

Luciano Coutinho dos Santos

# Bilhares em Superfícies de Curvatura Constante

Universidade Federal de Minas Gerais

2014



Universidade Federal de Minas Gerais  
Instituto de Ciências Exatas  
Secretaria de Pós-Graduação em Matemática  
(31) 3409.5963 FAX 3409.5797  
e-mail: [pgmat@mat.ufmg.br](mailto:pgmat@mat.ufmg.br) // [www.mat.ufmg.br/pgmat](http://www.mat.ufmg.br/pgmat)

## FOLHA DE APROVAÇÃO

*Bilhares Convexos em Superfícies de Curvatura Constante*

### LUCIANO COUTINHO DOS SANTOS

Tese defendida e aprovada pela banca examinadora constituída pelos Senhores:

Prof.<sup>a</sup> Sônia Pinto de Carvalho  
UFMG

Prof.<sup>a</sup> Sylvie Marie Oliffson Kamphorst Leal da Silva  
UFMG

Prof. Mário Jorge Dias Carneiro  
UFMG

Prof. Salvador Addas Zanata  
USP

Prof. Rafael Ramirez Ros  
UPC - BARCELONA

Prof. José Barbosa Gomes  
UFJF

Belo Horizonte, 07 de janeiro de 2014.

Luciano Coutinho dos Santos

# Bilhares em Superfícies de Curvatura Constante

Tese apresentada ao curso de Pós-Graduação em matemática da universidade federal de Minas Gerais, como requisito parcial para a obtenção do grau de Doutor em Matemática.

Orientadora: Sônia Pinto de Carvalho

Universidade Federal de Minas Gerais

2014

A Deus, à minha amada esposa Paula, meus pais Celeste e Nascimento, minhas orientadoras-mães Sônia e Sylvie, ao DECEA-UFOP pelo apoio nas reduções de carga horária, aos colegas da PT (procuradoria do trabalho que me ajudaram no ano 2000) e a Fapemig, CNPq e Capes pelo suporte financeiro.

## Resumo

Consideraremos uma curva simples, fechada e geodesicamente estritamente convexa na esfera ou no plano hiperbólico e uma partícula em movimento livre geodésico dentro da região limitada por essa curva sofrendo colisões elásticas com a curva no pontos de choque. Mostraremos que a aplicação de bilhar nessas superfícies é um difeomorfismo conservativo do tipo twist, estabeleceremos condições suficientes para não persistência de curvas ressonantes no bilhar circular geodésico perturbado. Também mostramos que bilhares nessas regiões possuem genericamente uma quantidade finita de órbitas periódicas de período  $ne$  e elas são todas hiperbólicas. Estabelecemos também que o conjunto das órbitas de período três tem dimensão de Hausdorff entre zero e um, tendo nesse último caso reta tangente em quase todo ponto.

## **Abstract**

We consider a simple closed and geodesically strictly convex curve on hemisphere or hyperbolic plane and a moving particle free geodesic within the region bounded by this curve suffering elastic collisions with the curve at the points of shock. We show that the billiard map on these curves in these surfaces are a conservative diffeomorphism twist-like, we will establish sufficient conditions for non-persistence of resonant curves in perturbed geodesic circular billiards. We also show that billiards in these regions generically have a finite number of periodic orbits of any period  $n$  and they are all hyperbolic. We also established that the set of orbits of period three has Hausdorff dimension between zero and one, and in the latter case the tangent line at almost every point.

# Sumário

<b>Sumário</b>	<b>1</b>
<b>1 Introdução</b>	<b>3</b>
<b>2 Modelos de Geometria</b>	<b>7</b>
2.1 Plano Euclideano . . . . .	7
2.1.1 Sobre curvas em $\mathbb{E}^2$ . . . . .	9
2.2 Esfera . . . . .	10
2.2.1 Sobre curvas em $\mathbb{S}^2$ . . . . .	11
2.3 Plano Hiperbólico . . . . .	13
2.3.1 Sobre curvas em $\mathbb{H}^2$ . . . . .	15
<b>3 Bilhares</b>	<b>17</b>
3.1 Aplicação do Bilhar . . . . .	18
3.1.1 Função geradora e Diferenciabilidade do Bilhar . . . . .	19
3.1.2 A derivada da aplicação do bilhar . . . . .	27
3.1.3 Conclusão . . . . .	32
3.2 Um exemplo interessante . . . . .	33
3.3 Propriedades Twist . . . . .	39
<b>4 Órbitas Periódicas</b>	<b>42</b>
4.1 Propriedades gerais . . . . .	42
4.2 Classificação de órbitas Periódicas . . . . .	44
4.3 Órbitas periódicas hiperbólicas . . . . .	50
4.3.1 Perturbações normais de ovais . . . . .	51
<b>5 Bilhar circular perturbado</b>	<b>68</b>
5.1 Círculos geodésicos perturbados . . . . .	68
5.2 Curvas invariantes ressonantes . . . . .	70

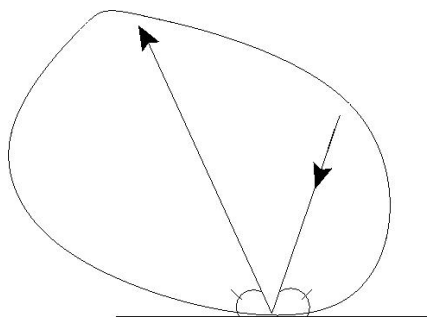
5.2.1	Potencial Radial de Melnikov . . . . .	73
<b>6</b>	<b>Medida de Hausdorff do conjunto da órbitas de período três</b>	<b>82</b>
6.1	Um bit de teoria da medida de Hausdorff . . . . .	83
6.2	Conjuntos s-dimensionais $1 < s \leq 2$ . . . . .	85
6.3	Resultados auxiliares . . . . .	87
6.4	Prova do teorema 6 . . . . .	88
6.5	Prova do teorema 7 . . . . .	89
	<b>Referências Bibliográficas</b>	<b>91</b>



# Capítulo 1

## Introdução

Nosso objeto de estudo nesse trabalho é o problema do bilhar em superfícies de curvatura Gaussiana constante. O problema do bilhar no plano Euclidiano introduzido por Birkhoff [(1)] no começo do século XX, consiste no estudo do movimento retilíneo livre de uma partícula dentro de uma região plana limitada por uma curva fechada, refletindo elasticamente nos impactos com o bordo.



Seja  $S$  uma superfície Riemanniana, completa e de curvatura gaussiana constante  $K$ . Ou seja,  $S$  é, ou o plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$  se  $K = -1$  ou a esfera unitária  $\mathbb{S}^2$  se  $K = 1$ , ou o plano Euclidiano  $M = \mathbb{E}^2$  se  $K = 0$ . Dada uma curva fechada  $\Gamma$  em  $S$ , o bilhar consiste do movimento livre de uma partícula na região limitada por essa curva. Tal movimento é realizado através de geodésicas e as colisões com a  $\Gamma$  seguem a lei *ângulo de incidência igual ao ângulo de reflexão*.

Quando o bordo  $\Gamma$  é uma oval (i.e. uma curva, fechada, regular, simples, orientada, pelo menos  $C^2$ , e estritamente convexa, este problema define uma classe de difeomorfismos conservativos bidimensionais que são matematicamente simples, no sentido de que a geometria do espaço de configurações permite simplificar muitas das questões da dinâmica, e que são numericamente tratáveis, permitindo uma exploração computacional importante

na compreensão da dinâmica.

Estas características permitem que sejam usados como modelos simplificados no estudo de geodésicas, em ótica, acústica, mecânica estatística, física de partículas, astrofísica e sirvam de terreno ideal para comparações entre mecânica clássica e mecânica quântica. Além disto, os fenômenos que ocorrem nos bilhares, aparecem na classe maior dos sistemas dinâmicos conservativos e portanto, o sucesso na compreensão da dinâmica dos bilhares possui valor intrínseco para a área e contribui para a solução de problemas mais gerais de sistemas dinâmicos.

Denotaremos por  $S$  uma das três superfícies: o plano Euclidiano  $\mathbb{E}$ , um hemisfério da esfera unitária  $\mathbb{S}_+^2$  ou o plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$ . Esse problema é modelado da seguinte forma: Seja  $\Gamma$  uma oval contida em  $S$ , isto é, uma curva simples, fechada, pelo menos  $C^2$ , geodesicamente estritamente convexa e com curvatura geodésica estritamente positiva. Sendo  $S$  uma superfície completa temos que dado  $\Gamma(s_0)$  no traço da curva  $\Gamma$  e um vetor  $\vec{v}_0$  unitário em  $T_{\Gamma(s_0)}S$  apontando para dentro da região limitada por  $\Gamma$ , existe uma única geodésica  $\gamma$  que parte de  $\gamma(s_0)$  tem  $\vec{v}_0$  como vetor tangente. Sendo  $\Gamma$  uma curva fechada, a geodésica  $\gamma$  interceptará  $\Gamma$  em um novo ponto  $\Gamma(s_1)$  que é único pela convexidade geodésica de  $\Gamma$ . Sejam  $0 < \psi_0 < \pi$  o ângulo do vetor tangente  $\gamma'(s_0)$  ao vetor  $\vec{v}_0$  e  $0 < \psi_1 < \pi$  o ângulo, entre o vetor tangente  $\Gamma'(s_1)$  e o vetor tangente à geodésica  $\gamma$  em  $\alpha(s_1)$ , denotado por  $\gamma'(s_1)$ . Dizemos que  $s_1$  e  $\psi_1$  são, respectivamente, ponto de saída e ângulo de saída e dizemos que  $\psi_2$  é o ângulo de batida (ou ângulo de incidência) da partícula em  $\Gamma(s_2)$ . Definimos a trajetória da partícula após a reflexão como sendo a geodésica que parte de  $\alpha(s_1)$  na direção dada pelo vetor  $\vec{v}_1$  que é a reflexão de  $\gamma'(s_1)$  pelo vetor tangente  $\Gamma'(s_1)$ . Assim, por construção, temos que o ângulo de  $\alpha'(s_1)$  a  $\vec{v}_1$ , dito ângulo de reflexão, é  $\psi_1$ . Como no caso do problema original de Birkhoff, temos assim definida a aplicação do bilhar  $\mathcal{F} : [0, l] \times (0, \pi) \mapsto [0, l] \times (0, \pi)$ ,  $\mathcal{F}(s_0, \psi_0) = (s_1, \psi_1)$ .

Nesse trabalho, seguindo a tradição iniciada por Birkhoff, no capítulo 3, mostramos que aplicação de bilhar admite um tratamento variacional, o que significa que relacionamos órbitas da aplicação a pontos críticos de um determinado funcional, a ação associada ao problema. A partir dessa descrição podemos explorar vários aspectos da dinâmica do bilhar como, propriedade de twist, trajetórias periódicas, curvas invariantes, etc.

As trajetórias do bilhar são poligonais geodésicas dentro da região do movimento, com vértices na curva  $\Gamma$ . Trajetórias periódicas, com período  $n \geq 2$ , por voltarem ao ponto inicial depois de  $n$  batidas, serão polígonos inscritos, com exatamente  $n$  vértices. Chamamos de  $(k, n)$ -trajetória à trajetória de período  $n$  que dá  $k$  voltas em  $\Gamma$ , antes de fechar. Mostraremos no capítulo 3 que para bilhares em  $S$ , assim como Birkhoff em [(1)] para o plano Euclidiano, se  $\Gamma$  é uma oval então para cada par  $(k, n)$ ,  $0 < k/n < 1$  e  $\text{mdc}(k, n) = 1$ , existem pelo menos duas  $(k, n)$ -trajetórias, correspondendo a polígonos distintos. No es-

tudo do caso esférico encontramos um exemplo de bilhar que possui apenas órbitas de período dois: o bilhar em um equador. Tal exemplo é impossível em bilhares planos e se deve à existência de pontos conjugados na esfera.

Apresentamos, ainda nesse capítulo, propriedades dinâmicas do bilhar circular como integrabilidade, existência de causticas, órbitas periódicas e propriedade twist. Tais propriedades, conhecidas para o bilhar no círculo plano foram provadas aqui. Utilizamos um programa de geometria não euclideana, *noneuclid* (6), para uma visualização de tais propriedades no espaço de configuração do bilhar no círculo hiperbólico e o maple para o caso esférico.

Já no capítulo 4, demonstraremos para bilhares em  $S$  o seguinte resultado: Em  $\mathbb{E}^2$  e  $\mathbb{H}^2$  é aberto e denso o conjunto das ovas  $C^\infty$  para as quais existe apenas uma quantidade finita de órbitas periódicas da aplicação do bilhar para cada período  $n$  e elas são todas hiperbólicas. Para o caso do bilhar na esfera  $\mathbb{S}_+^2$  esse conjunto é apenas aberto. Tal prova será construída baseada em idéias usadas para provar um resultado similar desenvolvido em [(7)], contudo algumas adaptações foram necessárias.

No capítulo 5 construímos o Potencial Radial de Melnikov para perturbações do bilhar circular geodésico em  $S$ . Dada uma perturbação do círculo em  $\mathbb{E}$ , Ramírez-Ros em [(22)] determina condições para que uma reta ressonante, não seja preservada e além disso não exista toro invariante com o mesmo número de rotação da reta. A principal ferramenta utilizada é o Potencial Radial de Melnikov. Usando as mesmas técnicas, obtivemos condições sobre as perturbações de círculos geodésicos que garantem a quebra de curvas ressonantes.

No capítulo 6 estudamos o conjunto  $P_n$ , de todas órbitas periódicas de período  $n$  da aplicação do bilhar em  $\mathbb{E}^2$ ,  $\mathbb{S}_+^2$  e  $\mathbb{H}^2$ . significativo é esse conjunto do ponto de vista da medida de Lebesgue, ou seja, teria esse conjunto medida de Lebesgue nula? Para trabalharmos essa questão podemos considerar cada período separadamente. O conjunto  $P_2$  possui medida de Lebesgue nula em  $\mathbb{E}$  e  $\mathbb{H}^2$ . No caso esférico, entretanto, podemos ter medida de Lebesgue de  $P_2$  positiva. Em (24), Richlik, mostrou que o conjunto das órbitas de período três possui também medida de Lebesgue nula, utilizando-se de informações adquiridas por algumas simulações numéricas. Em [(34)] esse mesmo resultado foi demonstrado por Wojtkowski para bilhares no plano Euclidiano utilizando dessa vez uma abordagem via campos de Jacobi. Utilizando a abordagem via campos de Jacobi introduzida por Wojtkowski, [(5)], Blumen, Kim, Nance e Zharnitsky mostram que  $P_3$  também possui medida de Lebesgue nula para bilhares estritamente geodesicamente convexos. Além disso, eles conseguiram construir um bilhar apenas geodesicamente convexo onde  $P_3$  tem interior não vazio, mostrando com isso que a condição de convexidade geodésica estrita é necessária. Outra questão possível, abordada em [(32)] para bilhares planos

por Zharnitsky e Merenkov, é qual a "forma" possível para esse conjunto? No plano Euclidiano, eles demonstraram que esse conjunto tem medida de Hausdorff no máximo 1 e se esse valor extremo for atingido o conjunto de órbitas de período 3 possui reta tangente em quase todo ponto no sentido da medida de Hausdorff. Essa conclusão é interessante e a estenderemos para bilhares em  $\mathbb{S}_+^2$  e  $\mathbb{H}^2$ . Isso será feito utilizando os resultados de [(5)] e as ferramentas desenvolvidas nos capítulos anteriores.

# Capítulo 2

## Modelos de Geometria

Nosso objetivo nesse capítulo é listar resultados sobre a geometria de curvas parametrizadas em uma superfície  $S$  completa de curvatura constante  $K$ . É demonstrado em [(9)] que ser completa e de curvatura gaussiana constante implica que  $S$  é isométrica ao plano Euclidiano  $\mathbb{E}^2$ , à esfera unitária  $\mathbb{S}^2$  ou ao plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$  se respectivamente  $K = 0$ ,  $K = 1$  ou  $K = -1$ . Assim, daqui por diante  $S = \mathbb{E}^2$ ,  $S = \mathbb{S}^2$  ou  $S = \mathbb{H}^2$ .

Esse estudo será concentrado nas propriedades geométricas e diferenciais de curvas nas respectivas superfícies. Apenas para fins de analogia com os casos esférico e hiperbólico apresentaremos para o caso Euclidiano o que também será descrito para os outros dois casos.

### 2.1 Plano Euclidiano

Consideremos o espaço  $\mathbb{R}^2$  munido com a métrica Euclidiana, que denotaremos por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Denotemos por  $\mathbb{E}^2$  essa superfície de  $\mathbb{R}^3$ .

As coordenadas polares em  $\mathbb{R}^2$

$$\mathbf{x}(r, \theta) = (r \cos \theta, r \sin \theta, 0)$$

com  $0 < r$  e  $0 < \theta < 2\pi$  definem uma parametrização de  $\mathbb{E}^2$ .

Denotaremos por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  para denotar a métrica Euclidiana em  $\mathbb{E}^2$  que é o produto interno canônico de  $\mathbb{R}^3$  dado por  $\langle (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \rangle = x_1 x_2 + y_1 y_2 + z_1 z_2$  restrito ao plano.

Observação: Um vetor tangente  $\vec{V}$  a  $\mathbb{E}^2$  em um ponto  $P$  é um vetor de  $\vec{V} \in \mathbb{R}^3$  que satisfazem  $\langle \vec{V}, (0, 0, 1) \rangle = 0$ .

O seguinte resultado caracteriza geodésicas em  $\mathbb{E}^2$ .

**Lema 1.** 1. Dados um ponto  $A \in \mathbb{E}^2$  e um vetor  $\vec{T}$  tangente unitário em  $A$ , a geodésica  $\gamma(t)$  que passa por  $A$  na direção  $\vec{T}$  possui equação:

$$\gamma(t) = A + \vec{T}t$$

2. A distância geodésica  $g(A, B)$  é:

$$g^2(A, B) = \langle A - B, A - B \rangle \quad (2.1)$$

Sobre as isometrias de  $\mathbb{E}^2$  temos:

**Proposição 1.** As isometrias de  $\mathbb{E}^2$  são as transformações lineares ortogonais de  $\mathbb{R}^3$  que preservam o plano.

Sobre ângulos em  $\mathbb{E}^2$  temos

**Definição 1.** Dados dois vetores  $\vec{V}$  e  $\vec{U}$  unitários tangentes em um ponto  $P \in \mathbb{E}^2$  qualquer, temos que o ângulo,  $\angle(\vec{V}, \vec{U})$ , entre eles é:

$$\cos \angle(\vec{V}, \vec{U}) = \langle \vec{V}, \vec{U} \rangle$$

Como um exemplo de aplicação do lema anterior temos:

**Proposição 2.** Seja o triângulo geodésico em  $\mathbb{S}^2$  com vértices  $A, B$  e  $C$ , os lados  $AB, BC$  e  $CA$  medindo respectivamente  $a, b$  e  $c$ . Denotando por  $\hat{A}, \hat{B}$  e  $\hat{C}$  os ângulos dos respectivos vértices  $A, B$  e  $C$  temos as relações:

- Lei dos cossenos

$$a^2 = b^2 + c^2 - 2bc \cos \hat{A}$$

- Lei dos senos

$$\frac{\sin \hat{A}}{a} = \frac{\sin \hat{B}}{b} = \frac{\sin \hat{C}}{c}$$

A propriedade abaixo, é consequência dessa proposição, e vale também para  $\mathbb{S}^2$  e  $\mathbb{H}^2$

**Corolário 1.** Triângulos geodésicos isósceles possuem ângulos da base iguais.

### 2.1.1 Sobre curvas em $\mathbb{E}^2$

**Definição 2.** *Uma curva parametrizada em  $\mathbb{E}^2$  é uma aplicação  $\Gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^2$  de classe  $C^q$ ,  $q \geq 0$  dada por:*

$$\Gamma(t) := \mathbf{x}(r(t), \theta(t))$$

onde  $r(t)$  e  $\theta(t)$  são funções diferenciáveis de classe  $C^q$ .

Observação: Será útil, para fins de analogia, considerar  $\Gamma(s)$  uma curva em  $\mathbb{R}^3$  acrescentando-se a ela a terceira coordenada nula.

**Definição 3.** *Uma curva em  $\mathbb{E}^2$  é dita parametrizada pelo comprimento de arco,  $s$ , se  $\langle \Gamma'(s), \Gamma'(s) \rangle = 1$ , onde  $\Gamma'(s)$  é o vetor tangente a  $\Gamma$  em  $s$  e  $'$  é a derivada com relação a  $s$ .*

Se  $\Gamma$  está parametrizada pelo comprimento de arco temos

$$\langle \Gamma''(s), \Gamma'(s) \rangle = 0$$

Dessa forma, obtemos que

$$\Gamma''(s) = \kappa(s) \vec{N}(s)$$

onde  $\vec{N}(s) = (0, 0, 1) \times \Gamma'(s)$  e  $\kappa$  são respectivamente o vetor normal (na orientação positiva de  $\mathbb{R}^3$ ) e a curvatura geodésica de  $\Gamma$  em  $s$ . Daí:

$$\kappa(s) = \langle \Gamma''(s), (0, 0, 1) \times \Gamma'(s) \rangle \quad (2.2)$$

Nosso próximo objetivo abordar a noção de curva convexa.

**Definição 4** (Convexidade Geodésica). *Uma curva regular  $\Gamma$  é dita geodesicamente estritamente convexa se qualquer geodésica tangente a  $\Gamma$  a intercepta em no máximo um ponto.*

O seguinte resultado nos cuja prova pode ser encontrada em [(2)] nos diz que curvatura geodésica positiva é uma condição suficiente para uma curvas simples fechadas ser geodesicamente estritamente convexa.

**Lema 2.** *Uma curva regular  $\Gamma$  simples e fechada cuja curvatura geodésica é positiva é geodesicamente estritamente convexa.*

## 2.2 Esfera

Consideremos o espaço  $\mathbb{R}^3$  munido com a métrica Euclideana, que denotaremos por  $\langle \cdot, \cdot \rangle$ . Denotemos por  $\mathbb{S}_+^2$  o subconjunto dos vetores  $V = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  em  $\mathbb{R}^3$  satisfazendo  $x^2 + y^2 + z^2 = 1$ .

A aplicação

$$\mathbf{x}(\phi, \theta) = (\sin \phi \cos \theta, \sin \phi \sin \theta, \cos \phi)$$

com  $0 < \phi < \pi$  e  $0 < \theta < 2\pi$ , torna  $\mathbb{S}^2$  uma superfície de  $\mathbb{R}^3$  com primeira forma fundamental

$$I(\vec{V}) = a^2 + \sin^2 \phi b^2$$

onde  $\vec{V} = a\mathbf{x}_\phi + b\mathbf{x}_\theta$  é um vetor no plano tangente a  $\mathbb{S}_+^2$  em  $\mathbf{x}(\phi, \theta)$  e  $\mathbf{x}_\phi, \mathbf{x}_\theta$  são as direções principais no plano tangente.

Sem chance de confusão vamos escrever  $\langle \cdot, \cdot \rangle$  também para denotar a métrica induzida em  $\mathbb{S}^2$ .

Observação: Um vetor tangente  $\vec{V}$  a  $\mathbb{S}^2$  em um ponto  $P$  é um vetor de  $\vec{V} \in \mathbb{R}^3$  que satisfazem  $\langle \vec{V}, P \rangle = 0$ .

O seguinte resultado caracteriza geodésicas em  $\mathbb{S}^2$ .

**Lema 3.** 1. *As geodésicas de  $\mathbb{S}_+^2$  são os círculos máximos, curvas obtidas pela interseção de  $\mathbb{S}^2$  por planos de  $\mathbb{R}^3$  que passam pela origem;*

2. *Dados um ponto  $A \in \mathbb{S}^2$  e um vetor  $T$  tangente unitário à esfera em  $A$ , a geodésica  $\gamma(t)$  que passa por  $A$  na direção  $T$  possui equação:*

$$\gamma(t) = A \cos t + T \sin t$$

3. *A distância geodésica  $g(A, B)$  é:*

$$\cos g(A, B) = \langle A, B \rangle \tag{2.3}$$

Sobre as isométries de  $\mathbb{S}^2$  temos:

**Proposição 3.** *As isometrias de  $\mathbb{S}^2$  são as transformações lineares ortogonais de  $\mathbb{R}^3$  que a preservam.*



Sobre ângulos em  $\mathbb{S}^2$  temos

**Definição 5.** *Dados dois vetores  $\vec{V}$  e  $\vec{U}$  unitários tangentes a  $\mathbb{S}$  em um ponto  $P \in \mathbb{S}^2$  qualquer, temos que o ângulo,  $\angle(\vec{V}, \vec{U})$ , entre eles é:*

$$\cos \angle(\vec{V}, \vec{U}) = \langle \vec{V}, \vec{U} \rangle$$

Como um exemplo de aplicação do lema anterior temos:

**Proposição 4.** *Seja o triângulo geodésico em  $\mathbb{S}^2$  com vértices  $A, B$  e  $C$ , os lados  $AB, BC$  e  $CA$  medindo respectivamente  $a, b$  e  $c$ . Denotando por  $\hat{A}, \hat{B}$  e  $\hat{C}$  os ângulos dos respectivos vértices  $A, B$  e  $C$  temos as relações:*

- *Lei dos cossenos 1*

$$\cos(\hat{A}) = \frac{\cos b \cos c - \cos a}{\text{sen } b \text{sen } c}$$

- *Lei dos cossenos 2*

$$\cos a = \frac{\cos \hat{B} \cos \hat{C} - \cos \hat{A}}{\text{sen } \hat{B} \text{sen } \hat{C}}$$

- *Lei dos senos*

$$\frac{\sin \hat{A}}{\text{sen } a} = \frac{\sin \hat{B}}{\text{sen } b} = \frac{\sin \hat{C}}{\text{sen } c}$$

É consequência dessa proposição acima:

**Corolário 2.** *Triângulos geodésicos isósceles possuem ângulos da base iguais.*

### 2.2.1 Sobre curvas em $\mathbb{S}^2$

Essa seção está baseada em [(9)].

**Definição 6.** *Uma curva parametrizada em  $\mathbb{S}_+^2$  é uma aplicação  $\Gamma : I \rightarrow \mathbb{R}^3$  de classe  $C^q$ ,  $q \geq 0$  satisfazendo*

$$\langle \Gamma(t), \Gamma(t) \rangle = 1$$

e será dada por:

$$\Gamma(t) := \mathbf{x}(\phi(t), \theta(t))$$

onde  $\phi(t)$  e  $\theta(t)$  são funções diferenciáveis de classe  $C^q$ .

Observação: Visto como vetor,  $\Gamma(s)$ , é normal à esfera no ponto  $\Gamma(s)$ .

**Definição 7.** *Uma curva em  $\mathbb{S}^2$  é dita parametrizada pelo comprimento de arco,  $s$ , se  $\langle \Gamma'(s), \Gamma'(s) \rangle = 1$ , onde  $\Gamma'(s)$  é o vetor tangente a  $\Gamma$  em  $s$  e  $'$  é a derivada com relação a  $s$ .*

Se  $\Gamma$  está parametrizada pelo comprimento de arco temos

$$\left\langle \frac{D\Gamma'}{ds}(s), \Gamma'(s) \right\rangle = 0$$

onde  $\frac{D}{ds}$  é a derivada covariante em  $\mathbb{S}_+^2$ . Dessa forma, obtemos que

$$\frac{D\Gamma'}{ds}(s) = \kappa(s)\vec{N}(s)$$

onde  $\vec{N}(s) = \Gamma(s) \times \Gamma'(s)$  é o vetor normal unitário de  $\Gamma$  em  $s$  e  $\kappa$  é a curvatura geodésica. Daí:

$$\kappa(s) = \left\langle \frac{D\Gamma'}{ds}, \Gamma(s) \times \Gamma'(s) \right\rangle \quad (2.4)$$

Nosso próximo objetivo é abordar a noção de curva convexa para a superfície esférica. De acordo com Santaló [(26)] temos a seguinte definição de curvas convexas na esfera:

**Definição 8.** *[Convexidade Geodésica] Uma curva regular  $\Gamma$  na esfera é dita geodesicamente estritamente convexa se qualquer geodésica tangente a  $\Gamma$  a intercepta em no máximo um ponto.*

Lembrando que as geodésicas de  $\mathbb{S}^2$  são os círculos máximos, segue dessa definição que a área de uma curva  $\Gamma$  geodesicamente convexa é menor que  $2\pi$  além do fato de que ela deve estar contida em um hemisfério.

O seguinte resultado nos fornece uma caracterização para curvas simples fechadas geodesicamente estritamente convexas.

**Lema 4.** *Uma curva regular  $\Gamma$  simples e fechada cuja curvatura geodésica é positiva é geodesicamente estritamente convexa.*

Apesar de ainda não termos encontrado a demonstração desse fato existem na literatura, [(29)] pag. 170, afirmativas que nos levam a crer que existe uma demonstração. Podemos no entanto mostrar um resultado mais fraco:

*Curvatura geodésica positiva em todo ponto implica que  $\Gamma$  é localmente estritamente geodesicamente convexa.*

## 2.3 Plano Hiperbólico

O modelo do plano hiperbólico objeto de trabalho aqui é o da folha do hiperboloide essa seção está baseada em [(23)], [(18)] e [(30)].

Denotemos por  $\mathbb{M}^3$  o espaço vetorial real  $\mathbb{R}^3$  munido com a forma quadrática  $q(x, y, z) = x^2 + y^2 - z^2$ . O espaço  $\mathbb{R}^3$  com essa métrica é conhecido com espaço de Minkowski. Se  $\vec{V} = (v_1, v_2, v_3)$  e  $\vec{U} = (u_1, u_2, u_3)$  são vetores em  $\mathbb{R}^3$  definimos, o produto

$$\ll \vec{V}, \vec{U} \gg = \frac{1}{2}q(\vec{U} + \vec{V}) - q(\vec{V}) - q(\vec{U})$$

, i.e,

$$\ll V, U \gg = v_1u_1 + v_2u_2 - v_3u_3$$

Esse produto é conhecido com métrica de Lorentz e aparece naturalmente em relatividade. Ele possui as seguintes propriedades: É *bilinear*, *simétrico* e *não degenerado*, ou seja se  $\ll \vec{U}, \vec{V} \gg = 0$  para todo  $\vec{U}$  então  $\vec{V} = 0$ . Mesmo definindo uma métrica que não é positiva definida o espaço de Minkowski possui também as noções de conexão, derivada covariante, geodésicas, isométries, etc. Um estudo detalhado desse espaço pode ser encontrado em [(18)].

Cada vetor em  $\mathbb{M}$  pode ser três tipos causais:

1. *Tipo espaço*: Se  $\ll \vec{V}, \vec{V} \gg > 0$
2. *Tipo tempo*: Se  $\ll \vec{V}, \vec{V} \gg < 0$
3. *Tipo luz*: Se  $\ll \vec{V}, \vec{V} \gg = 0$

Denotemos por  $\mathbb{H}^2$  o subconjunto dos vetores  $V = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$  em  $\mathbb{M}^3$  satisfazendo  $q(\vec{V}) = -1$  e  $z > 0$  com a métrica induzida de  $\mathbb{M}^3$ . Graficamente,  $\mathbb{H}^2$  corresponde à folha do hiperbolóide de duas folhas dada por  $z = \sqrt{1 + x^2 + y^2}$

A aplicação

$$\mathbf{x}(\rho, \theta) = (\sinh \rho \cos \theta, \sinh \rho \sin \theta, \cosh \rho)$$

com  $0 < \rho$  e  $0 < \theta < 2\pi$ , torna  $\mathbb{H}^2$  uma superfície de  $\mathcal{M}^3$  com primeira forma fundamental

$$I(\vec{V}) = a^2 + \sinh^2 \rho b^2$$

onde  $\vec{V} = a\mathbf{x}_\rho + b\mathbf{x}_\theta$  é um vetor no plano tangente a  $\mathbb{H}^2$  em  $\mathbf{x}(\rho, \theta)$  e  $\mathbf{x}_\rho$ ,  $\mathbf{x}_\theta$  são as direções principais no plano tangente.

Sem chance de confusão vamos escrever  $\ll \cdot, \cdot \gg$  também para denotar a métrica induzida em  $\mathbb{H}^2$ .

Observação: Vetores tangentes a  $\mathbb{H}^2$  em um ponto  $p$  são os vetores de  $\vec{V} \in \mathbb{E}^3$  que satisfazem  $\ll \vec{V}, p \gg = 0$  e eles são do tipo espaço, isto é,  $I(\cdot)$  é definida positiva.

Com tudo isso temos que  $\mathbb{H}^2$  é um superfície Riemanniana do espaço de Minkowski. Esse é o modelo de Klein para o plano Hiperbólico.

**Lema 5** ((23)). 1. As geodésicas de  $\mathbb{H}^2$  são curvas obtidas pela interseção de  $\mathbb{H}^2$  por planos de  $\mathbb{R}^3$  que passam pela origem;

2. Dados um ponto  $A \in \mathbb{H}^2$  e um vetor  $T$  tangente unitário a  $\mathbb{H}^2$  em  $A$ , a geodésica  $\gamma(t)$  que passa por  $A$  na direção  $T$  possui equação:

$$\gamma(t) = A \cosh t + T \sinh t$$

3. A distância geodésica  $g(A, B)$  é:

$$\cosh g(A, B) = - \ll A, B \gg \quad (2.5)$$

Sobre ângulos em  $\mathbb{H}^2$  temos

**Definição 9** ((23)). Dados dois vetores  $\vec{V}$  e  $\vec{U}$  tangentes a  $\mathbb{H}^2$  em um ponto  $P \in \mathbb{H}^2$  qualquer, temos que o ângulo,  $\angle(\vec{V}, \vec{U})$ , entre eles é:

$$\cos \angle(\vec{V}, \vec{U}) = \ll \vec{V}, \vec{U} \gg$$

Como um exemplo de aplicação do cálculo de ângulo em  $\mathbb{H}^2$  temos:

**Proposição 5** ((25)). Considere um triângulo geodésico em  $\mathbb{H}^2$  com vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$ , os lados  $AB$ ,  $BC$  e  $CA$  medindo respectivamente  $a$ ,  $b$  e  $c$ . Denotando por  $\hat{A}$ ,  $\hat{B}$  e  $\hat{C}$  os ângulos dos respectivos vértices  $A$ ,  $B$  e  $C$  temos as relações:

• Lei dos cossenos 1

$$\cos(\hat{A}) = \frac{\cosh b \cosh c - \cosh a}{\sinh b \sinh c}$$

• Lei dos cossenos 2

$$\cosh a = \frac{\cosh \hat{B} \cos \hat{C} - \cos \hat{A}}{\sen \hat{B} \sen \hat{C}}$$

• Lei dos senos

$$\frac{\sin \hat{A}}{\sinh a} = \frac{\sin \hat{B}}{\sinh b} = \frac{\sin \hat{C}}{\sinh c}$$

### 2.3.1 Sobre curvas em $\mathbb{H}^2$

Essa seção está baseada no livro [(18)] e em [(30)].

**Definição 10.** *Uma curva parametrizada em  $\mathbb{H}^2$  é uma aplicação  $\Gamma : I \rightarrow \mathbb{M}^3$  de classe  $C^q$ ,  $q \geq 0$  satisfazendo*

$$\ll \Gamma(t), \Gamma(t) \gg = -1$$

e será dada por:

$$\Gamma(t) := \mathbf{x}(\rho(t), \theta(t))$$

onde  $\rho(t)$  e  $\theta(t)$  são funções diferenciáveis de classe  $C^q$ .

Observação: Curvas em  $\mathbb{H}^2$  são do tipo tempo. O vetor  $\Gamma(s)$  é o vetor normal unitário ao hiperboloide no ponto  $\Gamma(s)$ .

**Definição 11.** *Uma curva em  $\mathbb{H}^2$  é dita parametrizada pelo comprimento de arco,  $s$ , se  $\ll \Gamma'(s), \Gamma'(s) \gg = 1$ , onde  $\Gamma'(s)$  é o vetor tangente a  $\Gamma$  em  $s$  e  $'$  é a derivada com relação a  $s$ .*

Se  $\Gamma$  está parametrizada pela comprimento de arco temos

$$\ll \frac{D\Gamma'}{ds}(s), \Gamma'(s) \gg = 0$$

onde  $\frac{D}{ds}$  é a derivada covariante em  $\mathbb{H}^2$ . Dessa forma, obtemos que

$$\frac{D\Gamma'}{ds}(s) = \kappa(s)\vec{N}(s)$$

onde  $\vec{N}(s) = \Gamma(s) \wedge \Gamma'(s)$  é o vetor normal unitário de  $\Gamma$  em  $s$  e  $\kappa$  é a curvatura geodésica.

Daí:

$$\kappa(s) = \ll \frac{D\Gamma'}{ds}, \Gamma(s) \wedge \Gamma'(s) \gg \quad (2.6)$$

Onde  $\wedge$  é o produto exterior em  $\mathbb{M}^3$ .

Uma demonstração para essa caracterização de curvas geodesicamente (estritamente) convexas no plano hiperbólico pode ser encontrada em [(4)].

Nosso próximo objetivo abordar a noção de curva convexa para o plano hiperbólico. De acordo com Santaló [(27)] temos a seguinte definição de curvas convexas na esfera:

**Definição 12** (Convexidade Geodésica). *Uma curva regular  $\Gamma$  no plano hiperbólico é dita geodesicamente estritamente convexa se qualquer geodésica tangente a  $\Gamma$  a intercepta em no máximo um ponto.*

O seguinte resultado, cuja prova pode ser encontrada em [(4)], nos fornece uma condição suficiente para que curvas simples fechadas sejam geodesicamente estritamente convexas.

**Lema 6.** *Uma curva regular  $\Gamma$  simples e fechada cuja curvatura geodésica é positiva em todo ponto é geodesicamente estritamente convexa.*

# Capítulo 3

## Bilhares

Bilhares planos têm sido amplamente estudados desde o início do século XX. Na literatura existem várias referências sobre tais bilhares por exemplo [(16)], [(13)], [(28)], [(12)] entre outras. Nosso objetivo nesse capítulo é estudar um caso especial de bilhares na esfera unitária  $\mathbb{S}^2$  e no Plano Hiperbólico  $\mathbb{H}^2$ . Construiremos e demonstraremos versões de alguns resultados de bilhares no plano euclidiano para bilhares em  $\mathbb{S}$  e em  $\mathbb{H}^2$ . Com a finalidade de enxugar a escrita e visando a celeridade textual utilizaremos o símbolo  $S$  para representar o plano Euclidiano  $\mathbb{E}^2$ , a esfera unitária  $\mathbb{S}_+^2$  e o plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$  cujos modelos foram apresentados no capítulo 2.

Um dos primeiros e fundamental resultado para o estudo da aplicação do bilhar é o seguinte:

*A aplicação do bilhar em uma região limitada  $B$  convexa do plano Euclidiano é um difeomorfismo Twist que preserva a medida de Lebesgue e possui classe de diferenciabilidade uma a menos que a classe da fronteira de  $B$ .*

Este resultado foi primeiro provado por Birkhoff, para bilhares em  $\mathbb{E}^2$ . Esse será também nosso primeiro e inédito objetivo para bilhares convexos em  $S$ :

*A aplicação do bilhar em uma região limitada  $B$  com bordo pelo menos  $C^2$  geodesicamente convexo convexa em  $S$  é um difeomorfismo Twist que preserva a medida de Lebesgue e possui classe de diferenciabilidade pelo menos  $C^1$ .*

Na literatura [(5)] e [(3)] esse resultado é afirmado mas nenhuma prova é conhecida. No trabalho [(3)], visando a extensão de um resultado de Wojtkowski sobre a caracterização de círculos geodésicos, Bialy utiliza as equações do lema 10 que são os fundamentais no nosso resultados. O nosso lemma 10 é demonstrado utilizando o estudo dos modelos

de geometria desenvolvido no capítulo 2.

Como nosso objeto de trabalho serão os bilhares geodesicamente convexos, em vista da definição 8, o estudo de bilhares na esfera será feito considerando-se apenas um hemisfério que será denotado por  $S = \mathbb{S}_+^2$ .

Teminamos essa introdução com uma nota de organização. Na seção 3.1 construíremos a aplicação de bilhar e demonstraremos que bilhares geodesicamente convexos em  $S$  são difeomorfismos twist conservativos e obteremos a expressão para a derivada da aplicação do bilhar em  $S$ , de forma inédita para  $\mathbb{S}_+^2, \mathbb{H}^2$ . Apresentaremos na seção 3.2 um primeiro exemplo de aplicação de bilhar: O bilhar em círculos geodésicos juntamente com a demonstração de suas principais propriedades dinâmicas. Finalizaremos esse capítulo com a extensão de alguns resultados de bilhares planos para bilhares na semiesfera e no plano hiperbólico que derivam da propriedade de twist.

### 3.1 Aplicação do Bilhar

Sejam  $S = \mathbb{E}^2, \mathbb{S}_+^2$  ou  $\mathbb{H}^2$  e  $\Gamma$  uma oval em  $S$ , isto é, de classe  $\mathcal{C}^q$  com  $q \geq 2$ , simples, fechada, orientada positivamente e com curvatura geodésica positiva ( $\kappa > 0$ ). Denotaremos por  $|\Gamma|$  o comprimento total da curva  $\Gamma$ .

Suponhamos  $\Gamma$  parametrizada pelo comprimento de arco, i.e,  $\|\Gamma'(s)\| = 1$ , onde  $\|\cdot\|$  representa a norma Euclideana se  $S = \mathbb{E}^2$ , a Hiperbólica no caso  $S = \mathbb{H}^2$  e a esférica para  $S = \mathbb{S}_+^2$ . Aqui  $'$  é a derivada com relação a  $s$ . Da parametrização pelo comprimento de arco temos que sem risco de confusão podemos nos referir a um ponto  $\Gamma(s)$  apenas como  $s$ .

Vamos construir uma aplicação a tempo discreto que nos ajudará a estudar o seguinte fenômeno:

*Uma partícula se move sobre a superfície  $S$  seguindo uma trajetória geodésica com velocidade constante igual a um, no interior de uma região limitada, com bordo suave e sofrendo colisões elásticas com tal bordo.*

Podemos descrever esse problema da forma seguinte: Como  $S$  uma superfície completa temos que dado  $s_1$  na curva  $\Gamma$  e um vetor  $\vec{v}_1$  unitário em  $T_{s_1}S$  apontando para dentro da região limitada por  $\Gamma$ , existe uma única geodésica  $\gamma$  que parte de  $s_1$  tem  $\vec{v}_1$  como vetor tangente. Sendo  $\Gamma$  uma curva fechada, a geodésica  $\gamma$  interceptará  $\Gamma$  em um novo ponto  $s_2$  que é único pela convexidade geodésica de  $\Gamma$ . Sejam  $0 < \psi_1 < \pi$  o ângulo do vetor tangente  $\Gamma'(s_1)$  ao vetor  $\vec{v}_1$  e  $0 < \psi_2 < \pi$  o ângulo, entre o vetor tangente  $\Gamma'(s_2)$  e o vetor tangente à geodésica  $\gamma$  em  $s_2$ , denotado por  $\gamma'(s_2)$ . Dizemos que  $s_1$  e  $\psi_1$  são,



respectivamente, ponto de saída e ângulo de saída e dizemos que  $\psi_2$  é o ângulo de batida (ou ângulo de incidência) da partícula em  $s_2$ . Definimos a trajetória da partícula após a reflexão como sendo a geodésica que parte de  $s_2$  na direção dada pelo vetor  $\vec{v}_2$  que é a reflexão de  $\gamma'(s_2)$  pelo vetor tangente  $\Gamma'(s_2)$ . Assim, por construção, temos que o ângulo de  $\Gamma'(s_2)$  a  $\vec{v}_2$ , dito ângulo de reflexão, é  $\psi_2$ .

Seja  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/\|\Gamma\|\mathbb{Z}$  e  $\mathcal{M} = \mathbb{T} \times (0, \pi)$ . Dados  $s_1 \in \mathbb{T}$  e  $\psi_1 \in (0, \pi)$  temos uma aplicação, que denotaremos por  $\mathcal{F}$

$$\begin{aligned} \mathcal{F} : \quad \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ (s_1, \psi_1) &\mapsto (s_2(s_1, \psi_1), \psi_2(s_1, \psi_1)) \end{aligned}$$

que modela o problema do Bilhar. Ao conjunto  $\mathcal{M}$  denominamos espaço de fase do bilhar.

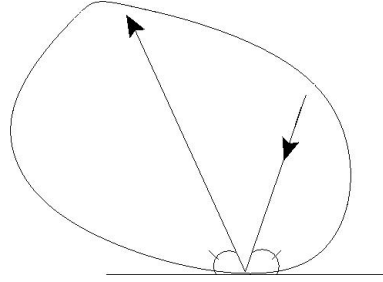


Figura 3.1: Aplicação do Bilhar

**Definição 13.** O conjunto  $\{(s_0, \psi_0), (s_1, \psi_1), (s_2, \psi_2), \dots, (s_j, \psi_j), \dots\}$  é dito órbita de bilhar se  $(s_j, \psi_j) = \mathcal{F}(s_{j-1}, \psi_{j-1})$  ou equivalentemente  $(s_j, \psi_j) = \mathcal{F}^j(s_0, \psi_0)$  com  $j = 1, 2, \dots$ . À poligonal na mesa cujos vértices são os  $s_j$  que definem a órbita denominamos trajetória do bilhar.

### 3.1.1 Função geradora e Diferenciabilidade do Bilhar

Primeiramente relembremos dois resultados vistos no capítulo 2 lemas 1, 3 e 5 sobre a função distância geodésica  $g$  e geodésicas ligando dois pontos. Sem risco de confusão, utilizaremos a mesma letra  $g$  para a distância geodésica em  $S = \mathbb{E}^2, \mathbb{H}^2, \mathbb{S}_+^2$ . Assim se  $s_1$  e  $s_2$  são dois pontos em  $\Gamma$  temos:

$$g(s_1, s_2) = \begin{cases} \sqrt{\langle \Gamma(s_1) - \Gamma(s_2), \Gamma(s_1) - \Gamma(s_2) \rangle} & \text{em } \mathbb{E}^2 \\ \arccos(\langle \Gamma(s_1), \Gamma(s_2) \rangle) & \text{em } \mathbb{S}_+^2 \\ \operatorname{arccosh}(-\ll \Gamma(s_1), \Gamma(s_2) \gg) & \text{em } \mathbb{H}^2 \end{cases} \quad (3.1)$$

E também podemos escrever

$$\Gamma(s_1) = \begin{cases} \Gamma(s_2) + \vec{R}_2 g(s_1, s_2) & \text{em } \mathbb{E}^2 \\ \Gamma(s_2) \cos g(s_1, s_2) + \vec{T}_2 \text{sen } g(s_1, s_2) & \text{em } \mathbb{S}_+^2 \\ \Gamma(s_2) \cosh g(s_1, s_2) + \vec{U}_2 \text{senh } g(s_1, s_2) & \text{em } \mathbb{H}^2 \end{cases} \quad (3.2)$$

ou

$$\Gamma(s_2) = \begin{cases} \Gamma(s_1) + \vec{R}_1 g(s_1, s_2) & \text{em } \mathbb{S}_+^2 \\ \Gamma(s_1) \cos g(s_1, s_2) + \vec{T}_1 \text{sen } g(s_1, s_2) & \text{em } \mathbb{S}_+^2 \\ \Gamma(s_1) \cosh g(s_1, s_2) + \vec{U}_1 \text{senh } g(s_1, s_2) & \text{em } \mathbb{H}^2 \end{cases} \quad (3.3)$$

onde  $\vec{R}_1, \vec{T}_1$  e  $\vec{U}_1$  são vetores tangentes unitários em  $T_{s_1}S$  à geodésica orientada de  $s_1$  a  $s_2$ , e  $\vec{R}_2, \vec{T}_2$  e  $\vec{U}_2$  são vetores tangentes unitários em  $T_{s_2}S$  à geodésica orientada de  $s_2$  a  $s_1$ .

**Lema 7.** *Seja  $\mathcal{F}(s_1, \psi_1) = (s_2, \psi_2)$ . A distância geodésica  $g = g(s_1, s_2)$  em  $S$  satisfaz:*

$$\frac{\partial g}{\partial s_1}(s_1, s_2) = -\cos \psi_1 \quad \frac{\partial g}{\partial s_2}(s_1, s_2) = \cos \psi_2$$

**Prova**

- Caso  $S = \mathbb{E}^2$

Derivando  $g^2(s_1, s_2) = \langle \Gamma(s_2) - \Gamma(s_1), \Gamma(s_2) - \Gamma(s_1) \rangle$  com relação a  $s_1$  temos

$$\frac{\partial g}{\partial s_1}(s_1, s_2) = \frac{-\langle \Gamma'(s_1), \Gamma(s_2) - \Gamma(s_1) \rangle}{g(s_1, s_2)} \quad (3.4)$$

Por outro lado em 3.3 temos

$$\Gamma(s_2) = \Gamma(s_1) + \vec{R}_1 g(s_1, s_2)$$

e, por definição, temos também que  $\cos \psi_1 = \langle \Gamma'(s_1), \vec{R}_1 \rangle$ . Isolando  $\vec{R}_1$  em (3.3) e substituindo nessa equação temos

$$\cos \psi_1 = \frac{\langle \Gamma'(s_1), \Gamma(s_2) - \Gamma(s_1) \rangle}{g(s_1, s_2)} \quad \text{portanto} \quad \frac{\partial g}{\partial s_1}(s_1, s_2) = -\cos \psi_1$$

Para a segunda igualdade, derivemos  $g^2(s_1, s_2) = \langle \Gamma(s_2) - \Gamma(s_1), \Gamma(s_1) - \Gamma(s_2) \rangle$  com relação a  $s_2$ :

$$\frac{\partial g}{\partial s_2}(s_1, s_2) = \frac{\langle \Gamma'(s_2), \Gamma(s_2) - \Gamma(s_1) \rangle}{g(s_1, s_2)}$$

Por outro lado em 3.2 temos

$$\Gamma(s_1) = \Gamma(s_2) + \vec{R}_2 g(s_1, s_2)$$

e, por definição temos também  $\cos \psi_2 = \langle \Gamma'(s_2), -\vec{R}_2 \rangle$ . Aqui aparece o sinal negativo pois  $\psi_2$  é o ângulo entre a geodésica orientada de  $s_1$  a  $s_2$  e o vetor  $\Gamma'(s_2)$ , nessa orientação tal geodésico possui vetor tangente  $-\vec{R}_2$ , vetor esse que é o transporte paralelo no plano de  $\vec{R}_1$  ao longo da geodésica.

Isolando  $-\vec{R}_2$  em 3.2 e substituindo nessa última equação temos

$$\cos \psi_2 = \frac{\langle \Gamma'(s_2), \Gamma(s_2) - \Gamma(s_1) \rangle}{g(s_1, s_2)} \quad \text{portanto} \quad \frac{\partial g}{\partial s_2}(s_1, s_2) = \cos \psi_2$$

- Caso  $S = \mathbb{S}_+^2$

Derivando  $\cos g(s_1, s_2) = \langle \Gamma(s_1), \Gamma(s_2) \rangle$  com relação a  $s_1$  temos

$$\frac{\partial g}{\partial s_1}(s_1, s_2) = \frac{-\langle \Gamma'(s_1), \Gamma(s_2) \rangle}{\text{sen } g(s_1, s_2)} \quad (3.5)$$

Por outro lado em 3.3 temos

$$\Gamma(s_2) = \Gamma(s_1) \cos g(s_1, s_2) + \vec{T}_1 \text{sen } g(s_1, s_2)$$

e, por definição, temos também que  $\cos \psi_1 = \langle \Gamma'(s_1), \vec{T}_1 \rangle$ . Isolando  $\vec{T}_1$  em (3.3) e substituindo nessa equação temos

$$\cos \psi_1 = \frac{\langle \Gamma'(s_1), \Gamma(s_2) \rangle}{\text{sen } g(s_1, s_2)} \quad \text{portanto} \quad \frac{\partial g}{\partial s_1}(s_1, s_2) = -\cos \psi_1$$

Para a segunda igualdade, derivemos  $\cos g(s_1, s_2) = \langle \Gamma(s_1), \Gamma(s_2) \rangle$  com relação  $s_2$ :

$$\frac{\partial g}{\partial s_2}(s_1, s_2) = \frac{-\langle \Gamma(s_1), \Gamma'(s_2) \rangle}{\text{sen } g(s_1, s_2)}$$

Por outro lado em 3.2 temos

$$\Gamma(s_1) = \Gamma(s_2) \cos g(s_1, s_2) + \vec{T}_2 \text{sen } g(s_1, s_2)$$

e, por definição temos também  $\cos \psi_2 = \langle \Gamma'(s_2), -\vec{T}_2 \rangle$ . Aqui aparece o sinal negativo pois  $\psi_2$  é o ângulo entre a geodésica orientada de  $s_1$  a  $s_2$  e o vetor  $\Gamma'(s_2)$ , nessa orientação tal geodésico possui vetor tangente  $-\vec{T}_2$ , vetor esse que é o transporte paralelo esférico de  $\vec{T}_1$  ao longo da geodésica.

Isolando  $-\vec{T}_2$  em 3.2 e substituindo nessa última equação temos

$$\cos \psi_2 = -\frac{\langle \Gamma(s_1), \Gamma'(s_2) \rangle}{\text{sen } g(s_1, s_2)} \quad \text{portanto} \quad \frac{\partial g}{\partial s_2}(s_1, s_2) = \cos \psi_2$$

- Caso  $S = \mathbb{H}^2$ :

Derivando  $\cosh g(s_1, s_2) = - \ll \Gamma(s_1), \Gamma(s_2) \gg$  com relação a  $s_1$  temos

$$\frac{\partial g}{\partial s_1}(s_1, s_2) = \frac{- \ll \Gamma'(s_1), \Gamma(s_2) \gg}{\sinh g(s_1, s_2)} \quad (3.6)$$

Por outro lado em 3.3 temos

$$\Gamma(s_2) = \Gamma(s_1) \cosh g(s_1, s_2) + \vec{T}_1 \sinh g(s_1, s_2)$$

e, por definição, temos também que  $\cos \psi_1 = \ll \Gamma'(s_1), \vec{U}_1 \gg$ . Isolando  $\vec{U}_1$  em (3.3) e substituindo nessa equação temos

$$\cos \psi_1 = \frac{\ll \Gamma'(s_1), \Gamma(s_2) \gg}{\sinh g(s_1, s_2)} \text{ portanto } \frac{\partial g}{\partial s_1}(s_1, s_2) = - \cos \psi_1$$

Para a segunda igualdade, derivemos  $\cosh g(s_1, s_2) = - \ll \Gamma(s_1), \Gamma(s_2) \gg$  com relação a  $s_2$ :

$$\frac{\partial g}{\partial s_2}(s_1, s_2) = \frac{- \ll \Gamma(s_1), \Gamma'(s_2) \gg}{\sinh g(s_1, s_2)}$$

Por outro lado em 3.2 temos

$$\Gamma(s_1) = \Gamma(s_2) \cosh g(s_1, s_2) + \vec{U}_2 \sinh g(s_1, s_2)$$

e, por definição temos também  $\cos \psi_2 = \ll \Gamma'(s_2), -\vec{U}_2 \gg$ . Como no caso esférico, aqui aparece o sinal negativo pois  $\psi_2$  é o ângulo entre a geodésica orientada de  $s_1$  a  $s_2$  e o vetor  $\Gamma'(s_2)$ , nessa orientação tal geodésico possui vetor tangente  $-\vec{U}_2$ , vetor esse que é o transporte paralelo no plano hiperbólico de  $\vec{U}_1$  ao longo da geodésica.

Isolando  $-\vec{U}_2$  em 3.2 e substituindo nessa última equação temos

$$\cos \psi_2 = - \frac{\ll \Gamma(s_1), \Gamma'(s_2) \gg}{\sinh g(s_1, s_2)} \text{ portanto } \frac{\partial g}{\partial s_2}(s_1, s_2) = \cos \psi_2$$

□

Considerando a notação introduzida acima temos o seguinte lema:

**Lema 8.** *[Princípio de Maupertuis] Sejam  $s_0, s_1$  e  $s_2$  pontos distintos em  $\Gamma$ . Denotemos por  $\psi_1$  o ângulo entre a geodésica de  $s_0$  a  $s_1$  e o vetor  $\Gamma'(s_1)$  em  $T_{s_1}S$  e  $\overline{\psi_1}$  o ângulo entre a geodésica de  $s_1$  a  $s_2$  e o vetor  $\Gamma'(s_1)$ . Seja  $W(s_1) = g(s_0, s_1) + g(s_1, s_2)$ . As afirmativas abaixo são equivalentes:*

- $s_1$  é ponto crítico de  $W$ ;

- $s_0, s_1$  e  $s_2$  correspondem a pontos em uma trajetória do bilhar, nessa ordem.

**Prova:** Com efeito

$$\frac{dW}{ds_1} = \frac{\partial g}{\partial s_1}(s_0, s_1) + \frac{\partial g}{\partial s_1}(s_1, s_2)$$

e pelo lema 7 temos

$$\frac{dW}{ds}(s_1) = \cos \psi_1 - \cos \overline{\psi_1}$$

Essa expressão é nula, i.e,  $s_1$  é ponto crítico se e somente se  $\psi_1 = \overline{\psi_1}$ , ou seja, se e somente se a sequência de pontos  $s_0, s_1$  e  $s_2$  corresponde a uma trajetória de bilhar.

□

O lema anterior nos dá uma importante caracterização das trajetórias de bilhar como pontos críticos do funcional  $W$ , também denominado ação. Tal caracterização já era conhecida para bilhares planos e agora pelos lemas 7 e 8 temos demonstrado que bilhares em  $\mathbb{S}_+^2$  e  $\mathbb{H}^2$  também admitem tal tratamento variacional. Resumindo temos:

$$\mathcal{F}(s_1, \psi_1) = (s_2, \psi_2) \quad \text{se e somente se} \quad \frac{\partial g}{\partial s_1}(s_1, s_2) = -\cos \psi_1 \quad \frac{\partial g}{\partial s_2}(s_1, s_2) = \cos \psi_2 \quad (3.7)$$

Numa terminologia clássica, a equação 3.7, nos mostra que a distância geodésica  $g$  é uma função geradora para a aplicação do bilhar  $\mathcal{F}$ . Tal caracterização constitui o ponto de partida para obtenção de muitas propriedades relevantes satisfeitas pela aplicação do bilhar, que serão enunciadas ao final deste capítulo.

Primeiramente estabeleceremos a diferenciabilidade da aplicação  $\mathcal{F}$ .

**Proposição 6.** *A função distância geodésica satisfaz*

$$\partial_{12}g(s_1, s_2) := \frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_2} = \begin{cases} \frac{\sin \psi_1 \sin \psi_2}{g(s_1, s_2)} & \text{em } \mathbb{E}^2 \\ \frac{\sin \psi_1 \sin \psi_2}{\sin g(s_1, s_2)} & \text{em } \mathbb{S}_+^2 \\ \frac{\sin \psi_1 \sin \psi_2}{\sinh g(s_1, s_2)} & \text{em } \mathbb{H}^2 \end{cases}$$

**Prova**

- Caso  $S = \mathbb{E}^2$ :

Da prova do lema 7 temos na equação 3.4

$$\partial_1 g(s_1, s_2) := \frac{\partial g}{\partial s_1}(s_1, s_2) = \frac{-\langle \Gamma'(s_1), \Gamma(s_2) - \Gamma(s_1) \rangle}{g(s_1, s_2)}$$

Derivando essa equação com relação a  $s_2$  e simplificando, temos:

$$\partial_{12}g(s_1, s_2) = \frac{-\langle \Gamma'(s_1), \Gamma'(s_2) \rangle + \cos \psi_1 \cos \psi_2}{g(s_1, s_2)}$$

Não é difícil ver que

$$\langle \Gamma'(s_1), \Gamma'(s_2) \rangle = -\sin \psi_1 \sin \psi_2 + \cos \psi_1 \cos \psi_2$$

pois

$$\Gamma'(s_1) = \cos(\psi_1)\vec{R}_1 + \sin(\psi_1)\vec{Q}_1 \text{ e } \Gamma'(s_2) = \cos(\psi_2)(-\vec{R}_2) + \sin \psi_2 \vec{Q}_2$$

onde  $\vec{R}_1$  e  $\vec{Q}_1$  são respectivamente os vetores tangente e normal unitários da geodésica orientada de  $s_1$  a  $s_2$  no ponto  $s_1$  e  $-\vec{R}_2$  e  $\vec{Q}_2$  são respectivamente os vetores tangente e normal unitários da geodésica orientada de  $s_1$  a  $s_2$  no ponto  $s_2$ .

Fazendo o produto temos:

$$\langle \Gamma'(s_1), \Gamma'(s_2) \rangle = \cos \psi_1 \cos \psi_2 \langle \vec{R}_1, -\vec{R}_2 \rangle - \sin \psi_1 \sin \psi_2 \langle \vec{Q}_1, \vec{Q}_2 \rangle$$

Mas  $\langle \vec{R}_1, -\vec{R}_2 \rangle = 1$  e  $\langle \vec{Q}_1, \vec{Q}_2 \rangle = 1$  e assim

$$\langle \Gamma'(s_1), \Gamma'(s_2) \rangle = \cos \psi_1 \cos \psi_2 - \sin \psi_1 \sin \psi_2$$

- Caso  $S = \mathbb{S}_+^2$ :

Da prova do lema 7 temos na equação 3.4

$$\partial_1 g(s_1, s_2) := \frac{\partial g}{\partial s_1}(s_1, s_2) = \frac{-\langle \Gamma'(s_1), \Gamma'(s_2) \rangle}{\sin g(s_1, s_2)}$$

Derivando essa equação com relação a  $s_2$ , temos:

$$\partial_{12}g(s_1, s_2) = \frac{-\langle \Gamma'(s_1), \Gamma'(s_2) \rangle + \cos g \cos \psi_1 \cos \psi_2}{\sin g(s_1, s_2)}$$

Não é difícil ver que

$$\langle \Gamma'(s_1), \Gamma'(s_2) \rangle = -\sin \psi_1 \sin \psi_2 + \cos g \cos \psi_1 \cos \psi_2$$

pois

$$\Gamma'(s_1) = \cos(\psi_1)\vec{T}_1 + \sin(\psi_1)\vec{N}_1 \text{ e } \Gamma'(s_2) = \cos(\psi_2)(-\vec{T}_2) + \sin \psi_2 \vec{N}_2,$$

onde  $\vec{T}_1$  e  $\vec{N}_1$  são respectivamente os vetores tangente e normal unitários da geodésica

orientada de  $s_1$  a  $s_2$  no ponto  $s_1$  e  $-\vec{T}_2$  e  $\vec{N}_2$  são respectivamente os vetores tangente e normal unitários da geodésica orientada de  $s_1$  a  $s_2$  no ponto  $s_2$ .

Fazendo o produto temos:

$$\langle \Gamma'(s_1), \Gamma'(s_2) \rangle = \cos \psi_1 \cos \psi_2 \langle \vec{T}_1, -\vec{T}_2 \rangle - \sin \psi_1 \sin \psi_2 \langle \vec{N}_1, \vec{N}_2 \rangle$$

Mas  $\langle \vec{T}_1, -\vec{T}_2 \rangle = \cos g$  e  $\langle \vec{N}_1, \vec{N}_2 \rangle = 1$  e assim

$$\langle \Gamma'(s_1), \Gamma'(s_2) \rangle = \cos \psi_1 \cos \psi_2 \cos g - \sin \psi_1 \sin \psi_2$$

A igualdade  $\langle \vec{N}_1, \vec{N}_2 \rangle = 1$  vem do fato que  $\vec{N}_1 = \vec{N}_2 =$  vetor normal ao plano que originou a geodésica.

- Caso  $S = \mathbb{H}^2$ :

Da prova do lema 7 temos na equação 3.6

$$\partial_1 g(s_1, s_2) := \frac{\partial g}{\partial s_1}(s_1, s_2) = \frac{-\ll \Gamma'(s_1), \Gamma'(s_2) \gg}{\sinh g(s_1, s_2)}$$

Derivando essa equação com relação a  $s_2$ , temos:

$$\partial_{12} g(s_1, s_2) = \frac{-\ll \Gamma'(s_1), \Gamma'(s_2) \gg + \cos g \cos \psi_1 \cos \psi_2}{\sinh g(s_1, s_2)}$$

Não é difícil ver que:

$$\ll \Gamma'(s_1), \Gamma'(s_2) \gg = -\sin \psi_1 \sin \psi_2 + \cosh g \cos \psi_1 \cos \psi_2$$

pois

$$\Gamma'(s_1) = \cos(\psi_1)\vec{U}_1 + \sin(\psi_1)\vec{V}_1 \text{ e } \Gamma'(s_2) = \cos(\psi_2)(-\vec{U}_2) + \sin \psi_2 \vec{V}_2,$$

onde  $\vec{U}_1$  e  $\vec{V}_1$  são respectivamente os vetores tangente e normal unitários da geodésica orientada de  $s_1$  a  $s_2$  no ponto  $s_1$  e  $-\vec{U}_2$  e  $\vec{V}_2$  são respectivamente os vetores tangente e normal unitários da geodésica orientada de  $s_1$  a  $s_2$  no ponto  $s_2$ .

Fazendo o produto temos:

$$\ll \Gamma'(s_1), \Gamma'(s_2) \gg = \cos \psi_1 \cos \psi_2 \ll \vec{U}_1, -\vec{U}_2 \gg - \sin \psi_1 \sin \psi_2 \ll \vec{V}_1, \vec{V}_2 \gg$$

Mas  $\ll \vec{U}_1, -\vec{U}_2 \gg = \cosh g$  e  $\langle \vec{V}_1, \vec{V}_2 \rangle = 1$  e assim

$$\ll \Gamma'(s_1), \Gamma'(s_2) \gg = \cos \psi_1 \cos \psi_2 \cosh g - \sin \psi_1 \sin \psi_2$$

A igualdade  $\ll \vec{V}_1, \vec{V}_2 \gg = 1$  vem do fato que  $\vec{V}_1 = \vec{V}_2 =$  vetor normal ao plano que originou a geodésica.

□

**Definição 14** (Propriedade Twist). *Seja  $f : C \rightarrow C$  um difeomorfismo, onde  $C := \mathbb{T} \times I$  é um cilindro finito, se  $I = (a, b)$  ou infinito se  $I = \mathbb{R}$ . Dizemos que  $f$  é uma aplicação do tipo twist se para um levantamento  $F : \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^2$  de  $f$  dado por  $F(x, y) = (f_1(x, y), f_2(x, y))$  tivermos  $\frac{\partial f_1}{\partial y}(x, y) > 0$*

**Proposição 7.** *Seja  $\Gamma(s)$  uma oval em  $S$  parametrizada pelo comprimento de arco. A aplicação do bilhar em  $\Gamma$ ,  $\mathcal{F}$  é um difeomorfismo global de classe  $C^{q-1}$  no espaço de fase e possui a propriedade Twist.*

**Prova:** Definamos  $p_i = \cos \psi_i$ . Pela equação 3.7, temos que  $\mathcal{F}(s_1, p_1) = (s_2(s_1, p_1), p_2(s_1, p_1))$  se e somente se  $\partial_1 g(s_1, s_2(s_1, p_1)) = -p_1$  e  $\partial_2 g(s_1, s_2(s_1, p_1)) = p_2$ . Utilizando esse fato vamos primeiramente mostrar que  $s_2 = s_2(s_1, p_1)$  é uma função diferenciável de classe  $C^{q-1}$ . Definimos a função  $G : V_1 \times V_2 \times (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$  por  $G(s_1, s_2, p_1) = \partial_1 g(s_1, s_2) + p_1$ . Onde  $V_1$  e  $V_2$  são vizinhanças disjuntas de  $s_1$  e  $s_2$  respectivamente. Derivando  $G$  com relação a  $s_2$  obtemos  $\frac{\partial G}{\partial s_2} = \partial_{12} g(s_1, s_2)$  que é não nula pela proposição 6. Assim, o teorema da função implícita implica que  $s_2$  é uma função de  $s_1$  e  $p_1$  de classe  $C^{q-1}$ , pois  $\partial g_1(s_1, s_2)$  possui essa classe de diferenciabilidade. A mesma conclusão vale para  $p_2 = p_2(s_1, p_1)$  uma vez que pelo lema 7,  $p_2(s_1, p_1) = \partial_2 g(s_1, s_2(s_1, p_1))$  e já sabemos que  $s_2$  é diferenciável de classe  $C^{q-1}$ .

Para finalizar a prova basta verificarmos que  $\mathcal{F}$  é bijeção. De fato a aplicação do bilhar é invertível uma vez que se  $(s_1, \psi_1)$  e  $(s_2, \psi_2)$  são dois pontos consecutivos de uma órbita, podemos "reverter" a trajetória fazendo  $\mathcal{F}(s_2, \pi - \psi_2)$  donde obtemos  $(s_1, \psi_1)$ . Mais especificamente, seja  $\mathcal{I} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  a involução  $\mathcal{I}(s, \psi) = (s, \pi - \psi)$ . Assim, sendo  $\mathcal{F}^{-1}$  a inversa de  $\mathcal{F}$ , temos  $\mathcal{I} \circ \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F} \circ \mathcal{I}$ . Como  $\mathcal{I} = \mathcal{I}^{-1}$ ,  $\mathcal{F}^{-1}$  é dada por:

$$\mathcal{F}^{-1} = \mathcal{I} \circ \mathcal{F} \circ \mathcal{I}$$

Portanto  $\mathcal{F}$  é inversível e  $\mathcal{F}^{-1}$  difere de  $\mathcal{F}$  pela mudança de coordenadas  $\mathcal{I}$ . Com efeito,  $\mathcal{F}^{-1}$ , dada por  $\mathcal{I} \circ \mathcal{F}^{-1} = \mathcal{F} \circ \mathcal{I}$ , é também de classe  $C^{q-1}$  temos assim que  $\mathcal{F}$  é difeomorfismo de classe  $C^{q-1}$ ,  $q \geq 2$ .

Sendo  $\mathcal{F}(s_1, \psi_1) = (s_2(s_1, \psi_1), \psi_2(s_1, \psi_1))$ , para verificarmos a propriedade Twist basta mostrarmos que  $\frac{\partial s_2}{\partial \psi_1}$  é positiva. Mas sendo  $s_2$  definida implicitamente por  $\frac{\partial g}{\partial s_1}(s_1, s_2) = -\cos \psi_1$  obtemos, ao derivar essa expressão com relação a  $\psi_1$ :

$$\frac{\partial g}{\partial s_1 \partial s_2}(s_1, s_2) \frac{\partial s_2}{\partial \psi_1}(s_1, s_2) = \sin \psi_1$$

como  $\sin \psi_1 > 0$  e  $\frac{\partial g}{\partial s_1 \partial s_2} > 0$  segue a propriedade Twist.

□



### 3.1.2 A derivada da aplicação do bilhar

Como vimos na proposição 7,  $\mathcal{F}$  é uma aplicação diferenciável. Nosso objetivo nessa seção é obter a expressão dessa derivada nos três casos  $\mathbb{E}^2$ ,  $\mathbb{S}_+^2$  e  $\mathbb{H}^2$  e mostrar que  $\mathcal{F}$  preserva a medida  $\psi d\psi ds$ . Isso será conseguido utilizando a expressão de  $\mathcal{F}$  em termos de sua função geradora, a distância geodésica  $g$ .

**Proposição 8.** *Sejam  $\mathcal{F}(s_1, \psi_1) = (s_2, \psi_2)$ ,  $g = g(s_1, s_2)$  a distância geodésica e  $\kappa_i$  a curvatura geodésica de  $\Gamma$  em  $s_i$ ,  $i = 1, 2$ . A derivada do bilhar  $D_{(s_1, \psi_1)}\mathcal{F}$  em  $\Gamma$  geodesicamente convexa e parametrizada pelo comprimento de arco é dada por*

- Em  $\mathbb{E}^2$ :

$$\frac{1}{\sin \psi_2} \begin{bmatrix} g\kappa_1 - \sin \psi_1 & g \\ \kappa_2(g\kappa_1 - \sin \psi_1) - \kappa_1 \sin \psi_2 & g\kappa_2 - \sin \psi_2 \end{bmatrix}$$

- Em  $\mathbb{S}_+^2$ :

$$\frac{1}{\sin \psi_2} \begin{bmatrix} \kappa_1 \sin g - \cos g \sin \psi_1 & \sin g \\ \kappa_2(\kappa_1 \sin g - \cos g \sin \psi_1) - \sin g \sin \psi_1 \sin \psi_2 - \cos g \sin \psi_2 \kappa_1 & \kappa_2 \sin g - \cos g \sin \psi_2 \end{bmatrix}$$

- Em  $\mathbb{H}^2$ :

$$\frac{1}{\sin \psi_2} \begin{bmatrix} \kappa_1 \sinh g - \cosh g \sin \psi_1 & \sinh g \\ \kappa_2(\kappa_1 \sinh g - \cosh g \sin \psi_1) + \sinh g \sin \psi_1 \sin \psi_2 - \cosh g \sin \psi_2 \kappa_1 & \kappa_2 \sinh g - \cosh g \sin \psi_2 \end{bmatrix}$$

#### Prova

A prova dessa proposição utilizará os lemas 9 e 10 abaixo:

**Lema 9.** *Seja  $\mathcal{F}(s_1, \psi_1) = (s_2(s_1, \psi_1), \psi_2(s_1, \psi_1))$  denotemos  $\partial_{ij}g := \frac{\partial g}{\partial s_i \partial s_j}(s_1, s_2)$  com  $i = 1, 2$ . Então:*

$$\frac{\partial s_2}{\partial s_1} = -\frac{\partial_{11}g}{\partial_{12}g} \quad \frac{\partial s_2}{\partial \psi_1} = \frac{\sin \psi_1}{\partial_{12}g}$$

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial s_1} = -\frac{\sin \psi_1}{\sin \psi_2} \frac{\partial_{22}g}{\partial_{12}g} \quad \frac{\partial \psi_2}{\partial \psi_1} = \frac{\partial_{11}g \partial_{22}g - (\partial_{12}g)^2}{\sin \psi_2 \partial_{12}g}$$

#### Prova

A demonstração desse lema, como perceberemos, não depende da superfície  $S$ .

Pela equação 3.7 temos  $g(s_1, s_2(s_1, \psi_1)) = -\cos \psi_1$ .

Derivando essa equação implicitamente com relação a  $s_1$  obtemos

$$\partial_{11}g + \frac{\partial s_2}{\partial s_1} \partial_{12}g = 0.$$

Assim

$$\frac{\partial s_2}{\partial s_1} = -\frac{\partial_{11}g}{\partial_{12}g} \quad (3.8)$$

Novamente, para o cálculo de  $\frac{\partial s_2}{\partial \psi_1}$ , derivamos implicitamente com relação a  $\psi_1$  a equação  $g(s_1, s_2(s_1, \psi_1)) = -\cos \psi_1$  e obtemos

$$\frac{\partial s_2}{\partial \psi_1} \partial_{12}g = \text{sen } \psi_1.$$

Daí:

$$\frac{\partial s_2}{\partial \psi_1} = \frac{\text{sen } \psi_1}{\partial_{12}g} \quad (3.9)$$

Para o cálculo de  $\frac{\partial \psi_2}{\partial s_1}$  e  $\frac{\partial \psi_2}{\partial \psi_1}$ , utilizaremos a equação

$$g(s_1, s_2(s_1, \psi_1)) = -\cos \psi_2(s_1, \psi_1).$$

Derivando implicitamente com relação a  $\psi_1$  obtemos

$$\partial_{22}g \frac{\partial s_2}{\partial \psi_1} = -\text{sen } \psi_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \psi_1}$$

Substituindo 3.9 nessa expressão temos

$$\partial_{22}g \frac{\text{sen } \psi_1}{\partial_{12}g} = -\text{sen } \psi_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial \psi_1}$$

Logo

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial \psi_1} = -\frac{\text{sen } \psi_1}{\text{sen } \psi_2} \frac{\partial_{22}g}{\partial_{12}g}$$

Para calcular  $\frac{\partial \psi_2}{\partial s_1}$  derivaremos implicitamente a equação  $g(s_1, s_2(s_1, \psi_1)) = -\cos \psi_2(s_1, \psi_1)$  com relação a  $s_1$ .

$$\partial_{12}g + \partial_{22}g \frac{\partial s_2}{\partial s_1} = -\text{sen } \psi_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial s_1}$$

Substituindo 3.8 nessa expressão temos

$$\partial_{12}g - \partial_{22}g \frac{\partial_{11}g}{\partial_{12}g} = -\text{sen } \psi_2 \frac{\partial \psi_2}{\partial s_1}$$

Daí, após simplificações:

$$\frac{\partial \psi_2}{\partial s_1} = \frac{\partial_{11}g \partial_{22}g - (\partial_{12}g)^2}{\text{sen } \psi_2 \partial_{12}g}$$

□

**Lema 10.** Em  $\mathbb{E}^2$ :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_1}(s_1, s_2) = \frac{1}{g(s_1, s_2)} \text{sen}^2 \psi_1 - \kappa_1 \text{sen} \psi_1$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_2} = \frac{\text{sen} \psi_1 \text{sen} \psi_2}{g(s_1, s_2)}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s_2 \partial s_2}(s_1, s_2) = \frac{1}{g(s_1, s_2)} \text{sen}^2 \psi_2 - \kappa_2 \text{sen} \psi_2$$

Em  $\mathbb{S}_+^2$ :

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_1}(s_1, s_2) = \frac{\cos g(s_1, s_2)}{\text{sen} g(s_1, s_2)} \text{sen}^2 \psi_1 - \kappa_1 \text{sen} \psi_1$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_2}(s_1, s_2) = \frac{\text{sen} \psi_1 \text{sen} \psi_2}{\text{sen} g(s_1, s_2)}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s_2 \partial s_2}(s_1, s_2) = \frac{\cos g(s_1, s_2)}{\text{sen} g(s_1, s_2)} \text{sen}^2 \psi_2 - \kappa_2 \text{sen} \psi_2$$

Em  $\mathbb{H}^2$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_1}(s_1, s_2) = \frac{\cosh g(s_1, s_2)}{\sinh g(s_1, s_2)} \text{sen}^2 \psi_1 - \kappa_1 \text{sen} \psi_1$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_2}(s_1, s_2) = \frac{\text{sen} \psi_1 \text{sen} \psi_2}{\sinh g(s_1, s_2)}$$

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s_2 \partial s_2}(s_1, s_2) = \frac{\cosh g(s_1, s_2)}{\sinh g(s_1, s_2)} \text{sen}^2 \psi_2 - \kappa_2 \text{sen} \psi_2$$

**Prova:**

- Caso  $\mathbb{E}^2$ :

Derivando  $\frac{\partial g}{\partial s_1}(s_1, s_2) = \frac{-\langle \Gamma'(s_1), \Gamma(s_2) - \Gamma(s_1) \rangle}{g(s_1, s_2)}$  com relação a  $s_1$  e simplificando, obtemos

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_1}(s_1, s_2) = \left[ \frac{(-\langle \Gamma''(s_1), \Gamma(s_2) - \Gamma(s_1) \rangle + 1)g(s_1, s_2) + \frac{\partial g}{\partial s_1} \langle \Gamma'(s_1), \Gamma(s_2) - \Gamma(s_1) \rangle}{g^2(s_1, s_2)} \right] \quad (3.10)$$

Cálculo de  $\langle \Gamma''(s_1), \Gamma(s_2) - \Gamma(s_1) \rangle$ :

Lembre-mo-nos primeiramente que  $\Gamma(s_2) = \Gamma(s_1) + R_1 g(s_1, s_2)$ . Substituindo na expressão acima obtemos

$$\langle \Gamma''(s_1), \Gamma(s_2) - \Gamma(s_1) \rangle = \langle \Gamma''(s_1), R_1 \rangle g(s_1, s_2) \quad (3.11)$$

Lembre-mo-nos que da equação 2.2

$$\Gamma''(s_1) = \kappa_1 \vec{N}(s_1) \quad (3.12)$$

onde  $\vec{N}(s_1)$  é o vetor normal à curva  $\Gamma$  em  $s_1$ .

Substituindo 3.12 em 3.11:  $\langle \Gamma''(s_1), \Gamma(s_2) - \Gamma(s_1) \rangle = \kappa_1 g(s_1, s_2) \text{sen } \psi_1$ .

Finalmente substituindo essa expressão em 3.10 e simplificando obtemos

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_1}(s_1, s_2) = \frac{1}{g(s_1, s_2)} \text{sen}^2 \psi_1 - \kappa_1 \text{sen } \psi_1$$

As contas para  $\frac{\partial^2 g}{\partial s_2 \partial s_2}(s_1, s_2)$  são idênticas.

- Caso  $\mathbb{S}_+^2$ :

Derivando  $\frac{\partial g}{\partial s_1}(s_1, s_2) = \frac{-\langle \Gamma'(s_1), \Gamma(s_2) \rangle}{\text{sen } g(s_1, s_2)}$  com relação a  $s_1$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_1}(s_1, s_2) &= - \left[ \frac{\langle \Gamma''(s_1), \Gamma(s_2) \rangle \text{sen}(g(s_1, s_2)) - \cos g(s_1, s_2) \frac{\partial g}{\partial s_1} \langle \Gamma'(s_1), \Gamma(s_2) \rangle}{\text{sen}^2 g(s_1, s_2)} \right] \quad (3.13) \\ &= - \left[ \frac{\langle \Gamma''(s_1), \Gamma(s_2) \rangle}{\text{sen } g(s_1, s_2)} - \frac{\cos^2 \psi_1 \cos g(s_1, s_2)}{\text{sen } g(s_1, s_2)} \right] \quad (3.14) \end{aligned}$$

Cálculo de  $\langle \Gamma''(s_1), \Gamma(s_2) \rangle$ :

Lembre-mo-nos primeiramente que  $\Gamma(s_2) = \Gamma(s_1) \cos g(s_1, s_2) + T_1 \text{sen } g(s_1, s_2)$ . Substituindo na expressão acima obtemos

$$\langle \Gamma''(s_1), \Gamma(s_2) \rangle = \langle \Gamma''(s_1), \Gamma(s_1) \rangle \cos g(s_1, s_2) + \langle \Gamma''(s_1), T_1 \rangle \text{sen } g(s_1, s_2) \quad (3.15)$$

Observemos que na base ortonormal  $\{\Gamma(s_1), \Gamma'(s_1), \Gamma(s_1) \times \Gamma'(s_1)\}$  temos: ( *ver capítulo 1*)

$$\Gamma''(s_1) = -\Gamma(s_1) + \kappa(s_1)(\Gamma(s_1) \times \Gamma'(s_1)) \quad (3.16)$$

pois

$$\langle \Gamma'(s_1), \Gamma(s_1) \rangle = 0 \Rightarrow \langle \Gamma''(s_1), \Gamma(s_1) \rangle = - \langle \Gamma'(s_1), \Gamma'(s_1) \rangle = -1$$

e por definição da curvatura geodésica:  $\kappa_1 = \langle \Gamma''(s_1), (\Gamma(s_1) \times \Gamma'(s_1)) \rangle$ .

Substituindo 3.16 em 3.15:  $\langle \Gamma''(s_1), \Gamma(s_2) \rangle = -\cos g(s_1, s_2) + \kappa_1 \sin \psi_1 \sin \mathbf{g}(s_1, s_2)$ .

Finalmente substituindo essa expressão em 3.13 e simplificando obtemos

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_1}(s_1, s_2) = \frac{\cos g(s_1, s_2)}{\sin \mathbf{g}(s_1, s_2)} \sin^2 \psi_1 - \kappa_1 \sin \psi_1$$

As contas para  $\frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_1}(s_2, s_2)$  são idênticas.

- Caso  $\mathbb{H}^2$ :

Derivando  $\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial s_1}(s_1, s_2) = \frac{-\langle \Gamma'(s_1), \Gamma(s_2) \rangle}{\sinh L}$  com relação a  $s_1$ , obtemos

$$\begin{aligned} \frac{\partial^2 \mathbf{g}}{\partial s_1 \partial s_1}(s_1, s_2) &= - \left[ \frac{\langle \Gamma''(s_1), \Gamma(s_2) \rangle \sinh g(s_1, s_2) - \cosh g(s_1, s_2) \frac{\partial \mathbf{g}}{\partial s_1} \langle \Gamma'(s_1), \Gamma(s_2) \rangle}{\sinh^2 g(s_1, s_2)} \right] \\ &= - \left[ \frac{\langle \Gamma''(s_1), \Gamma(s_2) \rangle}{\sinh(L)} - \frac{\cos^2 \psi_1 \cosh g(s_1, s_2)}{\sinh \mathbf{g}(s_1, s_2)} \right] \end{aligned} \quad (3.18)$$

Cálculo de  $\langle \Gamma''(s_1), \Gamma(s_2) \rangle$ :

Lembremo-nos primeiramente que  $\Gamma(s_2) = \Gamma(s_1) \cosh g(s_1, s_2) + U_1 \sinh g(s_1, s_2)$ . Substituindo na expressão acima obtemos

$$\langle \Gamma''(s_1), \Gamma(s_2) \rangle = \langle \Gamma''(s_1), \Gamma(s_1) \rangle \cosh g(s_1, s_2) + \langle \Gamma''(s_1), T_1 \rangle \sinh g(s_1, s_2) \quad (3.19)$$

Observemos que na base ortonormal  $\{\Gamma(s_1), \Gamma'(s_1), N\}$  onde  $N$  é o vetor normal da geodésica, temos:

$$\Gamma''(s_1) = -\Gamma(s_1) + \kappa_1 N \quad (3.20)$$

pois

$$\langle \Gamma'(s_1), \Gamma(s_1) \rangle = 0 \Rightarrow \langle \Gamma''(s_1), \Gamma(s_1) \rangle = -\langle \Gamma'(s_1), \Gamma'(s_1) \rangle = -1$$

e por definição da curvatura geodésica:  $\kappa_1 = \langle \Gamma''(s_1), N \rangle$ .

Substituindo 3.20 em 3.19:  $\langle \Gamma''(s_1), \Gamma(s_2) \rangle = -\cosh g(s_1, s_2) + \kappa_1 \sin \psi_1 \sinh \mathbf{g}(s_1, s_2)$ .

Finalmente substituindo essa expressão em 3.17 e simplificando obtemos

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_1}(s_1, s_2) = \frac{\cosh g(s_1, s_2)}{\sinh \mathbf{g}(s_1, s_2)} \sin^2 \psi_1 - \kappa_1 \sin \psi_1$$

As contas para  $\frac{\partial^2 g}{\partial s_1 \partial s_2}(s_1, s_2)$  são idênticas.

□

**Prova da Proposição:** A expressão para a derivada da aplicação bilhar segue da substituição das equações obtidas no lema 10 nas equações do lema 9.

□

**Corolário 3.** *A aplicação do Bilhar  $\mathcal{F}$  preserva a medida  $\text{sen } \psi d\psi ds$*

**Prova:** Com efeito, sendo  $\mathcal{F}$  difeomorfismo  $\mathcal{C}^{q-1}$  temos pelo teorema da mudança de variáveis que

$$\begin{aligned} \int_{\mathcal{F}(A)} \text{sen } \psi_1 ds_1 d\psi_1 &= \int_A \text{sen } \psi_1 |\det D_{(s,\psi)} \mathcal{F}| ds d\psi \\ &= \int_A \text{sen } \psi ds d\psi \end{aligned} \tag{3.21}$$

Na última igualdade usamos o fato

$$\det D_{(s_1, \psi_1)} \mathcal{F} = \frac{\text{sen } \psi_2}{\text{sen } \psi_1} \tag{3.22}$$

que segue a partir do corolário 8.

□

### 3.1.3 Conclusão

Resumindo nossos resultados provamos o seguinte teorema:

**Teorema 1.** *Seja  $S = \mathbb{E}^2, \mathbb{H}^2$  e  $\mathbb{S}_+^2$ , onde  $\mathbb{E}^2$  é o espaço Euclideano,  $\mathbb{H}^2$  plano hiperbólico e  $\mathbb{S}_+^2$  um hemisfério da esfera unitária. Seja  $\Gamma \subset S$  uma oval, i.e., uma curva simples, fechada, de classe  $C^q$   $q \geq 2$  e com curvatura geodésica estritamente positiva e comprimento  $|\Gamma|$ . Consideremos  $\Gamma$  parametrizada pelo comprimento de arco. Seja ainda,  $\mathcal{F} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ , a aplicação de bilhar definida em  $\Gamma$ , onde  $\mathcal{M} = \mathbb{T} \times (0, \pi)$  e  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/|\Gamma|\mathbb{Z}$ . A aplicação  $\mathcal{F}$  é um difeomorfismo de classe  $C^{q-1}$  que preserva a medida  $\text{sen } \psi d\psi ds$  no espaço de fase  $\mathcal{M}$ . Além disso  $\mathcal{F}$  é uma aplicação do tipo twist, possui a função distância geodésica como função geradora e possui derivada  $D_{(s_1, \psi_1)} \mathcal{F}$  dada por*

- Em  $\mathbb{E}^2$ :

$$\frac{1}{\text{sen } \psi_2} \begin{bmatrix} g\kappa_1 - \text{sen } \psi_1 & g \\ \kappa_2(g\kappa_1 - \text{sen } \psi_1) - \kappa_1 \text{sen } \psi_2 & g\kappa_2 - \text{sen } \psi_2 \end{bmatrix}$$

- Em  $\mathbb{S}_+^2$ :

$$\frac{1}{\sin \psi_2} \begin{bmatrix} \kappa_1 \sin g - \cos g \sin \psi_1 & \sin g \\ \kappa_2(\kappa_1 \sin g - \cos g \sin \psi_1) - \sin g \sin \psi_1 \sin \psi_2 - \cos g \sin \psi_2 \kappa_1 & \kappa_2 \sin g - \cos g \sin \psi_2 \end{bmatrix}$$

- Em  $\mathbb{H}^2$ :

$$\frac{1}{\sin \psi_2} \begin{bmatrix} \kappa_1 \sinh g - \cosh g \sin \psi_1 & \sinh g \\ \kappa_2(\kappa_1 \sinh g - \cosh g \sin \psi_1) + \sinh g \sin \psi_1 \sin \psi_2 - \cosh g \sin \psi_2 \kappa_1 & \kappa_2 \sinh g - \cosh g \sin \psi_2 \end{bmatrix}$$

### 3.2 Um exemplo interessante

O bilhar cujo bordo é um círculo Euclideano é apresentado na literatura de bilhares planos como o primeiro exemplo de bilhar com bordo estritamente convexo. A aplicação do bilhar em tal curva, além de ser um difeomorfismo  $C^\infty$ , possui as propriedades: Twist, preservação de uma medida absolutamente contínua com relação à de Lebesgue, é integrável pois possui caústicas e o espaço de fase folheado por retas invariantes, nas quais a dinâmica restrita é uma rotação rígida da circunferência. Numa busca por estender resultados do bilhar Euclideano, Veselov [(31)], estudando bilhares em elipses e círculos geodésicos mostrou, através da construção de integrais primeiras, que tanto para a semi-esfera  $\mathbb{S}_+^2$  quanto para o plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$  o bilhar em círculos geodésicos é integrável.

Nessa seção ilustraremos algumas propriedades dos bilhares circulares Euclidianos para bilhares em círculos geodésicos na semi-esfera e no plano hiperbólico.

Conforme visto no capítulo 1, círculos geodésicos em  $S$  são ovais, i.e. são curvas fechadas, simples, suaves e possuem curvatura geodésica positiva tanto em  $\mathbb{E}^2$  quanto  $\mathbb{H}^2$  para qualquer raio positivo. Para a esfera apenas círculos geodésicos com raio menor ou igual a  $\frac{\pi}{2}$  serão considerados pois são os únicos geodesicamente convexos.

Denotemos por  $\Gamma_0$  um círculo geodésico de raio fixo  $r_0$  em  $\mathbb{E}^2$ ,  $\rho_0$  em  $\mathbb{H}^2$ ,  $\phi_0$  em  $\mathbb{S}_+^2$ , orientado positivamente e parametrizado pelo comprimento de arco. A aplicação do bilhar em  $\Gamma_0$  está bem definida e a denotaremos por  $\mathcal{F}_0(s_1, \psi_1) = (s_2(s_1, \psi_1), \psi_2(s_1, \psi_1))$ . Determinaremos explicitamente as funções  $s_2(s_1, \psi_1)$  e  $\psi_2(s_1, \psi_1)$  para estudarmos as propriedades do bilhar  $\mathcal{F}_0$ . Na figura 3.2 está esboçada a situação geométrica a ser considerada.

Considerando a trajetória de bilhar orientada com  $s_1$  como ponto de saída e  $s_2$  ponto de batida, denotaremos por  $\alpha$  o ângulo central que determina o arco de extremos  $s_1$  e  $s_2$  (vide figura 3.2). Não é difícil ver, que o comprimento  $l$  desse arco em termos do ângulo  $\alpha$  definido acima é:

$$l(\alpha) = \begin{cases} \alpha r_0 & \text{em } \mathbb{E}^2 \\ \alpha \sin \phi_0 & \text{em } \mathbb{S}_+^2 \\ \alpha \sinh \rho_0 & \text{em } \mathbb{H}^2 \end{cases}$$

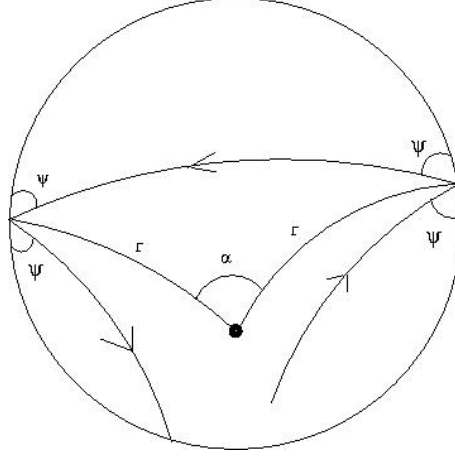


Figura 3.2: Bilhar em círculos geodésicos

Assim,  $s_2 = s_1 + l(\alpha)$ . Mas, sendo  $\psi_1$  o ângulo de saída, utilizamos as leis dos cossenos para mostrar que  $\alpha$  em função de  $\psi_1$  é dada por:

$$\cos \alpha(\psi_1) = \begin{cases} \cos 2\psi_1 & \text{em } \mathbb{E}^2 \\ \frac{\cos^2 \phi_0 - \tan^2 \psi_1}{-\sin^2 \phi_0 + \sec^2 \psi_1} & \text{em } \mathbb{S}_+^2 \\ \frac{\cosh^2 \rho_0 - \tan^2 \psi_1}{\sinh^2 \rho_0 + \sec^2 \psi_1} & \text{em } \mathbb{H}^2 \end{cases} \quad (3.23)$$

Portanto  $l(\alpha) = l(\alpha(\psi_1))$  e com isso  $s_2(s_1, \psi_1) = s_1 + l(\alpha(\psi_1))$ .

Para determinarmos  $\psi_2$  é suficiente observarmos que, da mesma forma que na geometria Euclideana, as geometrias esférica e hiperbólica gozam da propriedade de que triângulos isósceles possuem ângulos da base iguais. Assim temos  $\psi_2(s_1, \psi_1) = \psi_1$ .

Finalmente:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0: \quad \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ (s_1, \psi_1) &\mapsto (s_1 + l(\alpha(\psi_1)) \bmod 2\pi h, \psi_1) \end{aligned} \quad (3.24)$$

onde:

$$h = \begin{cases} r_0 & \text{em } \mathbb{E}^2 \\ \sin \phi_0 & \text{em } \mathbb{S}_+^2 \\ \sinh \rho_0 & \text{em } \mathbb{H}^2 \end{cases}$$

Seja  $\tilde{\mathcal{F}}_0$  dada por  $\tilde{\mathcal{F}}_0(s_1, \psi_1) = (s_1 + l(\alpha(\psi_1)), \psi_1)$  um levantamento de  $\mathcal{F}_0$ . Já sabemos que  $\mathcal{F}_0$  é um twist conservativo. Podemos no entanto confirmar esses resultados com os cálculos abaixo. Para a condição de twist, pela definição 14, devemos verificar que  $\frac{\partial s_2}{\partial \psi_1} > 0$ . Derivando  $s_1 + l(\alpha(\psi_1))$  com relação a  $\psi_1$  obtemos:



$$\frac{\partial s_2}{\partial \psi_1} = \frac{d\alpha}{d\psi_1} h = \begin{cases} 2r_0 & \text{em } \mathbb{E}^2 \\ \frac{2 \cos \phi_0}{\cos^2 \phi_0 \cos^2 \psi_1 + \sin^2 \psi_1} \sin \phi_0 & \text{em } \mathbb{S}_+^2 \\ \frac{2 \cosh \rho_0}{\cosh^2 \rho_0 \cos^2 \psi_1 + \sin^2 \psi_1} \sinh \rho_0 & \text{em } \mathbb{H}^2 \end{cases}$$

Essa expressão é positiva para qualquer raio de círculo geodésico e qualquer  $\psi_1$ . Segue  $\alpha(\psi)$  é difeomorfismo portanto  $\mathcal{F}_0$  também é.

A aplicação  $\mathcal{F}_0$  preserva medida uma vez que a sua derivada  $D_{(s_1, \psi_1)} \mathcal{F}_0$

$$D_{(s_1, \psi_1)} \mathcal{F}_0 = \begin{bmatrix} 1 & \alpha'(\psi_1) h \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

possui determinante 1.

Outra propriedade de  $\mathcal{F}_0$  é que, sendo  $\psi_i(s_1, \psi_1) = \psi_1$ , suas órbitas estão contidas nas retas  $\psi = \text{constante}$  com  $0 \leq \psi \leq \pi$ . Temos entã que seu espaço de fase é folheado por essas retas invariantes e tais retas são  $\mathcal{F}$ -invariante. Além disso pela lei dos cossenos é fácil ver que o comprimento da geodésica que liga duas batidas consecutivas é constante e dado por:

$$g(s_1, s_2) = \begin{cases} 2 \sin \frac{\pi k}{n} & \text{em } \mathbb{E}^2 \\ 2(\cos^2 \phi_0 + \sin^2 \phi_0 \cos \frac{2\pi k}{n}) & \text{em } \mathbb{S}_+^2 \\ 2(\cosh^2 \rho_0 - \sinh^2 \rho_0 \cos \frac{2\pi k}{n}) & \text{em } \mathbb{H}^2 \end{cases}$$

A dinâmica da aplicação restrita a cada reta invariante é um difeomorfismo de  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/|\Gamma|\mathbb{Z}$ . Associamos a cada curva invariante no espaço de fase um número que caracteriza a dinâmica desta aplicação restrita a tal curva.

**Definição 15** (Número de rotação de um homeomorfismo). *Seja  $h : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{T}$  um homeomorfismo em  $\mathbb{T}$ , que preserva orientação. Definimos o número de rotação  $\beta(h)$  de  $h$  por*

$$\beta(h) = \beta(\tilde{h}) = \lim_{|n| \rightarrow \infty} \frac{\tilde{h}^n(x) - x}{n}$$

onde  $\tilde{h} : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  é um levantamento qualquer de  $h$ .

**Definição 16** (Número de rotação de uma curva invariante). *Seja  $f : C \rightarrow C$  um homeomorfismo do cilindro finito ou infinito. Dizemos que uma curva  $\gamma$  que é  $f$ -invariante possui número de rotação  $\alpha$  se,  $f$  restrita a  $\gamma$  possui número de rotação  $\alpha$ . Se  $\alpha$  é racional dizemos que a curva invariante é ressonante.*

Seja  $(s_0, \psi_0)$  e  $\tilde{\mathcal{F}}_0$  respectivamente um ponto na reta invariante  $\psi = \psi_0$  e o levantamento de  $\mathcal{F}_0$  dado por  $\tilde{\mathcal{F}}_0(s, \psi) = (s + \alpha(\psi)h, \psi_0)$ . Iterando  $\tilde{\mathcal{F}}_0$  temos que  $\mathcal{F}^n(0, \psi_0) = (s + n\alpha(\psi_0)h, \psi_0)$ . Pela equação que define número de rotação temos:

$$\beta(\{\psi = \psi_1\}) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \pi_1(F^n(s, \psi_0) - s) = \alpha(\psi_0)h$$

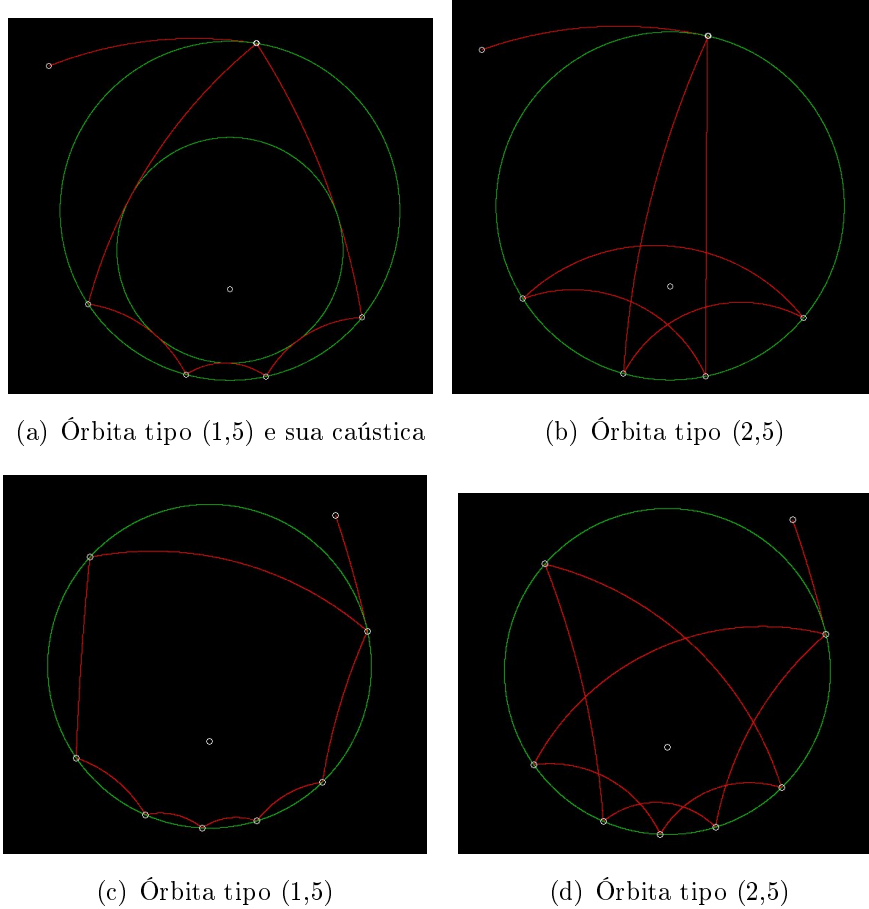
Como vimos anteriormente que  $\alpha(\psi)$  é difeomorfismo temos que para cada número real em  $(0, 2\pi)$  existe uma reta invariante com esse número de rotação.

Algumas órbitas da aplicação do bilhar têm um papel importante no estabelecimento de certas propriedades dinâmicas desse sistema. Tal definição é feita para bilhares mais gerais e não apenas para  $\mathcal{F}_0$ .

**Definição 17.** *Dado  $n > 2$  o conjunto  $\{(s_0, \psi_0), (s_1, \psi_1), \dots, (s_{n-1}, \psi_{n-1})\}$  é dito ser uma órbita periódica de período  $n$  se é uma órbita do bilhar com  $\mathcal{F}^n(s_0, \psi_0) = (s_n, \psi_n) = (s_0, \psi_0)$  e  $\mathcal{F}^i(s_0, \psi_0) \neq (s_0, \psi_0)$  para  $i = 0, 1, \dots, n-1$ . Órbitas periódicas determinam, univocamente, poligonais fechadas na mesa de Bilhar.*

*Dado  $m$ ,  $0 < \frac{m}{n} < 1$  m.d.c( $m, n$ ) = 1 dizemos que uma órbita de período  $n$  é do tipo  $(m, n)$  se ela tem período  $n$  e  $s_n = s_0 + 2m\pi$ , quando  $s$  é tomado no recobrimento universal  $\mathbb{R}$  de  $\mathbb{T}$ . Cada ponto  $(s_i, \psi_i)$  em uma órbita periódica do tipo  $(m, n)$  é um ponto periódico do tipo  $(m, n)$ .*

Para o bilhar circular, dados  $n, m \in \mathbb{N}$  é fácil ver que se o ângulo de saída  $\psi^{\frac{m}{n}}$  satisfaz  $\alpha(\psi^{\frac{m}{n}}) = \frac{2\pi m}{n}$  então  $\mathcal{F}_0^n(s_1, \psi^{\frac{m}{n}}) = (s_1, \psi^{\frac{m}{n}})$  e  $\mathcal{F}_0^i(s_1, \psi^{\frac{m}{n}}) \neq (s_1, \psi^{\frac{m}{n}})$ . Essa órbita possui período  $n$  e se fecha depois de  $m$  voltas. Estão apresentadas na figura 3.2 exemplos desses órbitas para  $n = 5, m = 1$  e  $n = 7, m = 1$  e  $m = 2$ . As poligonais geradas por órbitas do tipo  $(n, 1)$  são polígonos regulares inscritos no círculo geodésico.



(a) Órbita tipo (1,5) e sua caústica

(b) Órbita tipo (2,5)

(c) Órbita tipo (1,5)

(d) Órbita tipo (2,5)

Figura 3.3: Órbitas periódicas do bilhar circular geodésico no plano hiperbólico

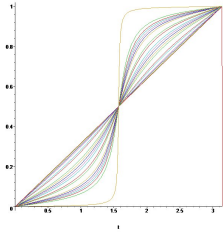
**Definição 18.** *Uma curva  $\gamma$ , na mesa de bilhar, é uma caústica do bilhar se uma trajetória que é tangente a  $\gamma$  entre duas batidas for sempre tangente após as colisões com a curva bordo.*

Tomemos  $s_1$  e  $s_2$  pontos consecutivos de uma trajetória de bilhar no círculo geodésico e seja  $\gamma$  a geodésica ligando esse dois pontos. Seja  $C_1$  o único círculo geodésico concêntrico ao círculo bordo e que tangencia  $\gamma$ . Aplicando uma rotação do ângulo central  $\alpha$  supra definido é fácil ver que o próximo segmento da trajetória continua tangenciando o círculo  $C_1$ . Dessa forma  $C_1$  é uma caústica do bilhar. Todas as órbitas do bilhar circular possui como caústica em círculo geodésico concêntrico ao círculo bordo.

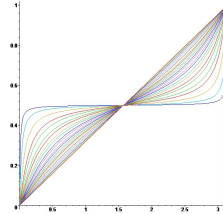
**Observação:** Se considerarmos o bilhar num círculo geodésico esférico de raio  $\phi_0 = \frac{\pi}{2}$ , que em particular é também geodésica, temos uma dinâmica muito simples. De fato, dado  $s_1$  e um ângulo  $\psi_1$  de saída temos que o ponto de batida  $s_2$  será o ponto antípoda de  $s_1$ , uma vez que  $s_2$  é definido como sendo a interseção de duas geodésicas na esfera. O ângulo

de batida será  $\psi_2 = \psi_1$ , por simetria. Assim, no próximo passo, teremos, por semelhante justificativa,  $s_3 = s_1$  e  $\psi_3 = \psi_1$  (vide figura acima). Dessa forma esse processo se repete a cada iterada e concluímos que o bilhar em tal círculo geodésico possui apenas órbitas de período 2. Tal fenômeno não acontece em bilhares em  $\mathbb{E}^2$  ou  $\mathbb{H}^2$  e está intimamente ligado à existência de pontos conjugados em  $\mathbb{S}_+^2$ .

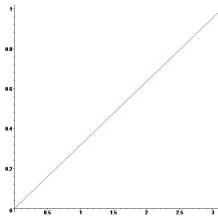
Na figura 3.2 ilustramos o desvio, decorrente da condição de twist, da reta vertical  $\{(s, \psi) \in \mathcal{M} | s = 0\}$  pela aplicação do Bilhar  $\mathcal{F}$ . Cada figura foi obtida esboçando-se no mesmo gráfico o desvio da vertical alterando-se o valor do raio do círculo geodésico. Em **(a)** temos os desvios do caso esférico, em **(b)** temos o do caso hiperbólico e na figura **(c)** o Euclideano. Observemos que em **(c)** o desvio é linear e não depende do raio do círculo geodésico. Já em **(a)** e **(b)** os desvios dependem do raio. Nesses dois casos quanto mais próximo de zero é o raio mais próximo de linear é o desvio uma vez que os círculos geodésicos ficam muito parecidos com os Euclidianos. Por outro lado, em  $\mathbb{S}_+^2$  quando o raio se aproxima de  $\frac{\pi}{2}$  temos que a vertical tende a ser desviada para a reta  $\{(\pi, \psi) | 0 < \psi < \pi\}$ , ilustrando assim o exposto na observação acima.



(a) Esfera



(b) Plano Hiperbólico



(c) Plano Euclideano

Figura 3.4:

Para finalizarmos essa seção resumimos nossos resultados:

**Teorema 2.** *Seja  $\mathcal{F}$  a aplicação do bilhar no círculo geodésico de raios  $r_0, \phi_0, \rho_0$  em  $\mathbb{E}^2, \mathbb{S}_+^2, \mathbb{H}^2$  respectivamente, onde  $0 < \phi_0 < \frac{\pi}{2}$  e  $r_0, \rho_0$  são números reais positivos. O bilhar no círculo geodésico de respectivo raio, satisfaz:*

1.  $\mathcal{F}$  é uma aplicação twist que preserva área.
2. As retas  $\psi = \text{constante}$  são  $\mathcal{F}$ -invariantes.
3. Existem retas invariantes com qualquer número de rotação  $\beta \in \mathbb{R}$ .
4. Toda órbita tem como caústica um círculo geodésico concêntrico ao círculo bordo;

### 3.3 Propriedades Twist

Nessa seção apresentaremos a extensão de alguns resultados clássicos do bilhar em ovais no plano Euclideano para bilhares em ovais na semi-esfera  $\mathbb{S}_+^2$  e no plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$ . Para isso utilizaremos o teorema 1 demonstrado nas seções anteriores.

Uma órbita  $\{s_i, \psi_i\}_{i \in \mathbb{Z}}$  é de Birkhoff se a sequência  $s_i$  preserva a ordem cíclica em  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/|\Gamma|\mathbb{Z}$ . Tais órbitas também são ditas ordenadas. Dizemos que uma órbita é de Birkhoff do tipo  $(m, n)$  se ela é ordenada e possui tipo  $(m, n)$  (vide definição 17).

Um dos primeiros resultados no estudo bilhares em ovais é o teorema de Birkhoff:

*Sejam  $\mathcal{F}$  a aplicação do bilhar em uma oval  $\mathcal{C}^q$  com  $q \geq 2$  e  $m < n$  inteiros positivos, com  $m$  e  $n$  primos entre si. Então existem, pelo menos, duas órbitas de Birkhoff do tipo  $(m, n)$ , isto é, duas órbitas de período  $n$  geometricamente distintas.*

A demonstração desse resultado para bilhares em ovais no plano Euclideano pode ser encontrada em [(12)], seção 9.3. Tal demonstração se estende para bilhares em ovais em  $\mathbb{S}_+^2$  e  $\mathbb{H}^2$  uma vez que utiliza apenas a propriedade twist da aplicação  $\mathcal{F}$  mostrada no teorema 1. Assim o teorema de Birkhoff vale também para bilhares na esfera e no plano hiperbólico.

Na seção anterior definimos o número de rotação  $\beta$  de uma órbita do bilhar. Vamos utilizar esse número para estender a classificação de conjuntos fechados invariantes minimais no espaço de fase do bilhar Euclideano, que se projetam injetivamente em  $\mathbb{T}$ , para bilhares em  $\mathbb{S}_+^2$  e  $\mathbb{H}^2$  dado um número de rotação  $\beta$  no intervalo de torção  $(0, 1)$ . Essa classificação está baseada em [(12)], seção 13.2.

Vimos na seção 3.2 que o espaço de fase do bilhar em círculos geodésico é folheado por retas invariantes com todos os possíveis números de rotação  $\beta \in (0, 1)$ . Além disso em cada uma dessas retas  $\mathcal{F}_0$  é basicamente uma rotação rígida da circunferência do ângulo

$2\pi\beta$ . Apesar dessa estrutura do espaço de fase do bilhar circular representar um caso muito atípico nos bilhares Euclidianos, ele representa um bom exemplo para a classificação que procuramos.

Consideremos  $\mathcal{O}_\beta \subset \mathcal{M}$  um conjunto fechado, invariante, minimal e ordenado e que se projeta injetivamente em  $\mathbb{T}$  com número de rotação  $\beta$ . Esse conjunto é não vazio para todo  $\beta \in (0, 1)$ . De fato  $\mathcal{O}_\beta$  com  $\beta$  racional é não vazio pelo teorema de Birkhoff. Para  $\beta$  irracional [(21)], pág.: 68 mostra que  $\mathcal{O}_\beta$  é não vazio, utilizando a propriedade twist.

No bilhar circular geodésico temos que se  $\beta = \frac{m}{n}$  racional,  $\mathcal{O}_\beta$  é uma curva (reta) rotacional invariante formada por órbitas do tipo  $(m, n)$ . Se  $\beta$  é irracional,  $\mathcal{O}_\beta$  é ainda uma curva rotacional invariante e a órbita de qualquer ponto nessa curva é densa.

Da propriedade twist e preservação de área segue que para bilhares em outras ovas no plano Euclidiano o conjunto  $\mathcal{O}_\beta$  é ou uma órbita periódica, ou uma curva rotacional invariante ou um conjunto de Aubry-Mather.

Uma curva rotacional invariante é uma curva contínua fechada e homotopicamente não trivial no espaço de fase  $\mathcal{M}$ . As retas invariantes no espaço de fase do bilhar circular geodésico são curvas rotacionais.

Um conjunto de Aubry-Mather em  $\mathcal{M}$  é um conjunto invariante minimal, i.e que não possui subconjunto próprios fechados, que se projeta injetivamente num conjunto de Cantor de  $\mathbb{T}$  que não é denso em aberto algum.

No que se segue, baseamos nosso estudo em [(12)] capítulo 13, onde tal classificação é feita para aplicações twist mais gerais e uma demonstração dos resultados utilizados pode ser encontrada.

Dado  $\beta$  racional, o conjunto  $\mathcal{O}_\beta$ , ou é uma curva rotacional invariante formada por órbitas periódicas ou contém pontos não periódicos. Nesse último caso as órbitas dos pontos não periódicos formam conexões heteroclínicas a órbitas periódicas cuja existência segue do teorema de Birkhoff.

Para qualquer número irracional  $\beta$  no intervalo de torção temos duas possibilidades: ou existe um conjunto de Aubry-Mather ou uma curva rotacional invariante ambos com número de rotação  $\beta$ .

Outra propriedade importante das transformações twist é que se duas órbitas possuem fechos disjuntos então seus números de rotação são distintos. Dessa forma como um análogo para número de rotação irracional, do teorema de Birkhoff, temos que a aplicação do bilhar em uma oval tem no máximo uma curva rotacional invariante com número de rotação  $\beta$ . Além disso se existir uma tal curva invariante então  $\mathcal{F}$  não tem conjuntos de Aubry-Mather com número de rotação  $\beta$  fora dessa curva e portanto tem no máximo um conjunto Aubry-Mather com número de rotação  $\beta$ .

*Dado  $\beta$  racional, existem pelo menos dois conjuntos invariantes com esse número de ro-*

tação. Se  $\beta$  é irracional existe no máximo um conjunto invariante no espaço de fase da aplicação do Bilhar com esse número de rotação. Para fins de diferenciabilidade, os conjuntos invariantes estudados acima possuem a propriedade de estarem contidos em gráficos de funções Lipschitz o que significa que  $\mathcal{F}$  restrita a cada um deles é uma aplicação direfenciável em quase todo ponto.

Para finalizar, também como consequência da condição de twist e preservação de área demonstradas no teorema 1, temos o teorema da curva invariante de Birkhoff válido para bilhares em ovais em  $\mathbb{S}_+^2$  e  $\mathbb{H}^2$ , isto é *O bordo de uma faixa horizontal aberta composta por pontos não errantes é composto por duas curvas invariante que são gráficos de funções Lipschitz*. Resumimos essa seção com o seguinte teorema:

**Teorema 3.** *Seja  $S = \mathbb{E}^2, \mathbb{H}^2$  e  $\mathbb{S}_+^2$ , onde  $\mathbb{E}^2$  é o espaço Euclideano,  $\mathbb{H}^2$  plano hiperbólico e  $\mathbb{S}_+^2$  um hemisfério da esfera unitária. Seja  $\Gamma \subset S$  uma oval, i.e., uma curva simples, fechada, de classe  $C^q$   $q \geq 2$  e com curvatura geodésica estritamente positiva. Considere-mos  $\Gamma$  parametrizada pelo comprimento de arco. Seja ainda,  $\mathcal{F} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ , a aplicação de bilhar definida em  $\Gamma$ , onde  $\mathcal{M} = \mathbb{T} \times (0, \pi)$  e  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/|\Gamma|\mathbb{Z}$ .*

1. *Dado  $\beta = \frac{m}{n}$  existem pelo menos duas órbitas de período  $n$  geometricamente distintas. Para  $\beta$  irracional existe no máximo um subconjunto de  $\mathcal{M}$  invariante por  $\mathcal{F}$  com número de rotação  $\beta$ .*
2. *Seja  $E \subset \mathcal{M}$  subconjunto fechado, ordenado, minimal, invariante que se projeta injetivamente em  $\mathbb{T}$ . Se o número de rotação de  $E$  é racional então  $E$  é uma curva rotacional composta por órbitas periódicas ou que contém pontos não periódicos. Se o número de rotação é irracional  $E$  é uma curva rotacional sem pontos periódicos ou um conjunto de Aubry Mather.*
3. *Órbitas com fechos disjuntos possuem números de rotação distintos.*
4. *O bordo de uma faixa horizontal aberta composta por pontos não errantes é composto por duas curvas invariantes que são gráficos de funções Lipschitz.*

# Capítulo 4

## Órbitas Periódicas

Vimos no capítulo anterior, teorema 3, que a aplicação do bilhar em numa oval  $\Gamma$  de  $S$  possui pelo menos duas órbitas periódicas de qualquer período  $n \geq 2$ . Podemos formular as duas seguintes questões em torno das quais será desenvolvido esse capítulo:

*É possível estabelecer uma classificação de tais órbitas? E o que se pode sobre a quantidade delas para cada período  $n$  dado?*

Nesse capítulo, usando a fórmula de Mackay-Meiss, vamos mostrar que uma das órbitas periódicas do teorema 3 é hiperbólica ou parabólica, resultado já conhecido para o caso  $S = \mathbb{E}^2$ , ver [(13)]. Com relação à segunda questão, mostraremos para  $S$  que:

*Em  $\mathbb{E}^2$  e  $\mathbb{H}^2$  é aberto e denso o conjunto das ovals  $C^\infty$  para as quais existe apenas uma quantidade finita de órbitas periódicas da aplicação do bilhar para cada período  $n$  e elas são todas hiperbólicas. Para o caso do bilhar na esfera  $\mathbb{S}_+^2$  esse conjunto é apenas aberto.*

Demonstraremos tal resultado utilizando as idéias desenvolvidas em [(7)], para  $S = \mathbb{E}^2$ , por Pinto-de-Carvalho, Kamphorst e Dias Carneiro para o caso planar, cabe ressaltar no entanto que algumas adaptações serão necessárias.

### 4.1 Propriedades gerais

Seja  $\Gamma(s)$  uma oval, i.e, uma curva suave, fechada, simples com curvatura geodésica estritamente positiva, em  $S = \mathbb{E}^2, \mathbb{S}_+^2, \mathbb{H}^2$ , parametrizada pelo parâmetro comprimento de arco  $s$ .

Relembremos que a distância geodésica  $g(\cdot, \cdot)$  em  $S$  é uma função diferenciável dada



por:

$$g(s_1, s_2) = \begin{cases} \sqrt{\langle \Gamma(s_1) - \Gamma(s_2), \Gamma(s_1) - \Gamma(s_2) \rangle} & \text{em } \mathbb{E}^2 \\ \arccos(\langle \Gamma(s_1), \Gamma(s_2) \rangle) & \text{em } \mathbb{S}_+^2 \\ \operatorname{arccosh}(-\ll \Gamma(s_1), \Gamma(s_2) \gg) & \text{em } \mathbb{H}^2 \end{cases} \quad (4.1)$$

Seja  $\{(s_i, \psi_i) = \mathcal{F}^i(s_0, \psi_0) | i \in \mathbb{Z}\}$ , uma órbita periódica de período  $n$ , isto é  $(s_0, \psi_0) = \mathcal{F}^n(s_0, \psi_0)$  e  $(s_0, \psi_0) \neq \mathcal{F}^i(s_0, \psi_0)$  para  $0 < i < n$ . Dizemos que essa órbita é *hiperbólica* se os autovalores,  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$ , de  $D_{(s_0, \psi_0)}\mathcal{F}^n$  são reais e diferentes de um. Se  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  não forem reais a órbita é dita *elíptica*. Caso  $\lambda_1$  e  $\lambda_2$  sejam reais e iguais a órbita é dita *parabólica*.

Polígonos geodésicos são polígonos cujos lados são formados por segmentos de geodésicas. Assim trajetórias periódicas do bilhar correspondem a polígonos geodésicos inscritos na curva fechada  $\Gamma$ . Dado  $n \in \mathbb{N}$  e uma sequência  $s_0, s_1, \dots, s_{n-1}$  de pontos em  $\Gamma$ , um polígono geodésico com  $n$  lados e vértices em  $s_0, s_1, \dots, s_{n-1}$  tem perímetro

$$W_n(s_0, s_1, \dots, s_{n-1}) = g(s_0, s_1) + g(s_1, s_2) + \dots + g(s_{n-1}, s_0)$$

$W_n$  é um funcional contínuo no  $n$ -toro  $\mathbb{T}^n = \mathbb{T} \times \mathbb{T} \times \dots \times \mathbb{T}$  com  $\mathbb{T} = \frac{\mathbb{R}}{|\Gamma|\mathbb{Z}}$ .

Uma órbita periódica de período  $n$  do bilhar define um polígono geodésico cujos vértices definem a  $n$ -upla  $(s_0, s_1, \dots, s_{n-1})$  em  $\mathbb{T}^n$ . Seja  $D_n = \{(s_0, s_1, \dots, s_{n-1}) \in \mathbb{T}^n | s_i \neq s_{i+1} \text{ para } 0 \leq i \leq n-1\}$ . As órbitas periódicas de período  $n$  da aplicação de bilhar estão contidas em  $D_n$  uma vez que a aplicação de bilhar não tem ponto fixo.

**Lema 11.** *O funcional  $W_n : \mathbb{T}^n \rightarrow \mathbb{E}$  é contínuo em  $\mathbb{T}^n$  e diferenciável apenas em  $D_n$ .*

**Prova:** De fato, das equação 4.1, temos que:

$$\partial_1 g(s_i, s_{i+1}) = \begin{cases} \frac{\langle \Gamma'(s_i), \Gamma(s_i) - \Gamma(s_{i+1}) \rangle}{g(s_i, s_{i+1})} & \text{em } \mathbb{E}^2 \\ \frac{\langle \Gamma'(s_1), \Gamma(s_2) \rangle}{\operatorname{sen} g(s_i, s_{i+1})} & \text{em } \mathbb{S}_+^2 \\ \frac{-\ll \Gamma'(s_1), \Gamma(s_2) \gg}{\operatorname{senh} g(s_i, s_{i+1})} & \text{em } \mathbb{H}^2 \end{cases} \quad (4.2)$$

Dessa forma  $\partial_1 g(s_i, s_{i+1})$  está definida se e somente se  $g(s_i, s_{i+1}) \neq 0$  que é equivalente a  $s_i \neq s_{i+1}$ , uma vez que  $g$  é a distância geodésica em  $S$ .

□

**Lema 12.** *Para que os vértices  $s_0, s_1, \dots, s_{n-1}$  de uma poligonal no espaço de configuração definam uma órbita periódica do bilhar no espaço de fase é necessário e suficiente que  $(s_0, s_1, \dots, s_{n-1}) \in D_n$  seja um ponto crítico de  $W_n$ .*

**Prova:** O gradiente de  $W_n$  é dado por

$$\left( \frac{\partial g(s_0, s_1)}{\partial s_0} + \frac{\partial g(s_{n-1}, s_0)}{\partial s_0}, \frac{\partial g(s_0, s_1)}{\partial s_1} + \frac{\partial g(s_1, s_2)}{\partial s_1}, \dots, \frac{\partial g(s_{n-2}, s_{n-1})}{\partial s_{n-1}} + \frac{\partial g(s_{n-1}, s_0)}{\partial s_0} \right)$$

Pelo princípio de Maupertuis cada entrada do gradiente de  $W_n$  é igual a zero se e somente se a poligonal representa uma trajetória periódica no espaço de configuração.

□

**Lema 13.**  $W_n$  assume máximo global em  $D_n$ .

**Prova:** Primeiramente observemos que sendo  $W_n$  contínua no compacto  $\mathbb{T}^n$ , pelo critério de Weierstrass  $W_n$  assume máximo e mínimo globais em  $\mathbb{T}^n$ . Seja  $(s_0, s_1, \dots, s_{k-1}, s_k, s_{k+1}, \dots, s_n)$  um ponto em  $\mathbb{T}^n - D_n$  onde  $s_k = s_{k+1}$ . Se definirmos  $(s_0, s_1, \dots, s_{k-1}, s_k, \tilde{s}_{k+1}, \dots, s_{n-1})$  onde  $\tilde{s}_{k+1} \neq s_i$  para  $i = 0, 1, \dots, k, k+1, \dots, s_{n-1}$ , temos que  $W_n(s_0, s_1, \dots, s_{k-1}, s_k, \tilde{s}_{k+1}, \dots, s_{n-1})$  é maior que  $W_n(s_0, s_1, \dots, s_{k-1}, s_k, s_{k+1}, \dots, s_{n-1})$ . Se ainda  $(s_0, s_1, \dots, s_{k-1}, s_k, \tilde{s}_{k+1}, \dots, s_{n-1})$  não pertencer a  $D_n$  procedemos, quantas vezes forem necessárias, dessa mesma forma. Assim no final obteremos um ponto  $(\tilde{s}_0, \tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_{n-1})$  com  $W_n(\tilde{s}_0, \tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_{n-1}) > W_n(s_0, s_1, \dots, s_{n-1})$ , e o máximo de  $W_n$  ocorre em algum ponto de  $D_n$ .

□

Como em  $D_n$  o funcional  $W_n$  é diferenciável temos que o máximo global ocorre em  $D_n$  num ponto crítico. Dessa forma pelo lema 12 temos que a poligonal de perímetro máximo define uma órbita periódica do bilhar.

Assim, temos o seguinte resultado:

**Proposição 9.** *O funcional  $W_n$  é diferenciável apenas em  $D_n$  e  $D_n$  contém um ponto  $(\tilde{s}_0, \tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_{n-1})$  que define uma órbita periódica do bilhar e uma trajetória, na mesa do bilhar, relacionada a esse ponto possui perímetro máximo no espaço de configuração, mais especificamente,  $W_n$  assume máximo global num ponto crítico  $(\tilde{s}_0, \tilde{s}_1, \dots, \tilde{s}_{n-1})$  em  $D_n$  com  $\tilde{s}_i$  vértices de uma trajetória do bilhar.*

## 4.2 Classificação de órbitas Periódicas

Se  $\{(s_i, \psi_i) = \mathcal{F}^i(s_0, \psi_0) | 0 \leq i \leq n-1\}$  é uma órbita periódica do bilhar, então pela regra da cadeia

$$D_{(s_0, \psi_0)} \mathcal{F}^n = D_{(s_{n-1}, \psi_{n-1})} \mathcal{F} \ D_{(s_{n-2}, \psi_{n-2})} \mathcal{F} \ \cdots \ D_{(s_1, \psi_1)} \mathcal{F} \ D_{(s_0, \psi_0)} \mathcal{F}$$

e

$$\det D_{(s_0, \psi_0)} \mathcal{F}^n = \det D_{(s_{n-1}, \psi_{n-1})} \mathcal{F} \det D_{(s_{n-2}, \psi_{n-2})} \mathcal{F} \cdots \det D_{(s_1, \psi_1)} \mathcal{F} \det D_{(s_0, \psi_0)} \mathcal{F}$$

Pela equação 3.22 temos

$$\det D_{(s_0, \psi_0)} \mathcal{F}^n = \frac{\sin \psi_{n-1}}{\sin \psi_0} \frac{\sin \psi_{n-2}}{\sin \psi_{n-1}} \cdots \frac{\sin \psi_1}{\sin \psi_2} \frac{\sin \psi_0}{\sin \psi_1} = 1$$

e temos que os autovalores de  $D_{(s_0, \psi_0)} \mathcal{F}^n$  são dados por:

$$\frac{-\text{trac} D_{(s_0, \psi_0)} \mathcal{F}^n \pm \sqrt{(\text{trac} D_{(s_0, \psi_0)} \mathcal{F}^n)^2 - 4}}{2}$$

Dessa forma podemos reescrever a definição de órbita hiperbólica, elíptica e parabólica da seguinte forma:

**Definição 19.** *A órbita de  $(s_0, \psi_0)$  é:*

- *hiperbólica se  $|\text{trac}(D_{(s_0, \psi_0)} \mathcal{F}^n)| > 2$ .*
- *elíptica se  $|\text{trac}(D_{(s_0, \psi_0)} \mathcal{F}^n)| < 2$ .*
- *parabólica se  $|\text{trac}(D_{(s_0, \psi_0)} \mathcal{F}^n)| = 2$*

Dados  $(s_0, s_1)$  temos bem definida a órbita do bilhar, que possui  $s_0$  como ponto de saída e  $s_1$  como primeira batida. De fato, seja  $\gamma$  a única geodésica ligando  $\Gamma(s_0)$  a  $\Gamma(s_1)$ . O ângulo de saída  $\psi_0$  é o ângulo entre o vetor tangente à geodésica  $\gamma$  e a curva  $\Gamma$  em  $s_0$ . Seja  $s_2$  o próximo ponto de batida e  $G : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  dada por  $G(s_0, s_1) = (s_1, s_2)$ . Uma órbita de período  $n$  satisfaz  $G^n(s_0, s_1) = (s_0, s_1)$ .

Relacionando essa aplicação à aplicação do bilhar temos o seguinte lema, cuja demonstração está contida na prova da diferenciabilidade do da aplicação do bilhar.

**Lema 14.** *Sendo  $\mathcal{M}$  o espaço de fase do bilhar, as aplicações  $\mathcal{F} : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$  e  $G : \mathbb{T}^2 \rightarrow \mathbb{T}^2$  são conjugadas pelo difeomorfismo  $J : \mathcal{M} \rightarrow \mathbb{T}^2$ ,  $J(s_0, \psi_0) = (s_0, s_1)$ , dado implicitamente por  $\cos \psi_0 = -\frac{\partial \mathbf{g}}{\partial s_0}(s_0, s_1)$ .*

O lema 14 estabelece que  $\mathcal{F}$  e  $G$  são conjugadas e, pela regra da cadeia, suas derivadas também são conjugadas e possuem os mesmos autovalores. Assim basta classificarmos as órbitas periódicas de  $G$ .

**Lema 15.** A expressão de  $D_{(s_i, s_{i+1})}G$  é:

$$D_{(s_i, s_{i+1})}G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{b_i}{b_{i+1}} & -\frac{a_{i+1}}{b_{i+1}} \end{pmatrix}$$

onde

$$a_i = \frac{\partial^2}{\partial s_i \partial s_{i+1}}(g(s_{i-1}, s_i) + g(s_i, s_{i+1}))$$

e

$$b_i = \frac{\partial^2 g}{\partial s_i \partial s_{i+1}}(s_i, s_{i+1})$$

**Prova:** Pelo princípio de Maupertui, temos:

$$\frac{\partial}{\partial s_{i+1}}(g(s_i, s_{i+1}) + g(s_{i+1}, s_{i+2})) = 0$$

Tomando a diferencial nessa expressão,

$$\frac{\partial^2 g}{\partial s_i \partial s_{i+1}}(s_i, s_{i+1})ds_i + \frac{\partial^2 g}{\partial s_{i+1}^2}(s_i, s_{i+1})ds_{i+1} + \frac{\partial^2 g}{\partial s_{i+1}^2}(s_{i+1}, s_{i+2})ds_{i+1} + \frac{\partial^2 g}{\partial s_{i+1} \partial s_{i+2}}(s_{i+1}, s_{i+2})ds_{i+2} = 0 \quad (4.3)$$

Fazendo

$$a_i = \frac{\partial^2}{\partial s_i \partial s_{i+1}}(g(s_{i-1}, s_i) + g(s_i, s_{i+1}))$$

e

$$b_i = \frac{\partial^2 g}{\partial s_i \partial s_{i+1}}(s_i, s_{i+1})$$

Temos de 4.2:

$$\frac{\partial s_{i+2}}{\partial s_i} = -\frac{b_i}{b_{i+1}}$$

e

$$\frac{\partial s_{i+2}}{\partial s_{i+1}} = -\frac{a_{i+1}}{b_{i+1}}$$

Assim obtemos,

$$D_{(s_i, s_{i+1})}G = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\frac{b_i}{b_{i+1}} & -\frac{a_{i+1}}{b_{i+1}} \end{pmatrix}$$

□

Numa órbita periódica  $\{(s_i, \psi_i), 0 \leq i \leq n\}$ , da aplicação do bilhar  $\mathcal{F}$  temos que  $\{(s_i, s_{i+1}) | 0 \leq i \leq n-1\}$  é periódica para  $G$  e pela regra da cadeia

$$D_{(s_0, s_1)} G^n = D_{(s_{n-1}, s_0)} G \cdot D_{(s_{n-2}, s_{n-1})} G \cdots D_{(s_3, s_4)} G \cdot D_{(s_2, s_3)} G \cdot D_{(s_2, s_1)} G D_{(s_0, s_1)} G$$

Como  $\det D_{(s_i, s_{i+1})} G = \frac{b_i}{b_{i+1}}$  temos da equação anterior

$$\det D_{(s_0, s_1)} G^n = \frac{b_{n-1}}{b_0} \frac{b_{n-2}}{b_{n-1}} \cdots \frac{b_1}{b_2} \frac{b_0}{b_1} = 1 \quad (4.4)$$

Como era de se esperar uma vez que  $G$  e  $\mathcal{F}$  são conjugadas.

Pelo lema 14 podemos classificar as órbitas periódicas de  $\mathcal{F}$  utilizando a aplicação  $G$ .

Para classificarmos as órbitas periódicas, vamos utilizar a fórmula de Hill. A demonstração dessa fórmula, contida em (13) não depende do modelo de geometria adotado e será apresentada abaixo. Tal demonstração depende apenas da suavidade do bordo  $\Gamma$  da mesa de bilhar.

**Lema 16** (Fórmula de Hill). *Seja  $\{(s_i, s_{i+1}) | 0 \leq i \leq n-1\}$  uma órbita periódica do bilhar e  $P = D_{(s_0, s_1)} G^n$ . Então*

$$\det(P - I_2) = (-1)^n \frac{\det(H_n)}{b_1 b_2 \cdots b_n}$$

onde  $H_n$  é a matriz Hessiana de  $W_n(s_0, s_1, \dots, s_{n-1})$ .

**Prova :** Essa demonstração está contida em [(13)] pág 69 e 70.

Primeiramente, não é difícil ver que  $H_n$  é uma matriz  $n \times n$ , tridiagonal e simétrica dada por:

$$H_2 = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 + b_1 \\ b_0 + b_1 & a_1 \end{pmatrix} \quad H_n = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & b_{n-1} \\ b_0 & a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & a_3 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & a_{n-2} & b_{n-2} \\ b_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix} \quad n > 2$$

Seja  $\lambda$  um autovalor de  $P := D_{(s_0, s_1)G^n}$  e  $\vec{v} = (v_0, v_1)$  um auto vetor associado a  $\lambda$ , i.e.,  $P\vec{v} = \lambda\vec{v}$ . De 4.4 temos que  $\lambda \neq 0$ . Seja então:

$$H_2(\lambda) = \begin{pmatrix} a_0 & \lambda^{-1}(b_0 + b_1) \\ \lambda^{-1}(b_0 + b_1) & a_1 \end{pmatrix}$$

$$H_n = \begin{pmatrix} a_0 & b_0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & \lambda^{-1}b_{n-1} \\ b_0 & a_1 & b_1 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & b_1 & a_2 & b_2 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & b_2 & a_3 & \ddots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \ddots & a_{n-2} & b_{n-2} \\ \lambda^{-1}b_{n-1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & b_{n-2} & a_{n-1} \end{pmatrix} \quad n > 2$$

Daí  $H_2(1) = H_2$  e  $H_n(1) = H_n$ .

Denotemos  $P_{i,i+1} := D_{(s_i, s_{i+1})G}$ . Assim  $P = P_{n-1,0}P_{n-2,n-1} \cdots P_{2,3}P_{1,2}P_{0,1}$ .

Definimos com isso  $n$  números reais  $\bar{v}_0, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{n-1}$  da seguinte forma:

$$\bar{v}_0 := v_0, \bar{v}_1 := v_1$$

$$\begin{pmatrix} \bar{v}_{i+1} \\ \bar{v}_{i+2} \end{pmatrix} := P_{i,i+1} \begin{pmatrix} \bar{v}_i \\ \bar{v}_{i+1} \end{pmatrix} \quad i > 1 \quad (4.5)$$

Como  $\vec{v} = (v_0, v_1)$  é auto vetor de  $P$  é imediato de 4.2 que

$$\bar{v}_n = \lambda v_0 \quad e \quad \bar{v}_{n+1} = \lambda v_1. \quad (4.6)$$

A matriz  $H_n(\lambda)$  é singular. De fato, sejam  $\vec{w}$  o vetor  $\vec{w} = (\bar{v}_0, \bar{v}_1, \dots, \bar{v}_{n-1})$  e  $\vec{u} = H_n(\lambda)\vec{w}$ . É fácil verificar que

$$u_i = b_{i-1}\bar{v}_{i-1} + a_i\bar{v}_i + b_i\bar{v}_{i+1}, \quad 0 < i < n - 1. \quad (4.7)$$

Mas de 4.2 deduzimos  $\bar{v}_{i+1} = -\frac{b_{i-1}\bar{v}_{i-1}-a_i\bar{v}_i}{b_i}$ . Substituindo em 4.2 obtemos que, para  $0 < i < n-1$ ,  $u_i = 0$ .

Para  $i = 0$ ,

$$u_0 = a_0v_0 + b_0v_1 + \lambda^{-1}b_{n-1}\bar{v}_{n-1} = \lambda^{-1}(a_nv_n + b_nv_{n+1} + b_{n-1}v_{n-1})$$

onde a segunda igualdade vem de 4.6 e do fato de  $a_n = a_0$  e  $b_0 = b_n$ . Daí é fácil ver que  $u_0 = 0$ . Procedendo de forma análoga mostramos que  $u_{n-1} = 0$ . Portanto

$$\det H_n(\lambda) = 0, \quad (4.8)$$

se  $\lambda$  é autovalor de  $P$ .

Calculando o determinante de  $H_n(\lambda)$  desenvolvendo pela primeira coluna temos, após simplificações:

$$\det H_n(\lambda) = \det H_n(1) + (\lambda - 1)(-1)^{n+1} \prod_0^{n-1} b_j + (\lambda^{-1} - 1)(-1)^{n+1} \prod_0^{n-1} b_j = 0.$$

Usando 4.2 e que  $\lambda^{-1}$  é também autovalor de  $P$  obtemos:

$$\lambda + \lambda^{-1} - 2 = (-1)^{n+1} \frac{\det(H_n)}{b_0 b_1 \cdots b_{n-1}}.$$

que é equivalente a

$$\det(P - I_2) = (-1)^{n+1} \frac{\det(H_n)}{b_1 b_2 \cdots b_n}$$

pelo fato do determinante de  $P$  ser 1.

□

**Corolário 4** (Fórmula de Mackay-Meiss).

$$2 - \text{trac}P = (-1)^{n+1} \frac{\det(H_n)}{b_1 b_2 \cdots b_n}$$

**Prova:** Esse corolário segue da Fórmula de Hill, no lema anterior, usando que  $P$  é  $2 \times 2$  e  $\det P = 1$ .

**Corolário 5.** *Seja  $(\tilde{s}_0, \tilde{s}_1)$  a órbita periódica obtida no lema 9:*

- *Se  $(-1)^n \det(H_n) > 0$  ou então  $(\tilde{s}_0, \tilde{s}_1)$  é uma órbita hiperbólica;*
- *Se  $(-1)^n \det(H_n) = 0$  então  $(\tilde{s}_0, \tilde{s}_1)$  é uma órbita parabólica;*

**Prova:** Suponha  $(-1)^n \det(H_n) > 0$ . Assim temos, pela fórmula de Mackay-Meiss, que  $\text{trac}P > 2$  e da definição 19 segue que a órbita é hiperbólica. Por outro lado, se  $(-1)^n \det(H_n) = 0$ , temos que  $\text{trac}P = 2$  e também pela definição 19 temos que, esse é o caso de a órbita ser parabólica.

□

**Corolário 6.** *Se a órbita periódica da proposição 9 for não degenerada e um máximo local para a função  $W_n$  então ela é hiperbólica e assim isolada.*

**Prova:** Pela Fórmula de Mackay-Meiss deduzimos que  $\det(P - I_n) < 0$ . Como  $\det(P - \lambda I_n)$  vale 1 para  $\lambda = 0$  temos que, por continuidade, existe  $\lambda \in (0, 1)$  tal que  $\det(P - \lambda I_n) = 0$ . Assim a órbita é hiperbólica. Que essa órbita é isolada segue do teorema de Hartman-Grobman [(12)].

□

Assim o resultado citado no início da seção segue desses dois últimos resultados.

**Exemplo:** Na seção 3.2 estudamos o bilhar em círculos geodésicos em  $\mathbb{S}_+^2$ ,  $\mathbb{H}^2$  e verificamos que para o ângulo  $\psi$  de saída satisfazendo  $\alpha(\psi) = 2\pi \frac{m}{n}$  temos uma órbita periódica do tipo  $(m, n)$  e como todas órbitas periódicas com esse número de rotação definem polígonos geodésicos com mesmo perímetro temos que todas essas órbitas são parabólicas. Tal propriedade dos bilhares circulares geodésicos é bem atípica no conjunto dos bilhares em ovais. De fato como veremos na próxima seção, possuir órbita periódica hiperbólica é uma propriedade genérica.

## 4.3 Órbitas periódicas hiperbólicas

Estudar propriedades genéricas em matemática é uma pedida quase que natural após seu estabelecimento. Na seção anterior desse capítulo estabelecemos a existência de uma órbita periódica parabólica ou hiperbólica de qualquer período  $n$  para a aplicação do bilhar em uma oval em  $S$ . Sendo a aplicação de bilhar em oval um difeomorfismo sabemos que se ela possui uma órbita hiperbólica então pequenas perturbações dessa aplicação também possuem. De fato na definição de órbita hiperbólica temos a existência de autovalores, em módulo, diferente de um e essa é uma condição aberta. Dessa forma possuir órbita hiperbólica é uma propriedade aberta conjunto dos difeomorfismos. Claramente, sendo exemplos de difeomorfismos, temos que se perturbarmos uma aplicação de bilhar que possui órbita periódica hiperbólica, o difeomorfismo resultante também possuirá. A



questão que surge é: Essa perturbação é uma aplicação de bilhar em alguma oval? A resposta é nem sempre! Aplicações de bilhar em ovais em  $S$  necessariamente são difeomorfismos conservativos e essa propriedade não é aberta nos difeomorfismos.

Em vista do exposto acima, ao invés de perturbarmos a aplicação do bilhar perturbaremos a oval que gerou essa aplicação. Esse procedimento já foi adotado para bilhares no plano Euclidiano, como em [(7)], mas não para para bilhares na semi-esfera ou no plano hiperbólico.

### 4.3.1 Perturbações normais de ovais

Seja  $\Gamma : I \rightarrow S$  uma oval de classe  $C^\infty$ , parametrizada pelo comprimento de arco  $s$ . E seja  $\eta(s) \in T_{\Gamma(s)}S$  seu vetor normal unitário. Uma perturbação normal de  $\Gamma$  é uma curva  $\beta(s)$  dada por

$$\beta(s) = \begin{cases} \Gamma(s) + \lambda(s)\eta(s) & \text{em } \mathbb{E}^2 \\ \frac{\Gamma(s) + \lambda(s)\eta(s)}{\sqrt{1 + \lambda^2(s)}} & \text{em } \mathbb{S}_+^2 \\ \frac{\Gamma(s) + \lambda(s)\eta(s)}{\sqrt{1 - \lambda^2(s)}} & \text{em } \mathbb{H}^2 \end{cases} \quad (4.9)$$

onde em cada caso  $\lambda(\cdot)$  é uma função  $C^\infty$ , periódica de período  $|\Gamma|$  onde  $|\Gamma|$  é o comprimento da curva. No que se segue consideraremos  $\|\lambda\|_2 = \max_{s \in [0, |\Gamma|]} \{\lambda(s), \lambda'(s), \lambda''(s)\}$ .

**Proposição 10.** *Para  $\|\lambda\|_2$  suficientemente pequeno,  $\beta$  é uma perturbação de  $\Gamma$ ,  $C^\infty$ , fechada, regular e geodesicamente convexa, i.e., possui curvatura geodésica positiva.*

**Prova:** Para o caso  $S = \mathbb{E}^2$  a demonstração dessa proposição encontra-se na referência [(20)] e nós a repetiremos aqui com algumas adaptações.

**Caso  $S = \mathbb{E}^2$ :**

A curva  $\beta$  é uma perturbação de  $\Gamma$ . Seja  $g(\Gamma(s), \beta(s))$  a distância geodésica em  $\mathbb{E}^2$  entre  $\Gamma(s)$  e  $\beta(s)$ .

$$\begin{aligned} g^2(\Gamma(s), \beta(s)) &= \langle \Gamma(s) - \beta(s), \Gamma(s) - \beta(s) \rangle \\ &= \lambda^2(s) \langle \eta(s), \eta(s) \rangle \\ &= \lambda^2(s) \end{aligned}$$

Da última igualdade temos que se  $\|\lambda\|_2$  for suficientemente pequeno então  $g^2(\Gamma(s), \beta(s)) \approx 0$  equivalentemente  $g(\Gamma(s), \beta(s)) \approx 0$ .

A curva  $\beta$  é fechada pois a função  $\lambda(\cdot)$  é periódica de período  $|\Gamma|$ . Sendo  $\Gamma$   $C^\infty$ ,  $\lambda$   $C^\infty$  e  $\eta$   $C^\infty$  segue que  $\beta$  é  $C^\infty$ .

Para verificar a regularidade de  $\beta$  devemos verificar que  $\|\beta'(s)\| \neq 0$  para todo  $s$ . Mas utilizando expansão em série podemos escrever, a partir da perturbação:

$$\beta(s) = \Gamma(s) + O(\lambda(s)) \quad (4.10)$$

e derivando essa expressão temos

$$\beta'(s) = \Gamma'(s) + O(\lambda(s), \lambda'(s))$$

Daí a regularidade de  $\beta$  segue da regularidade de  $\Gamma$  se  $|\lambda|_2$  for suficientemente pequeno.

Para finalizar verificaremos que a curvatura geodésica de  $\beta$  é positiva se a de  $\Gamma$  o for e se  $\|\lambda\|_2$  for suficientemente pequeno.

Daqui por diante, onde não houver risco de confusão, para simplificar a notação suprimiremos a variável  $s$  na escrita das expressões que depende dela. Seja  $\kappa_\Gamma(s)$  a curvatura geodésica da curva  $\Gamma$  em  $s$ . Da definição de curvatura geodésica no capítulo 2 temos:

$$\kappa_\Gamma(s) = \frac{\langle \Gamma'', \eta \rangle}{\|\Gamma'\|^3} \quad (4.11)$$

onde o vetor normal unitário pode ser escrito como  $\eta = (0, 0, 1) \times \Gamma'$  e  $\times$  é o produto vetorial em  $\mathbb{E}^3$ . Nessa última igualdade identificamos  $\Gamma(s)$  com um vetor em  $\mathbb{E}^3$  acrescentando a terceira coordenada igual a zero. Assim a equação 4.11 torna-se:

$$\kappa_\Gamma = \frac{\langle \Gamma'', (0, 0, 1) \times \Gamma' \rangle}{\|\Gamma'\|^3} \quad (4.12)$$

Essa mudança na escrita da fórmula é útil pois tal equação generaliza-se para a esfera e para o plano hiperbólico conforme veremos na demonstração para esses casos.

Observação: A curva  $\Gamma$  é geodesicamente estritamente convexa se  $\langle \Gamma'', \eta \rangle = \langle \Gamma'', (0, 0, 1) \times \Gamma'(s) \rangle$  for maior que zero uma vez que  $\|\Gamma'(s)\|^3$  é sempre positivo. Para a curva  $\beta$ , sendo  $\vartheta$  o normal unitário a  $\beta$ , temos:

$$\kappa_\beta = \frac{\langle \beta'', \vartheta \rangle}{\|\beta'\|^3} \quad (4.13)$$

Mas de 4.10 temos  $\beta'' = \Gamma'' + O(\lambda, \lambda', \lambda'')$  e  $\beta' = \Gamma' + O(\lambda, \lambda')$ . Substituindo essas duas equações em 4.13, temos

$$\kappa_\beta = \frac{\langle \Gamma'' + O(\lambda, \lambda', \lambda''), \beta \times \beta' \rangle}{\|\beta' + O(\lambda, \lambda')\|^3}$$

Pela bilinearidade do produto escalar temos

$$\kappa_\beta = \frac{\langle \Gamma'', (0, 0, 1) \times \beta' \rangle}{\|\beta' + O(\lambda, \lambda')\|^3} + \frac{\langle O(\lambda, \lambda', \lambda''), (0, 0, 1) \times \beta' \rangle}{\|\beta' + O(\lambda, \lambda')\|^3}$$

Substituindo a expressão para  $\beta'$  temos

$$\begin{aligned}\kappa_\beta &= \frac{\langle \Gamma'', (0, 0, 1) \times [\Gamma' + O(\lambda, \lambda')] \rangle}{\|\beta' + O(\lambda, \lambda')\|^3} + \frac{\langle O(\lambda, \lambda', \lambda''), (0, 0, 1) \times [\Gamma' + O(\lambda, \lambda')] \rangle}{\|\beta' + O(\lambda, \lambda')\|^3} \\ &= \frac{\langle \Gamma'', (0, 0, 1) \times \Gamma'(s) \rangle}{\|\Gamma' + O(\lambda, \lambda')\|^3} + \frac{O(\lambda, \lambda', \lambda'')}{\|\Gamma' + O(\lambda, \lambda')\|^3}\end{aligned}$$

Na segunda igualdade usamos propriedades de produto vetorial e escalar para simplificar a expressão.

Finalmente, se  $\|\lambda\|_2$  for suficientemente pequena, a perturbação  $\beta$  é geodésicamente estritamente convexa se e somente se  $\Gamma$  o for.

**Caso  $S = \mathbb{S}_+^2$ :**

Observemos primeiramente que o vetor  $\Gamma(s)$  é perpendicular em  $\mathbb{E}^3$  a  $\eta(s)$ , i.e.,  $\langle \Gamma(s), \eta(s) \rangle = 0$ .

A curva  $\beta$  é uma perturbação de  $\Gamma$  na semi-esfera. De fato, como é fácil verificar  $\langle \beta, \beta \rangle = 1$  assim temos que  $\beta$  está contida em  $\mathbb{S}_+^2$ . Seja  $g(\Gamma(s), \beta(s))$  a distância geodésica entre  $\Gamma(s)$  e  $\beta(s)$  na semiesfera.

$$\begin{aligned}\cos g(\Gamma(s), \beta(s)) &= \left\langle \Gamma(s), \frac{\Gamma(s) + \lambda(s)\eta(s)}{\sqrt{1 + \lambda^2(s)}} \right\rangle \\ &= \frac{1}{1 + \lambda^2(s)} \\ &= 1 + O(\lambda)\end{aligned}$$

Da última igualdade temos que se  $\|\lambda\|_2$  for suficientemente pequena então  $\cos g(\Gamma(s), \beta(s)) \approx 1$ , ou seja  $g(\Gamma(s), \beta(s)) \approx 0$ .

A curva  $\beta$  é fechada pois  $\lambda$  é periódica de período  $|\Gamma|$ . Sendo  $\Gamma \in C^\infty$ ,  $\lambda \in C^\infty$  e  $\eta \in C^\infty$  segue que  $\beta$  é  $C^\infty$ .

Para a regularidade de  $\beta$  devemos verificar que  $|\beta'| \neq 0$  para todo  $s$ . Mas utilizando série de potências podemos escrever

$$\beta = \Gamma + O(\lambda) \tag{4.14}$$

e derivando essa expressão temos

$$\beta' = \Gamma' + O(\lambda, \lambda')$$

Daí a regularidade de  $\beta$  segue da regularidade de  $\Gamma$  se  $\|\lambda\|_2$  for suficientemente pequena. Para finalizar verificaremos que a curvatura geodésica de  $\beta$  é estritamente positiva se a de  $\Gamma$  o for.

Seja  $\kappa_\Gamma(s)$  a curvatura geodésica da curva  $\Gamma$  no ponto  $s$ . Temos, do capítulo 1, que:

$$\kappa_\Gamma = \frac{\langle \frac{D\Gamma'}{ds}, \eta \rangle}{\|\Gamma'\|^3} \tag{4.15}$$

onde  $D/ds$  é a derivada covariante na esfera e o vetor normal unitário a  $\Gamma$  em sé dado por  $\eta = \Gamma \times \Gamma'$ .

Assim a equação 4.15 torna-se:

$$\kappa_{\Gamma} = \frac{\langle \Gamma'', \Gamma \times \Gamma' \rangle}{\|\Gamma'\|^3} \quad (4.16)$$

**Observação:** A curva  $\Gamma$  é geodesicamente estritamente convexa se  $\langle \frac{D\Gamma'}{ds}, \eta \rangle = \langle \frac{D\Gamma'}{ds}, \Gamma \times \Gamma' \rangle > 0$  uma vez que  $\|\Gamma'\|^3$  é positivo. Para a curva  $\beta$ , sendo  $\vartheta$  o normal unitário a  $\beta$ , temos:

$$\kappa_{\beta} = \frac{\langle \frac{D\beta'}{ds}, \vartheta \rangle}{\|\beta'\|^3} \quad (4.17)$$

Mas de 4.14 temos  $\frac{D\beta'}{ds} = \frac{D\Gamma'}{ds} + O(\lambda, \lambda', \lambda'')$  e  $\beta' = \Gamma' + O(\lambda, \lambda')$ . Substituindo essas duas expressões em 4.17, temos

$$\kappa_{\beta}(s) = \frac{\langle \frac{D\Gamma'}{ds} + O(\lambda, \lambda', \lambda''), \beta(s) \times \beta'(s) \rangle}{\|\beta' + O(\lambda, \lambda')\|^3}$$

Pela bilinearidade do produto escalar temos

$$\kappa_{\beta} = \frac{\langle \frac{D\Gamma'}{ds}, \beta \times \beta' \rangle}{\|\beta' + O(\lambda, \lambda')\|^3} + \frac{\langle O(\lambda, \lambda', \lambda''), \beta \times \beta' \rangle}{\|\beta' + O(\lambda, \lambda')\|^3}$$

Substituindo as expressões para  $\beta$  e  $\beta'$  temos

$$\begin{aligned} \kappa_{\beta} &= \frac{\langle \frac{D\Gamma'}{ds}, [\Gamma + O(\lambda)] \times [\Gamma' + O(\lambda, \lambda')] \rangle}{\|\beta' + O(\lambda, \lambda')\|^3} + \frac{\langle O(\lambda, \lambda', \lambda''), [\Gamma + O(\lambda)] \times [\Gamma' + O(\lambda, \lambda')] \rangle}{\|\beta' + O(\lambda, \lambda')\|^3} \\ &= \frac{\langle \frac{D\Gamma'}{ds}, \Gamma \times \Gamma' \rangle}{\|\Gamma' + O(\lambda, \lambda')\|^3} + \frac{O(\lambda, \lambda', \lambda'')}{\|\Gamma' + O(\lambda, \lambda')\|^3} \end{aligned}$$

Na segunda igualdade usamos propriedades de produto vetorial e escalar para simplificar a expressão.

Finalmente, para  $\|\lambda\|_2$  suficientemente pequena, a perturbação  $\beta$  é geodésicamente estritamente convexa se e somente se  $\Gamma$  o for.

**Caso  $S = \mathbb{H}^2$ :**

Observemos primeiramente que o vetor  $\Gamma(s)$  é ortogonal no espaço de Minkowski a  $\eta(s)$ , i.e.,  $\langle \Gamma(s), \eta(s) \rangle = 0$ .

A curva  $\beta$  é uma perturbação de  $\Gamma$  no plano hiperbólico. De fato, é fácil ver que se  $\beta(s) = \frac{\Gamma(s) + \lambda(s)\eta(s)}{\sqrt{1 - \lambda^2(s)}}$  então  $\langle \beta(s), \beta(s) \rangle = -1$  e assim  $\beta$  está contida em  $\mathbb{H}^2$ .

Seja  $g(\Gamma(s), \beta(s))$  a distância geodésica entre  $\Gamma(s)$  e  $\beta(s)$  em  $\mathbb{H}^2$ .

$$\begin{aligned} \cosh g(\Gamma(s), \beta(s)) &= \left\langle \Gamma(s), \frac{\Gamma(s) + \lambda(s)\eta(s)}{\sqrt{1 - \lambda^2(s)}} \right\rangle \\ &= \frac{1}{\sqrt{1 - \lambda^2(s)}} \\ &= 1 + O(\lambda) \end{aligned}$$

Da última igualdade temos que se  $\|\lambda\|_2$  for suficientemente pequena então  $\cosh g(\Gamma(s), \beta(s)) \approx 1$ , ou seja  $g(\Gamma(s), \beta(s)) \approx 0$ .

A curva  $\beta$  é fechada pois  $\lambda$  é periódica de período  $2\pi$ . Sendo  $\Gamma$  e  $\lambda$  funções  $C^\infty$  e  $\eta$   $C^\infty$  segue que  $\beta$  é  $C^\infty$ .

Para verificar a regularidade de  $\beta$  devemos verificar que  $|\beta'| \neq 0$  para todo  $s$ . Mas utilizando série de potências podemos escrever, a partir da perturbação, que

$$\beta = \Gamma + O(\lambda) \quad (4.18)$$

e derivando essa expressão com relação  $s$ , temos

$$\beta' = \Gamma' + O(\lambda, \lambda')$$

Daí a regularidade de  $\beta$  segue da regularidade de  $\Gamma$  se  $\|\lambda\|_2$  for suficientemente pequeno. Para finalizar verificaremos que a curvatura geodésica de  $\beta$  é estritamente positiva se a de  $\Gamma$  o for.

Seja  $\kappa_\Gamma(s)$  a curvatura geodésica da curva  $\Gamma$  em  $s$ . Temos, com visto no capítulo 1 que:

$$\kappa_\Gamma = \frac{\ll \frac{D\Gamma'}{ds}, \eta \gg}{\|\Gamma'\|^3}$$

onde  $D/ds$  é a derivada covariante no plano hiperbólico e o vetor normal unitário a  $\Gamma$  é dado por  $\eta = \Gamma \wedge \Gamma'$ , onde  $\wedge$  é o produto exterior no espaço de Minkowski (ver capítulo 1).

**Observação:** A curva  $\Gamma$  é geodesicamente convexa se  $\langle \frac{D\Gamma'}{ds}, \eta \rangle = \ll \frac{D\Gamma'}{ds}, \Gamma \wedge \Gamma' \gg > 0$  uma vez que  $\|\Gamma'\|^3$  é positivo. Para a curva  $\beta$ , sendo  $\vartheta$  o normal unitário a  $\beta$ , temos:

$$\kappa_\beta = \frac{\ll \frac{D\beta'}{ds}, \vartheta \gg}{\|\beta'\|^3} \quad (4.19)$$

Mas de 4.18 temos  $\frac{D\beta'}{ds} = \frac{D\Gamma'}{ds} + O(\lambda, \lambda', \lambda'')$  e  $\beta' = \Gamma' + O(\lambda, \lambda')$ . Substituindo essas duas expressões em 4.19, temos

$$\kappa_\beta = \frac{\ll \frac{D\Gamma'}{ds} + O(\lambda, \lambda', \lambda''), \beta \wedge \beta' \gg}{\|\beta' + O(\lambda, \lambda')\|^3}$$

Pela bilinearidade do produto  $\ll, \gg$  temos

$$\kappa_\beta = \frac{\ll \frac{D\Gamma'}{ds}, \beta \times \beta' \gg}{\|\beta' + O(\lambda, \lambda')\|^3} + \frac{\ll O(\lambda, \lambda', \lambda''), \beta \wedge \beta'(s) \gg}{\|\beta' + O(\lambda, \lambda')\|^3}$$

Substituindo as expressões para  $\beta$  e  $\beta'$  temos

$$\begin{aligned} \kappa_\beta(s) &= \frac{\ll \frac{D\Gamma'}{ds}, [\Gamma + O(\lambda)] \wedge [\Gamma' + O(\lambda, \lambda')] \gg}{\|\beta' + O(\lambda, \lambda')\|^3} + \frac{\ll O(\lambda, \lambda', \lambda''), [\Gamma + O(\lambda)] \times [\Gamma' + O(\lambda, \lambda')] \gg}{\|\beta' + O(\lambda, \lambda')\|^3} \\ &= \frac{\ll \frac{D\Gamma'}{ds}, \Gamma \times \Gamma' \gg}{\|\Gamma' + O(\lambda, \lambda')\|^3} + \frac{O(\lambda, \lambda', \lambda'')}{\|\Gamma' + O(\lambda, \lambda')\|^3} \end{aligned}$$

Na segunda igualdade usamos propriedades de produto exterior no espaço de Minkowski e do produto  $\ll, \gg$  para simplificar a expressão.

Finalmente, para  $\|\lambda\|_2$  suficientemente pequena, a perturbação  $\beta$  é geodesicamente estritamente convexa se e somente se  $\Gamma$  o for.

□

O estudo das propriedades da aplicação do bilhar em ovais é invariante por isométricas. A imagem de uma oval por uma isometria é uma oval à qual está associada uma aplicação de bilhar com mesmas propriedades dinâmicas. Diremos que duas ovais  $\Gamma$  e  $\beta$  são equivalentes se existe uma isometria em  $S$  que leva uma na outra.

Seja  $\mathcal{C}$  o conjunto das classes de equivalências das ovais  $C^\infty$  em  $S$ . Dado um representante  $\Gamma$  de uma classe  $[\Gamma] \in \mathcal{C}$  definimos uma vizinhança tubular,  $N_\epsilon(\Gamma)$  de  $\Gamma$  em  $S$  por:

$$N_\epsilon(\Gamma) = \begin{cases} \Gamma(s) + \lambda \eta(s) & \text{em } \mathbb{E}^2 \\ \frac{\Gamma(s) + \lambda \eta(s)}{\sqrt{1 + \lambda^2(s)}} & \text{em } \mathbb{S}_+^2 \\ \frac{\Gamma(s) + \lambda \eta(s)}{\sqrt{1 - \lambda^2(s)}} & \text{em } \mathbb{H}^2 \end{cases} \quad (4.20)$$

onde  $0 \leq s < |\Gamma|$  e  $-\epsilon < \lambda(s) < \epsilon$ .

**Definição 20.** *Uma classe  $[\beta]$  é dita  $\epsilon$ -próxima de uma classe  $[\Gamma]$  se existir um representante  $\Gamma$  em  $[\Gamma]$  e um  $\beta$  em  $[\beta]$  tal que a imagem de  $\beta$  está contida em  $N_\epsilon(\Gamma)$  e se projeta difeomorficamente na imagem de  $\Gamma$ .*

Como consequência de  $\beta$  se projetar difeomorficamente em  $\Gamma$  temos que existe função  $\lambda(s)$  de período  $|\Gamma|$  tal que  $\beta$  é escrita em função de  $\Gamma$  como em 4.9.

**Definição 21.** *Uma classe  $[\beta]$  é dita  $\epsilon - C^2$ -próxima de uma classe  $[\Gamma]$  se  $[\beta]$  é  $\epsilon$ -próxima de  $[\Gamma]$  e  $\|\lambda\|_2 < \epsilon$*

O próximo lema nos dá o fundamento para estabelecermos uma importante relação entre a topologia das ovais  $C^\infty$  em  $\mathbb{E}^2$ ,  $\mathbb{S}_+^2$  ou  $\mathbb{H}^2$  e dos difeomorfismos  $C^1$ .

**Lema 17.** *Seja  $\beta$  uma perturbação normal da oval  $\Gamma$  em  $\mathbb{S}_+^2$ , i.e., existe uma função  $\lambda$  tal que  $\beta$  é dada por 4.9. Se  $\|\lambda\|_2$  for suficientemente pequena então as aplicações de bilhar  $\mathcal{F}_\Gamma$  e  $\mathcal{F}_\beta$  possuem funções geradoras próximas, ou seja:*

$$g_\beta(s_0, s_1) = g_\Gamma(s_0, s_1) + \mathcal{O}(\lambda) \quad (4.21)$$

**Prova:**

Caso  $S = \mathbb{E}^2$ :

$$g_\Gamma^2(s_0, s_1) = \langle \Gamma(s_1) - \Gamma(s_0), \Gamma(s_1) - \Gamma(s_0) \rangle$$

e

$$g_\beta^2(s_0, s_1) = \langle \beta(s_1) - \beta(s_0), \beta(s_1) - \beta(s_0) \rangle$$

Usando a equação 4.10 temos

$$g_{\beta}^2(s_0, s_1) = \langle \Gamma(s_1) + \mathcal{O}(\lambda) - \Gamma(s_0) - \mathcal{O}(\lambda), \Gamma(s_0) + \mathcal{O}(\lambda) - \Gamma(s_0) - \mathcal{O}(\lambda) \rangle$$

Simplificando,

$$g_{\beta}^2(s_0, s_1) = \langle \Gamma(s_1) - \Gamma(s_0), \Gamma(s_1) - \Gamma(s_0) \rangle + \mathcal{O}(\lambda)$$

De onde

$$g_{\beta}^2(s_0, s_1) = g_{\beta}^2(s_0, s_1) + \mathcal{O}(\lambda)$$

Tomando a raiz quadrada e utilizando série de potências temos o resultado procurado.

Caso  $S = \mathbb{S}_+^2$ :

$$\cos g_{\Gamma}(s_0, s_1) = \langle \Gamma(s_1), \Gamma(s_0) \rangle$$

e

$$\cos g_{\beta}(s_0, s_1) = \langle \beta(s_1), \beta(s_0) \rangle$$

Usando a equação 4.10 temos

$$\cos g_{\beta}(s_0, s_1) = \langle \Gamma(s_1) + \mathcal{O}(\lambda), \Gamma(s_0) + \mathcal{O}(\lambda) \rangle$$

Simplificando,

$$\cos g_{\beta}(s_0, s_1) = \langle \Gamma(s_1), \Gamma(s_0) \rangle + \mathcal{O}(\lambda)$$

De onde

$$\cos g_{\beta}(s_0, s_1) = \cos g_{\beta}(s_0, s_1) + \mathcal{O}(\lambda)$$

Tomando o arccos em ambos os lados dessa expressão e utilizando série de potências temos o resultado procurado.

Caso  $S = \mathbb{H}^2$ :

$$\cosh g_{\Gamma}(s_0, s_1) = - \ll \Gamma(s_1), \Gamma(s_0) \gg$$

e

$$\cosh g_{\beta}(s_0, s_1) = - \ll \beta(s_1), \beta(s_0) \gg$$

Usando a equação 4.10 temos

$$\cosh g_{\beta}(s_0, s_1) = - \ll \Gamma(s_1) + \mathcal{O}(\lambda), \Gamma(s_0) + \mathcal{O}(\lambda) \gg$$

Simplificando,

$$\cosh g_{\beta}(s_0, s_1) = - \ll \Gamma(s_1), \Gamma(s_0) \gg + \mathcal{O}(\lambda)$$

De onde

$$\cosh g_{\beta}(s_0, s_1) = \cosh g_{\beta}(s_0, s_1) + \mathcal{O}(\lambda)$$

Tomando o acosh em ambos os lados dessa expressão e utilizando série de potências temos o resultado procurado.

□

**Proposição 11.** *Se  $[\beta]$  é  $\epsilon - C^2$ -próxima de uma classe  $[\Gamma]$  existe um representante  $\Gamma \in [\Gamma]$  tal que as aplicações de bilhar  $\mathcal{F}_\beta$  e  $\mathcal{F}_\Gamma$  em  $\beta$  e  $\Gamma$  resp. são próximas na topologia  $C^1$ .*

**Prova:** Nessa demonstração utilizaremos construção da aplicação de bilhar em uma curva estritamente convexa via sua função geradora.

Vimos no capítulo 3 que, se  $\Gamma$  é uma curva estritamente convexa em  $S$  e  $g(\cdot, \cdot)$  é a distância geodésica, temos definida a aplicação do bilhar  $\mathcal{F}_\Gamma : \mathcal{M} \rightarrow \mathcal{M}$ , por  $\mathcal{F}_\Gamma(s_0, \psi_0) = (s_1, \psi_1)$  com

$$\frac{\partial g}{\partial s_0}(s_0, s_1) = -\cos \psi_0 \quad \text{e} \quad \frac{\partial g}{\partial s_1}(s_0, s_1) = \cos \psi_1$$

Essas duas equações são suficientes definirmos a aplicação do bilhar em  $\Gamma$ . Seja  $[\beta]$  uma classe  $\epsilon - C^2$ -próxima de  $[\Gamma]$  e  $\beta \in [\beta]$  um representante. Para simplificarmos a notação, definimos  $g_\Gamma(s_0, s_1) := g(\Gamma(s_0), \Gamma(s_1))$  e  $g_\beta(s_0, s_1) := g(\beta(s_0), \beta(s_1))$ . Pelo lema 17 temos que

$$g_\beta(s_0, s_1) = g_\Gamma(s_0, s_1) + O(\lambda) \tag{4.22}$$

Derivando essa expressão com relação a  $s_0$  temos:

$$\frac{\partial g_\beta}{\partial s_0}(s_0, s_1) = \frac{\partial g_\Gamma}{\partial s_0}(s_0, s_1) + O(\lambda, \lambda')$$

Com relação  $s_1$ :

$$\frac{\partial g_\beta}{\partial s_1}(s_0, s_1) = \frac{\partial g_\Gamma}{\partial s_1}(s_0, s_1) + O(\lambda, \lambda')$$

Assim

$$\cos \psi_0^\beta = \cos \psi_0^\Gamma + O(\lambda, \lambda')$$

e

$$\cos \psi_1^\beta = \cos \psi_1^\Gamma + O(\lambda, \lambda')$$

Utilizando a série de arccos( $x$ ) em ambas as expressões acima, obtemos:

$$\psi_0^\beta = \psi_0^\Gamma + O(\lambda, \lambda') \tag{4.23}$$

e

$$\psi_1^\beta = \psi_1^\Gamma + O(\lambda, \lambda') \tag{4.24}$$

Como  $\Gamma(s_1)$  e  $\beta(s_1)$  são próximos por construção, temos que  $\mathcal{F}_\Gamma$  e  $\mathcal{F}_\beta$  são próximas. Isto é:

$$\mathcal{F}_\Gamma(s_0, \psi_1) = (s_1, \psi_1^\Gamma) = (s_1, \psi_1^\beta + O(\lambda, \lambda')) = \mathcal{F}_\beta(s_0, \psi_0^\beta)$$

Para vermos que  $D_{(s_1, \psi_1)} \mathcal{F}_\Gamma$  e  $D_{(s_1, \psi_1)} \mathcal{F}_\beta$  são próximas basta observarmos que a derivada da aplicação do bilhar em  $S$ , na proposição 8 depende apenas dos ângulos de de saída e batida, distância e das curvaturas geodésicas. Dessa forma pelas equações 4.23, 4.24, 4.22 e 10 temos que para  $\|\lambda\|_2$  suficientemente pequena as derivadas das aplicações são próximas.



□

Abaixo fazemos uso do Teorema de Gauss-Bonnet em  $S = \mathbb{E}^2, \mathbb{S}_+^2$  ou  $\mathbb{H}^2$ .

**Lema 18** ((9)). ,[(17)] *Seja  $\gamma$  uma curva em  $S$ , simples, suave por partes e fechada. Sejam  $\kappa(\cdot)$  a função curvatura geodésica de  $\Gamma$  e  $\alpha_i, 1 \leq i \leq m$  o ângulo externo a  $\gamma$  no  $i$ -ésimo vértice. Então:*

$$\iint_R K dA + \oint_{\gamma} \kappa ds + \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i = 2\pi$$

Seja  $\{(s_0, \psi_0), \mathcal{F}_{\Gamma}(s_0, \psi_0) = (s_1, \psi_1), \dots, \mathcal{F}_{\Gamma}^{n-1}(s_0, \psi_0) = (s_{n-1}, \psi_{n-1})\}$  uma órbita periódica de período  $n$ . Seja  $\mathcal{U}_N$  o conjunto de todas as ovais em  $\mathcal{C}$  tais que dado  $n \neq 1$  divisor de  $N$  a aplicação  $\mathcal{F}_{\Gamma}$  possui somente órbitas periódicas não degeneradas de período  $n$ .

**Proposição 12.** *Se  $\Gamma$  pertence a  $\mathcal{U}_N$  então para cada  $n \neq 1$  divisor de  $N$  existe apenas um número finito de órbitas periódicas de período  $n$  não-degeneradas para a aplicação do bilhar em  $\Gamma$ .*

**Prova:** Reescreveremos aqui, a prova de [(6)] para o caso Euclideano, adaptando-a ao plano hiperbólico. Numa segunda parte trataremos separadamente o caso esférico cuja extensão tem uma diferença a ser considerada.

Seja  $\{(s_0, \psi_0), \mathcal{F}_{\Gamma}(s_0, \psi_0) = (s_1, \psi_1), \dots, \mathcal{F}_{\Gamma}^{n-1}(s_0, \psi_0) = (s_{n-1}, \psi_{n-1})\}$  uma órbita de período  $n$  para  $\mathcal{F}_{\Gamma}$ . Então  $\Gamma(s_0), \Gamma(s_1), \dots, \Gamma(s_{n-2}), \Gamma(s_{n-1})$  são os  $n$  vértices de um polígono geodésico inscrito na oval  $\Gamma$ . Seja  $\gamma_i$  os ângulos internos desse polígono e  $\delta_i = \psi_i$  se  $0 \leq \psi_i \leq \pi/2$  ou  $\delta_i = \pi - \psi_i$  se  $\pi/2 \leq \psi_i \leq \pi$ . Aplicando o teorema de Gauss-Bonnet ao polígono geodésico temos:

Em  $\mathbb{E}^2$ :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i = (n-2)\pi$$

Em  $\mathbb{H}^2$ :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i < (n-2)\pi$$

Usando que  $2\delta_i + \gamma_i = \pi$  obtemos:

Em  $\mathbb{E}^2$ :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \delta_i = \pi$$

Em  $\mathbb{H}^2$ :

$$\sum_{i=0}^{n-1} \delta_i > \pi$$

Dessa forma, tanto para  $\mathbb{E}^2$  quanto para  $\mathbb{H}^2$  temos que existe  $\delta_i \geq \frac{\pi}{n}$ , caso contrário nem a igualdade nem a desigualdade seriam válidas.

Dessa forma, da definição de  $\delta_i$  temos que, ou  $\psi_i \geq \frac{\pi}{n}$  ou  $\psi_i \leq \frac{n-1}{n}\pi$ . Daí

$$\frac{\pi}{n} \leq \psi_i \leq \frac{n-1}{n}\pi.$$

Isso significa que toda órbita periódica de período  $n$  possui uma iterada na faixa compacta acima.

Para a esfera, procedendo da mesma forma, construímos um polígono geodésico com vértices nos pontos da órbita e temos que:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \gamma_i > (n-2)\pi$$

Também usando que  $2\delta_i + \gamma_i = \pi$  obtemos:

$$\sum_{i=0}^{n-1} \delta_i < \pi$$

A partir dessa desigualdade não conseguimos deduzir, imediatamente como nos casos planar e hiperbólico, a existência de uma faixa compacta do espaço de fase que contenha pelo menos um ponto da órbita periódica. Como pode ser visto no bilhar em círculos geodésicos as cotas que obtivemos para  $\mathbb{E}$  e  $\mathbb{H}^2$  não funcionam em  $\mathbb{S}_+^2$ . De fato é possível ver na figura 3.2 que quanto mais próximo de  $\frac{\pi}{2}$  for o raio do círculo geodésico mais as órbitas com número de rotação diferente de  $\frac{1}{2}$  estarão comprimidas próximas do bordo do espaço de fase.

No entanto, no que se segue mostraremos que é possível construir uma faixa compacta também para bilhares geodesicamente convexos em  $\mathbb{S}_+^2$ . Denotemos por  $A$  a área da mesa de bilhar. Sendo  $\Gamma$  uma oval temos que  $A < 2\pi$ . Tomemos ainda  $m_0 \in \mathbb{N}$  suficientemente grande tal que  $A < 2\pi - \frac{2\pi n}{m_0}$ . Suponhamos que a faixa compacta não exista, isto é equivalente a existirem sequências de órbitas de período  $n$  aproximando tanto de  $\psi = 0$  quanto de  $\psi = \pi$ . Vamos abordar apenas o primeiro caso, o segundo é análogo. Como existe uma sequência de órbitas se aproximando de  $\psi = 0$  tomemos uma órbita  $\{(s_0, \psi_0), \mathcal{F}_\Gamma(s_0, \psi_0) = (s_1, \psi_1), \dots, \mathcal{F}_\Gamma^{n-1}(s_0, \psi_0) = (s_{n-1}, \psi_{n-1})\}$  dessa sequência. Por construção a variável angular satisfaz  $\psi_i < \frac{\pi}{m_0}$  para todo  $0 \leq i \leq n-1$ . Seja  $A_p$  a área limitada pelo polígono geodésico com vértices nos pontos de batidas dessa órbita. Aplicando o teorema de Gauss Bonnet a esse polígono geodésico temos que

$$A_p = 2\pi - \sum_{i=0}^{n-1} \alpha_i$$

onde  $\alpha_i$  é ângulo externo no vértice  $i$  do polígono. Sabemos que  $\alpha_i \leq 2\psi_i$  e a equação de Gauss Bonnet fica:

$$A_p \geq 2\pi - 2 \sum_{i=0}^{n-1} \psi_i$$

e assim

$$A_p \geq 2\pi - \frac{2\pi n}{m_0} > A$$

Mas isso é um absurdo uma vez que polígono está inscrito na curva  $\Gamma$ .

Portanto existe uma faixa compacta no espaço de fase que contém pelo menos um ponto de toda órbita periódica de período  $n$  para  $S = \mathbb{E}^2, \mathbb{H}^2$  e  $\mathbb{S}_+^2$ . Desde que por hipótese todos os pontos fixos de  $\mathcal{F}_\Gamma^N$  são não-degenerados, existem apenas um número finito deles no cilindro compacto e portanto temos um número finito de órbitas periódicas de cada período.

□

**Observação:** A demonstração da existência da faixa compacta para caso esférico é também válida para o plano Euclideano e para o hiperbólico, bastando para isso observar que a equação

$$A_p \geq 2\pi - 2 \sum_{i=0}^{n-1} \psi_i$$

segue da versão do teorema de Gauss Bonnet para  $\mathbb{E}^2$  e  $\mathbb{H}^2$ .

Para difeomorfismos  $C^1$  em  $[0, 2\pi) \times (0, \pi)$  possuir uma quantidade finita de pontos periódicos não-degenerados é uma propriedade aberta na topologia  $C^1$ . Desde que ovais  $\epsilon - C^2$ -próximas geram aplicações de bilhar próximas temos:

**Proposição 13.** *O conjunto  $\mathcal{U}_N$  é aberto em  $\mathcal{C}$ .*

Dizemos que uma órbita periódica,  $\mathcal{O} = \{(\bar{s}_0, \psi_0), (\bar{s}_1, \psi_1), \dots, (\bar{s}_{n-1}, \psi_{n-1})\}$ , tem múltiplas colisões se existe  $s_i$  tal que  $s_i = s_j$  para algum  $j \neq i$ .

Para ilustrar o principal resultado desse capítulo o próximo lema, que é análogo ao lema 7 de [(20)] para o caso planar considerando órbita sem colisões múltiplas, será demonstrado seguindo os mesmos passos de [(20)] e utilizando o teorema 1 do capítulo 3.

**Lema 19.** *Seja  $\Gamma$  uma oval em  $S = \mathbb{S}_+^2, \mathbb{E}^2$  ou  $\mathbb{H}^2$ . E seja  $\mathcal{O} = \{(\bar{s}_0, \psi_0), (\bar{s}_1, \psi_1), \dots, (\bar{s}_{n-1}, \psi_{n-1})\}$  uma órbita periódica de período  $n$  sem múltiplas colisões degenerada para a aplicação do bilhar  $\mathcal{F}_\Gamma$  associada a  $\Gamma$ . Em  $\mathbb{H}^2, \mathbb{S}_+^2$  e  $\mathbb{E}^2$  existe uma oval  $\tilde{\Gamma} \in \mathcal{C} \epsilon - C^2$ -próxima de  $\Gamma$  tal que  $\mathcal{O}$  é uma órbita periódica não degenerada para  $\mathcal{F}_{\tilde{\Gamma}}$ .*

**Prova:**

Denotaremos por  $g_i$  a distância geodésica entre  $\Gamma(s_i)$  e  $\Gamma(s_{i+1})$  e  $\kappa_i$  a curvatura geodésica de  $\Gamma$  em  $s_i$ .

Relembremos do capítulo 3 que a matriz Jacobiana  $D_{(s_i, \psi_i)} \mathcal{F}_\Gamma$  é dada por:

- Em  $\mathbb{E}^2$ :

$$\frac{1}{\text{sen } \psi_{i+1}} \begin{bmatrix} \text{g}_i \kappa_i - \text{sen } \psi_i & \text{g}_i \\ \kappa_{i+1}(\text{g}_i \kappa_i - \text{sen } \psi_i) - \kappa_i \text{sen } \psi_{i+1} & \text{g}_i \kappa_{i+1} - \text{sen } \psi_{i+1} \end{bmatrix}$$

- Em  $\mathbb{S}_+^2$ :

$$\frac{1}{\text{sen } \psi_{i+1}} \begin{bmatrix} \kappa_i \text{sen } \text{g}_i - \cos \text{g}_i \text{sen } \psi_i & \text{sen } \text{g}_i \\ \kappa_{i+1}(\kappa_i \text{sen } \text{g}_i - \cos \text{g}_i \text{sen } \psi_i) - \text{sen } \text{g}_i \text{sen } \psi_i \text{sen } \psi_{i+1} - \cos \text{g}_i \text{sen } \psi_{i+1} \kappa_i & \kappa_{i+1} \text{sen } \text{g}_i - \cos \text{g}_i \sin \psi_{i+1} \end{bmatrix}$$

- Em  $\mathbb{H}^2$ :

$$\frac{1}{\text{sen } \psi_{i+1}} \begin{bmatrix} \kappa_i \text{senh } \text{g}_i - \cosh \text{g}_i \text{sen } \psi_i & \text{senh } \text{g}_i \\ \kappa_{i+1}(\kappa_i \text{senh } \text{g}_i - \cosh \text{g}_i \text{sen } \psi_i) + \text{senh } \text{g}_i \text{sen } \psi_i \text{sen } \psi_{i+1} - \cosh \text{g}_i \text{sen } \psi_{i+1} \kappa_i & \kappa_{i+1} \text{senh } \text{g}_i - \cosh \text{g}_i \sin \psi_{i+1} \end{bmatrix}$$

Dessas expressões é fácil ver que  $\det D\mathcal{F}_\Gamma^n(\bar{s}_i, \bar{\psi}_i) = 1$ . Assim do fato de  $\mathcal{O}$  ser degenerada, temos que  $\text{Trac}(D\mathcal{F}_\Gamma^n(\bar{s}_i, \bar{\psi}_i)) = \pm 2$ , onde  $\text{Trac}$  é o traço da matriz. Fazemos:

$$\text{Trac}(D\mathcal{F}_\Gamma^n(\bar{s}_i, \bar{\psi}_i)) = \text{Trac} D\mathcal{F}_\Gamma(\bar{s}_{n-1}, \bar{\psi}_{n-1}) D\mathcal{F}_\Gamma(\bar{s}_{n-2}, \bar{\psi}_{n-2}) \cdots D\mathcal{F}_\Gamma(\bar{s}_1, \bar{\psi}_1) D\mathcal{F}_\Gamma(\bar{s}_0, \bar{\psi}_0) = \text{Trac}(A_{n-1} A_{n-2} \cdots A_1 A_0)$$

Onde

- Em  $\mathbb{E}^2$ :

$$A_i = \frac{1}{\text{sen } \psi_i} \begin{bmatrix} \text{g}_i \kappa_i - \text{sen } \psi_i & \text{g}_i \\ \kappa_{i+1}(\text{g}_i \kappa_i - \text{sen } \psi_i) - \kappa_i \text{sen } \psi_{i+1} & \text{g}_i \kappa_{i+1} - \text{sen } \psi_{i+1} \end{bmatrix}$$

- Em  $\mathbb{S}_+^2$ :

$$A_i = \frac{1}{\text{sen } \psi_i} \begin{bmatrix} \kappa_i \text{sen } \text{g}_i - \cos \text{g}_i \text{sen } \psi_i & \text{sen } \text{g}_i \\ \kappa_{i+1}(\kappa_i \text{sen } \text{g}_i - \cos \text{g}_i \text{sen } \psi_i) - \text{sen } \text{g}_i \text{sen } \psi_i \text{sen } \psi_{i+1} - \cos \text{g}_i \text{sen } \psi_{i+1} \kappa_i & \kappa_{i+1} \text{sen } \text{g}_i - \cos \text{g}_i \sin \psi_{i+1} \end{bmatrix}$$

- Em  $\mathbb{H}^2$ :

$$A_i = \frac{1}{\text{sen } \psi_i} \begin{bmatrix} \kappa_i \text{senh } \text{g}_i - \cosh \text{g}_i \text{sen } \psi_i & \text{senh } \text{g}_i \\ \kappa_{i+1}(\kappa_i \text{senh } \text{g}_i - \cosh \text{g}_i \text{sen } \psi_i) + \text{senh } \text{g}_i \text{sen } \psi_i \text{sen } \psi_{i+1} - \cosh \text{g}_i \text{sen } \psi_{i+1} \kappa_i & \kappa_{i+1} \text{senh } \text{g}_i - \cosh \text{g}_i \sin \psi_{i+1} \end{bmatrix}$$

Fazendo o produto  $A_1 A_0$  e isolando os termos que dependem de  $\frac{\kappa_1}{\text{sen } \psi_1}$ , obtemos

$$A_1 A_0 = \frac{2\kappa_1}{\text{sen } \psi_1} B_1 - C_{1,0}$$

Onde

- Em  $\mathbb{E}^2$ :

$$B_1 = \begin{bmatrix} -\text{g}_1 + \frac{\kappa_0 \text{g}_0 \text{g}_1}{\text{sen } \psi_0} & \frac{\text{g}_1 \text{g}_0}{\text{sen } \psi_0} \\ \text{sen } \psi_2 - \frac{\kappa_0 \text{g}_0 \text{sen } \psi_2}{\text{sen } \psi_0} - \kappa_2 \text{g}_1 + \frac{\text{g}_1 \text{g}_0 \kappa_2 \kappa_0}{\text{sen } \psi_0} & \frac{\text{g}_0 \text{sen } \psi_2}{\text{sen } \psi_0} + \frac{\text{g}_0 \text{g}_1 \kappa_2}{\text{sen } \psi_0} \end{bmatrix}$$

- Em  $\mathbb{S}_+^2$ :

$$B_1 = \begin{bmatrix} -\text{sen } \text{g}_1 \cos \text{g}_0 + \frac{\kappa_0 \text{sen } \text{g}_1 \sin \text{g}_0}{\text{sen } \psi_0} & \frac{\text{sen } \text{g}_0 \text{sen } \text{g}_1}{\text{sen } \psi_0} \\ \cos \text{g}_1 \cos \text{g}_0 \text{sen } \psi_2 - \frac{\cos \text{g}_1 \text{sen } \text{g}_0 \kappa_0 \text{sen } \psi_2}{\text{sen } \psi_0} - \kappa_2 \text{sen } \text{g}_1 \cos \text{g}_0 + \frac{\kappa_2 \text{sen } \text{g}_1 \text{sen } \text{g}_0 \kappa_0}{\text{sen } \psi_0} & -\frac{\text{sen } \psi_2 \text{sen } \text{g}_0 \cos \text{g}_1}{\text{sen } \psi_0} + \frac{\kappa_2 \text{sen } \text{g}_0 \text{sen } \text{g}_1}{\text{sen } \psi_0} \end{bmatrix}$$

- Em  $\mathbb{H}^2$ :

$$B_1 = \begin{bmatrix} -\text{senh } \text{g}_1 \cos \text{g}_0 + \frac{\kappa_0 \text{senh } \text{g}_1 \sin \text{g}_0}{\text{sen } \psi_0} & \frac{\text{senh } \text{g}_0 \text{senh } \text{g}_1}{\text{sen } \psi_0} \\ \cosh \text{g}_1 \cosh \text{g}_0 \text{sen } \psi_2 - \frac{\cosh \text{g}_1 \text{senh } \text{g}_0 \kappa_0 \text{sen } \psi_2}{\text{sen } \psi_0} - \kappa_2 \text{senh } \text{g}_1 \cosh \text{g}_0 + \frac{\kappa_2 \text{senh } \text{g}_1 \text{senh } \text{g}_0 \kappa_0}{\text{sen } \psi_0} & -\frac{\text{sen } \psi_2 \text{senh } \text{g}_0 \cosh \text{g}_1}{\text{sen } \psi_0} + \frac{\kappa_2 \text{senh } \text{g}_0 \text{senh } \text{g}_1}{\text{sen } \psi_0} \end{bmatrix}$$

e

- Em  $\mathbb{E}^2$ :

$$C_{1,0} = \begin{bmatrix} \frac{\kappa_0(g_0+g_1)}{\text{sen } \psi_0} - 1 & \frac{g_0+g_1}{\text{sen } \psi_0} \\ -\kappa_2 + \frac{\kappa_2 \kappa_0(g_0+g_1)}{\text{sen } \psi_0} - \frac{\kappa_0 \text{sen } \psi_2}{\text{sen } \psi_0} & \frac{\kappa_2(g_0+g_1) - \text{sen } \psi_2}{\text{sen } \psi_0} \end{bmatrix}$$

- Em  $\mathbb{S}_+^2$ :

$$C_{1,0} = \begin{bmatrix} -\cos(g_1+g_0) + \frac{\kappa_0 \text{sen}(g_1+g_0)}{\text{sen } \psi_0} & \frac{\text{sen}(g_0+g_1)}{\text{sen } \psi_0} \\ -\cos(g_0+g_1)\kappa_2 - \text{sen}(g_0+g_1)\text{sen } \psi_2 - \frac{\cos(g_0+g_1)\kappa_0 \text{sen } \psi_2}{\text{sen } \psi_0} + \frac{\text{sen}(g_0+g_1)\kappa_2 \kappa_0}{\text{sen } \psi_0} & -\frac{\cos(g_1+g_0)\text{sen } \psi_2}{\text{sen } \psi_0} + \frac{\text{sen}(g_0+g_1)\kappa_2}{\text{sen } \psi_0} \end{bmatrix}$$

- Em  $\mathbb{H}^2$ :

$$C_{1,0} = \begin{bmatrix} -\cosh(g_1+g_0) + \frac{\kappa_0 \text{senh}(g_1+g_0)}{\text{sen } \psi_0} & \frac{\text{senh}(g_0+g_1)}{\text{sen } \psi_0} \\ -\cosh(g_0+g_1)\kappa_2 - \text{senh}(g_0+g_1)\text{sen } \psi_2 - \frac{\cosh(g_0+g_1)\kappa_0 \text{sen } \psi_2}{\text{sen } \psi_0} + \frac{\text{senh}(g_0+g_1)\kappa_2 \kappa_0}{\text{sen } \psi_0} & -\frac{\cosh(g_1+g_0)\text{sen } \psi_2}{\text{sen } \psi_0} + \frac{\text{senh}(g_0+g_1)\kappa_2}{\text{sen } \psi_0} \end{bmatrix}$$

Com isso

$$\begin{aligned} \text{Trac}(D\mathcal{F}_\Gamma^n(\bar{s}_i, \bar{\psi}_i)) &= \text{Trac} \left[ A_{n-1} A_{n-2} \cdots A_1 A_0 \right] \\ &= \text{Trac}(A_{n-1} A_{n-2} \cdots A_2) B_1 + \text{Trac}(A_{n-1} A_{n-2} \cdots A_2) C_{1,0} \\ &= \frac{\kappa_1}{\text{sen } \psi_1} b_1 + c_1 \end{aligned} \quad (4.25)$$

onde  $b_1$  e  $c_1$  não dependem de  $\kappa_1$ .

**Observação 1:** Se a órbita em questão for de período 2 temos  $\psi_2 = \psi_0$  e  $\kappa_2 = \kappa_0$ . Assim, no caso de  $\mathbb{S}_+^2$  é fácil ver que

$$b_1 = \text{Trac } B_1 = \begin{cases} -(g_0+g_1) + \frac{2\kappa_0 g_1 g_0}{\text{sen } \psi_0} & \text{em } \mathbb{E}^2 \\ -\text{sen}(g_0+g_1) + \frac{2\kappa_0 \text{sen } g_1 \text{sen } g_0}{\text{sen } \psi_0} & \text{em } \mathbb{S}_+^2 \\ -\text{senh}(g_0+g_1) + \frac{2\kappa_0 \text{senh } g_1 \text{senh } g_0}{\text{sen } \psi_0} & \text{em } \mathbb{H}^2 \end{cases}$$

Se  $b_1 \neq 0$ , seja  $I$  um intervalo tal que  $s_1 \in I$  e  $s_i \notin I$  para  $i \neq 1$ . Consideremos  $\tilde{\Gamma}$ , uma perturbação normal de  $\Gamma$  com  $\lambda(s_1) = \lambda'(s_2) = 0$ ,  $\lambda''(s_1) \neq 0$  e  $\|\lambda\|_2$  suficientemente pequena de forma que  $\tilde{\Gamma}$  continue estritamente geodesicamente convexa.

A curva  $\tilde{\Gamma}$  coincide com  $\Gamma$  exceto na vizinhança  $I$  de  $s_1$  e em  $\bar{s}_1$   $\Gamma$  e  $\tilde{\Gamma}$  possuem contato de ordem 1. Dessa forma  $\mathcal{O}$  é uma órbita periódica de período  $n$  também para  $\mathcal{F}_{\tilde{\Gamma}}$ . Com isso  $\tilde{g}_i = g_i$  e  $\tilde{\psi}_i = \psi_i$  para  $0 \leq i < n$ . Não é difícil ver de 4.3.1 que

$$\tilde{\kappa}_1 = \kappa_1 \left( 1 + \frac{\lambda''(s_1)}{\kappa_1} \right)$$

Procedendo para  $\tilde{\Gamma}$  da mesma forma que acima temos

$$\text{Trac}(D\mathcal{F}_{\tilde{\Gamma}}^n(\bar{s}_i, \bar{\psi}_i)) = \frac{\tilde{\kappa}_1}{\text{sen } \psi_1} b_1 + c_1$$

Substituindo a expressão para  $\tilde{\kappa}_1$  temos

$$\begin{aligned} \text{Trac}(D\mathcal{F}_{\tilde{\Gamma}}^n(\bar{s}_i, \bar{\psi}_i)) &= \frac{\kappa_1 \left( 1 + \frac{\lambda''(s_1)}{\kappa_1} \right)}{\text{sen } \psi_1} b_1 + c_1 \\ &= \frac{\kappa_1}{\text{sen } \psi_1} b_1 + c_1 + \frac{\lambda''(s_1)}{\kappa_1 \text{sen } \psi_1} b_1 \end{aligned} \quad (4.26)$$

Comparando com 4.25 e sabendo que  $\lambda''(s_1)$  é não nulo obtemos que  $\text{Trac}(D\mathcal{F}_\Gamma^n(\bar{s}_i, \bar{\psi}_i))$  é diferente de  $\pm 2$ , e assim  $\mathcal{O}$  é não-degenerada para  $\tilde{\Gamma}$ .

Se  $b_1 = 0$  fazemos

$$A_2 C_{1,0} = \frac{\kappa_2}{\text{sen } \psi_2} B_2 + C_{2,0}$$

Onde

- $C_{2,0}$  tem a mesma forma de  $A_0$  substituindo  $g_0$  por  $g_0 + g_1 + g_2$ ,  $\psi_1$  por  $\psi_3$  e  $\kappa_1$  por  $\kappa_3$ . Tal relação já foi apontada por [(6)] e nós a verificamos também para os casos esférico e hiperbólico.
- $B_2$  tem a mesma forma de  $-B_1$  substituindo  $g_0$  por  $g_0 + g_1$ ,  $g_1$  por  $g_2$ ,  $\kappa_2$  por  $\kappa_3$ .

$$\begin{aligned} \text{Trac}(D\mathcal{F}_\Gamma^n(\bar{s}_i, \bar{\psi}_i)) &= \text{Trac} \left[ A_{n-1} A_{n-2} \cdots A_3 A_2 C_{1,0} \right] \\ &= \text{Trac}(A_{n-1} A_{n-2} \cdots A_3) B_2 + \text{Trac}(A_{n-1} A_{n-2} \cdots A_3) C_{2,0} \\ &= \frac{\kappa_2}{\text{sen } \psi_2} b_2 + c_2 \end{aligned} \quad (4.27)$$

$b_1$  e  $c_1$  não dependem de  $\kappa_2$  nem de  $\kappa_1$ .

**Observação 2:** Se a órbita em questão for de período 3 temos  $\psi_3 = \psi_0$  e  $\kappa_3 = \kappa_0$ . Assim, no caso de  $\mathbb{S}_+^2$  é fácil ver que

$$b_2 = \text{Trac } B_2 = \begin{cases} (g_0 + g_1 + g_2) - \frac{2 \kappa_0 g_2 (g_0 + g_1)}{\text{sen } \psi_0} & \text{em } \mathbb{E}^2 \\ \text{sen}(g_0 + g_1 + g_2) - \frac{2 \kappa_0 \text{sen } g_2 \text{sen}(g_0 + g_1)}{\text{sen } \psi_0} & \text{em } \mathbb{S}_+^2 \\ \text{senh}(g_0 + g_1 + g_2) - \frac{2 \kappa_0 \text{senh } g_2 \text{senh}(g_0 + g_1)}{\text{sen } \psi_0} & \text{em } \mathbb{H}^2 \end{cases}$$

Se  $b_2 \neq 0$  procedemos da mesma forma acima perturbando  $\Gamma$  em uma zinhança de  $s_2$ , obtendo assim uma  $\tilde{\Gamma}$  para a qual  $\mathcal{O}$  é não-degenerada. Se  $b_2 = 0$  continuamos o processo até encontrarmos algum  $b_i \neq 0$  ou finalizando com a matriz  $C_{n-1,0}$  que é dada em cada caso por:

- Em  $\mathbb{E}^2$ :

$$C_{n-1,0} = (-1)^{n-1} \begin{bmatrix} \frac{\kappa_0 L}{\text{sen } \psi_0} - 1 & \frac{L}{\text{sen } \psi_0} \\ -\kappa_2 + \frac{\kappa_n \kappa_0 L}{\text{sen } \psi_0} - \frac{\kappa_0 \text{sen } \psi_n}{\text{sen } \psi_0} & \frac{\kappa_n L - \text{sen } \psi_n}{\text{sen } \psi_0} \end{bmatrix}$$

- Em  $\mathbb{S}_+^2$ :

$$C_{n-1,0} = (-1)^{n-1} \begin{bmatrix} -\cos(L) + \frac{\kappa_0 \text{sen}(L)}{\text{sen } \psi_0} & \frac{\text{sen}(L)}{\text{sen } \psi_0} \\ -\cos(L) \kappa_n - \text{sen}(L) \text{sen } \psi_2 - \frac{\cos(L) \kappa_0 \text{sen } \psi_n}{\text{sen } \psi_0} + \frac{\text{sen}(L) \kappa_n \kappa_0}{\text{sen } \psi_0} & -\frac{\cos(L) \text{sen } \psi_n}{\text{sen } \psi_0} + \frac{\text{sen}(L) \kappa_n}{\text{sen } \psi_0} \end{bmatrix}$$

- Em  $\mathbb{H}^2$ :

$$C_{n-1,0} = (-1)^{n-1} \begin{bmatrix} -\cosh(L) + \frac{\kappa_0 \text{senh}(L)}{\text{sen } \psi_0} & \frac{\text{senh}(L)}{\text{sen } \psi_0} \\ -\cosh(L) \kappa_n - \text{senh}(L) \text{sen } \psi_n - \frac{\cosh(L) \kappa_0 \text{sen } \psi_n}{\text{sen } \psi_0} + \frac{\text{senh}(L) \kappa_n \kappa_0}{\text{sen } \psi_0} & -\frac{\cosh(L) \text{sen } \psi_n}{\text{sen } \psi_0} + \frac{\text{senh}(L) \kappa_n}{\text{sen } \psi_0} \end{bmatrix}$$

onde  $L := g_0 + g_1 + \cdots + g_{n-1}$  é o comprimento da trajetória periódica. Assim, como  $\kappa_n = \kappa_0$  e  $\text{sen } \psi_n = \text{sen } \psi_0$ , temos:

$$\text{Trac } C_{n-1,0} = \begin{cases} \pm 2 \left[ \frac{2 \kappa_0 L}{\text{sen } \psi_0} - 1 \right] & \text{em } \mathbb{E}^2 \\ \pm 2 \left[ \frac{2 \kappa_0 \text{sen } L}{\text{sen } \psi_0} - \cos L \right] & \text{em } \mathbb{S}_+^2 \\ \pm 2 \left[ \frac{2 \kappa_0 \text{senh } L}{\text{sen } \psi_0} - \cosh L \right] & \text{em } \mathbb{H}^2 \end{cases}$$

Para  $\mathbb{E}^2$  e  $\mathbb{H}^2$ , sendo  $L$  não nulo, fazemos a perturbação normal em uma vizinhança de  $\bar{s}_0$  e concluimos a demonstração.

Para  $\mathbb{S}_+^2$ , se  $L$  não for múltiplo inteiro de  $\pi$  temos  $\text{sen}(L)$  não nulo e fazemos a perturbação normal como nos casos planar e hiperbólico e finalizamos a prova.

Se  $L = j\pi$  com  $j$  inteiro menor que  $n$  temos  $\text{sen } L = 0$  e assim perturbação normal de  $\Gamma$  na vizinhança de  $s_0$  não nos dá informação nova. Mas observemos que no caso  $L = j\pi$  nossa construção já havia parado no termo  $b_{n-1}$  que, nesse caso da órbita sem colisões múltiplas é diferente de zero (veja abaixo) e teríamos já realizado nossa perturbação normal numa vizinhança de  $\bar{s}_{n-1}$ .

Prova de  $b_{n-1} \neq 0$ :

Utilizando a regra de construção das matrizes  $B_i$  descrita anteriormente é fácil ver que:

$$\begin{aligned} b_{n-1} = \text{Trac } B_{n-1} &= (-1)^{n-1} \left[ \text{sen } L - \frac{2 \kappa_0 \text{sen } g_{n-1} \text{sen}(g_0 + g_1 + \cdots + g_{n-2})}{\text{sen } \psi_0} \right] [2ex] \\ &= (-1)^n \left[ \frac{2 \kappa_0 \text{sen } g_{n-1} \text{sen}(g_0 + g_1 + \cdots + g_{n-2})}{\text{sen } \psi_0} \right] \end{aligned} \quad (4.28)$$

onde usamos na segunda linha que  $L = j\pi$ . Como estamos na semi-esfera  $0 \leq g_{n-1} \leq \pi$  e  $(j-1)\pi \leq g_0 + g_1 + \cdots + g_{n-2} \leq j\pi$ . Assim tanto  $\text{sen } g_{n-1}$  quanto  $\text{sen}(g_0 + g_1 + \cdots + g_{n-2})$  são não nulos.

□

Trataremos abaixo o caso em que a órbita degenerada admita pontos com colisões múltiplas.

**Lema 20.** *Seja  $\Gamma$  uma oval em  $S = \mathbb{E}^2$  ou  $\mathbb{H}^2$ . E seja  $\mathcal{O} = \{(\bar{s}_0, \psi_0), (\bar{s}_1, \psi_1), \cdots, (\bar{s}_{n-1}, \psi_{n-1})\}$  uma órbita periódica de período  $n$ , podendo assumir múltiplas colisões, degenerada para a aplicação do bilhar  $\mathcal{F}_\Gamma$ . Existe uma oval  $\tilde{\Gamma} \in C^\infty$  -próxima de  $\Gamma$  tal que  $\mathcal{O}$  é uma órbita periódica não degenerada para  $\mathcal{F}_{\tilde{\Gamma}}$ .*

**Prova:**

Suponhamos  $\{(\bar{s}_0, \bar{\psi}_0), (\bar{s}_1, \bar{\psi}_1), \dots, (\bar{s}_{n-1}, \bar{\psi}_{n-1})\}$  uma tal órbita degenerada de período  $n$  para  $\mathcal{F}_\Gamma$ . Como  $\det(D\mathcal{F}_\Gamma^n|_{(\bar{s}_0, \bar{\psi}_0)}) = 1$  temos  $\text{tr}(D\mathcal{F}_\Gamma^n|_{(\bar{s}_0, \bar{\psi}_0)}) = \pm 2$ .

Vimos que podemos escrever

$$\begin{aligned} \text{Trac}(D\mathcal{F}_\Gamma^n(\bar{s}_0, \bar{\psi}_0)) &= D\mathcal{F}_{(\bar{s}_{n-1}, \bar{\psi}_{n-1})} D\mathcal{F}_{(\bar{s}_{n-2}, \bar{\psi}_{n-2})} \dots D\mathcal{F}_{(\bar{s}_0, \bar{\psi}_0)} \\ &= \frac{1}{\sin \bar{\psi}_0 \dots \sin \bar{\psi}_{n-1}} A_{n-1} \dots A_1 A_0 \end{aligned}$$

Cada matriz  $A_i = k_{i+1}k_i B_i + k_{i+1}C_i + k_i D_i + E_i$ , onde  $k_i$  é a curvatura geodésica de  $\Gamma$  em  $s_i$ , e as entradas das matrizes  $B_i, C_i, D_i, E_i$  dependem somente dos ângulo  $\bar{\psi}_i$  e  $\bar{\psi}_{i+1}$  e da distância geodésica entre  $\Gamma(s_i)$  e  $\Gamma(s_{i+1})$ .

Fixando nossa atenção no primeiro ponto de impacto da trajetória, digamos  $\Gamma(s_1)$ . Se tivermos  $m_1$  impactos em  $\Gamma(s_1)$  então de forma análoga à dedução do caso de colisão simples temos

$$\text{tr}(D\mathcal{F}_{(\bar{s}_0, \bar{\psi}_0)}^n) = p_1(k_1) = b_{m_1} k_1^{m_1} + \dots + b_1 k_1 + c_1 = \pm 2$$

em que os coeficientes  $b_j$  e  $c_1$  não dependem  $k_1$ .

Se algum dos  $b_j \neq 0$ , nós podemos tomar uma perturbação suficientemente pequena  $\tilde{Gamma}$ , como na prova do lema 19, com  $\lambda$  satisfazendo  $\lambda(s_1) = 0, \lambda'(s_1) = 0, \lambda''(s_1) \neq 0$ , e  $\lambda \equiv 0$  fora do intervalo contendo  $s_1$  e nenhum outro ponto da trajetória. Portanto preservamos a trajetória e mudamos a curvatura geodésica no vértice  $\Gamma(s_1)$ , que implica  $\text{trac}(D_{\tilde{\Gamma}} \mathcal{F}^n) \neq \text{trac}(D_\Gamma \mathcal{F}^n)$ , i.e, em  $\tilde{\Gamma}$  a órbita é não degenerada.

Se todos os  $b_j = 0$  tomamos o próximo impacto  $s_2$  (como o bilhar não tem ponto fixo,  $s_2 \neq s_1$ ) e então:

$$\text{Trac}(D\mathcal{F}_{(\bar{s}_0, \bar{\psi}_0)}^n) = p_2(k_2) = b_{m_2} k_2^{m_2} + \dots + b_1 k_2 + c_2 = c_1 = \pm 2$$

onde os coeficientes  $b_j$  e  $c_2$  não dependem de  $k_1$  and  $k_2$ .

Se algum  $b_j \neq 0$  tomamos perturbação  $\tilde{Gamma}$  em  $s_2$  com acima. Caso contrário, continuamos o processo até, digamos  $s_0$ . Obtemos então

$$\text{trac}(D\mathcal{F}_{(\bar{s}_0, \bar{\psi}_0)}^n) = p_0(k_0) = b_{m_0} k_0^{m_0} + \dots + b_1 k_0 + c_0 = \pm 2$$

onde os coeficientes  $b_j$  e  $c_0$  não dependem de qualquer curvatura  $k_i$ .

Para  $\mathbb{H}^2$  calculamos  $c_0$  obtendo  $c_0 = (-1)^n 2 \cosh L \neq \pm 2$  onde  $L \neq 0$  é o perímetro da poligonal geodésica fechada.

Então, nesse caso, existe um  $j$  such that  $b_j \neq 0$  e nós podemos aproximar  $\mathcal{F}_\Gamma$  por bilhares com a trajetória de período  $n$  não degenerada.

Para  $\mathbb{E}^2$  Dias Carneiro, Oliffson Kamphorst and Pinto-de-Carvalho provaram que ter apenas uma quantidade finita de órbitas de período  $n$  todas não degeneradas é uma propriedade genérica para ovais  $C^2$ .

Apesar o resultado ser verdadeiro, eles não analisaram trajetórias que contenha pontos de múltiplos impactos. Usando nossas técnicas observamos que se todos os  $b_j$  são nulos obteremos



na etapa final

$$\text{Trac}(D\mathcal{F}_{(\bar{s}_0, \bar{\psi}_0)}^n) = p_0(k_0) = b_{m_0}k_0^{m_0} + \dots + b_1k_0 + (-1)^n 2L = \pm 2$$

onde  $L$  é o perímetro da trajetória.

Se  $L \neq 1$ ,  $c_0 \neq \pm 2$  e então existe  $b_j \neq 0$  e a perturbação normal detrói a órbita degenerada.

Se  $L = 1$ , o primeiro coeficiente  $b_1 = (-1)^{n+1} 2(\frac{1}{\sin \bar{\psi}_0} + \dots + \frac{1}{\sin \bar{\psi}_{m_0}}) \neq 0$  e, de novo, a perturbação normal resolve o problema.

□

Resultado semelhante ao lema 20 não pode ser deduzido para  $\mathbb{S}_+^2$ . Se todos os  $b_j$  são nulos exceto para o último impacto  $s_0$  obtemos  $\text{Trac}(D\mathcal{F}_{(\bar{s}_0, \bar{\psi}_0)}^n) = p_0(k_0) = b_{m_0}k_0^{m_0} + \dots + b_1k_0 + c_0 = \pm 2$  onde, sendo  $L$  o perímetro da trajetória,  $c_0 = (-1)^n 2 \cos L$  e todos os coeficientes  $b_j$  são múltiplos de  $\sin L$ . Logo se  $L = \mu\pi$ ,  $c_0 = \pm 2$  e todos os  $b_j = 0$  e não conseguimos destruir a degenerescência da órbita.

Como órbitas periódicas não degeneradas são isoladas, com um número finito de perturbações construímos uma oval *Gamma* quão perto nós queremos de  $\Gamma$  tal que a aplicação do bilhar tenha somente um número finito de órbitas de período  $n$  não degeneradas.

Logo temos

**Proposição 14.** *Em  $\mathbb{E}^2$  e  $\mathbb{H}^2$   $\mathcal{U}_N$  é denso.*

Usando as proposições 13 e 14 temos

**Teorema 4.** *Para cada período  $n \geq 2$ , ter somente um número finito de órbitas de período, todas não degeneradas, é uma propriedade aberta e densa para ovais  $C^\infty$  em  $\mathbb{H}^2$ . Para ovais  $C^\infty$  em  $\mathbb{S}_+^2$  ela é apenas aberta.*

# Capítulo 5

## Bilhar circular perturbado

Em [(22)], Ramírez-Ros estudando bilhares no círculo Euclideano perturbado estabeleceu condições sobre os coeficientes de Fourier dessas perturbações para que a aplicação do bilhar não possua retas invariantes com dado número de rotação racional. É fato conhecido que tais retas, também chamadas de toros invariantes, são detruídas por *quase todas* perturbações do bilhar e quebram-se numa quantidade finita de órbitas periódicas.

Nosso objetivo nesse capítulo é estender esse resultado determinando condições para persistência das retas invariantes ressonantes do bilhar no círculo geodésico perturbado tanto em  $\mathbb{S}_+^2$  quanto em  $\mathbb{H}^2$ .

Relembremos que entendemos, por uma oval em  $S = \mathbb{E}^2, \mathbb{S}_+^2$  ou  $\mathbb{H}^2$ , uma curva  $\Gamma$ , fechada, com curvatura geodesicamente positiva, orientada positivamente, pelo menos duas vezes diferenciável. Consideraremos aqui, a menos de menção explícita,  $\Gamma$  dada em coordenadas polares geodésicas.

Consideraremos as seguintes parametrizações das superfícies:

$$\left\{ \begin{array}{lll} (\rho \cos \theta, \rho \sin \theta) & \text{em } \mathbb{E}^2 & \rho > 0 \\ (\sin \rho \cos \theta, \sin \rho \sin \theta, \cos \rho) & \text{em } \mathbb{S}_+^2 & 0 < \rho < \frac{\pi}{2} \\ (\sinh \rho \cos \theta, \sinh \rho \sin \theta, \cosh \rho) & \text{em } \mathbb{H}^2 & \rho > 0 \end{array} \right.$$

onde  $0 \leq \theta \leq 2\pi$ .

### 5.1 Círculos geodésicos perturbados

No capítulo 3 apresentamos um estudo das principais propriedades da aplicação de bilhar em círculos geodésicos sejam eles Euclidianos, esféricos ou hiperbólicos. Iniciamos essa seção lembrando um pouco sobre tais curvas.

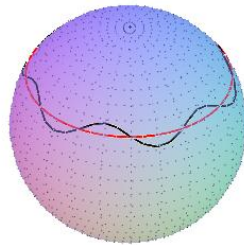
Um círculo geodésico com centro em um dado ponto  $p_0$  é o conjunto de todos os pontos cuja

distância geodésica a  $p_0$ , centro do círculo, é uma constante que chamamos de raio do círculo.

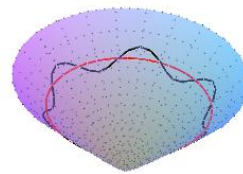
Sabemos que círculos geodésicos na esfera possuem raio  $\phi_0$  no máximo igual a  $\pi$ , uma vez que esse é o maior valor para a distância entre dois pontos na esfera.

Em nossos modelos para a esfera e o plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$  círculos geodésicos são obtidos fazendo-se a interseção dessas superfícies por planos de  $\mathbb{R}^3$  e do espaço de Minkowski respectivamente. Esse procedimento é semelhante ao procedimento para obtenção das geodésicas da esfera e de  $\mathbb{H}^2$ , sendo que no caso dos círculos geodésicos o plano em questão não pode conter a origem.

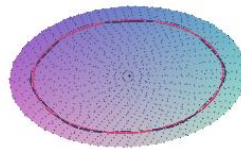
Como acontece no caso do plano Euclideoano círculos geodésicos com mesmo raio são isométricos em  $\mathbb{S}_+^2$  e  $\mathbb{H}^2$ . Dessa forma, utilizaremos em nosso trabalho círculos geodésicos com centro em  $(0, 0, 1)$  que representa em  $\mathbb{S}_+^2$  o polo norte e em  $\mathbb{H}^2$  o vértice da folha do hiperbolóide.



(a) Esfera



(b) Plano hiperbólico mergulhado



(c) Plano Euclideoano

Figura 5.1: Círculos geodésicos perturbados

Tais círculos que denotaremos por  $\Gamma_0$  são dados em coordenadas polares geodésicas por:

$$\Gamma_0(\theta) = \begin{cases} (\rho_0 \cos \theta, \rho_0 \sin \theta) & \text{em } \mathbb{E}^2 \\ (\sin \rho_0 \cos \theta, \sin \rho_0 \sin \theta, \cos \rho_0) & \text{em } \mathbb{S}_+^2 \\ (\sinh \rho_0 \cos \theta, \sinh \rho_0 \sin \theta, \cosh \rho_0) & \text{em } \mathbb{H}^2 \end{cases}$$

onde  $\rho_0$  é o raio do círculo geodésico na respectiva superfície.

A curvatura geodésica, em cada caso, é dada por:

$$\kappa = \begin{cases} \frac{1}{r_0} & \text{em } \mathbb{E}^2 \\ \frac{1}{\tan(\phi_0)} & \text{em } \mathbb{S}_+^2 \\ \frac{1}{\tanh(\phi_0)} & \text{em } \mathbb{H}^2 \end{cases}$$

Onde para  $\mathbb{S}_+^2$ , temos  $0 \leq \rho_0 \leq \frac{\pi}{2}$ . Assim a curvatura geodésica é positiva nos três caso e os respectivo círculo geodésicos são geodesicamente convexos.

Da seção 3.2, deduzimos que, em coordenadas polares geodésicas, a aplicação do bilhar no círculo geodésico é dada por:

$$\begin{aligned} \mathcal{F}_0 : \mathcal{M} &\longrightarrow \mathcal{M} \\ (\theta, \psi) &\mapsto (\theta + \alpha(\psi) \bmod 2\pi, \psi) \end{aligned}$$

onde:

$$\cos \alpha(\psi) = \begin{cases} \cos 2\psi & \text{em } \mathbb{E}^2 \\ \frac{\cos^2 \rho_0 - \tan^2 \psi}{-\sin^2 \rho_0 + \sec^2 \psi} & \text{em } \mathbb{S}_+^2 \\ \frac{\cosh^2 \rho_0 - \tan^2 \psi}{\sinh^2 \rho_0 + \sec^2 \psi} & \text{em } \mathbb{H}^2 \end{cases}$$

e  $\mathcal{M} = \mathbb{T} \times (0, \pi)$  com  $\mathbb{T} = \mathbb{R}/2\pi\mathbb{Z}$ .

Estudando propriedades da aplicação  $\mathcal{F}_0$ , na seção 3.2, demonstramos que dados  $m, n \in \mathbb{N}$  co-primos, cada círculo horizontal  $T_0^{\frac{m}{n}} := \mathbb{T} \times \psi^{\frac{m}{n}}$  com  $\alpha(\psi^{\frac{m}{n}}) = 2\pi \frac{m}{n}$  é invariante pela aplicação do bilhar e a órbita de todo ponto  $(\theta, \psi)$  nesse círculo é periódica do tipo  $(m, n)$ . Na faixa horizontal  $\tilde{\mathcal{M}} := \mathbb{R} \times (0, \pi)$  que é levantamento do cilindro  $\mathcal{M}$  os círculos invariantes são retas horizontais  $\tilde{T}_0^{\frac{m}{n}} := \{(\tilde{\theta}, \psi)\}$ . Sendo  $\tilde{\mathcal{F}}_0$  um levantamento de  $\mathcal{F}_0$  vimos que cada  $\tilde{T}_0^{\frac{m}{n}}$  possui número de rotação racional  $\frac{2\pi m}{n}$ . As retas  $\tilde{T}_0^{\frac{m}{n}}$  ou os círculos  $T_0^{\frac{m}{n}}$  são ditos ressonantes.

## 5.2 Curvas invariantes ressonantes

As retas ressonantes do espaço de fase do bilhar circular geodésico são um caso particular das *curvas invariantes rotacionais* que são curvas simples fechadas invariantes no cilindro cujo

complementar não contém um disco. Intuitivamente uma curva rotacional é uma curva que dá a volta no cilindro. Genericamente curvas rotacionais ressonantes são destruídas por perturbações da aplicação twist. Essa sensibilidade das curvas rotacionais e suas ramificações foi objeto de estudo de Kolmogorov, Arnold e Moser na famosa teoria KAM. Nessa teoria fica estabelecida a robustez das curvas invariantes com número de rotação irracional diofantino, a questão das curvas ressonantes permaneceu aberta. Em 1987, Katok e Bernstein, mostraram que curvas rotacionais invariantes ressonantes de sistemas completamente integráveis quando quebradas deixam órbitas periódicas numa vizinhança da curva rotacional não perturbada. Em [(22)] e [(19)], Ramírez-Ros e Pinto-de-Carvalho estabeleceram condições suficientes para que uma dada perturbação do bilhar circular plano destrua uma curva ressonante. Estudaremos para bilhares em  $S$  esse fenômeno de perda de círculos ressonantes. Utilizando-nos do já feito para o caso Euclideano, juntamente com os teoremas 1 e 3.2 estenderemos as condições de não persistência de círculos ressonantes também para perturbações de bilhares em círculos geodésicos na semi-esfera  $\mathbb{S}_+^2$  e no plano hiperbólico  $\mathbb{H}^2$ .

Consideraremos perturbações  $\Gamma_\epsilon(\theta)$  (vide figura 5.1), na direção do raio polar suficientemente pequenas de  $\Gamma_0$ , dadas por:

$$\Gamma_\epsilon(\theta) = \begin{cases} (\rho_\epsilon(\theta) \cos \theta, \rho_\epsilon(\theta) \sin \theta) & \text{em } \mathbb{E}^2 \\ (\sin \rho_\epsilon(\theta) \cos \theta, \sin \rho_\epsilon(\theta) \sin \theta, \cos \rho_\epsilon(\theta)) & \text{em } \mathbb{S}_+^2 \\ (\sinh \rho_\epsilon(\theta) \cos \theta, \sinh \rho_\epsilon(\theta) \sin \theta, \cosh \rho_\epsilon(\theta)) & \text{em } \mathbb{H}^2 \end{cases} \quad (5.1)$$

onde

$$\rho_\epsilon(\theta) = r_0 + \epsilon r_1(\theta) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

Como  $\Gamma_0$  é um círculo geodésico temos que a perturbação na direção do raio polar coincide com a perturbação na direção normal de  $\Gamma_0$ . Assim o lema abaixo segue da secção 4.3.1, proposições 10 e 11.

**Lema 21.** *Se  $\epsilon$  é suficientemente pequeno, a curva  $\Gamma_\epsilon(\theta)$  é uma oval e a aplicação do bilhar  $\mathcal{F}_\epsilon$  em  $\Gamma_\epsilon$  e  $\mathcal{F}_0$  estão  $C^1$ -próximas.*

No que se segue fixaremos  $m, n$  naturais co-primos com  $m < n$ . Seja  $T_0^{\frac{m}{n}}$  a curva invariante ressonante de  $\mathcal{F}_0$  com número de rotação  $\frac{2\pi m}{n}$ .

**Proposição 15.** *Seja  $\mathcal{F}_0$  a aplicação do bilhar em um círculo geodésico em  $\mathbb{E}^2$ ,  $\mathbb{S}_+^2$  ou  $\mathbb{H}^2$ ,  $\epsilon > 0$  e  $\mathcal{F}_\epsilon$  a aplicação perturbada. Se  $\epsilon$  é suficientemente pequeno, então:*

1. *existe um único par de funções suaves  $h_\epsilon, \widehat{h}_\epsilon : \mathbb{T} \rightarrow (0, \pi)$  tal que  $h_\epsilon(\theta) = \psi^{\frac{m}{n}} + O(\epsilon)$  e  $\widehat{h}_\epsilon(\theta) = \psi^{\frac{m}{n}} + O(\epsilon)$  uniformemente em  $\theta \in \mathbb{T}$  e  $\mathcal{F}_\epsilon(\theta, h_\epsilon(\theta)) = (\theta, \widehat{h}_\epsilon(\theta))$ ;*
2. *Sejam  $T_\epsilon$  e  $\widehat{T}_\epsilon$  respectivamente os gráficos  $h_\epsilon$  e  $\widehat{h}_\epsilon$ . Tais conjuntos possuem interseção não vazia;*

3. Os pontos na interseção de  $T_\epsilon$  e  $\widehat{T}_\epsilon$  são pontos periódicos do tipo  $(m, n)$  para  $\mathcal{F}_\epsilon$ ;
4. Os gráficos são iguais se e somente se  $T_0^{\frac{m}{n}}$  é curva invariante para  $\mathcal{F}_\epsilon$ .

**Prova:**

1. Definamos  $G(\psi, \epsilon; \theta) = \Pi_1(\mathcal{F}_\epsilon^n(\theta, \psi)) - \theta - 2\pi m$ .  
Pelo teorema 3.2 temos  $G(\psi^{\frac{m}{n}}, 0; \theta) = 0$  e  $\partial_1 G(\psi^{\frac{m}{n}}, 0; \theta) = n\alpha'(\psi^{\frac{m}{n}}) \neq 0$  sendo  $\alpha$  difeomorfismo. Do Teorema da Função Implícita aplicado a  $G(\psi, \epsilon; \theta)$  no ponto  $(\psi, \epsilon) = (\psi^{\frac{m}{n}}, 0)$  concluimos que dado um parâmetro  $\theta \in \mathbb{T}$  existe único  $\psi(\epsilon; \theta)$  próximo a  $\psi^{\frac{m}{n}}$  para  $\epsilon$  em uma vizinhança de zero. Assim podemos definir uma função  $h_\epsilon : \mathbb{T} \rightarrow (0, \pi)$  com  $h_\epsilon(\theta) = \psi(\epsilon; \theta) = \psi^{\frac{m}{n}} + O(\epsilon)$ . A uniformidade em  $\theta$  segue da compacidade de  $\mathbb{T}$ . Para finalizar a demonstração desse item definimos  $\widehat{h}$  por  $\mathcal{F}_\epsilon(\theta, h_\epsilon(\theta)) = (\theta, \widehat{h}_\epsilon(\theta))$ . Pela continuidade de  $\mathcal{F}_\epsilon$   $\widehat{h}_\epsilon(\theta) = \psi^{\frac{m}{n}} + O(\epsilon)$ .
2. Sendo  $\Gamma_\epsilon$  uma oval temos pelo teorema 1 que  $\mathcal{F}_\epsilon$  é uma aplicação conservativa e daí segue facilmente o item 2.
3. Seja  $(\theta_0, \psi_0) \in T_\epsilon \cap \widehat{T}_\epsilon$ , ou seja  $(\theta_0, \psi_0) = (\theta_0, h_\epsilon(\theta_0))$  e  $(\theta_0, \psi_0) = (\theta_0, \widehat{h}_\epsilon(\theta_0))$ . Mas
 
$$\mathcal{F}_\epsilon^n(\theta_0, \psi_0) = \mathcal{F}_\epsilon^n(\theta_0, h_\epsilon(\theta_0)) = (\theta_0, \widehat{h}_\epsilon(\theta_0)) = (\theta_0, \psi_0)$$
4. Pelo item anterior todos os pontos são periódicos do tipo  $(m, n)$  para  $\mathcal{F}_\epsilon$  logo  $T_0^{\frac{m}{n}}$  é invariante.

□

**Observação:** A proposição anterior garante que, quando  $T_0^{\frac{m}{n}}$  não é círculo invariante para  $\mathcal{F}_\epsilon$ , com  $\epsilon$  suficientemente pequeno, ela se quebra em uma quantidade finita de órbitas periódicas do tipo  $(m, n)$ .

No próximo lema, temos uma importante informação sobre a distância vertical entre  $T_\epsilon$  e  $\widehat{T}_\epsilon$ . A demonstração apresentada abaixo está contida em [(22)] e não depende da superfície.

**Lema 22** ((22), Pág.: 4). *A distância vertical  $h_\epsilon(\theta) - \tilde{h}_\epsilon(\theta)$  entre  $h_\epsilon$  e  $\widehat{h}_\epsilon$  satisfaz*

$$h_\epsilon(\theta) - \tilde{h}_\epsilon(\theta) = \|\Gamma'_\epsilon\| L'_\epsilon(\theta)$$

onde  $'$  é a derivada com relação a  $\theta$ ,  $L_\epsilon : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  é definida por  $L_\epsilon(\theta) = \sum_{j=0}^{n-1} g_\epsilon(\bar{\theta}_{j-1}(\theta, \epsilon), \bar{\theta}_j(\theta, \epsilon))$  e  $\bar{\theta}_j(\theta, \epsilon) = \Pi_1(\mathcal{F}_\epsilon^j(\theta, h_\epsilon(\theta)))$  para  $j = 0, \dots, n-1$ .

### Prova

Por questão de simplicidade de notação, omitiremos  $\theta$  e  $\epsilon$  nessa demonstração e fixaremos a seguinte notação:

$$(\bar{\theta}_j, \psi_j) := \Pi_1(\mathcal{F}^j(\theta, h(\theta))) \quad \bar{\omega}_j := \partial \bar{\theta}_j / \partial \bar{\theta}.$$

Observemos que  $\psi_0 = h(\theta)$ ,  $\psi_n = \widehat{h}(\theta)$  e  $\bar{\omega}_0 = \bar{\omega}_1 = 1$ . Derivando

$$L_\epsilon(\theta) := \sum_{j=0}^{n-1} g(\bar{\theta}_j, \bar{\theta}_{j+1})$$

obtemos:

$$L'_\epsilon(\theta) = \partial_1 g(\bar{\theta}_0, \bar{\theta}_1) \bar{\omega}_0 + \sum_{j=0}^{n-2} [\partial_2 g(\bar{\theta}_j, \bar{\theta}_{j+1}) + \partial_1 g(\bar{\theta}_{j+1}, \bar{\theta}_{j+2})] \bar{\omega}_j + \partial_2 g(\bar{\theta}_{n-1}, \bar{\theta}_n) \bar{\omega}_n$$

Mas do teorema 1 a distância geodésica  $g$  é uma função geradora para o bilhar e assim

$$\partial_2 g(\bar{\theta}_{j-1}, \bar{\theta}_j) = \cos \psi_j \quad \partial_1 g(\bar{\theta}_j, \bar{\theta}_{j+1}) = -\cos \psi_j$$

Substituindo na expressão para  $L'_\epsilon(\theta)$  temos

$$L'_\epsilon(\theta) = \partial_1 g(\bar{\theta}_0, \bar{\theta}_1) \bar{\omega}_0 + \partial_2 g(\bar{\theta}_{n-1}, \bar{\theta}_n) \bar{\omega}_n$$

Pelo observado no início da prova:

$\psi_0 = h(\theta)$ ,  $\psi_n = \widehat{h}(\theta)$  e  $\bar{\omega}_0 = \bar{\omega}_1 = 1$  e finalmente

$$L'_\epsilon(\theta) = \|\Gamma'(\theta)\| [h(\theta) - \widehat{h}(\theta)]$$

□

**Observação:** Se para algum  $\theta$  a distância vertical entre os gráficos é nula temos que eles se interceptam e pelo lema acima  $\theta$  é um ponto crítico do funcional  $L_\epsilon$  e além disso temos determinada uma órbita periódica de tipo  $(m, n)$  para  $\mathcal{F}_\epsilon$ . A recíproca também é verdadeira.

Dessa forma temos a seguinte consequência:

**Corolário 7.** *O círculo ressonante  $T_0^{\frac{m}{n}}$  é invariante para  $\mathcal{F}_\epsilon$  se e somente se  $L'_\epsilon(\theta)$  for identicamente nulo.*

## 5.2.1 Potencial Radial de Melnikov

O funcional  $L_\epsilon$  é de período  $2\pi$  e assim temos  $L_\epsilon : \mathbb{T} \rightarrow \mathbb{R}$  está bem definido e é denominado potencial radial. Em vista do corolário 7 temos que no funcional  $L_\epsilon(\theta)$  uma importante ferramenta no estabelecimento de condições para a persistência ou não de curvas ressonantes no bilhar circular perturbado.

Dessa forma, se escrevermos a expansão em  $\epsilon$  do potencial radial da forma

$$L\epsilon(\theta) = L_0(\theta) + \epsilon L_1(\theta) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (5.2)$$

podemos enunciar a seguinte consequência do corolário 7:

**Corolário 8.** *Se  $L_1(\theta)$  é não constante o círculo ressonante  $T_0^{\frac{m}{n}}$  não é invariante para  $\mathcal{F}_\epsilon$ .*

**Definição 22.** *O funcional  $L_1(\theta)$  é denominada potencial radial de Melnikov da curva ressonante*

A proposição abaixo estende para bilhares na esfera e no plano hiperbólico a proposição 9 de [(22)].

**Proposição 16.** *O potencial radial de Melnikov, da curva invariante ressonante  $T_0^{\frac{m}{n}}$ , do bilhar circular geodésico perturbado é dado em cada caso por:*

$$L_1(\theta) = \begin{cases} \frac{4r_0 \operatorname{sen}^2 \frac{\pi m}{n}}{g_0} \sum_{j=0}^{n-1} r_1\left(\theta + \frac{2\pi m j}{n}\right) & \text{em } \mathbb{E}^2 \\ -\frac{2 \sin(2\phi_0) \sin^2\left(\frac{\pi m}{n}\right)}{\sin(g_0)} \sum_{j=0}^{n-1} \phi_1\left(\theta + \frac{2\pi m j}{n}\right) & \text{em } \mathbb{S}_+^2 \\ \frac{2 \sinh(2\rho_0) \sin^2\left(\frac{\pi k}{n}\right)}{\sinh(g_0)} \sum_{j=0}^{n-1} \rho_1\left(\theta + \frac{2\pi m j}{n}\right) & \text{em } \mathbb{H}^2 \end{cases}$$

onde  $g_0$  é a distância geodésica na mesa de bilhar entre duas batida consecutivas no círculo geodésico.

O termo  $L_0(\theta)$  em 5.2 é dado por:

$$L_0 = \begin{cases} 2n r_0 \sin \frac{\pi k}{n} & \text{em } \mathbb{E}^2 \\ 2n (\cos^2 \phi_0 + \sin^2 \phi_0 \cos \frac{2\pi k}{n}) & \text{em } \mathbb{S}_+^2 \\ 2n (\cosh^2 \rho_0 - \sinh^2 \rho_0 \cos \frac{2\pi k}{n}) & \text{em } \mathbb{H}^2 \end{cases}$$

**Observação:** Na expressão de  $L_1(\theta)$ , obtida aqui, não realizamos simplificações com o objetivo de a compararmos com os outros dois casos. Mas de fato, após uma simplificação essa é a mesma expressão obtida em [(22)] por outro método.

**Prova da Proposição:** Uma demonstração desse resultado para o caso Euclideano pode ser encontrada em [(22)]. Aqui, no entanto, apresentaremos uma demonstração baseada na expansão em série de potências do potencial radial  $L\epsilon$  para obter  $L_0(\theta)$  e o potencial de Melnikov  $L_1(\theta)$ .

**Caso  $\mathbb{E}^2$ :**

Tomaremos a perturbação

$$\Gamma_\epsilon(\theta) = (r_\epsilon(\theta) \cos \theta, r_\epsilon(\theta) \operatorname{sen} \theta)$$



com

$$r_\epsilon(\theta) = r_0 + \epsilon r_1(\theta) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (5.3)$$

Logo

$$\Gamma_\epsilon(\theta) = \Gamma_0 + \epsilon(r_1(\theta) \cos \theta, r_1(\theta) \sin \theta) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

Temos então que  $\mathcal{F}_\epsilon(\theta, h_\epsilon(\theta)) = \mathcal{F}_0(\theta, h_0(\theta)) + \mathcal{O}(\epsilon)$  e

$$\Pi_1(\mathcal{F}_0(\theta, h_0(\theta))) = \theta + \frac{2\pi m}{n}$$

e logo  $\theta_j(\theta) = \Pi_1(\mathcal{F}_\epsilon^j(\theta, h_\epsilon(\theta)))$  se escreve como

$$\theta_j(\theta) = \theta + \frac{2\pi jm}{n} + \epsilon \theta_1^j(\theta) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (5.4)$$

Analogamente,  $g_\epsilon(\theta) = g_0(\theta) + \epsilon g_1(\theta) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$  e substituindo 5.3 na expressão para  $\Gamma(\epsilon)$  temos

$$\begin{aligned} [g_\epsilon(\theta, \bar{\theta})]^2 &= \langle \Gamma_\epsilon(\theta) - \Gamma_\epsilon(\bar{\theta}), \Gamma_\epsilon(\theta) - \Gamma_\epsilon(\bar{\theta}) \rangle \\ &= r_\epsilon^2(\theta) + r_\epsilon^2(\bar{\theta}) - 2r_\epsilon(\theta)r_\epsilon(\bar{\theta}) \cos(\theta - \bar{\theta}) \end{aligned} \quad (5.5)$$

De 5.3

$$r_\epsilon^2(\theta) + r_\epsilon^2(\bar{\theta}) = 2r_0^2 + 2r_0[r_1(\theta) + r_1(\bar{\theta})] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (5.6)$$

$$r_\epsilon(\theta)r_\epsilon(\bar{\theta}) = r_0^2 + \epsilon r_0[r_1(\theta) + r_1(\bar{\theta})] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (5.7)$$

De 5.4

$$\theta_{j+1} - \theta_j = \frac{2\pi m}{n} + \epsilon \Theta^j + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

onde  $\Theta^j = \theta_1^{j+1}(\theta) - \theta^j(\theta)$ .

$$\begin{aligned} \cos(\theta_{j+1} - \theta_j) &= \cos\left(\frac{2\pi m}{n} + \epsilon \Theta^j + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \\ &= \cos \frac{2\pi m}{n} + \epsilon \sin \frac{2\pi m}{n} \Theta^j + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (5.8)$$

Substituindo 5.6, 5.7 e 5.8 em 5.5, após manipulações:

$$[g_\epsilon(\theta_{j+1}, \theta_j)]^2 = g_0^2 + \epsilon \left[ r_0^2 \sin \frac{2\pi m}{n} \Theta^j - 4r_0(r_1(\theta_{j+1}) + r_1(\theta_j)) \sin^2 \frac{2\pi m}{n} \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (5.9)$$

onde  $g_0^2 = 2r_0^2 - 2r_0^2 \cos \frac{2\pi m}{n}$ .

Para simplificar a notação, fazemos

$$\beta := r_0^2 \sin \frac{2\pi m}{n} \Theta^j - 4r_0(r_1(\theta_{j+1}) + r_1(\theta_j)) \sin^2 \frac{2\pi m}{n}$$

Tomando a raiz quadrada em 5.9 e expandindo em  $\epsilon$  obtemos:

$$\begin{aligned} g_\epsilon(\theta_{j+1}, \theta_j) &= \sqrt{g_0^2 + (\beta + \mathcal{O}(\epsilon))\epsilon} \\ &= g_0 + \frac{1}{2} \frac{\beta}{g_0} \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (5.10)$$

Finalmente, substituindo 5.10 em 5.2 e simplificando

$$\begin{aligned} L_\epsilon(\theta) &= \sum_{j=0}^{n-1} g_\epsilon(\theta_{j+1}, \theta_j) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} g_0 + \frac{1}{2} \frac{\beta}{g_0} \epsilon + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= ng_0 + \frac{1}{2g_0} \epsilon \sum_{j=0}^{n-1} \beta + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= ng_0 + \frac{1}{2g_0} \epsilon \sum_{j=0}^{n-1} \left[ r_0^2 \text{sen}^2 \frac{2\pi m}{n} \Theta^j - 2r_0(r_1(\theta_{j+1}) + r_1(\theta_j)) \text{sen}^2 \frac{2\pi m}{n} \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= ng_0 + \frac{2r_0}{2g_0} \text{sen}^2 \frac{2\pi m}{n} \epsilon \sum_{j=0}^{n-1} [r_1(\theta_{j+1}) + r_1(\theta_j)] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= ng_0 + \frac{4r_0 \text{sen}^2 \frac{2\pi m}{n}}{g_0} \epsilon \sum_{j=0}^{n-1} r_1(\theta_j) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned}$$

Assim 5.2 fica:

$$L_\epsilon(\theta) = ng_0 + \frac{4r_0 \text{sen}^2 \frac{2\pi m}{n}}{g_0} \epsilon \sum_{j=0}^{n-1} r_1(\theta_j) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (5.11)$$

**Caso  $\mathbb{S}_+^2$ :**

Tomaremos a perturbação:

$$\Gamma_\epsilon(\theta) = (\text{sen } \phi_\epsilon(\theta) \cos \theta, \text{sen } \phi_\epsilon(\theta) \text{sen } \theta, \cos \phi_\epsilon(\theta))$$

com

$$\phi_\epsilon(\theta) = \phi_0 + \epsilon \phi_1(\theta) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (5.12)$$

Logo

$$\Gamma_\epsilon(\theta) = \Gamma_0(\theta) + \epsilon(\text{sen } \phi_1(\theta) \cos \theta, \text{sen } \phi_1(\theta) \text{sen } \theta, \cos \phi_1(\theta)) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

Temos então que  $\mathcal{F}_\epsilon(\theta, h_\epsilon(\theta)) = \mathcal{F}_0(\theta, h_0(\theta)) + \mathcal{O}(\epsilon)$  e

$$\Pi_1(\mathcal{F}_0(\theta, h_0(\theta))) = \theta + \frac{2\pi m}{n}$$

e logo  $\theta_j(\theta) = \Pi_1(\mathcal{F}_\epsilon^j(\theta, h_\epsilon(\theta)))$  se escreve como

$$\theta_j(\theta) = \theta + \frac{2\pi j m}{n} + \epsilon \theta_1^j(\theta) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (5.13)$$

Analogamente,  $g_\epsilon(\theta, \bar{\theta}) = g_0(\theta, \bar{\theta}) + \epsilon g_1(\theta, \bar{\theta}) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$  e substituindo 5.12 na expressão para  $\Gamma_\epsilon(\theta)$  temos

$$\begin{aligned} \cos g_\epsilon(\theta, \bar{\theta}) &= \langle \Gamma_\epsilon(\theta), \Gamma_\epsilon(\bar{\theta}) \rangle \\ &= \text{sen } \phi_\epsilon(\theta) \text{sen } \phi_\epsilon(\bar{\theta}) \cos \theta \cos \bar{\theta} + \text{sen } \phi_\epsilon(\theta) \text{sen } \phi_\epsilon(\bar{\theta}) \text{sen } \theta \text{sen } \bar{\theta} + \cos \phi_\epsilon(\theta) \cos \phi_\epsilon(\bar{\theta}) \\ &= \text{sen } \phi_\epsilon(\theta) \text{sen } \phi_\epsilon(\bar{\theta}) \cos(\theta - \bar{\theta}) + \cos \phi_\epsilon(\theta) \cos \phi_\epsilon(\bar{\theta}) \end{aligned} \quad (5.14)$$

De 5.12 obtemos:

$$\text{sen } \phi_\epsilon(\theta) \text{sen } \phi_\epsilon(\bar{\theta}) = \text{sen}^2 \phi_0 + \epsilon \text{sen } \phi_0 \cos \phi_0 (\phi_1(\theta) + \phi_1(\bar{\theta})) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (5.15)$$

e

$$\cos \phi_\epsilon(\theta) \cos \phi_\epsilon(\bar{\theta}) = \cos^2 \phi_0 - \epsilon \cos \phi_0 \text{sen } \phi_0 (\phi_1(\theta) + \phi_1(\bar{\theta})) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (5.16)$$

Analogamente ao caso plano, temos:

$$\theta_{j+1} - \theta_j = \frac{2\pi m}{n} + \epsilon \Theta^j + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

onde  $\Theta^j = \theta_1^{j+1}(\theta) - \theta^j(\theta)$ . E

$$\begin{aligned} \cos(\theta_{j+1} - \theta_j) &= \cos\left(\frac{2\pi m}{n} + \epsilon \Theta^j + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \\ &= \cos \frac{2\pi m}{n} + \epsilon \text{sen} \frac{2\pi m}{n} \Theta^j + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (5.17)$$

Substituindo 5.15, 5.16 e 5.17 em 5.14, após manipulações, obtemos:

$$\cos g_\epsilon(\theta_{j+1}, \theta_j) = \cos g_0 + \epsilon \left[ \text{sen} \frac{2\pi m}{n} \text{sen}^2 \phi_0 \Theta^j - \frac{\text{sen } 2\phi_0}{2} (\phi_1(\theta_{j+1}) + \phi_1(\theta_j)) \text{sen}^2 \frac{2\pi m}{n} \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (5.18)$$

onde

$$\cos g_0 = \text{sen}^2 \phi_0 \cos \frac{2\pi m}{n} + \cos^2 \phi_0$$

é a distância na esfera entre duas batidas consecutivas no círculo geodésico.

No que se segue, para simplificar a notação, faremos

$$\alpha := \cos g_0 + \epsilon \beta$$

com

$$\beta := \left[ \text{sen} \frac{2\pi m}{n} \text{sen}^2 \phi_0 \Theta^j - \frac{\text{sen } 2\phi_0}{2} (\phi_1(\theta_j) + \phi_1(\theta_{j-1})) \text{sen}^2 \frac{2\pi m}{n} \right]$$

Tomando o arccos em 5.18 e expandindo em  $\epsilon$ , temos:

$$\begin{aligned} g_\epsilon(\theta_{j+1}, \theta_j) &= \arccos(\alpha + \mathcal{O}(\epsilon^2)) \\ &= \arccos \alpha + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \arccos(\cos g_0 + \epsilon \beta) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (5.19)$$

Para a primeira parcela de 5.19 temos:

$$\arccos(\cos g_0 + \epsilon\beta) = g_0 + \epsilon\beta \arccos'(\cos g_0) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (5.20)$$

Substituindo 5.20 em 5.19 e essa em 5.18 obtemos:

$$g_\epsilon(\theta_{j+1}, \theta_j) = g_0 + \epsilon\beta \arccos'(\cos g_0) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (5.21)$$

Finalmente, substituindo 5.21 em 5.2 e simplificando

$$\begin{aligned} L_\epsilon(\theta) &= \sum_{j=0}^{n-1} g_\epsilon(\theta_{j+1}, \theta_j) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} (g_0 + \epsilon\beta \arccos'(\cos g_0) + \mathcal{O}(\epsilon^2)) \\ &= ng_0 + \epsilon \arccos'(\cos g_0) \sum_{j=0}^{n-1} \beta + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= ng_0 + \epsilon \arccos'(\cos g_0) \sum_{j=0}^{n-1} \left[ \text{sen} \frac{2\pi m}{n} \text{sen}^2 \phi_0 \Theta^j - \frac{\text{sen} 2\phi_0}{2} (\phi_1(\theta_j) + \phi_1(\theta_{j+1})) \text{sen}^2 \frac{\pi m}{n} \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= ng_0 - \frac{2\text{sen} 2\phi_0 \text{sen}^2 \frac{\pi m}{n}}{\text{sen} g_0} \epsilon \sum_{j=0}^{n-1} [\phi_1(\theta_j) + \phi_1(\theta_{j+1})] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= ng_0 - \frac{2\text{sen} 2\phi_0 \text{sen}^2 \frac{\pi m}{n}}{\text{sen} g_0} \epsilon \sum_{j=0}^{n-1} \phi_1(\theta_j) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned}$$

Assim 5.2 fica:

$$L_\epsilon(\theta) = ng_0 - \frac{2\text{sen} 2\phi_0 \text{sen}^2 \frac{\pi m}{n}}{\text{sen} g_0} \epsilon \sum_{j=0}^{n-1} \phi_1(\theta_j) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (5.22)$$

**Caso  $\mathbb{H}^2$ :**

Tomaremos a perturbação:

$$\Gamma_\epsilon(\theta) = (\text{senh } \rho_\epsilon(\theta) \cos \theta, \text{senh } \rho_\epsilon(\theta) \text{sen } \theta, \cosh \rho_\epsilon(\theta))$$

com

$$\rho_\epsilon(\theta) = \rho_0 + \epsilon\rho_1(\theta) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (5.23)$$

Logo

$$\Gamma_\epsilon(\theta) = \Gamma_0(\theta) + \epsilon(\text{senh } \rho_1(\theta) \cos \theta, \text{sen } \rho_1(\theta) \text{sen } \theta, \cosh \rho_1(\theta)) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

Temos então que  $\mathcal{F}_\epsilon(\theta, h_\epsilon(\theta)) = \mathcal{F}_0(\theta, h_0(\theta)) + \mathcal{O}(\epsilon)$  e

$$\Pi_1(\mathcal{F}_0(\theta, h_0(\theta))) = \theta + \frac{2\pi m}{n}$$

e logo  $\theta_j(\theta) = \Pi_1(\mathcal{F}_\epsilon^j(\theta, h_\epsilon(\theta)))$  se escreve como

$$\theta_j(\theta) = \theta + \frac{2\pi jm}{n} + \epsilon \theta_1^j(\theta) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (5.24)$$

Analogamente,  $g_\epsilon(\theta, \bar{\theta}) = g_0(\theta, \bar{\theta}) + \epsilon g_1(\theta, \bar{\theta}) + \mathcal{O}(\epsilon^2)$  e substituindo 5.23 na expressão para  $\Gamma_\epsilon(\theta)$  temos

$$\begin{aligned} \cosh g_\epsilon(\theta, \bar{\theta}) &= - \ll \Gamma_\epsilon(\theta), \Gamma_\epsilon(\bar{\theta}) \gg \\ &= -\sinh \rho_\epsilon(\theta) \sinh \rho_\epsilon(\bar{\theta}) \cos \theta \cos \bar{\theta} - \sinh \rho_\epsilon(\theta) \sinh \rho_\epsilon(\bar{\theta}) \sin \theta \sin \bar{\theta} + \cosh \rho_\epsilon(\theta) \cosh \rho_\epsilon(\bar{\theta}) \\ &= -\sinh \rho_\epsilon(\theta) \sinh \rho_\epsilon(\bar{\theta}) \cos(\theta - \bar{\theta}) + \cosh \rho_\epsilon(\theta) \cosh \rho_\epsilon(\bar{\theta}) \end{aligned} \quad (5.25)$$

De 5.23 obtemos:

$$\sinh \rho_\epsilon(\theta) \sinh \rho_\epsilon(\bar{\theta}) = \sinh^2 \rho_0 + \epsilon \sinh \rho_0 \cosh \rho_0 (\rho_1(\theta) + \rho_1(\bar{\theta})) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (5.26)$$

e

$$\cosh \rho_\epsilon(\theta) \cosh \rho_\epsilon(\bar{\theta}) = \cosh^2 \rho_0 - \epsilon \cosh \rho_0 \sinh \rho_0 (\rho_1(\theta) + \rho_1(\bar{\theta})) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (5.27)$$

Analogamente aos casos plano e esférico, temos:

$$\theta_{j+1} - \theta_j = \frac{2\pi m}{n} + \epsilon \Theta^j + \mathcal{O}(\epsilon^2)$$

onde  $\Theta^j = \theta_1^{j+1}(\theta) - \theta_1^j(\theta)$ . E

$$\begin{aligned} \cos(\theta_{j+1} - \theta_j) &= \cos\left(\frac{2\pi m}{n} + \epsilon \Theta^j + \mathcal{O}(\epsilon^2)\right) \\ &= \cos \frac{2\pi m}{n} + \epsilon \sin \frac{2\pi m}{n} \Theta^j + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (5.28)$$

Substituindo 5.26, 5.27 e 5.28 em 5.25, após manipulações, obtemos:

$$\cosh g_\epsilon(\theta_{j+1}, \theta_j) = \cosh g_0 + \epsilon \left[ -\sin \frac{2\pi m}{n} \sinh^2 \rho_0 \Theta^j - \frac{\sin 2\phi_0}{2} (\rho_1(\theta_{j+1}) + \rho_1(\theta_j)) \sin^2 \frac{2\pi m}{n} \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (5.29)$$

onde

$$\cosh g_0 = \cos^2 \rho_0 - \sinh^2 \rho_0 \cos \frac{2\pi m}{n}$$

é a distância na esfera entre duas batidas consecutivas no círculo geodésico.

No que se segue, para simplificar a notação, faremos

$$\alpha := \cosh g_0 + \epsilon \beta$$

com

$$\beta := \left[ -\sin \frac{2\pi m}{n} \sinh^2 \rho_0 \Theta^j - \frac{\sin 2\phi_0}{2} (\rho_1(\theta_j) + \rho_1(\theta_{j-1})) \sin^2 \frac{2\pi m}{n} \right]$$

Tomando o arccosh em 5.29 e expandindo em  $\epsilon$ , temos:

$$\begin{aligned} g_\epsilon(\theta_{j+1}, \theta_j) &= \operatorname{arccosh}(\alpha + \mathcal{O}(\epsilon^2)) \\ &= \operatorname{arccosh}\alpha + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= \operatorname{arccosh}(\cosh g_0 + \epsilon\beta) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned} \quad (5.30)$$

Para a primeira parcela de 5.30 temos:

$$\operatorname{arccosh}(\cosh g_0 + \epsilon\beta) = g_0 + \epsilon\beta \operatorname{arccosh}'(\cosh g_0) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (5.31)$$

Substituindo 5.31 em 5.30 e essa em 5.29 obtemos:

$$g_\epsilon(\theta_{j+1}, \theta_j) = g_0 + \epsilon\beta \operatorname{arccosh}'(\cosh g_0) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (5.32)$$

Finalmente, substituindo 5.32 em 5.2 e simplificando

$$\begin{aligned} L_\epsilon(\theta) &= \sum_{j=0}^{n-1} g_\epsilon(\theta_{j+1}, \theta_j) \\ &= \sum_{j=0}^{n-1} [g_0 + \epsilon \frac{\beta}{\sinh g_0} + \mathcal{O}(\epsilon^2)] \\ &= ng_0 + \epsilon \frac{1}{\sinh g_0} \sum_{j=0}^{n-1} \beta + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= ng_0 + \epsilon \frac{1}{\sinh g_0} \sum_{j=0}^{n-1} \left[ -\operatorname{sen} \frac{2\pi m}{n} \operatorname{senh}^2 \phi_0 \Theta^j - \operatorname{senh} 2\rho_0 (\rho_1(\theta_{j+1}) + \rho_1(\theta_j)) \operatorname{sen}^2 \frac{2\pi m}{n} \right] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= ng_0 + \frac{\operatorname{senh} 2\rho_0 \operatorname{sen}^2 \frac{2\pi m}{n}}{\sinh g_0} \epsilon \sum_{j=0}^{n-1} [\rho_1(\theta_j) + \rho_1(\theta_{j+1})] + \mathcal{O}(\epsilon^2) \\ &= ng_0 + \frac{2\operatorname{senh} 2\rho_0 \operatorname{sen}^2 \frac{2\pi m}{n}}{\sinh g_0} \epsilon \sum_{j=0}^{n-1} \rho_1(\theta_j) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \end{aligned}$$

Assim 5.2 fica:

$$L_\epsilon(\theta) = ng_0 + \frac{2\operatorname{senh} 2\rho_0 \operatorname{sen}^2 \frac{2\pi m}{n}}{\sinh g_0} \epsilon \sum_{j=0}^{n-1} \rho_1(\theta_j) + \mathcal{O}(\epsilon^2) \quad (5.33)$$

□

É uma consequência desse resultado que:

**Corolário 9.** *Se o termo em  $\epsilon$  na perturbação 5.1 for dado, em série de Fourier, por  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j e^{ij\theta}$  então*

$$L_1(\theta) = \begin{cases} \frac{4r_0 \operatorname{sen}^2 \frac{2\pi m}{n}}{g_0} \sum_{j \in n\mathbb{Z}} c_j e^{ij\theta} & em \quad \mathbb{E}^2 \\ -\frac{2\operatorname{sen} 2\phi_0 \operatorname{sen}^2 \frac{2\pi m}{n}}{\sinh g_0} \sum_{j \in n\mathbb{Z}} c_j e^{ij\theta} & em \quad \mathbb{S}_+^2 \\ \frac{2\operatorname{senh} 2\rho_0 \operatorname{sen}^2 \frac{2\pi m}{n}}{\sinh g_0} \sum_{j \in n\mathbb{Z}} c_j e^{ij\theta} & em \quad \mathbb{H}^2 \end{cases}$$

Resumindo o exposto nessa seção temos o seguinte teorema:

**Teorema 5.** *Seja  $\Gamma_0(\theta)$  um círculo geodésico em  $\mathbb{E}^2$ ,  $\mathbb{S}_+^2$  e  $\mathbb{H}^2$  de raio  $r_0$ ,  $0 < \phi_0 < \frac{\pi}{2}$  e  $\rho_0$  respectivamente parametrizado coordenadas polares geodésicas. Seja  $\Gamma_\epsilon(\theta)$ , para um dado  $\epsilon$  muito pequeno, perturbação radial do círculo geodésico dada por*

$$\begin{cases} r_\epsilon(\theta) &= r_0 + \epsilon r_1(\theta) + O(\epsilon^2) \\ \phi_\epsilon(\theta) &= \phi_0 + \epsilon \phi_1(\theta) + O(\epsilon^2) \\ \rho_\epsilon(\theta) &= \rho_0 + \epsilon \rho_1(\theta) + O(\epsilon^2) \end{cases}$$

*Se o termo em  $\epsilon$  nessa perturbação for dado, em série de Fourier, por  $\sum_{j \in \mathbb{Z}} c_j e^{ij\theta}$  e para  $n \geq 2$  existe  $j \in n\mathbb{Z}$  tal que  $c_j \neq 0$  então o círculo horizontal  $[0, 2\pi) \times \psi^{\frac{m}{n}}$  não é invariante pelo bilhar no círculo geodésico perturbado.*

## Capítulo 6

# Medida de Hausdorff do conjunto da órbitas de período três

O conjunto  $P_n$ , de todas órbitas periódicas de período  $n$  da aplicação do bilhar em  $\mathbb{E}^2$ ,  $\mathbb{S}_+^2$  e  $\mathbb{H}^2$  tem sido objeto de muitas questões. Uma dessas questões versa sobre o quão significativo é esse conjunto do ponto de vista da medida de Lebesgue, ou seja, teria esse conjunto medida de Lebesgue nula? Para trabalharmos essa questão podemos considerar cada período separadamente.

Se  $n = 2$  temos nos planos Euclideano e hiperbólico, devido ao princípio de Maupertuis, que o conjunto das órbitas de período 2, por estar contido na reta  $\psi = \frac{\pi}{2}$  possui medida de Lebesgue nula independente da convexidade do bordo do bilhar. No caso esférico, entretanto, podemos ter medida de Lebesgue de  $P_2$  positiva. De fato como visto no capítulo 2 se o bordo do bilhar for o equador existem apenas órbitas de período 2. Mas como o equador não é geodesicamente estritamente convexo esse fenômeno na esfera não contradiz o seguinte resultado:

*O conjunto  $P_2$  das órbitas de período 2 A aplicação de bilhar em uma oval numa superfície de curvatura constante  $S$  possui medida de Lebesgue nula.*

Em (24), Richlik, mostrou que o conjunto das órbitas de período três possui também medida de Lebesgue nula, utilizando-se de informações adquiridas por algumas simulações numéricas. Em (34) esse mesmo resultado foi demonstrado por Wojtkowski para bilhares no plano Euclideano utilizando dessa vez uma abordagem via campos de Jacobi. Utilizando a abordagem via campos de Jacobi introduzida por Wojtkowisk, (5), Blumen, Kim, Nance e Zharnitsky mostram que  $P_3$  também possui medida de Lebesgue nula para bilhares estritamente geodesicamente convexos. Além disso, eles conseguiram construir um bilhar apenas geodesicamente convexo onde  $P_3$  tem interior não vazio, mostrando com isso que a condição de convexidade geodésica estrita é necessária.

Outra questão possível, abordada em (32) para bilhares planos por Zharnitsky e Merenkov,



é qual a "forma" possível para esse conjunto? No plano Euclideano, eles demonstraram que esse conjunto tem medida de Hausdorff no máximo 1 e se esse valor extremo for atingido o conjunto de órbitas de período 3 possui reta tangente em quase todo ponto no sentido da medida de Hausdorff. Essa conclusão é interessante e tem similaridade com o seguinte resultado:

*Uma curva rotacional invariante pela aplicação do bilhar é gráfico de uma função Lipschitz e assim possui reta tangente em quase todo ponto no sentido de Lebesgue.*

Nosso trabalho aqui é estender os resultado Zharnitsky e Merenkov para bilhares em  $\mathbb{S}_+^2$  e  $\mathbb{H}^2$ . Isso será feito utilizando os resultados de [(5)].

Seja  $\Gamma$  uma curva geodesicamente convexa em  $\mathcal{M}$  e  $\mathcal{F}$  a aplicação do bilhar em  $\Gamma$ . Sabemos que pelo princípio de Fermat que o perímetro das órbitas de período três é constante.

**Lema 23.** [(5)] *Seja  $\mathcal{F}$  a aplicação de bilhar em uma curva suave e geodesicamente estritamente convexa de  $\mathbb{E}$ ,  $\mathbb{S}_+^2$  ou  $\mathbb{H}^2$ . Se o conjunto das órbitas de período 3 tem interior não vazio então valem:*

$$\text{sen } {}^3\psi = \begin{cases} \kappa(s) \frac{L(s,\psi)}{2} & \text{em } \mathbb{E}^2 \\ \kappa(s) \tan\left(\frac{L(s,\psi)}{2}\right) & \text{em } \mathbb{S}_+^2 \\ \kappa(s) \tanh\left(\frac{L(s,\psi)}{2}\right) & \text{em } \mathbb{H}^2 \end{cases}$$

onde  $\kappa(s)$  é a curvatura geodésica de  $\Gamma$  e  $W(s,\psi)$  é o perímetro da poligonal geodésica que representa a órbita de período três.

Usando a primeira linha desse lema, demonstrada por Wojtkowski [(34)], Merenkov e Zharnitsky de mostraram os seguintes resultados:

**Teorema 6.** *Seja  $\Gamma$  um oval pelo menos  $C^3$  no plano euclideano. A dimensão de Hausdorff do conjunto de órbitas de período três  $P^3$  da aplicação do bilhar, é no máximo um. Isto é*

$$\mathcal{H}^s(P^3) = 0 \text{ se } s > 1,$$

onde  $\mathcal{H}^s$  denota a medida de Hausdorff de dimensão  $s$ .

**Teorema 7.** *Se a oval  $\Gamma$  é pelos menos  $C^3$  e  $HD(P_3) = 1$  então o conjunto  $P_3$  tem reta tangente fraca em  $\mathcal{H}^1$ -q. t. p.*

Nosso objetivo aqui é estender esse dois resultados para bilhares na semi-esfera e no plano hiperbólico utilizando as duas últimas linhas do lema [(5)].

## 6.1 Um bit de teoria da medida de Hausdorff

Se  $U \subset \mathbb{R}^2$  é um conjunto não vazio definimos o diâmetro de  $U$  por

$$|U| = \sup\{\|p - q\| : p, q \in U\}$$

onde  $\|\cdot\|$  é a distância Euclideana.

Se  $E \subset \bigcup_i U_i$  e  $0 < |U_i| \leq \delta$  para cada índice  $i$  num conjunto enumerável, dizemos  $\{U_i\}$  é uma  $\delta$ -cobertura de  $E$ .

**Definição 23.** *Seja  $E$  subconjunto de  $\mathbb{R}^2$  e  $s$  um número não negativo. Para  $\delta > 0$  definimos:*

$$\mathcal{H}_\delta^s(E) = \inf \left\{ \sum_i |U_i|^s \right\}$$

onde o ínfimo é tomado sobre todas as  $\delta$ -coberturas enumeráveis  $\{U_i\}$  de  $E$ .

É fácil ver que  $\mathcal{H}_\delta^s$  é não decrescente em  $\delta$  e assim definimos a medida de Hausdorff de dimensão  $s$  como

**Definição 24.**

$$\mathcal{H}^s(E) := \lim_{\delta \rightarrow 0^+} \mathcal{H}_\delta^s(E) = \sup_{\delta > 0} \mathcal{H}_\delta^s(E)$$

Um conjunto é dito  $\mathcal{H}^s$ -mensurável se é mensurável com relação à medida de Hausdorff. Em geral o limite na definição acima sempre existe e pode assumir inclusive  $+\infty$ . Além de todas as propriedades de uma medida, destacamos as seguintes propriedades de  $\mathcal{H}^s$ :

**Lema 24.** 1. *Se  $A \subset B$  então  $\mathcal{H}^s(A) \leq \mathcal{H}^s(B)$ ;*

2.  *$\mathcal{H}^s(A \cup B) \leq \mathcal{H}^s(A) + \mathcal{H}^s(B)$ ;*

3. *Se  $E, F$  são subconjuntos de  $\mathbb{R}^2$  com  $\text{dist}(E, F) > 0$  então*

$$\mathcal{H}^s(E \cup F) = \mathcal{H}^s(E) + \mathcal{H}^s(F)$$

4. *Todo Boreleano é  $\mathcal{H}^s$ -mensuráveis;*

5.  *$\mathcal{H}^s(E)$  é não crescente em  $s$ ;*

6. *Se  $0 < \mathcal{H}^t(E) < \infty$  para algum  $t > 0$ , então  $\mathcal{H}^s(E) = \infty$  para todo  $s$  com  $0 \leq s < t$ . Se  $0 < \mathcal{H}^t(E) < \infty$  para algum  $t \geq 0$ , então  $\mathcal{H}^u(E) = 0$  para todo  $u > t$ .*

O item 6 do lema acima afirma que para cada conjunto mensurável  $E$  pode existir um único número  $HD(E)$  com  $0 \leq HD(E) \leq \infty$  tal que

$$\mathcal{H}^s(E) = \begin{cases} \infty & \text{se } 0 \leq s \leq HD(E) \\ 0 & \text{se } HD(E) \leq s < \infty \end{cases}$$

Esse número  $HD(E)$  é denominado *dimensão de Hausdorff* de  $E$ .

O seguinte lema nos dá algumas propriedades da dimensão de Hausdorff.

**Lema 25.** 1.  *$HD(E)$  pode ser um valor não inteiros;*

2. Se  $E_1$  e  $E_2$  são dois conjuntos mensuráveis e  $E_1 \subset E_2$  em  $HD(E_1) \leq HD(E_2)$ .

3. Se  $E \subset \mathbb{R}^2$ ,  $\mathcal{H}^s$ -mensurável então  $0 \leq HD(E) \leq 2$ ;

Em geral, calcular dimensão de Hausdorff de um conjunto ou até estabelecer cotas para seu valor não é uma tarefa fácil. O seguinte lema é útil no cálculo da dimensão de Hausdorff de alguns conjuntos.

**Lema 26** ((10), pag. 13). *Seja  $E$  um boreleano de  $\mathbb{R}^2$  com medida de Lebesgue  $\mathcal{L}^n(E)$  então*

$$\mathcal{H}^n(E) = \frac{1}{c_n} \mathcal{L}^n(E) \quad \text{onde } n = 1, 2$$

onde  $c_1 = 1$  e  $c_2 = \frac{\pi}{4}$

Desse lema podemos deduzir que pedaços compactos de gráficos de funções da reta na reta possuem dimensão de Hausdorff um, uma vez que  $\mathcal{H}^1$  desses conjuntos é finita e não nula.

Na seção 3.2 mostramos que a aplicação do bilhar no círculo geodésico na semiesfera e no plano hiperbólico possui uma reta invariante de órbitas de período 3, assim do lema acima temos  $\mathcal{H}^2(P_3) = 0$ ,  $HD(E) = 1$ . No caso do bilhar no equador esférico temos que  $\mathcal{H}^2(E) = \pi(2\pi)^{\frac{4}{\pi}} = 8\pi$  e assim  $HD(E) = 2$ .

Um conjunto mensurável  $E$  com  $\mathcal{H}^s(E)$  finita e não nula será denominado um conjunto *s-dimensional*.

## 6.2 Conjuntos s-dimensionais $1 < s \leq 2$

Na seção precedente vimos que se  $E$  é um boreleano de  $\mathbb{R}^2$  então a dimensão de Hausdorff de  $E$ ,  $HD(E)$ , vale no máximo dois. Nesse seção focalizaremos nos conjuntos *s*-dimensionais com  $1 < s \leq 2$ , buscando estabelecer condições necessárias para a caracterização de um conjunto dessa forma.

Essa foi uma das idéias de Zharnitsky e Merenkov que possibilitou obter a demonstração do teorema 6 para o caso de bilhares no plano Euclideano. Esta seção está baseada tanto em [(10)] quanto em [(32)] e utiliza os conceitos de densidade de conjuntos, densidade angular e reta tangente fraca a um conjunto, esse último introduzido por Besicovitch e muito útil no estudo da geometria fractal.

**Definição 25.** *Seja  $E$  um conjunto s-dimensional. A densidade superior  $D^s(E, p)$  num ponto  $p \in \mathbb{R}^2$  é definida por:*

$$D^s(E, p) := \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(E \cap B(p, r))}{(2r)^s}$$

O sobrescrito  $s$  em  $D^s(E, p)$  é necessário para enfatizar a dependência com a  $\mathcal{H}^s$  medida de Hausdorff.

**Definição 26.** Se  $E$  é um conjunto  $\mathcal{H}^s$ -mensurável em  $\mathbb{R}^2$  dizemos que  $F \subset E$  possui medida total se  $\mathcal{H}^s(E \setminus F) = 0$ . Uma propriedade é dita válida para quase todos os pontos ou  $\mathcal{H}^s$ -q.t.p. em  $E$  se existe um subconjunto de medida total  $F$  em  $E$  tal que a propriedade valha para todos os pontos de  $F$ .

**Definição 27** (Setor Circular). Dados  $r > 0$ ,  $\eta \in \mathbb{R}$  e  $\gamma \in \mathbb{S}^1$  denotamos o setor circular com centro  $p$  abertura  $\eta$ , raio central  $\gamma$  e raio  $r$  como

$$W_p(\gamma; r, \eta) = \{p + te^{i\theta} : 0 \leq t \leq r, \gamma - \eta \leq \theta \leq \gamma + \eta\}$$

Estendendo o conceito de densidade para o caso de setor angular temos:

**Definição 28.** Para  $\gamma \in \mathbb{R}$  e  $\eta > 0$ , a densidade angular superior de  $E$  em  $p$  é

$$D^s(E, p, \gamma, \eta) := \limsup_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(E \cap W_p(\gamma; r, \eta))}{(2r)^s}$$

A seguir apresentamos o conceito de tangente fraca a um conjunto  $\mathcal{H}^s$ -mensurável, devido a Besicovitch (1928).

**Definição 29.** Dizemos que um conjunto  $E \subset \mathbb{R}^2$ ,  $s$ -dimensional tem uma tangente fraca em  $p$  na direção  $\gamma \in \mathbb{R}$  se  $D^s(E, p) > 0$  e

$$\lim_{r \rightarrow 0} \frac{\mathcal{H}^s(E \cap (B(p, r) \setminus (W_p(\gamma; r, \eta) \cup W_p(\gamma + \pi; r, \eta))))}{r^s} = 0$$

para todo  $\eta > 0$

Se  $E$  é o gráfico de uma função diferenciável de  $\mathbb{R}$  em  $\mathbb{R}$  é fácil ver que  $E$  possui tangente fraca em todo ponto.

**Lema 27.** Se  $E$  é um conjunto  $s$ -dimensional então:

- $\frac{1}{2^s} \leq D^s(E, p) \leq 1$  para  $\mathcal{H}^s$ -q.t.p em  $E$ .
- Se  $1 < s < 2$  então para  $\mathcal{H}^s$ -q.t.p em  $E$  temos  $D^s(E, p, \gamma, \eta) \leq 4 \cdot 10^s \eta^{s-1}$  para todo  $\gamma \in \mathbb{R}$  e  $\eta \leq \frac{\pi}{2}$ .
- Se  $1 < s < 2$  então  $\mathcal{H}^s$ -q.t.p em  $E$  não possui reta tangente.
- Se  $1 < s < 2$  então para  $\mathcal{H}^s$ -q.t.p em  $E$  não possui reta tangente e além disso existe  $\eta > 0$  com

$$0 < \limsup_{r \rightarrow \infty} \frac{\mathcal{H}^s(E \cap (B(p, r) \setminus (W_p(\gamma; r, \eta) \cup W_p(\gamma + \pi; r, \eta))))}{r^s} \leq 2^s$$

para todo  $\gamma \in \mathbb{S}^1$  também para  $\mathcal{H}^s$  quase todo ponto em  $E$ .

A demonstração dos dois primeiros itens pode ser encontrada em [(10), pag. 25e 58]. Já para os dois últimos a prova pode ser vista em [(32), Corolário 3.5 e 3.6].

Por esse lema temos que todo conjunto  $s$ -dimensional com  $1 < s \leq 2$  possui a propriedade de não possuir tangente fraca  $\mathcal{H}^s$ -q.t.p.

Resumindo, para fins futuros, um conjunto com dimensão de Hausdorff,  $s$ , entre um e dois possui reta tangente em no máximo um conjunto de medida  $\mathcal{H}^s$  nula.

## 6.3 Resultados auxiliares

Os seguintes resultados serão úteis na demonstração dos principais resultados desse capítulo.

**Lema 28** ((32),Lema 2.1). *Seja  $E$  um subconjunto do disco com centro  $p$  e raio  $r$ . Seja  $F$  um subconjunto fechado do círculo tal que  $p$  é um ponto de acumulação para  $E \cap C_F$ , onde  $C_F$  é o cone sobre  $F$ , isto é,*

$$C_F = \{q \in B(p, r) : q = p + te^{i\theta}, re^{i\theta} \in F, t \in [0, r]\}$$

*Então existe um raio  $R$ , saindo de  $p$  e passando por uma ponto de  $\mathcal{F}$ , e uma sequência  $\{p_k\}$  com  $p_k \in E \setminus p$ ,  $\lim p_k = p$ , tal que  $p_k$  é assintótica a  $R$ , i.e.,*

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\text{dist}(p_k, R)}{|p_k - p|} = 0$$

**Lema 29** ((32),Lema 2.2). *Seja  $U \subseteq \mathbb{R}^2$  e  $F : U \rightarrow \mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^2$   $C^1$ . Para qualquer  $p \in U$  seja  $p_k$  uma sequência convergindo para  $p$  e assintótica a um raio  $R$  com vetor diretor  $\tilde{v}$ . Então:*

$$\frac{\partial F}{\partial \tilde{v}}(p) = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{F(p_k) - F(p)}{|p_k - p|}$$

**Prova:**

Observação: Na prova o teorema acima é usado que  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  é pelo menos  $C^1$ .

**Teorema 8** ((32),Teorema 3.7). *Seja  $E \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto  $s$ -dimensional com  $1 < s < 2$ . Então para  $\mathcal{H}^s$ -q.t.p  $p$  em  $E$  existem dois raios  $R_1$  e  $R_2$ , emanando de  $p$  e não contidos na mesma reta, e duas sequências  $p_k$  e  $q_k$  em  $E \setminus \{p\}$  convergindo para  $p$  assintóticas a  $R_1$  e  $R_2$  respectivamente.*

**Lema 30.** *Seja  $E \subseteq \mathbb{R}^2$ , fechado com  $\mathcal{H}^s(E) = \infty$ . Então para todo  $c > 0$  existe um compacto  $F \subseteq E$  tal que  $\mathcal{H}^s(F) = c$ . Em particular,  $F$  tem dimensão de Hausdorff  $s$ .*

Seja  $F$  um difeomorfismo  $C^1$  do plano. Se  $p$  é um ponto fixo de  $F$  temos que ou  $p$  é hiperbólico, ou  $p$  é elíptico ou  $p$  é parabólico. Tal classificação dependendo do traço da matriz Jacobiana de  $F$ . O próximo lema nos diz que existe um subconjunto de pontos fixos parabólicos  $s$ -dimensional para qualquer  $1 < s < 2$ .

**Teorema 9.** [(32), Teorema 3.8]

Seja  $U \subset \mathbb{R}^2$  aberto, e  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação  $C^1$ . Seja  $E \subset U$  o subconjunto fechado que consiste de todos os pontos fixos de  $F$ . Assumimos que a dimensão de Hausdorff de  $E$  é  $s$ ,  $1 < s \leq 2$ . Então para todo,  $s'$ ,  $1 < s' < s$ , existe um subconjunto  $E'$  de  $E$   $s'$ -dimensional tal que  $D_p F = \text{id}$  para todo  $p \in E'$ .

**Teorema 10.** [(32), Teorema 3.9]

Seja  $U \subset \mathbb{R}^2$  aberto, e  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$  funções  $C^1$ . Seja  $E \subset U$  um subconjunto de dimensão de Hausdorff  $s$ ,  $1 < s < 2$  e  $f = g$  em  $E$ . Então existe um subconjunto de medida de Hausdorff total  $E' \subset E$  com a seguinte propriedade: Para cada  $p \in E'$  existem dois vetores unitários linearmente independentes  $\mathbf{v}_2$  e  $\mathbf{v}_1$ , tal que  $f_{\mathbf{v}_j}(p) = g_{\mathbf{v}_j}(p)$ ,  $j = 1, 2$ .

O seguinte lemma é uma versão modificada do lema 23 e está demonstrado em [(5)].

**Lema 31.** Sejam  $\mathcal{F}$  a aplicação de bilhar em uma oval de  $\mathcal{M}$  e  $(s, \psi)$  um ponto de  $P_3$  com  $D_{(s, \psi)} \mathcal{F} = \text{Id}$  então:

$$\text{sen } {}^3\psi = \begin{cases} \kappa(s) \frac{L(s, \psi)}{2} & \text{em } \mathbb{E}^2 \\ \kappa(s) \tan\left(\frac{L(s, \psi)}{2}\right) & \text{em } \mathbb{S}_+^2 \\ \kappa(s) \tanh\left(\frac{L(s, \psi)}{2}\right) & \text{em } \mathbb{H}^2 \end{cases}$$

Originalmente esse resultado tem como hipótese que o conjunto  $P_3$  tenha interior não vazio. Essa hipótese no entanto, pode ser substituída pela hipótese  $D_{(s, \psi)} \mathcal{F} = \text{Id}$  um vez que ela é o suficiente para demonstra-lo.

## 6.4 Prova do teorema 6

Nessa seção utilizaremos os resultados da seção anterior para deduzir a prova do teorema 6 seguindo a mesma idéia da prova do caso Euclidiano contida em [(32)].

Observemos entretanto que nossa prova necessita da convexidade geodésica do bordo do bilhar. Esse fato é necessário uma vez que, sem ele, aplicação do bilhar possui derivada descontínua nos pontos de tangência e dessa forma o difeomorfismo não é pelo menos  $C^2$  como se necessita na prova de [(32)].

Assim pelo teorema 1 temos que a aplicação do Bilhar é um difeomorfismo pelo menos  $C^2$ . Procedamos, com isso, à prova do teorema. Relembremos primeiramente seu enunciado:

**Teorema 11.** Seja  $\Gamma$  uma oval pelo menos  $C^3$  em  $S$ . A dimensão de Hausdorff do conjunto de órbitas de período três  $P_3$  da aplicação do bilhar, é no máximo, um. Isto é

$$\mathcal{H}^s(P_3) = 0 \text{ se } s > 1,$$

onde  $\mathcal{H}^s$  denota a medida de Hausdorff de dimensão  $s$ .

Suponhamos que  $1 < HD(P_3) \leq 2$ . Como  $P_3$  é fechado temos pelo teorema 9 que existe um subconjunto de  $E \subset P_3$   $s$ -dimensional para todo  $1 < s < 2$  tal que  $D_{(s,\psi)\mathcal{F}^3} = Id$  para todo  $(s, \psi)$  em  $E$ . Pelo lema 31 as identidades

$$\text{sen } {}^3\psi = \begin{cases} \kappa(s) \frac{L(s,\psi)}{2} & \text{em } \mathbb{E}^2 \\ \kappa(s) \tan\left(\frac{L(s,\psi)}{2}\right) & \text{em } \mathbb{S}_+^2 \\ \kappa(s) \tanh\left(\frac{L(s,\psi)}{2}\right) & \text{em } \mathbb{H}^2 \end{cases}$$

valem nesse conjunto. Denotando por  $f(s, \psi)$  e  $g(s, \psi)$  respectivamente o lado esquerdo e direito das equações acima temos que  $f$  e  $g$  são  $C^1$ . Assim aplicando o teorema 10 ao conjunto  $E$  temos que existe um subconjunto  $E'$  de  $E$  com medida  $\mathcal{H}^s$  total tal existem dois vetores linearmente independentes com  $f_{\mathbf{v}_j}(p) = g_{\mathbf{v}_j}(p)$   $j = 1, 2$ . Como  $f$  e  $g$  são  $C^1$  temos as derivadas parciais com relação a  $\psi$  também devem ser iguais. Mas isso implica que  $\psi$  deve assumir os valores  $0$ ,  $\pi/2$  ou  $\pi$ , uma vez que  $f$  é constante em  $\psi$  (princípio de Maupertui). Mas para esses valores de  $\psi$  não existe órbita de período 3.

## 6.5 Prova do teorema 7

Nessa seção apresentamos a prova do teorema 7 que nos dá uma condição suficiente para que  $P_3$  possua reta tangente fraca em quase todo ponto. Para esse fim vamos utilizar os seguintes resultados cuja demonstração pode ser encontrada em [(32)]

**Teorema 12.** *Sejam  $U \subset \mathbb{R}^2$  um conjunto aberto,  $F : U \rightarrow \mathbb{R}^2$  uma aplicação  $C^1$  e  $E \subset U$  o subconjunto de todos pontos fixos de  $F$ . Então  $D_p F = id$  em todos pontos  $p \in E$  nos quais  $E$  não possua reta tangente.*

**Teorema 13.** *Seja  $U \subset \mathbb{R}^2$  aberto, e  $f, g : U \rightarrow \mathbb{R}$  funções  $C^1$ . Então para todo  $p \in E$  no qual  $E$  não possua reta tangente, existem dois vetores unitários linearmente independentes  $\mathbf{v}_2$  e  $\mathbf{v}_1$ , tal que  $f_{\mathbf{v}_j}(p) = g_{\mathbf{v}_j}(p)$ ,  $j = 1, 2$ .*

**Teorema 14.** *Se a oval  $\Gamma$  é pelos menos  $C^3$  e  $HD(P_3) = 1$  então o conjunto  $P_3$  tem reta tangente fraca em  $\mathcal{H}^1$ -q. t. p.*

Seja  $E'$  o subconjunto de  $E$  dado pelos pontos onde  $E$  não possui reta tangente. Se  $\mathcal{H}^1(E') = 0$  não há nada a ser feito. Suponhamos então que  $0 < \mathcal{H}^1(E')$ . Pelo teorema 12 temos que  $D_{(s,\psi)\mathcal{F}^3} = id$  em  $E'$ . Da mesma forma que na prova do teorema 6 utilizamos o lema 31 seguido do teorema 13 para obter o absurdo necessário. Assim  $\mathcal{H}^1(E') = 0$ .

---



# Referências Bibliográficas

- [1] G.D.Birkhoff: Dynamical Systems. Providence, RI: A. M. S. Colloquium Publications 1966 (Original ed. 1927).
- [2] Araújo, P. V.; Geometria diferencial, SBM, 1998.
- [3] Bialy. M., Hopf Rigidity for convex billiards on the hemisphere and hyperbolic plane. Discrete and Continuous Dynamical Systems, 2013, 33, 3903 - 3913.
- [4] Brickell F., Hsiung C.C.: The total absolute curvature of closed curves in Riemannian manifold. J. Differential Geometry, 1974, 9, 177-193.
- [5] Blumen, V., KIM, K. Y., Nance, J., Zarnitsky, V.; Three-period orbits in billiards on the surfaces of constant curvature, International Mathematical Research Notices, 2012, 21, 5014-5024.
- [6] Dias Carneiro, M.J., Kamphorst, S.O., Pinto de Carvalho, S.: Elliptic Islands in Strictly Convex Billiards, Erg.Th.Dyn.Sys., 2003, 3, 799-812.
- [7] Dias Carneiro, M.J., Kamphorst, S.O., Pinto de Carvalho, S.: Generic Oval Billiards, arXiv:0705.0948 7 May 2007.
- [8] Do Carmo, M. P.; Geometria Riemanniana, SBM, 2005.
- [9] Do Carmo, M. P.; Geometria diferencial de curvas e superfícies, SBM, 2005.
- [10] Falconer, K.J.; The geometry of fractal sets, Cambridge University Press, Cambridge, 1986.
- [11] Gutkin B., Smilansky U., Gutkin E.: Hyperbolic Billiards on surfaces of constant curvature. Comm. Math. Phys.,1999, 208, 65-90.
- [12] Hasselblat B.; Katok A. Introduction to the Modern Theory of Dynamical Systems. Cambridge University Press, 1995.
- [13] Kozlov, V.V., Treschev, D.V.: Billiards A Genetic Introduction to the Dynamics of Systems with Impacts. American Mathematical Society, Providence Rhode Island, 89, 1985.

- [14] Little, J.A., Non degenerate homotopies of curves on the unit 2-sphere, *Journal of Differential Geometry* 4 (1970), 339-348. (1970)
- [15] Mackay, R.; Meiss, J.; Linear stability of periodic orbits in Lagrangian systems, *Phys. Lett. A*, 1983, 98, 92-94.
- [16] Markarian, R; Chernov, N.; *Chaotic Billiards*, Mathematical Surveys and Monographs, American Mathematical Society, 2006.
- [17] McRae, A.S.; The Gauss Bonnet theorem of Cayley-Klein geometries of dimension two, *New York J. Math.*, 2006, 12, 143-155.
- [18] Neill, B.O.; *Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity*, Academic Press, London, 1983.
- [19] Pinto de Carvalho S., Ramírez-Ros, R. : Nonpersistence of Resonant Caustics in Perturbed Elliptic Billiards. *Ergodic Theory & Dynamical Systems*, 2013, 33, 1876-1890.
- [20] Pinto de Carvalho, S., Ramírez-ros, R.; Billiards with a given number of  $(k,n)$ -orbits. *Chaos* (Woodbury, N.Y.), 2012, 22, 026109.
- [21] Ragazzo, Clodoaldo G.; Carneiro, Mário Jorge D.; Zanata, Salvador A.; *Introdução a dinâmica de aplicações do tipo twist*, Publicações matemáticas, 2005.
- [22] Ramírez-Ros, R., Break-up of resonant invariant curves in billiards and dual billiards associated to perturbed circular tables, *Physica D* 214 (2006) 78-87.
- [23] Reynolds, Willian F., Hyperbolic geometry on a hyperboloid. *Mathematical Association of America*, 1993, 100, 442-455.
- [24] Rychlik, M. R.; Periodic points of the Billiard ball map in convex domain, *J. Diff. Geom.*, 1989, 30.
- [25] Sá Earp, Ricardo; Toubiana, Eric: *Introduction à la géométrie hiperbolique et aux surfaces de Riemann.*, Cassini, 2009
- [26] Santalo, L. A.; Notes on convex spherical curves, *Math Notae*, 1944, 4, 11-40.
- [27] Santalo, L. A.; Notes on convex curves on the hyperbolic plane, *Math Notae*, 1944, 4, 411-412.
- [28] Tabachnikov, S.; *Billiards*, S M F Panorame at Syntheses 1, 1995.
- [29] Toponogov, V. A.; *Differential geometry of curves and surfaces, A concise guide*, Springer, 2006.

- [30] Ugurlu, H.H.; Kocayigit, H.; The Frenet and Darboux Instantaneous Rotain Vectors of Curves on Time-Like Surfaces, *Mathematical and Computational Applications*, 1996, 1, 133-141.
- [31] Veselov, A.P.:Confocal surfaces and integrable billiards on the sphere and in the Lobachevsky space. *Journal Geo. Phys.*, 1990, 7, 81-107.
- [32] Zarnitsky, V.; Hausdorff dimension of three-period orbits in Birkhoff billiards, *Nonlinearity*, 2012, 25.
- [33] Wojtkowski, M: Invariantes Families of Cones and Lyapunov Exponents. *Ergodic Th. and Dynam. Sys.*, 1985, 5, 145-161.
- [34] Wojtkovisk, M.; Two aplications of Jacobi fields to the Billiard ball problem, *J. Diff. Geom*, 1991, 34.
- [35] <http://cs.unm.edu/~joel/NonEuclid/>