Universidade Federal de Minas Gerais

Instituto de Ciências Exatas

Departamento de Matemática

Tese de Doutorado

O Segundo Invariante de Yamabe sobre Variedades CR

Flávio Almeida Lemos

Belo Horizonte - 29/10/2013

Agradecimentos: Ao professor Ezequiel pela excepcional orientação

Aos membros da banca pela leitura e sugestções relevantes.

A minha esposa Vaneide pela enorme paciência e carinho.

Aos meus amigos Rodrigo Bissacot (Gauxo) e Patrícia (Pita) que dividiram sala comigo,

no começo do doutorado me ajudaram muito.

Aos meu amigos e colegas que fui conhecendo ao longo curso, especialmente ao grande amigo e colega Márcio Fialho (tuquimfialho).

Aos meus grandes amigos, que acompanharam por um longo tempo, Luiz Gustavo Carneiro (agradeço duas vezes, uma delas é por está na minha banca) ao grandes amigos

Rogério Hilbert(amigão do peito) e o Luiz Gustavo D Franco(Manu Brill)(também amigão).

A todos os professores do Departamento,

que me acompanharam desde a graduaçãoo até o doutorado.

A todos os funcionários do Departamento, em especial Andréa e a Kelly, pela prestatividade e paciência.

Aos meus amigos de Montes Claros que me ajudaram muito, em especial Luiz Gabriel, Elcio, Ronaldo, não tenho palavras para agradecer.

Ao grande amigo Rosivaldo Gonçalves, pela enorme colaboração, fico até sem sinônimos para dizer o quanto sou grato.

Aos meu pais que se esforçaram, com muito sacrifício, para eu poder preocupa exclusivamente com meus estudos, sem dúvida são os principais responsaveis

e a referência principal de toda a minha vida.

Finalmente, a todos que porventura eu não tenha mencionado, mas que de alguma forma contribuíram para a concretização desse projeto.

Agradecimentos: Ao professor Ezequiel pela excepcional orientação e paciência.

Aos membros da banca pela leitura e sugestões relevantes.

À minha esposa Vaneide pela enorme paciência e carinho.

Aos meus amigos Rodrigo Bissacot (Gauxo) e Patrícia (Pita) que dividiram sala comigo no começo do doutorado e me ajudaram muito.

Aos meu amigos e colegas que fui conhecendo ao longo curso, especialmente ao grande amigo e colega Márcio Fialho (tuquimfialho).

Aos meus grandes amigos, que acompanharam por um longo tempo, Luiz Gustavo Carneiro (agradeço duas vezes, a outra é por está na minha banca) ao grandes amigos Rogério Hilbert (amigo para toda hora) e o Luiz Gustavo D Franco (Manu Brill também amigão).

Á todos os funcionários do Departamento, em especial á Andréia e Kelly, pela prestatividade e paciência.

Aos meus amigos de Montes Claros que me ajudaram muito, em especial Luiz Gabriel, Élcio, Ronaldo, não tenho palavras para agradecer.

Ao grande amigo Rosivaldo Gonçalves, pela enorme colaboração, fico até sem sinômimos para dizer o quanto sou grato.

Aos meu pais que se esforçaram, com muito sacríficio, para eu poder preocupa exclusivamente com meus estudos, sem dúvida são as pessoas que são os principais responsaveis e a referência principal de toda a minha vida.

Finalmente, a todos que porventura eu não tenha mencionado, mas que de alguma forma contribuíram para a concretização desse projeto.

Sumário

1 Variedades CR do tipo hipersuperfícies **7**
1.1 Estrutra CR . . . 7
1.2 Estruturas pseudohermitianas . . . 11

2 Geometria diferencial das variedades pseudohermitianas **17**
2.1 Conexões pseudohermitianas . . . 17
2.2 Curvatura pseudohermitiana . . . 27
2.3 Mudanças na estrutura pseudohermitiana . . . 32
2.4 Hipersuperfícies em $\mathbb{C}^{n+1}$ . . . 38
2.4.1 A esfera CR . . . 43
2.4.2 O grupo de Heisenberg . . . 45
2.4.3 A transformação de Cayley . . . 47

3 Análise em variedades CR **49**
3.1 Coordenadas normais pseudohermitianas . . . 49
3.2 O sub-Laplaciano . . . 51
3.3 O espaço de Folland-Stein . . . 52
3.4 Princípio min-max para operador de Yamabe . . . 53

4 O segundo invariante de Yamabe sobre variedades CR **57**
4.1 O problema de Yamabe sobre variedades CR . . . 57
4.2 Autovalores do operador de Yamabe CR . . . 60
4.3 Caracterização variacional de $\mu_2(M, \theta)$ . . . 62
4.4 Equação de Euler-Lagrange e regularidade . . . 64
4.4.1 Primeiro resultado de regularidade . . . 64
4.4.2 O k-ésimo autovalor do operador de Yamabe para estruturas pseudohermitianas generalizadas . . . 67
4.4.3 Equação de Euler-Lagrange de um nimizador de $\lambda_2 V^{\frac{1}{n+1}}$ . . . 70
4.5 Propriedades de $\mu_2(M, \theta)$ e Teorema Principal . . . 76
4.6 Existência de um minizador para $\mu_2(M, \theta)$ . . . 82

Referências Bibliográficas **87**

Índice Remissivo **90**

Introdução

No final dos anos 70 e início dos anos 80, a geometria das variedades CR, modelo abstrato de hipersuperfícies reais em variedades complexas, atraiu a atenção de importantes matemáticos tais como Chern, Moser, Fefferman, Jacobowitz, D. Jerison, J. Lee, Tanaka, Webster, entre outros. Essa geometria é particularmente rica quando a variedade CR é estritamente pseudoconvexa. Nesse caso, existe uma estreita relação entre sua geometria e a geometria das variedades Riemannianas. Uma estrutura pseudohermitiana para uma variedade M munida de uma CR-estrutura $T_{1,0}(M)$ é uma forma de contato θ que aniquila a distribuição de Levi $H(M) = \mathrm{Re}\{T_{1,0} + T_{0,1}\}$, em que $T_{0,1} = \overline{T}_{1,0}$. Tal estrutura determina uma forma Hermitiana natural sobre a CR-estrutura $T_{1,0}(M)$, denominada forma de Levi e denotada por L_θ. A forma de Levi é bem definida (para cada CR-estrutura) módulo multiplicação por uma função suave, exatamente como ocorre na geometria Riemanniana conforme. Quando L_θ é uma forma definida, dizemos que (M, θ) é uma variedade pseudohermitiana estritamente pseudoconvexa. Nesse caso, se M é orientável, o fibrado de aniquiladores da distribuição de Levi $H(M)^\perp = \{\theta \in T^*(M) : H(M) \subset \mathrm{k}er\theta\}$ é trivial. Portanto, $H(M)^\perp$ admite uma orientação natural. Assim dizemos que uma estrutura pseudohermitiana θ é positiva, se a forma de Levi associada é positiva definida.

Uma estratégia comum na geometria conforme é determinar um representante particular na classe conforme de uma métrica Riemanniana fixada g, tal que esse representante simplifique algum aspecto da geometria. Por exemplo, temos o conhecido problema de Yamabe.

O Problem da Yamabe. Dada uma variedade Riemanniana compacta (M, g) de dimensão $n \geq 3$, encontrar uma métrica conforme à g com curvatura escalar constante.

A solução desse problema faz com que questões topológicas possam ser reduzidas à questões geométricas sobre modelos de curvaturas constantes. Para variedades compactas de dimensão 2, temos como conseqüencia do teorema de uniformização (da análise complexa), que todas admitem uma métrica com curvatura (Gaussiana) constante. Dessa maneira, cada classe de homeomorfismos de superfícies compactas possui um representante de curvatura constante. O problema de Yamabe pode ser visto como uma tentativa de generalizar esse resultado.

Em 1960, Yamabe [46] tentou solucionar esse problema usando técnicas de equações diferenciais elípticas e cálculo variacional. Ele afirmou que toda variedade Riemanniana compacta possuia uma métrica conforme de curvatura escalar constante. Entretanto, sua prova continha um erro, descoberto em 1968 por N. Trudinger [39]. Trudinger foi capaz de corrigir a prova, mas com uma restrição sobre a variedade. Para compreendermos tal restrição, descreveremos agora a abordagem de Yamabe.

Seja (M, g) uma variedade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 3$. Qualquer métrica conforme à g pode ser escrita como $\widetilde{g} = e^{-2u}g$, em que u é uma função real suave de M. Se S e $\widetilde{S}$ denotam a curvaturas escalares de g e $\widetilde{g}$, respectivamente, elas satisfazem a seguinte transformação

$$\widetilde{S} = e^{-2u}\left(S + 2(n-1)\Delta u - (n-1)(n-2)\|\nabla u\|_g^2\right),$$

em que Δu é o Laplaciano de u e ∇u é sua derivada covariante, definida com respeito à métrica Riemanniana g. Fazendo a mudança de variável $e^{-2u} = \varphi^{p-2}$, em que $p = 2n/(n-2)$, a fórmula acima se torna consideravelmente mais simples:

$$\widetilde{S} = \varphi^{1-p}\left(4\frac{n-1}{n-2}\,\Delta\varphi + S\varphi\right).$$

Dessa maneira, a métrica $\widetilde{g} = \varphi^{p-2}g$ possui curvatura escalar constante λ se, e somente se, a função φ satisfaz a seguinte equação diferencial parcial sobre M:

$$4\frac{n-1}{n-2}\,\Delta\varphi + S\varphi = \lambda\varphi^{p-1}. \tag{1}$$

Essa equação é denominada **equação de Yamabe**. Yamabe observou que essa equação é a equação de Euler-Lagrange para o funcional

$$Y(\widetilde{g}) = \frac{\int_M \widetilde{S}dV_{\widetilde{g}}}{\left(\int_M dV_{\widetilde{g}}\right)^{2/p}}, \tag{2}$$

também denominado **funcional de Yamabe**. Uma conseqüência da desigualdade de Hölder é que, para variedades compactas, o funcional Y é limitado inferiormente. Portanto podemos considerar o seguinte número:

$$\mu(M) = \inf\left\{Y(\widetilde{g}) : \widetilde{g} \text{ é conforme à } g\right\}. \tag{3}$$

A constante $\mu(M)$ é um invariante na classe conforme de (M, g), chamado **invariante de Yamabe** . O valor dessa constante é crucial na resolução do problema de Yamabe.

Podemos sintetizar essa solução em três grandes resultados devido à Yamabe, Trudinger, Aubin e Schoen.

Teorema 1 (**Yamabe [46], Trudinger [39], Aubin [1]**). *Seja $\mathbb{S}^n$ a esfera unitária com a métrica usual. Se (M, g) é uma variedade Riemanniana compacta com invariante de Yamabe $\mu(M) < \mu(\mathbb{S}^n)$, então existe uma métrica para M na classe conforme de g com curvatura escalar constante.*

Teorema 2 (**Aubin [1]**). *Se (M, g) é uma variadade Riemanniana compacta de dimensão $n \geq 6$ não localmente conformemente plana, então $\mu(M) < \mu(\mathbb{S}^n)$.*

Teorema 3 (**Schoen [37]**). *Se (M, g) é uma variadade Riemanniana compacta de dimensão 3, 4 ou 5, ou ainda, se (M, g) localmente conformemente plana, então $\mu(M) < \mu(\mathbb{S}^n)$.*

Em 1987, um problema análogo ao problema de Yamabe, porém num contexto da geometria pseudohermitiana, foi proposto por D. Jerison e J. Lee [27]. Precisamente, temos o seguinte problema de Yamabe sobre variedades CR.

O Problema de Yamabe sobre Variedades CR. Dada uma variedade pseudohermitiana (M, θ) compacta, estritamente pseudoconvexa, encontrar uma estrutura pseudohermitiana $\widetilde{\theta}$ com mesma orientação de θ tal que sua curvatura escalar pseudohermitiana seja constante.

A curvatura escalar pseudohermitiana (ou curvatura escalar de Webster), foi introduzida de maneira independente e com abordagens distintas pelos dois matemáticos S. Webster [45] e N. Tanaka [38]. Webster introduziu uma conexão linear sobre $T_{1,0}(M)$ associada a cada estrutura pseudohermitiana. Esssa conexão determina o tensor curvatura pseudohermitiano, análogo ao tensor curvatura de Riemann. Contrações desse tensor forneceM o tensor de Ricci pseudohermitiano e a curvatura escalar pseudohermitiana.

O problema de Yamabe sobre variedades CR compactas, orientáveis, estritamente pseudoconvexas, foi completamente resolvido por D. Jerison, J. Lee ([26], [27], [28], [29]), N. Gamarra e J. Yacoub ([17], [18]). A seguir, descreveremos seus resultados.

Seja (M, θ) uma variedade pseudohermitiana compacta, orientável, estritamente pseudoconvexa, de dimensão $2n + 1 \geq 3$. Qualquer estrutura pseudohermitiana sobre M com mesma orientação de θ pode ser escrita como $\widetilde{\theta} = e^{2u}\theta$, em que u é uma função suave de M. Se $\widetilde{R}$ e R denotam a curvatura escalar (pseudohermitiana) de $\widetilde{\theta}$ e θ, respectivamente, teremos a transformação

$$\widetilde{R} = e^{-u}\,(R + 2(n+1)\Delta_b u - 2n(n+1)\|\nabla u\|_\theta^2).$$

em que $\Delta_b u$ é o sublaplaciano de u e ∇u sua derivada covariante, definida com respeito a estrutura pseudohermitiana θ. Fazendo a mudança de variável $e^{2u} = u^{p-2}$, em que $p = 2 + 2/n$, a fórmula acima se torna consideravelmente mais simples:

$$\widetilde{R} = u^{1-p}\,(p\,\Delta_b u + Ru).$$

Dessa maneira, a estrutura pseudohermitiana $\widetilde{\theta} = u^{p-2}\theta$ terá curvatura escalar constante λ se, e somente se, u satisfazer a equação

$$p\,\Delta_b u + Ru = \mu u^{p-1}. \tag{4}$$

Essa equação é denominada **equação de Yamabe CR**. Jerison e Lee observaram que essa equação é a equação de Euler-Lagrange para o funcional

$$Y(\widetilde{\theta}) = \frac{\int_M \widetilde{R} dV_{\widetilde{\theta}}}{\left(\int_M dV_{\widetilde{\theta}}\right)^{2/p}}, \tag{5}$$

em que $dV_{\widetilde{\theta}} = \theta \wedge d\theta^n$ é o elemento de volume CR. Esse funcional é também denominado **funcional de Yamabe CR**. Uma conseqüência da desigualdade de Hölder é que, para variedades compactas, o funcional Y é limitado inferiormente. Portanto podemos considerar

$$\mu(M) = \inf\left\{Y(\widetilde{\theta}) : \widetilde{\theta} \text{ é conforme à } \theta\right\}. \tag{6}$$

A constante $\lambda(M)$ é um CR-invariante, isto é, depende exclusivamente da estrutura CR e não da escolha da estrutura pseudohermitiana, chamado **invariante de Yamabe CR**. Como exatamente no caso Riemanniano, o valor dessa constante é crucial na resolução do problema de Yamabe CR. Podemos sintetizar essa solução de acordo com os resultados obtidos por Jerison, Lee, Gamara e Yacoub.

Teorema 4 (Jerison, Lee [27]). *Seja $\mathbb{S}^{2n+1}$ a esfera unitária com CR-estrutura induzida de $\mathbb{C}^{n+1}$ e estrutura psedohermitiana canônica $\theta = i(\overline{\partial} - \partial)|z|^2$. Se (M, θ) é uma variedade pseudohermitiana compacta com invariante de Yamabe $\lambda(M)$, então*

(i) $\mu(M)$ depende somente da CR-estrutura de M;

(ii) $\mu(M) \leq \mu(\mathbb{S}^{2n+1})$;

(iii) se $\mu(M) < \mu(\mathbb{S}^{2n+1})$, existe uma estrutura pseudohermitiana para M, com mesma orientação de θ, com curvatura escalar constante.

Teorema 5 (Jerison, Lee [29]). *Se (M, θ) é uma variadade pseudohermitiana compacta de dimensão $2n + 1 > 3$ não localmente CR-equivalente à esfera $\mathbb{S}^{2n+1}$, então $\lambda(M) < \lambda(\mathbb{S}^{2n+1})$.*

Dessa meneira, Jerison e Lee solucionaram o problema de Yamabe no contexto CR, para os casos em que a variedade não é localmente CR-equivalente à esfera e sua dimensão é diferente de 3. O casos restantes foram solucionados em 2001 por Gamara e Yacoub. Eles obtiveram

Teorema 6 (**Gamara [17]**). *Se (M,θ) é uma variadade pseudohermitiana compacta de dimensão $2n+1$ CR-equivalente à esfera, então existe uma estrutura pseudohermitiana para M, com mesma orientação de θ, com curvatura escalar constante.*

Teorema 7 (**Gamara, Yacoub [18]**). *Se (M,θ) é uma variadade pseudohermitiana compacta de dimensão 3 não CR-equivalente à esfera, então existe uma estrutura pseudohermitiana para M, com mesma orientação de θ, com curvatura escalar constante.*

Seja (M,g) uma variedade Riemanniana n-dimensional ($n \geq 3$). Considere o operador de Yamabe

$$L_g = \frac{4(n-1)}{n-2}\Delta_g + S.$$

L_g tem conjunto discreto de autovalores

$$Spec(L_g) = \{\lambda_1(g), \lambda_2(g), \dots\}.$$

Podemos definir o invariante de Yamabe como

$$\mu(M,g) = \inf_{\widetilde{g}\in[g]} \lambda_1(\widetilde{g})V_{\widetilde{g}}^{\frac{2}{n}}.$$

Em [2] B. Ammann e E. Humbert introduziram e estudaram, em variedades Riemannianas, o invariante que chamaram de **Segundo Invariante de Yamabe**. Definido da seguinte forma

$$\mu_2(M,g) = \inf_{\widetilde{g}\in[g]} \lambda_2(\widetilde{g})V_{\widetilde{g}}^{\frac{2}{n}}.$$

Provaram o seguinte resultado.

Teorema 8 (**B. Ammann, E. Humbert [2]**). *Seja (M,g) uma variedade Riemanniana compacta, conexa, com dimensão $n \geq 3$ com $\mu_1(M,g) > 0$, então $\mu_2(M,g) \leq \mu_2(\mathbb{S}^{2n+1})$. Além disso, a igualdade ocorre se, e somente se, (M,g) é conformemente difeomorfa a $\mathbb{S}^{2n+1}$.*

Agora sendo (M,θ) uma variedade CR pseudohermitiana compacta, conexa e estritamente pseudoconvexa, definimos o **Segundo Invariante de Yamabe CR** como

$$\mu_2(M,\theta) = \inf_{\widetilde{\theta}\in[\theta]} \lambda_2(\widetilde{\theta})V_{\widetilde{\theta}}^{\frac{1}{n+1}},$$

em que $\lambda_2(\widetilde{\theta})$ é o segundo autovalor do operador de Yamabe CR. Procurando versão do teorema 8 no contexto CR, provamos o seguinte teorema.

Teorema 9 (Principal). *Seja (M, θ) uma variedade CR pseudohertiana compacta, conexa e estritamente pseudoconvexa , com dimensão CR igual a $2n+1$ e $n \geq 2$ com $\mu(M, \theta) = \mu_1(M, \theta) > 0$, então $\mu_2(M, \theta) \leq \mu_2(\mathbb{S}^{2n+1})$. Além do mais, a igualdade ocorre se, e somente se, (M, θ) é localmente CR equivalente a $\mathbb{S}^{2n+1}$.*

Chegamos também no seguinte resultado. Essa tese está organizada da seguinte forma. Nos capítulos 1 e 2, apresentamos uma introdução as variedades CR do tipo hiperfícies e o estudo de sua geometria, dando o grupo de Heisemberg como modelo básico de variedade CR. No capítulo 3, enunciamos vários resultados que serão utilizados no capítulo 4. Tomamos o grupo de Heisemberg como o modelo CR, análago ao espaço Re^n, e introduzimos o conceito de exponencial parabólica, os espaços de Folland-Stein e enunciamos resultados de mergulhos semelhantes ao caso Riemanniano. Finalmente, no capítulo 4, provamos uma caractirezação do segundo invariante de Yamabe, regularidade de soluções para alguns problemas, cotas inferior e superior para o Segundo Invariante de Yamabe e apresentamos a demosntração do Teorema Principal. Ainda no capítulo 4, finalizamos a tese com o seguinte teorema.

Teorema 10. *Seja (M, θ) uma variedade CR pseudohertiana compacta, conexa e estritamente pseudoconvexa , com dimensão CR igual a $2n+1$ e $n \geq 2$ com $\mu_1(M, \theta) > 0$. Suponha também que exista $B_0(M, \theta) > 0$ tal que*

$$\mu(\mathbb{S}^{2n+1}) = \inf_{u \in S_1^2(M) \setminus \{0\}} \frac{\int_M (p \|\nabla_H u\|_\theta^2 + B_0(M, \theta) u^2) dV_\theta}{\left(\int_M u^p dV_\theta\right)^{\frac{2}{p}}}.$$

Então, se $\mu_2(M, \theta) < \mu(\mathbb{S}^{2n+1})$, existe uma estrutura pseudohermitiana $\widetilde{\theta}$, da mesma classe conforme de θ, que minimiza $\mu_2(M, \theta)$. Com $\mu(\mathbb{S}^{2n+1})$ sendo primeiro invariante de Yamabe CR da esfera com relação a estrutura pseudohermitiana canônica $\hat{\theta}$.

Capítulo

1

Variedades CR do tipo hipersuperfícies

Observações de Poincaré: Seja $U \subset \mathbb{C}$ um domínio simplesmente conexo. O teorema de aplicação de Riemann diz que se $U \neq \mathbb{C}$, existe um biholomorfismo $f : D \to U$, $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ é o disco unitário. Poincaré levantou a mesma questão em $\mathbb{C}^2$: dado um domínio simplesmente conexo $U \subset \mathbb{C}^2$, com $U \neq \mathbb{C}^2$, existe um biholomorfismo $f : D^2 \to U$, em que $D^2 = \{(z_1, z_2) \in \mathbb{C}^2 : z_1\overline{z}_1 + z_2\overline{z}_2 < 1\}$? Na investigação desse problema, Poincaré observou que devido ao teorema da aplicação de Riemann, qualquer duas curvas simples e analíticas em $\mathbb{C}$ são localmente equivalentes, isto é, se Γ_1 e Γ_2 são duas curvas simples e analíticas em $\mathbb{C}$, dados $p_1 \in \Gamma_1$ e $p_2 \in \Gamma_2$, existe um biholomorfismo $f : U_1 \to U_2$, no qual U_1 e U_2 são vizinhanças abertas, respectivamente, de p_1 e p_2, tal que $f(\Gamma_1 \cap U_1) = \Gamma_2 \cap U_2$. Dessa maneira, se o teorema da aplicação de Riemann pudesse ser generalizado para dimensões maiores, duas hipersuperfícies em $\mathbb{C}^2$ seriam localmente equivalentes. Porém, Poincaré observou que nem todas hipersuperfícies em $\mathbb{C}^2$ são localmente equivalentes, constatando que o teorema de aplicação de Riemann não poderia ser generalizado para dimensões maiores. Portanto, existem invariantes geométricos, herdados da estrutura complexa de $\mathbb{C}^2$, que distinguem certas classes de hipersuperfícies. Um desses invariantes é a estrutura CR que definiremos à seguir. O problema de encontrar invariantes em $\mathbb{C}^2$ foi solucionado por Cartan [8] e, de uma maneira completamente diferente, por Moser e então generalizado para dimensões maiores por Chern e Moser [11].

1.1 Estrutra CR

Em toda tese, M denota uma variedade suave, conexa e de dimensão $2n + 1$, com $n \geq 1$.

Definição 1.1.1. *Uma* ***CR-estrutura*** *para M (ou* ***estrutura CR****) é um subfibrado complexificado $T_{1,0} := T_{1,0}(M) \subset \mathbb{C} \otimes T(M)$ satisfazendo:*

(i) $dim_{\mathbb{C}} T_{1,0} = m$;

(ii) $T_{1,0} \cap T_{0,1} = 0$, em que $T_{0,1} = \overline{T}_{1,0}$.

Uma ***variedade CR*** *é uma variedade M munida de uma CR-estrutura $T_{1,0}$. Referiremos a m como dimensão CR de $(M, T_{1,0})$ e quando $m = n$ diremos que $(M, T_{1,0})$ é do tipo hipersuperfície. Diremos ainda que uma variedade CR $(M, T_{1,0})$ é* ***integrável*** *se $T_{1,0}$ é involutível, isto é, $\Gamma^\infty(T_{1,0})$ satisfaz a condição formal de Frobenius*

(iii) $[\Gamma^\infty(T_{1,0}), \Gamma^\infty(T_{1,0})] \subset \Gamma^\infty(T_{1,0})$,

$\Gamma^\infty(T_{1,0})$ *denota a álgebra das seções suaves de $T_{1,0}$ e $[\,,]$ denota o colchete de Lie.*

Assumiremos que as variedades CR consideradas são integráveis e do tipo hipersuperfície. Além disso, a álgebra das seções suaves $M \to \mathbb{C} \otimes T(M)$, normalmente denotada por $\Gamma^\infty(\mathbb{C} \otimes T(M))$, será denotada simplesmente por $\mathbb{C} \otimes T(M)$ quando não houver perigo de confusão. Da mesma forma, faremos para seções de $T_{1,0}$ e seções de $T_{0,1}$.

A estrutura CR determina uma distribuição de $2n$-planos reais definida por

$$H(M) = \mathrm{Re}\{\, T_{1,0} \oplus T_{0,1}\}$$

e denominada **distribuição de Levi**. $H(M)$ é gerado por campos da forma $Z + \overline{Z}$, em que $Z \in T_{1,0}$. A estrutura complexa de $\mathbb{C} \otimes T(M)$ induz um automorfismo involutivo $J : H(M) \to H(M)$ denominado **estrutura complexa**, definido por

$$J(Z + \overline{Z}) = i(Z - \overline{Z}). \tag{1.1}$$

Reciprocamente, um par (H, J), no qual H é um subfibrado real de posto $2n$ de $T(M)$ e $J : H \to H$ é um automorfismo involutivo, determina uma única CR-estrutura $T_{1,0}(M)$ tal que $H = H(M)$ e $J(Z + \overline{Z}) = i(Z - \overline{Z})$ para todo $Z \in T_{1,0}(M)$. Basta tomar

$$T_{1,0} = \{Z \in \mathbb{C} \otimes H(M) : J_{\mathbb{C}}(Z) = iZ\}$$

em que $J_{\mathbb{C}}$ denota a extensão $\mathbb{C}$-linear de J. Note que nesse caso

$$T_{0,1} = \{Z \in \mathbb{C} \otimes H(M) : J_{\mathbb{C}}(Z) = -iZ\}$$

e que

$$\mathbb{C} \otimes H = T_{1,0} \oplus T_{0,1}.$$

A condição de integrabilidade para $(M, T_{1,0})$ é equivalente à

(i) $[JX, Y] + [X, JY] \in H$,

(ii) $J\,[JX, Y] + [X, JY] = [JX, JY] - [X, Y]$,

para todo $X, Y \in H$.

Um morfismo na categoria das variedades CR é uma aplicação suave que preserva a estrutura CR.

Definição 1.1.2. *Uma aplicação suave* $\varphi : (M, T_{1,0}(M)) \to (N, T_{1,0}(N))$ *é dita uma* ***aplicação CR*** *se*

$$d\varphi\,(T_{1,0}(M)) \subset T_{1,0}(N).$$

Equivalentemente, se $H(M)$*,* $H(N)$*,* J *e* J' *são as distribuições de Levi e as estruturas complexas de* M *e* N*, respectivamente, então* φ *é uma aplicação CR se, e somente se,*

$$d\varphi\,(H(M)) \subset H(N)$$

e

$$d\varphi \circ J = J' \circ d\varphi\ .$$

Uma **CR-equivalência** (ou CR-isomorfismo) é um difeomorfismo CR. Dizemos ainda que uma função suave complexa $f : (M, T_{1,0}) \to \mathbb{C}$ é uma **função CR-holomorfa** se $\bar{Z}f = 0$ para todo $Z \in T_{1,0}$.

O estudo de variedades CR é feito via referenciais e correferenciais locais.

Definição 1.1.3. *Um* ***referencial local*** *em* $T_{1,0}$ *é um conjunto de seções locais* $T_\alpha : U \subset M \to \mathbb{C} \otimes T(M)$*, em que* $\alpha = 1, \ldots, n$ *tal que para cada* $p \in U$*,* $\{T_\alpha(p) : \alpha = 1, \ldots, n\}$ *é uma base de* $T_{1,0}(p)$*. Um* ***correferencial local*** *é um conjunto de seções locais* $\theta^\alpha : U \to \mathbb{C} \otimes T^*(M)$ *que aniquilam* $T_{0,1}$ *((1,0)-formas complexas) e cujas restrições à* $T_{1,0}$ *formam uma base para* $T^*_{1,0}$*.*

Suponha que o fibrado tangente complexificado $\mathbb{C} \otimes T(M)$ admita a decomposição

$$\mathbb{C} \otimes T(M) = T_{1,0} \oplus T_{0,1} \oplus \mathbb{C}T$$

para algum campo $T \in T(M)$. Se $\{\theta^\alpha\}$ é um correferencial local tal que $T \rfloor \theta^\alpha = 0$ para qualquer $\alpha = 1, \ldots, n$, diremos que $\{\theta^\alpha\}$ é um **correferencial admissível** . Se θ é uma 1-forma real tal que $\theta(T) = 1$ e $\theta(H(M)) = 0$, então o conjunto $\left\{\theta, \theta^1, \ldots, \theta^n, \theta^{\bar{1}}, \ldots, \theta^{\bar{n}}\right\}$ é um conjunto de correferenciais para $\mathbb{C} \otimes T(M)$, no qual $\theta^{\bar{\alpha}} = \overline{\theta^\alpha}$. Denotaremos o seu referencial dual por $\{T, T_1, \ldots . T_n, T_{\bar{1}}, \ldots, T_{\bar{n}}\}$.

Adotamos as seguintes convenções para índices:
Os índices Gregos $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ variam em $\{1, \ldots, n\}$, enquanto que os índices Latinos $A, B, C, \ldots$ variam em $\{0, 1, \ldots, n, \bar{1}, \ldots, \bar{n}\}$ com as convenções $T_0 = T$, $\theta^0 = \theta$ e $\bar{\bar{\alpha}} = \alpha$.

Um referencial (local) $\{T_\alpha\}$ determina $2n$ seções (locais) linearmente independentes em $H(M)$ definidas por

$$X_\alpha = T_\alpha + T_{\bar{\alpha}} \qquad \text{e} \qquad Y_\alpha = i\,(T_\alpha - T_{\bar{\alpha}})\,. \tag{1.2}$$

Seja $M \subset \mathbb{C}^{n+1}$ uma hipersuperfície suave. Denotemos as coordenadas de $\mathbb{C}^{n+1}$ por $z = (z^1, \ldots, z^{n+1})$, em que $z^k = x^k + iy^k$. Um referencial para $T(\mathbb{C}^{n+1})$ é dado por

$$\left\{\frac{\partial}{\partial x^k}\,, \frac{\partial}{\partial y^k} : k = 1, \ldots, n+1\right\}.$$

Esses referenciais induzem referenciais em $\mathbb{C} \otimes T(\mathbb{C}^{n+1})$ dados por

$$\frac{\partial}{\partial z^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^k} - i\frac{\partial}{\partial y^k}\right), \ \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial}{\partial x^k} + i\frac{\partial}{\partial y^k}\right).$$

os coeficientes $1/2$ são escolhidos de tal maneira que

$$dz^l \frac{\partial}{\partial z^k} = \delta_{lk} \ , \ d\bar{z}^l \frac{\partial}{\partial \bar{z}^k} = \delta_{lk},$$

onde $dz^l = dx^l + idy^l$.
Defina

$$T_{1,0} = \mathbb{C} \otimes T(M) \cap \operatorname{span}_{\mathbb{C}} \left\{\frac{\partial}{\partial z^k}\right\}.$$

Claramente $T_{1,0} \cap T_{0,1} = 0$. Para mostrar que $T_{1,0}$ é uma CR-estrutura para M, exibiremos explicitamente um referencial local em $T_{1,0}$.

Seja $F : U \subset \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$ uma função holomorfa com $U \cap M \neq \emptyset$. Pelo teorema da função implícita, podemos supor sem perda de generalidade que

$$U \cap M = \{(z, u + iv) : \ v = \varphi(z, \bar{z}, u))\ , \ z = (z^1, \ldots, z^n)\}$$

para alguma função suave φ. Denote por f a restrição de F à M, isto é,

$$f(z, \bar{z}, u) = F\,(\,z, u + i\varphi(z, \bar{z}, u)).$$

Temos

$$\frac{\partial f}{\partial z^\alpha} = \frac{\partial F}{\partial z^\alpha} + i\frac{\partial F}{\partial z^{n+1}}\varphi_{z^\alpha} \ , \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}^\alpha} = i\frac{\partial F}{\partial z^{n+1}}\varphi_{\bar{z}^\alpha} \quad \text{e} \quad \frac{\partial f}{\partial u} = \frac{\partial F}{\partial z^{n+1}}\,(1 + i\varphi_u).$$

Agora seja $Z \in T_{1,0}$. Por definição, $\overline{Z}$ é uma restrição de um operador de Cauchy-Riemann gerado por $\left\{\dfrac{\partial f}{\partial \bar{z}^l}\right\}$ e, portanto, $\overline{Z}f = 0$. Escrevendo

$$\overline{Z} = a^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha} + a^{\bar{\alpha}} \frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha} + c\frac{\partial}{\partial u},$$

obtemos

$$\overline{Z}f = a^\alpha \frac{\partial F}{\partial z^\alpha} + [\,ia^\alpha \varphi_{z^\alpha} + ia^{\bar{\alpha}} \varphi_{\bar{z}^\alpha} + c(1 + i\varphi_u)]\,\frac{\partial F}{\partial u} = 0,$$

concluíndo que

$$a^\alpha = 0 \qquad \text{e} \qquad ia^{\bar{\alpha}}\varphi_{\bar{z}^\alpha} + c(1 + i\varphi_u) = 0, \ \text{para todo } \alpha = 1, \ldots, n.$$

Tomando $a^{\bar{\alpha}} = 1 + i\varphi_u$, teremos $c = -i\varphi_{\bar{z}^\alpha}$. Assim, para cada $\alpha = 1, \ldots, n$,

$$Z_{\bar{\alpha}} = (1 + i\varphi_u)\frac{\partial}{\partial \bar{z}^\alpha} - i\varphi_{\bar{z}^\alpha}\frac{\partial}{\partial u} \in T_{0,1}$$

formam um conjunto linearmente independente. Portanto,

$$Z_\alpha = (1 - i\varphi_u)\frac{\partial}{\partial z^\alpha} + i\varphi_{z^\alpha}\frac{\partial}{\partial u}$$

é um referencial (local) para $(M, T_{1,0})$.

Observações:

1. O termo CR se refere a Cauchy-Riemann. Uma função suave $f : M \subset \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}$, que é uma restrição de uma função holomorfa, satisfaz $T_{0,1}f = 0$, isto é, f é uma função CR-holomorfa. A recíproca não é verdadeira.

2. Se $f : M \to N$ é uma restrição de uma aplicação holomorfa $F : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{m+1}$, então f é uma aplicação CR. Dessa maneira, hipersuperfícies que são localmente biholomorfas, são localmente CR-equivalentes. A mesma propriedade vale globalmente e, novamente, não vale a recíproca.

3. Da identidade
$$\left[a^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha}, b^\beta \frac{\partial}{\partial z^\beta}\right] = \left(a^\alpha \frac{\partial b^\beta}{\partial z^\alpha} - b^\alpha \frac{\partial a^\beta}{\partial z^\alpha}\right)\frac{\partial}{\partial z^\beta}$$
e do fato que $\mathbb{C} \otimes T(M)$ é involutivo, temos que $T_{1,0} = \mathbb{C} \otimes T(M) \cap \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\left\{\frac{\partial}{\partial z^k}\right\}$ também é involutivo. Portanto, hipersuperfícies em $\mathbb{C}^{n+1}$ são integráveis.

1.2 Estruturas pseudohermitianas

A partir desse momento assumiremos que M é uma variedade CR do tipo hipersuperfície, orientável.

Seja
$$H^\perp = \{\theta \in T^*(M) : H(M) \subset \ker\theta\}.$$

$H^\perp \to M$ é um subfibrado vetorial do fibrado cotangente $T^*(M)$, denominado **fibrado de aniquiladores** da distribuição de Levi $H(M)$. Como $\dim_{\mathbb{R}} H(M) = 2n$, $H^\perp \to M$ tem posto 1 e, além disso,

$$H^\perp \cong T(M)/H(M) \quad \text{(isomorfismo de fibrados vetoriais)}.$$

Como M é orientável e $H(M)$ é orientado pela estrutura complexa $J : H(M) \to H(M)$, segue que $H^\perp$ é orientável. Do fato que $H^\perp$ tem posto 1 e como M é conexa, obtemos que $H^\perp$ é trivial. Portanto, existe uma seção nunca nula $\theta : M \to T^*(M)$ tal que $\theta(H(M)) = 0$ e, nesse caso, teremos $H(M) = \ker\theta$.

Definição 1.2.1. *Uma escolha de uma 1-forma real $\theta : M \to T^*(M)$ tal que $\ker\theta = H(M)$ é denominada uma **estrutura pseudohermitiana** sobre M. Uma variedade CR munida de uma estrutura pseudohermitiana, denotada por (M, θ), é chamada uma **variedade pseudohermitiana**.*

Dessa maneira, toda variedade CR do tipo hipersuperfície, orientável e conexa possui uma estrutura pseudohermitiana. Tal estrutura permite definir um tensor do tipo $(2,0)$ sobre $\mathbb{C}\otimes H(M)$ que, em certo sentido, desempenha sobre variedades CR um papel análogo à métrica Hermitiana para variedades complexas.

Definição 1.2.2. *A* ***forma de Levi*** *associada à θ é o 2-tensor covariante*

$$L_\theta : \mathbb{C}\otimes H(M) \times \mathbb{C}\otimes H(M) \to \mathbb{C},$$

definido por $L_\theta(X,\overline{Y}) = 2d\theta(X \wedge J_{\mathbb{C}}\overline{Y})$, no qual $J_{\mathbb{C}}$ é a extensão $\mathbb{C}$-linear da estrutura complexa $J : H(M) \to H(M)$.

Proposição 1.2.1. *A forma de Levi L_θ é simétrica sobre $\mathbb{C}\otimes H(M)$ e Hermitiana sobre $T_{1,0}(M)$.*

Demonstração*:*

1. L_θ é simétrica sobre $\mathbb{C}\otimes H(M)$. Sejam $X, Y \in T_{1,0}$. Então

$$L_\theta(X,\overline{Y}) = 2d\theta(X \wedge J_{\mathbb{C}}\overline{Y}) = -2id\theta(X\wedge\overline{Y}) = 2\theta(\overline{Y}\wedge iX) = 2d\theta(\overline{Y}\wedge J_{\mathbb{C}}X) = L_\theta(\overline{Y}, X).$$

$$L_\theta(X,Y) = 2d\theta(X\wedge J_{\mathbb{C}}Y) = 2id\theta(X\wedge Y) = 2i(X\theta Y - Y\theta X - \theta[X,Y]) = 0.$$

$$L_\theta(\overline{X},\overline{Y}) = 0.$$

2. L_θ é Hermitiana sobre $T_{1,0}(M)$. Sejam $X, Y \in T_{1,0}$. Então

$$L_\theta(X,\overline{Y}) = 2d\theta(X\wedge J_{\mathbb{C}}\overline{Y}) = 2id\theta(\overline{Y}\wedge X) = \overline{-2id\theta(Y\wedge\overline{X})} = \overline{2d\theta(Y\wedge J_{\mathbb{C}}\overline{X})} = \overline{L_\theta(Y,\overline{X})}.$$

∎

Fixado um referencial $\{T_\alpha\}$ em $(M, T_{1,0})$, denotaremos as componentes da forma de Levi associada à θ por

$$h_{AB} = L_\theta(T_A, T_B),$$

em que $A, B \in \{1,\ldots,n,\bar{1},\ldots,\bar{n}\}$. Com relação à esse referencial, L_θ possui a seguinte representação matricial

$$L_\theta : \begin{bmatrix} 0 & h_{\bar{\alpha}\beta} \\ h_{\alpha\bar{\beta}} & 0 \end{bmatrix},$$

que é uma matriz simétrica com blocos Hermitianos $h_{\alpha\bar{\beta}}$ e $h_{\bar{\alpha}\beta}$. Observe que

$$\overline{L_\theta(X,\overline{Y})} = L_\theta(Y,\overline{X}) = L_\theta(\overline{X},Y), \forall\, X,Y \in T_{1,0}.$$

Dizemos que um tensor K do tipo $(2,0)$ é um **tensor real** se ele satisfaz $\overline{K(X,Y)} = K(\overline{X},\overline{Y})$ e denotamos $\overline{K} = K$. Assim, a forma de Levi L_θ é um tensor real. Como

$h_{\alpha\bar{\beta}} = \overline{h_{\bar{\alpha}\beta}}$ e $h_{\alpha\beta} = h_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} = 0$, a geometria de L_θ fica completamente determinada quando consideramos

$$\begin{array}{rcl} L_\theta : T_{1,0} \times T_{1,0} & \to & \mathbb{C} \\ (X, \overline{Y}) & \mapsto & L_\theta(X, \overline{Y}) = -2id\theta(X \wedge \overline{Y}) \end{array}$$

cuja representação matricial é dada pelo bloco $h_{\alpha\bar{\beta}}$.

Se θ e $\widetilde{\theta}$ são estruturas pseudohermitianas sobre M, então $\widetilde{\theta} = f\theta$ para alguma função suave nunca nula f. Qualquer propriedade que dependa exclusivamente da CR-estrutura $T_{1,0}(M)$ e não de uma determinada escolha de uma estrutura pseudohermitiana é dita **CR-invariante**.

Definição 1.2.3. *Diremos que M é **estritamente pseudoconvexa** se existir uma estrutura pseudohermitiana θ tal que a forma de Levi sssociada L_θ é definida.*

A forma de Levi L_θ ser definida é uma propriedade CR-invariante. Com efeito, se $\widetilde{\theta} = f\theta$ é uma outra estrutura pseudohermitiana para M, então

$$d\widetilde{\theta} = df \wedge \theta + fd\theta = fd\theta \pmod{\theta}.$$

Portanto,

$$L_{\widetilde{\theta}} = fL_\theta, \tag{1.3}$$

donde $\widetilde{h}_{\alpha\bar{\beta}} = fh_{\alpha\bar{\beta}}$. Como f nunca se anula, $\widetilde{h}_{\alpha\bar{\beta}}$ é uma matriz definida.

Quando M é estritamente pseudoconvexa é natural orientar o fibrado $H^\perp$ dizendo que uma seção θ é positiva se L_θ é positiva definida. O $\mathbb{R}_+$-subfibrado de $H^\perp$ formado pelas seções positivas será denotado por

$$H_+^\perp = \{f\,\theta : f > 0, \text{ e } \theta \text{ positivo}\}.$$

Iremos assumir daqui por diante que M é estritamente pseudoconvexa e que θ é positiva. Dessa maneira, a classe conforme de θ considerada é dada por $[\theta] = \{f\,\theta : f > 0\}$. Uma estrutura pseudohermitiana $\widetilde{\theta}$ para M será dita compatível com θ (ou de mesma orientação) quando $\widetilde{\theta} \in [\theta]$.

Sejam (M, θ) e $(\widetilde{M}, \widetilde{\theta})$ duas variedades pseudohermitianas. Se $\varphi : M \to \widetilde{M}$ é uma CR-equivalência, então $\varphi^*\widetilde{\theta} = f\theta$ para alguma função f. Se $f > 0$, diremos que φ preserva a orientação, caso contrário diremos que φ inverte a orientação. Se $\varphi^*\widetilde{\theta} = c\theta$, para alguma constante c, diremos que φ é uma **aplicação pseudohermitiana** . Quando $c = 1$, diremos que φ é **isopseudohermitana**. CR-equivalências desempenham um papel semelhante ao das aplicações conformes em variedades Riemannianas. Da mesma maneira, as aplicações isopseudohermitianas são análogas às isometrias Riemannianas.

Proposição 1.2.2. *Associado à cada variedade pseudohermitiana (M, θ), existe um único campo vetorial $T : M \to T(M)$ denominado* ***direção característica*** *de $d\theta$ tal que*

$$\theta(T) = 1 \ , \ T \rfloor d\theta = 0 \tag{1.4}$$

Dessa maneira, T é transverso à distribuição de Levi $H(M)$.

Demonstração: Sejam $X_\alpha = T_\alpha + T_{\bar{\alpha}}$ e $Y_\alpha = i(T_\alpha - T_{\bar{\alpha}})$, no qual $\{T_\alpha\}$ é um referencial local de $(M, T_{1,0})$. We have

$$L_\theta(X_\alpha, X_\alpha) = L_\theta(T_\alpha + T_{\bar{\alpha}}, T_\alpha + T_{\bar{\alpha}}) = 2h_{\alpha\bar{\alpha}},$$

$$L_\theta(Y_\alpha, Y_\alpha) = L_\theta(i(T_\alpha - T_{\bar{\alpha}}), -i(T_\alpha - T_{\bar{\alpha}})) = 2h_{\alpha\bar{\alpha}}.$$

Since L_θ is defined, it follows that L_θ is non-degenerate on $H(M)$. This fact ensures the existence of a field T satisfying

$$\theta(T) = 1 \ , \ T \rfloor d\theta = 0.$$

∎

Como conseqüência dessa proposição, obtemos as decomposições em soma direta

$$T(M) = H(M) \oplus \mathbb{R}T,$$

$$\mathbb{C} \otimes T(M) = T_{1,0}(M) \oplus T_{0,1}(M) \oplus \mathbb{C}T.$$

A forma de Levi se estende à $\mathbb{C} \otimes T(M)$ de duas maneiras naturais. Uma maneira é uma extensão à um (2,0)-tensor degenerado definido por

$$L_\theta(T, \overline{Z}) = d\theta(T \wedge J_{\mathbb{C}}\overline{Z}) = 0,$$

$$L_\theta(Z, T) = d\theta(X \wedge J(T)) = 0$$

para qualquer $Z \in \mathbb{C} \otimes T(M)$, no qual definimos $J(T) = 0$. A outra maneira é a extensão definida por

$$g_\theta(T, T) = 1,$$

$$g_\theta(Z, T) = g_\theta(T, Z) = 0$$

para todo $Z \in \mathbb{C} \otimes H(M)$.

Definição 1.2.4. *A extensão g_θ determina uma métrica Riemanniana sobre M denominada* ***métrica de Webster****. Se $\pi_H : T(M) \to H(M)$ é a projeção dada pela decom-*

posição $T(M) = H(M) \oplus \mathbb{R}T$, *podemos escrever*

$$g_\theta = \pi_H L_\theta + \theta \otimes \theta.$$

A métrica de Webster não é CR-invariante, isto é, se $\widetilde{\theta}$ e θ estão na mesma classe conforme, $g_{\widetilde{\theta}}$ e g_θ não são necessariamente conformes.

Proposição 1.2.3. *Se* $\{\theta^\alpha\}$ *é um correferencial admissível para* (M, θ), *então*

$$d\theta = ih_{\alpha\bar{\beta}}\,\theta^\alpha \wedge \theta^{\bar{\beta}}. \tag{1.5}$$

Demonstração: Podemos escrever

$$d\theta = a_{0B}\theta \wedge \theta^B + a_{\alpha\beta}\theta^\alpha \wedge \theta^\beta + a_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\theta^{\bar{\alpha}} \wedge \theta^{\bar{\beta}} + a_{\alpha\bar{\beta}}\theta^\alpha \wedge \theta^{\bar{\beta}}.$$

Se $\{T_\alpha\}$ é o referencial dual à $\{\theta^\alpha\}$, então

$$d\theta(T \wedge T_A) = a_{0A} = 0,$$

$$d\theta(T_\gamma \wedge T_\sigma) = a_{\gamma\sigma} = 0,$$

$$d\theta(T_{\bar{\gamma}} \wedge T_{\bar{\sigma}}) = a_{\bar{\gamma}\bar{\sigma}} = 0,$$

donde

$$d\theta = a_{\alpha\bar{\beta}}\theta^\alpha \wedge \theta^\beta.$$

Agora,

$$L(T_\gamma, T_{\bar{\sigma}}) = -2id\theta(T_\gamma \wedge T_{\bar{\sigma}}) = -ia_{\gamma\bar{\sigma}}.$$

Portanto,

$$a_{\gamma\bar{\sigma}} = ih_{\gamma\bar{\sigma}}.$$

∎

Proposição 1.2.4. *Se* (M, θ) *é estritamente pseudoconvexa,* θ *é uma forma de contato.*

Demonstração: Da proposição anterior,

$$d\theta = ih_{\alpha\bar{\beta}}\theta^\alpha \wedge \theta^{\bar{\beta}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
d\theta^n &= i^n h_{\alpha_1\bar{\beta}_1} \dots h_{\alpha_n\bar{\beta}_n} \theta^{\alpha_1} \wedge \theta^{\bar{\beta}_1} \dots \theta^{\alpha_n} \wedge \theta^{\bar{\beta}_n} \\
&= i^n (-1)^{\frac{n(n-1)}{2}} h_{\alpha_1\bar{\beta}_1} \dots h_{\alpha_n\bar{\beta}_n} \theta^{\alpha_1} \wedge \theta^{\alpha_n} \dots \theta^{\bar{\beta}_1} \wedge \theta^{\bar{\beta}_n} \\
&= i^n i^{n(n-1)} n! \det(h_{\alpha\bar{\beta}}) \theta^1 \wedge \theta^n \dots \theta^{\bar{1}} \wedge \theta^{\bar{n}}.
\end{aligned}$$

Logo

$$\theta \wedge d\theta^n = i^{n^2} n! \det(h_{\alpha\bar{\beta}})\theta \wedge \theta^1 \wedge \theta^n \ldots \theta^{\bar{1}} \wedge \theta^{\bar{n}}.$$

Como $h_{\alpha\bar{\beta}}$ é definida, $\det(h_{\alpha\bar{\beta}}) \neq 0$. Consequentemente, $\theta \wedge d\theta^n \neq 0$. ∎

Definição 1.2.5. *O **elemento de volume** da variedade pseudohermitiana (M, θ) é a forma*

$$dV_\theta = \theta \wedge d\theta^n$$

e seu volume é denotado por

$$Vol(M, \theta) = \int_M dV_\theta$$

O elemento de volume é CR-invariante. De fato, se $\widetilde{\theta} = f\theta$, então

$$d\widetilde{\theta} = f d\theta \mod \theta.$$

Logo,

$$d\widetilde{\theta}^n = f^n d\theta^n \mod \theta.$$

Assim,

$$\widetilde{\theta} \wedge d\widetilde{\theta}^n = f\theta \wedge f^n d\theta^n \mod \theta,$$

portanto,

$$dV_{\widetilde{\theta}} = f^{n+1} dV_\theta. \tag{1.6}$$

Capítulo

2

Geometria diferencial das variedades pseudohermitianas

2.1 Conexões pseudohermitianas

Seja (M, θ) uma variedade pseudohermitiana (estritamente pseudoconvexa). Considere a decomposição em soma direta

$$\mathbb{C} \otimes T(M) = T_{1,0} \oplus T_{0,1} \oplus \mathbb{C}T$$

com projeções associadas

$$\pi_+ : \mathbb{C} \otimes T(M) \to T_{1,0} \qquad \text{e} \qquad \pi_- : \mathbb{C} \otimes T(M) \to T_{0,1}.$$

Dada uma conexão linear $\nabla : \mathbb{C} \otimes T(M) \times \mathbb{C} \otimes T(M) \to \mathbb{C} \otimes T(M)$, denote por T_∇ sua torção, isto é,

$$T_\nabla(Z, W) = \nabla_Z W - \nabla_W Z - [Z, W], \; \forall \; Z, W \in \mathbb{C} \otimes T(M).$$

Note que T_∇ é um tensor do tipo (2,1) com $T_\nabla(Z, W) = -T_\nabla(W, Z)$. Diremos que a torção T_∇ é **pura** se

$$\pi_+ T_\nabla(Z, W) = 0, \; \forall \; Z \in T_{1,0} \; , \; W \in \mathbb{C} \otimes T(M).$$

O matemático N. Tanaka, em seu trabalho [38], mostrou que associada à uma estrutura pseudohermitiana não-degenerada θ, existe uma única conexão linear ∇ real ($\overline{\nabla} = \nabla$) que satisfaz os seguintes axiomas:

(T1) A distribuição de Levi é paralela com respeito à∇; isto é, $\nabla H(M) \subset H(M)$.

(T2) $$\nabla J = 0.$$

(T3) $$\nabla g_\theta = 0.$$

(T4) $$T_\nabla \text{ é pura.}$$

Definição 2.1.1. *A conexão linear real $\nabla : \mathbb{C} \otimes T(M) \times \mathbb{C} \otimes T(M) \to \mathbb{C} \otimes T(M)$, que satisfaz os axiomas **(T1)-(T4)**, é denominada **conexão pseudohermitiana** (associada à θ).*

Proposição 2.1.1. *Se ∇ é a conexão pseudohermitiana de (M, θ), então*

$$\nabla T_{1,0} \subset T_{1,0}\ ,\ \nabla T_{0,1} \subset T_{0,1}, \tag{2.1}$$

$$\nabla T = 0. \tag{2.2}$$

Demonstração:

1. Seja $Z \in T_{1,0}$. Então, $Z = X - iJX$ para algum $X \in H(M)$. Assim, para qualquer $W \in \mathbb{C} \otimes T(M)$, temos

$$\nabla_W Z = \nabla_W (X - iJX) = \nabla_W X - i\nabla_W JX.$$

Por **(T2)**,

$$\nabla J(X, W) = \nabla_W JX - J\nabla_W X = 0,$$

donde

$$\nabla_W Z = \nabla_W X - iJ\nabla_W X.$$

Por **(T1)**, obtemos que $\nabla_W Z \in T_{1,0}$. Como $\overline{\nabla} = \nabla$, segue também que $\nabla_W \overline{Z} \in T_{0,1}$.

2. A condição **(T3)** implica que

$$Xg_\theta(T, Y) = g_\theta(\nabla_X T, Y) + g_\theta(T, \nabla_X Y)$$

para quaisquer $X, Y \in T(M)$. Se $Y \in H(M)$, então

$$g_\theta(\nabla_X T, Y) = -g_\theta(T, \nabla_X Y) + Xg_\theta(T, Y) = -\theta(\nabla_X Y)T$$

Por **(T1)**, obtemos $g_\theta(\nabla_X T, Y) = 0$. Logo, $\pi_H \nabla_X T = 0$. Por outro lado, tomando $Y = T$, obtemos

$$Xg_\theta(T, T) = g_\theta(\nabla_X T, T) + g_\theta(T, \nabla_X T)$$

donde

$$\theta(\nabla_X T) = 0.$$

Logo, $\nabla_X T = 0$ para qualquer X. ∎

Como conseqüência dessa proposição podemos fazer a seguinte definição.

Definição 2.1.2. *Seja $\{T_\alpha\}$ um referencial em (M, θ). Existem únicas 1-formas complexas ${\omega_\alpha}^\beta : T^*(M) \to \mathbb{C}$ tais que*

$$\nabla T_\alpha = {\omega_\alpha}^\beta \otimes T_\beta, \tag{2.3}$$

*denominadas **1-formas de conexão** de ∇. Analogamente, definimos*

$$\nabla T_{\bar{\alpha}} = {\omega_{\bar{\alpha}}}^{\bar{\beta}} \otimes T_{\bar{\beta}}. \tag{2.4}$$

Como $\overline{\nabla} = \nabla$, temos que $\overline{{\omega_\alpha}^\beta} = {\omega_{\bar{\alpha}}}^{\bar{\beta}}$. Para facilitar a notação, definimos ainda as 1-formas triviais

$${\omega_0}^A = {\omega_\alpha}^{\bar{\beta}} = {\omega_{\bar{\alpha}}}^\beta = 0. \tag{2.5}$$

*Definimos também os **símbolos de Christoffel** da conexão ∇ por*

$$\begin{aligned} \Gamma^\gamma_{A\beta} &= {\omega_\beta}^\gamma(T_A), \\ \Gamma^{\bar{\gamma}}_{A\bar{\beta}} &= {\omega_{\bar{\beta}}}^{\bar{\gamma}}(T_A), \\ \Gamma^B_{A0} &= \Gamma^\gamma_{A\bar{\beta}} = \Gamma^{\bar{\gamma}}_{A\beta} = 0. \end{aligned} \tag{2.6}$$

Em particular,

$$\begin{aligned} \nabla_{T_A} T_\beta &= {\omega_\beta}^\gamma(T_A) T_\gamma = \Gamma^\gamma_{A\beta} T_\gamma, \\ \nabla_{T_A} T_{\bar{\beta}} &= {\omega_{\bar{\beta}}}^{\bar{\gamma}}(T_A) T_\gamma = \Gamma^{\bar{\gamma}}_{A\bar{\beta}} T_\gamma, \\ \nabla_{T_A} T &= 0. \end{aligned} \tag{2.7}$$

Observe que a existência das 1-formas de conexão independe do axioma **(T4)**. Esse axioma, como já é de se esperar, está fortemente ligado à torção da conexão pseudohermitiana. Essa conexão, ao contrário da conexão de Levi-Cevita associada à uma métrica Riemanniana, não é livre de torção.

Proposição 2.1.2. *Para quaisquer $Z, W \in T_{1,0}$, temos*

$$T_\nabla(Z, W) = 0, \tag{2.8}$$

$$T_\nabla(Z, \overline{W}) = -\frac{i}{2} L_\theta(Z, \overline{W}) T. \tag{2.9}$$

Além disso, definindo $\tau(Z) = T_\nabla(T, Z)$, $\forall\ Z \in \mathbb{C} \otimes T(M)$, *obtemos*

$$\tau \circ J + J \circ \tau = 0, \tag{2.10}$$

no qual $J_{\mathbb{C}}$ *denota a extensão* $\mathbb{C}$*-linear de* $J : H(M) \to H(M)$ *com* $J(T) = 0$.

Demonstração: Sejam $Z, W \in T_{1,0}$

1. De **(T4)** e (2.1), temos

$$0 = \pi_+ T_\nabla(Z, W) = \pi_+(\nabla_Z W - \nabla_W Z - [Z, W]) = \nabla_Z W - \nabla_W Z - [Z, W] = T_\nabla(Z, W).$$

2. Agora,

$$\begin{aligned}
T_\nabla(Z, \overline{W}) &= \nabla_Z \overline{W} - \nabla_{\overline{W}} Z - [Z, \overline{W}] \\
&= \nabla_Z \overline{W} - \nabla_{\overline{W}} Z - \big(\pi_+[Z, \overline{W}] + \pi_-[Z, \overline{W}] + \theta[Z, \overline{W}]T\big) \\
&= \big(\nabla_Z \overline{W} - \pi_-[Z, \overline{W}]\big) + \big(-\nabla_{\overline{W}} Z - \pi_-[Z, \overline{W}]\big) - \theta[Z, \overline{W}]T \\
&= \pi_-(\nabla_Z \overline{W} - [Z, \overline{W}]) + \pi_+(-\nabla_{\overline{W}} Z - [Z, \overline{W}]) + d\theta(Z \wedge \overline{W})T \\
&= \pi_- T_\nabla(Z, \overline{W}) + \pi_+ T_\nabla(Z, \overline{W}) + d\theta(Z \wedge \overline{W})T.
\end{aligned}$$

Como

$$\pi_- T_\nabla(Z, \overline{W}) = -\pi_- T_\nabla(\overline{W}, Z) = -\pi_- \overline{T_\nabla(W, \overline{Z})} = -\pi_+ T_\nabla(W, \overline{Z}),$$

novamente de **(T4)**, encontramos

$$T_\nabla(Z, \overline{W}) = d\theta(Z \wedge \overline{W})T.$$

3. Sejam $X \in H(M)$ e $Y \in T(M)$. De **(T4)**, temos

$$\pi_+ T_\nabla(X - iJX, Y) = \pi_+\left(T_\nabla(X, Y) - iT_\nabla(JX, Y)\right) = 0,$$

donde

$$\begin{aligned}
\pi_+\left(JT_\nabla(X, Y) + T_\nabla(JX, Y)\right) &= \pi_+ JT_\nabla(X, Y) + \pi_+ T_\nabla(JX, Y) \\
&= \pi_+ iT_\nabla(X, Y) + \pi_+ T_\nabla(JX, Y) \\
&= i\pi_+(T_\nabla(X, Y) - iT_\nabla(JX, Y)) \\
&= 0.
\end{aligned}$$

Analogamente, temos

$$\pi_-(JT_\nabla(X, Y) + T_\nabla(JX, Y)) = 0.$$

Note também que

$$\begin{aligned}\theta(JT_\nabla(X,Y)+T_\nabla(JX,Y)) &= \theta(JT_\nabla(X,Y))+\theta(T_\nabla(JX,Y))\\ &= \theta(T_\nabla(JX,Y))\,.\end{aligned}$$

Portanto,

$$JT_\nabla(X,Y)+T_\nabla(JX,Y)=\theta(T_\nabla(JX,Y))T.$$

Tomando $Y=T$, obtemos

$$JT_\nabla(T,X)+T_\nabla(T,JX)=\theta(T_\nabla(T,JX))T,$$

donde

$$\tau\circ J+J\circ\tau=\theta(T_\nabla(T,JX))T.$$

Mas de (2.1) e (2.2) deduzimos que

$$\begin{aligned}\theta(T_\nabla(T,JX)) &= \theta(\nabla_T JX-\nabla_{JX}T-[\,T,JX])\\ &= \theta(\nabla_T JX-[\,T,JX])\\ &= -\theta[\,T,JX]\\ &= d\theta(T\wedge JX)\\ &= 0.\end{aligned}$$

∎

Definição 2.1.3. *O tensor $\tau:\mathbb{C}\otimes T(M)\to\mathbb{C}\otimes T(M)$ definido por $\tau(Z)=T_\nabla(T,Z)$ é denominado* ***torção pseudohermitiana*** *(associada à θ).*

Segue de (2.10) que

$$J(\tau(Z))=-\tau(J_{\mathbb{C}}(Z))=-i\tau(Z),\ \forall\ Z\in T_{1,0}.$$

Portanto, $\tau(Z)\in T_{0,1}$. Analogamente, temos $\tau(\overline{Z})\in T_{1,0}$. Dessa maneira, se $\{\,\theta^\alpha\}$ é um correferencial admissível para (M,θ) com dual $\{\,T_\alpha\}$, podemos escrever

$$\tau=A^\gamma{}_{\bar\alpha}\theta^{\bar\alpha}\otimes T_\gamma+A^{\bar\gamma}{}_\alpha\theta^\alpha\otimes T_{\bar\gamma}. \tag{2.11}$$

Como τ é real, temos $\overline{A^\gamma{}_{\bar\alpha}}=A^{\bar\gamma}{}_\alpha$.

Definição 2.1.4. *As 1-formas complexas $\tau^\gamma=A^\gamma{}_{\bar\alpha}\theta^{\bar\alpha}$ são denominadas* ***1-formas de torção*** *da conexão pseudohermitiana ∇.*

Como usualmente é feito na geometria Riemanniana, utilizaremos as matrizes Hermitianas $h_{\alpha\bar{\beta}}$ e $h^{\alpha\bar{\beta}} := [h_{\alpha\bar{\beta}}]^{-1}$ para subir e descer índices. Por exemplo:

$$\tau_\alpha = \tau^{\bar{\gamma}} h_{\alpha\bar{\gamma}} = A^{\bar{\gamma}}{}_\beta h_{\alpha\bar{\gamma}} \theta^\beta = A_{\alpha\beta}\theta^\beta$$

$$\tau_{\bar{\alpha}} = \tau^{\gamma} h_{\gamma\bar{\alpha}} = A^{\gamma}{}_{\bar{\beta}} h_{\gamma\bar{\alpha}} \theta^{\bar{\beta}} = A_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}\theta^{\bar{\beta}}$$

Observe que novamente $\overline{A_{\alpha\beta}} = A_{\bar{\alpha}\bar{\beta}}$.

Vamos agora caracterizar as 1-formas de conexão e 1-formas de torção de uma conexão pseudohermitiana conforme Webster [45].

Proposição 2.1.3. *Seja $\{\theta^\alpha\}$ um correferencial admissível para (M,θ). As 1-formas de conexão $\omega_\alpha{}^\beta$ e as 1-formas de torção τ^α satisfazem as equações*

$$\begin{array}{ll} \textbf{\textit{(W1)}} & d\theta^\alpha = \theta^\gamma \wedge \omega_\gamma{}^\alpha + \theta \wedge \tau^\alpha; \\ \textbf{\textit{(W2)}} & dh_{\alpha\bar{\beta}} = \omega_{\alpha\bar{\beta}} + \omega_{\bar{\beta}\alpha}. \end{array}$$

Demonstração:

(W1). Dados $X, Y \in \mathbb{C} \otimes T(M)$, temos

$$d\theta^\alpha(X \wedge Y) = X\theta^\alpha Y - Y\theta^\alpha X - \theta^\alpha[X,Y].$$

Como $T_\nabla(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$, obtemos

$$d\theta^\alpha(X \wedge Y) = X\theta^\alpha Y - Y\theta^\alpha X - \theta^\alpha \nabla_X Y + \theta^\alpha \nabla_Y X + \theta^\alpha T_\nabla(X,Y).$$

Escrevendo $X = X^A T_A,\ Y = Y^B T_B$, encontramos

$$\nabla_X Y = X^A Y^B \omega_B{}^C(T_A) T_C + X\theta^B Y T_B,$$

$$\nabla_Y X = X^A Y^B \omega_A{}^C(T_B) T_C + Y\theta^A X T_A,$$

donde

$$\theta^\alpha \nabla_X Y = X^A Y^B \omega_B{}^\alpha(T_A) + X\theta^\alpha Y,$$

$$\theta^\alpha \nabla_Y X = X^A Y^B \omega_A{}^\alpha(T_B) + Y\theta^\alpha X.$$

Assim,

$$\begin{aligned} d\theta^\alpha(X \wedge Y) &= X^A Y^B \omega_A{}^\alpha(T_B) - X^A Y^B \omega_B{}^\alpha(T_A) + \theta^\alpha T_\nabla(X,Y) \\ &= X^\gamma Y^B \omega_\gamma{}^\alpha(T_B) - X^A Y^\gamma \omega_\gamma{}^\alpha(T_A) + \theta^\alpha T_\nabla(X,Y) \\ &= \theta^\gamma(X)\omega_\gamma{}^\alpha(Y) - \theta^\gamma(Y)\omega_\gamma{}^\alpha(X) + \theta^\alpha T_\nabla(X,Y) \\ &= \theta^\gamma \wedge \omega_\gamma{}^\alpha(X \wedge Y) + \theta^\alpha T_\nabla(X,Y). \end{aligned}$$

Como $T_\nabla(Z,W)=0$, para todo $Z,W\in T_{1,0}$, obtemos

$$\begin{aligned}T_\nabla(X,Y) &= X^AY^BT_\nabla(T_A,T_B)\\ &= X^0Y^\beta T_\nabla(T,T_\beta)+X^0Y^{\bar\beta}T_\nabla(T,T_{\bar\beta})+X^\alpha Y^0T_\nabla(T_\alpha,T)\\ &\quad +X^\alpha Y^{\bar\beta}T_\nabla(T_\alpha,T_{\bar\beta})+X^{\bar\alpha}Y^0T_\nabla(T_{\bar\alpha},T)+X^{\bar\alpha}Y^\beta T_\nabla(T_{\bar\alpha},T_\beta).\end{aligned}$$

Como $T_\nabla(Z,\overline{W})=-\frac{i}{2}L_\theta(Z,\overline{W})T$, para todo $Z,W\in T_{1,0}$, derivamos

$$\begin{aligned}\theta^\alpha T_\nabla(X,Y) &= X^0Y^\beta\theta^\alpha T_\nabla(T,T_\beta)+X^0Y^{\bar\beta}\theta^\alpha T_\nabla(T,T_{\bar\beta})\\ &\quad +X^\alpha Y^0\theta^\alpha T_\nabla(T_\alpha,T)+X^{\bar\alpha}Y^0\theta^\alpha T_\nabla(T_{\bar\alpha},T)\\ &= \theta(X)\theta^\alpha(\tau(Y))-\theta(Y)\theta^\alpha(\tau(X))\\ &= \theta(X)\tau^\alpha(Y)-\theta(Y)\tau^\alpha(X)\\ &= \theta\wedge\tau^\alpha(X\wedge Y).\end{aligned}$$

Logo, $d\theta^\alpha=\theta^\gamma\wedge\omega_\gamma{}^\alpha+\theta\wedge\tau^\alpha$.
(W2). Da condição **(T3)**, obtemos

$$T_Cg_\theta(T_\alpha,T_{\bar\beta})=g_\theta(\nabla_{T_C}T_\alpha,T_{\bar\beta})+g_\theta(T_\alpha,\nabla_{T_C}T_{\bar\beta}).$$

Daí,

$$\begin{aligned}dh_{\alpha\bar\beta}(T_C) &= T_Ch_\theta(T_\alpha,T_{\bar\beta})\\ &= L_\theta(\nabla_{T_C}T_\alpha,T_{\bar\beta})+L_\theta(T_\alpha,\nabla_{T_C}T_{\bar\beta})\\ &= L_\theta(\omega_\alpha{}^\gamma(T_C)T_\gamma,T_{\bar\beta})+L_\theta(T_\alpha,\omega_{\bar\beta}{}^{\bar\gamma}(T_C)T_{\bar\gamma})\\ &= \omega_\alpha{}^\gamma(T_C)h_{\gamma\bar\beta}+\omega_{\bar\beta}{}^{\bar\gamma}(T_C)h_{\alpha\bar\gamma}\\ &= \omega_{\bar\beta\alpha}(T_C)+\omega_{\alpha\bar\beta}(T_C)\\ &= (\omega_{\bar\beta\alpha}+\omega_{\alpha\bar\beta})(T_C).\end{aligned}$$

Logo, $dh_{\alpha\bar\beta}=\omega_{\bar\beta\alpha}+\omega_{\alpha\bar\beta}$. ∎

Em [45], Webster mostrou que existem únicas 1-formas complexas $\omega_\alpha{}^\beta$ e τ^α satisfazendo **(W1)** e **(W2)**. Webster mostrou que essas 1-formas determinam uma conexão linear em $T_{1,0}$. Por unicidade, as conexões a obtidas por Tanaka e por Webster, coincidem. Alguns autores se referem à conexão pseudohermitiana como conexão de Tanaka-Webster, conexão de Tanaka ou conexão de Webster.

Proposição 2.1.4. *As componentes da 1-forma de torção $\tau_\alpha=A_{\alpha\beta}\theta^\beta$ satisfazem*

$$A_{\alpha\beta}=A_{\beta\alpha}. \tag{2.12}$$

Demonstração: Sabemos que

$$-id\theta = h_{\alpha\bar{\beta}}\theta^{\alpha} \wedge \theta^{\bar{\beta}}.$$

Daí,

$$0 = -id^2\theta = dh_{\alpha\bar{\beta}} \wedge \theta^{\alpha} \wedge \theta^{\bar{\beta}} + h_{\alpha\bar{\beta}}\, d\theta^{\alpha} \wedge \theta^{\bar{\beta}} - h_{\alpha\bar{\beta}}\, \theta^{\alpha} \wedge d\theta^{\bar{\beta}}.$$

Substituindo **(W1)** e **(W2)** nessa identidade obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= (\omega_{\alpha\bar{\beta}} + \omega_{\bar{\beta}\alpha}) \wedge \theta^{\alpha} \wedge \theta^{\bar{\beta}} + h_{\alpha\bar{\beta}}(\theta^{\gamma} \wedge \omega_{\gamma}{}^{\alpha} + \theta \wedge \tau^{\alpha}) \wedge \theta^{\bar{\beta}} \\
&\quad -h_{\alpha\bar{\beta}}\, \theta^{\alpha} \wedge (\theta^{\bar{\gamma}} \wedge \omega_{\bar{\gamma}}{}^{\bar{\beta}} + \theta \wedge \tau^{\bar{\beta}}) \\
&= \omega_{\alpha\bar{\beta}} \wedge \theta^{\alpha} \wedge \theta^{\bar{\beta}} - \omega_{\bar{\gamma}\alpha} \wedge \theta^{\alpha} \wedge \theta^{\bar{\gamma}} + \omega_{\bar{\beta}\alpha} \wedge \theta^{\alpha} \wedge \theta^{\bar{\beta}} \\
&\quad -\omega_{\gamma\bar{\beta}} \wedge \theta^{\gamma} \wedge \theta^{\bar{\beta}} + \tau_{\bar{\beta}} \wedge \theta^{\bar{\beta}} \wedge \theta - \tau_{\alpha} \wedge \theta^{\alpha} \wedge \theta \\
&= A_{\bar{\beta}\bar{\gamma}} \wedge \theta^{\bar{\gamma}} \wedge \theta^{\bar{\beta}} \wedge \theta - A_{\beta\gamma} \wedge \theta^{\gamma} \wedge \theta^{\beta} \wedge \theta
\end{aligned}$$

Assim,

$$A_{\beta\gamma} \wedge \theta^{\gamma} \wedge \theta^{\beta} \wedge \theta = A_{\bar{\beta}\bar{\gamma}} \wedge \theta^{\bar{\gamma}} \wedge \theta^{\bar{\beta}} \wedge \theta.$$

Calculando em $(T_{\sigma}, T_{\rho}, T)$, obtemos

$$A_{\sigma\rho} - A_{\rho\sigma} = 0,$$

como queríamos demonstrar. ∎

Se $T^{A_1\ldots A_n}_{B_1\ldots B_n}$ são as componentes de um tensor T do tipo (k,l), sua r-ésima derivada covariante $\nabla^r T$ é o tensor do tipo $(k+r,l)$ com componentes que denotaremos por $T^{A_1\ldots A_n}_{B_1\ldots B_n;C_1\ldots C_r}$. Para derivadas de funções escalares omitiremos o ponto e vírgula.

Alguns cálculos envolvendo derivadas covariantes se tornam razoavelmente simples quando escolhemos um correferencial especial em uma vizinhança de um ponto $P \in M$.

Proposição 2.1.5. *Existe um correferencial $\{\theta^{\alpha}\}$ em uma vizinhança de qualquer ponto $P \in M$ que satisfaz $\omega_{\alpha}^{\beta} = 0$ em P.*

Demonstração: Se tomarmos um correferencial qualquer $\{\theta^{\alpha}_P\}$ em P e estendermos paralelamente ao longo das geodésicas da conexão pseudohermitiana, obteremos um correferencial local $\{\theta^{\alpha}\}$ suave em uma vizinhança de P que satisfaz $\omega_{\alpha}^{\beta} = 0$ em P. Se $\{\theta^{\alpha}_P\}$ for admissível em P, então $\{\theta^{\alpha}\}$ será admissível, pois $\nabla T = 0$ e $\nabla J = 0$. Além disso, como $\nabla g_{\theta} = 0$, teremos $\nabla d\theta = 0$. Como $d\theta = ih_{\alpha\bar{\beta}}\theta^{\alpha} \wedge \theta^{\beta}$, a matriz $h_{\alpha\bar{\beta}}$ é constante nesse referencial. ∎

Definição 2.1.5. *Um referencial local $\{T_{\alpha}\}$ em torno de um ponto $P \in M$ tal que*

1. $\omega_{\alpha}^{\beta} = 0$ em P, *2.* $h_{\alpha\bar{\beta}} = \delta_{\alpha\bar{\beta}}$.

será denominado ***referencial pseudohermitiano*** *em torno de P. O correferencial admissível dual $\{\theta^\alpha\}$ será denominado* ***correferencial pseudohermitiano*** *(em torno de P).*

A proposição anterior afirma que existe um referencial e um correferencial pseudohermitiano em torno de qualquer ponto $P \in M$. A partir desse momento fica subtendido que todo referencial e todo correferencial considerado será pseudohermitiano, salvo mensionado o contrário.

Para uma função real f sobre M, denotaremos

$$f_\alpha = T_\alpha f, \ f_{\bar{\alpha}} = T_{\bar{\alpha}} f, \ f_0 = Tf,$$

de modo que

$$\nabla f = df = f_\alpha \theta^\alpha + f_{\bar{\alpha}} \theta^{\bar{\alpha}} + f_0 \theta. \tag{2.13}$$

A segunda derivada covariante de f, denotada $\nabla^2 f$ e também denominada $(1,1)$**- Complex Hessian-**
, é um $(2,0)$-tensor com componentes

$$\begin{aligned}
f_{\alpha\beta} &= T_\beta T_\alpha f - \omega_\alpha{}^\gamma(T_\beta) T_\gamma f; \\
f_{\bar{\alpha}\bar{\beta}} &= \overline{f_{\alpha\beta}}; \\
f_{\alpha\bar{\beta}} &= T_{\bar{\beta}} T_\alpha f - \omega_\alpha{}^\gamma(T_{\bar{\beta}}) T_\gamma f; \\
f_{\bar{\alpha}\beta} &= \overline{f_{\alpha\bar{\beta}}}; \\
f_{\alpha 0} &= T T_\alpha f - \omega_\alpha{}^\gamma(T) T_\gamma f; \\
f_{\bar{\alpha} 0} &= \overline{f_{\alpha 0}}; \\
f_{0\beta} &= T_\beta T f; \\
f_{0\bar{\beta}} &= \overline{f_{0\beta}}; \\
f_{00} &= T^2 f.
\end{aligned}$$

Observe que em relação à um referencial pseudohermitiano em torno de P, as derivadas covariantes em P são iguais às derivadas ordinárias. Iremos utilizar esse fato para obter algumas identidades.

Proposição 2.1.6. *As componentes da segunda derivada covariante* $\nabla^2 f$ *satisfazem:*

$$f_{\alpha\bar{\beta}} = f_{\bar{\beta}\alpha} + ih_{\alpha\bar{\beta}}f_0, \tag{2.14}$$
$$f_{\alpha\beta} = f_{\beta\alpha}, \tag{2.15}$$
$$f_{0\alpha} = f_{\alpha 0} + A_{\alpha\gamma}f^{\gamma}. \tag{2.16}$$

Demonstração: Derivando $df = f_\alpha\theta^\alpha + f_{\bar{\alpha}}\theta^{\bar{\alpha}} + f_0\theta$, obtemos

$$0 = d^2 f = df_\alpha \wedge \theta^\alpha + f_\alpha d\theta^\alpha + df_{\bar{\alpha}} \wedge \theta^{\bar{\alpha}} + f_{\bar{\alpha}} d\theta^{\bar{\alpha}} + df_0 \wedge \theta + f_0 d\theta.$$

Em P, temos

$$\begin{aligned}
df_\alpha &= f_{\alpha 0}\theta + f_{\alpha\gamma}\theta^\gamma + f_{\alpha\bar{\gamma}}\theta^{\bar{\gamma}},\\
d\theta^\alpha &= \theta \wedge A^{\alpha}{}_{\bar{\gamma}}\theta^{\bar{\gamma}},\\
df_{\bar{\alpha}} &= f_{\bar{\alpha}0}\theta + f_{\bar{\alpha}\gamma}\theta^\gamma + f_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}}\theta^{\bar{\gamma}},\\
d\theta^{\bar{\alpha}} &= \theta \wedge A^{\bar{\alpha}}{}_{\gamma}\theta^{\gamma},\\
df_0 &= f_{00}\theta + f_{0\gamma}\theta^\gamma + f_{0\bar{\gamma}}\theta^{\bar{\gamma}},\\
d\theta &= ih_{\alpha\bar{\beta}}\theta^\alpha \wedge \theta^{\bar{\beta}}.
\end{aligned}$$

Substituindo essas igualdades na derivada acima, encontramos

$$\begin{aligned}
0 &= (f_{\alpha 0}\theta \wedge \theta^\alpha + f_{\alpha\gamma}\theta^\gamma \wedge \theta^\alpha + f_{\alpha\bar{\gamma}}\theta^{\bar{\gamma}} \wedge \theta^\alpha) + (f_\alpha A^{\alpha}{}_{\bar{\gamma}}\theta \wedge \theta^{\bar{\gamma}})\\
&\quad +(f_{\bar{\alpha}0}\theta \wedge \theta^{\bar{\alpha}} + f_{\bar{\alpha}\gamma}\theta^\gamma \wedge \theta^{\bar{\alpha}} + f_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}}\theta^{\bar{\gamma}} \wedge \theta^{\bar{\alpha}}) + (f_{\bar{\alpha}} A^{\bar{\alpha}}{}_{\gamma}\theta \wedge \theta^{\gamma})\\
&\quad +(f_{00}\theta \wedge \theta + f_{0\gamma}\theta^\gamma \wedge \theta + f_{0\bar{\gamma}}\theta^{\bar{\gamma}} \wedge \theta) + (if_0 h_{\alpha\bar{\beta}}\theta^\alpha \wedge \theta^{\bar{\beta}}).
\end{aligned}$$

Observando que $f_\alpha A^{\alpha}{}_{\bar{\gamma}} = f^{\bar{\beta}} h_{\alpha\bar{\beta}} A^{\alpha}{}_{\bar{\gamma}} = A_{\bar{\beta}\bar{\gamma}} f^{\bar{\beta}}$ e que $f_{\bar{\alpha}} A^{\bar{\alpha}}{}_{\gamma} = A_{\beta\gamma} f^{\beta}$, obtemos

$$\begin{aligned}
0 &= (f_{\alpha 0} - f_{0\alpha} + A_{\gamma\alpha}f^\gamma)\theta \wedge \theta^\alpha + f_{\alpha\beta}\theta^\beta \wedge \theta^\alpha\\
&\quad +(f_{\alpha\bar{\beta}} - f_{\bar{\beta}\alpha} - ih_{\alpha\bar{\beta}}f_0)\theta^{\bar{\beta}} \wedge \theta^\alpha\\
&\quad +(f_{\bar{\alpha}0} - f_{0\bar{\alpha}} + A_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}}f^{\bar{\gamma}})\theta \wedge \theta^{\bar{\gamma}} + f_{\bar{\alpha}\bar{\gamma}}\theta^{\bar{\gamma}} \wedge \theta^{\bar{\alpha}},
\end{aligned}$$

donde segue o resultado. ∎

2.2 Curvatura pseudohermitiana

As **formas de curvatura** da conexão pseudohermitiana ∇, expressas em termos da um correferencial admissível $\{\theta^\alpha\}$, são dadas por

$$\Pi_\beta{}^\alpha = d\omega_\beta{}^\alpha - \omega_\beta{}^\gamma \wedge \omega_\gamma{}^\beta, \tag{2.17}$$

$$\Pi_{\bar\beta}{}^{\bar\alpha} = \overline{\Pi_\beta{}^\alpha}, \tag{2.18}$$

$$\Pi_0{}^\alpha = \Pi_\beta{}^0 = \Pi_0{}^{\bar\alpha} = \Pi_{\bar\beta}{}^0 = 0. \tag{2.19}$$

Webster mostrou em [45] que a forma de curvatura $\Pi_\beta{}^\alpha$ satisfaz a seguinte **equação de estrutura** :

$$\Pi_\beta{}^\alpha = R_\beta{}^\alpha{}_{\rho\bar\sigma}\theta^\rho \wedge \theta^{\bar\sigma} + W_\beta{}^\alpha{}_\rho \theta^\rho \wedge \theta - W^\alpha{}_{\beta\bar\rho}\theta^{\bar\rho} \wedge \theta + i\theta_\beta \wedge \tau^\alpha - i\tau_\beta \wedge \theta^\alpha \tag{2.20}$$

em que os coeficientes possuem as seguintes simetrias

$$R_{\beta\bar\alpha\rho\bar\sigma} = R_{\rho\bar\alpha\beta\bar\sigma} = R_{\bar\alpha\beta\bar\sigma\rho} = \overline{R_{\alpha\bar\beta\sigma\bar\rho}}\,, \tag{2.21}$$

$$W_{\beta\bar\alpha\gamma} = W_{\gamma\bar\sigma\beta}. \tag{2.22}$$

Proposição 2.2.1.

$$W_\beta{}^\alpha{}_\rho = A_{\beta\rho;}{}^\alpha \tag{2.23}$$

$$W^\alpha{}_{\beta\bar\rho} = A^\alpha{}_{\bar\rho;\beta} \tag{2.24}$$

DEMONSTRAÇÃO: Primeiro observe que $\tau_\alpha \wedge \theta^\alpha = 0$ é equivalente à (2.12), donde

$$\theta^\beta \wedge \Pi_\beta{}^\alpha = R_\beta{}^\alpha{}_{\rho\bar\sigma}\theta^\beta \wedge \theta^\rho \wedge \theta^{\bar\sigma} + W_\beta{}^\alpha{}_\rho \theta^\beta \wedge \theta^\rho \wedge \theta - W^\alpha{}_{\beta\bar\rho}\theta^\beta \wedge \theta^{\bar\rho} \wedge \theta$$

De $\Pi_\beta{}^\alpha = d\omega_\beta{}^\alpha - \omega_\beta{}^\gamma \wedge \omega_\gamma{}^\beta$, obtemos em P,

$$\Pi_\beta{}^\alpha = d\omega_\beta{}^\alpha$$

Por outro lado, derivando $d\theta^\alpha = \theta^\beta \wedge \omega_\beta{}^\alpha + \theta \wedge \tau^\alpha$, encontramos em P

$$\theta^\beta \wedge d\omega_\beta{}^\alpha = d\theta \wedge \tau^\alpha - \theta \wedge d\tau^\alpha$$

Agora,

$$d\theta \wedge \tau^\alpha = ih_{\alpha\bar\beta}\theta^\alpha \wedge \theta^{\bar\beta} \wedge \tau^\alpha = i\theta^\alpha \wedge \theta^{\bar\beta} \wedge \tau_{\bar\beta} = 0.$$

Assim

$$-\theta \wedge d\tau^\alpha = R_\beta{}^\alpha{}_{\rho\bar\sigma}\theta^\beta \wedge \theta^\rho \wedge \theta^{\bar\sigma} + W_\beta{}^\alpha{}_\rho \theta^\beta \wedge \theta^\rho \wedge \theta - W^\alpha{}_{\beta\bar\rho}\theta^\beta \wedge \theta^{\bar\rho} \wedge \theta.$$

Mas,

$$-\theta \wedge d\tau^\alpha = -\theta \wedge dA^\alpha{}_{\bar\rho} \wedge \theta^{\bar\rho} - A^\alpha{}_{\bar\rho}\theta \wedge d\theta^{\bar\rho} = -A^\alpha{}_{\bar\rho;\beta}\theta \wedge \theta^\beta \wedge \theta^{\bar\rho} - A^\alpha{}_{\bar\rho;\bar\beta}\theta \wedge \theta^{\bar\beta} \wedge \theta^{\bar\rho}.$$

Comparando os coeficientes de $\theta \wedge \theta^\beta \wedge \theta^{\bar\rho}$, obtemos

$$W^\alpha{}_{\beta\bar\rho} = A^\alpha{}_{\bar\rho;\beta}.$$

Daí,

$$W_\beta{}^\alpha{}_\rho = W^{\bar\sigma\alpha}{}_\rho h_{\beta\bar\sigma} = W^{\bar\sigma}{}_{\bar\gamma\rho} h_{\beta\bar\sigma} h^{\alpha\bar\gamma} = \overline{W^\sigma{}_{\gamma\bar\rho} h_{\bar\beta\sigma} h^{\bar\alpha\gamma}} = \overline{A^\sigma{}_{\bar\rho;\gamma} h_{\bar\beta\sigma} h^{\bar\alpha\gamma}} = \overline{A_{\bar\beta\bar\rho;}{}^{\bar\alpha}} = A_{\beta\rho;}{}^\alpha,$$

provando o resultado. ∎

Essa proposição diz que a forma de curvatura da conexão pseudohermitiana é completamente determinada pela torção pseudohermitiana e pelo tensor cujas componentes são $R_\beta{}^\alpha{}_{\rho\bar\sigma}$.

Definição 2.2.1. *A* ***curvatura pseudohermitiana*** *da conexão ∇ é o tensor do tipo $(3,1)$ cujas componentes são dadas por $R_\beta{}^\alpha{}_{\rho\bar\sigma}$.*

Definição 2.2.2. *A contração da curvatura pseudohermitiana com a forma de Levi L_θ fornece um tensor do tipo $(4,0)$ denominado* ***tensor curvatura de Webster*** *cujas componentes são $R_{\beta\bar\gamma\rho\bar\sigma}$.*

Definição 2.2.3. *A contração $R_\alpha{}^\alpha{}_{\rho\bar\sigma}$ fornece um tensor do tipo $(2,0)$ denominado* ***tensor de Ricci pseudohermitiano*** *cujas componentes são $R_{\rho\bar\sigma} := R_\alpha{}^\alpha{}_{\rho\bar\sigma}$.*

Definição 2.2.4. *A contração do tensor de Ricci pseudohermitiano com respeito à forma de Levi é denominada* ***curvatura escalar pseudohermitiana*** *e denotada por $R = R_\rho{}^\rho = R_{\rho\bar\sigma}h^{\rho\bar\sigma}$.*

Em [31], J. Lee apresentou algumas identidades envolvendo derivadas covariantes da curvatura escalar, do tensor de Ricci e da torção pseudohermitiana. Tais identidades foram denominadas **identidades de Bianchi** .

Lema 2.2.1 (Identidades de Bianchi). *A curvatura pseudohermitiana e a torção satisfazem*

$$R_{\rho\bar\sigma;\gamma} - R_{\gamma\bar\sigma;\rho} = iA_{\alpha\gamma;}{}^\alpha h_{\rho\bar\sigma} - iA_{\alpha\rho;}{}^\alpha h_{\gamma\bar\sigma} \tag{2.25}$$

$$R_{;\gamma} - R_{\gamma\bar\sigma;}{}^{\bar\sigma} = -i(n-1)A_{\alpha\gamma;}{}^\alpha \tag{2.26}$$

$$R_{\rho\bar\sigma;0} = A_{\alpha\rho;}{}^\alpha{}_{\bar\sigma} + A_{\bar\beta\bar\sigma;}{}^{\bar\beta}{}_\rho \tag{2.27}$$

$$R_{;0} = A_{\alpha\rho;}{}^{\alpha\rho} + A_{\bar\beta\bar\sigma;}{}^{\bar\beta\bar\sigma} \tag{2.28}$$

Demonstração: Pela proposição (2.2.1), temos

$$\Pi_\alpha{}^\alpha = d\omega_\alpha{}^\alpha = R_{\rho\bar\sigma}\theta^\rho \wedge \theta^{\bar\sigma} + A_{\alpha\gamma;}{}^\alpha\theta^\gamma \wedge \theta - A^\alpha{}_{\bar\gamma;\,\alpha}\theta^{\bar\gamma} \wedge \theta.$$

Derivando, obtemos

$$\begin{aligned}
& dR_{\rho\bar\sigma}\theta^\rho \wedge \theta^{\bar\sigma} + R_{\rho\bar\sigma}d(\theta^\rho \wedge \theta^{\bar\sigma}) + dA_{\alpha\gamma;}{}^\alpha\theta^\gamma \wedge \theta \\
& + A_{\alpha\gamma;}{}^\alpha d(\theta^\gamma \wedge \theta) - dA^\alpha{}_{\bar\gamma;\,\alpha}\theta^{\bar\gamma} \wedge \theta - A^\alpha{}_{\bar\gamma;\,\alpha}d(\theta^{\bar\gamma} \wedge \theta) \\
= \; & R_{\rho\bar\sigma;\,\gamma}\theta^\gamma \wedge \theta^\rho \wedge \theta^{\bar\sigma} + R_{\rho\bar\sigma;\,\bar\gamma}\theta^{\bar\gamma} \wedge \theta^\rho \wedge \theta^{\bar\sigma} + R_{\rho\bar\sigma;\,0}\theta \wedge \theta^\rho \wedge \theta^{\bar\sigma} \\
& + R_{\rho\bar\sigma}d\theta^\rho \wedge \theta^{\bar\sigma} + R_{\rho\bar\sigma}\theta^\rho \wedge d\theta^{\bar\sigma} + A_{\alpha\gamma;}{}^\alpha{}_\sigma\theta^\sigma \wedge \theta^\gamma \wedge \theta + A_{\alpha\gamma;}{}^\alpha{}_{\bar\sigma}\theta^{\bar\sigma} \wedge \theta^\gamma \wedge \theta \\
& + A_{\alpha\gamma;}{}^\alpha d\theta^\gamma \wedge \theta + A_{\alpha\gamma;}{}^\alpha\theta^\gamma \wedge d\theta - A^\alpha{}_{\bar\gamma;\,\alpha\rho}\theta^\rho \wedge \theta^{\bar\gamma} \wedge \theta \\
& - A^\alpha{}_{\bar\gamma;\,\alpha\bar\rho}\theta^{\bar\rho} \wedge \theta^{\bar\gamma} \wedge \theta - A^\alpha{}_{\bar\gamma;\,\alpha}d\theta^{\bar\gamma} \wedge \theta - A^\alpha{}_{\bar\gamma;\,\alpha}\theta^{\bar\gamma} \wedge d\theta = 0.
\end{aligned}$$

Substituindo as identidades

$$d\theta = ih_{\rho\bar\sigma}\theta^\rho \wedge \theta^{\bar\sigma},$$

$$d\theta^\beta = \theta^\gamma \wedge \omega_\gamma{}^\beta + \theta \wedge \tau^\beta = \theta^\gamma \wedge \omega_\gamma{}^\beta + A^\beta{}_{\bar\gamma}\theta \wedge \theta^{\bar\gamma},$$

e calculando em P, obtemos

$$\begin{gathered}
(R_{\rho\bar\sigma;\,\gamma} - iA_{\alpha\gamma;}{}^\alpha h_{\rho\bar\sigma})\theta^\gamma \wedge \theta^\rho \wedge \theta^{\bar\sigma} + (R_{\rho\bar\sigma;\,\bar\gamma} - iA^\alpha{}_{\bar\gamma;\,\alpha}h_{\rho\bar\sigma})\theta^{\bar\gamma} \wedge \theta^\rho \wedge \theta^{\bar\sigma} \\
+(R_{\rho\bar\sigma;\,0} - A_{\alpha\rho;}{}^\alpha{}_{\bar\sigma} - A^\alpha{}_{\bar\sigma;\,\alpha\rho})\theta \wedge \theta^\rho \wedge \theta^{\bar\sigma} + (R_{\rho\bar\sigma}A^{\bar\sigma}{}_\gamma - A_{\alpha\gamma;}{}^\alpha{}_\rho)\theta \wedge \theta^\rho \wedge \theta^\gamma \\
+(R_{\rho\bar\sigma}A^\rho{}_{\bar\gamma} + A^\alpha{}_{\bar\gamma;\,\alpha\bar\sigma})\theta \wedge \theta^{\bar\gamma} \wedge \theta^{\bar\sigma} = 0.
\end{gathered}$$

Notando que os coeficientes de $\theta^\gamma \wedge \theta^\rho \wedge \theta^{\bar\sigma}$ e de $\theta \wedge \theta^\rho \wedge \theta^{\bar\sigma}$ satisfazem

$$\begin{aligned}
R_{\rho\bar\sigma;\,\gamma} - iA_{\alpha\gamma;}{}^\alpha h_{\rho\bar\sigma} &= R_{\gamma\bar\sigma;\,\rho} - iA_{\alpha\rho;}{}^\alpha h_{\gamma\bar\sigma}, \\
R_{\rho\bar\sigma;\,0} &= A_{\alpha\rho;}{}^\alpha{}_{\bar\sigma} + A^\alpha{}_{\bar\sigma;\,\alpha\rho},
\end{aligned}$$

e que

$$A^\alpha{}_{\bar\sigma;\,\alpha\rho} = A^\alpha{}_{\bar\sigma;}{}^{\bar\beta}{}_\rho h_{\alpha\bar\beta} = A_{\bar\beta\bar\sigma;}{}^{\bar\beta.}{}_\rho$$

Derivamos as identidades (2.25) e (2.27). Agora, de (2.25), deduzimos que

$$\begin{aligned}
R_{;\,\gamma} - R_{\gamma\bar\sigma;}{}^{\bar\sigma} &= R_\rho{}^\rho{}_{;\,\gamma} - R_{\gamma\bar\sigma;}{}^{\bar\sigma} \\
&= (R_{\rho\bar\sigma;\,\gamma} - R_{\gamma\bar\sigma;\,\rho})\, h^{\rho\bar\sigma} \\
&= (iA_{\alpha\gamma;}{}^\alpha h_{\rho\bar\sigma} - iA_{\alpha\rho;}{}^\alpha h_{\gamma\bar\sigma})\, h^{\rho\bar\sigma} \\
&= iA_{\alpha\gamma;}{}^\alpha - iA_{\alpha\rho;}{}^\alpha \delta^\rho_\gamma \\
&= iA_{\alpha\gamma;}{}^\alpha - inA_{\alpha\gamma;}{}^\alpha \\
&= -i(n-1)A_{\alpha\gamma;}{}^\alpha,
\end{aligned}$$

o que prova (2.26). Finalmente, (2.28) segue de (2.27), pois

$$R_{;0} = R_{\rho}{}^{\rho}{}_{,0} = R_{\rho\bar{\sigma};0}\, h^{\bar{\sigma}\rho} = (A_{\alpha\rho;}{}^{\alpha}{}_{\bar{\sigma}} + A_{\bar{\beta}\bar{\sigma};}{}^{\bar{\beta}}{}_{\rho})\, h^{\bar{\sigma}\rho} = A_{\alpha\rho;}{}^{\alpha\rho} + A_{\bar{\beta}\bar{\sigma};}{}^{\bar{\beta}\bar{\sigma}}.$$

∎

O tensor curvatura da conexão pseudohermitiana é o tensor do tipo $(3,1)$ definido em todo $\mathbb{C} \otimes T(M)$ por

$$R^{\nabla}(Y,Z)X = [\nabla_Y, \nabla_Z]X - \nabla_{[Y,Z]}X.$$

Em relação à um referencial local $\{T_\alpha\}$, podemos escrever

$$R^{\nabla}(T_B, T_C)T_A = R^{\nabla}{}_{A}{}^{D}{}_{BC}T_D = R^{\nabla}{}_{A}{}^{\sigma}{}_{BC}T_\sigma + R^{\nabla}{}_{A}{}^{\bar{\sigma}}{}_{BC}T_{\bar{\sigma}} + R^{\nabla}{}_{A}{}^{0}{}_{BC}T_0.$$

Como $T_{1,0}$ e $T_{0,1}$ são paralelos com respeito à conexão ∇, temos

$$R^{\nabla}{}_{\alpha}{}^{\bar{\sigma}}{}_{BC} = R^{\nabla}{}_{\alpha}{}^{0}{}_{BC} = 0,$$

$$R^{\nabla}{}_{\bar{\alpha}}{}^{\sigma}{}_{BC} = R^{\nabla}{}_{\bar{\alpha}}{}^{0}{}_{BC} = 0.$$

Além disso, de $\nabla T = 0$, obtemos

$$R^{\nabla}{}_{0}{}^{D}{}_{BC} = 0.$$

Dragomir mostrou em sua tese de doutorado que (veja também [13])

$$d\omega_{\beta}{}^{\alpha} - \omega_{\beta}{}^{\gamma} \wedge \omega_{\gamma}{}^{\beta} = R^{\nabla}{}_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\rho\bar{\sigma}}\theta^{\rho} \wedge \theta^{\bar{\sigma}} + W_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\rho}\theta^{\rho} \wedge \theta - W^{\alpha}{}_{\beta\bar{\rho}}\theta^{\bar{\rho}} \wedge \theta + i\theta_\beta \wedge \tau^\alpha - i\tau_\beta \wedge \theta^\alpha.$$

Portanto, R^{∇} é uma extensão natural do tensor curvatura pseudohermitiano.

Definição 2.2.5. *O tensor de Ricci da conexão pseudohermitiana ∇ é definido por*

$$Ric^{\nabla} = C_2^1 R^{\nabla},$$

ou seja,

$$Ric^{\nabla}(Y,Z) = \mathit{traço}\{X \mapsto R(X,Z)Y\}.$$

Dado um referencial $\{T_\alpha\}$, temos

$$Ric^{\nabla}(T_\alpha, T_{\bar{\beta}}) = R^{\nabla}{}_{\alpha}{}^{D}{}_{D\bar{\beta}} = R^{\nabla}{}_{\alpha}{}^{\gamma}{}_{\gamma\bar{\beta}} = R_{\alpha\bar{\sigma}\gamma\bar{\beta}}h^{\gamma\bar{\sigma}} = R_{\gamma\bar{\sigma}\alpha\bar{\beta}}h^{\gamma\bar{\sigma}} = R_{\gamma}{}^{\gamma}{}_{\alpha\bar{\beta}} = R_{\alpha\bar{\beta}}.$$

Isso mostra que o tensor de Ricci pseudohermitiano $R_{\alpha\bar{\beta}}$ é apenas um fragmento do tensor de Ricci Ric^{∇} da conexão pseudohermitiana. Uma questão natural é se o tensor de Ricci pseudohermitiano $R_{\alpha\bar{\beta}}$ determina Ric^{∇}. Dragomir [13] mostrou que a menos que a torção pseudohermitiana seja nula, a resposta é negativa. Existem outras componentes não triviais de Ric^{∇} que dependem da torção pseudohermitiana τ e de suas derivadas covariantes. Por outro lado, ele mostrou que a curvatura escalar pseudohermitiana é igual a curvatura escalar da conexão pseudohermitiana (a menos de um fator constante 1/2). Precisamente, temos:

Teorema 2.2.1 (Dragomir)**.** *Seja (M,θ) uma variedade pseudohermitiana não-degenerada. Então*

$$
\begin{aligned}
(2.29)\qquad & {R^{\nabla}}_{\alpha\beta} &=& \; i(n-1)A_{\alpha\beta},\\
(2.30)\qquad & {R^{\nabla}}_{\alpha\bar\beta} &=& \; R_{\alpha\bar\beta},\\
(2.31)\qquad & {R^{\nabla}}_{0\beta} &=& \; {A_{\sigma\beta;}}^{\sigma},\\
(2.32)\qquad & {R^{\nabla}}_{\alpha 0} &=& \; 0.
\end{aligned}
$$

Além disso,

$$R = \tfrac{1}{2}\, \textit{traço}(Ric^{\nabla}).$$

As demonstrações desses resultados podem ser vistas em [13]. No entanto, convém fazer algumas observações sobre os tensores $R_{\alpha\bar\beta}$ e Ric^{∇}.

1. $R_{\alpha\bar\beta}$ é Hermitiano (sobre $T_{1,0}$):

$$R_{\alpha\bar\beta} = {R_{\sigma}}^{\sigma}{}_{\alpha\bar\beta} = R_{\sigma\bar\rho\alpha\bar\beta}\, h^{\bar\rho\sigma} = \overline{R_{\rho\bar\sigma\beta\bar\alpha}\, h^{\rho\bar\sigma}} = \overline{{R_{\rho}}^{\rho}{}_{\beta\bar\alpha}} = \overline{R_{\beta\bar\alpha}}.$$

2. $\overline{R_{\alpha\bar\beta}} = {Ric^{\nabla}}_{\bar\alpha\beta}$:

$$\overline{R_{\alpha\bar\beta}} = \overline{{R_{\rho}}^{\rho}{}_{\alpha\bar\beta}} = \overline{R_{\rho\bar\sigma\alpha\bar\beta}\, h^{\rho\bar\sigma}} = \overline{R_{\alpha\bar\sigma\rho\bar\beta}}\, h^{\sigma\bar\rho} = R_{\bar\alpha\sigma\bar\rho\beta}\, h^{\sigma\bar\rho} = {R_{\bar\alpha}}^{\bar\rho}{}_{\bar\rho\beta} = {Ric^{\nabla}}_{\bar\alpha\beta}.$$

3. Ric é simétrico sobre $\mathbb{C}\otimes T(M)$:

$$
\begin{aligned}
{Ric^{\nabla}}_{\alpha\beta} &= i(n-1)A_{\alpha\beta} = i(n-1)A_{\beta\alpha} = {Ric^{\nabla}}_{\beta\alpha},\\
{Ric^{\nabla}}_{\bar\alpha\bar\beta} &= \overline{{Ric^{\nabla}}_{\alpha\beta}} = \overline{{Ric^{\nabla}}_{\beta\alpha}} = {Ric^{\nabla}}_{\bar\beta\bar\alpha},\\
{Ric^{\nabla}}_{\bar\beta\alpha} &= \overline{R_{\beta\bar\alpha}} = R_{\alpha\bar\beta} = {Ric^{\nabla}}_{\alpha\bar\beta}.
\end{aligned}
$$

A partir desse momento denotaremos $R_{AB} := {Ric^{\nabla}}_{AB}$. Em relação ao referencial $\{T, T_\alpha, T_{\bar\alpha}\}$, o tensor de Ricci da conexão pseudohermitiana ∇ possui a seguinte representação matricial:

$$Ric : \begin{bmatrix} i(n-1)A_{\alpha\beta} & R_{\bar\alpha\beta} & {A_{\sigma\beta;}}^{\sigma} \\ R_{\alpha\bar\beta} & -i(n-1)A_{\bar\alpha\bar\beta} & {A_{\bar\sigma\bar\beta;}}^{\bar\sigma} \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

2.3 Mudanças na estrutura pseudohermitiana

Seja (M, θ) uma variedade pseudohermitiana (estritamente pseudoconvexa). Se $\widetilde{\theta}$ é uma estrutura pseudohermitiana para M compatível com θ, então $\widetilde{\theta} = e^{2u}\theta$ para alguma função real $u \in C^\infty(M)$. Nessa seção, iremos expressar os invariantes pseudohermitianos de $\widetilde{\theta}$ em termos dos invariantes de θ. Primeiro, precisaremos determinar a lei de transformação das formas de conexão. Os resultados apresentados aqui foram obtidos por J. Lee em [30] e [31].

Lema 2.3.1. *O correferencial $\{\widetilde{\theta}^\alpha := \theta^\alpha + 2iu^\alpha\theta\}$ satisfaz a identidade*

$$d\widetilde{\theta} = i\widetilde{h}_{\alpha\bar{\beta}}\widetilde{\theta}^\alpha \wedge \widetilde{\theta}^{\bar{\beta}},$$

no qual $\widetilde{\theta} = e^{2u}\theta$. Em particular, $\{\widetilde{\theta}^\alpha\}$ é um correferencial admissível para $(M, \widetilde{\theta})$ com referencial dual $\widetilde{T}_\alpha = T_\alpha$. Além disso, a direção característica de $d\widetilde{\theta}$ é

$$\widetilde{T} = e^{-2u}(-2iu^\gamma T_\gamma + 2iu^{\bar{\gamma}}T_{\bar{\gamma}} + T)\,.$$

Demonstração: Temos,

$$\begin{aligned}
d\widetilde{\theta} &= d(e^{2u}\theta) \\
&= e^{2u}(d\theta + 2du \wedge \theta) \\
&= e^{2u}(ih_{\alpha\bar{\beta}}\theta^\alpha \wedge \theta^{\bar{\beta}} + (2u_\alpha\theta^\alpha + 2u_{\bar{\beta}}\theta^{\bar{\beta}}) \wedge \theta) \\
&= e^{2u}(ih_{\alpha\bar{\beta}}\theta^\alpha \wedge \theta^{\bar{\beta}} + ih_{\alpha\bar{\beta}}(-2iu^{\bar{\beta}}\theta^\alpha - 2iu^\alpha\theta^{\bar{\beta}}) \wedge \theta) \\
&= ie^{2u}h_{\alpha\bar{\beta}}(\theta^\alpha \wedge \theta^{\bar{\beta}} - 2iu^{\bar{\beta}}\theta^\alpha \wedge \theta - 2iu^\alpha\theta^{\bar{\beta}} \wedge \theta) \\
&= i\widetilde{h}_{\alpha\bar{\beta}}\widetilde{\theta}^\alpha \wedge \widetilde{\theta}^{\bar{\beta}}.
\end{aligned}$$

Seja $\widetilde{T} = a^\alpha T_\alpha + a^{\bar{\alpha}}T_{\bar{\alpha}} + aT$ a direção característica de $d\widetilde{\theta}$. Do fato que $\widetilde{\theta}(\widetilde{T}) = 1$, obtemos

$$e^{2u}\theta(\widetilde{T}) = e^{2u}a = 1,$$

donde $a = e^{-2u}$. Como $\widetilde{\theta}^\gamma(\widetilde{T}) = 0$, encontramos

$$\widetilde{\theta}^\gamma(a^\alpha T_\alpha + a^{\bar{\alpha}}T_{\bar{\alpha}} + aT) = (\theta^\gamma + 2iu^\gamma\theta)(a^\alpha T_\alpha + a^{\bar{\alpha}}T_{\bar{\alpha}} + e^{-2u}T) = a^\gamma + 2iu^\gamma e^{-2u} = 0,$$

donde $a^\alpha = -2iu^\gamma e^{-2u}$. Analogamente, obtemos $a^{\bar{\alpha}} = 2iu^{\bar{\gamma}}e^{-2u}$. ∎

Considere M munida da nova estrutura pseudohermitiana $\{\widetilde{\theta} = e^{2u}\theta\}$ e com correferencial admissível $\{\widetilde{\theta}^\alpha = \theta^\alpha + 2iu^\alpha\theta\}$. Nosso objetivo é determinar as 1-formas de conexão $\widetilde{\omega}_\alpha{}^{\bar{\beta}}$ e 1-formas de torção $\widetilde{\tau}^\alpha$ de $(M, \widetilde{\theta})$. Tais 1-formas são determinadas unicamente pelas equações

(W1) $d\widetilde{\theta}^\alpha = \widetilde{\theta}^\gamma \wedge \widetilde{\omega}_\alpha{}^{\bar\beta} + \widetilde{\theta} \wedge \widetilde{\tau}^\alpha$;

(W2) $d\widetilde{h}^{\alpha\bar\beta} = \widetilde{\omega}_{\alpha\bar\beta} + \widetilde{\omega}_{\bar\beta\alpha}$;

(W3) $\widetilde{A}_{\gamma\bar\beta} = \widetilde{A}_{\bar\beta\gamma}$, em que $\widetilde{\tau}_\gamma = \widetilde{A}_{\gamma\bar\beta}\widetilde{\theta}^{\bar\beta}$.

Derivando $\widetilde{\theta}^\alpha$, temos

$$
\begin{aligned}
d\widetilde{\theta}^\alpha &= d\theta^\alpha + 2idu^\alpha \wedge \theta + 2iu^\alpha d\theta \\
&= \theta^\gamma \wedge \omega_\gamma{}^\alpha + \theta \wedge \tau^\alpha + (T_\gamma u^\alpha \theta^\gamma + T_{\bar\gamma} u^\alpha \theta^{\bar\gamma}) \wedge \theta - 2u^\alpha h_{\gamma\bar\beta}\theta^\gamma \wedge \theta^{\bar\beta}.
\end{aligned} \tag{2.33}
$$

Agora,

$$
\begin{aligned}
u^\alpha{}_B &= u_{\bar\sigma B} h^{\alpha\bar\sigma} \\
&= (T_B u_{\bar\sigma} - \omega_{\bar\sigma}{}^{\bar\rho}(T_B)u_{\bar\rho})h^{\alpha\bar\sigma} \\
&= T_B u_{\bar\sigma} h^{\alpha\bar\sigma} - \omega^{\alpha\bar\rho}(T_B)u_{\bar\rho} \\
&= (-u_{\bar\sigma} T_B h^{\alpha\bar\sigma} + T_B u^\alpha) - \omega^\alpha{}_\beta(T_B)u^\beta.
\end{aligned}
$$

Como

$$\omega_\beta{}^\alpha + \omega^\alpha{}_\beta = dh_{\beta\bar\sigma}h^{\alpha\bar\sigma},$$

considerando $\{T_\alpha\}$ pseudohermtiano ($h_{\alpha\bar\beta} =$ constante), obtemos

$$u^\alpha{}_B = T_B u^\alpha + u^\beta \omega_\beta{}^\alpha(T_B),$$

donde

$$
\begin{aligned}
T_\gamma u^\alpha \theta^\gamma + T_{\bar\gamma} u^\alpha \theta^{\bar\gamma} &= u^\alpha{}_\gamma \theta^\gamma - u^\beta \omega_\beta{}^\alpha(T_\gamma)\theta^\gamma + u^\alpha{}_{\bar\gamma}\theta^{\bar\gamma} - u^\beta\omega_\beta{}^\alpha(T_{\bar\gamma})\theta^{\bar\gamma} \\
&= u^\alpha{}_\gamma \theta^\gamma + u^\alpha{}_{\bar\gamma}\theta^{\bar\gamma} - u^\beta\omega_\beta{}^\alpha + u^\beta\omega_\beta{}^\alpha(T)\theta.
\end{aligned}
$$

Substituindo em (2.33), chegamos à

$$
\begin{aligned}
d\widetilde{\theta}^\alpha &= \theta^\gamma \wedge \omega_\gamma{}^\alpha + \theta \wedge \tau^\alpha + 2i(u^\alpha{}_\gamma\theta^\gamma + u^\alpha{}_{\bar\gamma}\theta^{\bar\gamma} \\
&\quad -u^\beta\omega_\beta{}^\alpha + u^\beta\omega_\beta{}^\alpha(T)\theta) \wedge \theta - 2u^\alpha h_{\gamma\bar\beta}\theta^\gamma \wedge \theta^{\bar\beta} \\
&= \theta^\beta \wedge (\omega_\beta{}^\alpha + 2iu^\alpha{}_\beta\theta - 2u^\alpha h_{\beta\bar\gamma}\theta^{\bar\gamma}) - 2iu^\beta\omega_\beta{}^\alpha \wedge \theta + (A^\alpha{}_{\bar\gamma} - 2iu^\alpha{}_{\bar\gamma})\theta \wedge \theta^{\bar\gamma}.
\end{aligned}
$$

Fazendo a substituição $\theta^\beta = \widetilde{\theta}^\beta - 2iu^\beta\theta$, derivamos

$$
\begin{aligned}
d\widetilde{\theta}^\alpha &= \widetilde{\theta}^\beta \wedge (\omega_\beta{}^\alpha + 2iu^\alpha{}_\beta\theta - 2u^\alpha h_{\beta\bar\gamma}\theta^{\bar\gamma}) \\
&\quad -2iu^\beta\theta \wedge \omega_\beta{}^\alpha + 4iu^\beta u^\alpha h_{\beta\bar\gamma}\theta \wedge \theta^{\bar\gamma} - 2iu^\beta\omega_\beta{}^\alpha \wedge \theta + (A^\alpha{}_{\bar\gamma} - 2iu^\alpha{}_{\bar\gamma})\theta \wedge \theta^{\bar\gamma} \\
&= \widetilde{\theta}^\beta \wedge (\omega_\beta{}^\alpha + 2iu^\alpha{}_\beta\theta - 2u^\alpha h_{\beta\bar\gamma}\theta^{\bar\gamma}) + \widetilde{\theta} \wedge [e^{-2u}(A^\alpha{}_{\bar\gamma} - 2iu^\alpha{}_{\bar\gamma} + 4iu_{\bar\gamma}u^\alpha)]\theta^{\bar\gamma}.
\end{aligned}
$$

Defina

$$\widetilde{\tau}^{\alpha} = e^{-2u}(A^{\alpha}{}_{\bar{\gamma}} - 2iu^{\alpha}{}_{\bar{\gamma}} + 4iu_{\bar{\gamma}}u^{\alpha})\theta^{\bar{\gamma}}.$$

Temos

$$\begin{aligned}
\widetilde{A}_{\bar{\beta}\bar{\gamma}} &= \widetilde{A}^{\alpha}{}_{\bar{\gamma}}\widetilde{h}_{\alpha\bar{\beta}} \\
&= (A^{\alpha}{}_{\bar{\gamma}} - 2iu^{\alpha}{}_{\bar{\gamma}} + 4iu_{\bar{\gamma}}u^{\alpha})h_{\alpha\bar{\beta}} \\
&= A_{\bar{\beta}\bar{\gamma}} - 2iu_{\bar{\beta}\bar{\gamma}} + 4iu_{\bar{\beta}}u_{\bar{\gamma}} \\
&= A_{\bar{\gamma}\bar{\beta}} - 2iu_{\bar{\gamma}\bar{\beta}} + 4iu_{\bar{\gamma}}u_{\bar{\beta}} \\
&= \widetilde{A}_{\bar{\gamma}\bar{\beta}}.
\end{aligned}$$

Agora, considere

$$\widetilde{\omega}_{\beta}{}^{\alpha} = \omega_{\beta}{}^{\alpha} + 2iu^{\alpha}{}_{\beta}\theta - 2u^{\alpha}h_{\beta\bar{\gamma}}\theta^{\bar{\gamma}} + F\widetilde{\theta}^{\beta}.$$

Observe que, por construção, $\widetilde{\omega}_{\beta}{}^{\alpha}$ satisfaz **[W1]**. Resta então determinar F de tal maneira que $\widetilde{\omega}_{\beta}{}^{\alpha}$ satisfaça **[W2]**. Escrevendo

$$\begin{aligned}
\widetilde{\omega}_{\beta}{}^{\alpha} &= \omega_{\beta}{}^{\alpha} + 2iu^{\alpha}{}_{\beta}\theta - 2u^{\alpha}h_{\beta\bar{\gamma}}\theta^{\bar{\gamma}} + F\theta^{\beta} + 2iu^{\beta}F\theta \\
&= \omega_{\beta}{}^{\alpha} + F\theta^{\beta} - 2u^{\alpha}h_{\beta\bar{\gamma}}\theta^{\bar{\gamma}} + 2i(u^{\alpha}{}_{\beta} + u^{\beta}F)\theta,
\end{aligned}$$

temos

$$\widetilde{\omega}_{\beta\bar{\sigma}} = \widetilde{\omega}_{\beta}{}^{\alpha}\widetilde{h}_{\alpha\bar{\sigma}} = e^{2u}(\omega_{\beta\bar{\sigma}} + Fh_{\alpha\bar{\sigma}}\theta^{\beta} - 2u_{\bar{\sigma}}h_{\beta\bar{\gamma}}\theta^{\bar{\gamma}} + 2i(u_{\bar{\sigma}\beta} + u^{\beta}h_{\alpha\bar{\sigma}}F)\theta),$$

donde

$$\widetilde{\omega}_{\bar{\sigma}\beta} = e^{2u}(\omega_{\bar{\sigma}\beta} + \overline{F}h_{\beta\bar{\alpha}}\theta^{\bar{\beta}} - 2u_{\beta}h_{\gamma\bar{\sigma}}\theta^{\gamma} - 2i(u_{\beta\bar{\sigma}} + u^{\bar{\sigma}}h_{\beta\bar{\alpha}}\overline{F})\theta)\,.$$

Logo

$$\begin{aligned}
\widetilde{\omega}_{\beta\bar{\sigma}} + \widetilde{\omega}_{\bar{\sigma}\beta} &= e^{2u}(\omega_{\beta\bar{\sigma}} + \omega_{\bar{\sigma}\beta} + (Fh_{\alpha\bar{\sigma}}\delta^{\gamma}_{\beta} - 2u_{\beta}h_{\gamma\bar{\sigma}})\theta^{\gamma} + (\overline{F}h_{\beta\bar{\alpha}}\delta^{\gamma}_{\beta} - 2u_{\bar{\sigma}}h_{\beta\bar{\gamma}})\theta^{\bar{\gamma}} \\
&\quad +2i(u_{\bar{\sigma}\beta} - u_{\beta\bar{\sigma}} + u^{\beta}h_{\alpha\bar{\sigma}}F - u^{\bar{\sigma}}h_{\beta\bar{\alpha}}\overline{F})\theta).
\end{aligned}$$

Por outro lado,

$$\begin{aligned}
d\widetilde{h}_{\beta\bar{\sigma}} &= d(e^{2u}h_{\beta\bar{\sigma}}) \\
&= e^{2u}(dh_{\beta\bar{\sigma}} + 2h_{\beta\bar{\sigma}}du) \\
&= e^{2u}(\omega_{\beta\bar{\sigma}} + \omega_{\bar{\sigma}\beta} + 2u_{\gamma}h_{\beta\bar{\sigma}}\theta^{\gamma} + 2u_{\bar{\gamma}}h_{\beta\bar{\sigma}}\theta^{\bar{\gamma}} + 2u_0h_{\beta\bar{\sigma}}\theta).
\end{aligned}$$

Mas F satisfaz necessariamente

$$Fh_{\alpha\bar{\sigma}}\delta^{\gamma}_{\beta} - 2u_{\beta}h_{\gamma\bar{\sigma}} = 2u_{\gamma}h_{\beta\bar{\sigma}},$$

donde

$$F\delta_\beta^\gamma = 2u_\beta h_{\gamma\bar\sigma}h^{\alpha\bar\sigma} + 2u_\gamma h_{\beta\bar\sigma}h^{\alpha\bar\sigma} = 2u_\beta\delta_\gamma^\alpha + 2u_\gamma\delta_\beta^\alpha.$$

Fazendo uma substituição direta, pode-se verificar que F ainda satisfaz

$$\overline{F}h_{\beta\bar\alpha}\delta_\beta^\gamma - 2u_{\bar\sigma}h_{\beta\bar\gamma} = 2u_{\bar\gamma}h_{\beta\bar\sigma}$$

e

$$2i(u_{\bar\sigma\beta} - u_{\beta\bar\sigma} + u^\beta h_{\alpha\bar\sigma}F - u^{\bar\sigma}h_{\beta\bar\alpha}\overline{F}) = 2u_0 h_{\beta\bar\sigma}.$$

Portanto,

$$\widetilde{\omega}_\beta{}^\alpha = \omega_\beta{}^\alpha + 2i(u^\alpha{}_\beta + 2u^\beta u_\beta\delta_\gamma^\alpha + 2u^\beta u_\gamma\delta_\beta^\alpha)\theta - 2u^\alpha h_{\beta\bar\gamma}\theta^{\bar\gamma} + (2u_\beta\delta_\gamma^\alpha + 2u_\gamma\delta_\beta^\alpha)\theta^\gamma.$$

∎

Podemos resumir esses resultados no seguinte lema:

Lema 2.3.2. *Seja (M,θ) uma variedade pseudohermitiana. Se $\widetilde{\theta} = e^{2u}\theta$ e $\widetilde{\theta^\alpha} = \theta^\alpha + 2iu^\alpha\theta$, então*

$$\begin{aligned}
\widetilde{\omega}_\beta{}^\alpha &= \omega_\beta{}^\alpha + 2i(u^\alpha{}_\beta + 2u^\beta u_\beta\delta_\gamma^\alpha + 2u^\beta u_\gamma\delta_\beta^\alpha)\theta - 2u^\alpha h_{\beta\bar\gamma}\theta^{\bar\gamma} + (2u_\beta\delta_\gamma^\alpha + 2u_\gamma\delta_\beta^\alpha)\theta^\gamma,\\
\widetilde{\tau}^\alpha &= \widetilde{A}^\alpha{}_{\bar\gamma}\theta^{\bar\gamma},
\end{aligned}$$

em que $\widetilde{A}_{\beta\gamma} = A_{\beta\gamma} + 2iu_{\beta\gamma} - 4iu_\beta u_\gamma$.

Corolario 2.3.1. *Seja $\widetilde{\theta} = e^{2u}\theta$. Com relação ao correferencial $\{\widetilde{\theta^\alpha} := \theta^\alpha + 2iu^\alpha\theta\}$, os símbolos de Christoffel da conexão pseudohermitiana $\widetilde{\nabla}$ são dados por*

$$\widetilde{\Gamma}_{\gamma\beta}^\alpha = \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha + 2u_\beta\delta_\gamma^\alpha + 2u_\gamma\delta_\beta^\alpha, \tag{2.34}$$

$$\widetilde{\Gamma}_{\bar\gamma\beta}^\alpha = \Gamma_{\bar\gamma\beta}^\alpha - 2u^\alpha h_{\beta\bar\gamma}, \tag{2.35}$$

$$\widetilde{\Gamma}_{0\beta}^\alpha = e^{-2u}\left(\Gamma_{0\beta}^\alpha - 2iu^\rho\Gamma_{\rho\beta}^\alpha + 2iu^{\bar\rho}\Gamma_{\bar\rho\beta}^\alpha + 2iu^\alpha{}_\beta - 4iu^\alpha u_\beta\right). \tag{2.36}$$

Demonstração: Temos

$$\begin{aligned}
\widetilde{\Gamma}_{\gamma\beta}^\alpha &= \widetilde{\omega}_\beta{}^\alpha(T_\gamma)\\
&= \omega_\beta{}^\alpha(T_\gamma) + 2u_\beta\delta_\gamma^\alpha + 2u_\gamma\delta_\beta^\alpha\\
&= \Gamma_{\gamma\beta}^\alpha + 2u_\beta\delta_\gamma^\alpha + 2u_\gamma\delta_\beta^\alpha;
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{\bar{\gamma}\beta} &= \widetilde{\omega}_{\beta}{}^{\alpha}(T_{\bar{\gamma}})\\ &= \omega_{\beta}{}^{\alpha}(T_{\bar{\gamma}}) - 2u^{\alpha}h_{\beta\bar{\gamma}}\\ &= \Gamma^{\alpha}_{\bar{\gamma}\beta} - 2u^{\alpha}h_{\beta\bar{\gamma}};\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\widetilde{\Gamma}^{\alpha}_{0\beta} &= \widetilde{\omega}_{\beta}{}^{\alpha}(\widetilde{T})\\ &= \widetilde{\omega}_{\beta}{}^{\alpha}(e^{-2u}(-2iu^{\gamma}T_{\gamma} + 2iu^{\bar{\gamma}}T_{\bar{\gamma}} + T))\\ &= e^{-2u}(-2iu^{\gamma}\widetilde{\omega}_{\beta}{}^{\alpha}(T_{\gamma}) + 2iu^{\bar{\gamma}}\widetilde{\omega}_{\beta}{}^{\alpha}(T_{\bar{\gamma}}) + \widetilde{\omega}_{\beta}{}^{\alpha}(T))\\ &= e^{-2u}\left(\Gamma^{\alpha}_{0\beta} - 2iu^{\rho}\Gamma^{\alpha}_{\rho\beta} + 2iu^{\bar{\rho}}\Gamma^{\alpha}_{\bar{\rho}\beta} + 2iu^{\alpha}{}_{\beta} - 4iu^{\alpha}u_{\beta}\right).\end{aligned}$$

∎

Corolario 2.3.2. *Seja $\widetilde{\theta} = e^{2u}\theta$. Com relação ao correferencial $\{\widetilde{\theta}^{\alpha} := \theta^{\alpha} + 2iu^{\alpha}\theta\}$, temos*

$$\widetilde{R}_{\alpha\bar{\beta}} = R_{\alpha\bar{\beta}} - (n+2)(u_{\alpha\bar{\beta}} + u_{\bar{\beta}\alpha}) - (u_{\gamma}{}^{\gamma} + u_{\bar{\gamma}}{}^{\bar{\gamma}} + 4(n+1)u_{\gamma}u^{\gamma})h_{\alpha\bar{\beta}}; \tag{2.37}$$

$$\widetilde{R} = e^{-2u}(R - 2(n+1)(u_{\gamma}{}^{\gamma} + u_{\bar{\gamma}}{}^{\bar{\gamma}}) - 4n(n+1)u_{\gamma}u^{\gamma}). \tag{2.38}$$

Demonstração: Da equação de estrutura

$$\Pi_{\beta}{}^{\alpha} = R_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\gamma\bar{\sigma}}\theta^{\gamma}\wedge\theta^{\bar{\sigma}} + W_{\beta}{}^{\alpha}{}_{\gamma}\theta^{\gamma}\wedge\theta - W^{\alpha}{}_{\beta\bar{\gamma}}\theta^{\bar{\gamma}}\wedge\theta + i\theta_{\beta}\wedge\tau^{\alpha} - i\tau_{\beta}\wedge\theta^{\alpha},$$

obtemos

$$\begin{aligned}\Pi_{\alpha}{}^{\alpha} &= R_{\alpha}{}^{\alpha}{}_{\gamma\bar{\sigma}}\theta^{\gamma}\wedge\theta^{\bar{\sigma}} + W_{\alpha}{}^{\alpha}{}_{\gamma}\theta^{\gamma}\wedge\theta - W^{\alpha}{}_{\alpha\bar{\gamma}}\theta^{\bar{\gamma}}\wedge\theta + i\theta_{\alpha}\wedge\tau^{\alpha} - i\tau_{\alpha}\wedge\theta^{\alpha}\\ &= R_{\gamma\bar{\sigma}}\theta^{\gamma}\wedge\theta^{\bar{\sigma}} + W_{\alpha}{}^{\alpha}{}_{\gamma}\theta^{\gamma}\wedge\theta - W^{\alpha}{}_{\alpha\bar{\gamma}}\theta^{\bar{\gamma}}\wedge\theta.\end{aligned}$$

Portanto,

$$d\omega_{\alpha}{}^{\alpha} = d\omega_{\alpha}{}^{\alpha} + \omega_{\alpha}{}^{\gamma}\wedge\omega_{\gamma}{}^{\alpha} = \Pi_{\alpha}{}^{\alpha} = R_{\gamma\bar{\sigma}}\theta^{\gamma}\wedge\theta^{\bar{\sigma}} \mod \theta.$$

Temos do lema (2.3.2),

$$\begin{aligned}\widetilde{\omega}_{\alpha}{}^{\alpha} &= \omega_{\alpha}{}^{\alpha} + 2i(u^{\alpha}{}_{\alpha} + 2u^{\alpha}u_{\alpha}\delta^{\alpha}_{\gamma} + 2u^{\alpha}u_{\gamma}\delta^{\alpha}_{\alpha})\theta - 2u^{\alpha}h_{\alpha\bar{\gamma}}\theta^{\bar{\gamma}} + (2u_{\alpha}\delta^{\alpha}_{\gamma} + 2u_{\gamma}\delta^{\alpha}_{\alpha})\theta^{\gamma}\\ &= \omega_{\alpha}{}^{\alpha} + 2i(u^{\gamma}{}_{\gamma} + 2(n+1)u_{\gamma}u^{\gamma})\theta + 2(n+1)2u_{\gamma}\theta^{\gamma} - 2u_{\bar{\gamma}}\theta^{\bar{\gamma}}.\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}d\widetilde{\omega}_{\alpha}{}^{\alpha} &= d\omega_{\alpha}{}^{\alpha} + 2id(u^{\gamma}{}_{\gamma} + 2(n+1)u_{\gamma}u^{\gamma})\wedge\theta + 2i(u^{\gamma}{}_{\gamma} + 2(n+1)u_{\gamma}u^{\gamma})d\theta\\ &\quad + 2(n+1)2du_{\gamma}\wedge\theta^{\gamma} + 2(n+1)2u_{\gamma}d\theta^{\gamma} - 2du_{\bar{\gamma}}\wedge\theta^{\bar{\gamma}} - 2u_{\bar{\gamma}}d\theta^{\bar{\gamma}}.\end{aligned}$$

Considerando o referencial pseudohermitiano e calculando em seu centro P, obtemos

$$d\theta^{\gamma} = 0 \mod \theta,$$

donde

$$\begin{aligned} d\widetilde{\omega}_{\alpha}{}^{\alpha} &= d\omega_{\alpha}{}^{\alpha} + 2(n+1)u_{\gamma\bar{\sigma}}\theta^{\bar{\sigma}} \wedge \theta^{\gamma} - 2u_{\bar{\gamma}\sigma}\theta^{\sigma} \wedge \theta^{\bar{\gamma}} \\ &\quad -2(u^{\rho}{}_{\rho} + 2(n+1)u_{\rho}u^{\rho})h_{\gamma\bar{\sigma}}\theta^{\gamma} \wedge \theta^{\bar{\sigma}} \mod \theta \\ &= d\omega_{\alpha}{}^{\alpha} + (-2(n+1)u_{\gamma\bar{\sigma}} - 2u_{\bar{\sigma}\gamma} - (2u^{\rho}{}_{\rho} + 4(n+1)u_{\rho}u^{\rho})h_{\gamma\bar{\sigma}})\theta^{\gamma} \wedge \theta^{\bar{\sigma}} \mod \theta. \end{aligned}$$

Agora,

$$2u^{\rho}{}_{\rho} = u^{\rho}{}_{\rho} + u^{\rho}{}_{\rho} = u_{\bar{\rho}}{}^{\bar{\rho}} + u_{\bar{\beta}\rho}h^{\rho\bar{\beta}} = u_{\bar{\rho}}{}^{\bar{\rho}} + (u_{\rho\bar{\beta}} - iu_0 h_{\rho\bar{\beta}})h^{\rho\bar{\beta}} = u_{\rho}{}^{\rho} + u_{\bar{\rho}}{}^{\bar{\rho}} - inu_0.$$

Assim,

$$\begin{aligned} d\widetilde{\omega}_{\alpha}{}^{\alpha} &= d\omega_{\alpha}{}^{\alpha} + (-2(n+1)u_{\gamma\bar{\sigma}} - 2u_{\bar{\sigma}\gamma} \\ &\quad -(u_{\rho}{}^{\rho} + u_{\bar{\rho}}{}^{\bar{\rho}} - inu_0 + 4(n+1)u_{\rho}u^{\rho})h_{\gamma\bar{\sigma}}\big)\,\theta^{\gamma} \wedge \theta^{\bar{\sigma}} \mod \theta \\ &= d\omega_{\alpha}{}^{\alpha} + (-2(n+1)u_{\gamma\bar{\sigma}} - 2u_{\bar{\sigma}\gamma} + inu_0 h_{\gamma\bar{\sigma}} \\ &\quad -(u_{\rho}{}^{\rho} + u_{\bar{\rho}}{}^{\bar{\rho}} + 4(n+1)u_{\rho}u^{\rho})h_{\gamma\bar{\sigma}}\big)\,\theta^{\gamma} \wedge \theta^{\bar{\sigma}} \mod \theta \\ &= d\omega_{\alpha}{}^{\alpha} + (-2(n+1)u_{\gamma\bar{\sigma}} - 2u_{\bar{\sigma}\gamma} + n(u_{\gamma\bar{\sigma}} - u_{\bar{\sigma}\gamma}) \\ &\quad -(u_{\rho}{}^{\rho} + u_{\bar{\rho}}{}^{\bar{\rho}} + 4(n+1)u_{\rho}u^{\rho})h_{\gamma\bar{\sigma}}\big)\,\theta^{\gamma} \wedge \theta^{\bar{\sigma}} \mod \theta \\ &= d\omega_{\alpha}{}^{\alpha} + (-(n+2)(u_{\gamma\bar{\sigma}} + u_{\bar{\sigma}\gamma}) \\ &\quad -(u_{\rho}{}^{\rho} + u_{\bar{\rho}}{}^{\bar{\rho}} + 4(n+1)u_{\rho}u^{\rho})h_{\gamma\bar{\sigma}}\big)\,\theta^{\gamma} \wedge \theta^{\bar{\sigma}} \mod \theta. \end{aligned}$$

Como

$$\widetilde{R}_{\gamma\bar{\sigma}}\widetilde{\theta}^{\gamma} \wedge \widetilde{\theta}^{\bar{\sigma}} = \widetilde{R}_{\gamma\bar{\sigma}}\theta^{\gamma} \wedge \theta^{\bar{\sigma}} \mod \theta,$$

obtemos

$$\begin{aligned} \widetilde{R}_{\gamma\bar{\sigma}}\theta^{\gamma} \wedge \theta^{\bar{\sigma}} = (R_{\gamma\bar{\sigma}} &- (n+2)(u_{\gamma\bar{\sigma}} + u_{\bar{\sigma}\gamma}) \\ &-(u_{\rho}{}^{\rho} + u_{\bar{\rho}}{}^{\bar{\rho}} + 4(n+1)u_{\rho}u^{\rho})h_{\gamma\bar{\sigma}}\big)\,\theta^{\gamma} \wedge \theta^{\bar{\sigma}} \mod \theta. \end{aligned}$$

Portanto,

$$\widetilde{R}_{\gamma\bar{\sigma}} = R_{\gamma\bar{\sigma}} - (n+2)(u_{\gamma\bar{\sigma}} + u_{\bar{\sigma}\gamma}) - \big(u_{\rho}{}^{\rho} + u_{\bar{\rho}}{}^{\bar{\rho}} + 4(n+1)u_{\rho}u^{\rho}\big)\,h_{\gamma\bar{\sigma}}.$$

Finalmente,

$$\begin{aligned}
\widetilde{R} &= \widetilde{R}_{\gamma}{}^{\gamma} = \widetilde{R}_{\gamma\bar{\sigma}}\widetilde{h}^{\gamma\bar{\sigma}} = e^{-2u}\widetilde{R}_{\gamma\bar{\sigma}}h^{\gamma\bar{\sigma}} \\
&= e^{-2u}\left(R_{\gamma\bar{\sigma}} - (n+2)(u_{\gamma\bar{\sigma}} + u_{\bar{\sigma}\gamma}) - (u_{\rho}{}^{\rho} + u_{\bar{\rho}}{}^{\bar{\rho}} + 4(n+1)u_{\rho}u^{\rho})h_{\gamma\bar{\sigma}}\right)h^{\gamma\bar{\sigma}} \\
&= e^{-2u}\left(R - (n+2)(u_{\gamma}{}^{\gamma} + u_{\bar{\gamma}}{}^{\bar{\gamma}}) - n(u_{\rho}{}^{\rho} + u_{\bar{\rho}}{}^{\bar{\rho}} + 4(n+1)u_{\rho}u^{\rho})\right) \\
&= e^{-2u}\left(R - 2(n+1)(u_{\gamma}{}^{\gamma} + u_{\bar{\gamma}}{}^{\bar{\gamma}}) - 4n(n+1)u_{\gamma}u^{\gamma}\right).
\end{aligned}$$

∎

2.4 Hipersuperfícies em $\mathbb{C}^{n+1}$

Iremos calcular a torção e a curvatura de uma hipersuperfície em $\mathbb{C}^{n+1}$ definida como o conjunto de zeros de uma dada função real r. Como caso particulares, estudaremos a esfera CR e o grupo de Heisenberg. Esse último é identificado com a fronteira do Domínio de Siegel em $\mathbb{C}^{n+1}$. Apresentaremos também a transformação de Cayley, que é um biholomorfismo entre o Domínio de Siegel e a bola unitária.

Denote as coordenadas de $\mathbb{C}^{n+1}$ por

$$z = (z_1, ..., z_n)\ ,\ w = z^{n+1}.$$

Seja $r : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{R}$ uma função suave. Considere os conjuntos

$$\Omega = \{(z,w) : r(z,w) < 0\},$$

$$M = \{(z,w) : r(z,w) = 0\},$$

e assuma que $\nabla r \neq 0$ sobre M.
Como vimos anteriormente, M admite uma CR-estrutura induzida da estrutura complexa de $\mathbb{C}^{n+1}$. Tal estrutura é definida por

$$T_{1,0} = \mathbb{C} \otimes T(M) \cap \operatorname{span}_{\mathbb{C}}\left\{\frac{\partial}{\partial z^i} : i = 1, ..., n+1\right\}.$$

Considere a 1-forma real

$$\theta = j^*[i(\overline{\partial} - \partial)r],$$

em que $j : M \to \mathbb{C}^{n+1}$ é a inclusão e $\partial = \frac{\partial}{\partial z^i}dz^i + \frac{\partial}{\partial w}dw$ é o operador de Cauchy-Riemann de $\mathbb{C}^{n+1}$.

Proposição 2.4.1. *A 1-forma real $\theta = j^*[i(\overline{\partial} - \partial)r]$ é uma estrutura pseudohermitiana para $(M, T_{1,0})$ denominada estrutura canônica.*

Demonstração: Seja $X \in H(M)$. Então, $X = Z + \overline{Z}$ para um certo $Z \in T_{1,0}$. Assim,

$$\begin{aligned}
\theta(X) &= \theta(Z + \overline{Z}) \\
&= j^*[i(\overline{\partial} - \partial)r](Z + \overline{Z}) = [i(\overline{\partial} - \partial)r]j_*(Z + \overline{Z}) \\
&= i(\overline{\partial}r(\overline{Z}) - \partial r(Z)) = 2\mathrm{Im}\{\partial r(Z)\}.
\end{aligned}$$

Agora,

$$\partial r(Z) = \frac{\partial r}{\partial z^i} dz^i(Z) + \frac{\partial r}{\partial w} dw(Z) = Zr = 0,$$

pois $Z \in \mathbb{C} \otimes T(M)$. Para $z^j = x^j + iy^j, j = 1, ..., n$ e $w = x^{n+1} + iy^{n+1}$, temos

$$\theta = \sum \left(\frac{\partial r}{\partial y^j} dx^j + \frac{\partial r}{\partial x^j} dy^j \right).$$

Como $\nabla r \neq 0$, segue que $\theta \neq 0$. Portanto, θ é uma estrutura pseudohermitiana. ∎

A partir desse momento, denotaremos θ simplesmente por $\theta = i(\overline{\partial} - \partial)r$.

Para nosso propósito, suponha que as variáveis z e w sejam separáveis em r. Ou seja,

$$r(z, w, \overline{z}, \overline{w}) = p(z, \overline{z}) + q(w, \overline{w})$$

para certas funções reais p e q. Denote

$$\begin{aligned}
p_\alpha = \frac{\partial p}{\partial z^\alpha}, \quad p_{\bar{\alpha}} = \frac{\partial p}{\partial z^{\bar{\alpha}}}, \quad p_{\alpha\bar{\beta}} = \frac{\partial^2 p}{\partial z^\alpha \partial z^{\bar{\beta}}} = p_{\bar{\beta}\alpha}, \\
q_w = \frac{\partial q}{\partial w}, \quad q_{\overline{w}} = \frac{\partial q}{\partial \overline{w}}, \quad q_{w\overline{w}} = \frac{\partial^2 q}{\partial w \partial \overline{w}} = q_{\overline{w}w}.
\end{aligned}$$

Daí,

$$\begin{aligned}
\partial r &= p_\alpha dz^\alpha + q_w dw, \\
\overline{\partial} r &= p_{\bar{\alpha}} dz^{\bar{\alpha}} + q_{\overline{w}} d\overline{w},
\end{aligned}$$

donde

$$\theta = i(\overline{\partial} - \partial)r = i(p_{\bar{\alpha}} dz^{\bar{\alpha}} + q_{\overline{w}} d\overline{w} - p_\alpha dz^\alpha - q_w dw).$$

Para calcular a curvatura e a torção de (M, θ), primeiramente devemos determinar um correferencial admissível $\{\theta^\alpha\}$. Para isso, vamos supor ainda que $q_w \neq 0$ e que θ é não-degenerada.

A seguir, forneceremos um correferencial admissível para (M, θ).

Derivando θ, temos

$$d\theta = 2i(p_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge dz^{\bar{\beta}} + q_{w\overline{w}} dw \wedge d\overline{w}). \tag{2.39}$$

Agora,

$$dw \wedge d\overline{w} = \frac{1}{q_w q_{\overline{w}}} q_w dw \wedge q_{\overline{w}} d\overline{w} = \frac{1}{q_w q_{\overline{w}}} (\partial r - p_\alpha dz^\alpha) \wedge (\overline{\partial} r - p_{\bar{\beta}} dz^{\bar{\beta}}),$$

donde

$$q_{w\overline{w}} dw \wedge d\overline{w} = \frac{q_{w\overline{w}}}{q_w q_{\overline{w}}} \left(\partial r \wedge \overline{\partial} r - \partial r \wedge p_{\bar{\alpha}} dz^{\bar{\alpha}} - p_\alpha dz^\alpha \wedge \overline{\partial} r + p_\alpha p_{\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge dz^{\bar{\beta}} \right).$$

Como $(\partial + \overline{\partial}) r = \nabla r$, dado $X \in T(M)$, temos

$$(\partial r + \overline{\partial} r) X = \nabla r(X) = Xr = 0.$$

Logo, $\partial r = -\overline{\partial} r$ e, assim,

$$\theta = i(\overline{\partial} - \partial) r = 2i\overline{\partial} r = -2i\partial r.$$

Denotando $Q = q_{w\overline{w}} / q_w q_{\overline{w}}$, encontramos

$$\begin{aligned} 2iq_{w\overline{w}} dw \wedge d\overline{w} &= Q \left(-2i\partial r \wedge p_{\bar{\alpha}} dz^{\bar{\alpha}} - p_\alpha dz^\alpha \wedge 2i\overline{\partial} r + 2ip_\alpha p_{\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge dz^{\bar{\beta}} \right) \\ &= Q \left(\theta \wedge p_{\bar{\alpha}} dz^{\bar{\alpha}} + \theta \wedge p_\alpha dz^\alpha r + 2ip_\alpha p_{\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge dz^{\bar{\beta}} \right). \end{aligned}$$

Subtituindo em (2.39), obtemos

$$\begin{aligned} d\theta &= 2ip_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge dz^{\bar{\beta}} + Q \left(\theta \wedge p_{\bar{\alpha}} dz^{\bar{\alpha}} + \theta \wedge p_\alpha dz^\alpha r + 2ip_\alpha p_{\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge dz^{\bar{\beta}} \right) \\ &= 2i(p_{\alpha\bar{\beta}} + Qp_\alpha p_{\bar{\beta}}) dz^\alpha \wedge dz^{\bar{\beta}} + \theta \wedge Qp_\alpha dz^\alpha + \theta \wedge Qp_{\bar{\alpha}} dz^{\bar{\alpha}}. \end{aligned}$$

Defina

$$h_{\alpha\bar{\beta}} = 2(p_{\alpha\bar{\beta}} + Qp_\alpha p_{\bar{\beta}}), \quad \eta_\alpha = -Qp_\alpha, \quad \eta_{\bar{\alpha}} = \overline{\eta_\alpha} = -\overline{Q} p_{\bar{\alpha}} = -Qp_{\bar{\alpha}}.$$

Então,

$$d\theta = ih_{\alpha\bar{\beta}} dz^\alpha \wedge dz^{\bar{\beta}} + \eta_\alpha dz^\alpha \wedge \theta + \eta_{\bar{\alpha}} dz^{\bar{\alpha}} \wedge \theta.$$

Definindo

$$\theta^\alpha = dz^\alpha + i\eta^\alpha \theta,$$

temos

$$d\theta = ih_{\alpha\bar{\beta}} \theta^\alpha \wedge \theta^{\bar{\beta}}.$$

Portanto, $\{\theta^\alpha = dz^\alpha + i\eta^\alpha\theta\}$ é um correferencial admissível para (M, θ). Observe ainda que a forma de Levi associada à θ tem representação matricial

$$h_{\alpha\bar{\beta}} = 2(p_{\alpha\bar{\beta}} + Qp_\alpha p_{\bar{\beta}}).$$

Para obter o referencial dual à $\{\theta^\alpha\}$, observe que ele satisfaz

$$df = T_\alpha f\theta^\alpha + T_{\bar{\alpha}} f\theta^{\bar{\alpha}} + Tf\theta$$

para qualquer função suave f de M. Logo,

$$T_\alpha = \frac{\partial}{\partial z^\alpha} - \frac{p_\alpha}{q_w}\frac{\partial}{\partial w}\ , \quad T = \frac{i}{2}\left(\eta^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha} + \frac{1-p_\gamma\eta^\gamma}{q_w}\frac{\partial}{\partial w} - \eta^{\bar{\alpha}}\frac{\partial}{\partial z^{\bar{\alpha}}} - \frac{1-p_{\bar{\gamma}}\eta^{\bar{\gamma}}}{q_{\overline{w}}}\frac{\partial}{\partial \overline{w}}\right),$$

em que T é a direção característica de $d\theta$.

Agora, podemos calcular as 1-formas de conexão e 1-formas de torção de (M, θ) com relação ao correferencial admissível $\{\theta^\alpha\}$.

Derivando $\theta^\alpha = dz^\alpha + i\eta^\alpha\theta$, temos

$$\begin{aligned} d\theta^\alpha &= id\eta^\alpha \wedge \theta + i\eta^\alpha d\theta \\ &= i(T_\beta\eta^\alpha\theta^\beta \wedge \theta + T_{\bar{\beta}}\eta^\alpha\theta^{\bar{\beta}} \wedge \theta) - \eta^\alpha h_{\beta\bar{\gamma}}\theta^\beta \wedge \theta^{\bar{\gamma}} \\ &= \theta^\beta \wedge (iT_\beta\eta^\alpha\theta - \eta^\alpha h_{\beta\bar{\gamma}}\theta^{\bar{\gamma}}) + \theta \wedge (-iT_{\bar{\gamma}}\eta^\alpha\theta^{\bar{\gamma}}). \end{aligned}$$

Seja

$$\omega_\beta{}^\alpha = iT_\beta\eta^\alpha\theta - \eta^\alpha h_{\beta\bar{\gamma}}\theta^{\bar{\gamma}} + F\theta^\beta,$$

na qual F será escolhida adequadamente de modo que $dh_{\beta\bar{\sigma}} = \omega_{\beta\bar{\sigma}} + \omega_{\bar{\sigma}\beta}$. Temos,

$$\begin{aligned} \omega_{\beta\bar{\sigma}} &= iT_\beta\eta^\alpha h_{\alpha\bar{\sigma}}\theta - \eta_{\bar{\sigma}} h_{\beta\bar{\gamma}}\theta^{\bar{\gamma}} + Fh_{\alpha\bar{\sigma}}\theta^\beta, \\ \omega_{\bar{\sigma}\beta} &= iT_{\bar{\sigma}}\eta^{\bar{\alpha}} h_{\beta\bar{\alpha}}\theta - \eta_\beta h_{\gamma\bar{\sigma}}\theta^\gamma + \overline{F} h_{\beta\bar{\alpha}}\theta^{\bar{\sigma}}, \end{aligned}$$

daí

$$dh_{\beta\bar{\sigma}} = (iT_\beta\eta^\alpha h_{\alpha\bar{\sigma}} + iT_{\bar{\sigma}}\eta^{\bar{\alpha}} h_{\beta\bar{\alpha}})\theta + (-\eta_\beta h_{\gamma\bar{\sigma}} + F\delta_\beta^\gamma h_{\alpha\bar{\sigma}})\theta^\gamma + (-\eta_{\bar{\sigma}} h_{\beta\bar{\gamma}} + \overline{F}\delta_\beta^\gamma h_{\sigma\bar{\alpha}})\theta^{\bar{\gamma}}.$$

Portanto, F necessariamente satisfaz

$$T_\gamma h_{\beta\bar{\sigma}} = -\eta_\beta h_{\gamma\bar{\sigma}} + F\delta_\beta^\gamma h_{\alpha\bar{\sigma}},$$

ou seja,

$$F\delta_\beta^\gamma h_{\alpha\bar{\sigma}} = \eta_\beta h_{\gamma\bar{\sigma}} + T_\gamma h_{\beta\bar{\sigma}}.$$

Assim,

$$\begin{aligned}
\omega_{\beta\bar{\sigma}} &= iT_\beta\eta^\alpha h_{\alpha\bar{\sigma}}\theta - \eta_{\bar{\sigma}}h_{\beta\bar{\gamma}}\theta^{\bar{\gamma}} + Fh_{\alpha\bar{\sigma}}\theta^\beta \\
&= iT_\beta\eta^\alpha h_{\alpha\bar{\sigma}}\theta - \eta_{\bar{\sigma}}h_{\beta\bar{\gamma}}\theta^{\bar{\gamma}} + F\delta_\beta^\gamma h_{\alpha\bar{\sigma}}\theta^\gamma \\
&= (\eta_\beta h_{\gamma\bar{\sigma}} + T_\gamma h_{\beta\bar{\sigma}})\theta^\gamma - \eta_{\bar{\sigma}}h_{\beta\bar{\gamma}}\theta^{\bar{\gamma}} + iT_\beta\eta^\alpha h_{\alpha\bar{\sigma}}\theta.
\end{aligned}$$

Além disso, as 1-formas de torção são dadas por $\tau^\alpha = -iT_{\bar{\gamma}}\eta^\alpha\theta^{\bar{\gamma}}$. Podemos resumir esses resultados na seguinte proposição:

Proposição 2.4.2. *Seja M a hipersuperfície de $\mathbb{C}^{n+1}$ munida da CR-estrutura induzida da estrutura complexa dada por*

$$M = \{(z,w) : r(z,w) = 0\},$$

onde r é uma função suave. Se $\nabla r \neq 0$, então $\theta = i(\overline{\partial} - \partial)r$ é uma estrutura pseudohermitiana para M. Além disso, se $r(z,w,\overline{z},\overline{w}) = p(z,\overline{z}) + q(w,\overline{w})$ com $q_w \neq 0$ e θ é não-degenerada, então

$$\theta^\alpha = dz^\alpha + i\eta^\alpha\theta$$

é um correferencial admissível para (M,θ) com referencial dual

$$T_\alpha = \frac{\partial}{\partial z^\alpha} - \frac{p_\alpha}{q_w}\frac{\partial}{\partial w}$$

e direção característica

$$T = \frac{i}{2}\left(\eta^\alpha\frac{\partial}{\partial z^\alpha} + \frac{1-p_\gamma\eta^\gamma}{q_w}\frac{\partial}{\partial w} - \eta^{\bar{\alpha}}\frac{\partial}{\partial z^{\bar{\alpha}}} - \frac{1-p_{\bar{\gamma}}\eta^{\bar{\gamma}}}{q_{\overline{w}}}\frac{\partial}{\partial\overline{w}}\right)$$

em que $\eta_\alpha = -Qp_\alpha$, $Q = q_{w\overline{w}}/q_w q_{\overline{w}}$.
Com relação à esse correferencial a forma de Levi é dada por

$$h_{\alpha\bar{\beta}} = 2(p_{\alpha\bar{\beta}} + Qp_\alpha p_{\bar{\beta}})$$

e as 1-formas de conexão e as 1-formas de torção são dadas, respectivamente, por

$$\begin{aligned}
{\omega_\beta}^\alpha &= (\eta_\beta\delta_\gamma^\alpha + T_\gamma h_{\beta\bar{\sigma}}h^{\alpha\bar{\sigma}})\theta^\gamma - \eta^\alpha h_{\beta\bar{\gamma}}\theta^{\bar{\gamma}} + iT_\beta\eta^\alpha\theta, \\
\tau^\alpha &= -iT_{\bar{\gamma}}\eta^\alpha\theta^{\bar{\gamma}}.
\end{aligned}$$

Esses resultados possibilitam obter a curvatura de Webster $R_{\beta\bar{\alpha}\rho\bar{\sigma}}$ de (M,θ). Como vimos anteriormente, as 1-formas de conexão e 1-formas de torção satisfazem

$$d\omega_{\beta\bar{\sigma}} - {\omega_\beta}^\gamma \wedge {\omega_\gamma}^\alpha = {R_\beta}^\alpha{}_{\rho\bar{\sigma}}\theta^\rho \wedge \theta^{\bar{\sigma}} + i\theta_\beta \wedge \tau^\alpha - \tau_\beta \wedge \theta^\alpha \mod \theta.$$

Após uma longa conta, comparamos os coeficientes de $\theta^\rho \wedge \theta^{\bar\sigma}$ e obtemos

$$\begin{aligned} R_{\beta\bar\alpha\rho\bar\sigma} &= -T_{\bar\sigma}T_\rho h_{\beta\bar\gamma} + h^{\gamma\bar\mu}T_\rho h_{\beta\bar\mu}T_{\bar\sigma}h_{\bar\alpha\gamma} + h_{\rho\bar\sigma}\eta^\gamma T_\beta h_{\bar\alpha\gamma} - h_{\rho\bar\sigma}\eta^\gamma T_\gamma h_{\beta\bar\alpha} - h_{\bar\alpha\rho}T_{\bar\sigma}\eta_\beta \\ &\quad -h_{\beta\bar\rho}T_\rho\eta_{\bar\alpha} - h_{\rho\bar\sigma}T_\beta\eta_{\bar\alpha} - \eta_\beta\eta_{\bar\alpha}h_{\rho\bar\sigma} - \eta_\gamma\eta^\gamma h_{\beta\bar\sigma}h_{\rho\bar\alpha}. \end{aligned}$$

2.4.1 A esfera CR

A esfera $\mathbb{S}^{2n+1}$ pode ser vista como o conjunto de zeros da função

$$r : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{R}\,,$$
$$r(z, \overline{z}, w, \overline{w}) = z^\alpha z^{\bar\alpha} + w\overline{w} - 1.$$

Como $\nabla r \neq 0$, a 1-forma real

$$\hat\theta = i(\overline{\partial} - \partial)r = i(z^\gamma dz^{\bar\gamma} - z^{\bar\gamma}dz^\gamma + wd\overline{w} - \overline{w}dw)$$

é uma estrutura pseudohermitiana (canônica) para $\mathbb{S}^{2n+1}$. Além disso, observe que podemos definir

$$p(z, \overline{z}) = z^\alpha z^{\bar\alpha} \quad , \quad q(w, \overline{w}) = w\overline{w} - 1,$$

donde

$$p_\alpha = z^{\bar\alpha}, \quad p_{\bar\alpha} = z^\alpha, \quad p_{\alpha\bar\beta} = \delta_{\alpha\bar\beta}$$
$$q_w = \overline{w}, \quad q_{\overline{w}} = w, \quad q_{w\overline{w}} = 1.$$

Considerando a vizinhança da esfera onde $w \neq 0$, teremos

$$Q = \frac{1}{|w|^2}\,, \quad \eta_\alpha = -\frac{z^{\bar\alpha}}{|w|^2}.$$

A forma de Levi é dada por

$$h_{\alpha\bar\beta} = 2\delta_{\alpha\bar\beta} + 2\frac{z^{\bar\alpha}z^\beta}{|w|^2},$$

que é uma forma não-degenerada. Portanto, o correferencial admissível para $(\mathbb{S}^{2n+1}, \hat\theta)$ definido em $w \neq 0$ é

$$\theta^\alpha = dz^\alpha - i\frac{z^\sigma}{|w|^2}h^{\alpha\bar\sigma}\theta$$

com referencial dual

$$T_\alpha = \frac{\partial}{\partial z^\alpha} - \frac{z^{\bar\alpha}}{\overline{w}}\frac{\partial}{\partial w}$$

e direção característica

$$T = \frac{i}{2}(z^\gamma \frac{\partial}{\partial z^\gamma} + w\frac{\partial}{\partial w} - z^{\bar\gamma}\frac{\partial}{\partial z^{\bar\gamma}} - \overline{w}\frac{\partial}{\partial \overline{w}}).$$

Em $z = 0$, temos

$$h_{\alpha\bar\beta} = 2\delta_{\alpha\bar\beta}\ ,\ \ T_\gamma h_{\alpha\bar\beta} = T_{\bar\gamma} h_{\alpha\bar\beta} = 0.$$

Além disso,

$$T_\gamma \eta^\alpha = T_\gamma \eta_{\bar\sigma} h^{\alpha\bar\sigma}\ ,\quad T_\gamma \eta^{\bar\sigma} = T_\gamma \eta_\alpha h^{\alpha\bar\sigma}.$$

Como

$$T_\gamma \eta_{\bar\sigma} = T_\gamma\left(-\frac{z^\sigma}{|w|^2}\right) = \frac{-|w|^2 T_\gamma z^\sigma + z^\sigma T_\gamma |w|^2}{|w|^4} = \frac{-|w|^2\delta_{\gamma\sigma} - z^\sigma z^{\bar\gamma}}{|w|^4} = -\frac{\delta_{\gamma\sigma}}{|w|^2},$$

$$T_\gamma \eta_\alpha = T_\gamma\left(-\frac{z^{\bar\alpha}}{|w|^2}\right) = \frac{-|w|^2 T_\gamma z^{\bar\alpha} + z^{\bar\alpha} T_\gamma |w|^2}{|w|^4} = \frac{-z^{\bar\alpha} z^{\bar\gamma}}{|w|^2} = 0,$$

em $z = 0$, encontramos

$$\tau^\alpha = -iT_{\bar\gamma}\eta^\alpha \theta^{\bar\gamma} = 0,$$

$$R_{\beta\bar\alpha\rho\bar\sigma} = h_{\beta\bar\alpha}h_{\rho\bar\sigma} + h_{\rho\bar\alpha}h_{\beta\bar\sigma}.$$

Conseqüentemente,

$$R_{\rho\bar\sigma} = h_{\rho\bar\sigma} + \delta_\rho^\beta h_{\beta\bar\sigma} = (n+1)h_{\rho\bar\sigma},$$

$$R = R_\rho{}^\rho = n(n+1).$$

Para ver que $\tau^\alpha = 0$ e que $R_{\rho\bar\sigma} = (n+1)h_{\rho\bar\sigma}$ em toda esfera, observe que o grupo unitário $U(n+1)$ age transitivamente sobre $\mathbb{S}^{2n+1}$ e preserva a estrutura pseudohermitiana $\hat\theta$. Além disso, o grupo de isotropia em $(0,1)$ é $U(n) \times U(1) \subset U(n+1)$. Portanto, $\mathbb{S}^{2n+1}$ pode ser vista como a variedade homogênea

$$\mathbb{S}^{2n+1} \approx U(n+1)/U(n) \times U(1)$$

e, conseqüentemente, como $\tau^\alpha = 0$ e $R_{\rho\bar\sigma} = (n+1)h_{\rho\bar\sigma}$ em $(0,1)$, segue que $\tau^\alpha = 0$ e $R_{\rho\bar\sigma} = (n+1)h_{\rho\bar\sigma}$ em toda esfera.

Definição 2.4.1. *Uma estrutura pseudohermitiana θ é dita **pseudo-Einstein** , se*

$$R_{\alpha\bar\beta} = \frac{R}{n}h_{\alpha\bar\beta}.$$

Em resumo, temos:

Proposição 2.4.3. *A esfera CR $(\mathbb{S}^{2n+1}, \hat\theta)$ é uma variedade pseudohermitiana estritamente pseudoconvexa com torção pseudohermitiana identicamente nula e com curvatura* *escalar constante $R = n(n+1)$. Além disso, a estrutura pseudohermitiana canônica $\hat{\theta}$ é pseudo-Einstein.*

2.4.2 O grupo de Heisenberg

O **domínio de Siegel** é o domínio

$$\Omega = \{(z,w) \in \mathbb{C}^{n+1} : z^{\alpha} z^{\bar{\alpha}} + \tfrac{i}{2}(w - \overline{w}) < 0\}.$$

Sua fronteira $\partial\Omega$ é a variedade

$$M = \{(z,w) : r(z, \overline{z}, w, \overline{w}) = 0\},$$

em que $r(z, \overline{z}, w, \overline{w}) = z^{\alpha} z^{\bar{\alpha}} + \frac{i}{2}(w - \overline{w})$. Temos

$$\nabla r = z^{\alpha} \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} + z^{\bar{\alpha}} \frac{\partial}{\partial z^{\bar{\alpha}}} + \frac{i}{2}(\frac{\partial}{\partial w} - \frac{\partial}{\partial \overline{w}}) \neq 0 \text{ em } M.$$

Portanto,

$$\theta = i(\overline{\partial} - \partial) r = i(z^{\gamma} dz^{\bar{\gamma}} - z^{\bar{\gamma}} dz^{\gamma} - \frac{i}{2}(dw - d\overline{w})) = i(z^{\gamma} dz^{\bar{\gamma}} - z^{\bar{\gamma}} dz^{\gamma}) + \frac{dw - d\overline{w}}{2}$$

é uma estrutura pseudohermitiana (canônica) para M. Além disso, observe que podemos definir

$$p(z, \overline{z}) = z^{\alpha} z^{\bar{\alpha}} \ , \quad q(w, \overline{w}) = \tfrac{i}{2}(w - \overline{w}),$$

donde

$$\begin{aligned} p_{\alpha} &= z^{\bar{\alpha}}, \quad p_{\bar{\alpha}} = z^{\alpha} \quad , p_{\alpha\bar{\beta}} = \delta_{\alpha\bar{\beta}} \\ q_w &= i/2, \quad q_{\overline{w}} = -i/2 \quad , q_{w\overline{w}} = 0. \end{aligned}$$

Também temos

$$Q = 0 \ , \quad \eta_{\alpha} = 0.$$

A forma de Levi é dada por

$$h_{\alpha\bar{\beta}} = 2\delta_{\alpha\bar{\beta}},$$

que é uma forma não-degenerada. Portanto, o correferencial admissível para (M, θ) definido em todo M é

$$\theta^{\alpha} = dz^{\alpha},$$

com referencial dual

$$T_{\alpha} = \frac{\partial}{\partial z^{\alpha}} + 2i z^{\bar{\alpha}} \frac{\partial}{\partial w}$$

e direção característica
$$T = \frac{\partial}{\partial w} + \frac{\partial}{\partial \overline{w}}.$$
As 1-formas de conexão e 1-formas de torção são identicamente nulas. Portanto, a curvatura de Webster $R_{\beta\bar{\alpha}\rho\bar{\sigma}}$ também é identicamente nula.

A fronteira do domínio de Siegel é o modelo plano da geometria pseudohermitiana. Identificaremos esse modelo com o grupo de Heisenberg $\mathbb{H}^n$.

Definição 2.4.2. *O **grupo de Heisenberg** $\mathbb{H}^n$ é a variedade $\mathbb{C}^n \times \mathbb{R}$ munida do produto*

$$(z,t).(z',t') = (z+z', t+t' + Im\{\, z.\overline{z'}\})$$

em que $z, z' \in \mathbb{C}^n$ e $t, t' \in \mathbb{R}$.

Se $(z,w) \in M$, então $z^\alpha z^{\bar{\alpha}} = \mathrm{Im}\{w\}$. Assim, $w = \mathrm{Re}\{w\} + iz^\alpha z^{\bar{\alpha}}$ e, portanto, M é parametrizado por $C^n \times \mathbb{R}$ via a parametrização

$$\begin{aligned} f : C^n \times \mathbb{R} &\rightarrow M \\ (z,t) &\mapsto (z, t + iz^\alpha z^{\bar{\alpha}}), \end{aligned}$$

cuja inversa é

$$\begin{aligned} f^{-1} : M &\rightarrow C^n \times \mathbb{R} \\ (z,w) &\mapsto (z, \frac{w+\overline{w}}{2}). \end{aligned}$$

A parametrização f é um difeomorfismo suave que permite transportar a estrutura pseudohermitiana de M e sua geometria para $\mathbb{H}^n$, tornando-o o modelo plano padrão da geometria pseudohermitiana. Temos

$$\begin{aligned} f^* dz^\alpha = dz^\alpha,\ \alpha = 1, ..., n, \\ f^*\left(\frac{dw + d\overline{w}}{2}\right) = dt. \end{aligned}$$

Portanto,
$$\Theta := f^*\theta = i(z^\alpha dz^{\bar{\alpha}} - z^{\bar{\alpha}} dz^\alpha) + dt$$

é a estrutura pseudohermitiana canôninca de $\mathbb{H}^n$. O correferencial admissível canônico para $(\mathbb{H}^n, \Theta)$ é $\{\theta^\alpha = dz^\alpha\}$ com referencial dual $\{Z_\alpha\}$ caracterizado por

$$df = Z_\gamma \theta^\gamma + Z_{\bar{\gamma}} \theta^{\bar{\gamma}} + Zf\theta$$

para toda função suave $f : \mathbb{H}^n \to \mathbb{R}$. Logo,

$$Z_\alpha = \frac{\partial}{\partial z^\alpha} + i z^{\bar{\alpha}} \frac{\partial}{\partial t}\ , \quad Z = \frac{\partial}{\partial t}.$$

2.4.3 A transformação de Cayley

A **tranformação de Cayley** $C : \mathbb{C}^{n+1} \to \mathbb{C}^{n+1}$ é definida por

$$C(z,w) = \left(\frac{z}{1+w}, i\frac{1-w}{1+w} \right).$$

Temos,

$$\frac{z.\overline{z}}{|1+w|^2} + \frac{i}{2}\left(\left(i\frac{1-w}{1+w} \right) - \left(-i\frac{1-\overline{w}}{1+\overline{w}} \right) \right) = \frac{z.\overline{z} + w\overline{w} - 1}{|1+w|^2}.$$

Em particular, C leva a bola unitária $B^{n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ biholomorficamente sobre o domínio de Siegel Ω. Com CR-estruturas induzidas da estrutura complexa de $\mathbb{C}^{n+1}$, C fornece um CR-isomorfismo de $\mathbb{S}^{2n+1}_* := \mathbb{S}^{2n+1} - \{(0,-1)\}$ sobre a fronteira do domínio de Siegel $M := \partial\Omega$. Usando a parametrização $f : \mathbb{H}^n \to M$, obtemos um CR-isomorfismo

$$F : \mathbb{S}^{2n+1}_* \to \mathbb{H}^n$$

definido como a composta $F = f^{-1} \circ C$. Denominaremos tal CR-isomorfismo também como transformação de Cayley. Nas coordenadas (z,w), a expressão de F é dada por

$$F(z,w) = \left(\frac{z}{1+w}, -i\frac{w-\overline{w}}{|1+w|^2} \right). \tag{2.40}$$

Como F é um CR-isomorfismo, existe uma função $\eta \neq 0$ sobre $\mathbb{S}^{2n+1}_*$ tal que

$$F^*\Theta = \eta\hat{\theta}.$$

Seja T a direção característica de $d\hat{\theta}$. Então,

$$\eta = \eta\hat{\theta}(T) = F^*\Theta(T) = \Theta F_*(T).$$

Para determinar F_*T, observe que

$$C_*\frac{\partial}{\partial z^\alpha} = \frac{1}{1+w}\frac{\partial}{\partial z^\alpha}\ , \qquad C_*\frac{\partial}{\partial w} = -\frac{1}{(1+w)^2}\left(z^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha} + 2i\frac{\partial}{\partial w} \right),$$
$$f_*^{-1}\frac{\partial}{\partial z^\alpha} = \frac{\partial}{\partial z^\alpha}\ , \qquad f_*^{-1}\frac{\partial}{\partial w} = \frac{1}{2}\frac{\partial}{\partial t}.$$

Como
$$T = \frac{i}{2}(z^\gamma \frac{\partial}{\partial z^\gamma} + w\frac{\partial}{\partial w} - z^{\bar\gamma}\frac{\partial}{\partial z^{\bar\gamma}} - \overline{w}\frac{\partial}{\partial \overline{w}}),$$
encontramos
$$C_*T = \frac{i}{2}\left(\frac{z^\gamma}{(1+w)^2}\frac{\partial}{\partial z^\gamma} - \frac{z^{\bar\gamma}}{(1+\overline{w})^2}\frac{\partial}{\partial z^{\bar\gamma}}\right) + \frac{w}{(1+w)^2}\frac{\partial}{\partial w} + \frac{\overline{w}}{(1+\overline{w})^2}\frac{\partial}{\partial \overline{w}},$$
donde
$$F_*(T) = f_*^{-1}C_*(T) = \frac{iz^\gamma}{2(1+w)^2}Z_\gamma - \frac{iz^{\bar\gamma}}{2(1+\overline{w})^2}Z_{\bar\gamma} + \frac{1}{|1+w|^2}Z.$$
Portanto,
$$\eta = \Theta F_*(T) = \frac{1}{|1+w|^2}.$$
Denotaremos os elementos de volumes naturais associados as estruturas pseudohermitianas canônicas Θ e $\hat\theta$, respectivamente, por

$$dV_\Theta = \Theta \wedge d\Theta^n \quad \text{e} \quad dV_{\hat\theta} = \hat\theta \wedge d\hat\theta^n.$$

Temos,

$$\begin{aligned} F^*dV_\Theta &= F^*\Theta \wedge d\Theta^n \\ &= F^*\Theta \wedge (F^*d\Theta)^n \\ &= F^*\Theta \wedge (dF^*\Theta)^n \\ &= \eta^{n+1}\hat\theta \wedge d\hat\theta^n \\ &= |1+w|^{-2(n+1)}dV_{\hat\theta}. \end{aligned}$$

Assim, derivamos

$$F^*\Theta = |1+w|^{-2}\hat\theta, \tag{2.41}$$
$$F^*dV_\Theta = |1+w|^{-2(n+1)}dV_{\hat\theta}. \tag{2.42}$$

Observe, pela identidade (2.41), que a transformação de Cayley não é pseudohermitiana.

Capítulo

3

Análise em variedades CR

3.1 Coordenadas normais pseudohermitianas

Consideramos $\mathbb{H}^n$ com o fibrado $\mathcal{H}^n$ gerado pelos campos de vetores

$$Z_\alpha = \frac{\partial}{\partial z^\alpha} + i\overline{z}_\alpha \frac{\partial}{\partial t}, \ e \ \alpha = 1, \ldots, n,$$

e a forma pseudohermitiana

$$\Theta = dt + iz^\alpha d\overline{z}^\alpha - i\overline{z}^\alpha dz^\alpha.$$

Definimos agora a aplicação

Definição 3.1.1. *A aplicação $\delta_s : \mathbb{H}^n \to \mathbb{H}^n$ dado por $\delta_s = (sz, s^2 t)$, para toda $(z,t) \in \mathbb{H}^n$, é chamada dilatação pelo fator s.*

Considere o campo de vetores em $\mathbb{H}^n$

$$P_{(z,t)} = z^\alpha \frac{\partial}{\partial z^\alpha} + \overline{z}_\alpha \frac{\partial}{\partial \overline{z}^\alpha} + 2t \frac{\partial}{\partial t} = z^\alpha Z_\alpha + \overline{z}^\alpha Z_{\overline{\alpha}} + 2tT.$$

Como é fácil observar, a norma euclidiana $\|z\|$ em $\mathbb{H}^n$ não é homogênea com relação a dilatação δ_s. Então para adquirir uma norma com essa propriedade temos a seguinte definição.

Definição 3.1.2. *A norma de Heisemberg é*

$$\rho(z,t) = (\|z\|^4 + t^2)^{\frac{1}{4}}.$$

A norma de Heisenberg é homogênea com relação a dilatação, isto é

$$\rho(\delta_s(z,t)) = s\rho(z,t).$$

As órbitas das dilatações (exceto as orbitas degeneradas onde $z = 0$ ou $t = 0$) repousam em parábolas que passam pela origem. Fixe $(W, c) \in \mathbb{H}^n$, considere a curva $\gamma : \mathbb{R} \to \mathbb{H}^n$ dada por $\gamma(s) = (sW, s^2c)$. Cujo é a parábola contendo as órbitas de (W, c) e $(-W, c)$. O vetor tangente em 0 é $(W, 0)$, e para $s \neq 0$,

$$\dot{\gamma} = s^{-1} P_{\gamma(s)}.$$

Usando o fato que a conexão pseudohermitiana em $\mathbb{H}^n$ satisfaz $\nabla Z_\alpha = \nabla T = 0$, então γ satisfaz a equação diferencial ordinária

$$\nabla_{\dot{\gamma}} \dot{\gamma} = 2cT. \tag{3.1}$$

Uma variedade M, como já vimos, uma estrutura pseduhermitiana gera uma decomposição natural $TM = H \bigoplus \mathbb{R}T$. Esta decomposição, por sua vez, determina uma família natural de dilatações parabólicas em todo espaço tangente T_qM análogo a aqueles do grupo de Heisemberg, tomando $\delta_s = sW + s^2T$ para $W \in H$, $c \in \mathbb{R}$. As curvas em T_qM dadas por $\sigma_{W,c}(s) = sW + s^2cT$ são parábolas analogas à curvas γ descritas acima. A chave para a construção de nossa aplicação exponencial parabólica é usar a equação (3.1), qual faz sentido em toda pseudohermitana variedade, levar estas parábolas em M, do mesmo modo que que a aplicação exponencial clássica leva linhas radiais em geodesicas. Isto é realizado pelo seguinte teorema de David Jerison and Jhon M. Lee em [29].

Teorema 3.1.1. *Seja M uma nondegenerada pseudohermitiana variedade e $q \in M$. Para todo $W \in H_q(M)$ e $c \in \mathbb{R}$, seja $\gamma = \gamma_{W,c}$ denote a solução para a equação diferencial em (3.1) em M com as condições iniciais $\gamma(0) = q$ e $\dot{\gamma}(0) = W$. Nós chamamos a geodesica parabólica determinada por W e c. Defina a aplicação exponential parabólica $\Psi : T_q(M) \to M$ por*

$$\Psi(W + cT) = \gamma_{W,c}(1), \tag{3.2}$$

onde está definida. Então Ψ leva uma vizinhança da origem de 0 em $T_q(M)$ difeomorficamente em uma vizinhança de q em M, e leva $\sigma_{W,c}$ em $\gamma_{W,c}$.

Para proposta de cálculo, será conveniente termos referenciais holomorfos em uma vizinhança de q no qual é paralelo ao longo de cada curva $\gamma_{W,c}$. Para isso, temos o seguinte lema, cuja prova é bem semelhante ao que é feito em vizinhanças geodésicas clássicas, e tal prova pode ser encontrada também em [29].

Lema 3.1.1. *Suponha que X é um campo de vetores definidos em uma vizinhança de q em M qual é paralelo a cada curva $\gamma_{W,c}$. Então X é suave em uma vizinhança de q.*

Desde que a conexão pseudehermitiana é compatível com a estrutura complexa, se $W_\alpha|_q \in \mathcal{H}$, então a extenção paralela W_α é uma secção de $\mathcal{H}$. Seja θ^α correferenciais admissíveis

para $\{W_\alpha\}$. Sendo $\nabla T = 0$, daí segue que θ^α é paralelo ao longo de cada curva $\gamma_{W,c}$. Nós podemos escrever $d\theta = ih_{\alpha\overline{\beta}}\theta^\alpha \bigwedge \theta^{\overline{\beta}}$ para alguma matriz de funções $h_{\alpha\overline{\beta}}$. Por causa que $\nabla(\theta) = 0$, $h_{\alpha\overline{\beta}}$ é uma matriz constante destes correferenciais.
Suponha que M é estritamente pseudoconvexo. Nós definimos *referenciais especiais* para ser um referencial holomorfo $\{W_\alpha\}$ que é paralelo ao longo de cada curva $\gamma_{W,c}$, e para qual $h_{\alpha\overline{\beta}} = 2\delta_{\alpha\overline{\beta}}$ (como no grupo de Heisenberg); nós chamamos o dual admissível correferencial como *correferencial especial*. Nos temos o seguinte resultado

Proposição 3.1.1. *Todo referencial holomorfo em $q \in M$ para qual $h_{\alpha\overline{\beta}} = 2\delta_{\alpha\overline{\beta}}$ podemos estender suavemente para um referencial especial W_α em uma vizinhança de q. O correferencial especial dual $\{\theta_\alpha\}$ é paralelo ao longo da curva $\gamma_{W,c}$, e satisfaz $d\theta = 2i\theta^\alpha \bigwedge \theta_{\overline{\alpha}}$. Para qualquer duas estensões que tem o mesmo domínio em comum.*

Agora escolha um referencial especial $\{W_\alpha\}$ próxima de q, seja $\{\theta_\alpha\}$ seu correferencial especial dual. O correferencial determina um isomorfismo $\lambda : T_q(M) \to \mathbb{H}^n$ por $(z^\alpha, t) = \lambda(V) = (\theta^\alpha(V), \theta(V))$. Por sua vez, determina uma carta coordenada $\Upsilon := \lambda o \Psi^{-1}$ em uma vizinhança de q. Chamamos essa carta de *coordenada normal pseudohermitiana* determinada por $\{W_\alpha\}$.

3.2 O sub-Laplaciano

Dada uma variedade pseudohermitiana estritamente pseudoconvexa (M, θ), o elemento de volume $dV_\theta = \theta \wedge d\theta^n$ induz um produto interno L^2 sobre funções definido por:

$$\langle u, v\rangle_\theta = \int_M uv\, dV_\theta.$$

A forma L^*_θ também induz um produto interno L^2 sobre seções de $H^*(M)$ definido por:

$$\langle \omega, \eta\rangle_\theta = \int_M L^*_\theta(\omega, \eta)\, dV_\theta.$$

Se $r : T^*(M) \to H^*(M)$ denota a restrição e $u \in C^\infty(M)$, podemos definir uma seção $d_b u$ de $H^*(M)$ por

$$d_b u := r \circ du.$$

Definição 3.2.1. *O operador real Δ_b, definido sobre funções $u \in C^\infty_0(M)$ por*

$$\langle \Delta_b u, v\rangle_\theta = \langle d_b u, d_b v\rangle_\theta \,, \forall \;\; v \in C^\infty_0(M),$$

*é denominado **operador sublaplaciano** . Ou seja,*

$$\int_M \Delta_b uv\, dV_\theta = \int_M L_\theta^*(du, dv)\, dV_\theta, \forall\ v \in C_0^\infty(M),$$

pois $\theta \rfloor L_\theta^*$.

Em relação à um correferencial admissível $\{\theta^\alpha\}$, o sublaplaciano possui uma expressão particularmente simples em termos das derivadas covariantes [30]:

$$\Delta_b u = -(u_\gamma{}^\gamma + u_{\bar\gamma}{}^{\bar\gamma}). \tag{3.3}$$

3.3 O espaço de Folland-Stein

Seja U uma subconjunto aberto relativamente compacto subconjunto de uma vizinha coordenada normal pseudohermitiana $\Omega \subset M$. Com a notação, se $X_j = \mathrm{Re}(W_j), X_{j+n} = \mathrm{Im}(W_j)$, nos tomamos

$$X^\alpha = X_{\alpha_1} \dots X_{\alpha_k}, \quad \alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_k), \quad 1 \leq \alpha_j \leq 2n.$$

Se $\alpha = (\alpha_1, \dots, \alpha_l)$ tome $l(\alpha) = l$. Considere as normas

$$\|f\|_{S_k^p(U)} = \sum_{l(\alpha)\leq k} \|X^\alpha f\|_{L^p(U)}, \tag{3.4}$$

onde

$$\|g\|_{L^p(U)} = \left(\int_U |g|^p dV_\theta\right)^{\frac{1}{p}}.$$

Definição 3.3.1. *O espaço de Folland-Stein* $S_k^p(U)$ *é o completamento de* $C_0^\infty(U)$ *sobre a norma (3.4).*

Definição 3.3.2. *Seja* M *uma variedade CR compacta estritamente pseudoconvexa e seja* $\{U_j : 1 \leq j \leq s\}$ *uma finita cobertura de abertos sobre* M*. Seja* $\{\varphi_j\}$ *partição da unidade subordinada a* $\{U_j\}$*. Nós definimos*

$$S_k^p(M) = \{f \in L^1(M) : \varphi_j f \in S_k^p(U), \quad 1 \leq j \leq s\}.$$

Temos então o primeiro resultado de mergulho, análago ao clássico mergulho de Sobolev para variedade CR, que foi provado por G.B. Folland e E.M. Stein em [16].

Teorema 3.3.1. $S_k^r(M) \subset L^s(M)$*, onde* $\frac{1}{s} = \frac{1}{r} - \frac{k}{2n+2}$ *e* $1 < r < s < \infty$*.*

Temos também o análogo do teorema de Rellich - Kondrachov para variedade CR. Onde a prova poder ser encontrada em [29].

Teorema 3.3.2. *Se* $1 < r < s < \infty$ *e* $\frac{1}{s} > \frac{1}{r} - \frac{k}{2n+2}$ *então a bola unitária em* $S_1^r(M)$ *é compacta em* $L^s(M)$.

3.4 Princípio min-max para operador de Yamabe

Como pode ser visto em [27], uma mudança de estrutura pseudohermitiana $\widetilde{\theta} = e^{2u}\theta$ fornece a seguinte transformação na curvatura escalar

$$\widetilde{R} = e^{-2u}(R - 2(n+1)(u_{\gamma}{}^{\gamma} + u_{\bar{\gamma}}{}^{\bar{\gamma}}) - 4n(n+1)u_{\gamma}u^{\gamma}),$$

que pode ser reescrita como

$$e^{2u}\widetilde{R} = R + 2(n+1)\Delta_b u - 2n(n+1)\|du\|_{\theta}^2. \tag{3.5}$$

Fazendo a mudança de variável $e^{2u} = v^{2c}$, em que c é uma constante e v é uma função positiva, obtemos $u = c\ln v$. Como pode-se verificar, temos

$$\Delta_b(\ln v) = \frac{1}{v}\,\Delta_b v \quad \text{e} \quad \|du\|_{\theta}^2 = \frac{c^2}{v^2}\,\|dv\|_{\theta}^2.$$

Daí,

$$\begin{aligned} v^{2c}\widetilde{R} &= R + 2c(n+1)\frac{\Delta_b v}{v} + 2c(n+1)\frac{\|dv\|_{\theta}^2}{v^2} - 2n(n+1)c^2\frac{\|dv\|_{\theta}^2}{v^2} \\ &= R + 2c(n+1)\frac{\Delta_b v}{v} + 2c(n+1)\frac{\|dv\|_{\theta}^2}{v^2}(1 - nc). \end{aligned}$$

Tomando $c = 1/n$, obtemos

$$v^{\frac{2}{n}}\widetilde{R} = R + (2 + \frac{2}{n})\frac{\Delta_b v}{v}.$$

Denotando $p = 2 + \dfrac{2}{n}$, temos

$$\widetilde{R} = v^{1-p}(p\,\Delta_b + R)v.$$

Dessa maneira, se θ é uma estrutura pseudohermitiana fixada e v é uma função suave e positiva de M, então uma condição necessária e suficiente para que a estrutura pseudohermitiana $\widetilde{\theta} = v^{p-2}\theta$ tenha curvatura escalar constante $\widetilde{R} \equiv \lambda$ é que v satisfaça

$$p\,\Delta_b v + Rv = \lambda v^{p-1}. \tag{3.6}$$

Essa equação é denominada **equação de Yamabe CR** e o operador

$$\mathfrak{L}_\theta[v] := (p\,\Delta_b + R)v \tag{3.7}$$

é denominado **operador de Yamabe CR** . Considere agora a seguinte equação

$$p\,\Delta_b v + Rv = \lambda v^{q-1}, \quad 2 \leq q < p. \tag{3.8}$$

Considereamos o seguinte problema variacional. Então, como provado em [27],

$$\lambda_q(M) = \inf\{A_\theta(v) : B_{\theta,q}(v) = 1\},$$

em que

$$A_\theta(v) := \int_M vL[v]\,dV_\theta = \int_M (p\,\|dv\|_\theta^2 + Rv^2)\,dV_\theta$$

e

$$B_{\theta,q}(v) := \int_M dV_{\widetilde{\theta}} = \int_M |v|^q dV_\theta.$$

Tal fato acima vem do seguinte teorema, cuja a prova se encontra em [27].

Teorema 3.4.1. *Se $2 \leq q < p$ então existe uma solução C^∞ $u_q > 0$ para a equação (3.8) satisfazendo $A_\theta(u_q) = \lambda q$ e $B_{\theta,q}(u_q) = 1$.*

Aplicando o teorema 3.4.1 no caso de $q = 2$, temos a existência do primeiro autovalor $\lambda_1(\theta)$ do operador de Yamabe (3.7) cujo autovetor é $v > 0 \in C^\infty(M)$. Repetindo o mesmos argumentos da demonstração do teorema 3.4.1 no caso $q = 2$, concluímos que existe uma sequência de autovalores $\lambda_1 \leq \lambda_2 \leq \cdots \leq \lambda_k, \ldots$ com os respectivos autovetores $v_1, v_2, \ldots, v_k, \ldots$ onde $\int_M v_i v_j dV_\theta = 0$ e $B_{\theta,q}(v_i) = 1$ se $i, j = 1, 2 \ldots$. Cuja caracterizaçao de λ_k variacional é dada por

$$\lambda_k(\theta) = \inf_{v \in B_k} \frac{\int_M L_\theta[v] v dV_\theta}{\int_M v^2 dV_\theta}, \tag{3.9}$$

onde $B_k = \{v \in S_1^2 / \int_M v v_i dV_\theta = 0 \; se \; i = 1, \ldots, k-1\}$. Temos também que $\lim_{k\to+\infty} \lambda_k = +\infty$ e para todo $w \in S_1^2(M)$ $w = \sum_{i=1}^{+\infty} \alpha_i v_i$. De uma forma mais conveniente temos uma outra caracterização variacional de λ_k.

Lema 3.4.1.

$$\lambda_k(\theta) = \inf_{V \subset S_1^2(M), \dim V = k} \; \sup_{v \in V/\{0\}} \frac{\int_M L_\theta[v] v dV_\theta}{\int_M v^2 dV_\theta}. \tag{3.10}$$

Demonstração: Sejam $U \subset S_1^2(M)$ um espaço vetorial tal que $\dim U = k$ e o S' fecho do espaço $S_k =< v_k, v_{k+1}, \cdots >$. Consequentemente, existe $w \neq 0$ tal que $w \in S' \cap U$.

Então
$$\sup_{v \in U/\{0\}} \frac{\int_M L_\theta[v] v dV_\theta}{\int_M v^2 dV_\theta} \geq \lambda_k.$$
Concluímos que
$$\inf_{U \subset S_1^2(M), \dim U = k} \sup_{v \in U/\{0\}} \frac{\int_M L_\theta[v] v dV_\theta}{\int_M v^2 dV_\theta} \geq \lambda_k.$$
Mas como propriedade de aplicações lineares auto-adjuntas em espaços de dimensão finita, temos que
$$\lambda_k = \sup_{v \in < v_1, v_2, \ldots, v_k >} \frac{\int_M L_\theta[v] v dV_\theta}{\int_M v^2 dV_\theta}.$$
Consequentemente,

$$\lambda_k(\theta) = \inf_{V \subset S_1^2(M), \dim V = k} \sup_{v \in V/\{0\}} \frac{\int_M L_\theta[v] v dV_\theta}{\int_M v^2 dV_\theta}. \tag{3.11}$$

∎

Capítulo

4

O segundo invariante de Yamabe sobre variedades CR

Seja uma variedade CR pseudohermitiana (M, θ), compacta, orientável e estritamente pseudoconvexa com dimensão $2n+1$, sendo $n \geq 2$.

Neste capítulo, definimos o segundo invariante de Yamabe como o ínfimo do segundo autovalor do operador de Yamabe sobre uma classe conforme de estruturas pseudohermitinianas compatível com θ. Obtemos resultado semelhantes aos obtidos em [2], para o segundo invariante CR.

4.1 O problema de Yamabe sobre variedades CR

Dada uma variedade pseudohermitiana estritamente pseudoconvexa (M, θ), o elemento de volume $dV_\theta = \theta \wedge d\theta^n$ induz um produto interno L^2 sobre funções definido por:

$$\langle u, v \rangle_\theta = \int_M uv \, dV_\theta.$$

A forma L_θ^* também induz um produto interno L^2 sobre seções de $H^*(M)$ definido por:

$$\langle \omega, \eta \rangle_\theta = \int_M L_\theta^*(\omega, \eta) \, dV_\theta.$$

Se $r : T^*(M) \to H^*(M)$ denota a restrição e $u \in C^\infty(M)$, podemos definir uma seção $d_b u$ de $H^*(M)$ por

$$d_b u := r \circ du.$$

Definição 4.1.1. *O operador real Δ_b, definido sobre funções $u \in C_0^\infty(M)$ por*

$$\langle \Delta_b u, v \rangle_\theta = \langle d_b u, d_b v \rangle_\theta \, , \forall \;\; v \in C_0^\infty(M),$$

é denominado ***operador sublaplaciano*** . *Ou seja,*

$$\int_M \Delta_b u v \, dV_\theta = \int_M L_\theta^*(du, dv) \, dV_\theta, \forall \ v \in C_0^\infty(M),$$

pois $\theta \rfloor L_\theta^*$.

Em relação à um correferencial admissível $\{\theta^\alpha\}$, o sublaplaciano possui uma expressão particularmente simples em termos das derivadas covariantes [30]:

$$\Delta_b u = -(u_\gamma{}^\gamma + u_{\bar{\gamma}}{}^{\bar{\gamma}}). \tag{4.1}$$

Como pode ser visto em [27], uma mudança de estrutura pseudohermitiana $\widetilde{\theta} = e^{2u}\theta$ fornece a seguinte transformação na curvatura escalar

$$\widetilde{R} = e^{-2u}(R - 2(n+1)(u_\gamma{}^\gamma + u_{\bar{\gamma}}{}^{\bar{\gamma}}) - 4n(n+1)u_\gamma u^\gamma),$$

que pode ser reescrita como

$$e^{2u}\widetilde{R} = R + 2(n+1)\Delta_b u - 2n(n+1)\|du\|_\theta^2. \tag{4.2}$$

Fazendo a mudança de variável $e^{2u} = v^{2c}$, em que c é uma constante e v é uma função positiva, obtemos $u = c \ln v$. Como pode-se verificar, temos

$$\Delta_b(\ln v) = \frac{1}{v}\,\Delta_b v \quad \text{e} \quad \|du\|_\theta^2 = \frac{c^2}{v^2}\,\|dv\|_\theta^2.$$

Daí,

$$\begin{aligned} v^{2c}\widetilde{R} &= R + 2c(n+1)\frac{\Delta_b v}{v} + 2c(n+1)\frac{\|dv\|_\theta^2}{v^2} - 2n(n+1)c^2\frac{\|dv\|_\theta^2}{v^2} \\ &= R + 2c(n+1)\frac{\Delta_b v}{v} + 2c(n+1)\frac{\|dv\|_\theta^2}{v^2}(1 - nc). \end{aligned}$$

Tomando $c = 1/n$, obtemos

$$v^{\frac{2}{n}}\widetilde{R} = R + (2 + \frac{2}{n})\frac{\Delta_b v}{v}.$$

Denotando $p = 2 + \dfrac{2}{n}$, temos

$$\widetilde{R} = v^{1-p}(p\,\Delta_b + R)v.$$

Dessa maneira, se θ é uma estrutura pseudohermitiana fixada e v é uma função suave e positiva de M, então uma condição necessária e suficiente para que a estrutura pseudohermitiana $\widetilde{\theta} = v^{p-2}\theta$ tenha curvatura escalar constante $\widetilde{R} \equiv \lambda$ é que v satisfaça

$$p\,\Delta_b v + Rv = \lambda v^{p-1}. \tag{4.3}$$

Essa equação é denominada **equação de Yamabe CR** e o operador

$$L_\theta[v] := (p\,\Delta_b + R)v \tag{4.4}$$

é denominado **operador de Yamabe CR** .

Como ocorre no problema de Yamabe clássico, a equação de Yamabe CR é a equação de Euler-Lagrange para o problema variacional

$$\lambda(M) = \inf\{A_\theta(v) : B_\theta(v) = 1\},$$

em que

$$A_\theta(v) := \int_M vL[v]\,dV_\theta = \int_M (p\,\|dv\|_\theta^2 + Rv^2)\,dV_\theta$$

e

$$B_\theta(v) := \int_M dV_{\widetilde{\theta}} = \int_M |v|^p dV_\theta.$$

Quando M é compacta, a desigualdade de Hölder garante que $\lambda(M) > -\infty$. Em [27], Jerison e Lee provaram o seguinte resultado.

Teorema 4.1.1. *Seja M uma variedade CR de dimensão $2n+1$, CR-integrável, compacta, orientável, estritamente pseudoconvexa e seja θ uma estrutura pseudohermitiana para M. Então*

(a) $\lambda(M)$ depende somente da CR-estrutura de M, e não de uma escolha de θ;

(b) $\mu(M) \leq \mu(\mathbb{S}^{2n+1})$, onde $\mathbb{S}^{2n+1} \subset \mathbb{C}^{n+1}$ é a esfera CR;

(c) Se $\mu(M) < \mu(\mathbb{S}^{2n+1})$, então o ínfimos $\mu(M)$ é atingido por uma função suave u positiva, solução da equação de Yamabe CR. Portanto $\widetilde{\theta} = u^{p-2}\theta$ tem curvatura pseudohermitiana constante $\widetilde{R}$.

Além desse resultado, Jerison e Lee mostraram em [29] que quando (M, θ) não é localmente equivalente CR a esfera e $n > 1$, então $\mu(M) < \mu(\mathbb{S}^{2n+1})$. Ou seja, existe uma estrutura pseudohermitiana $\widetilde{\theta}$ para M tal que $(M, \widetilde{\theta})$ tem curvatura escalar pseudohermitiana constante.

4.2 Autovalores do operador de Yamabe CR

Introduziremos e estudaremos um invariante, no qual chamaremos de segundo invariante de Yamabe. Para isso, considere o operador

$$L_\theta[v] := (p\,\Delta_b + R)v. \tag{4.5}$$

Como é demonstrado em [27], tal operador admite um primeiro autovalor $\lambda_1(\theta)$. Usando métodos padrão para mostrar existência de sequência de autovalores. Temos que $\mathfrak{L}_\theta$ tem um espectro distreto

$$Spec\mathfrak{L}_\theta = \{\lambda_1(\theta), \lambda_2(\theta), \dots\}, \tag{4.6}$$

onde os autovalores

$$\lim_{k\to\infty} \lambda_k(\theta) = \infty. \tag{4.7}$$

A caracterização variacional de λ_1 é dada por

$$\lambda_1(\theta) = \inf_{u\not\equiv 0, u\in C^\infty(M)} \frac{\int_M uL[u]\,dV_\theta}{\int_M \mid u \mid^2 dV_\theta} = \inf_{u\not\equiv 0, u\in C^\infty(M)} \frac{\int_M (p\,\|du\|_\theta^2 + Ru^2)\,dV_\theta}{\int_M \mid u \mid^2 dV_\theta}. \tag{4.8}$$

Seja $[\theta]$ a classe conforme de θ. Assumimos que o invariante de Yamabe satisfaz $\mu(M,\theta) \geq 0$. Obtemos então o nosso primeiro resultado.

Proposição 4.2.1. *Seja M uma variedade CR de dimensão $2n+1$, CR-integrável, compacta, orientável, estritamente pseudoconvexa e seja θ uma estrutura pseudohermitiana para M. Então, se $\mu(M,\theta) \geq 0$, temos que*

$$\mu(M,\theta) = \inf_{\widetilde{\theta}\in[\theta]} \lambda_1(\widetilde{\theta}) V_{\widetilde{\theta}}^{\frac{1}{n+1}}. \tag{4.9}$$

Demonstração: Primeiro, provaremos que

$$\mu(M,\theta) \leq \inf_{\widetilde{\theta}\in[\theta]} \lambda_1(\widetilde{\theta}) V_{\widetilde{\theta}}^{\frac{1}{n+1}}. \tag{4.10}$$

Sendo $\mu(M,\theta) = \mu(M,\widetilde{\theta})$, tomamos $u \in C^\infty(M)$ tal que

$$\lambda_1(\widetilde{\theta}) = \frac{\int_M (\widetilde{\rho} u^2 + p\|du\|_{\widetilde{\theta}}^2) dV_{\widetilde{\theta}}}{\int_M u^2 dV_{\widetilde{\theta}}}. \tag{4.11}$$

Daí,

$$\lambda_1(\widetilde{\theta})\int_M u^2 dV_{\widetilde{\theta}} = \int_M (\widetilde{\rho}u^2 + p\|du\|^2_{\widetilde{\theta}})dV_{\widetilde{\theta}} \geq \mu(M,\theta)(\int_M u^p dV_{\widetilde{\theta}})^{\frac{2}{p}}. \tag{4.12}$$

Mas, pela desigualdade de Hölder,

$$\int_M u^2 dV_{\widetilde{\theta}} \leq \left(\int_M u^p dV_{\widetilde{\theta}}\right)^{\frac{2}{p}} V_{\widetilde{\theta}}^{\frac{1}{n+1}}. \tag{4.13}$$

Concluímos então que

$$\lambda_1(\widetilde{\theta})\left(\int_M u^p dV_{\widetilde{\theta}}\right)^{\frac{2}{p}} V_{\widetilde{\theta}}^{\frac{1}{n+1}} \geq \mu(M,\theta)\left(\int_M u^p dV_{\widetilde{\theta}}\right)^{\frac{2}{p}}. \tag{4.14}$$

Consequentemente,

$$\mu(M,\theta) \leq \inf_{\widetilde{\theta}\in[\theta]} \lambda_1(\widetilde{\theta})V_{\widetilde{\theta}}^{\frac{1}{n+1}}. \tag{4.15}$$

Agora, para provar a desigualdade contrária, provaremos que existe $u \geq 0 \in C^\infty(M)$ com $\widetilde{\theta} = u^{p-2}\theta$ tal que

$$\mu(M,\theta) \geq \inf_{\widetilde{\theta}\in[\theta]} \lambda_1(\widetilde{\theta})V_{\widetilde{\theta}}^{\frac{1}{n+1}}. \tag{4.16}$$

Como veremos mais adiante, podemos tomar a seguinte caracterização variacional de $\lambda_1(\widetilde{\theta})$:

$$\lambda_1(\widetilde{\theta}) = \inf_{w\in C_0^\infty(M), u^{\frac{p-2}{2}}w\not\equiv 0} \frac{\int_M (p\,\|dw\|^2_\theta + \rho w^2)\,dV_\theta}{\int_M u^{p-2}w^2 dV_\theta}. \tag{4.17}$$

Tomamos $u > 0 \in C^\infty(M)$, tal que u é o minimizador para $\mu(M,\theta)$ pelo funcional

$$Y(u) = \frac{\int_M (p\,\|du\|^2_\theta + \rho u^2)\,dV_\theta}{\int_M |u|^p dV_\theta}. \tag{4.18}$$

Pela homogeneidade de $Y(u)$, podemos tomar u tal que $\int_M |u|^p dV_\theta = 1$. Então, para $w \in C_0^\infty(M), u^{\frac{p-2}{2}}w \not\equiv 0$, temos

$$\lambda_1(\widetilde{\theta}) \leq \frac{\int_M (p\,\|dw\|^2_\theta + \rho w^2)\,dV_\theta}{\int_M u^{p-2}w^2 dV_\theta}. \tag{4.19}$$

Tomando $w = u$, consequentemente temos

$$\lambda_1(\widetilde{\theta}) \leq \frac{\int_M (p\,\|du\|_\theta^2 + \rho u^2)\,dV_\theta}{\int_M u^p dV_\theta} = \mu(M,\theta). \tag{4.20}$$

Como $\int_M |u|^p dV_\theta = 1$, chegamos que $\lambda_1(\widetilde{\theta}) \leq \mu(M,\theta)$, sendo $V_{\widetilde{\theta}} = \int_M |u|^p dV_\theta = 1$. Concluímos finalmente que $\lambda_1(\widetilde{\theta})V_{\widetilde{\theta}} \leq \mu(M,\theta)$.
Provamos então que

$$\mu(M,\theta) = \inf_{\widetilde{\theta}\in[\theta]} \lambda_1(\widetilde{\theta})V_{\widetilde{\theta}}^{\frac{1}{n+1}}. \tag{4.21}$$

∎

Podemos ampliar agora esta definição.

Definição 4.2.1. *Seja $k \in \mathbb{N}^*$. Então o k-ésimo invariante de Yamabe é definido por*

$$\mu_k(M,\theta) = \inf_{\widetilde{\theta}\in[\theta]} \lambda_k(\widetilde{\theta})V_{\widetilde{\theta}}^{\frac{1}{n+1}}. \tag{4.22}$$

4.3 Caracterização variacional de $\mu_2(M,\theta)$

Utilizaremos daqui para frente a seguinte notação

$$L_+^p(M) := \{u \in L^p(M) \,||\, u \geq 0, u \not\equiv 0\}. \tag{4.23}$$

Podemos representa os autovalores da seguinte forma

$$\lambda_k(\widetilde{\theta}) = \inf_{V\subset C^\infty(M),\dim V = k}\ \sup_{v\in V/\{0\}} \frac{\int_M L_{\widetilde{\theta}}[v]v dV_{\widetilde{\theta}}}{\int_M v^2 dV_{\widetilde{\theta}}}. \tag{4.24}$$

Para todo $u \in L_+^p(M)$, definimos
(4.25)
$Gr_k^u(C^\infty(M)) = \{V \subset C^\infty(M) |\dim V = k\ ,\ V =< v_1, \ldots, v_k >\ e\ u^{\frac{p-2}{2}}v_1, \ldots, u^{\frac{p-2}{2}}v_k\ li's\}.$

Repassando $C^\infty(M)$ por $S_1^2(M)$, definimos $Gr_k^u(S_1^2(M))$. Para todo $u \in L_+^p(M)$ $v \in S_1^2(M)$, tal que $u^{\frac{p-2}{2}}v \not\equiv 0$, tomamos

$$F(u,v) = \left(\frac{\int_M (p\,\|dv\|_\theta^2 + \rho v^2)\,dV_\theta}{\int_M u^{p-2}v^2 dV_\theta}\right)\left(\int_M u^p dV_\theta\right)^{\frac{1}{n+1}}. \tag{4.26}$$

A seguinte caracterização tem uma importância central na tese.

Proposição 4.3.1. *Temos*

$$\mu_k(M,\theta) = \inf_{u\in L^p_+(M), V\in Gr^u_k(S^2_1(M))} \sup_{v\in V/\{0\}} F(u,v) \tag{4.27}$$

Demonstração: Considere $u \in C^\infty(M)$ positiva. Definimos então, para toda $f \in C^\infty$ $f \not\equiv 0$ e tomamos $\widetilde{\theta} = u^{p-2}\theta$, a seguinte aplicação

$$F'(u,v) = \frac{\int_M f L_{\widetilde{\theta}} f dV_{\widetilde{\theta}}}{\int_M f^2 dV_{\widetilde{\theta}}}. \tag{4.28}$$

Como pode ser visto em D. Jerison, J. M. Lee [27], se $\widetilde{\theta} = r^{p-2}\theta$ e $p = 2 + \frac{2}{n}$ temos

$$(p\widetilde{\Delta}_b + \widetilde{\rho})r^{-1}u = r^{1-p}(p\Delta_b + \rho)u. \tag{4.29}$$

Daí temos que

$$\mathfrak{L}_{\widetilde{\theta}}(r^{-1}u) = r^{1-p}\mathfrak{L}_\theta u \tag{4.30}$$

Sabendo que $dV_{\widetilde{\theta}} = u^p dV_\theta$ e $\widetilde{\theta} = u^{p-2}\theta$ e trocando θ por $\widetilde{\theta}$ em (4.30). Chegamos que

$$L_{\widetilde{\theta}} f = u^{1-p}\mathfrak{L}_\theta(uf). \tag{4.31}$$

Consequentemente

$$F'(u,v) = \frac{\int_M f \frac{u^p}{u^{p-1}} \mathfrak{L}_\theta(uf) dV_\theta}{\int_M f^2 u^p dV_\theta} =$$

$$= \frac{\int_M uf \mathfrak{L}_\theta(uf) dV_\theta}{\int_M (uf)^2 u^{p-2} dV_\theta},$$

trocamos uf por v acima.

Observação 1. *Ao trocar uf por v chegamos na caracterização de $\lambda_1(\widetilde{\theta})$ dada em (4.17),* chegamos que

$$\lambda_k(\widetilde{\theta}) = \inf_{V\in Gr^u_k(S^2_1(M))} \sup_{v\in V} \frac{\int_M v\mathfrak{L}_\theta v dV_\theta}{\int_M v^2 u^{p-2} dV_\theta}.$$

Pela definição de $\mu_k(M,\theta)$, com $V_{\widetilde{\theta}} = \int_M u^p dV_\theta$, concluímos que

$$\mu_k(M,\theta) = \inf_{u\in L^p_+(M), V\in Gr^u_k(S^2_1(M))} \sup_{v\in V/\{0\}} F(u,v). \tag{4.32}$$

∎

4.4 Equação de Euler-Lagrange e regularidade

4.4.1 Primeiro resultado de regularidade

Mudando a notação, por questão de conveniência, denotaremos agora $\pi_H \nabla u = \nabla_H u$, onde $\pi_H : T(M) \to H(M)$ é a projeção natural associada à decomposição em soma direta $T(M) = H \bigoplus \mathbb{R}T$ (T é a direção característica de (M, θ)).

Nós provaremos o seguinte resultado de regularidade

Lema 4.4.1. *Seja $u \in L^p(M)$ e $v \in S_1^2(M)$. Assumimos que*

$$\mathfrak{L}_\theta v = u^{p-2} v \tag{4.33}$$

no sentido de distribuição. Então, $v \in L^{p+\varepsilon}(M)$ para algum $\varepsilon > 0$.

DEMONSTRAÇÃO: Defina $v_+ = \sup(v, 0)$. Tome $q \in (1, \frac{n+1}{n})$ fixe um número real $\ell > 0$ tão grande que tende a $+\infty$. Seja $\beta = 2q - 1$. Definimos as seguintes funções para $x \in \mathbb{R}$

$$F_\ell(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x^q & \text{se } 0 \leq x < \ell \\ q\ell^{q-1}x - (q-1) & \text{se } x \geq \ell \end{cases}$$

e

$$G_\ell(x) = \begin{cases} 0 & \text{se } x < 0 \\ x^\beta & \text{se } 0 \leq x < \ell \\ \ell^{q-1}(q\ell^{q-1}x - (q-1)\ell^q) & \text{se } x \geq \ell. \end{cases}$$

É fácil verificar que

1. $(F'_\ell(x))^2 \leq qG'_\ell(x)$,
2. $(F_\ell(x))^2 \geq xG_\ell(x)$,
3. $xG'_\ell(x) \leq \beta G_\ell(x)$.

Uma vez que F_ℓ e G_ℓ são funções contínuas uniformemente Lipschitz, $F_\ell(v_+)$ e $G_\ell(v_+)$ pertence a $S_1^2(M)$. Seja $x_0 \in M$ um ponto qualquer de M. Denotemos por η uma função não negativa C^2 com suporte na bola $B_{x_0}(2\delta)$ ($\delta > 0$ é um número tão pequeno fixo), tal que $0 \leq \eta \leq 1$ e com $\eta(B_{x_0}(\delta)) = 1$. Multiplicando a equação (4.33) por $\eta^2 G_\ell(v_+)$ e integrando em M. Uma vez que o suporte de v_+ e $G_\ell(v_+)$ coincide, observando que $G_\ell(v_+) = G_\ell(v)$, conseguimos

$$p\int_M < \nabla_H v_+, \nabla_H \eta^2 G_\ell(v_+) > dV_\theta + \int_M \rho v_+ \eta^2 G_\ell(v_+) dV_\theta = \int_M u^{p-2} v_+ \eta^2 G_\ell(v_+) dV_\theta. \tag{4.34}$$

Tratemos o primeiro termo da equação (4.34). Mas antes temos que

$$\int_M v_+ G_\ell(v_+)\Delta_b(\eta^2)dV_\theta = \int_M < \nabla_H(v_+G_\ell(v_+)), \nabla_H(\eta^2) > dV_\theta =$$

$$= \int_M G_\ell(v_+) < \nabla_H v_+, \nabla_H \eta^2 > dV_\theta + \int_M v_+ G'_\ell(v_+) < \nabla_H v_+, \nabla_H \eta^2 > dV_\theta.$$

Conluímos então que

$$\int_M G_\ell(v_+) < \nabla_H v_+, \nabla_H \eta^2 > dV_\theta = \int_M v_+ G_\ell(v_+)\Delta_b(\eta^2)dV_\theta - 2\int_M v_+ G'_\ell(v_+)\eta < \nabla_H v_+, \nabla_H \eta > dV_\theta.$$

Como consequência temos

$$\int_M < \nabla_H v_+, \nabla_H(\eta^2 G_\ell(v_+)) > dV_\theta =$$

$$= \int_M G_\ell(v_+) < \nabla_H v_+, \nabla_H(\eta^2) + \int_M G'_\ell(v_+)\eta^2 \|\nabla_H v_+\|_\theta^2 dV_\theta =$$

$$= \int_M v_+ G_\ell(v_+)\Delta_b(\eta^2)dV_\theta - 2\int_M v_+ G'_\ell(v_+)\eta < \nabla_H v_+, \nabla_H \eta > dV_\theta + \int_M G'_\ell(v_+)\eta^2 \|\nabla_H v_+\|_\theta^2 dV_\theta.$$

Tomando $C > 0$ tal que $\Delta_b(\eta^2) \geq -C$. Sendo que $ab \leq \frac{a^2}{2} + \frac{b^2}{2}$, tome $a = 2v_+\|\nabla_H \eta\|_\theta$ e $b = \eta\|\nabla_H \eta\|_\theta$ e aplicando a desigualdade de Schwarz temos que

$$2\int_M v_+ G'_\ell(v_+)\eta < \nabla_H v_+, \nabla_H \eta > dV_\theta \leq 2\int_M v_+ G'_\ell(v_+)\eta \|\nabla_H v_+\|_\theta \|\nabla_H \eta\|_\theta dV_\theta \leq$$

$$\leq 2\int_M v_+^2 \|\nabla_H \eta\|_\theta^2 G'_\ell(v_+) dV_\theta + \frac{1}{2}\int_M G'_\ell(v_+)\eta^2 \|\nabla_H v_+\|_\theta^2 dV_\theta.$$

Daí chegamos na desigualdade

$$\int_M < \nabla_H v_+, \nabla_H(\eta^2 G_\ell(v_+)) > dV_\theta \geq$$

$$\geq -C\int_M v_+ G_\ell(v_+) dV_\theta - 2\int_M v_+^2 \|\nabla_H \eta\|_\theta^2 G'_\ell(v_+) dV_\theta + \frac{1}{2}\int_M G'_\ell(v_+)\eta^2 \|\nabla_H v_+\|_\theta^2 dV_\theta.$$

Usando 1., 2. e 3., sendo que por 1. e 2. temos

$$-C\int_M v_+ G_\ell(v_+) dV_\theta \geq -C\int_M (F_\ell(v_+))^2 dV_\theta, \tag{4.35}$$

$$(4.36)\qquad -2\int_M v_+ v_+ \|\nabla_H \eta\|_\theta^2 G_\ell'(v_+) dV_\theta \geq -2\int_M v_+ \|\nabla_H \eta\|_\theta^2 \beta G_\ell(v_+) dV_\theta \geq$$

$$(4.37)\qquad \geq -2\beta k \int_M (F_\ell(v_+))^2 dV_\theta,$$

onde $k \leq \|\nabla_H \eta\|_\theta^2$.

Por abuso de notação, podemo tomar uma outra constante $C > 0$ tal que

(4.38)

$$\int_M < \nabla_H v_+, \nabla_H(\eta^2 G_\ell(v_+)) > dV_\theta \geq -C\int_M (F_\ell(v_+))^2 dV_\theta + \frac{1}{2q}\int_M (F_\ell'(v_+))^2 \geq \eta^2 \|\nabla_H v_+\|_\theta^2 dV_\theta$$

$$\geq -C\int_M (F_\ell(v_+))^2 dV_\theta + \frac{1}{2q}\int_M \eta^2 \|\nabla_H F_\ell(v_+)\|_\theta^2 dV_\theta$$

$$\geq -C\int_M (F_\ell(v_+))^2 dV_\theta + \frac{1}{4q}\int_M \|\nabla_H (\eta F_\ell(v_+)\|_\theta^2 dV_\theta - \frac{1}{2q}\int_M \|\nabla_H \eta\|_\theta^2 (F_\ell(v_+))^2 dV_\theta.$$

Tomando uma outra constante $C > 0$ (observe que aconstante $C > 0$ depende apenas de η, q, β, δ e não de ℓ) e juntamos os termos com $(F_\ell(v_+))^2$, concluímos que

(4.39)

$$\int_M < \nabla_H v_+, \nabla_H(\eta^2 G_\ell(v_+)) > dV_\theta \geq -C\int_M (F_\ell(v_+))^2 dV_\theta + \frac{1}{4q}\int_M \|\nabla_H (\eta F_\ell(v_+))\|_\theta^2 dV_\theta.$$

Usando o mergulho do espaço de Folland-Stein $S_1^2(M)$ em $L^p(M)$, existe uma constante $A > 0$ dependendo apenas de (M, θ) tal que

$$(4.40)\qquad \int_M \|\nabla_H (\eta F_\ell(v_+))\|_\theta^2 dV_\theta \geq A\left(\int_M (\eta F_\ell(v_+))^p dV_\theta\right)^{\frac{2}{p}} - \int_M (\eta F_\ell(v_+))^2 dV_\theta.$$

Junto com (4.39), obtemos

(4.41)

$$\int_M < \nabla_H v_+, \nabla_H(\eta^2 G_\ell(v_+)) > dV_\theta \geq -C\int_M (F_\ell(v_+))^2 dV_\theta + \frac{A}{4q}\left(\int_M (\eta F_\ell(v_+))^p dV_\theta\right)^{\frac{2}{p}}.$$

Tomamos uma bola pequena o suficiente tal que

$$\int_{B(x_0, 2\delta)} u^p dV_\theta \leq \left(p\frac{A}{8q}\right)^{n+1}.$$

Aplicando a desigualdade de Holder, temos

$$\int_M u^{p-2}\eta^2 (F_\ell(v_+))^2 dV_\theta \leq \left(\int_M u^p dV_\theta\right)^{\frac{p-2}{p}} \left(\int_M (\eta F_\ell(v_+))^p dV_\theta\right)^{\frac{2}{p}}.$$

Por 2. temos

$$\int_M u^{p-2}v_+\eta^2 G_\ell(v_+)dV_\theta \leq \int_M u^{p-2}\eta^2(F_\ell(v_+))^2 dV_\theta.$$

Daí, concluímos que

$$\int_M u^{p-2}v_+\eta^2 G_\ell(v_+)dV_\theta \leq p\frac{A}{8q}\left(\int_M (\eta F_\ell(v_+))^p dV_\theta\right)^{\frac{2}{p}}. \tag{4.42}$$

Novamente, por 2.

$$\int_M \rho v_+\eta^2 G_\ell(v_+)dV_\theta \geq -C\int_M (F_\ell(v_+))^2 dV_\theta, \tag{4.43}$$

onde $\rho \geq -C$.
Usando (4.34), (4.41), (4.42) e (4.43), teremos

$$p\frac{A}{16q}\left(\int_M (\eta F_\ell(v_+))^p dV_\theta\right)^{\frac{2}{p}} \leq C\int_M (F_\ell(v_+))^2 dV_\theta. \tag{4.44}$$

Pelo do mergulho do espaço de Folland-Stein $S_1^2(M)$ em $L^s(M)$, para $2 \leq s \leq p$ temos que $v_+ \in L^s(M)$. Uma vez que $2q \leq p$ e C independe de ℓ, o lado direito da desigualdade acima é limitado quando ℓ tende a $+\infty$. Aplicando o Lema de Fatou reverso, obtemos que

$$\limsup_{\ell\to+\infty}\int_M (\eta F_\ell(v_+))^p dV_\theta < +\infty.$$

Isto prova que $v_+ \in L^{qp}(B_{x_0}(\delta))$. Sendo x_0 arbitrário, chegamos que $v_+ \in L^{qp}(M)$. Fazendo o mesmo com $v_- = \sup(-v, 0)$ no lugar de v_+, concluímos que $v \in L^{qp}(M)$. O que prova o lema. ∎

4.4.2 O k-ésimo autovalor do operador de Yamabe para estruturas pseudohermitianas generalizadas

Em uma variedade pseudohermitiana compacta (M,θ), dizemos que $\widetilde{\theta} = u^{p-2}\theta$, $u \in L_+^p(M)$, é uma estrutura pseudohermitiana generalizada conforme a θ. Para uma estrutura pseudohermitiana generalizada $\widetilde{\theta}$, podemos definir:

$$\lambda_k(\widetilde{\theta}) = \inf_{V\in Gr_k^u(S_1^2(M))}\sup_{v\in V}\frac{\int_M v\mathfrak{L}_\theta v dV_\theta}{\int_M v^2 u^{p-2}dV_\theta}. \tag{4.45}$$

Proposição 4.4.1. *Para toda $u \in L_+^p(M)$, $\widetilde{\theta} = u^{p-2}\theta$ existem duas funções v, w pertencentes a $S_1^2(M)$ com $v \geq 0$ e tal que no sentido de distribuição*

$$(4.46) \qquad \mathfrak{L}_\theta v = \lambda_1(\widetilde{\theta}) u^{p-2} v$$

e

$$(4.47) \qquad \mathfrak{L}_\theta w = \lambda_2(\widetilde{\theta}) u^{p-2} w.$$

Além disso, podemos normalizar v, w por

$$(4.48) \qquad \int_M u^{p-2} v^2 dV_\theta = \int_M u^{p-2} w^2 dV_\theta = 1 \ e \ \int_M u^{p-2} vw dV_\theta = 0.$$

Demonstração: Seja $(v_m)_m$ uma sequência minimizante para $\lambda_1(\widetilde{\theta})$ isto é $v_m \in S_1^2(M)$ tal que

$$(4.49) \qquad \lambda_1(\widetilde{\theta}) = \lim_{m \to \infty} \frac{\int_M p\|\nabla_H v_m\|_\theta^2 + \rho v_m^2 dV_\theta}{\int_M u^{p-2} v_m^2 dV_\theta}.$$

Mas $(|v_m|)_m$ é também um sequência minizante. Consequentemente podemos assumir que $v_m \geq 0$. Se normalizarmos v_m por $\int_M u^{p-2} v_m^2 dV_\theta = 1$. Então $v_m \geq 0$ é limitado em $S_1^2(M)$ e passando a subsequência, se nescessário, temos que $v_m \rightharpoonup v$ em $S_1^2(M)$. Como temos o mergulho compacto de $S_1^2(M)$ em $L^2(M)$ temos que $v_m \to v$ q.t.p em $L^2(M)$. Se tomarmos u suave, temos então que

$$(4.50) \qquad \lim_{m \to +\infty} \int_M u^{p-2} |v^2 - v_m^2| dV_\theta = 0.$$

Consequentemente teremos

$$(4.51) \qquad \int_M u^{p-2} v^2 dV_\theta = \lim_{m \to \infty} \int_M u^{p-2} v_m^2 dV_\theta = 1.$$

Queremos que a situção acima seja valida para $u \in L_+^p(M)$. Para isso, considere $A > 0$ um número tão grande e tomemos $u_A = \inf(u, A)$. Sabemos que

$$(4.52) \qquad \left| \int_M u^{p-2}(v^2 - v_m^2) dV_\theta \right| \leq \int_M u^{p-2} |v^2 - v_m^2| dV_\theta =$$

$$(4.53) \qquad = \int_M (u_A^{p-2}|v^2 - v_m^2| - u_A^{p-2}|v^2 - v_m^2| + u^{p-2}|v^2 - v_m^2|) dV_\theta =$$

$$= \int_M (u_A^{p-2}|v^2 - v_m^2| dV_\theta + \int_M (u^{p-2} - u_A^{p-2})|v^2 - v_m^2|) dV_\theta \leq \tag{4.54}$$

$$\leq \int_M (u_A^{p-2}|v^2 - v_m^2| dV_\theta + \int_M (u^{p-2} - u_A^{p-2})(|v| + |v_m|)^2 dV_\theta. \tag{4.55}$$

Aplicando a desigualdade Hölder, temos

$$\int_M (u^{p-2} - u_A^{p-2})(|v| + |v_m|)^2 dV_\theta \leq \left(\int_M (u^{p-2} - u_A^{p-2})^{\frac{p-2}{p}} dV_\theta \right)^{\frac{p}{p-2}} \left(\int_M (|v| + |v_m|)^p dV_\theta \right)^{\frac{2}{p}}. \tag{4.56}$$

Daí, teremos que

$$\left| \int_M u^{p-2}(v^2 - v_m^2) dV_\theta \right| \leq A \int_M |v^2 - v_m^2| dV_\theta + \left(\int_M (u^{p-2} - u_A^{p-2})^{\frac{p-2}{p}} dV_\theta \right)^{\frac{p}{p-2}} \left(\int_M (|v| + |v_m|)^p dV_\theta \right)^{\frac{2}{p}}. \tag{4.57}$$

Como $u_A \leq u$ para todo $A > 0$, $u_{A_1} \leq u_{A_2}$ com $A_1 \leq A_1$ e $\lim_{A \to \infty} u_A = u$. Concluimos que, pelo Teorema da Convergência Dominada,

$$\lim_{A \to \infty} \left(\int_M (u^{p-2} - u_A^{p-2})^{\frac{p-2}{p}} dV_\theta \right)^{\frac{p}{p-2}} = 0. \tag{4.58}$$

Sendo $(v_m)_m$ limitado em $S_1^2(M)$, então $(v_m)_m$ é limitado em $L^p(M)$, pois $S_1^2(M)$ está mergulhado em $L^p(M)$. Daí existe $C > 0$ tal que $\int_M (|v| + |v_m|)^p dV_\theta \leq C$. Como $v_m \to v$ q.t.p em $L^2(M)$, concluímos, para $u \in L_+^p(M)$, que

$$\lim_{m \to +\infty} \int_M u^{p-2}|v^2 - v_m^2| dV_\theta = 0. \tag{4.59}$$

Então para $u \in L_+^p$

$$\int_M u^{p-2} v^2 dV_\theta = \lim_{m \to \infty} \int_M u^{p-2} v_m^2 dV_\theta = 1, \tag{4.60}$$

onde v é não-negativo minizador do funcional associado a $\lambda_1(\widetilde{\theta})$, v satisfaz

$$\mathfrak{L}_\theta v = \lambda_1(\widetilde{\theta}) u^{p-2} v \tag{4.61}$$

no sentido de distribuição.

Definimos agora

$$\lambda_2'(\widetilde{\theta}) = \inf \frac{\int_M (p\|\nabla_H w\|_\theta^2 + \rho w^2) dV_\theta}{\int_M u^{p-2} w^2 dV_\theta}, \tag{4.62}$$

onde o infimo é tomado em w tal que $u^{\frac{p-2}{2}}w \not\equiv 0$ e $\int_M u^{p-2}vwdV_\theta = 0$. Tomando o mesmo processo, achamos w que satisfaz (4.47) com $\lambda_2'(\widetilde{\theta})$ no lugar de $\lambda_2(\widetilde{\theta})$. Usando a leis de transformação 4.30 e 4.31 concluímos que $\lambda_2'(\widetilde{\theta}) = \lambda_2(\widetilde{\theta})$ e daí concluímos a proposição. ∎

Observação 2. *Para $k = 2$ o ínfimo da fórmula (4.27) sobre todos os subespaços $V \in Gr_2^u(S_1^2(M))$ é atingida para $V =< v, w >$ e o supremo sobre todas as funções em $V\backslash\{0\}$ é atingido por w. Utilizando o homogeneidade da função $F(u, v)$ em u da equação (4.27), podemos tomar*

$$\mu_2(M, \theta) = \inf_{\widetilde{\theta}\in[\theta]} \lambda_2(\widetilde{\theta}). \tag{4.63}$$

4.4.3 Equação de Euler-Lagrange de um nimizador de $\lambda_2 V^{\frac{1}{n+1}}$

Lema 4.4.2. *Seja $u \in L^p_+(M)$ com $\int_M u^p dV_\theta = 1$. Suponha que w_1, $w_2 \in S_1^2(M)\backslash\{0\}$, $w_1, w_2 \geq 0$ satisfazendo*

$$\int_M (p\|\nabla_H w_1\|_\theta^2 + \rho w_1^2)dV_\theta \leq \mu_2(M, \theta) \int_M u^{p-2}w_1^2 dV_\theta \tag{4.64}$$

$$\int_M (p\|\nabla_H w_2\|_\theta^2 + \rho w_2^2)dV_\theta \leq \mu_2(M, \theta) \int_M u^{p-2}w_2^2 dV_\theta \tag{4.65}$$

e suponha que $(M\backslash w_1^{-1}) \cap (M\backslash w_2^{-1})$ tem medida nula. Então u é uma combinação linear de w_1 e w_2.

Demonstração: Considere $\overline{u} = aw_1 + bw_2$ onde $a, b \geq 0$ são escolhidos de tal forma que

$$\frac{a^{p-2}}{b^{p-2}} \frac{\int_M u^{p-2}w_1^2 dV_\theta}{\int_M u^{p-2}w_2^2 dV_\theta} = \frac{\int_M w_1^p dV_\theta}{\int_M w_2^p dV_\theta} \tag{4.66}$$

e

$$\int_M \overline{u} dV_\theta = a^p \int_M w_1^p dV_\theta + b^p \int_M w_2^p dV_\theta = 1 \tag{4.67}$$

(basta resolver o sistema em a, b nas duas equações acima).

Sabendo que

$$\mu_2(M, \theta) = \inf_{u\in L^p_+(M), V\in Gr_2^u(S_1^2(M))} \sup_{v\in V\backslash\{0\}} F(u, v), \tag{4.68}$$

temos que

$$\mu_2(M,\theta) \leq \sup_{(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\backslash\{0\}} F(\overline{u}, \lambda w_1 + \mu w_2). \tag{4.69}$$

Temos que

$$F(\overline{u}, \lambda w_1 + \mu w_2) = \frac{\int_M p\|\nabla_H(\lambda w_1 + \mu w_2)\|_\theta^2 + \rho(\lambda w_1 + \mu w_2)^2 dV_\theta}{\int_M (\lambda w_1 + \mu w_2)^2 \overline{u}^{p-2} dV_\theta}. \tag{4.70}$$

Usando que $(M\backslash w_1^{-1}) \cap (M\backslash w_2^{-1})$ (a medida é nula onde w_1 e w_2 são simultaneamente não nulos). Conseguimos

$$F(\overline{u}, \lambda w_1 + \mu w_2) = \frac{\lambda^2 \int_M (p\|\nabla_H w_1\|_\theta^2 + \rho w_1^2) dV_\theta + \mu^2 \int_M (p\|\nabla_H w_2\|_\theta^2 + \rho w_1^2) dV_\theta}{\lambda^2 \int_M |\overline{u}|^{p-2} w_1^2 dV_\theta + \mu^2 \int_M |\overline{u}|^{p-2} w_2^2 dV_\theta}. \tag{4.71}$$

Aplicando as hipóteses (4.64) e (4.65)

$$F(\overline{u}, \lambda w_1 + \mu w_2) \leq \mu_2(M,\theta) \frac{\lambda^2 \int_M u^{p-2} w_1^2 dV_\theta + \mu^2 \int_M u^{p-2} w_2^2 dV_\theta}{\lambda^2 a^{p-2} \int_M w_1^p dV_\theta + \mu^2 b^{p-2} \int_M w_2^p dV_\theta}. \tag{4.72}$$

Considere agora

$$A_1 = \int_M u^{p-2} w_1^2 dV_\theta, B_1 = \int_M u^{p-2} w_2^2 dV_\theta, A_2 = a^{p-2} \int_M w_1^p dV_\theta, B_2 = b^{p-2} \int_M w_2^p dV_\theta.$$

Substituindo à direita da desigualda (4.72), temos a função

$$H(\lambda,\mu) = \frac{\lambda^2 A_1 + \mu^2 B_1}{\lambda^2 A_2 + \mu^2 B_2}. \tag{4.73}$$

Derivando H com relação a λ e μ

$$H_\lambda(\lambda,\mu) = \frac{2\mu^2\lambda(A_1B_2 - A_2B_1)}{(\lambda^2 A_2 + \mu^2 B_2)^2}, \tag{4.74}$$

mas, por (4.66), teremos $A_1B_2 = A_2B_1$. Concluímos então que

$$H_\lambda(\lambda,\mu) \equiv 0. \tag{4.75}$$

Analogamente, conseguimos que

$$H_\mu(\lambda,\mu) \equiv 0. \tag{4.76}$$

Concluímos que $H(\lambda,\mu)$ independe de λ e μ, daí temos que o lado direito da desigualdade (4.72) independe de λ e μ. Podemos então tomar $\lambda = a$ e $\mu = b$, teremos então que

(4.77)
$$\sup_{(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}} F(\overline{u},\lambda w_1+\mu w_2) \leq \mu_2(M,\theta)\int_M u^{p-2}(a^2w_1^2+b^2w_2^2)dV_\theta = \mu_2(M,\theta)\int_M u^{p-2}\overline{u}^2 dV_\theta.$$

Aplicando a desigualdade de Hölder, temos

(4.78)
$$\int_M u^{p-2}\overline{u}^2 dV_\theta \leq \left(\int_M u^p dV_\theta\right)^{\frac{p-2}{p}} \left(\int_M \overline{u}^p dV_\theta\right)^{\frac{2}{p}} = 1.$$

Daí,

(4.79)
$$\sup_{(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\setminus\{0\}} F(\overline{u},\lambda w_1+\mu w_2) \leq \mu_2(M,\theta)\left(\int_M u^p dV_\theta\right)^{\frac{p-2}{p}} \left(\int_M \overline{u}^p dV_\theta\right)^{\frac{2}{p}} = \mu_2(M,\theta).$$

Usando (4.69) concluímos que

(4.80)
$$\int_M u^{p-2}\overline{u}^2 dV_\theta = \left(\int_M u^p dV_\theta\right)^{\frac{p-2}{p}} \left(\int_M \overline{u}^p dV_\theta\right)^{\frac{2}{p}} = 1.$$

Como temos a igualdade na desigualdade de Hölder, conseguimos que $\overline{u}^p = Cu^p$ q.t.p. Como $\int_M \overline{u}^p dV_\theta = \int_M u^p dV_\theta = 1$ temos que $C = 1$. Finalmente chegamos que $u = aw_1 + bw_2$. ∎

Teorema 4.4.1. *Assumimos que $\mu_2(M,\theta) \not\equiv 0$ e que $\mu_2(M,\theta)$ é atingida por uma forma pseudohermitiana generalizada $\widetilde{\theta} = u^{p-2}\theta$ com $u \in L^p_+(M)$.Seja v, w como o da proposição 4.4.1. Então, $u = |w|$. Em particular*

(4.81)
$$L\mathfrak{L}_\theta w = \mu_2(M,\theta)|w|^{p-2}w.$$

Além do mais, w muda de sinal e $w \in C^{3,\alpha}(M)$ $(\alpha \leq p-2)$.

Demonstração: Sem perda de generalidade, podemos supor que $\int_M u^p = 1$ (basta observar que $F(u,v)$, definida em (4.26), é homogênea em u). Por hipótese, assumimos que $\mu_2(M,\theta) = \lambda_2(\widetilde{\theta})$. Aplicando o lema 4.4.2 para $w_1 := \sup(w,0)$ e $w_2 := \sup(-w,0)$, obtemos $a, b > 0$ com $u = aw_1 + bw_2$. Pelo Lema 4.4.1 $w \in L^{p+\epsilon}(M)$. Por argumento padrão de bootstrap, a equação (4.47) mostra que que $w \in C^{3,\alpha}(M)$ para todo $\alpha \in (0,1)$. Como $u = aw_1 + bw_2$, segue que $u \in C^{0,\alpha}(M)$. Vamos dividir a demonstração do teorema 4.4.1 em lemas.

Lema 4.4.3. *w muda de sinal.*

Demonstração: Suponha que w não muda de sinal, isto é, podemos supor $w \geq 0$ como já vimos Sabemos que

$$\int_M u^{p-2} w^2 dV_\theta = 1, \tag{4.82}$$

$$\int_M u^{p-2} v w dV_\theta = 0. \tag{4.83}$$

Sendo $u \geq 0 \in C^{0,\alpha}(M)$ e $w \in C^{2,\alpha}(M)$ e $v > 0 \in C^\infty(M)$ (veja [27]). Temos que, por (4.82), $u^{\frac{p-2}{2}} w \not\equiv 0$. Mas por (4.83) e $w \geq 0$, temos que $u^{\frac{p-2}{2}} wv \equiv 0$ mas $v > 0 \in C^\infty(M)$, então $u^{\frac{p-2}{2}} w \equiv 0$, absurdo. ∎

Lema 4.4.4. $\lambda_1(\widetilde{\theta}) < \lambda_2(\widetilde{\theta})$

Demonstração: Suponha $\lambda_1(\widetilde{\theta}) = \lambda_2(\widetilde{\theta})$. Pela definição de $\lambda_1(\widetilde{\theta})$, w é um minimizador do funcional $\overline{w} \mapsto F(u, \overline{w})$ sobre todas as funções em $S_1^2(M)$ no qual $u^{\frac{p-2}{2}} w \not\equiv 0$. Enquanto $F(u, w) = F(u, |w|)$, temos que $|w|$ é o minizador do funcional associado a $\lambda_1(\widetilde{\theta})$, portanto teremos que $|w| > 0$ (veja [27]), o que é absurdo ,pois w muda de sinal. ∎

Lema 4.4.5. $u = |w|$

Demonstração: Seja $\eta \in C^\infty(M)$ cujo o suporte está contido em $M \backslash \{u^{-1}(0)\}$. Para t próximo de 0, tomesmo $u_t = |u + th|$. Enquanto $u > 0$ no suporte de u e sendo u contínua, temos que para t próximo de 0 $u_t = u + th$. Com $V =< v, w >\in Gr_2^u(S_1^2(M))$. Teremos que

$$\mu_2(M, \theta) \leq \sup_{(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}\backslash\{(0,0)\}} F(u_t, \lambda v + \mu w). \tag{4.84}$$

Pelas equações (4.46), (4.47) e as relações (4.48), teremos que

(4.85)

$$F(u_t, \lambda v + \mu w) = \frac{\lambda^2 \lambda_1(\widetilde{\theta}) \int_M u^{p-2} v^2 dV_\theta + \mu^2 \lambda_2(\widetilde{\theta}) \int_M u^{p-2} w^2 dV_\theta}{\lambda^2 \int_M u_t^{p-2} v^2 dV_\theta + 2\lambda\mu \int_M u_t^{p-2} vw dV_\theta + \mu^2 \int_M u_t^{p-2} w^2 dV_\theta} \left(\int_M u_t^p dV_\theta \right)^{\frac{1}{n+1}} =$$

$$= \frac{\lambda^2 \lambda_1(\widetilde{\theta}) + \mu^2 \lambda_2(\widetilde{\theta})}{\lambda^2 a_t + \lambda\mu b_t + \mu^2 c_t} \left(\int_M u_t^p dV_\theta \right)^{\frac{1}{n+1}}. \tag{4.86}$$

Onde $a_t = \int_M u_t^{p-2} v^2 dV_\theta$, $b_t = 2 \int_M u_t^{p-2} vw dV_\theta$ e $c_t = \int_M u_t^{p-2} w^2 dV_\theta$, são suaves com t próximo de 0, além do mais, $a_0 = c_0 = 1$ e $b_0 = 0$. A função $f(t, \alpha) := F(u_t, \sin(\alpha)v +$

$\cos(\alpha)w)$ é suave para t pequeno. Com

$$f(t,\alpha)=\frac{\lambda^2\lambda_1(\widetilde{\theta})+\mu^2\lambda_2(\widetilde{\theta})}{\cos^2(\alpha)a_t+\cos(\alpha)\sin(\alpha)b_t+\sin^2(\alpha)c_t}\left(\int_M u_t^p dV_\theta\right)^{\frac{1}{n+1}}. \tag{4.87}$$

Tomando a a derivada parcial de $f(t,\alpha)$ com relaçao a segunda variável, teremos

$$\frac{\partial f(t,\alpha)}{\partial\alpha}=\frac{(2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\lambda_1(\widetilde{\theta})-2\sin(\alpha)\cos(\alpha)\lambda_2(\widetilde{\theta}))(\cos^2(\alpha)a_t+\cos(\alpha)\sin(\alpha)b_t+\sin^2(\alpha)c_t)}{(\cos^2(\alpha)a_t+\cos(\alpha)\sin(\alpha)b_t+\sin^2(\alpha)c_t)^2} \tag{4.88}$$

$$\frac{-(-2\cos(\alpha)sin(\alpha)c_t+(\cos(\alpha)\sin(\alpha))'b_t+2\cos(\alpha)sin(\alpha)a_t)(\lambda^2\lambda_1(\widetilde{\theta})+\mu^2\lambda_2(\widetilde{\theta}))}{(\cos^2(\alpha)a_t+\cos(\alpha)\sin(\alpha)b_t+\sin^2(\alpha)c_t)^2}\left(\int_M u_t^p dV_\theta\right)^{\frac{1}{n+1}}. \tag{4.89}$$

Consequentemente

$$\frac{\partial f(0,\alpha)}{\partial\alpha}=2\sin(\alpha)cos(\alpha)(\lambda_1(\widetilde{\theta})-\lambda_2(\widetilde{\theta})). \tag{4.90}$$

Daí, sendo $\lambda_1(\widetilde{\theta})<\lambda_2(\widetilde{\theta})$, teremos

$$\frac{\partial f(0,\alpha)}{\partial\alpha}=0\Leftrightarrow\alpha\in\frac{\pi}{2}\mathbb{Z}, \tag{4.91}$$

$$\frac{\partial^2 f(0,\alpha)}{\partial\alpha^2}<0,\alpha\in\pi\mathbb{Z}, \tag{4.92}$$

$$\frac{\partial^2 f(0,\alpha)}{\partial\alpha^2}>0,\alpha\in\pi\mathbb{Z}+\frac{\pi}{2}. \tag{4.93}$$

Aplicamos então o teorema da função implícita para a função $\frac{\partial f}{\partial\alpha}$ no ponto $(0,0)$, teremos uma vizinhança de 0, tal que para todo t nesta vizinhança, $\alpha(t)$ é suave e $\alpha(0)=0$,

para cada t pequeno fixo

$$\frac{\partial^2 f}{\alpha^2}(t,\alpha(t))<0. \tag{4.94}$$

Olhando para a função $f(\alpha,t)=f_t(\alpha)$, sendo $f_t(\alpha)$ periódicca, de periodo 2π, os pontos $\alpha(t)$ para cada t fixo são pontos críticos de$f_t(\alpha)$. Daí, temos então que

$$f(t,\alpha(t))=\sup_{\alpha\in\mathbb{R}}f(t,\alpha)=\sup_{(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2}F(u_t,\lambda v+\mu w). \tag{4.95}$$

Como temos que

(4.96)
$$\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\sin^2(\alpha(t)) = \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\cos^2(\alpha(t))\frac{d}{dt}\,|_{t=0}(\sin^2(\alpha(t))a_t) = \frac{d}{dt}\,|_{t=0}(\sin(\alpha(t))\cos(\alpha(t))b_t) = 0$$

(Basta derivar normalmente e usar o fato que $b_0 = 0$ e $\alpha(0) = 0$). Consequentemente $|_{t=0}\,\frac{d}{dt}f(t,\alpha)$ existe e temos, usando (4.87), que

$$\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\,f(t,\alpha(t)) = \lambda_2(M,\widetilde{\theta})\left(-\frac{d}{dt}\,|_{t=t_0}\,c_t + \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\left(\int_M |u_t|dV_\theta\right)^{\frac{1}{n+1}}\right) =$$

$$= \lambda_2(M,\widetilde{\theta})(p-2)\left(-\int_M u^{p-3}hw^2dV_\theta + \int_M u^{p-1}hdV_\theta\right).$$

Sendo que

$$f(0,0) = \sup_{\alpha\in\mathbb{R}} f(t,\alpha) = \sup_{(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2} F(u,\lambda v+\mu w) \geq \mu_2(M,\theta) \tag{4.97}$$

e

$$f(t,\alpha(t)) \geq \mu_2(M,\theta). \tag{4.98}$$

Mas, por hipótese,

$$f(0,0) = F(u,w) = \mu_2(M,\theta). \tag{4.99}$$

Pela definição de $\mu_2(M,\theta)$, f admite um mínimo em $t=0$. Como $\mu_2(M,\theta) = \lambda_2(M,\widetilde{\theta}) \neq 0$ e $p>2$, temos então que

$$\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\,f(t,\alpha(t)) = \lambda_2(M,\widetilde{\theta})\left(-\frac{d}{dt}\,|_{t=0}\,c_t + \frac{d}{dt}\,|_{t=0}\left(\int_M |u_t|dV_\theta\right)^{\frac{1}{n+1}}\right) =$$

$$= \lambda_2(M,\widetilde{\theta})(p-2)\left(-\int_M u^{p-3}hw^2dV_\theta + \int_M u^{p-1}hdV_\theta\right) = 0.$$

Daí temos

$$\int_M u^{p-3}hw^2dV_\theta = \int_M u^{p-1}hdV_\theta. \tag{4.100}$$

Como h é arbitrário tal que o suporte compacto está contido em $M\backslash\{u^{-1}(0)\}$. Conseguimos que $u^{p-3}w^2 = u^{p-1}$ em $M\backslash\{u^{-1}(0)\}$. Como $u \in C^{0,\alpha}(M)$ e $u = a\sup(w,0) + b\sup(-w,0)$, concluímos que $u = |w|$ em M. ∎

Juntando os lemas acima concluímos o Teorema!

∎

4.5 Propriedades de $\mu_2(M,\theta)$ e Teorema Principal

Seja $\hat{\theta}$ a estrutura hermitiana padrão da esfera. Se $\widetilde{\theta} = u^{p-2}\theta$, então, como pode ser visto em [27]

$$\mu_1(M,\theta) = \inf_{u \in S_1^2(M)} \frac{\int_M (p\|\nabla_H u\|_\theta^2 + \rho u^2) dV_\theta}{\int_M u^p dV_\theta}, \tag{4.101}$$

onde ρ é a curvatura escalar pseudohermitianade (M,θ).
Podemos provar agora o seguinte resultado.

Teorema 4.5.1. *Seja (M,θ) uma variedade pseudohermitiana compacta, conexa e estritamente pseudoconvexa, então*

$$\mu_2(M,\theta) \geq 2^{\frac{1}{n+1}} \mu_1(M,\theta).$$

Demonstração: Tomemos $u > 0$ suave e $V \in Gr_2(C^\infty(M))$. Sem perda de generalidade, podemos supor

$$\int_M u^p dV_\theta = 1.$$

Se $\widetilde{\theta} = u^{p-2}\theta$, então existem um conjunto discreto $\lambda_1(\widetilde{\theta}) \leq \lambda_2(\widetilde{\theta}) \dots$ e correspondentes funções $v_1, v_2, \dots$ suaves, tal que

$$(p\Delta_b + \rho)v_i = \lambda_i u^{p-2} v_i,$$
$$\int_M u^{p-2} v_i v_j dV_\theta = 0 \quad se \quad \lambda_i \neq \lambda_j.$$

Como já vimos em um dos passos da demonstração do teorema 4.4.1, concluímos de forma análoga que $\lambda_1 < \lambda_2$, $v_1 > 0$ e v_2 muda de sinal. Definimos $w_+ := a_+ \sup(0, v_2)$ e $w_- := a_- \sup(0, -v_2)$, onde escolhemos $a_+, a_- > 0$ tal que

$$\int_M u^{p-2} w_-^2 dV_\theta = \int_M u^{p-2} w_+^2 dV_\theta = 1.$$

Tomamos $\Omega_- = \{v_2 < 0\}$ e $\Omega_+ = \{v_2 \geq 0\}$. Então aplicando a desigualdade de Hölder

$$2 = \int_M u^{p-2} w_-^2 dV_\theta + \int_M u^{p-2} w_+^2 dV_\theta \leq$$

$$\leq \left(\int_{\Omega_-} u^p dV_\theta\right)^{\frac{p-2}{p}} \left(\int_M w_-^p dV_\theta\right)^{\frac{2}{p}} + \left(\int_{\Omega_+} u^p dV_\theta\right)^{\frac{p-2}{p}} \left(\int_M w_+^p dV_\theta\right)^{\frac{2}{p}}.$$

Multiplicamos ambos os lados acima por $\mu_1(M,\theta)$ e usando (4.101) teremos que

$$2\mu_1(M,\theta) \leq \left(\int_{\Omega_-} u^p dV_\theta\right)^{\frac{p-2}{p}} \int_M \mathfrak{L}_\theta w_- w_- dV_\theta + \left(\int_{\Omega_+} u^p dV_\theta\right)^{\frac{p-2}{p}} \int_M \mathfrak{L}_\theta w_+ w_+ dV_\theta.$$

Uma vez que w_- resp. $w - +$ são múltiplos de v_2 em Ω_- resp. Ω_+, eles satisfazem a mesma equação de v_2. Consequentemente temos

$$2 \leq \mu_1(M,\theta)^{-1}\lambda_2 \left(\int_{\Omega_-} u^p dV_\theta\right)^{\frac{p-2}{p}} \int_M u^{p-2} w_-^2 dV_\theta + \mu_1(M,\theta)^{-1}\lambda_2 \left(\int_{\Omega_+} u^p dV_\theta\right)^{\frac{p-2}{p}} \int_M u^{p-2} w_+^2 dV_\theta.$$

Agora, para todo número real não-negativo $a, b \geq 0$, temos

$$a + b \leq 2^{\frac{2}{p}} (a^{\frac{p}{p-2}} + b^{\frac{p}{p-2}})^{\frac{p-2}{p}}.$$

Aplicando a desigualdade acima com $a = \left(\int_{\Omega_-} u^p dV_\theta\right)^{\frac{p-2}{p}}$ e $b = \left(\int_{\Omega_+} u^p dV_\theta\right)^{\frac{p-2}{p}}$ temos que

$$\left(\int_{\Omega_-} u^p dV_\theta\right)^{\frac{p-2}{p}} + \left(\int_{\Omega_+} u^p dV_\theta\right)^{\frac{p-2}{p}} \leq$$

$$\leq 2^{\frac{2}{p}} \left(\int_{\Omega_-} u^p dV_\theta + \int_{\Omega_+} u^p dV_\theta\right)^{\frac{p-2}{p}}.$$

Daí, temos que

$$2 \leq \mu_1(M,\theta)\lambda_2 2^{\frac{2}{p}} \left(\int_{\Omega_-} u^p dV_\theta + \int_{\Omega_+} u^p dV_\theta\right)^{\frac{p-2}{p}}.$$

Como M é conexo e $\int_M u^p dV_\theta = 1$, temos que

$$\lambda_2(\widetilde{\theta}) \geq 2^{\frac{1}{n+1}} \mu_1(M,\theta).$$

Concluímos então que

$$\mu_2(M,\theta) \geq 2^{\frac{1}{n+1}} \mu_1(M,\theta).$$

∎

Seja $\hat{\theta}$ a estrutura hermitiana padrão da esfera $\mathbb{S}^{2n+1}$. Se $\widetilde{\theta} = u^{p-2}\hat{\theta}$, então, como pode ser visto em [27]

$$\mu_1(\mathbb{S}^{2n+1}) = \inf_{u \in S_1^2(M)} \frac{\int_{\mathbb{S}^{2n+1}} (p\|\nabla_H u\|_\theta^2 + \rho_n u^2) dV_{\hat{\theta}}}{\int_{\mathbb{S}^{2n+1}} u^p dV_{\hat{\theta}}},$$

onde $\rho_n = \frac{n(n+1)}{2}$ é a curvatura escalar pseudohermitiana de $(\mathbb{S}^{2n+1}, \hat{\theta})$. Então aplicando o teorema 4.5.1 temos

$$\mu_2(\mathbb{S}^{2n+1}) \geq 2^{\frac{1}{n+1}} \mu_1(\mathbb{S}^{2n+1}).$$

Provaremos, a seguir, a existência de uma cota para $\mu_2(M,\theta)$ que será de extrema importância para o resultado principal da tese.

Teorema 4.5.2. *Seja (M,θ) uma variedade CR pseudohermitiana compacta, conexa e estritamente pseudoconvexa , com dimensão CR igual $2n+1$ e $n \geq 2$. Se $\mu_1(M,\theta) > 0$, então*

$$\mu_2(M,\theta) \leq (\mu_1(M,\theta)^{n+1} + \mu_1(\mathbb{S}^{2n+1})^{n+1})^{\frac{1}{n+1}}$$

Demonstração: Suponha que (z,t) são coordenadas normais pseudohermitianas para a forma hermitiana θ em uma vizinhança de $q \in M$, definida por $|w| < 2k$ para alguma $k > 0$. Definimos a função teste

$$v_\varepsilon = \psi(w)\Phi^\varepsilon(z,t),$$

onde $\Phi(z,t) = \varepsilon^n|w + i\varepsilon|^{-n}$, $w = t + i|z|^2$, e $\psi \in C_0^\infty(M)$ é suportada no conjunto $\{|w| < 2k\}$, e $\psi(w) = 1$ para $|w| < k$. Nomalizamos v_ε tal que $\int_M v_\varepsilon^p dV_\theta = 1$, então, como está provado em [29], existe $C(M) \geq 0$ tal que $\lim_{\varepsilon\to 0} Y_\theta(v_\varepsilon) = \mu_1(M,\theta)$ e

$$Y_\theta(v_\varepsilon) = \begin{cases} \mu_1(M,\theta) - C(M)\varepsilon + O(\varepsilon^5) & \text{se } n \geq 3 \\ \mu_1(M,\theta) - C(M)\varepsilon^4\log(\frac{1}{\varepsilon}) + O(\varepsilon^4) & \text{se } n = 2 \end{cases}$$

Pelos cálculos, que podem ser vistos em [29], concluímos que

$$\int_M v_\varepsilon dV_\theta = C_\varepsilon \int_{\mathbb{H}^n} |w+i|^{-n}\left(\varepsilon^{n+2} - \frac{1}{90}\varepsilon^4(D_1 + D_2)\right) dV_\Theta + O(\varepsilon^2) \tag{4.102}$$

e

$$\int_M v_\varepsilon^{p-1} dV_\theta = C_\varepsilon \int_{\mathbb{H}^n} |w+i|^{-n-2}\left(\varepsilon^{n} - \frac{1}{90}\varepsilon^4(D_1 + D_2)\right) dV_\Theta + O(\varepsilon^2) \tag{4.103}$$

onde D_1 e D_2 são funções complexas, $C_\varepsilon > 0$ com $\lim_{\varepsilon\to 0} C_\varepsilon = Z \neq 0$ e todas as integrais acima são finitas. Definimos as seguintes funções

$$u_\varepsilon = Y(v_\varepsilon)^{\frac{1}{p-2}} v_\varepsilon + \mu_1(M,\theta)^{\frac{1}{p-2}} v. \tag{4.104}$$

Permitimos derivar estimativas para $\mu_2(M,\theta)$ através de $F(u_\varepsilon, \lambda v_\varepsilon + \mu v)$ com $(\lambda,\mu) \in \mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}$. Onde v é uma função (como provado em [27]) que satisfaz $\mathfrak{L}_\theta v = \mu_1(M,\theta)v^{p-1}$ e $\int_M v^p dV_\theta = 1$. Note que

$$F(u_\varepsilon, \lambda v_\varepsilon + \mu v) = \frac{\int_M p\|\lambda\nabla_H v_\varepsilon + \mu\nabla_H v\|_\theta^2 + \rho(\lambda v_\epsilon + \mu v)^2 dV_\theta}{\int_M u_\varepsilon^{p-2}(\lambda v_\varepsilon + \mu v)^2 dV_\theta}\left(\int_M .u_\varepsilon^p dV_\theta\right)^{\frac{1}{n+1}},$$

Usando a definição de u_ε e que $\int_M v^p dV_\theta = \int_M v_\varepsilon^p dV_\theta = 1$ junto com $\mathfrak{L}_\theta v = \mu_1(M,\theta)v^{p-1}$, chegamos que

$$F(u_\varepsilon, \lambda v_\varepsilon + \mu v) = \frac{\lambda^2 Y(v_\varepsilon) + \mu^2 \mu_1(M,\theta) + 2\lambda\mu\mu_1(M,\theta)\int_M v^{p-2} v v_\varepsilon dV_\theta}{\lambda^2 \int_M u_\varepsilon^{p-2} v_\varepsilon^2 dV_\theta + \mu^2 \int_M u_\varepsilon^{p-2} v^2 dV_\theta + 2\lambda\mu \int_M u_\varepsilon^{p-2} v.v_\varepsilon dV_\theta}\left(\int_M u_\varepsilon^p dV_\theta\right)^{\frac{1}{n+1}}.$$

Analisando as estimativas para o denominador acima, temos

$$\lambda^2 \int_M u_\varepsilon^{p-2} v_\varepsilon^2 dV_\theta + \mu^2 \int_M u_\varepsilon^{p-2} v^2 dV_\theta + 2\lambda\mu \int_M u_\varepsilon^{p-2} v.v_\varepsilon dV_\theta \geq$$

$$\geq \lambda_2 Y(v_\varepsilon) \int_M v_\epsilon^p dV_\theta + \mu^2 \mu_1(M,\theta) \int_M v^p dV_\theta + 2\lambda\mu \int_M u_\varepsilon v v_\varepsilon dV_\theta =$$

$$= \lambda^2 Y(v_\varepsilon) + \mu^2 \mu_1(M,\theta) + 2\lambda\mu \int_M u_\varepsilon v v_\varepsilon dV_\theta.$$

Se $\lambda\mu \geq 0$, temos que

$$2\lambda\mu \int_M u_\varepsilon^{p-2} v v_\varepsilon dV_\theta \geq 2\lambda\mu\mu_1(M,\theta) \int_M v^{p-2} v v_\varepsilon dV_\theta,$$

implicando que

$$\frac{\lambda^2 Y(v_\varepsilon) + \mu^2 \mu_1(M,\theta) + 2\lambda\mu\mu_1(M,\theta)\int_M v^{p-2} v v_\varepsilon dV_\theta}{\lambda^2 \int_M u_\varepsilon^{p-2} v_\varepsilon^2 dV_\theta + \mu^2 \int_M u_\varepsilon^{p-2} v^2 dV_\theta + 2\lambda\mu \int_M u_\varepsilon^{p-2} v.v_\varepsilon dV_\theta} \leq 1.$$

No caso que $\lambda\mu < 0$ e sendo $p-2 \in (0,1)$, obtemos

$$u_\varepsilon \leq Y(v_\varepsilon) v_\varepsilon^{p-2} + \mu_1(M,\theta) v^{p-2}.$$

Assim,

$$\lambda^2 \int_M u_\varepsilon^{p-2} v_\varepsilon^2 dV_\theta + \mu^2 \int_M u_\varepsilon^{p-2} v^2 dV_\theta + 2\lambda\mu \int_M u_\varepsilon^{p-2} v.v_\varepsilon dV_\theta \geq$$

$$\geq \lambda^2 Y(v_\varepsilon) + \mu^2 \mu_1(M,\theta) + 2\lambda\mu \left(\mu_1(M,\theta) \int_M v^{p-1} v_\varepsilon dV_\theta + Y(v_\varepsilon) \int_M v v_\varepsilon^{p-1} dV_\theta\right).$$

Então, podemos tomar um $C > 0$ tal que

$$\lambda^2 \int_M u_\varepsilon^{p-2} v_\varepsilon^2 dV_\theta + \mu^2 \int_M u_\varepsilon^{p-2} v^2 dV_\theta + 2\lambda\mu \int_M u_\varepsilon^{p-2} v.v_\varepsilon dV_\theta \geq$$

$$\geq \lambda^2 Y(v_\varepsilon) + \mu^2 \mu_1(M,\theta) - C\left(\int_M v^{p-1} v_\varepsilon dV_\theta + \int_M v v_\varepsilon^{p-1} dV_\theta\right).$$

Utilizando (4.102) e (4.103), concluímos que

$$\lambda^2\int_M u_\varepsilon^{p-2}v_\varepsilon^2 dV_\theta+\mu^2\int_M u_\varepsilon^{p-2}v^2dV_\theta+2\lambda\mu\int_M u_\varepsilon^{p-2}v.v_\varepsilon dV_\theta\geq$$
$$\geq\lambda^2 Y(v_\varepsilon)+\mu^2\mu_1(M,\theta)+o(\varepsilon).$$

Consequentemente, temos que

$$\frac{\lambda^2Y(v_\varepsilon)+\mu^2\mu_1(M,\theta)+2\lambda\mu\mu_1(M,\theta)\int_M v^{p-2}vv_\varepsilon dV_\theta}{\lambda^2\int_M u_\varepsilon^{p-2}v_\varepsilon^2dV_\theta+\mu^2\int_M u_\varepsilon^{p-2}v^2dV_\theta+2\lambda\mu\int_M u_\varepsilon^{p-2}v.v_\varepsilon dV_\theta}\leq$$

$$\leq\frac{\lambda^2Y(v_\varepsilon)+\mu^2\mu_1(M,\theta)+2\lambda\mu\mu_1(M,\theta)\int_M v^{p-2}vv_\varepsilon dV_\theta}{\lambda^2Y(v_\varepsilon)+\mu^2\mu_1(M,\theta)+o(\varepsilon)}=1+K(\varepsilon).$$

Onde facilmente podemos concluir que $K(\varepsilon)=o(\varepsilon)$. Daí, temos que

$$\sup_{(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}}\frac{\lambda^2Y(v_\varepsilon)+\mu^2\mu_1(M,\theta)+2\lambda\mu\mu_1(M,\theta)\int_M v^{p-2}vv_\varepsilon dV_\theta}{\lambda^2\int_M u_\varepsilon^{p-2}v_\varepsilon^2dV_\theta+\mu^2\int_M u_\varepsilon^{p-2}v^2dV_\theta+2\lambda\mu\int_M u_\varepsilon^{p-2}v.v_\varepsilon dV_\theta}\leq 1+o(\varepsilon). \tag{4.105}$$

Aplicando o seguinte resultado que diz que para todo $\alpha>0$ existe $C>0$

$$|a+b|^\alpha\leq a^\alpha+b^\alpha+C(a^{\alpha-1}b+ab^{\alpha-1}),\forall a,b>0. \tag{4.106}$$

Sendo

$$u_\varepsilon=Y(v_\varepsilon)^{\frac{1}{p-2}}v_\varepsilon+\mu_1(M,\theta)^{\frac{1}{p-2}}v,$$

e tomando $a=Y(v_\varepsilon)^{\frac{1}{p-2}}v_\varepsilon$, $b=\mu_1(M,\theta)^{\frac{1}{p-2}}v$ e $\alpha=p$, teremos

$$\int_M u_\varepsilon^p dV_\theta\leq\mu_1(M,\theta)^{\frac{p}{p-2}}\int_M v^pdV_\theta+Y(v_\varepsilon)^{\frac{p}{p-2}}\int_M v_\varepsilon^pdV_\theta+C\left(\int_M v^{p-1}v_\varepsilon+vv_\varepsilon^{p-1}dV_\theta\right).$$

Utilizando novamente (4.102) e (4.103), concluímos

$$\int_M u_\varepsilon^pdV_\theta\leq\mu_1(M,\theta)^{\frac{p}{p-2}}+Y(v_\varepsilon)^{\frac{p}{p-2}}+o(\varepsilon).$$

Resultando que

$$\left(\int_M u_\varepsilon^pdV_\theta\right)^{\frac{1}{n+1}}\leq(\mu_1(M,\theta)^{n+1}+Y(v_\varepsilon)^{n+1})^{\frac{1}{n+1}}+o(\varepsilon). \tag{4.107}$$

Utilizando (4.105) e (4.107), chegamos em

$$\mu_2(M,\theta)\leq\sup_{(\lambda,\mu)\in\mathbb{R}^2\backslash\{(0,0)\}}F(u_\varepsilon,\lambda v_\varepsilon+\mu v)\leq$$

$$\leq (1+o(\varepsilon))((\mu_1(M,\theta)^{n+1} + Y(v_\varepsilon)^{n+1})^{\frac{1}{n+1}} + o(\varepsilon)).$$

Finalmente, ao tomarmos $\varepsilon \to 0$, chegamos em

$$\mu_2(M,\theta) \leq (\mu_1(M,\theta)^{n+1} + \mu_1(\mathbb{S}^{2n+1})^{n+1})^{\frac{1}{n+1}}.$$

∎

Como consequência do teorema 4.5.2, temos o seguinte corolário.

Corolario 4.5.1. *Seja* $(\mathbb{S}^{2n+1}, \hat{\theta})$*, onde* $\hat{\theta}$ *é a estrutura pseudohermitiana canônica da esfera. Então temos*

$$\mu_2(\mathbb{S}^{2n+1}) = 2^{\frac{1}{n+1}}\mu_1(\mathbb{S}^{2n+1}). \tag{4.108}$$

Demonstração: Aplicando o teorema 4.5.2 para $M = \mathbb{S}^{2n+1}$ concluímos que

$$\mu_2(\mathbb{S}^{2n+1}) \leq 2^{\frac{1}{n+1}}\mu_1(\mathbb{S}^{2n+1}).$$

Como já tínhamos que

$$\mu_2(\mathbb{S}^{2n+1}) \geq 2^{\frac{1}{n+1}}\mu_1(\mathbb{S}^{2n+1}),$$

concluímos a igualdade desejada. ∎

Agora podemos provar o teorema principal da tese.

Teorema 4.5.3. *Seja* (M,θ) *uma variedade CR pseudohermitiana compacta, conexa e estritamente pseudoconvexa, com dimensão CR* $2n+1$ *e* $n \geq 2$ *com* $\mu_1(M,\theta) > 0$*. Então* $\mu_2(M,\theta) \leq \mu_2(\mathbb{S}^{2n+1})$*. Além do mais, a igualdade ocorre se, e somente se,* (M,θ) *é localmente CR equivalente a* $\mathbb{S}^{2n+1}$ *com a estrutura canônica* $\hat{\theta}$*.*

Demonstração:

Utilizando o teorema 4.5.2 e o corolário 4.5.1 temos que

$$\mu_2(M,\theta) \leq 2^{\frac{1}{n+1}}\mu_1(\mathbb{S}^{2n+1}) = \mu_2(\mathbb{S}^{2n+1}),$$

o que concluí que $\mu_2(M,\theta) \leq \mu_2(\mathbb{S}^{2n+1})$.

Suponha agora que $\mu_2(M,\theta) = \mu_2(\mathbb{S}^{2n+1})$. Aplicando novamente o teorema 4.5.2, teremos

$$\mu_2(\mathbb{S}^{2n+1}) \leq (\mu_1(M,\theta)^{n+1} + \mu_1(\mathbb{S}^{2n+1})^{n+1})^{\frac{1}{n+1}}.$$

Consequentemente $\mu_1(\mathbb{S}^{2n+1}) \leq \mu_1(M,\theta)$, o que concluí que $\mu_1(\mathbb{S}^{2n+1}) = \mu_1(M,\theta)$. Temos então que M e $\mathbb{S}^{2n+1}$ são localmente CR equivalentes.

Agora suponha que M é localmente CR equivalente a esfera, então temos que $\mu_1(\mathbb{S}^{2n+1}) = \mu_1(M,\theta)$. Utilizando o teorema 4.5.2 junto com o teorema 4.5.1, concluímos que

$$2^{\frac{1}{n+1}}\mu_1(M,\theta) \leq \mu_2(M,\theta) \leq 2^{\frac{1}{n+1}}\mu_1(\mathbb{S}^{2n+1}).$$

Aplicando o corolário 4.5.1, chegamos que $\mu_2(\mathbb{S}^{2n+1}) = \mu_2(M,\theta)$.

∎

4.6 Existência de um minizador para $\mu_2(M,\theta)$

Teorema 4.6.1. *Seja (M,θ) uma variedade CR pseudohertiana compacta, conexa e estritamente pseudoconvexa , com dimensão CR igual a $2n+1$ e $n \geq 2$ com $\mu_1(M,\theta) > 0$. Suponha também que exista $B_0(M,\theta) > 0$ tal que*

$$\mu(\mathbb{S}^{2n+1}) = \inf_{u\in S_1^2(M)\setminus\{0\}} \frac{\int_M (p\|\nabla_H u\|_\theta^2 + B_0(M,\theta)u^2)dV_\theta}{(\int_M u^p dV_\theta)^{\frac{2}{p}}}. \tag{4.109}$$

Então, se $\mu_2(M,\theta) < \mu(\mathbb{S}^{2n+1})$, existe uma estrutura pseudohermitiana $\widetilde{\theta}$, da mesma classe conforme de θ, que minimiza $\mu_2(M,\theta)$. Com $\mu(\mathbb{S}^{2n+1})$ sendo primeiro invariante de Yamabe CR da esfera com relação a estrutura pseudohermitiana canônica $\hat{\theta}$.

Demonstração:

Nós estudaremos uma sequência de estruturas pseudohermitianas $(\widetilde{\theta}_m)_m = (u_m^{p-2}\theta)_m$ ($u_m > 0$, $u_m \in C^\infty(M)$) que minimiza o ínfimo na definição de $\mu_2(M,\theta)$, temos uma sequencia de estruturas tal que

$$\lim_m \lambda_2(\theta_m)V_{\theta_m}^{\frac{1}{n+1}} = \mu_2(M,\theta).$$

Sem perda de generalidade, podemos assumir que $V_{\theta_m} = 1$, significa que

$$\int_M u_m^p dV_\theta = 1. \tag{4.110}$$

Em particular, a sequência $(u_m)_m$ é limitada em $L^p(M)$, então existe $u \in L^p(M)$, $u \geq 0$ tal que $u_m \rightharpoonup u$ fracamente em $L^p(M)$. Provaremos que $u \not\equiv 0$ e que a estrutura pseudohermitiana generalizada $u^{p-2}\theta$ minimiza $\mu_2(M,\theta)$. Proposição 4.4.1 implica a existência de v_m, $w_m \in C^3(M)$, $v_m \geq 0$ tal que

$$\mathfrak{L}_\theta v_m = \lambda_{1,m} u_m^{p-2} v_m \tag{4.111}$$

e

$$\mathfrak{L}_\theta w_m = \lambda_{2,m} u_m^{p-2} w_m. \tag{4.112}$$

Cujo $\lambda_{i,m} = \lambda_i(\theta_m)$ e tal que

$$\int_M u_m^{p-2} v_m^2 dV_\theta = \int_M u_m^{p-2} v_m^2 dV_\theta = 1 \; e \int_M u_m^{p-2} v_m w_m dV_\theta = 0. \tag{4.113}$$

Com essas notações e por (4.110),

$$\lim_m \lambda_{2,m} = \mu_2(M,\theta).$$

Além do mais, usando os mesmo argumentos da demontração do teorema 4.4.1, temos $v_m > 0$, w_m muda de sinal e $\lambda_{1,m} < \lambda_{2,m}$. Podemos achar v, $w \in S_1^2(M)$, $v \geq 0$ tal que v_m (resp.w_m) tende a v (resp. w) fracamente em $S_1^2(M)$. Junto com a convergência fraca de $(u_m)_m$ para u em $L^p(M)$, conseguimo que, no sentido de distribuição,

$$\mathfrak{L}_\theta v = \hat{\mu}_1 u^{p-2} v \tag{4.114}$$

e

$$\mathfrak{L}_\theta w = \mu_2(M,\theta) u^{p-2} w. \tag{4.115}$$

No qual $\hat{\mu}_1 = \lim_m \lambda_{1,m} \leq \mu_2(M,\theta)$.

Levaremos um certo esforço para provar a seguinte afirmação.

Afirmação:*As funções $u^{p-2}v$ e $u^{p-2}w$ são linearmente independentes.*
Uma vez que esteja provado, temos que $span(v,w) \in Gr_2^u(S_1^2(M))$, isto implica que

$$\sup_{(\lambda,\mu)\neq(0,0)} F(u, \lambda v + \mu w) = \mu_2(M,\theta).$$

Consequentemente, pelas equações, (4.113) e (4.114), a estrutura generalizada $u^{p-2}\theta$ minimiza $\mu_2(M,\theta)$, o que prova o teorema.
O primeiro passo na prova da afirmação é uma estimativa que evita concentração de w_m e v_m.

Passo 1. *Seja $x \in M$ e $\varepsilon \in (0, \frac{p-2}{2})$. Escolhemos uma função teste $\eta \in C^\infty(M)$ tal que $0 \leq \eta \leq 1$, $\eta(B_x(\delta)) = 1$ (onde δ é um úmero pequeno) e $\eta(M \backslash B_x(\delta)) \equiv 0$, $\|\nabla_H \eta\|_\theta \leq \frac{1}{2}$.*

Definimos $W_m = \eta |w_m|^{\varepsilon} w_m$. *Então, temos*
(4.116)
$$\left(\int_M |W_m|^p dV_\theta\right) \leq \mu_2(M,\theta)(1-\alpha_\varepsilon)^{-1}\mu_1(\mathbb{S}^{2n+1})^{-1}\left(\int_{B_x(2\delta)} u_m^p\right)^{\frac{1}{n+1}}\left(\int_M |W_m|^p dV_\theta\right)^{\frac{2}{p}} + C_\delta.$$

No qual C_δ *é uma constante que depende de* δ *mas não de* ε *e* $\lim_{\varepsilon\to 0}\alpha_\varepsilon = 0$. *Além do mais,a mesma conclusão é verdade com* $V_m = \eta|v_m|^{\varepsilon} v_m$ *no lugar de* W_m, *consequentemente teremos* $\mu_1(M,\theta)$ *no lugar de* $\mu_2(M,\theta)$. .

Demonstração:

A prova usa métodos clássicos. Explicaremos a prova de W_m. A prova para V_m usa exatamente os mesmos argumentos.

Primeiramente, diferenciamos a definição de W_m, usando o mesmo procendimento da demonstração do lema 4.4.1, obtemos

$$\|\nabla_H W_m\|_\theta \geq \|\nabla_H |w_m|^{\varepsilon} w_m\|_\theta^2 \eta^2 - (2\|\nabla_H \eta\|_\theta |w_m|^{1+\varepsilon})\left(\|\nabla_H(|w_m|^{\varepsilon} w_m)\|_\theta \eta\right) + \|\nabla_H \eta\|_\theta^2 |w_m|^{2+2\varepsilon}$$

$$\geq \|\nabla_H |w_m|^{\varepsilon} w_m\|_\theta^2 \eta^2 - \left(\frac{1}{2}\|\nabla_H(|w_m|^{\varepsilon} w_m)\|_\theta^2 \eta^2 + 2\|\nabla_H\eta\|_\theta^2 |w_m|^{2+2\varepsilon}\right) + \|\nabla_H \eta\|_\theta^2 |w_m|^{2+2\varepsilon}.$$

Isto leva a

$$\eta^2 \|\nabla_H(|w_m|^{\varepsilon} w_m)\|_\theta^2 \leq 2\|\nabla_H W_m\|_\theta^2 + 2\|\nabla_H \eta\|_\theta^2 |w_m|^{2+2\varepsilon}. \tag{4.117}$$

Agora, queremos derivar uma cota inferior para

$$(\nabla_H(\eta^2 |w_m|^{2\varepsilon} w_m), \nabla_H w_m) = \|\nabla_H W_m\|_\theta^2 - \|\nabla_H(\eta|w_m|^{\varepsilon}))\|^2 |w_m|^2. \tag{4.118}$$

Para o segundo termo do lado direito da igualdade (4.118) temos a cota

$$\|\nabla_H(\eta|w_m|^{\varepsilon}))\|^2|w_m|^2 = \|\nabla_H\eta\|_\theta^2|w_m|^{2+2\varepsilon} + 2(\nabla_H\eta, \nabla_H|w_m|^{\varepsilon})\eta|w_m|^{2+\varepsilon} + \eta^2\|\nabla_H(|w_m|^{\varepsilon}))\|_\theta^2 w_m^2$$

$$\leq 2\|\nabla_H\eta\|_\theta^2 |w_m|^{2+2\varepsilon} + 2\eta^2\|\nabla_H(|w_m|^{\varepsilon}))\|_\theta^2 w_m^2$$

$$\leq 2\|\nabla_H\eta\|_\theta^2 |w_m|^{2+2\varepsilon} + \frac{2\eta^2\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2}\|\nabla_H(|w_m|^{\varepsilon} w_m)\|_\theta^2$$

$$\leq \left(2 + \frac{4\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2}\right)\|\nabla_H\eta\|_\theta^2|w_m|^{2+2\varepsilon} + \frac{4\varepsilon^2}{(1+\varepsilon)^2}\|\nabla_H W_m\|_\theta^2.$$

Usando (4.117) na ultima linha. Voltando para (4.118), obtemos que

$$(\nabla_H(\eta^2|w_m|^{2\varepsilon}w_m), \nabla_H w_m) \geq (1-\alpha_\varepsilon)\|\nabla_H W_m\|_\theta^2 - C\|\nabla_H\eta\|_\theta^2|w_m|^{2+2\varepsilon},$$

com $\alpha_\varepsilon \to 0$ quando $\varepsilon \to 0$ e $C > 0$ uma constante independente de ε. Essa relação mostra que

$$\int_M \eta^2|w_m|^{2\varepsilon}w_m\mathfrak{L}_\theta(w_m)dV_\theta \geq (1-\alpha_\varepsilon)\int_M p\|\nabla_H W_m\|_\theta^2 dV_\theta - C\int_M \|\nabla_H\eta\|_\theta^2|w_m|^{2+2\varepsilon}dV_\theta$$

$$+\min\rho\int_M W_m^2 dV_\theta.$$

Agora, sendo $\varepsilon < \frac{p-2}{2}$, a sequência $(w_m)_m$ é limitada em $L^{2+2\varepsilon(M)}$ (e consequentemente a sequência $(W_m)_m$ é limitada em $L^2(M)$). Como consequência, existe uma constante C_δ, possivelmente dependendo de δ mas não de ε, tal que, ao aplicamos a hipótese (4.109) do teorema, conseguimos

$$\text{(4.119)}\quad \int_M \eta^2|w_m|^{2\varepsilon}w_m\mathfrak{L}_\theta(w_m)dV_\theta \geq (1-\alpha_\varepsilon)\int_M (p\|\nabla_H W_m\|_\theta^2 + B_0(M,\theta)W_m^2)dV_\theta - C_\delta.$$

Usando a equação (4.112) no lado esquerdo de (4.119) e aplicando a hipótese (4.109) do teorema no lado direito, conseguimos que

$$\mu_2(M,\theta)\int_M u_m^{p-2}W_m^2 dV_\theta \geq (1-\alpha_\varepsilon)\mu_1(\mathbb{S}^{2n+1})\left(\int_M |W_m|^p dV_\theta\right)^{\frac{2}{p}} + C_\delta.$$

Pela desigualdade de Hölder, obtemos

$$\left(\int_M |W_m|^p dV_\theta\right)^{\frac{2}{p}}$$

$$\leq \mu_2(M,\theta)(1-\alpha_\varepsilon)^{-1}\mu_1(\mathbb{S}^{2n+1})^{-1}\left(\int_{B_x(2\delta)} u_m^p\right)^{\frac{1}{n+1}}\left(\int_M |W_m|^p dV_\theta\right)^{\frac{2}{p}} + C_\delta.$$

Isto finaliza a prova do passo. ∎

Passo 2. *Se $\mu_2(M,\theta) < \mu_1(\mathbb{S}^{2n+1})$ então a estrutura generalizada $u^{p-2}\theta$ minimiza $\mu_2(M,\theta)$.*

Demonstração: De (4.116) e o fato que $\mu_2(M,\theta) < \mu_1(\mathbb{S}^{2n+1})$, conseguimos que para ε sificientemente pequeno, existe um $0 < K < 1$, tal que

$$\left(\int_M |W_m|^p dV_\theta\right)^{\frac{2}{p}} \leq K\left(\int_{B_x(2\delta)} u_m^p\right)^{\frac{1}{n+1}}\left(\int_M |W_m|^p dV_\theta\right)^{\frac{2}{p}} + C_\delta.$$

Sendo $\int_{B_x(2\delta)} u_m^p \leq 1$, a sequência $\int_M |W_m|^p dV_\theta$ é limitada. Isso implica que $(w_m)_m$ é limitado em $L^{p+\varepsilon}(B_x(\delta))$, sendo x arbitrário, $(w_m)_m$ é limitado em $L^{p+\varepsilon}(M)$. Convergência fraca $w_m \rightharpoonup w$ em $S_1^2(M)$ implica em $w_m \to w$ forte em $L^{p-\varepsilon}(M)$ (a menos de subsequência). A desigualdade de Hölder para $q = \frac{p+\varepsilon}{\varepsilon}$, tendo $q^* = \frac{p+\varepsilon}{p}$, implica que, passando a subsequência, $w_m \to w$ fortemente em $L^p(M)$. Analogamente, conluímos que

$v_m \to v$ fortemente em $L^p(M)$. Isto implica que podemos passar o limite em (4.113) e consequentemente temos que $u^{\frac{p-2}{2}}v$ e $u^{\frac{p-2}{2}}w$ são linearmente independentes. ∎

Finalizando a prova do teorema 4.6.1. ∎

Referências Bibliográficas

[1] T. Aubin - *Equations différentielles non linéaires et problème de Yamabe concernant la courbure scalaire*, J. Math. Pure Appl. 55 (1976) 269-296.

[2] B. Ammann, E. Humbert - *The second Yamabe invariant*, Journal of Functional Analysis. 235 (2006) 377-412

[3] E. Barletta and S. Dragomir - *On the spectrum of a strictly pseudoconvex CR manifold*, Abhandlungen Math. Sem. Univ. Hamburg, 67(1997), 143-153

[4] E. Barletta and S. Dragomir - *Pseudohermitian immersions, pseudo-Einstein structures, and the Lee class of a CR manifold*, Kodai Math. J., 19(1996), 62-86.

[5] A. L. Besse - *Einstein Manifolds*, Spring-Verlag, Berlin, 1987.

[6] A. Boggess - *CR manifolds and the tangential Cauchy-Riemann complex*, Studies in Advanced Math., CRC Press, Inc., Boca Raton-Ann Arbor-Boston-London, 1991.

[7] T. P. Branson, A. R. Gover - *Variational status of a class of fully nonlinear curvature prescription problems*, Calc. Var. Partial Differential Equations 32 (2008), no. 2, 253-262.

[8] E. Cartan- *Sur equivalence pseudo-conforme des hypersurfaces de espace de deux variables complex I*, Ann. Mat. 11 (1932) 17-90; II, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa 1 (1932) 333-354.

[9] L. Caffarelli, L. Nirenberg, and J. Spruck- *The Dirichlet problem for nonlinear secondorder elliptic equations, III: Functions of the eigenvalues of the Hessian*, Acta Math. 155 (1985), 261-301.

[10] A. Chang, M. Gursky, P. Yang - *An a priori estimate for a fully nonlinear equation on four-manifolds*, J. Anal. Math, 87 (2002) 151-186.

[11] S. S. Chern, J. K. Moser - *Real hypersurfaces in complex manifolds*, Ann. of Math. (2) 133 (1974) 219-271.

[12] S. Dragomir - *Pseudohermitian immersions between strictly pseudoconvex CR manifolds*, American J. Math., (1)117(1995), 169-202.

[13] S. Dragomir, G. Tomassini - *Differential Geometry and Analysis on CR Manifolds*, Vol. 246 of Progress in Mathematics, Birkhauser, Boston, 2006.

[14] L.P. Eisenhart - *Riemannian geometry*, Princeton Univ. Press, Princeton, 1966.

[15] C. Fefferman - *Monge-Ampère equations, the Bergman kernel, and geometry of pseudoconvex domains*, Ann. of Math. (2) 103 (1976), 395-416; correction, 104 (1976), 393-394.

[16] G.B. Folland and E.M. Stein - *Estimates for the $\overline{\partial}_b$-complex and analysis on the Heisenberg group*, Comm. Pure Appl. Math., 27(1974), 429-522.

[17] N. Gamara - *The CR Yamabe conjecture: the case* $n = 1$, J. Eur. Math. Soc. (JEMS) 3 (2001) 105-137.

[18] N. Gamara, R. Yacoub - *CR Yamabe conjecture: the conformally flat case*, Pacific J. Math. 201 (2001) 121-175.

[19] L. Garding - *An inequality for hyperbolic polynomials*, J. Math. Mech. 8 (1959) 957-965.

[20] Y. Ge, G. Wang - *On a fully nonlinear Yamabe problem*, Ann. Sci. Ecole Norm. Sup. (4) 39 (2006) 569-598.

[21] P. Guan, G. Wang - *A fully nonlinear conformal flow on locally conformally flat manifolds*, J. Reine Angew. Math. 557 (2003) 219-238.

[22] P. Guan, J. Viaclovsky, G. Wang - *Some properties of the Schouten tensor and applications to conformal geometry* Trans. Amer. Math. Soc. 355 (2003), no. 3, 925-933.

[23] M. Gursky, J. Viaclovsky - *Prescribing symmetric functions of the eigenvalues of the Ricci tensor*, Annals of Mathematics 166 (2007) no. 2, 475-531.

[24] R. A. Horn and C. R. Johnson - *Matrix Analysis*, Cambridge University Press (1991).

[25] H. Jacobowitz - *An introduction to CR structures*, Mathem. Surveys and Monographs, No. 32, Providence, RI, 1990.

[26] D. Jerison, J. M. Lee - *A subelliptic, nonlinear eigenvalue problem and scalar curvatures on CR manifolds*, Contemporary Math, No. 27, Amer. Math. Soc. Providence, RI, 1984, 57-63.

[27] D. Jerison, J. M. Lee - *Yamabe problem on CR manifolds*, J. Differential Geom., 25 (1987), 167-197.

[28] D. Jerison, J. M. Lee - *Extremals for the Sobolev inequality on the Heisenberg group and the CR Yamabe problem*, J. Amer. Math. Soc., 1 (1988), no. 1, 1-13.

[29] D. Jerison, J. M. Lee - *Intrinsic CR normal coordinates and the CR Yamabe problem*, J. Differential Geom., 29 (1989), 303-343.

[30] J. M. Lee - *The Fefferman metric and pseudohermitian invariants*, Trans. Amer. Math. Soc., 296 (1986), 411-429.

[31] J. M. Lee - *Pseudo-Einstein structures on CR manifolds*, Amer. J. Math. 110 (1988), 157-178.

[32] J.M. Lee and T.H. Parker - *The Yamabe problem*, Bull. AMS 17 (1987), 37-91.

[33] A. Li, Y.Y. Li - *On some conformally invariant fully nonlinear equations*, Comm. Pure Appl. Math. 56 (2003) 1416-1464.

[34] S. Kobayashi and K. Nomizu - *Foundations of Differential Geometry, vols. I, II*, New York, Wiley-Interscience, 1963.

[35] R. C. Reilly - *On the Hessian of a function and the curvatures of its graph*, Michigan Math. J. 20 (1973), 373-383.

[36] W.M. Sheng, N.S. Trudinger,J. Wang - *The Yamabe problem for higher order curvatures*, J. Diff. Geom., 77 (2007), 515-553.

[37] R. Schoen - *Conformal deformation of a riemannian metric to constant scalar curvature*, J. Differential Geom. 20 (1984) 479-495.

[38] N. Tanaka - *A differential geometric study on strongly pseudo-convex manifolds*, Kinokuniya, Tokyo, 1975.

[39] N. S. Trudinger - *Remarks concerning the conformal deformation of Riemannian estructures on compact manifolds*, Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa. 22 (1968) 265-274.

[40] J. Viaclovsky - *Conformal geometry, contact geometry, and the calculus of variations*, Duke Math. J. 101 (2000) 283-316.

[41] J. Viaclovsky - *Some fully nonlinear equations in conformal geometry*, Diferential equations and mathematical physics (Birmingham, AL, 1999) (Providence, RI), American Mathematical Society, Providence, RI, 2000, pp. 425-433.

[42] J. Viaclovsky - *Estimates and existence results for some fully nonlinear elliptic equations on Riemannian mani folds*, Communications in Analysis and Geometry 10 (2002) no.4, 815-846.

[43] J. Viaclovsky - *Conformal geometry and fully nonlinear equations, Inspired by S. S. Chern*, Nankai Tracts Math 11, World Scientific, 2006, pages 435-460.

[44] X. J. Wang - *A class of fully nonlinear elliptic equations and related functionals*, Indiana Univ. Math. J. 43 (1994), no. 1, 25-54.

[45] S. M. Webster - *Pseudohermitian structures on a real hypersurface*, J. Differential Geom. 13 (1978), 25-41.

[46] H. Yamabe - *On a deformation of Riemannian estructures on compact manifolds*, Osaka Math. J. 12 (1960) 21-37.

Índice Remissivo

1-formas de conexão, 19
1-formas de torção, 21

aplicação CR, 9
aplicação isopseudohermitana, 13
aplicação pseudohermitana, 13

conexão pseudohermitiana, 18
correferencial admissível, 9
correferencial local, 9
correferencial pseudohermitiano, 25
CR-equivalência, 9
curvatura escalar pseudohermitiana, 28
curvatura pseudohermitiana, 28

direção característica, 14
distribuição de Levi, 8
domínio de Siegel, 45

elemento de volume, 16
equação de estrutura, 27
equação de Yamabe, 2
equação de Yamabe CR, 4, 54, 59
estrutura complexa, 8
estrutura pseudo-Einstein, 44
estrutura pseudohermitiana, 11

forma de Levi, 12
formas de curvatura, 27
função CR-holomorfa, 9
funcional de Yamabe, 2
funcional de Yamabe CR, 4

grupo de Heisenberg, 46

identidades de Bianchi, 28

invariante de Yamabe, 2
invariante de Yamabe CR, 4

métrica de Webster, 14

operador de Yamabe CR, 54, 59
operador sublaplaciano, 52, 58

referencial local, 9
referencial pseudohermitiano, 25

símbolos de Christoffel, 19

tensor curvatura de Webster, 28
tensor de Ricci pseudohermitiano, 28
torção pseudohermitiana, 21
tranformação de Cayley, 47

variedade CR, 7
variedade CR estritamente pseudoconvexa, 13
variedade pseudohermitiana, 11