i) = P_U P_V(u_i) = P_U(\cos(\theta_i)v_i) = \cos(\theta_i)P_U(v_i) = \cos^2(\theta_i)u_i \ .$$

Isto siginifica que $\cos^2(\theta_p) \leq \cdots \leq \cos^2(\theta_2) \leq \cos^2(\theta_1)$ são os autovalores da transformação linear

$$P_U P_V P_U : U \to U$$

e que, na base $\{u_1, \ldots, u_p\}$, a matriz desta transformação linear é a matriz diagonal $\mathrm{diag}(\cos^2(\theta_1), \ldots, \cos^2(\theta_p))$.

Considerando uma outra base de U, como as matrizes de uma mesma transformação linear em bases diferentes são matrizes conjugadas, podemos concluir que $\cos^2(\theta_p) \leq \cdots \leq \cos^2(\theta_2) \leq \cos^2(\theta_1)$ são os autovalores da matriz da transformação linear $P_U P_V P_U : U \to U$ escrita em qualquer base. Assim, isto fornece uma outra maneira para o cálculo dos ângulos principais de U e V.

1.5 Projeção Ortogonal versus matriz de Souriau

Sejam U e V dois subespaços de $\mathbb{R}^n$, $\dim U = p$, $\dim V = q$, $1 \leq p \leq q$. Sejam $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \cdots \leq \theta_p$ os ângulos principais do par (U, V). Nas seções anteriores vimos que todas as matrizes de Souriau $A = MM^t$ possuem os mesmos autovalores e que estes autovalores também são os autovalores da matriz do operador auto-adjunto $P_U P_V P_U : U \to U$ escrita em qualquer base de U. Nesta seção vamos mostrar que, de fato, a matriz de Souriau é a matriz deste operador $P_U P_V P_U$.

Teorema 1.3 *Sejam U e V subespaços de dimensões p e q de $\mathbb{R}^n$ com $1 \leq p \leq q$. Sejam $\{u_1, \ldots, u_p\}$ e $\{v_1, \ldots, v_q\}$ bases ortonormais quaisquer de U e V. A matriz do operador auto-adjunto $P_U P_V P_U : U \to U$ escrita na base $\{u_1, \ldots, u_p\}$ é a matriz de Souriau $A = MM^t$, em que $M = (\langle u_i, v_j \rangle)$.*

DEM.: As projeções ortogonais P_U e P_V são dadas por

$$P_U(x) \ = \ \sum_{i=1}^{p} \langle x, u_i \rangle u_i \quad \text{e} \quad P_V(x) \ = \ \sum_{k=1}^{q} \langle x, v_k \rangle v_k.$$

Utilizando estas expressões vemos que

$$P_U P_V P_U(x) \ = \ \sum_{i=1}^{p} \left(\sum_{k=1}^{q} \langle x, v_k \rangle \langle v_k, u_i \rangle \right) u_i. \tag{1.1}$$

Se B é a matriz do operador $P_U P_V P_U : U \to U$ escrita na base $\{u_1, \ldots, u_p\}$, sabemos que a coluna j de B é formada pelos coeficientes da combinação linear $P_U P_V P_U(u_j) = \sum_{i=1}^{p} b_{ij} u_i$, obtida quando escrevemos o vetor $P_U P_V P_U(u_j)$ em termos dos vetores da base $\{u_1, \ldots, u_p\}$. Da expressão (1.1), segue então que o elemento da linha i e da coluna j de B é igual a

$$b_{ij} \ = \ \sum_{k=1}^{q} \langle u_j, v_k \rangle \langle v_k, u_i \rangle.$$

Por outro lado o elemento a_{ij} da matriz $A = MM^t$ é igual ao resultado da multiplicação da linha i de M pela coluna j de M^t, ou seja, a_{ij} é igual ao produto da linha i de M pela linha j de M. Calculando este produto obtemos

$$a_{ij} \ = \ \sum_{k=1}^{q} \langle u_i, v_k \rangle \langle u_j, v_k \rangle.$$

Como $a_{ij} = b_{ij}$ para todo i e todo j, vemos que a matriz de Souriau A é igual a matriz B do operador $P_U P_V P_U$ escrita na base $\{u_1, \ldots, u_p\}$.

∎

Capítulo 2

Existência de isometrias de $\mathbb{R}^n$

2.1 Isometrias de $\mathbb{R}^n$

Neste capítulo vamos relembrar alguns conceitos e alguns resultados gerais sobre isometrias de $\mathbb{R}^n$.

Definição 2.1 *Uma função $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma* **isometria** *se*

$$\operatorname{dist}(f(x), f(y)) = \operatorname{dist}(x, y)$$

para quaisquer x e y de $\mathbb{R}^n$.

Deste modo uma isometria de $\mathbb{R}^n$ é uma aplicação que preserva distância entre pontos. O exemplo mais simples de isometria é a translação $T_v(x) = x + v$ por um vetor $v \in \mathbb{R}^n$. Um outro exemplo importante são as transformações ortogonais. Lembre que uma transformação linear $A : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é **ortogonal** se A preserva o produto interno usual de $\mathbb{R}^n$,

$$\langle A(x), A(y) \rangle = \langle x, y \rangle, \quad \forall\, x, y \in \mathbb{R}^n.$$

Como a distância entre dois pontos pode ser escrita em termos deste produto interno, vemos que toda transformação ortogonal é uma isometria de $\mathbb{R}^n$. Vamos representar por $O(n)$ o grupo das transformações lineares ortogonais de $\mathbb{R}^n$.

Como a composição de duas isometrias é uma isometria, se A é ortogonal e se $v \in \mathbb{R}^n$, então $f(x) = A(x) + v$ é uma isometria. O próximo teorema nos mostra que estas são todas as isometrias de $\mathbb{R}^n$, de modo que o grupo das isometrias de $\mathbb{R}^n$ é gerado por transformações ortogonais e por translações.

Teorema 2.1 *Se $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é uma isometria de $\mathbb{R}^n$, então existe um vetor $v \in \mathbb{R}^n$ e existe uma transformação ortogonal A tais que*

$$f(x) = A(x) + v, \quad \forall\, x \in \mathbb{R}^n.$$

Uma demonstração deste resultado pode ser encontrada na seção 8.6 do livro [1].

Como uma translação e como uma trasformação ortogonal são invertíveis, o teorema anterior implica que toda isometria de $\mathbb{R}^n$ é invertível. Além disso, se uma isometria preserva a origem, então ela é uma transformação linear ortogonal.

2.2 Matriz de Gram

Para demonstrar que dois pares de subespaços de $\mathbb{R}^n$ com os mesmos ângulos principais são equivalentes por uma isometria de $\mathbb{R}^n$, precisaremos de uma resposta para a seguinte pergunta: dados dois conjuntos ordenados $(P_1, P_2, \ldots, P_k)$ e $(P'_1, P'_2, \ldots, P'_k)$ de vetores em $\mathbb{R}^n$, sobre quais condições existe uma isometria $f \in O(n)$ tal que $f(P_i) = P'_i$, para $i = 1, 2, \ldots, k$?

Antes de apresentar uma resposta para esta pergunta, observe que se existe uma tal isometria, então $\langle P_i, P_j\rangle = \langle P'_i, P'_j\rangle$ para todo $i, j = 1, 2, \ldots, k$. Esta condição pode ser resumida dizendo-se que a **matriz de Gram** G dos vetores $(P_1, P_2, \ldots, P_k)$ é igual a matriz de Gram G' dos vetores $(P'_1, P'_2, \ldots, P'_k)$, isto é,

$$\text{se} \quad G = (\, \langle P_i, P_j\rangle \,) \quad \text{e} \quad G' = \big(\, \langle P'_i, P'_j\rangle \,\big) \quad \text{então} \quad G = G' \, . \tag{2.1}$$

Além disso, se existe uma tal isometria, como f é um isomorfismo linear de $\mathbb{R}^n$, se existir algum tipo de dependência linear entre os vetores $P_1, P_2, \ldots, P_k$, então o mesmo tipo de dependência linear também existe entre os vetores $P'_1, P'_2, \ldots, P'_k$. Esta condição pode ser resumida através da equivalência:

$$\text{se } \lambda = (\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_k) \in \mathbb{R}^k \text{ então, } \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, P_i = \vec{0} \quad \Leftrightarrow \quad \sum_{i=1}^{k} \lambda_i\, P'_i = \vec{0} \, . \tag{2.2}$$

Deste modo, as condições (2.1) e (2.2) são condições necessárias para a existência de uma isometria $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $f(P_i) = P'_i$, para $i = 1, 2, \ldots, k$. Nesta seção, veremos que a condição (2.2) é uma consequência da condição (2.1) e que esta condição (2.1) é uma condição necessária e suficiente para a existência da isometria f.

Antes de apresentar estes resultados, vamos relembrar algumas definições básicas de álgebra linear.

Definição 2.2 *Sejam V e W subespaços de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que V e W são* **ortogonais** *se $\langle v, w\rangle = 0$ para quaisquer vetores $v \in V$ e $w \in W$. Se este é o caso escrevemos $V \perp W$.*

Definição 2.3 *Sejam V e W subespaços de $\mathbb{R}^n$. Dizemos que $\mathbb{R}^n$ é a* **soma direta ortogonal** *de V e W se $\mathbb{R}^n = V \oplus W$ e se V e W são subespaços ortogonais de $\mathbb{R}^n$. Se este é o caso, escrevemos $\mathbb{R}^n = V \bigoplus W$. De modo mais geral, escrevemos $V \bigoplus W$ para indicar uma soma direta entre dois subespaços ortogonais. Analogamente podemos definir uma soma direta ortogonal de mais de duas parcelas.*

Definição 2.4 *Se V e W são subespaços de mesma dimensão de $\mathbb{R}^n$, uma transformação linear $T : V \to W$ é uma* **isometria** *entre V e W se*

$$\langle T(x), T(y)\rangle \;=\; \langle x, y\rangle \;\; \forall\; x, y \in V.$$

Quando existe uma tal isometria dizemos que V e W são **isomorfos**. *Observe que uma tal isometria sempre é um isomorfismo linear entre V e W.*

Na próxima proposição escrevemos $\mathbb{R}^n$ como uma soma direta ortogonal de duas parcelas. Por indução, verifica-se que ela também é verdadeira no caso de uma soma direta ortogonal com um número qualquer de parcelas.

Proposição 2.1 *Sejam $f : V \to V'$ e $g : W \to W'$ isometrias entre subsepaços de $\mathbb{R}^n$. Se $\mathbb{R}^n = V \bigoplus W$, então $\mathbb{R}^n = V' \bigoplus W'$ e a seguinte transformação linear é uma isometria de $\mathbb{R}^n$*

$$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$$
$$T(v + w) = f(v) + g(w), \quad \forall\; v \in V \;\text{ e } w \in W.$$

Agora vamos começar a responder a pergunta formulada no início desta seção.

Proposição 2.2 *Sejam $(P_1, P_2, \ldots, P_k)$ e $(P'_1, P'_2, \ldots, P'_k)$ dois conjuntos ordenados de vetores de $\mathbb{R}^n$. Se a matriz de Gram de $(P_1, P_2, \ldots, P_k)$ é igual a matriz de Gram de $(P'_1, P'_2, \ldots, P'_k)$, então a condição (2.2) é satisfeita.*

DEM.: Seja G matriz de Gram dos vetores $P_1, \ldots, P_k$ e seja G' a matriz de Gram dos vetores $P'_1, \ldots, P'_k$. Suponhamos que $G = G'$, isto é, suponhamos que $g_{ij} = \langle P_i, P_j\rangle$ seja igual a $g'_{ij} = \langle P'_i, P'_j\rangle$ para todo i e j. Devemos mostrar que, sob todas estas hipóteses, a condição (2.2) é válida. Então suponhamos que

$$x_1 P_1 + \cdots + x_k P_k = \vec{0}\ ,$$

para um certo vetor $x = (x_1, \ldots, x_k) \in \mathbb{R}^k$. Devemos mostrar que, para estes mesmos coeficientes $x_1, \ldots, x_k$, temos que $x_1 P'_1 + \cdots + x_k P'_k = \vec{0}$. Para começar, observe que a i-ésima componente do vetor $Gx \in \mathbb{R}^k$ é dada por:

$$(Gx)_i = \sum_{j=1}^{k} g_{ij} x_j = \sum_{j=1}^{k} \langle P_i, P_j\rangle x_j = \left\langle P_i, \sum_{j=1}^{k} x_j P_j \right\rangle = \langle P_i, \vec{0}\rangle = 0\ . \tag{2.3}$$

Como $(Gx)_i = 0$ e i é arbitrário, concluímos que $Gx = \vec{0}$. Daí $x^t G x = 0$ e como $G = G'$ obtemos $x^t G' x = 0$. Mas,

$$x^t G' x \;=\; \sum_{i,j=1}^{k} x_i g'_{ij} x_j \;=\; \sum_{i,j=1}^{k} \langle P'_i, P'_j \rangle x_i x_j \;=\; \sum_{i,j=1}^{k} \langle x_i P'_i, x_j P'_j \rangle \;=\; \left\langle \sum_{j=1}^{k} x_j P'_j \,,\, \sum_{j=1}^{k} x_j P'_j \right\rangle \;=\; 0 \,.$$

Portanto concluímos que se $v = \sum_{j=1}^{k} x_j P'_j$ então $\langle v, v \rangle = 0$. Isto implica que $v = \vec{0}$, ou seja, $v = \sum_{j=1}^{k} x_j P'_j = x_1 P'_1 + \cdots + x_k P'_k = \vec{0}$, como queríamos demonstrar.

A implicação inversa $x_1 P'_1 + \cdots + x_k P'_k = \vec{0} \;\Rightarrow\; x_1 P_1 + \cdots + x_k P_k = \vec{0}$ tem demonstração análoga à que acabamos de fazer.

∎

Teorema 2.2 *Sejam* $(P_1, P_2, \ldots, P_k)$ *e* $(P'_1, P'_2, \ldots, P'_k)$ *dois conjuntos ordenados de vetores em* $\mathbb{R}^n$. *Existe uma isometria* $f \in O(n)$ *tal que* $f(P_i) = P'_i$, *para* $i = 1, 2, \ldots, k$, *se, e somente se, a condição* (2.1) *é satisfeita.*

Dem.: Como observado no início deste capítulo, a condição (2.1) é uma hipótese necessária para a existência da desejada isometria f.

Reciprocamente, suponhamos que $(P_1, P_2, \ldots, P_k)$ e $(P'_1, P'_2, \ldots, P'_k)$ são dois conjuntos ordenados de vetores em $\mathbb{R}^n$ que satisfazem a condição (2.1). O resultado anterior implica que a condição (2.2) também é satisfeita. Vamos mostrar a existência da desejada isometria f. Para isto, considere os seguintes subespaços de $\mathbb{R}^n$:

$$W = \operatorname{span}\{P_1, P_2, \ldots, P_k\} \;\text{ e }\; W' = \operatorname{span}\{P'_1, P'_2, \ldots, P'_k\} \,.$$

Entre os vetores $P_1, P_2, \ldots, P_k$ vamos considerar um subconjunto linearmente independente de vetores que também geram W. Simplesmente para não deixar a notação muito carregada, reordenando os vetores $(P_1, P_2, \ldots, P_k)$, e depois reordenando os respectivos vetores em $(P'_1, P'_2, \ldots, P'_k)$, vamos supor que os primeiros m vetores em $(P_1, P_2, \ldots, P_k)$ formem uma base de W. Isto é, vamos supor que $\{P_1, P_2, \ldots, P_m\}$ seja uma base de W.

Afirmamos que os respectivos vetores de W', $P'_1, P'_2, \ldots, P'_m$, formam um conjunto linearmente independente. De fato, utilizando (2.2) temos que:

$$\begin{aligned}
x_1 P'_1 + \cdots + x_m P'_m = \vec{0} \quad &\Rightarrow\; x_1 P'_1 + \cdots + x_m P'_m + 0P'_{m+1} + \cdots 0P'_k = \vec{0} \;\Rightarrow \\
&\Rightarrow\; x_1 P_1 + \cdots + x_m P_m + 0P_{m+1} + \cdots 0P_k = \vec{0} \;\Rightarrow \\
&\Rightarrow\; x_1 P_1 + \cdots + x_m P_m = \vec{0} \;\Rightarrow \\
&\Rightarrow\; x_1 = \cdots = x_m = 0,
\end{aligned}$$

pois os vetores $P_1, \ldots, P_m$ são linearmente independentes.

Afirmamos também que os vetores $P'_1, P'_2, \ldots, P'_m$ geram W'. Observe que para demonstrar isso, é suficiente mostrar que para todo $i > m$, $i \leq k$, o vetor P'_i é uma combinação linear dos vetores $P'_1, P'_2, \ldots, P'_m$. Vamos mostrar isso. De fato, como $P_1, \ldots, P_m$ geram W, para todo $i > m$ existem escalares $x_1, \ldots, x_m$ tais que $P_i = x_1P_1 + \cdots + x_mP_m$. Logo, $x_1P_1 + \cdots + x_mP_m - P_i = \vec{0}$ e de (2.2) obtemos $x_1P'_1 + \cdots + x_mP'_m - P'_i = \vec{0} \Rightarrow P'_i = x_1P'_1 + \cdots + x_mP'_m$.

Portanto acabamos de demonstrar que $\{P'_1, P'_2, \ldots, P'_m\}$ é uma base de W' e que, em particular, $\dim(W) = \dim(W')$. Considere agora a seguinte transformação linear $\sigma : W \to W'$ entre os subespaços W e W' de $\mathbb{R}^n$, definida através dos seguintes valores na base $\{P_1, \ldots, P_m\}$ de W:

$$\sigma(P_j) = P'_j, \; j = 1, 2, \ldots, m \; .$$

Como $\{P_1, \ldots, P_m\}$ é base de W, e como σ transforma esta base na base $\{P'_1, \ldots, P'_m\}$ de W', vemos que $\sigma : W \to W'$ é um isomorfismo linear. Agora, utilizando a hipótese (2.1), que nos diz que a matriz de Gram dos vetores $P_1, P_2, \ldots, P_k$ é igual a matriz de Gram dos vetores $P'_1, P'_2, \ldots, P'_k$, é fácil mostrar que σ preserva o produto escalar usual de $\mathbb{R}^n$ retrito à W. Isto é,

$$\langle \sigma(x), \sigma(y) \rangle = \langle x, y \rangle, \; \forall \; x, y \in W \; .$$

Portanto, concluímos que $\sigma : W \to W'$ é uma isometria entre dois subespaços de $\mathbb{R}^n$. Observe que, por definição, $\sigma(P_j) = P'_j$ para todo $j \in \{1, 2, \ldots, m\}$. Além disso, para todo $i > m$, $i \leq k$, de (2.2), vemos que se $P_i = x_1P_1 + \cdots + x_mP_m$ então $P'_i = x_1P'_1 + \cdots + x_mP'_m$. Daí é fácil provar que $\sigma(P_i) = P'_i$ para todo $i \in \{m+1, m+2, \ldots, k\}$. Portanto, temos que

$$\sigma(P_i) = P'_i \; , \quad \forall \; i = 1, 2, \ldots, k \; . \tag{2.4}$$

Se $m < n$, considere os complementos ortogonais $W^\perp$ de W e $W'^\perp$ de W' em $\mathbb{R}^n$. Como $\dim(W) = \dim(W')$ temos que os seus complementos ortogonais tem a mesma dimensão. Considerando qualquer isometria $\eta : W^\perp \to W'^\perp$ defina a seguinte transformação linear $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$

$$f : W \bigoplus W^\perp \longrightarrow W' \bigoplus W'^\perp$$
$$f(x+y) = \sigma(x) + \eta(y) \quad x \in W \;\; \text{e} \;\; y \in W^\perp \; .$$

Pela proposição 2.1 temos que f é uma isometria de $\mathbb{R}^n$ que estende $\sigma : W \to W'$ para todo o espaço $\mathbb{R}^n$. Isto é, $f(w) = \sigma(w)$, para todo $w \in W$. Como $P_i \in W$ para $i = 1, 2, \ldots, k$, concluímos que $f(P_i) = \sigma(P_i) = P'_i$ pela igualdade (2.4). Portanto concluímos que f é a desejada isometria de $\mathbb{R}^n$ que leva P_i no respectivo vetor P'_i.

∎

Como uma aplicação do teorema anterior, vamos demonstrar a seguinte proposição, que será utilizada na seção 5.2.

Proposição 2.3 *Seja W um subespaço de $\mathbb{R}^n$ e sejam N_1 e N_2 vetores de mesma norma, ambos ortogonais a W. Existe $f \in O(n)$ tal que $f(N_1) = N_2$ e $f(w) = w$ para todo $w \in W$.*

DEM.: Seja $\{w_1, \ldots, w_k\}$ uma base de W. Como os seguintes conjuntos ordenados de vetores de $\mathbb{R}^n$, $(w_1, \ldots, w_k, N_1)$ e $(w_1, \ldots, w_k, N_2)$, possuem as mesmas matrizes de Gram, o teorema anterior garante que existe uma isometria f de $\mathbb{R}^n$ que leva cada vetor de um conjunto no respectivo vetor do outro conjunto. Daí f age como a identidade em W e $f(N_1) = N_2$.

∎

Capítulo 3

Ângulos principais determinam a posição relativa de pares de subespaços

Sejam (U, V) e (U', V') dois pares de subespaços de $\mathbb{R}^n$ tais que $\dim U = \dim U'$ e $\dim V = \dim V'$. Se existe uma isometria $f \in O(n)$ tal que $f(U) = U'$ e $f(V) = V'$ então os pares (U, V) e (U', V') possuem os mesmos ângulos principais. Neste capítulo vamos demonstrar que vale a recíproca deste resultado. Ou seja, vamos demonstrar que se dois pares de subespaços de $\mathbb{R}^n$ possuem os mesmos ângulos principais então existe uma isometria linear de $\mathbb{R}^n$ que transforma um par no outro par.

Então vamos considerar dois subespaços U e V de $\mathbb{R}^n$, $\dim U = p$, $\dim V = q$, $1 \leq p \leq q$. Sejam $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \cdots \leq \theta_p$ os ângulos principais do par (U, V). Também vamos considerar $\{u_1, \ldots, u_p\}$ uma base ortonormal de vetores principais de U, $\{v_1, \ldots, v_p\}$ um conjunto ortonormal de vetores principais de V e, se $p < q$, vamos considerar vetores unitários ortogonais $v_{p+1}, \ldots, v_q$ que completa o conjunto $\{v_1, \ldots, v_p\}$ a uma base ortonormal $\{v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_q\}$ de V. Sabemos que os vetores principais são tais que $\cos\theta_i = \langle u_i, v_i \rangle$ para $i = 1, \ldots, p$.

Considere agora o seguinte conjunto ordenado $(u_1, \ldots, u_p, v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_q)$ de vetores de $\mathbb{R}^n$. De acordo com o teorema 1.1, a matriz de Gram deste conjunto de vetores é

$$G = \left[\begin{array}{c|c} I_p & M \\ \hline M^t & I_q \end{array}\right]$$

sendo I_p matriz identidade $p \times p$, I_q matriz identidade $q \times q$ e

$$M = [\Gamma \mid 0]_{p \times q}$$

em que $\Gamma = \operatorname{diag}(\cos(\theta_1), \ldots, \cos(\theta_p))$.

Agora vamos considerar um outro par de subespaços (U', V') de $\mathbb{R}^n$, $\dim U' = p$, $\dim V' = q$, que possuem os mesmos ângulos principais do par (U, V). Como no caso anterior, vamos considerar bases ortonormais de vetores principais $\{u'_1, \ldots, u'_p\}$ de U' e $\{v'_1, \ldots, v'_p, v'_{p+1}, \ldots, v'_q\}$ de V' tais que $\cos\theta_i = \langle u'_i, v'_i \rangle$ para $i = 1, \ldots, p$.

De modo análogo ao caso anterior, a matriz de Gram G' do conjunto ordenado $(u'_1, \ldots, u'_p, v'_1, \ldots, v'_p, v'_{p+1}, \ldots, v'_q)$ é igual a matriz G.

Como $G = G'$, pelo teorema 2.2, existe uma isometria linear $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $f(u_i) = u'_i$ para $i = 1, \dots p$ e $f(v_j) = v'_j$ para $j = 1, \dots, q$. Isto implica que $f(U) = U'$ e $f(V) = V'$ e portanto f transforma o par de subespaços (U, V) no par (U', V'). Isto é a demonstração do seguinte teorema.

Teorema 3.1 *Sejam (U, V) e (U', V') dois pares de subespaços de $\mathbb{R}^n$ tais que* $\dim U = \dim U'$ *e* $\dim V = \dim V'$. *Existe $f \in O(n)$ tal que $f(U) = U'$ e $f(V) = V'$ se, e somente se, estes pares possuem os mesmos ângulos principais.*

Capítulo 4

Subespaços em posição geral

No estudo de ângulos principais, para a caracterização da posição relativa de pares de subespaços em $\mathbb{R}^n$, em muitos artigos, como [10], [11] e [3], encontramos somente o estudo de pares de subespaços em "posição geral". Neste capítulo vamos entender o que isto significa e vamos mostrar porque é suficiente considerar apenas este caso.

Então vamos considerar dois subespaços U e V de $\mathbb{R}^n$, $\dim U = p$, $\dim V = q$, $1 \leq p \leq q$. Sejam $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \cdots \leq \theta_p$ os ângulos principais do par (U, V). Também vamos considerar $\{u_1, \ldots, u_p\}$ uma base ortonormal de vetores principais de U, $\{v_1, \ldots, v_p\}$ um conjunto ortonormal de vetores principais de V tais que $\langle u_i, v_j \rangle = \delta_{ij} \cos \theta_i$ para $i, j = 1, \ldots, p$. Mais ainda, se $p < q$, vamos considerar vetores unitários ortogonais $v_{p+1}, \ldots, v_q$ que completa o conjunto $\{v_1, \ldots, v_p\}$ a uma base ortonormal $\{v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_q\}$ de V.

Suponhamos agora que os ângulos principais $0 \leq \theta_1 \leq \theta_2 \leq \cdots \leq \theta_p \leq \dfrac{\pi}{2}$ estão distribuídos do seguinte modo:

- $\theta_1 = \cdots = \theta_k = 0$.
- $0 < \theta_{k+1} \leq \cdots \leq \theta_{k+r} < \dfrac{\pi}{2}$.
- $\theta_{k+r+1} = \cdots = \theta_p = \dfrac{\pi}{2}$.

Aqui k e r são dois números inteiros tais que $k, r \geq 0$ e $k + r \leq p$.

Considere agora os seguintes subespaços de U e V

$$U_1 = [u_1, \ldots, u_k] \qquad U_2 = [u_{k+1}, \ldots, u_{k+r}] \qquad U_3 = [u_{k+r+1}, \ldots, u_p]$$

$$V_1 = [v_1, \ldots, v_k] \qquad V_2 = [v_{k+1}, \ldots, v_{k+r}] \qquad V_3 = [v_{k+r+1}, \ldots, v_p] \qquad V_4 = [v_{p+1}, \ldots, v_q]$$

em que, por exemplo, $[u_1, \ldots, u_k]$ representa o espaço gerado pelos vetores $u_1, \ldots, u_k$. Como $\{u_1, \ldots, u_p\}$ e $\{v_1, \ldots, v_p, v_{p+1}, \ldots, v_q\}$ são bases ortogonais de U e V segue que

$$U = U_1 \bigoplus U_2 \bigoplus U_3$$

$$V = V_1 \bigoplus V_2 \bigoplus V_3 \bigoplus V_4.$$

Observações:

1. Como $\theta_i = 0$ para $i = 1, \ldots, k$ temos que $u_i = v_i$ para $i = 1, \ldots, k$. Mais ainda, $\dim(U \cap V) = k$ e $\{u_1, \ldots, u_k\} = \{v_1, \ldots, v_k\}$ é uma base para $U \cap V = U_1 = V_1$.
2. A proposição 1.4 implica que $U_i \perp V_j$ se $i \neq j$.
3. O teorema 1.1 implica que $U_3 \perp V$, $V_3 \perp U$ e $V_4 \perp U$.
4. $U_2 \cap V_2 = \{\vec{0}\}$ e portanto $\dim(U_2 + V_2) = 2r$.

   DEM.: Seja x um vetor tal que $x \in U_2 \cap V_2$. Então existem escalares α_i e β_i tais que $x = \alpha_1 u_{k+1} + \cdots + \alpha_r u_{k+r} = \beta_1 v_{k+1} + \cdots + \beta_r v_{k+r}$. Calculando $\langle x, u_{k+i} \rangle$ obtemos $\alpha_i = \beta_i \cos\theta_i$. Calculando $\langle x, v_{k+i} \rangle$ obtemos $\alpha_i \cos\theta_i = \beta_i$. Estas igualdades implicam que $\alpha_i = \alpha_i \cos^2\theta_i$. Como $\cos^2\theta_i \neq 1$ obtemos $\alpha_i = 0$ e portanto $x = \vec{0}$. ∎

Denotando por $S(U_2, V_2) = U_2 \oplus V_2$ o espaço gerado por U_2 e V_2, as observações acima implicam a seguinte soma direta ortogonal

$$U + V = V_1 \bigoplus S(U_2, V_2) \bigoplus V_3 \bigoplus V_4 \bigoplus U_3 \ .$$

Se $U + V \neq \mathbb{R}^n$, ou seja se $p + q - k < n$, considerando o espaço $R = (U + V)^{\perp}$ obtemos a seguinte decomposição de todo o espaço ambiente $\mathbb{R}^n$.

$$\mathbb{R}^n = V_1 \bigoplus S(U_2, V_2) \bigoplus V_3 \bigoplus V_4 \bigoplus U_3 \bigoplus R \ . \tag{4.1}$$

Nesta soma direta, cada parcela possui a seguinte interpretação.

Proposição 4.1 *Utilizando a notação anterior,*

- $U \cap V = U_1 = V_1$.
- $U \cap V^{\perp} = U_3$.
- $U^{\perp} \cap V = V_3 \oplus V_4$.
- $U^{\perp} \cap V^{\perp} = R$.

DEM.:

- A igualdade $U \cap V = U_1 = V_1$ segue diretamente da definição de ângulos principais e dos espaços U_i e V_j.

- Vamos demonstrar que $U \cap V^\perp = U_3$. Como $U_3 \subset U$ e $U_3 \perp V$, obtemos $U_3 \subset U \cap V^\perp$. Por outro lado, seja $x \in U \cap V^\perp$. Podemos escrever $x = x_1 + x_2 + x_3$ com $x_i \in U_i$. Como $U_1 = V_1$, vemos que $x_1 \in V_1$ e portanto $\langle x, x_1 \rangle = 0$. Das observações da página 24, temos que $\langle x_2, x_1 \rangle = \langle x_3, x_1 \rangle = 0$. Como $\langle x, x_1 \rangle = \langle x_1, x_1 \rangle + \langle x_2, x_1 \rangle + \langle x_3, x_1 \rangle$, obtemos $\langle x_1, x_1 \rangle = 0$. Daí vemos que $x_1 = \vec{0}$.

  Agora vamos mostrar que $x_2 = \vec{0}$. Como $x_2 \in U_2$ podemos escrever $x_2 = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i u_{k+i}$. Considere o seguinte vetor $v_2 = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i v_{k+i}$ de V_2. Temos que $\langle x_2, v_2 \rangle = \sum_{i=1}^{r} \alpha_i^2 \cos(\theta_{k+i})$. Como $\langle x, v_2 \rangle = 0$ pois $x \in U \cap V^\perp$ e $v_2 \in V$, $\langle x_1, v_2 \rangle = 0$ pois $x_1 = \vec{0}$ e $\langle x_3, v_2 \rangle = 0$ pois $U_3 \perp V_2$ e como $\langle x, v_2 \rangle = \langle x_1, v_2 \rangle + \langle x_2, v_2 \rangle + \langle x_3, v_2 \rangle$, obtemos $\langle x_2, v_2 \rangle = 0$. Daí

$$\sum_{i=1}^{r} \alpha_i^2 \cos(\theta_{k+i}) = 0 \ .$$

  Como $0 < \cos(\theta_{k+i}) < 1$ para $i = 1, \ldots, r$ concluímos que $\alpha_i = 0$ para $i = 1, \ldots, r$ e portanto $x_2 = \vec{0}$. Portanto $x = x_1 + x_2 + x_3 = x_3$ e assim $x \in U_3$. Isto demonstra que $U \cap V^\perp \subset U_3$.

- A igualdade $U^\perp \cap V = V_3 \oplus V_4$ pode ser demonstrada de modo análogo a que acabamos de fazer

- A igualdade $U^\perp \cap V^\perp = (U + V)^\perp$ é uma propriedade geral, válida para quaisquer subespaços de $\mathbb{R}^n$.

$\blacksquare$

Utilizando (4.1) e as igualdades acima, obtemos a seguinte decomposição de $\mathbb{R}^n$.

$$\mathbb{R}^n = (U \cap V) \bigoplus S(U_2, V_2) \bigoplus (U^\perp \cap V) \bigoplus (U \cap V^\perp) \bigoplus (U^\perp \cap V^\perp) \ . \tag{4.2}$$

Vamos considerar agora um outro par (U', V') de subespaços de $\mathbb{R}^n$ tais que $\dim U' = p$ e $\dim V' = q$. Repetindo tudo o que foi feito acima para estes subspaços obtemos, de modo análogo, a seguinte decomposição de $\mathbb{R}^n$.

$$\mathbb{R}^n = (U' \cap V') \bigoplus S(U_2', V_2') \bigoplus (U'^\perp \cap V') \bigoplus (U' \cap V'^\perp) \bigoplus (U'^\perp \cap V'^\perp) \ . \tag{4.3}$$

É claro que para existir uma isometria $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ tal que $f(U) = U'$ e $f(V) = V'$ os subespaços

$$U \cap V \ , \quad U \cap V^\perp \ , \quad U^\perp \cap V \text{ e } U^\perp \cap V^\perp$$

devem ser isomorfos aos respectivos subespaços

$$U' \cap V' \ , \quad U' \cap V'^{\perp} \ , \quad U'^{\perp} \cap V' \text{ e } \ U'^{\perp} \cap V'^{\perp} \ .$$

Observe que a existência destes isomorfismos são condições necessárias naturais para a existência de f. Então, comparando as decomposições (4.2) e (4.3), além destas condições naturais, para existir a desejada isometria f que transforma o par (U, V) no par (U', V'), pela proposição 2.1, basta existir uma isometria $T : R(U_2, V_2) \to R(U'_2, V'_2)$ que transforma o par (U_2, V_2) no par (U'_2, V'_2).

Neste sentido, faz sentido analisar apenas pares de subsespaços em "posição geral".

Definição 4.1 *Dois subespaços U e V de $\mathbb{R}^n$ estão em* **posição geral** *se*

$$U \cap V = \{\vec{0}\} \ , \quad U \cap V^{\perp} = \{\vec{0}\} \ , \quad U^{\perp} \cap V = \{\vec{0}\} \quad e \quad U^{\perp} \cap V^{\perp} = \{\vec{0}\} \ .$$

Deste modo, se U e V estão em posição geral, $U = U_2$, $V = V_2$ e, de acordo com (4.2),

$$\mathbb{R}^n = S(U_2, V_2) = U_2 \oplus V_2 = U \oplus V \ .$$

Portanto $n = 2r$ sendo $r = \dim(U) = \dim(V)$.

Vejamos agora que, neste caso, podemos construir uma base de $\mathbb{R}^n$ de modo que os vetores principais de U e V são como no exemplo da página 12.

Então vamos considerar U e V subespaços em posição geral de $\mathbb{R}^{2p}$, sendo $\dim(U) = \dim(V) = p$. Sejam $\{u_1, \ldots, u_p\}$ e $\{v_1, \ldots, v_p\}$ bases ortonormais de vetores principais de U e V de modo que $\langle u_i, v_j \rangle = \delta_{ij} \cos(\theta_i)$ onde $0 < \theta_i \leq \cdots \leq \theta_p < \dfrac{\pi}{2}$ são os ângulos principais de U e V. Para $i = 1, \ldots, p$ defina $w_i = u_i$ e $w_{p+i} = \dfrac{1}{\operatorname{sen}(\theta_i)}(-\cos(\theta_i) u_i + v_i)$.

É fácil verificar que $\{w_1, \ldots, w_p, w_{p+1}, \ldots, w_{2p}\}$ é uma base ortonormal de $\mathbb{R}^{2p}$ de modo que

- $\{u_1, \ldots, u_p\} = \{w_1, \ldots, w_p\}$ é uma base ortonormal de U.
- $\{v_1, \ldots, v_p\} = \{\cos\theta_1 w_1 + \operatorname{sen}\theta_1 w_{p+1}, \ldots, \cos\theta_p w_p + \operatorname{sen}\theta_p w_{2p}\}$ é uma base ortonormal de V.

Isto nos mostra que estamos exatamente na mesma situação do exemplo da página 12, tornando a construção dada naquele exemplo uma construção bastante geral.

Capítulo 5

Subespaços afins de $\mathbb{R}^n$

Neste capítulo vamos mostrar que se U_x e V_y são dois subspaços afins de $\mathbb{R}^n$, então as suas posições relativas, a menos de isometrias lineares e translações, ficam completamente determinadas pelos ângulos principais do par (U, V) e pela distância entre U_x e V_y. Entretanto, antes de demonstrar este resultado, precisamos definir e enunciar algumas propriedades da distância entre dois subsespaços afins de $\mathbb{R}^n$. A definição que será apresentada é análoga a da distância entre duas retas reversas em $\mathbb{R}^3$, quando são considerados dois planos paralelos, cada um deles contendo cada uma das retas dadas e também é considerada uma reta ortogonal e concorrente às duas retas reversas dadas.

Para começar, observe que se $U_x \cap V_y \neq \emptyset$ então, aplicando uma translação, podemos transladar esta interseção para a origem. E assim, em vez de considerar subespaços afins, podemos considerar subespaços vetoriais U e V de $\mathbb{R}^n$. Daí, como nas seções anteriores vimos que pares de subespaços vetoriais são caracterizados pelos seus ângulos principais, podemos concluir que o mesmo ocorre para pares de subespaços afins que são concorrentes. Ou seja, quando a distância entre dois subepaços afins é igual a zero, a posição relativa deles é caracterizada pelos ângulos principais. Portanto, falta somente analisar o caso em que os dois subespaços afins são disjuntos. Durante todo este capítulo, este será o caso considerado.

Então sejam U_x e V_y dois pares de subespaços afins disjuntos. Aplicando uma translação pelo vetor $-x$, podemos supor que um destes subespaços contém a origem, de modo que ele passa a ser um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. Portanto, sempre que for o caso, é suficiente considerar pares (U, V_w) em que U é um subespaço vetorial e V_w é um subespaço afim de $\mathbb{R}^n$, tais que $U \cap V_w = \emptyset$.

5.1 Distância entre subespaços afins de $\mathbb{R}^n$

Definição 5.1 *Seja V um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$. Dado um vetor w de $\mathbb{R}^n$ tal que $w \notin V$, o conjunto*

$$V_w = \{v + w \mid v \in V\}$$

é um **subespaço afim** *de $\mathbb{R}^n$. Assim se $T_w : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ é a translação $T_w(x) = x + w$, então V_w é a imagem de V por T_w.*

Observação: Para apresentar um subespaço afim V_w de $\mathbb{R}^n$ precisamos então de um subespaço vetorial V e de um vetor $w \notin V$. Observamos que este vetor w não é único, pois trocando w por $w_1 = w + v$, para qualquer vetor $v \in V$, vemos que $V_w = V_{w_1}$.

Proposição 5.1 *Seja U um subespaço vetorial e seja V_w um subespaço afim de $\mathbb{R}^n$. Então $U \cap V_w = \emptyset$ se, e somente se, $w \notin U + V$.*

Dem.: Se $w \in U + V$ então podemos escrever $w = u + v$ para algum vetor $u \in U$ e algum vetor $v \in V$. Daí $w - v = u$. Como $w - v \in V_w$ e $u \in U$ concluímos que $w - v = u \in V_w \cap U$, e portanto $V_w \cap U \neq \emptyset$. Por outro lado, de modo análogo, se $V_w \cap U \neq \emptyset$ então existe um vetor $v + w$ de V_w que também está em U. Ou seja, existe vetor $v + w \in V_w$ tal que $v + w = u$ para algum $u \in U$. Daí $w = u - v \in U + V$. ∎

Ao longo de toda esta seção vamos considerar a situação da proposição anterior: U é um subespaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ e V_w é um subespaço afim de $\mathbb{R}^n$ tais que $U \cap V_w = \emptyset$, ou seja, $w \notin U + V$. Deste modo, $U + V \neq \mathbb{R}^n$ e se $m = \dim(U + V)$ então $m < n$.

Agora vamos considerar uma base $\{x_1, \ldots, x_m\}$ de $U + V$. Como $w \notin U + V$, o conjunto de vetores $\{w, x_1, \ldots, x_m\}$ é linearmente independente e gera um subespaço A de dimensão $m+1$ de $\mathbb{R}^n$. Considere agora o complemento ortogonal $A^\perp$ de A em $\mathbb{R}^n$. Tomando uma base ortogonal $\{y_1, \ldots, y_k\}$ de $A^\perp$, podemos completar o conjunto $\{w, x_1, \ldots, x_m\}$ até uma base $\{w, x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_k\}$ de $\mathbb{R}^n$. Esta base satisfaz:

$$\langle w, y_j \rangle = \langle x_i, y_j \rangle = 0, \quad i = 1, \ldots m, \quad j = 1, \ldots, k \tag{5.1}$$

$$\langle y_i, y_j \rangle = 0, \quad i \neq j \tag{5.2}$$

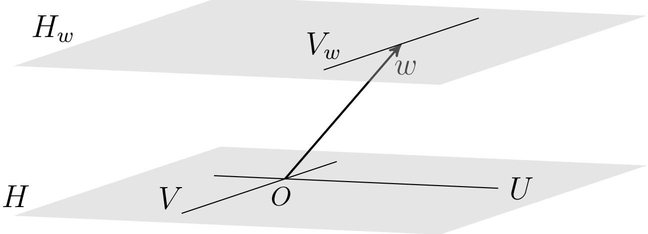
Observe que $k = n - m - 1$ e que eventualmente podemos ter $k = 0$.

Eliminando w na base de $\mathbb{R}^n$ construída logo acima, obtemos uma base

$$\{x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_k\} \tag{5.3}$$

de um hiperplano H de $\mathbb{R}^n$ que contém $U+V$. Mais ainda, $H_w = \{h+w \mid h \in H\}$ é um hiperplano afim de $\mathbb{R}^n$ que contém V_w. Como $w \notin H$, é claro que $H \cap H_w = \emptyset$.

Logo H e H_w são hiperplanos afins de $\mathbb{R}^n$, disjuntos, tais que $U \subset H$ e $V_w \subset H_w$. Estes hiperplanos serão importantes na definição da distância entre U e V_w.



Observação: Na construção dada acima para o hiperplano H, observe que o subespaço $A = \text{span}\{w, x_1, \ldots, x_m\}$ não depende da escolha do vetor w que aparece na apresentação do subespaço afim V_w. Logo A e $A^\perp$ só dependem dos subepaços U e V_w. Como

$$H = \text{span}\{x_1, \ldots, x_m, y_1, \ldots, y_k\} = (U + V) \oplus A^\perp$$

vemos que o hiperplano H construído deste modo é único, e que ele também só depende dos subespaços U e V_w.

Vamos definir agora a distância entre os hiperplanos disjuntos H e H_w. Para isto vamos considerar o complemento ortogonal $H^\perp$ de H em $\mathbb{R}^n$. Como H é um hiperplano, $H^\perp$ é um subespaço de dimensão 1 de $\mathbb{R}^n$, ou seja, podemos pensar que $H^\perp$ é uma reta. Seja N um vetor diretor desta reta, ou seja, N é um vetor normal à H. Afirmamos que existe um único número real λ tal que $\lambda N \in H_w$. De fato, para isto ocorrer precisamos mostrar que $w - \lambda N \in H$. Isto ocorre se, e somente se, $\langle w - \lambda N, N\rangle = 0$. Mas,

$$\langle w - \lambda N, N\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \langle w, N\rangle - \lambda\langle N, N\rangle = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \lambda = \frac{\langle w, N\rangle}{\langle N, N\rangle} \ .$$

Para este valor de λ, vemos que

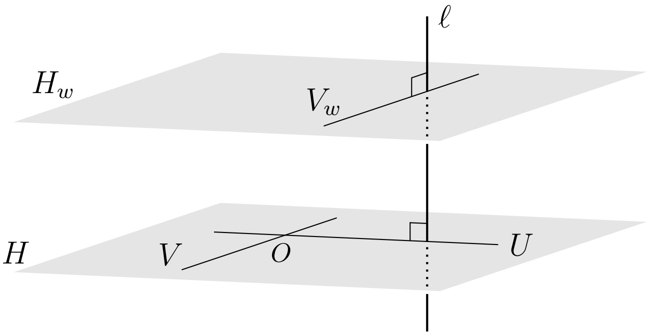
$$\lambda N \ = \ \text{Proj}_{H^\perp}(w) \ = \ \frac{\langle w, N\rangle}{\langle N, N\rangle} \ N \ \in H_w \ .$$

A **distância** entre os hiperplanos disjuntos H e H_w é definida por

$$\text{dist}(H, H_w) = \| \ \text{Proj}_{H^\perp}(w) \ \| \ \ .$$

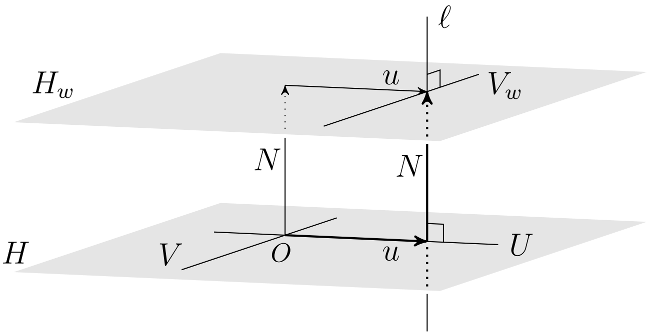
Para concluir a definição da distância entre os subespaços U e V_w, vamos mostrar que existe uma reta (subespaço afim 1-dimensional de $\mathbb{R}^n$) ortogonal e concorrente com U e V_w. De fato, veremos que esta reta é ortogonal aos hiperplanos disjuntos H e H_w e que ela também é concorrente com U e V_w. (aqui vale a pena lembrar de como é definida a distância entre duas retas reversas em $\mathbb{R}^3$)

Proposição 5.2 *Continuando com as notações desta seção, existe um subespaço afim 1-dimensional, ℓ, de $\mathbb{R}^n$ tal que ℓ é ortogonal aos hiperplanos disjuntos H e H_w e ℓ é concorrente com U e com V_w.*



Dem.: Nesta demonstração vamos denotar por N um vetor diretor da reta $H^{\perp}$ tal que $\text{dist}(H, H_w) = \| N \|$. Mais ainda, se o vetor N tem ponto inicial na origem, pertencente a H, então podemos supor que N tem ponto final em H_w.

Para demonstrar a proposição é suficiente mostrar que existe um vetor $u \in U$ tal que $u + N \in V_w$. Se este é o caso, a reta ℓ que passa pela extremidade de u e tem vetor diretor N é a reta ℓ procurada.



Então vamos mostrar que existe $u \in U$ tal que $u + N \in V_w$. Isto é, vamos mostrar que existe $u \in U$ tal que $u + N = v + w$ para algum $v \in V$. De fato, como $N \in H_w$ vemos que $N - w \in H$ e assim podemos escrever o vetor $N - w$ em termos dos vetores da base considerada em (5.3).

$$N - w = a_1x_1 + \cdots + a_mx_m + b_1y_1 + \cdots + b_ky_k.$$

Como N é ortogonal a H e como $\langle w, y_j \rangle = 0$ pelas condições (5.1), vemos que

$$\langle N - w, y_j \rangle = \langle N, y_j \rangle - \langle w, y_j \rangle = 0 - 0 = 0, \quad j = 1, \ldots, k.$$

Por outro lado, por (5.1) e (5.2), vemos que

$$0 = \langle N - w, y_j \rangle = \langle a_1x_1 + \cdots + a_mx_m + b_1y_1 + \cdots + b_ky_k\ ,\ y_j \rangle = b_j \langle y_j, y_j \rangle$$

Daí concluímos que $b_j \langle y_j, y_j \rangle = 0$ e portanto $b_j = 0$, para $j = 1, \ldots, k$. Isto significa que o vetor $N - w$ pode ser escrito do seguinte modo

$$N - w = a_1x_1 + \cdots + a_mx_m\ .$$

Como $\{x_1, \ldots, x_m\}$ é uma base de $U + V$ concluímos que $N - w \in U + V$. Assim, $N - w = u + v$ para algum vetor $u \in U$ e para algum vetor $v \in V$. Logo $-u + N = v + w$ e portanto $-u + N \in V_w$, como queríamos demonstrar. ∎

Então dados um subespaço vetorial U de $\mathbb{R}^n$ e um subespaço afim V_w de $\mathbb{R}^n$, disjuntos, concluímos que existem hiperplanos disjuntos H e H_w tais que $U \subset H$ e $V_w \subset H_w$. Mais ainda, vimos que existe uma reta ℓ ortogonal a H e a H_w tal que ℓ é concorrente com U e com V_w. Se A e B são os pontos de interseção $A = U \cap \ell$ e $B = V_w \cap \ell$, então a **distância** entre os subespaços U e V_w pode ser definida por

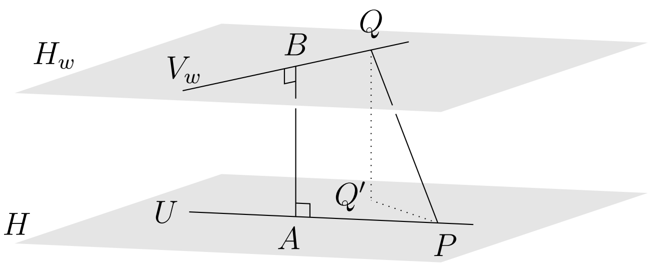
$$\text{dist}(U, V_w) = \text{dist}(H, H_w) = \text{dist}(A, B) = \| \vec{AB} \| \ .$$

Vamos finalizar esta seção com uma proposição que poderia até ser adotada como a definição da distância entre U e V_w.

Proposição 5.3 *Seja U um subepaço vetorial de $\mathbb{R}^n$ e seja V_w um subespaço afim de $\mathbb{R}^n$ tais que $U \cap V_w = \emptyset$. Então a distância entre U e V_w é tal que*

$$\text{dist}(U, V_w) \ = \ \min_{P \in U, \ Q \in V_w} \ \text{dist}(P, Q) \ .$$

DEM.: Considere um ponto qualquer $P \in U$ e considere um ponto qualquer $Q \in V_w$. Seja Q' a projeção ortogonal do ponto Q sobre o hiperplano H, isto é, o vetor de extremidades Q e Q' é um vetor ortogonal a H. Observe que $\text{dist}(A, B) = \text{dist}(Q, Q')$.



Se $Q' = P$, então $\text{dist}(A, B) = \text{dist}(P, Q)$. Por outro lado, se $Q' \neq P$, então obtemos o triângulo retângulo de vértices Q, Q' e P. Como PQ é hipotenusa e QQ' é cateto, segue que $\text{dist}(Q, Q') < \text{dist}(P, Q)$ e portanto $\text{dist}(A, B) < \text{dist}(P, Q)$. ∎

5.2 Invariantes para pares de subespaços afins de $\mathbb{R}^n$

Definição 5.2 *Sejam U_x e V_y dois subespaços afins de $\mathbb{R}^n$. Os* **ângulos principais** *do par (U_x, V_y) são definidos como os ângulos principais do par (U, V) de subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$.*

Nesta seção vamos demonstrar que dois pares de subepaços afins possuem os mesmos ângulos principais e a mesma distância se, e somente se, existe uma isometria que transforma um par no outro par. De modo mais preciso, esta afirmação está enunciada no seguinte teorema.

Teorema 5.1 *Sejam* (U, V) *e* (U', V') *dois pares de subespaços vetoriais de* $\mathbb{R}^n$ *tais que* $\dim U = \dim U'$ *e* $\dim V = \dim V'$*. Considere agora pares de subespaços afins* (U_{x_1}, V_{y_1}) *e* (U'_{x_2}, V'_{y_2})*. Existe uma isometria* φ *de* $\mathbb{R}^n$ *que transforma o par* (U_{x_1}, V_{y_1}) *no par* (U'_{x_2}, V'_{y_2}) *se, e somente se,*

(1) *os ângulos principais de* (U_{x_1}, V_{y_1}) *são iguais aos ângulos principais de* (U'_{x_2}, V'_{y_2}) *e*

(2) $\operatorname{dist}(U_{x_1}, V_{y_1}) = \operatorname{dist}(U'_{x_2}, V'_{y_2})$.

Como isometrias preservam ângulos e distâncias, a existência de uma isometria φ que transforma o par (U_{x_1}, V_{y_1}) no par (U'_{x_2}, V'_{y_2}) implica as condições (1) e (2). Deste modo, para completar a prova do teorema anterior, precisamos demonstrar a recíproca desta afirmação, ou seja, que as condições (1) e (2) implicam a existência de uma tal isometria φ.

Notação: Se f é uma aplicação de $\mathbb{R}^n$ em $\mathbb{R}^n$ e se A, B, C e D são subconjuntos de $\mathbb{R}^n$, a notação $f : (A, B) \to (C, D)$ indica que $f(A) = C$ e $f(B) = D$, ou seja, f transforma o par (A, B) no par (C, D).

Então vamos supor que (U_{x_1}, V_{y_1}) e (U'_{x_2}, V'_{y_2}) são dois pares de subespaços afins de $\mathbb{R}^n$ tais que os ângulos principais de (U_{x_1}, V_{y_1}) são iguais aos ângulos principais de (U'_{x_2}, V'_{y_2}) e que $\operatorname{dist}(U_{x_1}, V_{y_1}) = \operatorname{dist}(U'_{x_2}, V'_{y_2})$. Vamos provar que existe uma isometia φ de $\mathbb{R}^n$ tal que $\varphi : (U_{x_1}, V_{y_1}) \longrightarrow (U'_{x_2}, V'_{y_2})$.

Para começar, como os ângulos principais do par (U, V) são iguais aos ângulos principais do par (U', V'), pelo teorema 3.1, existe uma isometria $f \in O(n)$ tal que $f(U) = U'$ e $f(V) = V'$. Daí segue que $f(U_{x_1}) = U'_{f(x_1)}$ e $f(V_{y_1}) = V'_{f(y_1)}$.

Agora considere as translações $T_{-f(x_1)}$ e T_{-x_2} que são tais que $T_{-f(x_1)}(U'_{f(x_1)}) = U'$ e $T_{-x_2}(U'_{x_2}) = U'$.

A função composta $T_{-f(x_1)} \circ f$ transforma o par (U_{x_1}, V_{y_1}) em um da forma (U', V'_{w_1}), e a translação T_{-x_2} transforma o par (U'_{x_2}, V'_{y_2}) em um da forma (U', V_{w_2}), sendo $w_1 = T_{-f(x_1)} \circ f(y_1)$ e $w_2 = T_{-x_2}(y_2)$.

Deste modo, demonstrar a existência de uma isometria $\varphi : (U_{x_1}, V_{y_1}) \longrightarrow (U'_{x_2}, V'_{y_2})$ é equivalente a demonstrar a existência de uma isometria $\varphi' : (U', V'_{w_1}) \longrightarrow (U', V'_{w_2})$. Veja o diagrama comutativo a seguir.

$$\begin{tikzcd}
(U_{x_1}, V_{y_1}) \arrow[r, dotted, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & (U'_{x_2}, V'_{y_2}) \arrow[dd, "T_{-x_2}"] \\
\left(U'_{f(x_1)}, V'_{f(y_1)}\right) \arrow[d, "T_{-f(x_1)}"'] & \\
(U', V'_{w_1}) \arrow[r, dotted, "\varphi'"'] & (U', V'_{w_2})
\end{tikzcd}$$

Portanto, para demonstrar o teorema desta seção, é suficiente demonstrar a seguinte proposição mais simples, que tem como hipótese apenas a igualdade das distâncias entre os subespaços dados, uma vez que a hipótese da igualdade dos ângulos principais já foi utilizada.

Proposição 5.4 *Sejam U e V dois subespaços vetoriais, e sejam w_1 e w_2 dois vetores quaisquer de $\mathbb{R}^n$. Se $\operatorname{dist}(U, V_{w_1}) = \operatorname{dist}(U, V_{w_2})$ então existe uma isometria de $\mathbb{R}^n$ que transforma o par (U, V_{w_1}) no par (U, V_{w_2}).*

DEM.: Pela proposição 5.2, sabemos que existe uma reta de $\mathbb{R}^n$ perpendicular e concorrente a U e a V_{w_1}. Além disso, também vimos que existe um vetor $u_1 \in U$ e existe um vetor N_1, ortogonal ao subespaço $U + V$, tais que o subespaço afim V_{w_1} é igual a $V_{u_1+N_1}$ (veja observação da página 28). Deste modo, para não introduzir novas notações, vamos supor que $w_1 = u_1 + N_1$. Pela definição da distância entre dois subespaços afins de $\mathbb{R}^n$, temos que $\operatorname{dist}(U, V_{w_1}) = ||N_1||$.

De modo análogo, existe um vetor $u_2 \in U$ e existe um vetor N_2 ortogonal ao subespaço $U + V$ tais que $V_{w_2} = V_{u_2+N_2}$, sendo que $\operatorname{dist}(U, V_{w_2}) = ||N_2||$. Novamente, para não introduzir novos vetores desnecessários, vamos supor que $w_2 = u_2 + N_2$.

Como $\operatorname{dist}(U, V_{w_1}) = \operatorname{dist}(U, V_{w_2})$, vemos que $||N_1|| = ||N_2||$.

Como N_1 e N_2 são vetores de mesma norma, ambos ortogonais ao subespaço $U+V$, pela proposição 2.3, existe $f \in O(n)$ tal que $f(N_1) = N_2$ e $f(x) = x$ para todo x pertencente a $U + V$. Considere agora a translação $T_{u_2-u_1}(x) = x+u_2-u_1$. Vamos demonstrar que se $\varphi = T_{u_2-u_1} \circ f$ é a composição de f com $T_{u_2-u_1}$, então φ é a desejada isometria que transforma o par (U, V_{w_1}) no par (U, V_{w_2}). De fato,

- Se $x \in U$ então $\varphi(x) = T_{u_2-u_1}(f(x)) = T_{u_2-u_1}(x) = x + u_2 - u_1 \in U$, de modo que $\varphi(U) \subset U$. Daí, como $\varphi(U)$ e U são subespaços de mesma dimensão, podemos concluir que $\varphi(U) = U$.

- Se $v+w_1 \in V_{w_1}$, com $v \in V$, então $\varphi(v+w_1) = T_{u_2-u_1}(f(v+w_1)) = T_{u_2-u_1}(f(v+u_1+N_1)) = T_{u_2-u_1}(v+u_1+N_2) = (v+u_1+N_2)+(u_2-u_1) = v+u_2+N_2 = v+w_2 \in V_{w_2}$. Daí $\varphi(V_{w_1}) \subset V_{w_2}$ e, como estes espaços possuem a mesma dimensão, segue que $\varphi(V_{w_1}) = V_{w_2}$.

Como $\varphi(U) = U$ e $\varphi(V_{w_1}) = V_{w_2}$, concluímos que φ é uma isometria de $\mathbb{R}^n$ que transforma o par (U, V_{w_1}) no par (U, V_{w_2}).

▮

As considerações desta seção, juntamente com esta proposição, fornecem então uma demonstração para o teorema 5.1.

Capítulo 6

Algumas perguntas finais

Neste trabalho vimos que os ângulos principais caracterizam, a menos de isometrias, a posição relativa de dois subespaços vetoriais de $\mathbb{R}^n$. Após este estudo, levantamos algumas perguntas interessantes que podem motivar estudos mais aprofundados deste tema.

1. Fixadas as dimensões n, p e q, com $1 \leq p \leq q \leq n$, para quais ângulos $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \cdots \leq \theta_p$ existem subespaços U e V de $\mathbb{R}^n$ de respectivas dimensões p e q, e que possuem estes ângulos como ângulos principais?

2. Acrescentando uma constante positiva d, podemos reformular a pergunta anterior para pares de subespaços afins com distância pré-fixada igual a d.

3. Nos casos em que a resposta de alguma das perguntas anteriores for positiva, apresentar uma "posição canônica" para os subespaços U e V.

4. Dados duas ternas (U, V, W) e (U', V', W') de subespaços de $\mathbb{R}^n$, caracterizar a existência de uma isometria f de $\mathbb{R}^n$ tal que $f(U) = U'$, $f(V) = V'$ e $f(W) = W'$. A existência desta isometria pode ser caracterizada em termos dos ângulos principais dos pares (U, V), (U, W) e (V, W)? Ou existe algum outro invariante específico para triplas de subespaços?

5. Naturalmente a pergunta anterior pode ser estendida para a caracterização da existência de uma isometria entre duas k-uplas de subespaços (vetoriais ou afins) de $\mathbb{R}^n$.

6. Trocando o espaço Euclidiano $\mathbb{R}^n$ pelo espaço hiperbólico real H^n e trocando U e V por subvariedades totalmente geodésicas, caracterizar a posição relativa de duas subvariedades totalmente geodésicas de H^n. Observe que neste caso também podemos definir distância e ângulo entre duas tais subvariedades. Estes invariantes são suficientes para caracterizar a posição relativa a menos de isometrias?

7. Estender a solução da pergunta anterior para k-uplas de subvariedades totalmente geodésicas de H^n.

Vamos concluir este trabalho apresentando algumas observações sobre estas perguntas.

Observação 1. O exemplo da página 12 nos mostra que dado um conjunto de ângulos $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \cdots \leq \theta_p$, cada um deles no intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, sempre existe um par de subespaços (U, V) em **posição geral** que tem estes ângulos como ângulos principais. Entretanto, se começamos fixando as dimensões p, q e n, pode ser que nem sempre exista uma configuração de subespaços U e V de $\mathbb{R}^n$ com $\dim(U) = p$ e $\dim(V) = q$ que possuem ângulos principais iguais a valores pré-definidos, pois temos a restrição que $\theta_1 = \cdots = \theta_k = 0$ se $\dim(U \cap V) = k$. De modo mais preciso, como

$$\dim(U + V) = \dim(U) + \dim(V) - \dim(U \cap V)$$

se queremos determinar subespaços U e V de $\mathbb{R}^n$ com $\dim(U) = p$ e $\dim(V) = q$ então

$$p + q - \dim(U \cap V) \leq n$$

e portanto $\dim(U \cap V) \geq p + q - n$. Portanto, fixadas as dimensões p, q e n existem dois casos a serem considerados.

- Se $p + q - n \leq 0$, então dados quaisquer ângulos $\theta_1 \leq \theta_2 \leq \cdots \leq \theta_p$, cada um deles no intervalo $\left[0, \dfrac{\pi}{2}\right]$, existe um subspaço U de dimensão p e existe um subespaço V de dimensão q de $\mathbb{R}^n$ tal que o par (U, V) possui estes ângulos como ângulos principais.
- Se $p + q - n \geq 1$, então existem subespaços U e V de $\mathbb{R}^n$ com $\dim(U) = p$ e $\dim(V) = q$ com ângulos principais iguais a valores pré-definidos $\theta_1, \ldots, \theta_p$ se $\theta_i = 0$ para todo i de 1 até $p + q - n$.

Observação 2. A resposta da pergunta número 2 está inteiramente contida na resposta da pergunta número 1. Se existem subespaços U e V de $\mathbb{R}^n$ com dimensões e ângulos principais fixados a priori, então afastando "paralelamente" V de U ao longo de uma reta ortogonal ao subespaço $U + V$, encontramos subespaços afins V_t tal que o par (U, V_t) possui os mesmos ângulos principais do par (U, V) e é tal que $\mathrm{dist}(U, V_t)$ pode assumir qualquer número real positivo.

Observação 3. Para ilustar a complexidade das perguntas 3 e 4 pense nas seguintes configurações. Sejam r, s e t três retas no plano formando um triângulo. Sejam r', s' e t' outras três retas no plano formando um triângulo semelhante mas não congruente ao triângulo anterior. Como os ângulos são iguais e as distâncias são iguais a zero, sempre existe uma isometria de transforma duas das retas r, s e t nas respectivas duas retas de r', s' e t'. Entretanto, como os triângulos não são congruentes, não existe uma isometria do plano que transforma as três retas r, s e t nas três retas r', s' e t'. Isto nos mostra que os invariantes de pares de subespaços de $\mathbb{R}^n$ não são suficientes para caracterizar triplas de subespaços. No estudo de triplas, é necessário então que seja considerado algum outro invariante, diferente daqueles estudados neste trabalho.

Observação 4. A classificação das configurações de duplas e triplas de subespaços vetoriais indecomponíveis de $\mathbb{R}^n$ pode ser encontrada no artigo [7]. Entretanto, aparentemente, a classificação de triplas ou de um conjunto de k subespaços afins de $\mathbb{R}^n$ ainda é um problema em aberto.

Observação 5. Um estudo bastante detalhado da posição relativa de um conjunto de dois, três ou quatro subepaços de um espaço de Hilbert de dimensão infinita pode ser encontrado no artigo [4].

Observação 6. Aparentemente a classificação da posição relativa de um conjunto de k subvariedades totalmente geodésicas no espaço hiperbólico ainda é um problema em aberto.

Referências Bibliográficas

[1] H. P. Bueno, *Álgebra Linear, um segundo curso*, Textos Universitários, SBM, 2006.

[2] F. Deutsch, *The angle between subspaces of a Hilbert space*, In: S. Singh (Ed.) Approximation Theory, Wavelets and Applications, (Kluwer: Dordrecht), pp. 107-130.

[3] J. Dixmier, *Position relative de deux variétés linéaires fermées dans un espace de Hilbert*, Revue Scientifique 86 (1948) 387-399.

[4] M. Enomoto, Y. Watatani, *Relative position of four subspaces in a Hilbert space*, Advances in Mathematics 201 (2006) 263-317.

[5] A.Galántai and Cs.J.Hegedüs, *Jordan's principal angles in complex vector spaces*, Numer. Linear Algebra Appl. 2006; 13:589-598.

[6] A. Galántai, *Subspaces, angles and pairs of orthogonal projections*, Linear and Multilinear Algebra, vol. 56, no 3, may 2008, 227-260.

[7] I. M. Gelfand, V. A. Ponomarev, *Problems of linear algebra and classification of quadruples of subspaces in a finite-dimensional vector space*, Coll. Math. Spc. Bolyai 5, Tihany (1970) 163-237.

[8] H. Gunawan, O. Neswan, W. Setya-Budhi, *A formula for angles between subspaces of inner product spaces*, Beiträge zur Algebra und Geometrie, Contributions of Algebra and Geometry, Volume 46 (2005), no 2, 311-320.

[9] H. Gunawan, O. Neswan, *On angles between subspaces of inner product spaces*, J. Indones. Math. Soc, vol. 11, no 2 (2005) 129-135.

[10] P. Halmos, *Two subspaces*, Transactions of the American Mathematical Society 144 (1969) 381-389.

[11] P. Halmos, *Finite-dimensional Hilbert spaces*, The American Mathematical Monthly 77(5) (1970) 457-464.

[12] C. Jordan, *Essai sur la Géométrie à n dimensions*, Buletin de la Société Mathématique de France, 3 (1875) 103-174.

[13] A.J. Nicas, *Classifying pairs of lagrangians in a hermitian vector space*, Topology and its Applications, 42 (1991) 71-81.

[14] C. Shonkwiler, *Principal angles in terms of inner products*, notas não publicadas.