

Universidade Federal de Minas Gerais

Departamento de Matemática - ICEX

Monografia da Especialização

Pontos Notáveis de Quadriláteros

Carolina Silva Rezende

Orientador: Prof. Michel Spira

2013

Agradecimentos

Agradeço a Deus pela força para persistir com muita luz nessa caminhada. Aos meus pais, meu irmão e toda minha família pelo apoio e carinho. Ao Luiz, pelo incentivo e por estar sempre perto nas horas de dificuldades e desespero, pelo carinho, compreensão e por me fazer acreditar que sou capaz. Ao meu orientador Michel Spira, a quem tanto desorientei, pela paciência, dedicação, ensinamentos (por tampar alguns buracos da minha formação) e por me trazer de volta a beleza da Matemática. Aos professores Jussara Moreira, Paulo Antônio, Jorge Sabatucci, Francisco Dutenhofner pelas correções e sugestões apresentadas. A todos professores e funcionários do departamento de Matemática da UFMG, em especial Bernardo Lima, Fábio Enrique Brochero Martinez, Eliane Andréa Barbosa e Eliane Kelli Gaudêncio que sempre estiveram dispostos a me ajudar.

Ata de Aprovação

Sumário

Introdução	4
1 Notação e Resultados Elementares	5
1.1 Pontos Notáveis de Triângulos	7
1.2 Homotetias	10
1.3 Círculo de Nove Pontos	13
1.4 Círculo de Apolônio	15
2 Quadriláteros	18
3 Quadriláteros Inscritíveis	22
3.1 Preliminares	22
3.2 Propriedades dos quadriláteros inscritíveis	24
3.3 Anticentro	30
3.4 Outras Propriedades	33
Referências	40

Introdução

Pretendo, com esse trabalho, apresentar algumas propriedades de quadriláteros de modo a torná-las mais conhecidas e acessíveis a professores de Geometria dos ensinos médio e superior que tenham passado por um curso inicial de geometria plana. A beleza dessas propriedades e o fato de serem demonstradas por métodos elementares tornam seu estudo relevante do ponto de vista científico, didático e estético. Estas propriedades não são comuns em livros didáticos de língua portuguesa. Vamos disponibilizar também um CD com arquivos em GEOGEBRA que utilizamos nos estudos para a produção deste texto. Nosso trabalho é baseado no capítulo 4 do livro *College Geometry: An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle*, de Nathan Altshiler-Court.

Capítulo 1

Notação e Resultados

Elementares

Dado dois pontos A e B , denotaremos indistintamente por AB o segmento, o comprimento desse segmento, a reta ou a semirreta (de origem A) determinados por esses pontos; o contexto tornará claro de qual objeto se trata. Os símbolos \equiv e \sim serão usados para denotar, respectivamente, congruência e semelhança.

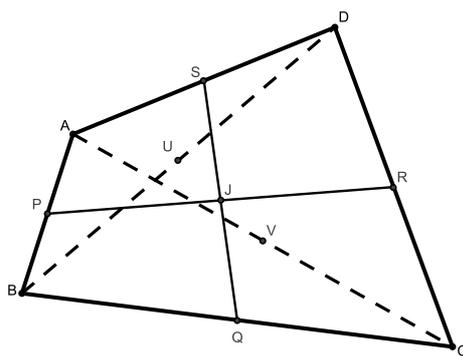


Figura 1.1: Notação geral

Denotaremos por $ABCD$ o quadrilátero de lados $AB = a$, $BC = b$,

$CD = c$ e $DA = d$; e por P , Q , R , e S os pontos médios destes lados, respectivamente. As diagonais serão denotadas por $AC = f$ e $BD = g$, e seus pontos médios por V e U , respectivamente; além disso, colocamos $UV = m$, como na figura 1.1, que usaremos para fixar notação ao longo do trabalho.

A interseção de PR e QS , denotada por J , é dita o *centróide* (ver capítulo 2) do quadrilátero. Quando o quadrilátero for circunscritível, denotaremos por O o centro do círculo circunscrito. O ponto simétrico a O com relação a J será chamado de M (ver seção 3.3) é dito o *anticentro* do quadrilátero circunscritível.

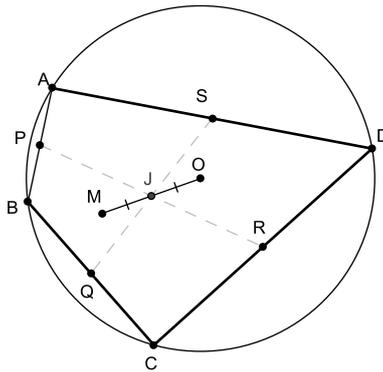


Figura 1.2: Notação para quadriláteros inscritíveis

No quadrilátero $ABCD$, o triângulo ABC é dito oposto ao ponto D ; denotaremos por D' seu incentro, e analogamente definimos A' , B' e C' . Denotaremos por A^* o baricentro do triângulo BCD ; analogamente, definimos B^* , C^* e D^* .

1.1 Pontos Notáveis de Triângulos

Iniciaremos essa seção com os seguintes resultados elementares que serão usados durante o texto; demonstrações não apresentadas podem ser encontradas na referência [1]. Lembramos que, em um triângulo, aparecem os seguintes pontos notáveis:

Incentro: encontro das três bissetrizes. O incentro é o centro do círculo inscrito.

Baricentro: encontro das três medianas.

Circuncentro: encontro das três mediatrizes. O circuncentro é o centro do círculo circunscrito.

Ortocentro: encontro das três alturas.

Excentros: encontros de duas bissetrizes externas.

Dizemos também que um segmento de reta que liga o vértice de um triângulo ao lado oposto ou ao seu prolongamento é uma *ceviana* do triângulo.

Proposição 1.1 (Base Média). Sejam ABC um triângulo e M, N pontos médios dos lados AB e BC , respectivamente. Então $MN \parallel AC$ e $MN = \frac{1}{2}AC$. \square

Proposição 1.2 (Medianas). Sejam ABC um triângulo, M o ponto médio do lado AB e G seu baricentro. Então $AG = 2GM$; analogamente para os outros lados. \square

Proposição 1.3. Sejam ABC um triângulo, H seu ortocentro, \mathcal{C} seu círculo circunscrito, O o centro de \mathcal{C} . Sejam também $D, A' \in BC$ tais que AD e OA' sejam perpendiculares a BC . Então $OA' = \frac{1}{2}AH$

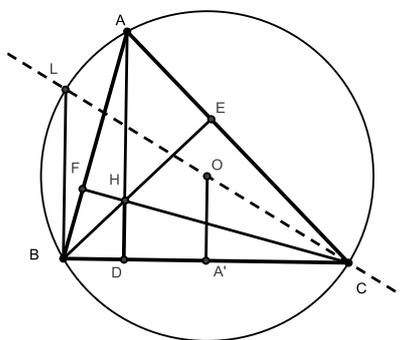


Figura 1.3:

Demonstração. Temos que $COA' \sim CLB$ e a razão de semelhança é igual a 2, já que OC é raio da circunferência e CL é diâmetro; logo $OA' = \frac{1}{2}LB$. Além disso, o quadrilátero $LBHA$ é um paralelogramo, pois como CL é diâmetro então AL é perpendicular a AC e, como BE é altura relativa ao lado AC do triângulo ABC , segue que BE é perpendicular a AC . Logo temos que $AL \parallel BH$ e segue que $BL = AH$, donde $OA' = \frac{1}{2}AH$. \square

A próxima proposição é simples, mas nem sempre é abordada nos cursos de geometria plana.

Proposição 1.4. Dado um triângulo retângulo ABC , o comprimento da mediana relativa à hipotenusa é igual a metade da hipotenusa.

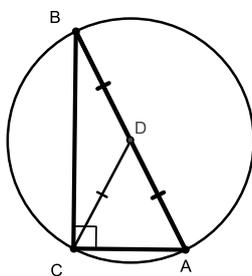


Figura 1.4:

Demonstração. Como o triângulo ABC é retângulo, a hipotenusa AB é também o diâmetro do círculo circunscrito. Logo o ponto médio D da hipotenusa é o centro desse círculo. Segue que $AD = BD = CD$ são raios desse círculo. \square

Proposição 1.5. (Relação de Stewart) Seja ABC um triângulo e considere a figura 1.5 abaixo, então $b^2f + c^2e = a(ef + d^2)$.

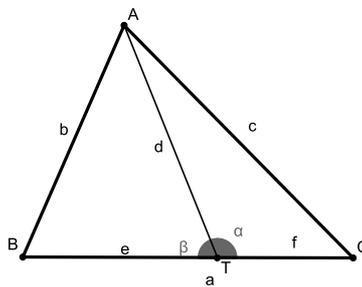


Figura 1.5:

Demonstração. Pela lei dos cossenos, temos $b^2 = d^2 + e^2 - 2de \cos \beta$ e $c^2 = d^2 + f^2 - 2df \cos \alpha$. Multiplicando a primeira igualdade por f , a segunda por e e somando temos $b^2f + c^2e - ad^2 = aef$, onde lembramos que $\cos \alpha = -\cos \beta$ uma vez que $\alpha + \beta = 180^\circ$. \square

Corolário 1.1. Seja o triângulo ABC e d a mediana em relação a BC . Então $b^2 + c^2 = 2d^2 + 2\left(\frac{a}{2}\right)^2$. \square

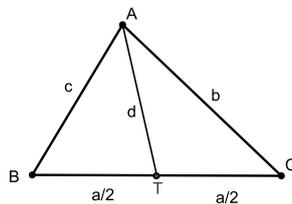


Figura 1.6: caso particular da relação de Stewart

Definição 1.1. (Arco Capaz) Dados P, Q e α , o arco capaz de PQ com relação a α é o lugar geométrico dos pontos X tais que $\widehat{PXQ} = \alpha$. Esse lugar é um arco de um círculo com extremos em P e Q , conforme figura abaixo, onde O é o centro do círculo. Observamos que existem, na verdade, dois desses arcos, simétricos com relação a AB . \square

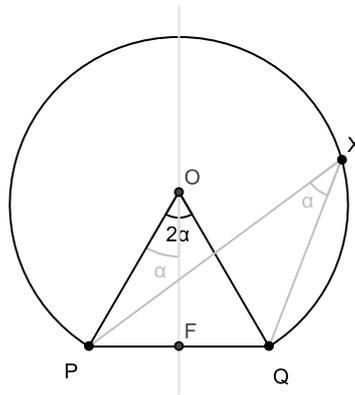


Figura 1.7: arco capaz

1.2 Homotetias

O termo *homotetia* é devido ao matemático francês Michel Chasles, em 1827 e é derivado do grego como composto de *homo* (similar) e *tetia* (posição).

Definição 1.2. Sejam O um ponto e $k \neq 0$. Uma homotetia de centro O e razão k é a transformação do plano no plano que leva um ponto P em um ponto P' na reta OP tal que $\frac{OP'}{OP} = k$ e

- 1) Se $k > 0$, P' pertence à semirreta OP
- 2) Se $k < 0$, P' pertence à semirreta oposta a OP

Essa homotetia será denotada por $\rho_{O,k}$ ou mais simplesmente por ρ quando não houver possibilidade de confusão. Mostra-se facilmente que uma

homotetia preserva ângulos, razões entre segmentos de reta e paralelismo. Observamos que se $k = 1$ então $\rho_{O,k}$ é a identidade.

Para achar o centro de uma homotetia dada, diferente da identidade, basta traçar as retas determinadas por dois pontos distintos de uma figura e os pontos correspondentes da figura homotética; o centro será o ponto de interseção das retas.

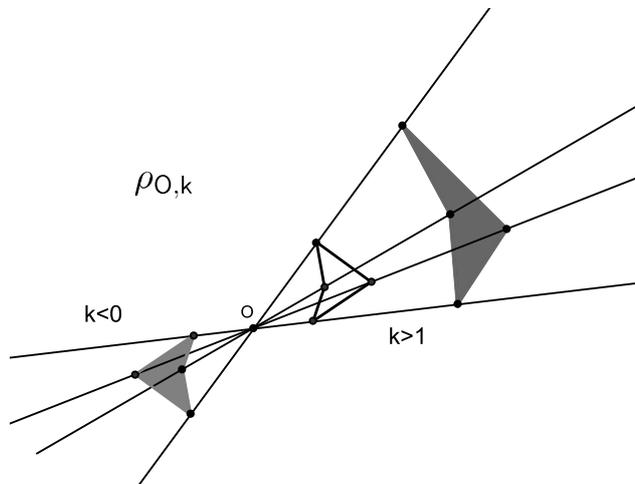


Figura 1.8:

Teorema 1.1. Sejam α e β homotetias de centro A e B e razões $a \neq 1$ e $b \neq 1$, respectivamente com $A \neq B$. Então $\beta\alpha$ é uma (i) translação, se $ab = 1$ ou (ii) uma homotetia de razão ab , se $ab \neq 1$.

Demonstração. Sem perda de generalidade, consideraremos $a, b > 0$ (apenas para efeito de figura mais bonita).

Suponhamos primeiro $ab = 1$; sem perda de generalidade, suponhamos também $a > 1$. Consideraremos agora a figura 1.9 a seguir.

Temos $\frac{AP'}{AP} = a$ e $\frac{BP''}{BP'} = b = \frac{1}{a}$, ou seja, $\frac{BP'}{BP''} = a$. Logo $AP'B \sim PP'P''$, donde PP'' é paralela a AB . Além disso,

$$\frac{PP'}{AP'} = \frac{AP' - AP}{AP'} = 1 - \frac{AP}{AP'} = 1 - \frac{1}{a} = \frac{a - 1}{a};$$

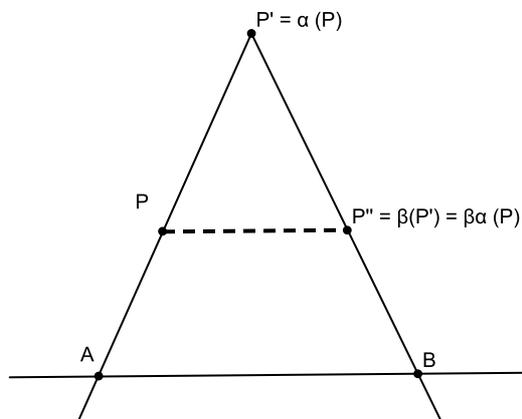


Figura 1.9: caso $ab = 1$

Logo $\overrightarrow{PP''}$ é um vetor paralelo a AB de módulo $\frac{a-1}{a}|AB|$, que independe da escolha de P ; segue que $\beta\alpha$ é uma translação.

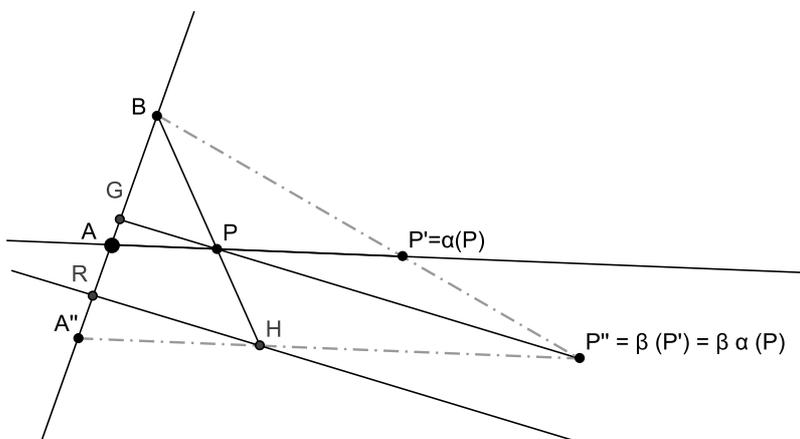


Figura 1.10: caso $ab \neq 1$

Suponhamos agora $ab \neq 1$, com $a > 1$, $b > 1$ e consideraremos a figura 1.10, onde P é ponto qualquer, $P' = \alpha(P)$, $P'' = \beta(P') = \beta\alpha(P)$, $A' = \alpha(A) = A$, $A'' = \beta(A') = \beta\alpha(A)$, $G = AB \cap PP''$, $H = AB \cap BP$ e $R \in AB$ é tal que $HR \parallel GP''$. Vamos mostrar que $\beta\alpha$ é uma homotetia de centro G e

razão ab .

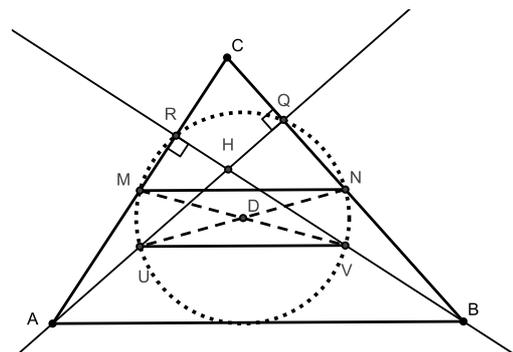
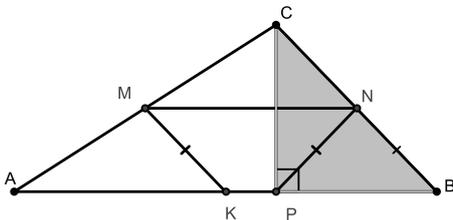
Temos $\frac{BA''}{BA} = \frac{BP''}{BP} = b$ ou seja, $BA''P'' \sim BAP'$; em particular, $AP' \parallel A''P''$ e segue que $\frac{BH}{BP} = b$. Além disso, temos $\frac{AP''}{AH} = \frac{AP'}{AP} = a$.

Da semelhança $A''GP'' \sim A''RH$ temos que $\frac{GP''}{RH} = \frac{A''P''}{A''H} = a$. e da semelhança $BGP \sim BRH$ temos que $\frac{RH}{GP} = \frac{BH}{BP} = b$. Logo $\frac{GP''}{GP} = \frac{GP''}{RH} \frac{RH}{GP} = ab$ e concluímos que $\beta\alpha$ é uma homotetia de centro G e razão ab . \square

1.3 Círculo de Nove Pontos

Nesta seção vamos estudar um belo objeto da geometria: o círculo de nove pontos.

Teorema 1.2. Seja ABC um triângulo, K, M, N os pontos médios dos lados, P, Q, R os pés das alturas e U, V, W os pontos médios dos segmentos que ligam o ortocentro H aos vértices. Esses nove pontos estão em um mesmo círculo. O centro deste círculo é o ponto médio do segmento que liga o ortocentro ao circuncentro do triângulo ABC . Além disso, o raio do círculo de nove pontos vale a metade do raio do círculo circunscrito ao triângulo.



Demonstração. Vamos demonstrar primeiro que o círculo que passa pelos pontos médio dos lados passa também pelos pés das alturas.

Seja \mathcal{C} o círculo determinado por K, M, N . Vamos mostrar que o quadrilátero $MKPN$ é inscritível. O triângulo CPB é retângulo e PN é a mediana referente a hipotenusa; pela proposição 1.4 temos que $PN = BN$. Por outro lado, temos que MK é base média do triângulo ABC , então $MK = BN$. Assim $MK = PN$ e nosso quadrilátero é um trapézio isósceles, que é inscritível. Logo o círculo \mathcal{C} passa por P ; e analogamente, ele passa por Q e R .

Agora vamos provar que o círculo \mathcal{C} passa também pelos pontos médios dos segmentos determinados pelos vértices e pelo ortocentro do triângulo.

Sejam U e V os pontos de interseção do círculo \mathcal{C} com AH e BH , respectivamente. Temos que MN é base média do triângulo ABC , logo é paralelo a AB e $MN = \frac{AB}{2}$. Temos, também, que $\widehat{VRM} = 90^\circ$, logo MV é um diâmetro de \mathcal{C} . Analogamente UN é diâmetro. Assim MV e NU são iguais e paralelos, isto implica que $MUVN$ é um retângulo e $MN = \frac{AB}{2}$. Então $UV \parallel AB$ e $UV = \frac{AB}{2}$. Com isso concluímos que UV é base média $\triangle AHB$, em particular U e V são pontos médios, respectivamente de AH e BH . \square

O círculo do teorema 1.2 é dito o *círculo de nove pontos* do triângulo ABC .

O Círculo de nove pontos e o círculo circunscrito de um mesmo triângulo estão relacionados de um modo surpreendente, como vemos a seguir.

Teorema 1.3. O círculo de nove pontos e o círculo circunscrito de um triângulo ABC são homotéticos por uma homotetia ρ de centro H e razão 2.

Demonstração. Temos $\rho(T) = C$, $\rho(U) = A$ e $\rho(V) = B$. Logo ρ leva o círculo por T, U, V (o círculo de nove pontos) no círculo por A, B, C que é o círculo circunscrito. \square

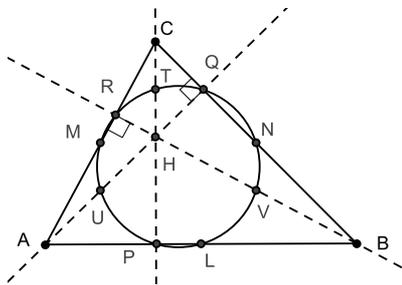


Figura 1.11:

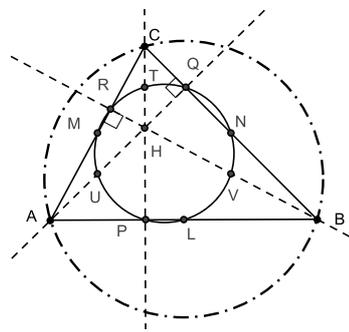


Figura 1.12:

1.4 Círculo de Apolônio

Nesta seção vamos estudar um objeto maravilhoso e surpreendente: o círculo de Apolônio

Lema 1.1. Dado um segmento AB e $1 \neq k \geq 0$, existem e são únicos os pontos P, Q na reta AB , com P interno e Q externo ao segmento AB , tais que $\frac{PA}{PB} = \frac{QA}{QB} = k$.

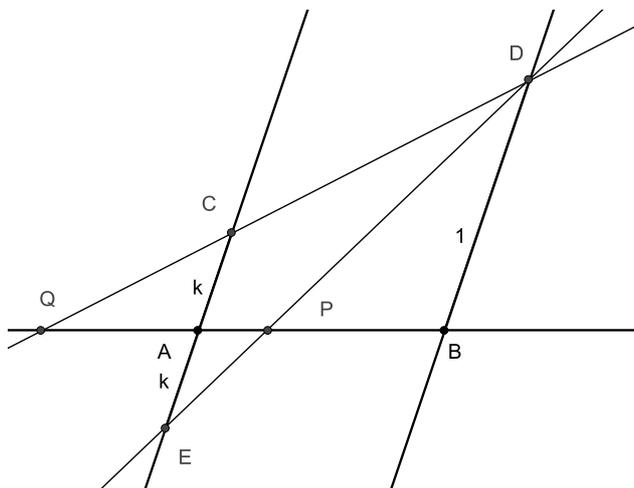


Figura 1.13:

Demonstração. Seja $AC \parallel BD$. Temos $ACQ \sim BDQ$, logo $\frac{AC}{BD} = \frac{AQ}{BQ} = k$. Por outro lado, o triângulo $AEP \sim BDP$, logo $\frac{AE}{BD} = \frac{AP}{BP} = k$. Então $\frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{BQ} = k$. Observação da figura do lema 1.1: Foi construída traçando paralelas a reta AB por A e B , $AC = AE = k$ e $BD = 1$, assim encontramos os conjugados harmônicos PQ , tais que $P = AB \cap ED$ e $Q = AB \cap CD$. Deixamos para o leitor a demonstração da unicidade de P e Q . \square

No lema anterior, o número k é dito a *razão* em que P e Q que dividem o segmento AB . Para uso posterior, observamos que se X e Y pertencem à reta AB , então Y está à direita de X se e somente se $\frac{YA}{YB} > \frac{XA}{XB}$. Os pontos P e Q são ditos os conjugados harmônicos de A e B com relação a k .

Observamos que ponto médio M do segmento AB é o único ponto que o divide na razão $k = 1$.

Teorema 1.4. Se $k > 0$ e P, Q são os conjugados harmônicos de A e B com relação a k então o lugar geométrico dos pontos X tais que $\frac{AX}{BX} = k$ é a mediatriz de AB se $k = 1$ e é o círculo de Apolônio C , de diâmetro PQ se $k \neq 1$.

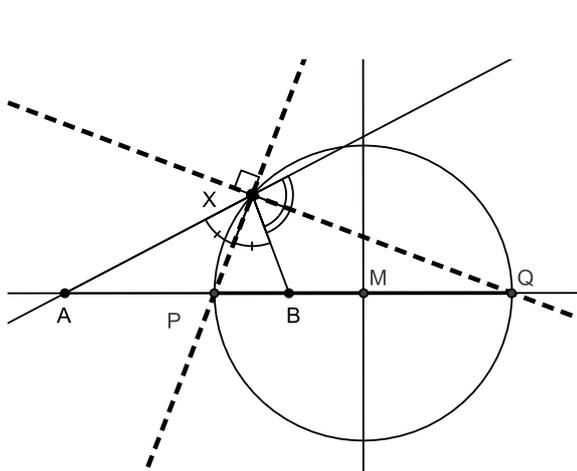


Figura 1.14: 1.4a

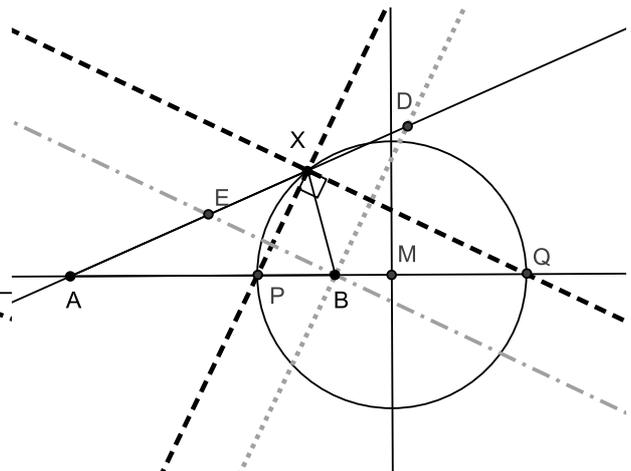


Figura 1.15: 1.4b

Demonstração. Para $k = 1$ é imediato que o lugar descrito pelo ponto P é a mediatriz do segmento AB . Suponhamos agora $k \neq 1$ e seja X tal que $\frac{AX}{BX} = k$. Temos $\frac{AP}{BP} = \frac{AX}{BX}$ e o pelo teorema da bissetriz que diz: $\frac{AP}{BP} = \frac{AX}{BX} = \frac{AQ}{BQ}$, donde $\frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{BQ} = k$, temos que XP é bissetriz de AXB . Analogamente XQ é bissetriz externa logo $\widehat{PXQ} = 90^\circ$ o que implica que X pertence ao círculo \mathcal{C} de diâmetro PQ . Reciprocamente, seja X pertencente ao círculo \mathcal{C} , temos então que $\widehat{PXQ} = 90^\circ$. Traçamos por B paralelas a XP e a XQ , que interceptam AX em D e E respectivamente. Então $\frac{AP}{BP} = \frac{AX}{DX}$ e $\frac{AQ}{BQ} = \frac{AX}{EX}$; como $\frac{AP}{BP} = \frac{AQ}{BQ}$ obtemos $XD = XE$. Logo, X é o ponto médio da hipotenusa do triângulo retângulo DBE e obtemos $XD = XB$. Assim, $\frac{AX}{BX} = \frac{AX}{DX} = \frac{AP}{BP} = k$. \square

O círculo do teorema anterior é conhecido como *círculo de Apolônio* do segmento AB relativo à razão k e é denotado por $\mathcal{A}(AB, k)$.

Capítulo 2

Quadriláteros

Neste capítulo, tratamos de propriedades gerais de quadriláteros convexos e introduzimos um ponto especial, dito *centróide* de um quadrilátero.

Proposição 2.1. Os pontos médios dos lados de um quadrilátero (não necessariamente convexo) são vértices de um paralelogramo.

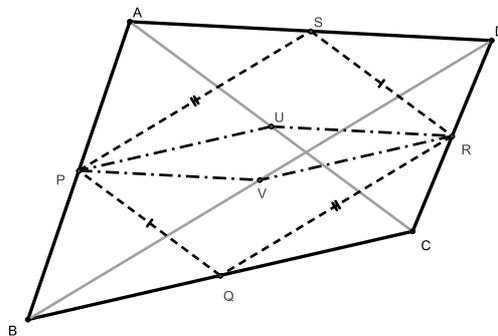


Figura 2.1:

Demonstração. Pela proposição 1.1, PQ e RS são paralelos, pois são ambos paralelos a AC ; analogamente, PS e QR são paralelos. Segue que $PQRS$ é um paralelogramo. Um argumento análogo mostra que $PURV$ e $QUSV$ também são paralelogramos. \square

Corolário 2.1. O perímetro do quadrilátero $PQRS$ é igual a $e + f$. \square

Agora vamos apresentar o primeiro ponto mágico deste trabalho.

Teorema 2.1. Seja $J = PR \cap QS$. Então J é ponto médio de PR, QS e UV .

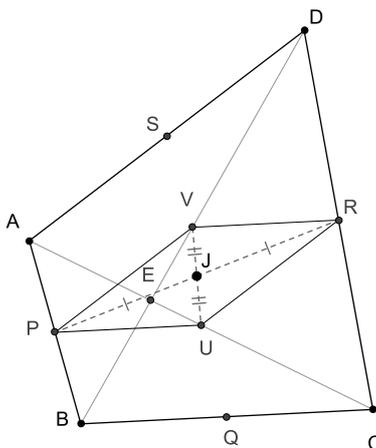


Figura 2.2: Centróide do quadrilátero, ponto J

Demonstração. Como $PQRS$ é paralelogramo, J é ponto médio das diagonais PR e QS . Além disso, $PURV$ também é paralelogramo, donde J é ponto médio das suas diagonais PR e UV . \square

Definição 2.1. O ponto J do teorema 2.1 é dito o centróide de $ABCD$. \square

Para outra apresentação do centróide independente da anterior, lembramos que A^* denota o baricentro do triângulo BCD , e analogamente para B^*, C^* e D^* .

Teorema 2.2. As retas AA^* , BB^* , CC^* e DD^* concorrem em J .

Demonstração. No triângulo ABD , o segmento DP é mediana e C^* é baricentro. Pela proposição 1.2, segue que $\frac{PC^*}{PD} = \frac{1}{3}$; analogamente, $\frac{PD^*}{PC} = \frac{1}{3}$ e pelo teorema de Tales segue que $C^*D^* \parallel CD$ e $\frac{C^*D^*}{CD} = \frac{1}{3}$. O raciocínio análogo para os segmentos A^*B^* , B^*C^* e D^*A^* mostra que os quadriláteros $ABCD$ e $A^*B^*C^*D^*$ têm seus lados respectivamente paralelos e em razão $\frac{1}{3}$; logo esses quadriláteros são homotéticos. Vamos agora determinar o centro dessa homotetia. Como QS é mediana no triângulo AQD e $A^*D^* \parallel AD$, QS passa pelo ponto médio S' de A^*D^* . Os pontos S e S' são homotéticos nos dois quadriláteros; segue que a reta SQ passa pelo centro da homotetia. Analogamente, PR passa pelo centro da homotetia; como $PR \cap QS = J$, segue que J é o centro dessa homotetia e a razão é $-\frac{1}{3}$. \square

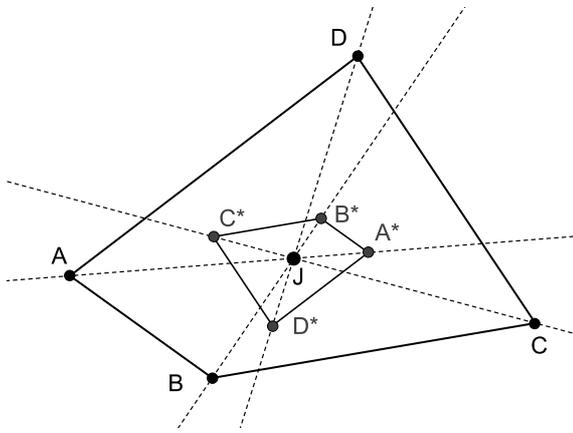


Figura 2.3:

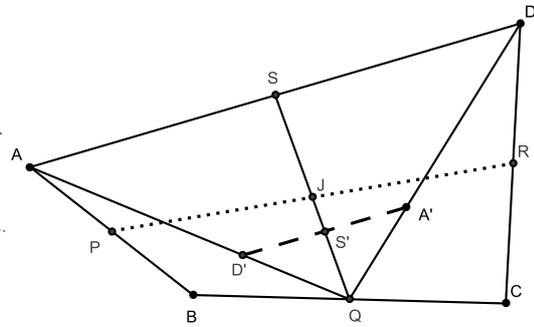


Figura 2.4:

Agora apresentaremos algumas propriedades algébricas dos quadriláteros. Lembramos que as diagonais de $ABCD$ são $AC = f$ e $BD = g$ e seus pontos médios são V e U , respectivamente; além disso, colocamos $UV = m$.

Teorema 2.3. Seja $ABCD$ um quadrilátero. Então

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = f^2 + g^2 + 4m^2.$$

Demonstração. No triângulo ABD , V é o ponto médio de $BD = g$. Pela relação de Stewart (proposição 1.5), temos $2AV^2 = a^2 + d^2 - \frac{1}{2}g^2$. Analogamente, no triângulo BCV , temos $2CV^2 = b^2 + c^2 - \frac{1}{2}g^2$ e no triângulo ACV temos $2m^2 = AV^2 + CV^2 - \frac{1}{2}f^2$. Logo, $2AV^2 + 2CV^2 = a^2 + d^2 + b^2 + c^2 - g^2$ e, substituindo, temos

$$a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = f^2 + g^2 + 4m^2.$$

□

Lema 2.1. A soma dos quadrados dos lados de um paralelogramo qualquer $PQRS$ é igual à soma dos quadrados de suas diagonais, isto é,

$$2(p^2 + q^2) = PR^2 + QS^2$$

Demonstração. Aplicando a lei dos cossenos em cada um dos triângulos PQR e PQS , temos: $QS^2 = p^2 + q^2 - 2pq \cos \alpha$ e $PR^2 = p^2 + q^2 - 2pq \cos \beta$, somando ambas, e observando que α e β são suplementares, segue que:

$$2(p^2 + q^2) = PR^2 + QS^2$$

□

Corolário 2.2. A soma dos quadrados das diagonais de um quadrilátero é igual ao dobro da soma do quadrado dos dois segmentos que ligam os pontos médios dos lados opostos aos lados do quadrilátero, isto é:

$$g^2 + f^2 = 2(PR^2 + QS^2)$$

□

Capítulo 3

Quadriláteros Inscritíveis

Nesse capítulo estudaremos propriedades especiais de quadriláteros inscritíveis. Observamos que essas propriedades decorrem da rigidez imposta ao quadrilátero pela condição da soma dos ângulos opostos ser igual a 180° .

3.1 Preliminares

Definição 3.1. O quadrilátero que possui seus vértices sobre uma circunferência é chamado de quadrilátero *inscritível* ou *cíclico*.

Teorema 3.1. As seguintes condições são equivalentes:

- (a) O quadrilátero $ABCD$ é inscritível;
- (b) Os ângulos opostos são suplementares;
- (c) O ângulo entre um lado e uma diagonal é igual ao ângulo entre o lado oposto e a outra diagonal.

Demonstração. (a) \Rightarrow (b). Como o ângulo \hat{A} é inscrito, temos que $\hat{A} = \frac{BCD}{2}$. Como o ângulo \hat{C} é inscrito, temos $\hat{C} = \frac{DAB}{2}$. Assim, segue que,

$$\hat{A} + \hat{C} = \frac{BCD}{2} + \frac{DAB}{2} = 180^\circ.$$

Analogamente, $\hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$.

(b) \Rightarrow (a). Seja $ABCD$ um quadrilátero tal que $\hat{A} + \hat{C} = \hat{B} + \hat{D} = 180^\circ$. Suponha, por absurdo, que $ABCD$ não seja inscritível. Seja E a interseção da circunferência circunscrita ao triângulo ABD com o lado BC . No quadrilátero $ABED$, temos, por hipótese, que $\hat{A} + \hat{E} = 180^\circ$. Absurdo pela propriedade do ângulo externo. Logo, o quadrilátero $ABCD$ é inscritível.

(a) \Rightarrow (c). Os ângulos $D\hat{A}C$ e $D\hat{B}C$ enxergam o mesmo arco, logo, são iguais.

(c) \Rightarrow (a). Seja $ABCD$ quadrilátero tal que $A\hat{D}B = A\hat{C}B$. Suponha, por absurdo, que $ABCD$ não é inscritível. Seja E a interseção da circunferência circunscrita ao triângulo ABD e o lado BC . No quadrilátero $ABED$ temos, por hipótese, $A\hat{E}B = A\hat{D}B$ e, com isso, teremos $A\hat{E}B = A\hat{C}B$, contradizendo novamente a propriedade do ângulo externo. Portanto $ABCD$ é inscritível. \square

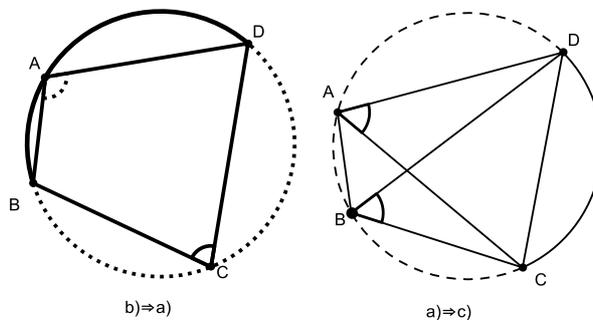


Figura 3.1:

Lembramos que $ABCD$ é um quadrilátero, A' o incentro do triângulo BCD ; e analogamente, para B' , C' e D' , como na seção de notação.

Veremos a partir de agora uma série de resultados inesperados que mostram que quadriláteros (em particular, os inscritíveis) possuem, assim como

s triângulos, belas propriedades de rigidez.

Teorema 3.2. Seja $ABCD$ um quadrilátero. Então $A'B'C'D'$ é um quadrilátero inscrito.

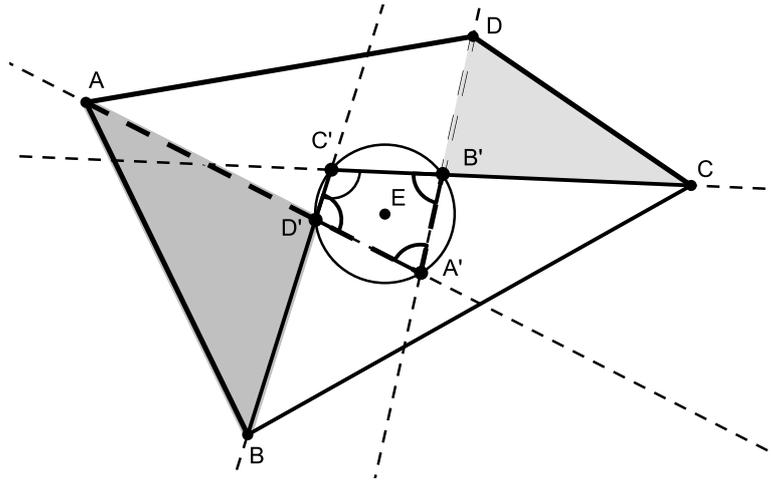


Figura 3.2:

Demonstração. No triângulo $AA'D$ temos $\widehat{AA'D} = 180^\circ - \frac{\hat{A} + \hat{D}}{2}$. Analogamente, para os triângulos $DB'C$, $BC'C$ e $AD'B$. Como \hat{A}' e \hat{C}' são ângulos opostos, logo $\hat{A}' + \hat{C}' = 180^\circ$. $\widehat{AA'D} = 180 - \frac{\hat{A} + \hat{D}}{2}$. Analogamente para $\hat{B}' + \hat{D}' = 180^\circ$ □

3.2 Propriedades dos quadriláteros inscritíveis

Nessa seção, $ABCD$ será sempre um quadrilátero inscritível. Chamaremos de E, F, G, H os pontos médios dos arcos AB, BC, CD, DA , respectivamente, e de L o ponto de interseção das diagonais AC e BD .

Teorema 3.3. EG e FH são perpendiculares.

Demonstração. Seja S a interseção de BD e FH . Temos $\widehat{ALD} = \frac{AD+BC}{2}$. Como $HD = \frac{AD}{2}$ e $BF = \frac{BC}{2}$, temos $\widehat{HSD} = \frac{HD+BF}{2} = \frac{\widehat{ALD}}{2}$. Logo HF é paralelo à bissetriz de \widehat{ALD} ; analogamente, EG é paralelo à bissetriz de \widehat{ALB} e segue que HF e EG são perpendiculares. \square

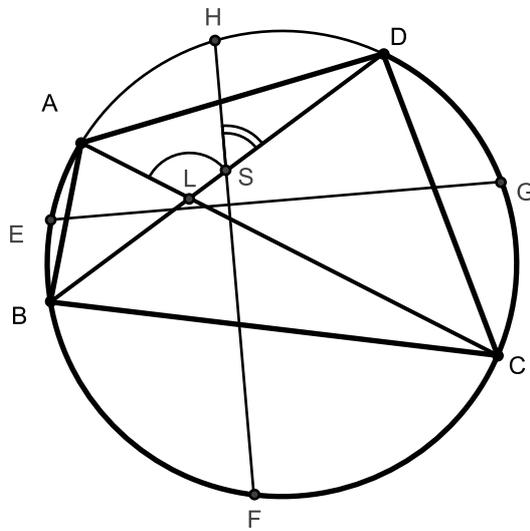


Figura 3.3:

Uma nota histórica para contextualizar nosso próximo resultado. Sabemos de grandes matemáticos do passado e de suas variadas contribuições para os campos da álgebra, trigonometria, geometria e demais áreas da matemática, como Pitágoras, Arquimedes, Pascal, Heron de Alexandria e outros. Claudius Ptolomeu também foi um desses grandes matemáticos, além de astrônomo e geógrafo. Ptolomeu nasceu por volta do ano de 85 no Egito e morreu, aproximadamente, no ano de 165 em Alexandria, também no Egito. Foi Ptolomeu quem propôs a teoria do geocentrismo, que perdurou por cerca de 1400 anos.

Além de suas contribuições na astronomia e na geografia, Ptolomeu influenciou a matemática (em particular, a trigonometria) propondo um teorema que leva seu nome: Teorema de Ptolomeu. Vejamos o que diz esse teorema.

Teorema 3.4. Em um quadrilátero inscrito temos $ac + bd = fg$.

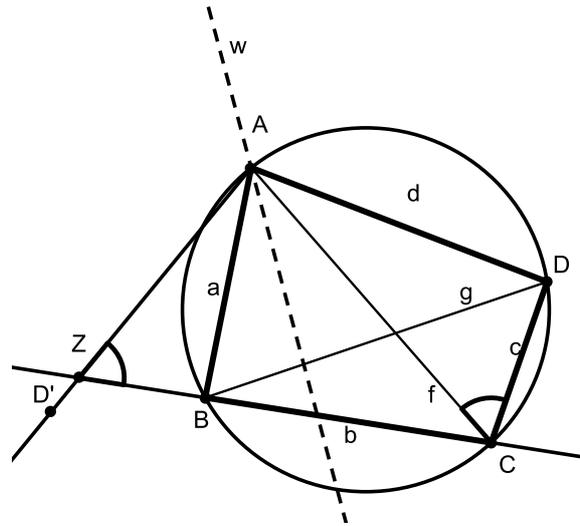


Figura 3.4:

Demonstração. Sejam r a reflexão da semirreta AD com relação à bissetriz de $B\hat{A}C$ e $Z = r \cap BC$; notamos que $B\hat{A}Z = C\hat{A}D$. Como $ABCD$ é inscrito, temos $A\hat{B}Z = A\hat{D}C$ e segue que $A\hat{Z}B = A\hat{C}D$; segue imediatamente que os triângulos AZB e ACD são semelhantes, donde $\frac{ZB}{c} = \frac{a}{d}$. Da semelhança dos triângulos AZC e ABD segue que $\frac{ZC}{g} = \frac{f}{d}$. Logo

$$\frac{f}{d} = \frac{ZC}{g} = \frac{ZB}{g} = \frac{\frac{ac}{d} + b}{g} = \frac{ac + bd}{dg}$$

donde $ac + bd = fg$. □

Observação 1. Se o quadrilátero não for inscrito, o ponto Z não pertence à reta suporte de BC . Nesse caso, consideremos o triângulo ZBC . Pela

desigualdade triangular, $ZC < ZB + BC$ e como no caso anterior, temos que o triângulo AZB é semelhante ao triângulo ACD , o que implica que $\frac{AZ}{AC} = \frac{ZB}{CD} = \frac{AB}{AD} \rightarrow ZB = \frac{ac}{d}$, $ZC = \frac{ac}{d} + b \implies ZC < ac + bd$.

Como aplicação do teorema de Ptolomeu, vamos mostrar como construir um quadrilátero $ABCD$ inscrito, dados os lados a, b, c e d , nessa ordem, sendo b o maior lado. A condição para essa construção é $b < a + c + d$, que é claramente necessária, sendo verdadeira para qualquer quadrilátero.

Suponhamos agora $b < a + c + d$. Seja Z tal que $BZ = \frac{ac}{d}$, com B entre Z e C , $A = \mathcal{C}(B, a) \cap \mathcal{A}(ZC, \frac{a}{d})$.

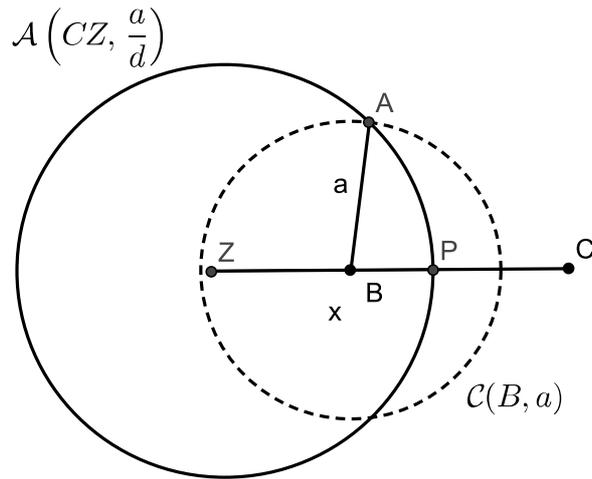


Figura 3.5:

Finalmente, chamamos de D a interseção do círculo circunscrito ao triângulo ABC e $\mathcal{A}(AC, \frac{d}{c})$.

Devemos mostrar que as interseções acima, ou seja, os pontos A e D , existem. Começamos com $\mathcal{C}(B, a) \cup \mathcal{A}(ZC, \frac{a}{d})$. Seja $P = ZC \cap \mathcal{A}(ZC, \frac{a}{d})$. Para que A exista, devemos mostrar que P está à direita de (ou coincide com) B e que $BP < a$.

Para mostrar que P está à direita de ou coincide com B , basta mostrar que $\frac{PZ}{PC} \geq \frac{BZ}{BC}$. Como $P \in \mathcal{A}(ZC, \frac{a}{d})$, isto é o mesmo que $\frac{a}{d} \geq \frac{ac}{b}$, ou seja, $b \geq c$, o que é verdade pois supomos que b é o maior lado do quadrilátero.

Vamos agora mostrar que $BP < a$. Para isso, seja $Q \in BC$ tal que $BQ = a$; queremos mostrar que P está à esquerda de Q , o que é o mesmo que $\frac{PZ}{PC} < \frac{QZ}{QC}$, ou seja, $\frac{a}{d} < \frac{a+\frac{ac}{d}}{b-a}$. Esta desigualdade equivale a $b < a + c + d$, que é a condição dada. Observamos agora que, como $\mathcal{A}(ZC, \frac{a}{d})$, temos $\frac{AZ}{AC} =$

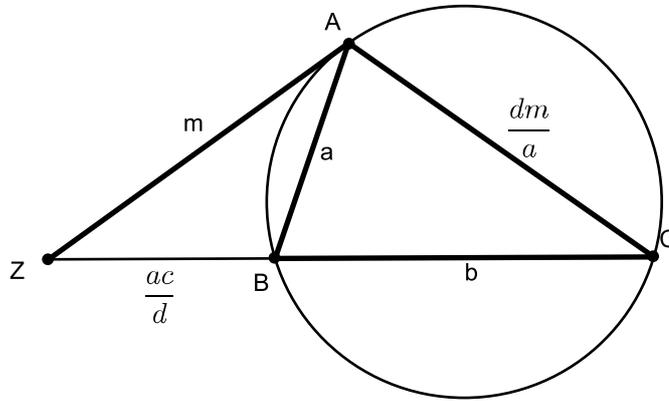


Figura 3.6:

$\frac{a}{d}$, e segue a razão de semelhança dos triângulos ABZ e ADC é $\frac{a}{d}$. Logo $AD = \frac{d}{a}AB = \frac{d}{a}a = d$ e $CD = \frac{d}{a}BZ = \frac{d}{a}\frac{ac}{d} = c$.

Observação 2. Na construção acima supomos que d era o lado oposto a b . Se a ou c são os lados opostos de b , obteremos possivelmente dois outros quadriláteros inscritos de lados a, b, c e d .

Aplicando o teorema 3.4 aos quadriláteros $ABCD, ABCD'$ e $A'BCD$ temos:

$$xy = ac + bd,$$

$$xz = ad + bc$$

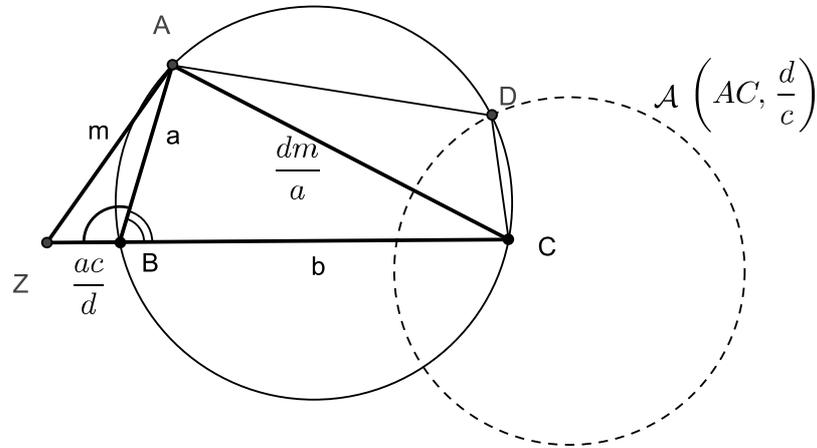


Figura 3.7:

$$yz = ab = cd$$

e obtemos

$$\frac{x}{y} = \frac{ad + bc}{ab + cd}, \quad xy = ac + bd,$$

o que nos permite determinar as diagonais do quadrilátero. Vemos também que todos os quadriláteros inscritos de lados a, b, c e d têm apenas três medidas possíveis para as diagonais. A figura 3.7 é uma das três possibilidades de construção do quadrilátero dado os quatro lados.

3.3 Anticentro

Nesta seção vamos estudar um ponto interessante chamado de *anticentro*, o segundo ponto mágico.

Teorema 3.5. Em um quadrilátero $ABCD$ inscritível, os segmentos de retas perpendiculares aos lados que passam pelo ponto médio do lado oposto têm um ponto em comum.

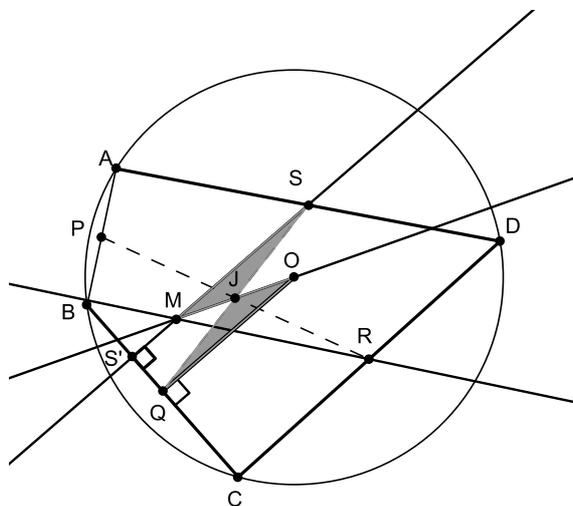


Figura 3.8:

Demonstração. Sejam O o centro do círculo circunscrito ao quadrilátero, J seu centróide, S' o pé da perpendicular traçada por S ao lado BC . A reta OJ intercepta SS' em um ponto M . Observamos que a reta OQ é paralela a reta SS' , pois ambas são perpendiculares a BC . Como J é ponto médio de QS , segue do teorema 2.1 que J é o ponto médio de OM ; logo, M é o simétrico de O com respeito a J . Tal construção não altera com a escolha da perpendicular, ou seja, M pertence à interseção das retas perpendiculares aos lados passando pelo ponto médio do lado oposto. \square

Definição 3.2. O ponto M do teorema anterior, ou seja, o simétrico de O com respeito a J , será chamado de *anticentro* do quadrilátero $ABCD$.

Teorema 3.6. Sejam $ABCD$ um quadrilátero e H_a, H_b, H_c e H_d os ortocentros dos triângulos BCD, ACD, ABD, ABC , respectivamente. Então as retas AH_a, BH_b, CH_c e DH_d são concorrentes e seu ponto de encontro é o anticentro de $ABCD$.

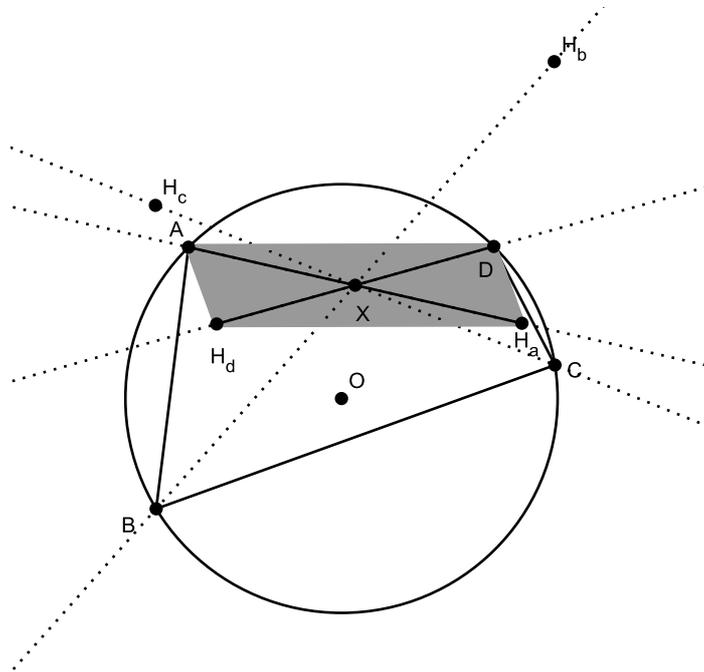


Figura 3.9:

Demonstração. Pelo lema 1.3, temos $AH_d = 2OQ = DH_a$; além disso, AH_d e DH_a são ambas perpendiculares a BC , donde AH_dDH_a é um paralelogramo. Seja $X = AH_a \cap DH_d$; então X é o anticentro. De fato a reta SX é paralela à reta AH_d e, portanto, SX é perpendicular a BC . Logo $X \in SS'$ e, analogamente, $X \in PP'$, donde $X = M$ pelo teorema 3.6. \square

Observação 3. a demonstração mostra que M é também o ponto médio de AH_a, BH_b, CH_c e DH_d .

Corolário 3.1. Seja $ABCD$ inscritível. Então os pontos H_a, H_b, H_c, H_d formam um quadrilátero homotético a $ABCD$, por uma homotetia de centro M e razão -1 .

Demonstração. Basta notar que AH_aDH_d é um paralelogramo e M é o ponto de encontro das diagonais, ou seja, é o ponto médio das diagonais AH_d e DH_a . Logo a homotetia de centro M e razão -1 leva A em H_a e D em H_d ; analogamente para B e C . □

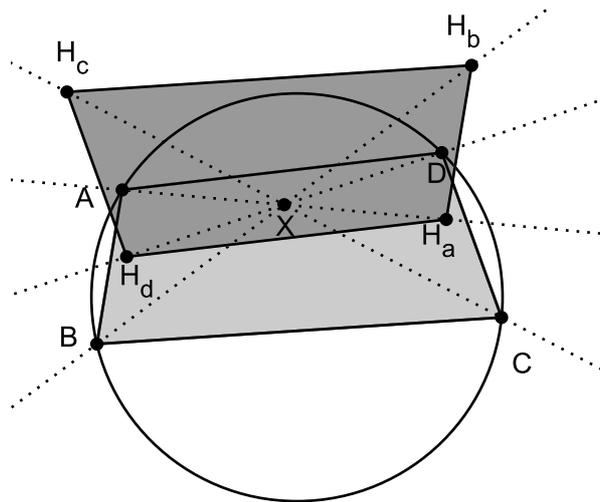


Figura 3.10:

Teorema 3.7. Os círculos de nove pontos dos quatro triângulos determinados pelos vértices de um quadrilátero cíclico se interceptam no anticentro M .

Demonstração. Seja H_d o ortocentro do triângulo ABC . Pelo teorema 3.6, M é ponto médio de DH_d . Pelo lema 1.3, a homotetia de centro H_d e razão

$\frac{1}{2}$ leva o círculo circunscrito do triângulo ABC no círculo de nove pontos do triângulo ABC . Segue então que M pertence ao círculo de nove pontos do triângulo ABC e analogamente para os outros triângulos. Logo M é interseção dos quatro círculos de nove pontos. \square

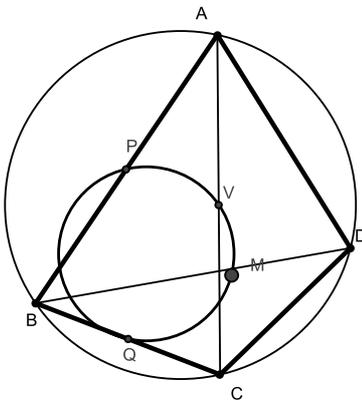


Figura 3.11:

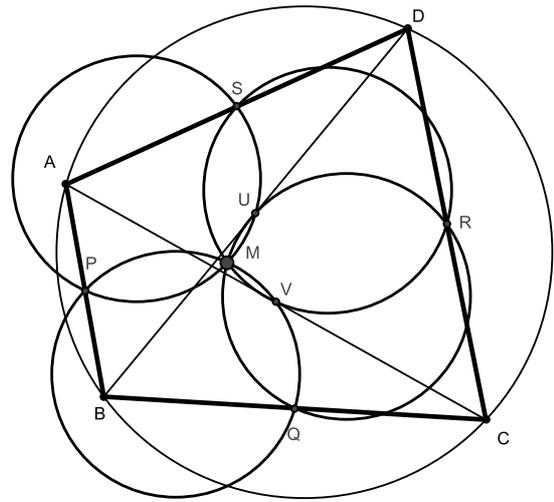


Figura 3.12:

3.4 Outras Propriedades

Definimos agora um objeto importante para a sequência de nosso trabalho.

Definição 3.3. Seja ABC um triângulo, \mathcal{C} seu círculo circunscrito, D' seu incentro e D_a seu excentro oposto a A . Denotaremos por $\mathcal{C}_{BD'C}$ o círculo que passa por B , D' e C .

Lema 3.1. O centro de $\mathcal{C}_{BD'C}$ é o ponto médio F do arco BC oposto a A no círculo \mathcal{C} . Além disso, $D'D_a$ é um diâmetro.

Demonstração. Vamos provar que F é o centro de $\mathcal{C}_{BD'C}$. Como AD' é bissetriz de BAC , ela passa por F , que é ponto médio do arco BC . Basta agora mostrar que o triângulo $D'FC$ é isósceles.

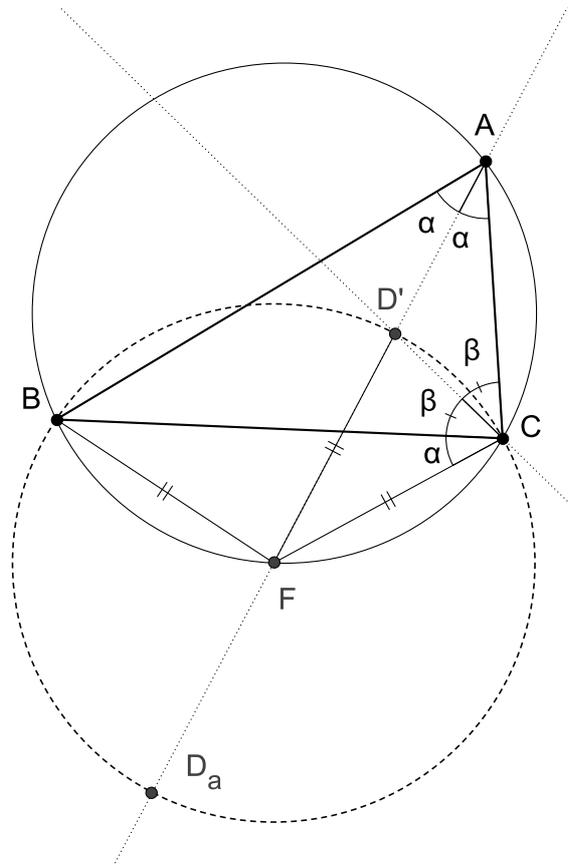


Figura 3.13:

Temos que $\widehat{FCB} = \widehat{BAF} = \alpha$, ambos esses ângulos enxergam o segmento BF e $ACD' = BCD' = \beta$ pois a reta $D'C$ é bissetriz. Então, pelo teorema do ângulo externo, temos que $\widehat{CD'F} = \alpha + \beta$ e, como $\widehat{FCD'} = \alpha + \beta$, temos que o triângulo $D'FC$ é isósceles.

Agora vamos provar que $D'D_a$ é diâmetro. Como as bissetrizes interna e externa de um ângulo de um triângulo são perpendiculares, segue que B e C enxergam $D'D_a$ por um ângulo reto. Logo B, C, D' e D_a pertencem a um círculo de diâmetro $D'D_a$. \square

Lema 3.2. Sejam $ABCD$ um quadrilátero inscrito, E, F, G e H pontos médios dos arcos AB, BC, CD, DA , respectivamente. Então FH é perpendicular a EG .

Demonstração. Observando a figura 3.14, temos que $\widehat{GKF} = \widehat{GKH}$ pois subentendem arcos de mesma medida; além disso, $\widehat{GKF} + \widehat{GKH} = 180^\circ$; como $\widehat{GKF} = \widehat{GKH}$ concluímos que FH é perpendicular a EG . \square

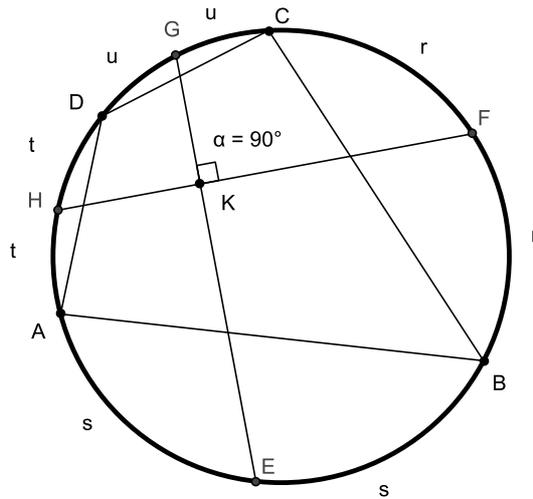


Figura 3.14:

Teorema 3.8. Os incentros dos quatro triângulos determinados pelos vértices de um quadrilátero cíclico são vértices de um retângulo.

Demonstração. Pelo lema anterior, temos que $A'D'$ e $B'C'$ são perpendiculares a HF , logo $A'D'$ e $B'C'$ são paralelos; analogamente, $A'B'C'D'$ é

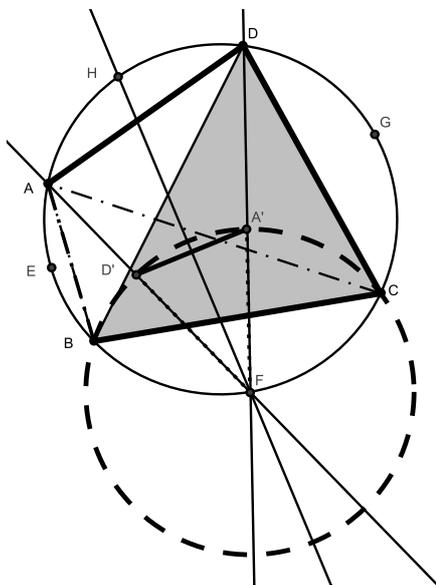


Figura 3.15:

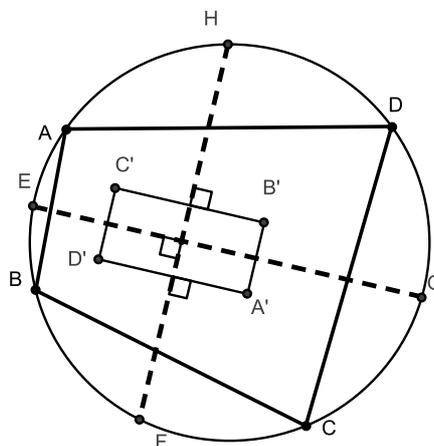


Figura 3.16:

um paralelogramo. Como HF e EG são perpendiculares, concluímos que $A'B'C'D'$ é um retângulo. \square

No quadrilátero inscrito $ABCD$, denotaremos por D_a o excentro do triângulo ABC oposto ao vértice A . Analogamente, definiremos D_a, D_b e D_c os excentros do triângulo ABC oposto, respectivamente, aos vértices A, B e C , e analogamente para os triângulos BCD, ABD e ACD .

Na figura abaixo vemos esses pontos e também o enunciado do teorema que fecha esse trabalho, cuja demonstração iniciamos com o lema a seguir.

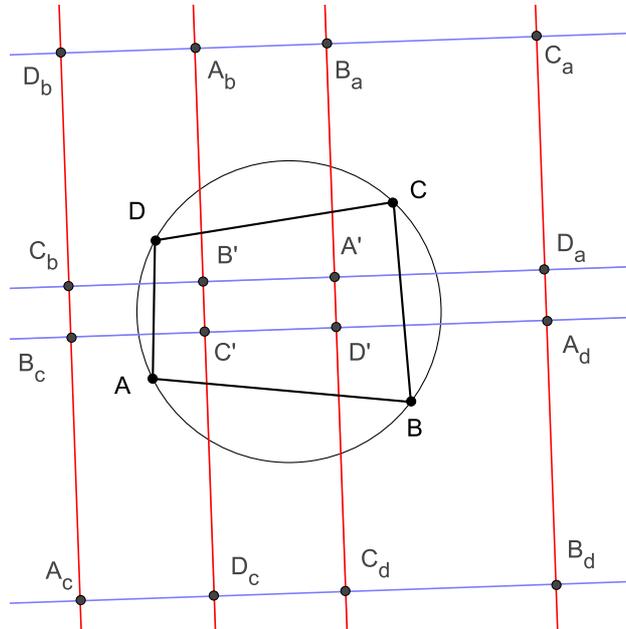


Figura 3.17: 16 pontos, 4 a 4 alinhados e perpendiculares

Lema 3.3. Sejam B_a , C_a e D_a os excentros opostos ao vértice A dos triângulos CDA , DAB e ABC , respectivamente. Então $A'D'A_dD_a$ é um retângulo.

Demonstração. Pelo teorema 3.8, $A'B'C'D'$ é um retângulo. Temos $\mathcal{C}_{BD'C} = \mathcal{C}_{BA'C}$; pelo lema 3.1, os pontos A' e A_d são diametralmente opostos, bem como D' e D_a . Logo $A'D'A_dD_a$ é um retângulo e A_d, D', C' e B_c estão alinhados. \square

Com raciocínio análogo, temos as quadrúplas de pontos alinhados como na figura 3.18.

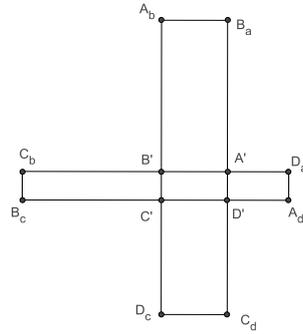


Figura 3.18:

Teorema 3.9. Os dezesseis excentros dos quatro triângulos formados pelos vértices de um quadrilátero cíclico formam dois grupos distintos de retas organizadas quatro a quatro, perpendiculares ou paralelas.

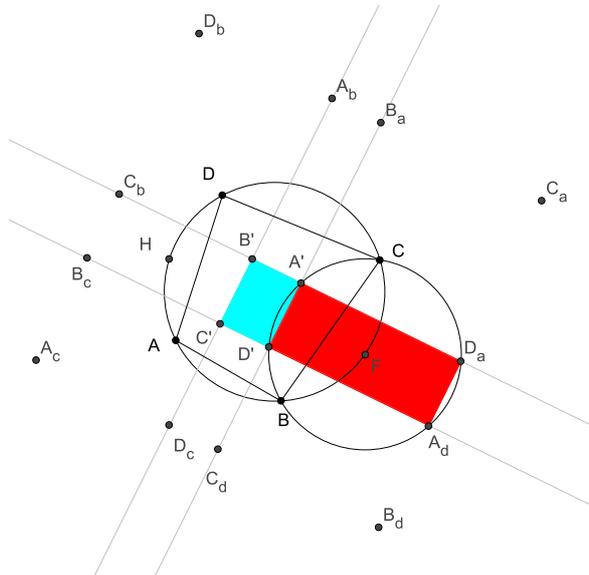


Figura 3.19:

Demonstração. Tendo em vista os teoremas 3.8 e o lema 3.3, basta mostrar que o quadrilátero $C'A_dC_aA_b$, formado por um incentro e três excentros

(assim como seus análogos) é um retângulo.

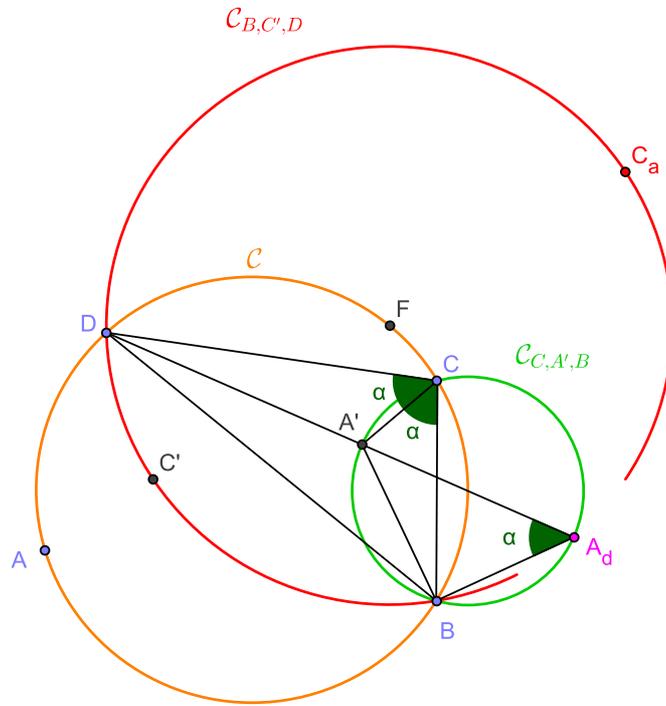


Figura 3.20:

Para isso, basta mostrar que o círculo $\mathcal{C}_{BC'D}$ passa por A_d . Observamos que $\widehat{A'A_dB} = \widehat{A'CB} := \alpha$, pois ambos enxergam a corda $A'B$ em $\mathcal{C}(BCD)$. Como CA' é bissetriz, segue que $\widehat{BCD} = 2\alpha$. Isso mostra que \widehat{BCD} é o arco capaz de 2α com respeito à corda BD da circunferência circunscrita ao quadrilátero $ABCD$. Como o centro F de $\mathcal{C}_{BC'D}$ está nesta circunferência, segue que $\widehat{BFD} = 2\alpha$; e como $\widehat{BA_dD} = \alpha$, segue que A_d pertence a $\mathcal{C}_{BC'D}$. Raciocínio análogo para B_d, A_c e D_b termina a demonstração. \square

Referências

[1] Altshiler-Court, Nathan: College Geometry: An Introduction to the Modern Geometry of the Triangle and the Circle. Dover, 2007.

[2] Elert, Glenn: Ptolemy's Table of Chords: Trigonometry in the Second Century <http://hypertextbook.com/eworld/chords.shtml>.

[3] Araújo, Paulo Ventura: Curso de Geometria. Gradiva, 1998.